

MAÍSA MILANEZ ÁVILA DIAS MACIEL

Modelagem de Fratura em Materiais
Compósitos por Métodos de Elementos Finitos

Guaratinguetá - SP

2016

Maísa Milanez Ávila Dias Maciel

Modelagem de Fratura em Materiais Compósitos por Métodos de Elementos Finitos

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em **Engenharia de Materiais** da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em **Engenharia de Materiais**.

Orientador (a): Maria Odila Hilário Cioffi

Guaratinguetá - SP
2016

M152m	Maciel, Maisa Milanez Avila Dias Modelagem de fratura em materiais compósitos por métodos de elementos finitos / Maisa Milanez Avila Dias Maciel – Guaratinguetá, 2016. 61 f. : il. Bibliografia: f. 59-61 Trabalho de Graduação em Engenharia de Materiais – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2016. Orientadora: Prof^a Dr^a Maria Odila Hilário Cioffi 1. Mecânica da fratura 2. Método dos elementos finitos 3. Materiais compostos I. Título CDU 620.172.24
-------	--

unesp **UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

Maísa Milanez Ávila Dias Maciel

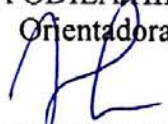
ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO
PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE
"GRADUADO EM ENGENHARIA DE MATERIAIS"

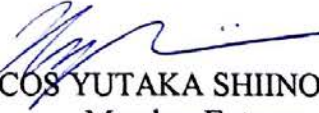
APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE GRADUAÇÃO
EM NOME DO CURSO


Prof. Dr. Miguel Angel Romerez Gil
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. MARIA ODILA HILÁRIO CIOFFI
Orientadora/UNESP-FEG


Prof. Dr. HERMAN JACOBUS CORNELIS VOORWALD
UNESP-FEG


Prof. Dr. MARCOS YUTAKA SHIINO
Membro Externo

Novembro 2016

DADOS CURRICULARES

Maísa Milanez Ávila Dias Maciel

NASCIMENTO 25.11.1992 – Rio de Janeiro / RJ

FILIAÇÃO Carlos Dias Maciel
Ivonete Ávila

dedico este trabalho
à minha Família e todos que me apoiaram

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha orientadora, *Prof. Dr. Maria Odila Hilário Cioffi* que jamais deixou de me incentivar, e cobrar. Sem a sua orientação, dedicação e auxílio, não teria chegado tão longe.

À minha família *Carlos Dias Maciel, Ivonete Ávila e Diana Milanez Ávila Dias Maciel*, que apesar das dificuldades enfrentadas, sempre me incentivaram em tudo.

Aos órgãos de fomento pelas bolsas PIBIC e CsF. A primeira que me incentivou e me ensinou muito sobre responsabilidades e a dificuldades da pesquisa. A segunda que me permitiu conhecer outros ambientes e que permitiu que esse trabalho fosse idealizado.

Agradeço ao Professor Tomonaga Okabe pela grande oportunidade que me disponibilizou ao me aceitar no seu laboratório e me mostrar novos pontos de vista. Ao meu tutor de intercâmbio Ryo Higuchi e ao aluno de mestrado Kenji Sakamoto por sempre me ajudarem e me incluírem nos testes.

A todos os funcionários da Faculdade de Engenharia do Campos de Guaratinguetá, os quais permitem que a faculdade funcione como um todo.

“O poeta é um fingidor.
Finge tão completamente
Que chega a fingir que é dor
A dor que deveras sente.
E os que lêem o que escreve,
Na dor lida sentem bem,
Não as duas que ele teve,
Mas só a que eles não têm...”

Fernando Pessoa

RESUMO

A grande utilização de compósitos ocorre devido à possibilidade de aplicações estruturais, como o caso do Boeig 787, Dreamliner. Assim o estudo dos métodos de fratura de compósitos se mostra necessário, a fim de que se possa ter uma predição do comportamento mecânico desses materiais quando solicitados em serviço. Dessa forma a modelagem computacional tem tido um grande avanço com novos modelos que se aproximam cada vez mais das respostas mecânicas reais dos compósitos. Assim, neste trabalho se iniciou desenvolvimento de uma simulação computacional para a predição de fratura de compósito utilizando *softwares* de domínio público. A simulação retrata uma lâmina 2D de um laminado compósito de fibras de carbono unidirecionais com resina epóxi. Por se tratar do desenvolvimento de um modelo, a lâmina foi considerada isotrópica. Foram criadas três malhas no programa GiD, com diferentes tamanhos de elementos. As três malhas ilustram os efeitos de refino e o custo computacional das simulações. Foram aplicadas a essas três malhas sete tensões diferentes 20, 250, 500, 700, 1000, 1500 e 1700 MPa. As diferentes tensões mostraram, primeiramente, a variação do mapa de acúmulo de tensão com o aumento das tensões. Em segundo lugar, mostraram as faixas de tensão na qual o modelo melhor se ajusta à realidade. Foi observado que com a diminuição dos elementos de malha tem-se um aumento no custo computacional e, ao mesmo tempo, uma maior suavização das transições das tensões. Além disso o modelo não foi adequado para a predição dos mapas de tensões nas situações onde a tensão aplicada foi menor que 700 MPa, isto porque o critério de Von Mises representa melhor o estado plástico do que o elástico.

PALAVRAS-CHAVE: Fratura. Método de Elementos Finitos. Von Mises. Compósito. Carbono/Epóxi.

ABSTRACT

Composite materials have been widely used in recent years in structural applications, such as the Boeing 787 – Dreamliner. Thus, the understanding of failure methods of composites is necessary in order to predict their mechanical behavior under loading. Thereby, computational modeling has become a great advantage in the area, with new constitutive laws and more realistic models increasingly approaching to materials mechanical behavior. This work has started the development of a model for predicting the fracture of composites using open source software. It was modeled a 2D lamina of unidirectional carbon fiber and epoxy composite laminate. The lamina was considered isotropic in the simulation, in order to get used to the computational environment. Three meshes were designed in the GiD software, each one had different element sizes. The different meshes illustrated the refining effects on the simulation results and the computational cost. Seven different stress conditions were tested 20, 250, 500, 700, 1000, 1500 and 1700 MPa. The various tensile stresses show, firstly, the variation of accumulated stress in the lamina and, secondly, it showed the stress range in which the model fit the real condition. It was observed that with the decrease of elements size the computational cost increases but it showed a smooth stress transitions in the obtained map. In addition, the model was not stable in predicting stress accumulation for stresses lower than 700 MPa. Although materials, which have an elastoplastic response to stress, tend to take some time to respond to initial application of load, the Von Mises criterion is more representative for the plastic state, especially the upper boundary.

KEYWORDS: Fracture. Finite Element Method. Von Mises. Composite. Carbon/epoxy.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Cronograma de Desenvolvimento das Atividades.....	17
Tabela 2: Métodos de integração exatos.....	41
Tabela 3: Métodos de integração de Gauss 2D	41
Tabela 4: Parâmetros materiais utilizados	46
Tabela 5: Relação do número de nós e o tempo computacional	49

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Micromecânica e Macromecânica	19
Figura 2: Lâminas Empilhadas	20
Figura 3 linhas retas em sólido original que após a deformação se tornam linhas curvas contínuas	22
Figura 4: Direções principais da Lamina	23
Figura 5: Transformação de coordenadas	23
Figura 6 Os domínios de Ω e as condições de contorno de Dirichlet e Neumann	28
Figura 7: Esquema de desenvolvimento do método de elementos finitos	29
Figura 8 Triângulo K e seus três vértices	32
Figura 9: Triangulação de Ω	33
Figura 10: Situações não aceitas em triangulações	33
Figura 11: Uma configuração proibida, pois um triângulo tem a mesma aresta em dois contornos distintos	34
Figura 12: dois triângulos com uma aresta compartilhada	34
Figura 13: Numeração dos Nós	35
Figura 14: Suporte de duas funções nodais	36
Figura 15: Os nós de Dirichlet, de acordo com o que foi determinando previamente	37
Figura 16: Elementos convexos usuais	40
Figura 17: Ilustração do corpo de prova utilizado	46
Figura 18: Fluxograma da Solução do problema de deformação de elementos finitos	48
Figura 19: Malha desenvolvida no programa GiD, representando a Lamina do material compósito	49
Figura 20: Custo computacional	50
Figura 21: Mapa de tensões da Falha obtidos para malha de tamanho 0,5	51
Figura 22: Mapa de tensões da Falha obtidos para malha de tamanho 0,3	53
Figura 23: Mapa de tensões da Falha obtidos para malha de tamanho 0,2	55

LISTA DE SÍMBOLOS

E	Módulo de Elasticidade
N	Coefficiente de Poisson
F	Força
A	Seção transversal
Σ	Tensão axial
T	Tensão Cisalhante
$[R]$	Matriz de Rotação
M	Coefficientes da matriz R
N	Coefficientes da matriz R
θ	Angulos de posicção das fibras
$[Q]$	Matriz Rigidez
T	Matriz Transposta
G	Módulo Cisalhante
X	Tensão máxima de resistência na direção x
Y	Tensão máxima de resistência na direção y
S	Tensão máxima de resistência Cisalhante
ε	Deformação axial
γ	Deformação Cisalhante

F, G, H, L, M, N	Constantes mecânicas dos materiais aplicadas no acúmulo de dano em Tsai-Hill
Z	Tensão máxima de resistência na direção z
Ω	Área
Γ	Contorno
$\mathcal{U}$	Deformação
f	Função
Δ	Variação
c	Constante
g	Função
∂	Derivada parcial
∇	Divergente
k	Triângulo
p	Vértice
$\mathbb{P}$	Elemento triangular
φ	Conjunto de Funções
V	Espaço vetorial

SUMÁRIO

1. OBJETIVOS	18
2. INTRODUÇÃO	15
3. ATIVIDADES PREVISTA/DESENVOLVIDAS	17
3.1. Cronograma de Atividades Previstas no Projeto Inicial	17
3.2. Atividades Desenvolvidas no Período	17
3.3. Participação em eventos científicos	17
4. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	18
4.1. Compósitos	18
4.2. Propriedades Mecânicas dos Materiais e Tensões	20
4.3. Equações Governantes e Relações Constitutivas	21
4.4. Análise de Falhas em Materiais Compósitos	22
4.5. O Método de Elementos Finitos (FEM): Elementos	27
4.1. GetFEM++	38
4.2. <i>Softwares</i> de domínio público & Python	43
5. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL	45
5.1. <i>Softwares</i> utilizados	45
5.2. Parâmetros do Material	45
5.3. Parâmetros da simulação	47
5.4. Algoritmo de solução	48
6. RESULTADOS E DISCUSSÃO	49
6.1. Planejamento da Malha e dos nós	49
6.2. Simulação e Resultados	50
7. CONCLUSÕES	57
REFERÊNCIAS	58

1 OBJETIVOS

Este trabalho de graduação (TG) visa implementar um modelo de predição de resistência de compósitos de fibra de carbono sob esforço de tração. O modelo foi desenvolvido utilizando o método de elementos finitos, que é um método numérico que se utiliza de soluções aproximadas para resolução de problemas complexos de condições de contorno. Foi aplicada a linguagem Python (“Python Language Reference, version 3.5”, 2015), que foi escolhida por se tratar de uma linguagem de alto nível diminuindo o tempo de aprendizagem, permitindo assim o foco na solução dos problemas de deformação. A linguagem possibilita o uso do GetFem++(Pommier e Renard, 2015), *software* de domínio público, o qual apresenta uma biblioteca que permite a resolução do modelo a ser desenvolvido. Após o desenvolvimento do modelo os resultados simulados foram validados tomando como referência resultados disponíveis na literatura.

Para que o objetivo geral fosse atingido, foram necessários:

- I. Estudar as equações que regem a teoria de falha em materiais;
- II. Utilizar a linguagem Python e as bibliotecas do *Software* GetFEM++ (Pommier e Renard, 2015; “Python Language Reference, version 3.5”, 2015);
- III. Aplicar o método de elementos finitos;
- IV. Desenvolver o modelo de falha de compósitos;
- V. Proceder a validação do modelo através da comparação com resultados disponíveis na literatura;
- VI. Participar em eventos técnicos e científicos para divulgar a pesquisa desenvolvida;
- VII. Submeter um artigo científico.

2 INTRODUÇÃO

Os compósitos avançados têm sido muito utilizados principalmente, nas indústrias aeroespacial e automobilística. Isso devido à sua alta resistência à tração e baixo massa específica, além da boa moldabilidade do compósito em formas complexas (Boscolo e Banerjee, 2014; Hashimoto *et al.*, 2012; Sasayama *et al.*, 2013). Porém, a sua atuação estava restrita apenas a materiais sem função estrutural, normalmente ligados a interiores sendo que nos últimos anos os compósitos vêm ganhando espaço para sua utilização em componentes estruturais (Sasayama *et al.*, 2013). Pode-se exemplificar a atuação de tais materiais no Boeing 787 que, com o uso de 50% em peso de compósitos reforçados em fibra de carbono (CRFC) na aeronave, possibilitou uma economia energética de 20% (Sasayama *et al.*, 2013). Assim, com o aumento da utilização dos CRFC para aplicações estruturais é imprescindível a predição da sua resistência mecânica e modos de falha.

Atualmente, muitos modelos foram propostos para a simulação do comportamento dos compósitos. O modelo de *Shear-lag* proposto por Cox (1952) é muito usado em análises de transferência de tensão entre matriz e fibra. As tensões são transferidas da matriz para o reforço pela tensão cisalhante na interface (Sasayama *et al.*, 2013). Em seu trabalho, Cox determinou 4 parâmetros mínimos para a solução das equações constitutivas dos materiais utilizados. Isto possibilitou a predição das tensões axiais médias, porém a tensão cisalhante, não possui uma resposta com bom ajuste (Nairn, 1997).

Em discussões posteriores, o modelo de *shear-lag* foi importante na aplicação para distribuições de tensões no comprimento da fibra. Foi usado também na determinação do comprimento crítico de uma fibra (Kelly e Tyson, 1965). O comprimento crítico é o comprimento mínimo que uma fibra deve possuir para que não haja um ponto de tensão máxima no comprimento da mesma, o que levaria a um acúmulo de tensão e a ruptura rápida (Sasayama *et al.*, 2013).

O uso do *Continuum Damage Method* (CDM) com Método de Elementos Finitos (FEM), vem sendo muito aplicado em pesquisas para simular danos micro mecânicos dentro dos compósitos (Hashimoto *et al.*, 2012; Wang *et al.*, 2016). O método de fratura de compósitos é muito complexo, sendo que normalmente a fratura é uma consequência de inúmeras falhas microscópicas que se acumularam no material (Sasayama *et al.*, 2013).

Assim, entender como essas microfalhas se iniciam e se propagam é de extrema importância para entender o mecanismo de fratura.

O método orientado por camadas, do inglês *Layer Wise Method* (LWM), implementado no CDM é baseado na teoria clássica do laminado, na qual um laminado se comporta com a sobreposição de várias camadas idênticas (Beyerlein e Landis, 1999; Boscolo e Banerjee, 2014; Hashimoto *et al.*, 2012). Assim, com o uso do LWM é possível determinar a tensão máxima de um laminado por meio da média das tensões obtidas para cada camada.

Os métodos anteriormente citados foram largamente aplicados na determinação de compósitos de fibras contínuas de carbono e vidro. Entretanto, somente nos últimos cinco anos estes métodos têm sido considerados na determinação de compósitos recentemente desenvolvidos, como aquele de fibras curtas, fibras naturais e híbridos (Okabe, Sasayama e Koyanagi, 2014; Wang *et al.*, 2016). Apesar de seu grande uso, no Brasil ainda é restrito o uso de métodos numéricos em simulações computacionais para tais materiais. Dessa forma, este trabalho de graduação contribuirá para o avanço de pesquisas na área de modelagem de fratura.

3 ATIVIDADES PREVISTA/DESENVOLVIDAS

3.1 Cronograma de Atividades Previstas no Projeto Inicial

A Tabela 1 apresenta o cronograma de atividades previsto no projeto inicial.

Tabela 1: Cronograma de Desenvolvimento das Atividades

<i>Atividades</i>	<i>Fev.</i>	<i>Mar.</i>	<i>Abr</i>	<i>Mai</i>	<i>Jun</i>	<i>Jul</i>	<i>Ago</i>	<i>Set</i>	<i>Out</i>	<i>Nov</i>	<i>Dez</i>
Revisão Bibliográfica	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Programa	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
Teste do Modelo						X	X	X	X		
Relatórios							X	X	X		
Qualificação do TCC								X			
Defesa do TCC										X	
Artigo										X	X

3.2 Atividades Desenvolvidas no Período

No primeiro semestre de trabalho (Fev./2013–Jul./2013), foi feita a revisão bibliográfica e estudos em relação a fratura de compósitos, equações constitutivas dos materiais. Além disso, foi iniciado o desenvolvimento do código.

3.3 Participação em eventos científicos

Foram publicados durante o desenvolvimento deste trabalho:

Resumo no CIC XXVIII:

Modelagem de Fratura em Materiais Compósitos por Métodos de Elementos Finitos

4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

4.1 Compósitos

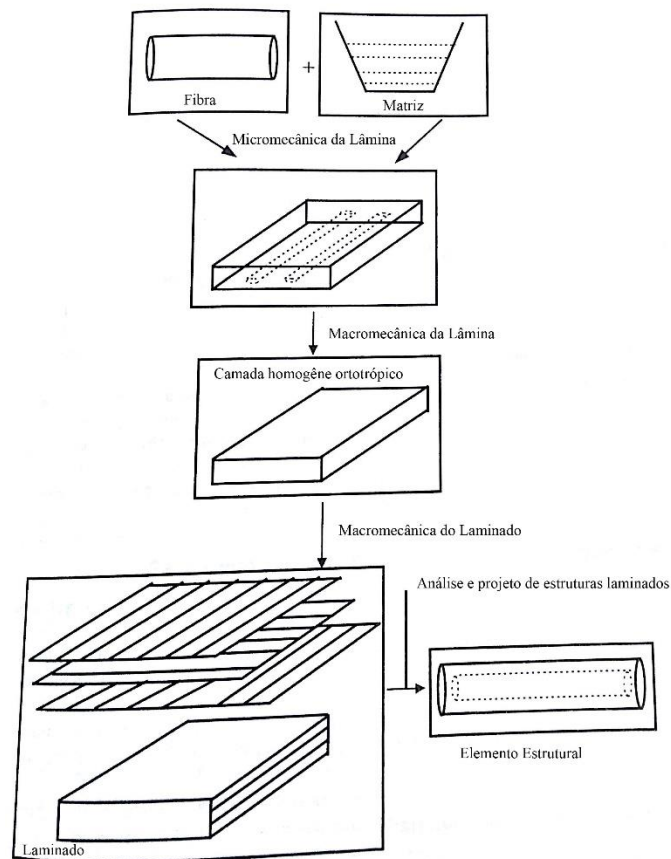
Os compósitos são materiais multifásicos que apresentam duas ou mais fases quimicamente diferentes. Formados por uma fase contínua, matriz, e uma fase descontínua, reforço. Essas fases se agregam por meio de ligações físicas e/ou químicas resultando em um novo material, com propriedades homogêneas. A vantagem de utilizar compósitos é a possibilidade de ter um material com as melhores qualidades de seus constituintes. O objetivo é desenvolver um material que se adeque aos requisitos para uma aplicação específica (Gay e Hoa, 2007; Jones, 1999; Kaw, 1997).

Compósitos podem ser classificados de acordo com o tipo de reforço – particulado, grânulos e fibras – ou pelo tipo de matriz – polimérica, metálica, cerâmica e carbonosa. As fibras de um compósito podem ser contínuas ou descontínuas, geralmente o material é anisotrópico. As unidades fundamentais de um compósito de fibra contínua são chamadas de lâminas. Essas lâminas são empilhadas em diferentes ângulos para formar um laminado compósito (Callister, 1940; Kaw, 1997).

Compósitos laminados são formados por duas ou mais camadas de fibras (*tape* ou tecidos) embebidos em resina. O método orientado por camadas LWM, implementado no CDM é baseado na teoria clássica do laminado, no qual um laminado se comporta com a sobreposição das várias camadas idênticas (Beyerlein e Landis, 1999; Boscolo e Banerjee, 2014; Hashimoto *et al.*, 2012).

Como um compósito consiste de dois ou mais materiais, a caracterização desses é diferenciada daqueles considerados homogêneos, podendo ser analisados mecanicamente de duas maneiras: micromecânica e macromecânica, exemplificados na Figura 1.

Figura 1: Micromecânica e Macromecânica



Fonte: Adaptado de Kaw, (1997)

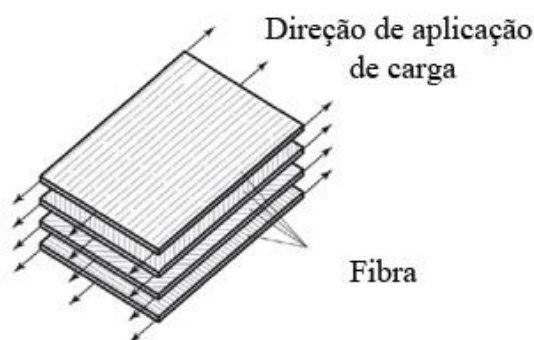
Na micromecânica analisa-se os esforços em cada lâmina, os constituintes sendo esta ortotrópica, considerada homogênea. A fim de simplificar os cálculos, as equações utilizaram apenas o módulo de Young (E) e o coeficiente de Poisson (ν). Os cálculos de resistência mecânica de compósitos, baseados nas propriedades das lâminas, é chamada de micro mecânica (Kaw, 1997). Para a abordagem macromecânica, as tensões distribuídas são baseadas nas propriedades mecânicas do laminado (Kaw, 1997).

4.1.1. Propriedades de Laminas

Uma lâmina é uma camada fina de compósito de espessura na ordem de 0,125 mm. Sendo um laminado compósito processado por meio do empilhamento de várias laminas em direções pré determinadas, Figura 2. As teorias de falha e o projeto dos laminados está diretamente ligado aos valores de tensões e deformações nas laminas. Dessa forma, construir laminados depende da aplicação e das características requeridas das lâminas (Gay e Hoa,

2007; Kaw, 1997; Sasayama *et al.*, 2013).

Figura 2: Lâminas Empilhadas



Fonte: Adaptado de Sasayama, 2013

A lamina, é considerada anisotrópica. Assim, suas características mecânicas, como por exemplo, o módulo de elasticidade, varia com a direção. Dessa forma, valores médios são usados na modelagem numérica, para facilitar os cálculos (Gay e Hoa, 2007; Kaw, 1997).

4.2 Propriedades Mecânicas dos Materiais e Tensões

A mecânica dos materiais tem como principal objetivo determinar as tensões, deformações e deslocamentos dos componentes submetidos à cargas. As propriedades mecânicas são relacionadas ao tipo de resposta do material quando influenciado por forças externas. Isso pode ser representado pela capacidade de responder as deformações, reversíveis ou não, e de resistir à fratura (Batista, 2005).

4.2.1. Tensões

Um corpo sólido em equilíbrio estático apresenta:

$$\sum M = 0 \quad (1)$$

A eq. 1 representa o somatório das forças externas, axiais ou cisalhantes, nas três dimensões. Podendo esta ser de tração ou compressão. Da mesma maneira que as forças a somatória dos momentos também é igual a zero (Batista, 2005).

Cargas externas agindo sobre um corpo geram forças superficiais resultando em

tensões residuais no material, as quais atuam em áreas infinitesimais e possuem direções variadas (Batista, 2005; Kaw, 1997). Dessa forma, tensões são definidas pela intensidade de carga por área. Assim, um corpo em equilíbrio apresenta uma força ΔF , que atua em qualquer seção de área ΔA . Esta força tem uma componente normal a superfície, ΔF_n , e uma paralela à superfície, definindo a tensão conforme as equações 2.

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A} \\ \tau_n &= \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_s}{\Delta A}\end{aligned}\tag{2}$$

4.3 Equações Governantes e Relações Constitutivas

As equações governantes são as equações diferenciais que representam o problema físico a ser descrito matematicamente (Bower, 2010; Demasi, 2009). Elas são necessárias pois não é possível descrever alguns fenômenos físicos apenas com princípios básicos. Neste caso, buscam-se equações que apresentam deformação como resposta de tensão mecânica além de histórico de tensões e taxa de deformação (Advani e Sozer, 2002; Batista, 2005)

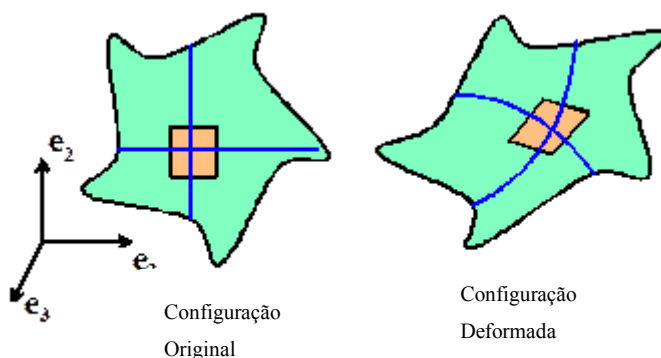
As equações constitutivas são as soluções aproximadas das equações de governos, as quais são obtidas e resolvidas através de dados experimentais. Muitas vezes, para suas soluções são necessárias às caracterizações de constantes de materiais (Advani e Sozer, 2002; Bower, 2010).

Algumas premissas são necessárias para o estudo de leis constitutivas, são elas:

- A amostra deve ser pequena com propriedades uniformes;
- O sólido uma vez deformado, deve apresentar linhas retas na sua superfície, as quais deformadas em curvas contínuas (Figura 3);
- Elementos infinitamente pequenos devem ser apenas esticados e relacionados pela deformação indicando que a deformação pode ser caracterizada pelo gradiente da deformação.

A tensão em qualquer ponto do sólido depende apenas da mudança de formato nas áreas adjacentes ao ponto. Consequentemente, deve ser uma função do gradiente de deformação ou uma medida de tensão derivada do mesmo (Bower, 2010).

Figura 3 linhas retas em sólido original que após a deformação se tornam linhas curvas contínuas



Fonte: Applied Mechanics of Solids, Bower, 2010.

Seguindo essas suposições a relação entre tensão-deformação pode ser medida por experimentos que induza uma deformação uniforme num corpo de prova. Assim, a tensão também seria uniforme permitindo seu cálculo através das forças que agem no corpo de prova (Bower, 2010).

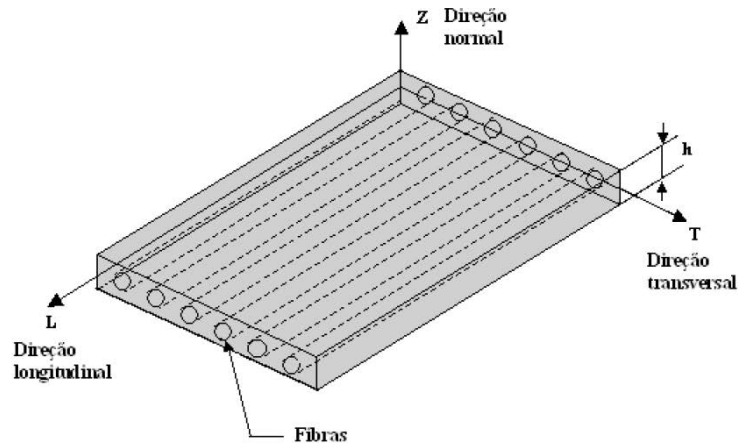
4.4 Análise de Falhas em Materiais Compósitos

As teorias de falha são fundamentais para a predição de resistência de um material. Quando o estado de tensões é unidimensional, apenas controlar a carga máxima é suficiente. Porém, quando o material se encontra em um estado bi ou tridimensional de tensões critérios de falha são fundamentais para identificar carga máxima (Souza, 2009).

4.4.1. Equação constitutiva do Laminado

De maneira a simplificar os equacionamentos, os componentes mecânicos dos compósitos podem ser retratados pela sobreposição de várias camadas formando um laminado. Uma lamina de compósito é composta de fibras e matriz, sendo que a direção das fibras define as direções principais das propriedades da lâmina, demonstradas na Figura 4 (Sasayama *et al.*, 2013; Souza, 2009).

Figura 4: Direções principais da Lamina



Fonte: Souza 2009

Cada lâmina retrata uma única direção de orientação de fibras do material. A análise do laminado é feita em uma coordenada que representa uma orientação genérica coordenada $\hat{x}$. A matriz de Rotação $[R]$ faz a rotação dos componentes do sistema em relação a um ângulo θ , ângulo entre as fibras e o sistema de referência, Figura 5 (Sasayama *et al.*, 2013; Souza, 2009). A Matriz R é retratada na equação 3:

$$[R] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Na qual,

$$\begin{aligned} m &= \cos \theta \\ n &= \sin \theta \end{aligned} \quad (4)$$

Figura 5: Transformação de coordenadas



Fonte: Adaptado de Sasayama, 2013

As tensões em cada lamina podem ser calculadas a partir das deformações pela relação descrita na eq. 5.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

A matriz $[\bar{Q}]$ é dada pela equação 6.

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1}[Q][T]^{-1} \quad (6)$$

A matriz de rigidez $[Q]$ descrita pela equação 5 possui os termos das constantes de engenharia explicitado na equação 7.

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{66} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Na matriz, E_{11} e E_{22} são módulos de elasticidade nas direções da fibra e transversal; respectivamente ν_{12} e ν_{21} são os valores dos coeficientes de Poisson, o principal e o secundário, respectivamente, e G_{66} é o módulo cisalhante (Souza, 2009).

As tensões nas direções longitudinal e transversal da fibra podem ser calculadas pela eq. 8.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Com as tensões calculadas em cada ponto e em cada lâmina, podem ser aplicados critérios de falha para a avaliação da resistência da placa.

4.4.2. Critérios de Falha

O comportamento mecânico de um material é medido experimentalmente através de ensaios, nos quais os corpos de prova são submetidos a esforços uniaxiais de tração para o levantamento de suas propriedades mecânicas. Tais como módulo de elasticidade, tensões de

escoamento, limite de ruptura e razão de Poisson (Souza, 2009).

A essas propriedades são aplicadas as teorias ou critérios de falha afim de relacioná-las ao comportamento de componentes reais. Atualmente, a maior parte dessas propriedades é tabelada para uma série de materiais base. Além disso, para materiais com comportamento isotrópico essas constantes são também conhecidas (Souza, 2009).

Compósitos são projetados para terem melhor resistência específica e melhor resistência a fadiga e corrosão, isto vem das inúmeras variedades de configurações obtidas com a variação nas orientações de fibras, relacionando a orientação das fibras com a direção de solicitação mecânica e cálculos de projeto (Gay e Hoa, 2007; Jones, 1999; Kaw, 1997; Levy Neto e Pardini, 2006). Assim, é importante saber como relacionar as equações para os diferentes tipos de materiais utilizados, adaptando-se às necessidades de cada material.

4.4.3. Critério de máxima tensão e máxima deformação

O critério de máxima tensão foi relacionado às teorias de máxima tensão normal, por Rankine e teoria de máxima tensão cisalhante, por Tresca. Considerando os materiais isotrópicos, nos quais a falha ocorre quando as tensões máximas na direção das fibras, ou transversalmente a elas é excedida (Gay e Hoa, 2007; Jones, 1999; Kaw, 1997). A lâmina é considerada fraturada quando os critérios da Eq. 9 não são cumpridos.

$$\begin{aligned} \sigma_1 < X_t \text{ ou } \sigma_2 < Y_t, \text{ para } \sigma_1 \text{ e } \sigma_2 > 0 \\ |\sigma_1| > X_c \text{ ou } |\sigma_2| > Y_c, \text{ para } \sigma_1 \text{ e } \sigma_2 < 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Neste caso X e Y representam as tensões máximas de resistência longitudinais e transversais, respectivamente. Os subscritos c e t indicam o tipo de esforço sendo compressão e tração, respectivamente. Nota-se que para os esforços de tração os valores são dados positivos e para compressão os valores são negativos (Kaw, 1997; Souza, 2009).

Além de trincas causadas por tensões normais, as laminas de compósitos também são vulneráveis a falhas resultantes de tensões cisalhantes. O critério de máxima tensão para o cisalhamento é demonstrado na Eq.10

$$|\tau_{12}| < S \quad (10)$$

Na qual S é a resistência máxima ao cisalhamento de um corpo de prova sob cisalhamento puro na direção principal do material.

Similarmente, o critério de máxima deformação, a falha ocorre quando qualquer deformação normal ou cisalhante é igual ou superior à deformação correspondente à deformação máxima da lamina unidirecional. Este critério é baseado nas teorias de máxima deformação normal, por St. Venant, e na teoria de máxima tensão cisalhante por Tresca (Jones, 1999; Kaw, 1997).

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 < \varepsilon_1^t = \frac{X_t}{E_1} \text{ e } \varepsilon_2 < \varepsilon_2^t = \frac{Y_t}{E_2}, \text{ para } \varepsilon_1 \text{ e } \varepsilon_2 > 0 \\ \varepsilon_1 > -\varepsilon_1^c = -\frac{X_c}{E_1} \text{ e } \varepsilon_2 > -\varepsilon_2^c = -\frac{Y_c}{E_2}, \text{ para } \varepsilon_1 \text{ e } \varepsilon_2 < 0 \\ |\gamma_{12}| < \gamma_{12}^s = \frac{S}{G_{12}} \end{aligned} \quad (11)$$

No qual, ε_1 é a deformação no sentido longitudinal e ε_2 é a deformação no sentido transversal, X_t e X_c são as tensões de tração e compressão, respectivamente, no sentido longitudinal e Y_t e Y_c são as tensões de tração e compressão, respectivamente, no sentido transversal da fibra. O γ_{12} representa a deformação cisalhante no plano, assim como S é a tensão cisalhante.

Os critérios de máxima tensão e máxima deformação são mais simples e não levam em conta as diversas interações entre os diferentes componentes de tensão no mecanismo de falha do material. Critérios de falha quadráticos, como os de Von Mises, podem levar em conta essas interações. Alguns dos critérios mais utilizados são os de Tsai-Hill e Tsai-Wu (Jones, 1999; Kaw, 1997; Souza, 2009).

4.4.4. Material Isotrópico: Von Mises

O critério de Von Mises, proposto em 1913, para materiais isotrópicos demonstra que o material resiste em um estado isotrópico de tensão, porém quando a energia elástica chega a um ponto crítico, a transição do estado elástico para o plástico acontece (Butuc, 2004; Gay e Hoa, 2007).

Em um estado triaxial de tensões o critério de Von Mises é pela Eq. 12.

$$\frac{1}{2} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 \right] + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) = \sigma_{EQ}^2 \quad (12)$$

Na qual, σ_x , σ_y , σ_z são as tensões nos sentidos axiais e τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} são as tensões cisalhantes nos planos. Sendo que σ_{EQ} é o valor da tensão máxima uniaxial equivalente ao estado triaxial de tensões solicitado

4.4.5. Critérios Tsai-Hill

Existem diversos critérios de falha para materiais ortotrópicos, o critério de Tsai-Hill é o mais utilizado para projeto de compósitos (Gay e Hoa, 2007). Este é um critério resultado da modificação do critério de Von Mises, para que fosse incluído os efeitos de anisotropia induzidos por grandes deformações plásticas.

Valores da igualdade, Eq. 22, menores que 1 indicam que o material resiste em determinado estado de tensões aplicado (Gay e Hoa, 2007; Souza, 2009). Para igualdade maior ou igual a 1, o material apresenta ruptura na lamina, esta deterioração está relacionada à fratura da resina (Gay e Hoa, 2007).

Para laminas unidirecionais sob tensão plana; $\sigma_3 = \tau_3 = \tau_3 = 0$, o critério de Tsai-Hill é descrito pela Eq.13:

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} < 1 \quad (13)$$

Este por sua vez é conhecido como o critério de falha Tsai-Hill com referencial nos eixos principais dos laminados. A equação não faz distinção entre esforços de tração e compressão, portanto os sinais podem aparecer trocados de acordo com o tipo de esforço (Gay e Hoa, 2007; Souza, 2009).

4.5 O Método de Elementos Finitos (FEM): Elementos

Muitos problemas de engenharia podem ser descritos por equações diferenciais parciais (EDP). Porém, solucionar estes tipos de problemas complexos por métodos convencionais é computacionalmente custoso (FISH e BELYTSCHKO, 2009). O FEM é uma aproximação numérica pelo qual estas EDPs podem ser solucionadas por aproximações. Muitos trabalhos utilizam o FEM para prever o comportamento estrutural, mecânico, térmico, elétrico e químico (Chandrupatla e Belegundu, 2014).

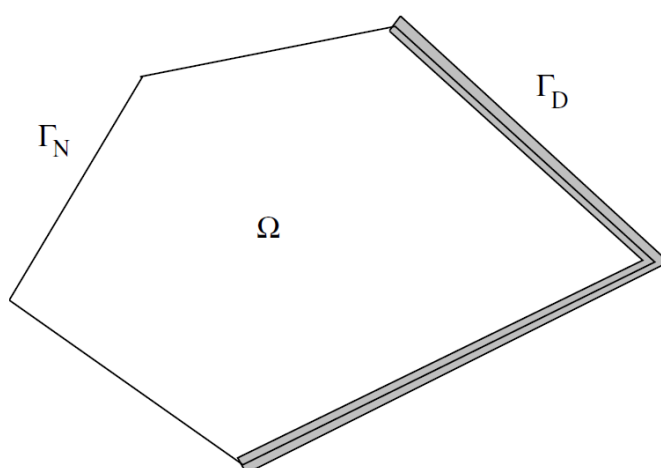
O FEM consiste em basicamente cinco etapas: o pré-processamento, no qual se subdivide o domínio do problema; a formulação dos elementos, na qual se desenvolve as equações para os elementos; montagem que se trata da obtenção de um sistema global de equações a partir das equações formuladas na etapa anterior; a resolução das equações e o pós-processamento, que são as etapas que determinam os valores de interesse e fazem a

visualização dos resultados (FISH e BELYTSCHKO, 2009).

4.5.1. Domínio físico

O primeiro fator a ser estabelecido é a geometria. Em uma área genérica denominada Ω e contorno Γ , vide Figura 6. O contorno é dividido em duas partes que nunca se sobrepõem. Γ_D é o contorno de Dirichlet e o Γ_N é o contorno de Neumann. Em termos de propriedades mecânicas, no contorno de Dirichlet a deformação é dada como variável de entrada, já o contorno de Neumann a tensão é dado como variável de entrada (Sayas, 2015).

Figura 6 Os domínios de Ω e as condições de contorno de Dirichlet e Neumann



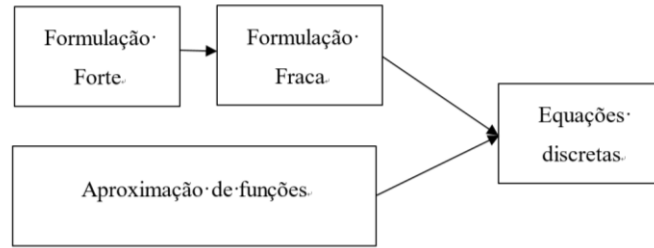
Fonte: Francisco-Javier Sayas, 2015

Os dois tipos de contornos devem estar discriminados. No entanto, há a possibilidade de se considerar as condições separadas por ângulos infinitamente pequenos.

4.5.2. Formulação Forte

A fim de estabelecer o método de elementos finitos é necessário o desenvolvimento das formulações fortes e fracas do problema, seguindo o esquema da Figura 7.

Figura 7: Esquema de desenvolvimento do método de elementos finitos



Fonte: Própria

A formulação forte consiste nas equações de governo e das condições de contornos para um sistema físico. As equações de governo são normalmente equações diferenciais parciais (EDP), as quais representam fenômenos físicos. A formulação fraca é a forma integral das EDPs, que é necessária à resolução do método em ambientes computacionais (FISH e BELYTSCHKO, 2009).

No domínio utilizado têm-se uma EDP de segunda ordem e no problema de condição de contorno impõem-se as condições da solução. O problema de condição de contorno segue como as Eq. 14 (Sayas, 2015).

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f & \text{em } \Omega, \\ u = g_0 & \text{em } \Gamma_D, \\ \partial_n u = g_1 & \text{em } \Gamma_N. \end{cases} \quad (14)$$

A função u é um valor escalar definido no domínio Ω e o termo c é uma constante não negativa. A princípio c pode ser igual a 1 ou igual a 0 e a função de diferenciar as possíveis aproximações numéricas para o problema. Esta equação é chamada de equação de reação-difusão. O termo de difusão, $-\Delta u$, vindo de uma EDP de segunda ordem, assim se encontra negativo devido a separação das variáveis. Já o termo de reação é quando $c > 0$, portanto cu .

A função dada f , válida em Ω , corresponde ao termo dependente da EDP, podendo ser associada à densidade de forças na superfície (Sayas, 2015).

As funções g_0 e g_1 são aplicáveis à duas condições de contorno diferentes. A função g_0 obrigatoriamente deve ser uma função contínua, já g_1 poderá ser descontínua (Sayas,

2015).

O símbolo ∂_n denota a derivada exterior de acordo com a eq.15.

$$\partial_n u = \nabla u \cdot n, \quad (15)$$

Nesta equação o n é o vetor normal unitário que vai do contorno para fora e ∇u é o gradiente de u .

4.5.3. Teorema de Green

A fim de solucionar o modelo pelo FEM é necessário escrever o problema em uma notação diferente, sendo esta a Formulação fraca ou Variacional. O teorema mais importante no processo de reformulação do problema é o Teorema de Green, Eq. 16. O teorema de Green fornece a relação entre uma integral de linha em um contorno fechado e uma integral dupla (FISH e BELYTSCHKO, 2009; Sayas, 2015; Stewart, 2013).

$$\int_{\Omega} (\Delta u)v + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Gamma} (\partial_n u)v \quad (16)$$

Nota-se que as integrais do lado esquerdo da equação são integrais em domínio Ω , já a integral do lado direito se trata de uma integral de linha no contorno Γ .

4.5.4. O Problema descrito por Formulação fraca

O problema é derivado do teorema de Green, descrito no item anterior, o contorno Γ é discriminado na soma de dois contornos diferentes, o de Dirichlet e o de Neumann. Substituindo a Eq. 14 na 16, obtém-se a Eq.17.

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + c \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_N} g_1 v + \int_{\Gamma_D} (\partial_n u) v \quad (17)$$

Isola-se todas aparições de u do lado esquerdo com exceção do termo $\partial_n u$, desconhece-se o valor deste termo no contorno. Assim, é imposto que o v cancele o valor deste termo e surge a condição de contorno de Dirichlet (Sayas, 2015).

$$v = 0 \quad em \quad \Gamma_D.$$

Assim, a formulação fraca pode ser descrita conforme as eq.18.

$$\left[\begin{array}{l} \text{achar o } u \text{ em que} \\ u = g_0 \text{ em } \Gamma_D, \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + c \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_N} g_1 v, \text{ para qualquer } v \text{ desde que } v = 0 \text{ em } \Gamma_D \end{array} \right. \quad (18)$$

As condições de contorno aparecem em lugares distintos da formulação, assim:

- A condição de Dirichlet (Deformação dada) é imposta à parte da formulação, sendo esta homogênea em relação a função de teste v . Sendo uma condição de contorno essencial.
- A condição de Neumann (Tensão dada) aparece devido a formulação. Sendo uma condição de contorno natural.

Ser uma condição natural ou essencial está relacionado a apenas a relação da condição de contorno com a formulação do problema. Neste caso, para uma formulação fraca de uma equação elíptica de segunda ordem, Dirichlet é condição de contorno essencial e Neumann é condição de contorno natural (Sayas, 2015).

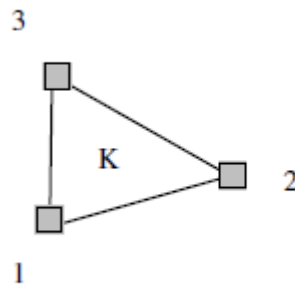
A função v é na formulação, chamada de “função teste”, esta testa se a equação é satisfeita pelo valor de u . A função v se comporta como uma função peso, que se usa para calcular a média da equação. Podendo ser referida como “deformação virtual”, sendo uma função que existe virtualmente apenas para escrever o problema. A formulação fraca é o princípio das deformações virtuais (Sayas, 2015).

A formulação do problema pertence ao espaço funcional espaço L^p , o qual é um espaço funcional. Um espaço funcional é um conjunto de funções de uma dada classe. Tem-se aplicações em espaços vetoriais (Sayas, 2015).

4.5.5. Funções lineares em Triângulos

Uma função linear de duas variáveis é equivalente à uma função polinomial. A mesma pode ser determinada pelo valor em três pontos não colineares, sendo assim os vértices de um triângulo, por exemplo. Observando o triângulo k na Figura 8 pode-se obter uma função que é unicamente definida pelos valores dos vértices, como descrito pela eq. 19.

Figura 8 Triângulo K e seus três vértices



Fonte: Francisco-Javier Sayas (2015)

$$p \in \mathbb{P}_1 = \{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} \quad (19)$$

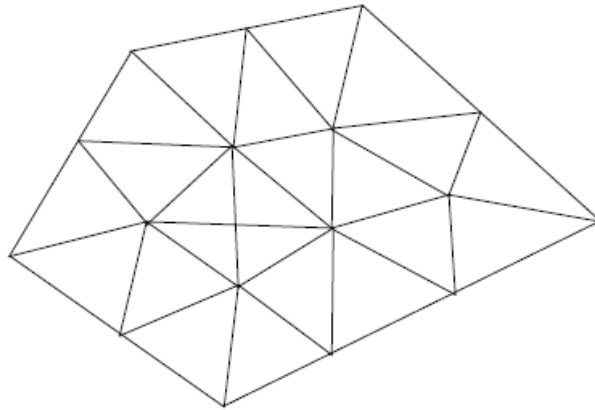
Pode-se atribuir qualquer valor aos vértices que será possível obter o elemento $\mathbb{P}_1$. O triângulo, nesse caso, nada mais é do que uma função linear de três pontos não colineares descrita graficamente. Os valores das funções nos vértices dos triângulos são os graus de liberdade locais (Sayas, 2015).

O valor de $p \in \mathbb{P}$ é unicamente definido pelos graus de liberdade associados nas bordas, ou seja, representado os valores de p nos dois vértices que se encontram nas arestas.

4.5.6. Triangulação

A Triangulação nada mais é do que a divisão do domínio em triângulos. A triangulação de Ω é a subdivisão de seu domínio em triângulos, vide Figura 9. Todo domínio deve ser coberto, porém alguns critérios devem ser cumpridos.

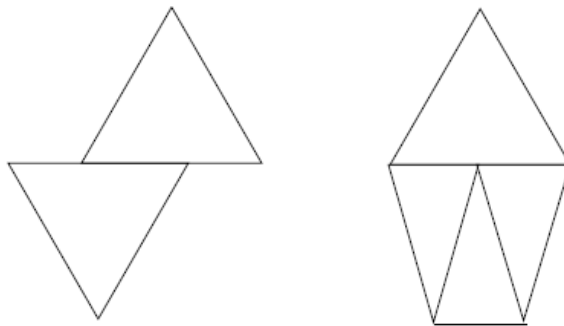
Figura 9: Triangulação de Ω



Fonte: Francisco-Javier Sayas (2015)

Caso dois triângulos possuam uma intersecção, esta deve ser um vértice compartilhado ou uma aresta inteira. A Figura 10 ilustra configurações não aceitas de acordo com esse critério.

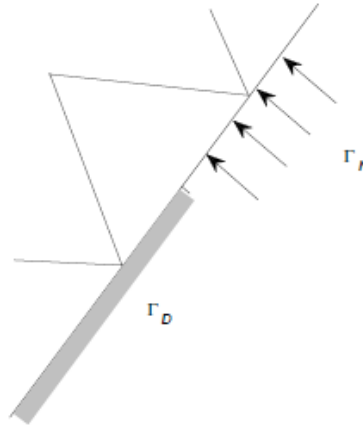
Figura 10: Situações não aceitas em triangulações



Fonte: Francisco-Javier Sayas (2015)

Os triângulos devem respeitar as divisões dos contornos de Dirichlet e de Neumann. Assim, um triângulo que está contido no Γ não pode estar parcialmente contido nos contornos de Dirichlet e Neumann ao mesmo tempo. A Figura 11 indica uma configuração não admitida de acordo com esse critério (Sayas, 2015).

Figura 11: Uma configuração proibida, pois um triângulo tem a mesma aresta em dois contornos distintos



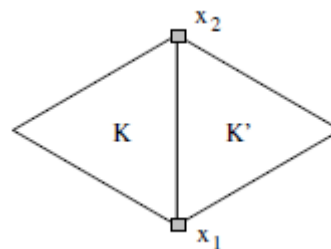
Fonte: Francisco-Javier Sayas (2015)

Um conjunto de triângulos vai ser denotado por T_h , o sub índice representa o diâmetro da triangulação, o qual é definido pela maior distância entre dois vértices da triangulação (SAYAS).

4.5.7. Funções lineares por partes na triangulação

Nesta seção serão tratadas as funções que definem o polígono triangulado. Considere dois triângulos, K e K' Figura 12, divididos por uma aresta. Com os 4 vértices do conjunto se constrói uma função contida em $\mathbb{P}_1$ em ambos os triângulos e que tem os valores necessários nos vértices. Como o valor da aresta compartilhada depende apenas dos valores dos dois vértices a função resultante é contínua (Sayas, 2015).

Figura 12: dois triângulos com uma aresta compartilhada



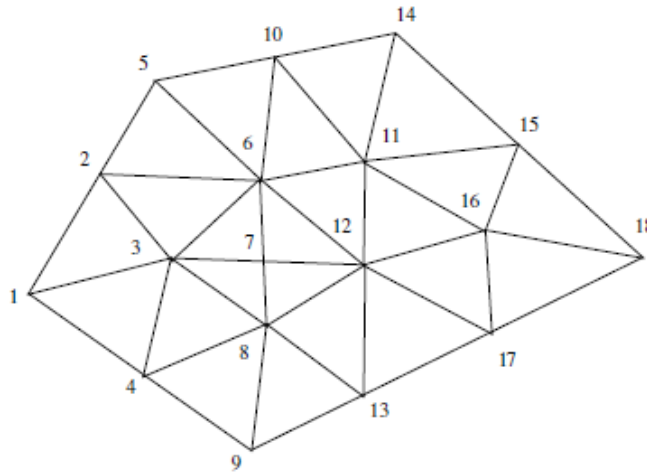
Fonte: Francisco-Javier Sayas (2015)

Ao fazer isso, triângulo por triângulo, obtém-se a função linear em cada triângulo e contínua globalmente no espaço, o espaço o qual contém essas funções é V_h . Se valores forem

atribuídos aos vértices das triangulações Th irá existir um único $u_h \in V_h$. Assim, um elemento de V_h é unicamente definido pelos valores nos vértices das triangulações. Os valores nos vértices da triangulação inteira representam os graus de liberdade, os quais determinam o elemento V_h . Nesse contexto os vértices do triângulos serão chamados de Nós quando têm o papel de atribuir e guardar valores (Sayas, 2015).

Enumerando-se os nós na triangulação de Ω , como exibido na Figura 13, os nós vão ser denominados genericamente por p_i , com i variando de i até o número total de vértices (N).

Figura 13: Numeração dos Nós



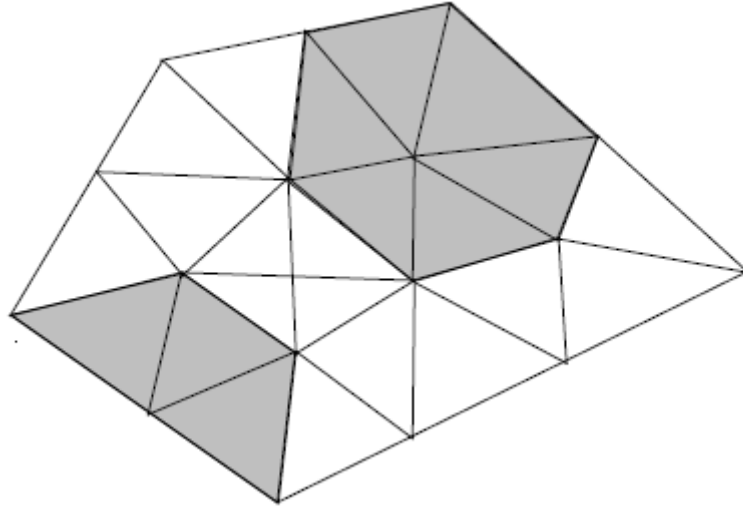
Fonte: Francisco-Javier Sayas (2015)

Atribuindo o valor 1 a um nó fixo e 0 à todos os outros, existe uma função $\varphi_i \in V_h$ que contém esses valores segundo eq.20 (Sayas, 2015).

$$\varphi_i(p_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & j \neq i. \end{cases} \quad (20)$$

Caso o triângulo K não tenha p_i como um de seus vértices, φ_i é nulo em toda área de K . Isso ocorre porque o valor de φ_i nos três vértices é zero. Assim, o suporte de φ_i é a união de triângulos que dividem o vértice p_i . A Figura 14 demonstra esse fenômeno (SAYAS).

Figura 14: Suporte de duas funções nodais



Fonte: Francisco-Javier Sayas (2015)

Se $u_h \in V_h$, é possível observar a eq. 21, que exprimi um elemento genérico da base V_h . Modificando a eq. 21 e calculado-a em p_i , obtém-se a eq.22.

$$u_h = \sum_{j=1}^N u_h(p_j) \varphi_j \quad (21)$$

$$\sum_{j=1}^N u_h(p_j) \varphi_j(p_i) = \sum_{j=1}^N u_h(p_j) \delta_{ji} = u_h(p_i) \quad (22)$$

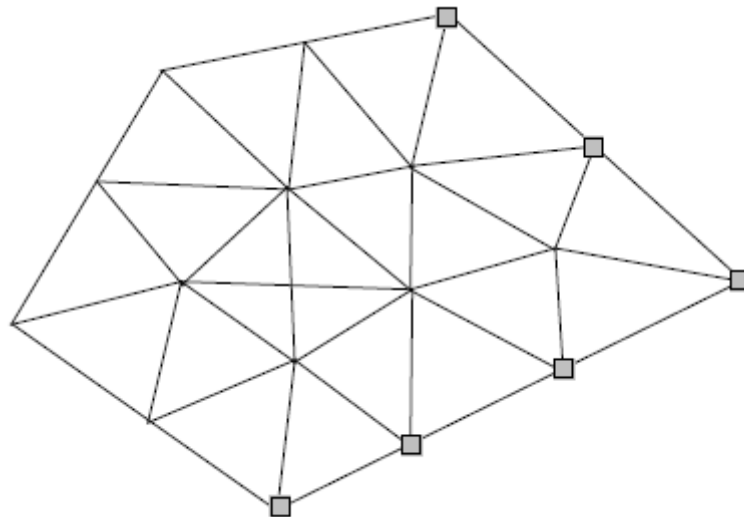
Assim, se a função tem os mesmos valores de u_h , consequentemente essa função é u_h . O fato de que duas funções pertencentes à V_h com os mesmos valores nos Nós são a mesma função, indica a independência linear das funções $\{\varphi_i\}$. Com as eq. 20 e 21 foi provado que a função φ_i é base de V_h . Existe um aspecto interessante da base V_h que a torna especial nesse problema e uma propriedade que diz que em uma base conhecida é possível decompor os valores de V_h como uma única combinação linear de todos elementos da mesma base. Utilizando o elemento geral, eq. 20, nesta base os valores são exatamente os valores de u_h nos Nós, que são representados na eq. 21. Assim os coeficientes de u_h na base V_h são os valores da função em pontos (Sayas, 2015).

A definição do espaço V_h prende a função $\mathbb{P}_1$ aos triângulos. Graças aos parâmetros da triangulação e as escolhas dos graus de liberdade é possível ter uma função contínua.

4.5.8. Nós de Dirichlet

Dentro do contorno Γ existe partes pertencentes à Dirichlet e as pertencentes à Neumann. Uma aresta de Dirichlet é uma aresta de um triângulo, a qual existe no Γ_D . Da mesma forma, uma aresta de Neumann é a aresta de um triângulo que esteja no Γ_N . Os vértices que se encontram em arestas de Dirichlet são Nós de Dirichlet. Um nó que se encontra na transição entre os contornos de Dirichlet e Neumann será sempre um nó de Dirichlet. A Figura 15 mostra o polígono Ω com os seus respectivos nós de Dirichlet (Sayas, 2015).

Figura 15: Os nós de Dirichlet, de acordo com o que foi determinando previamente



Fonte: Francisco-Javier Sayas (2015)

Na formulação fraca as condições de Dirichlet e de Neumann são tratadas discretamente e separadamente como: Arestas de Neumann e Nós de Dirichlet.

Isto porque, para que a triangulação respeitasse o contorno Γ do polígono as arestas de Dirichlet deveriam ser zero. Como os valores das arestas são unicamente determinados pelos valores nos nós, consequentemente $u_h \in V_h$ desaparece em Γ_D se e somente se os valores dos nós de Dirichlet forem zero (Sayas, 2015).

4.5.9. Problema discreto e variacional

O problema acima é descrito pela eq.23.

$$\left[\begin{array}{l} u \in H^1(\Omega) \\ u = g_0 \text{ em } \Gamma^D, \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + c \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_N} g_1 \end{array} \right] \quad \forall v \in H_{\Gamma^D}^1(\Omega) \quad (23)$$

O problema para FEM aplicado a elementos triangulares consiste na seguinte discretização baseada na eq. 24.

$$\left[\begin{array}{l} u \in V_h \\ u_h(P) = g_0(P) \text{ para cada nó de Dirichlet} \\ \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h + c \int_{\Omega} u_h v_h = \int_{\Omega} f v_h + \int_{\Gamma_N} g_1 u_h \end{array} \right] \quad \forall v_h \in V_h^{\Gamma^D} \quad (24)$$

Três coisas são observadas na mudança da eq. 22 para 23. Primeiramente o espaço foi limitado em V_h , ao invés do espaço total. Isso reduz o tempo computacional da resolução do problema, através da limitação do número de vértices na triangulação. Em segundo lugar, a condição de contorno em Dirichlet foi substituída por valores atribuídos nos nós de Dirichlet. Essa etapa reduz o número de variáveis no sistema. Por último, o espaço de teste foi substituído para um subespaço discreto $V_h^{\Gamma^D}$. Esta etapa reduz os infinitos números de teste da formulação fraca para um número finito de equações lineares (Sayas, 2015).

4.1 GetFEM++

Nesta seção discute-se sobre os métodos de soluções da biblioteca GetFEM++. O GetFEM++ é uma biblioteca livre com desenvolvimento colaborativo. Tem como objetivo proporcionar um ambiente para resolução de sistemas acoplados de equações diferenciais parciais lineares e não lineares com método de elementos finitos. O GetFEM++ é ligado à algumas linguagem de *script* de modo a viabilizar todas as funcionalidades. O programa apresenta suporte a resoluções de problemas até 3D (Pommier e Renard, 2015).

Uma linguagem de montagem genérica permite trazer rapidamente e organizar as

formulações fracas. Descrição de modelos que reúnem variáveis, os dados e os termos de um problema. Além disso, existem alguns *Bricks*, que são trechos de código representando modelos clássicos de elasticidade, problemas de Helmholtz, elíptico, Dirichlet, condições de Neumann entre outros (Pommier e Renard, 2015).

A biblioteca faz a separação completa de forma que se têm a transformação geométrica, o método de elementos finitos, o método de integração e a descrição dos termos, o que permite a facilidade de mudar de um elemento para outro e disponibiliza uma vasta gama de métodos de integração, o que a torna muito flexível. Assim, pode-se ser usado para construção de códigos genéricos, permitindo alterar com facilidade qualquer um dos parâmetros e métodos utilizados, o que proporciona uma variedade de experiências.

4.1.1. Elemento Malha

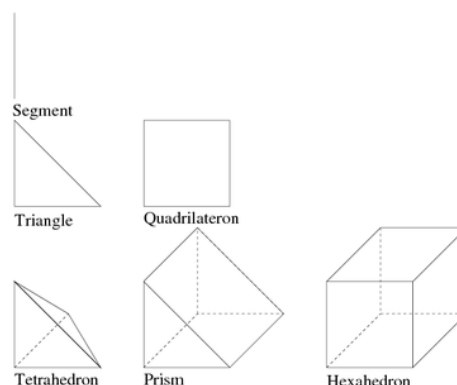
Dentro do programa a malha é definida como “mesh”, que gerencia as malhas, as quais nada mais são que um conjunto de elementos convexos conectados pelas arestas, faces ou vértices. A biblioteca GetFEMM++ disponibiliza uma série de comandos para a estruturação da malha dentro do mesmo, porém só é recomendado para malhas simples. Malhas complexas podem ser importadas em formato “gid”, “gmsh”, “am_fmt”, “emc2_mesh” ou “structured” (Pommier e Renard, 2015).

Além do *design* das malhas, a biblioteca permite que outros elementos sejam inseridos ou retirados em malhas já existentes ou a conexão de duas ou mais malhas pela da utilização de um elemento de contato. Elementos diferentes são compatíveis quando apresentam os mesmos graus de liberdades nas faces ou arestas. O elemento “mesh” pode ser partilhado em regiões (“mesh_regions”), os quais são um conjunto de elementos convexos e nós, usados para a definição de condições de contorno.

4.1.2. Elemento FEM e “Mesh_Fem”

Métodos de elementos finitos são definidos em elementos convexos, podendo estes serem definidos sob um segmento de linha, triângulos, tetraedros, entre outros descritos na Figura 16. Os elementos FEM não manipulam as localizações dos convexos, apenas a estrutura descrita por um ponteiro. Na maior parte das vezes as funções das formas de elementos finitos são polinomiais, podendo ser possível definir outros tipos de elementos, como interpolações (Pommier e Renard, 2015).

Figura 16: Elementos convexos usuais



Fonte: GetFEM++ Project (2016)

Os elementos FEM dão suporte para as transformações geométricas e as transformações polinomiais, as quais mapeiam os elementos de referência. Normalmente, são aplicadas para estudos de deslocamento, onde a transformação geométrica preserva as distâncias e os ângulos.

O objeto “gf.mesh_fem” é o objeto do GetFEM++ que descreve um MEF em uma malha, descrevendo o espaço onde as variáveis serão aplicadas. Este é um objeto complexo, porém muito importante dentro da biblioteca. Existe a possibilidade de se especificar elemento por elemento, permitindo elementos de diferentes dimensões ou elementos diferentes sejam abrangidos no MEF (Pommier e Renard, 2015).

Existem três níveis dentro do objeto mesh_fem: o nível um define um MEF para cada elemento, podendo variar o tamanho e o tipo de elemento convexo; O nível dois utiliza vetores e tensores ao invés de elementos específicos e o Nível três trata da adição de uma transformação linear, normalmente para redução de graus de liberdades das funções. O nível três é importante para combinar condições de malha que normalmente não seriam incompatíveis.

4.1.3. Métodos de integração

Os métodos de integração definem como o programa soluciona as integrais da formulação fraca do problema. Dentro do GetFEM++ o elemento “mesh_im” define um método de integração para toda malha, descrevendo o método para cada convexo. A biblioteca possui uma série de métodos de integração disponíveis, os quais podem ser

separados em métodos exatos e métodos aproximados. Os métodos exatos só podem ser usados quando todos os elementos convexos são polinomiais e quando a transformação geométrica é linear. Normalmente limitada a códigos genéricos de baixo nível, a Tabela 2 indica os métodos exatos disponíveis (Pommier e Renard, 2015).

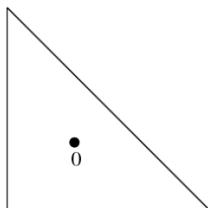
Tabela 2: Métodos de integração exatos

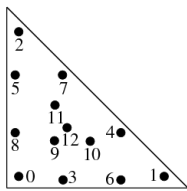
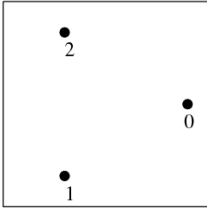
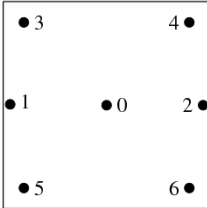
Função	Descrição
“IM_NONE()”	Teste para método exato de integração
“IM_EXACT_SIMPLEX(n)”	Integração dos polinômios na referência de dimensão n
“IM_PRODUCT(a,b)”	Integração nos convexos, produto direto dos convexos de a e b
“IM_EXACT_PARALLELEPIPED(n)”	Integração exata no paralelepípedo de referência da dimensão n
“IM_EXACT_PRISM(n)”	Integração exata no prisma de referência da dimensão n

Fonte: GetFEM++ Project (2016)

Métodos de integração por aproximação para objetos 2D são, normalmente, realizados pelo método de integração de Gauss, a Tabela 3 indica alguns métodos de Gauss.

Tabela 3: Métodos de integração de Gauss 2D

Graficamente	Função	Ordem
	“IM_TRIANGLE(1)”	1 ponto, ordem 1.

	<code>"IM_TRIANGLE(7)"</code>	13 pontos, ordem 7
	<code>"IM_QUAD(2)"</code>	3 pontos, ordem 2
	<code>"IM_QUAD(5)"</code>	7 pontos, ordem 5

Fonte: GetFEM++ Project (2016)

4.1.4. Computando termos arbitrários – alto nível vs baixo nível

Códigos de alto nível são descritos como uma linguagem que se aproxima da formulação de descrição da formulação fraca. Ela foi desenvolvida para desviar da dificuldade que era descrever problemas complexos usando a linguagem de baixo nível. O código do GetFEM++ foi otimizado de forma que o código é compilado em instruções antes da integração ponto a ponto, melhorando o custo computacional (Pommier e Renard, 2015).

Para termos lineares, tanto os códigos de alto quanto os baixo nível tem, aproximadamente, a mesma eficiência e o mesmo custo computacional. Através de mecanismos de pré-processamento no elemento de referência, termos lineares com transformações lineares fazem com que os códigos de baixo nível sejam mais rápidos. Porém, como o código de alto nível foi otimizado, o mesmo pode apresentar um desempenho muito melhor em termos complexos.

Uma linguagem específica foi desenvolvida para aproximar a descrição dos termos em relação às condições de contorno e as formulações fracas. Isto inclui nomes de variáveis e constantes, funções teste, gradientes, operadores matemáticos básicos, funções escalares predefinidas (sen, cos, pow, sqrt, heaviside,...), interpolações, acesso a vetores e matrizes.

4.1.5. Descrição do modelo e o elemento “Brick”

As descrições de modelo do GetFEM++ permitem uma construção rápida de algumas aplicações de MEF para termos complexos de EDPs. Para a proposta foram utilizadas linhas de código pré-definidas denominadas “Bricks”, que permitem o *input* de parâmetros. Um “Bricks” pode descrever uma equação ou uma condição de contorno, ou qualquer relação entre duas variáveis. Um “Bricks” depois de escrito será anexado à biblioteca geral, podendo ser usado em outros problemas e programas. Isto permite o reuso do código e uma biblioteca que fica cada vez mais completa (Pommier e Renard, 2015).

O objetivo do objeto “model” é descrever globalmente o modelo por meio de EDPs. O elemento consiste de duas listas: uma lista de variáveis e dados, ambas podendo ou não estarem associados com a malha (“mesh_fem”); e uma lista de “Bricks”. O “model” tem também como função é coordenar e produzir um sistema de equações lineares que monta a estrutura necessária para o “Bricks” construir seus termos. Caso o modelo seja linear será simplesmente um conjunto de equações com os graus de liberdade correspondentes. Caso o modelo seja não linear será representado por um sistema tangente linear (Pommier e Renard, 2015).

Um “Bricks” que tem um número arbitrário de termos, conseqüentemente uma matriz ou vetor deverá ser preenchido. A região na qual um “Bricks” atua é uma região da malha numerada e indicada nos termos. O “Bricks” seleciona a área do objeto “mesh_fem” da variável, na qual o termo laplaciano será adicionado ao “mesh_in” da lista de integração.

4.2 Softwares de domínio público & Python

Existem uma série de *softwares* comerciais que tem bibliotecas e um ambiente propenso para solucionar os problemas propostos. Assim, neste tópico discorre-se sobre as vantagens de se utilizar *softwares* abertos.

Primeiramente, os *softwares* de domínio público são gratuitos e podem ser baixados em qualquer computador. Em geral, apresentam códigos de livre acesso e, mesmo não parecendo intuitivo, em nível acadêmico a disponibilidade do código de funcionamento dos *softwares* é um fator a ser levado em conta. *Softwares* comerciais tem suas soluções como “*black box*”, ou seja, o usuário coloca um dado de entrada e o programa faz os cálculos e, ao final, dá uma resposta. O usuário não consegue ter certeza de como o programa realizou o processo.

Programas de domínio público dão liberdade para a manipulação dos próprios *softwares* e a possibilidade de adição de outras linhas. Devido ao alto número de usuários e programadores utilizando tais programas gera-se uma boa confiabilidade dos dados obtidos, pois os usuários criam uma força tarefa que corrige os erros encontrados nos códigos e adiciona novas linhas à códigos já existentes.

Assim, como os outros *softwares*, o Python também se caracteriza como uma linguagem de domínio público, diferente do Matlab, por exemplo. Python é citado em diversos sites de computação como uma das dez linguagens mais usadas no mundo, em 2016 ficou na quinta colocação de linguagem do ano (“Tiobe”, [s.d.]). Python é primeiramente uma linguagem simples e intuitiva. Além disso, possui poucas linhas de código, o que a torna menos propensa a problemas, maior facilidade de manutenção e mais fácil de localizar os erros no código.

5 PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

5.1 Softwares utilizados

Para o desenvolvimento deste trabalho foi utilizado o GetFEM++(Pommier e Renard, 2015), uma biblioteca de domínio público baseada em desenvolvimento colaborativo. Oferece um ambiente para a resolução de problemas complexos lineares e resolução de EDPs através do método de elementos finitos. GetFEM++ possui interface com várias linguagens de programação e trabalha com problemas 1D, 2D e 3D.

O GetFEM++ não possui um procedimento para gerar malhas complexas, assim foi utilizado o *software* GID (Melendo *et al.*, 2016), para a realização das malhas. O GID supri todas as necessidades ao se trabalhar com simulação numérica pois faz o pré-processamento, pós-processamento, as malhas, análises e a visualização dos resultados. Apesar de ser pago, oferece uma versão gratuita para usos em pesquisa, utilizando um número limitado de nós.

Os resultados e o pós processamento obtidos foram exibidos utilizando o *software* de visualização de dados MayaVi2 (Ramachandran e Varoquaux, 2011), sendo um *software* de visualização de malhas, vetores e dados de tensores. O MayaVi2 foi escolhido pois existe uma facilidade de exportação do formato VTK do programa em Python para o visualizador. Além de ser compatível com o sistema operacional escolhido.

A linguagem de programação utilizada foi o Python pois se trata de uma linguagem de alto nível, tornando-a simples e *user friendly* (“Python Language Reference, version 3.5”, 2015). Além disso Python é uma linguagem de domínio público. Todo o desenvolvimento do modelo foi realizado no ambiente de Linux, especificamente o sistema operacional Ubuntu ULT 1.6.

5.2 Parâmetros do Material

Como o foco deste trabalho foi desenvolver um modelo para simular a falha de um compósito laminado, as características do material foram obtidas do artigo de Bru et al (2016), o qual foi escolhido pois, o mesmo foi publicado para o propósito da disponibilização de dados para simulação.

O Material utilizado é um compósito de fibra de carbono com tecido não dobrável (NCF), 205 GSM e a resina utilizada foi epóxi Hunstman LY556. O processo de conformação do laminado foi por RTM. As propriedades obtidas por Bru et. al, estão descrita na Tabela 4.

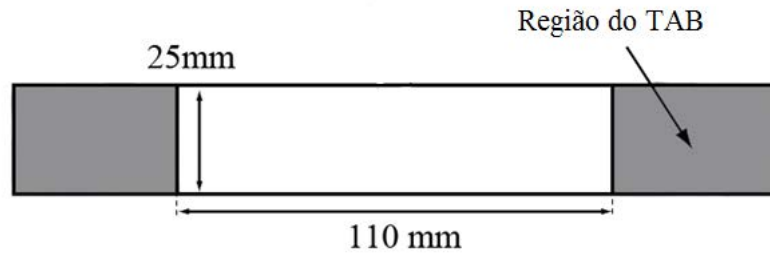
Tabela 4: Parâmetros materiais utilizados

Parâmetros	Valores
Fração em volume de fibras	61%
Direção das fibras	[0]
Número de camadas	10
Espessura do laminado	1,83 mm
E11	140,00 Gpa
E22	9,00 Gpa
U12	0,28
U21	0,029
G12, Estático	4.4 GPa
Tensão Máxima de Ruptura Média	1787 MPa

Fonte: (Bru et al, 2016)

O ensaio de tração foi realizado como tensão planar longitudinal, de acordo com ASTM D3039. O corpo de prova possuía TAB de 1 mm de espessura com fibra de vidro e resina epóxi.

Figura 17: Ilustração do corpo de prova utilizado



Fonte: Própria

A Figura 17 ilustra o esquema dos corpos de prova utilizados nos ensaios pelo artigo de Bru et. al,(2016).

5.3 Parâmetros da simulação

Para o caso da lâmina, foi considerado que não houve nenhum tipo de aplicação de carga nos contornos acima e abaixo no objeto. A lateral esquerda foi considerada como o lado engastado do modelo garantida pela condição de contorno de Dirichlet. O lado direito com a condição de contorno de Neuman foi o lado da aplicação de carga. O deslocamento é o parâmetro a ser solucionado pelas das Eq. 25.

$$\begin{cases} -div(\bar{\sigma}(u)) = 0, & \text{em } \Omega \\ \bar{\sigma}n = 0, & \text{para as faces} \\ \bar{\sigma}n = T, & \text{aresta direita} \\ u = 0, & \text{aresta esquerda} \end{cases} \quad (25)$$

Na qual, T é a tensão aplicada no contorno lateral direito e $\bar{\sigma}(u)$ é o tensor de Cauchy definido pelas Eq. 26.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(u) &= \lambda^* div(u)I + 2\mu \bar{\varepsilon}(u) \\ \bar{\varepsilon}(u) &= \frac{(\nabla u + (\nabla u)^T)}{2} \end{aligned} \quad (26)$$

Na qual, $\bar{\varepsilon}(u)$ é o tensor de deformação linearizado, I é a matriz identidade e λ^* e μ são os coeficientes de Lamé definidos pelas Eq. 27

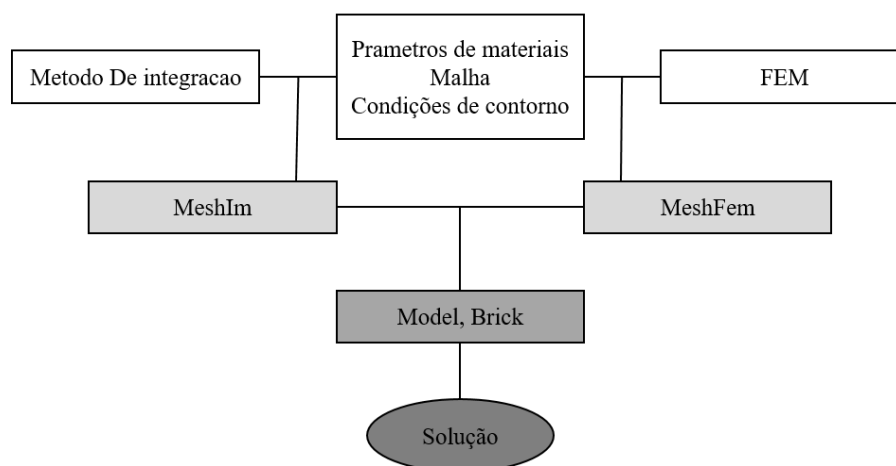
$$\begin{cases} \lambda = \frac{E_v}{(1+v)(1-2v)} \\ \mu = \frac{E}{2(1+v)} \\ \lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \end{cases} \quad (27)$$

Os coeficientes de Lamé descritos na eq. 27 são baseados em E módulos de elasticidade (E) e coeficiente de Poisson (ν).

5.4 Algoritmo de solução

O modelo é baseado nas equações constitutivas descritas no item 4.4.4. Neste trabalho a solução é baseado na ruptura de cada lamina estendida para a tensão de ruptura do compósito. A Figura 18 indica o fluxograma da solução do problema da deformação da lâmina.

Figura 18: Fluxograma da Solução do problema de deformação de elementos finitos



Fonte: Própria

Os parâmetros dos materiais, malhas e condições de contorno são inseridos no programa de script. Juntamente no programa de script são colocados as definições do método de integração e de elementos finitos. Os métodos são adicionados às malhas, criando novos objetos “MeshIm”, o qual é a aplicação dos métodos de integração na malha, e o “MeshFem”, que é a aplicação do método de elementos finitos na malha. O “Brick” tem a função de juntar os parâmetros, as malhas, os elementos “MeshIm” e “MeshFem” junto com uma equação constitutiva de solução. Após todas as etapas o problema é solucionado.

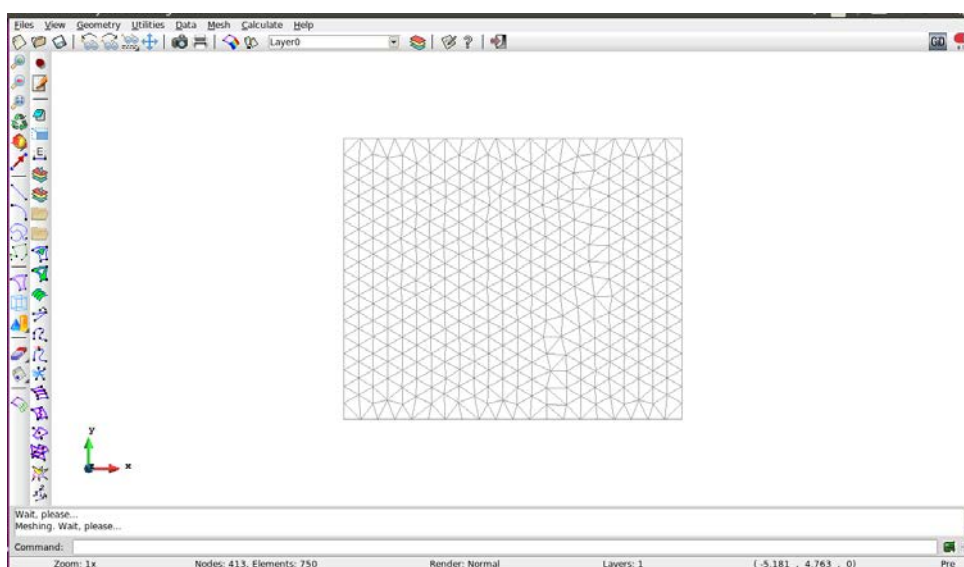
Os método o método usado para “MeshFem” foi “classical_fem(elements_degree)” e o método de integração foi “bgeot::dim_type(gmm::sqr(elements_degree))”.

6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

6.1 Planejamento da Malha e dos nós

A lâmina foi projetada no *software* GiD, conforme a Figura 19 e a malha foi desenvolvida com uma dimensão de 5 por 6 u.a. Três malhas foram utilizadas nas simulações, a fim de ilustrar o custo computacional do modelo e o efeito do refino de malha. Todas as três malhas apresentam elementos triangulares de tamanho 0,2; 0,3 e 0,5 u.a.

Figura 19: Malha desenvolvida no programa GiD, representando a Lamina do material compósito



Fonte: Própria

Com a diminuição do tamanho dos elementos triangulares da malha há um aumento no número dos elementos e dos nós, relação ilustrada pela Fonte: Própria

Figura 20 e pela Tabela 5. O GiD disponibiliza até 1250 nós na versão acadêmica gratuita. O Aumento do custo computacional, calculado para a tensão de 1700 MPa está ilustrado na Fonte: Própria

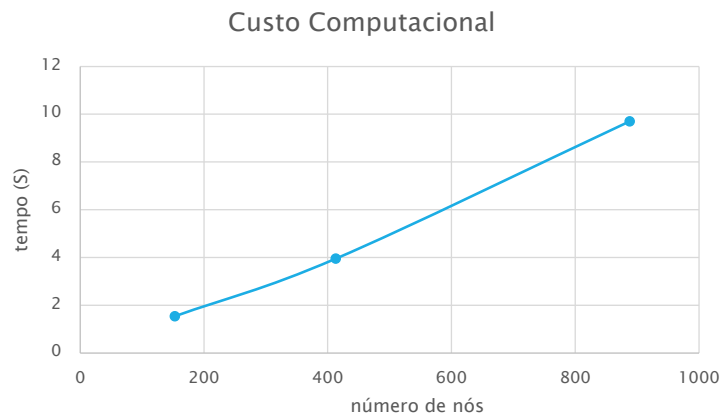
Figura 20.

Tabela 5: Relação do número de nós e o tempo computacional

Malha	Número de elementos	Número de elementos	Tempo (s)
0,2	1110	888	9,7
0,3	750	413	3,95
0,5	260	153	1,54

Fonte: Própria

Figura 20: Custo computacional



Fonte: Própria

A quantidade de nós reflete o refinamento da malha, assim, os mapas de tensões podem parecer mais próximos do real. Isto ocorre pois, aumenta-se o número de pontos a serem calculados nas equações do FEM. Por outro lado, o aumento excessivo da quantidade de nós e elementos aumenta sensivelmente o custo computacional. Dessa forma, para simulações em iniciais ou em fase de desenvolvimento é recomendado o uso de elementos mais grosseiros, deixando o refinamento para etapas mais avançada do trabalho (Chandrupatla e Belegundu, 2014). Em alguns casos, é possível delimitar regiões onde os elementos sejam menores, deixando o resto da malha sem o refino.

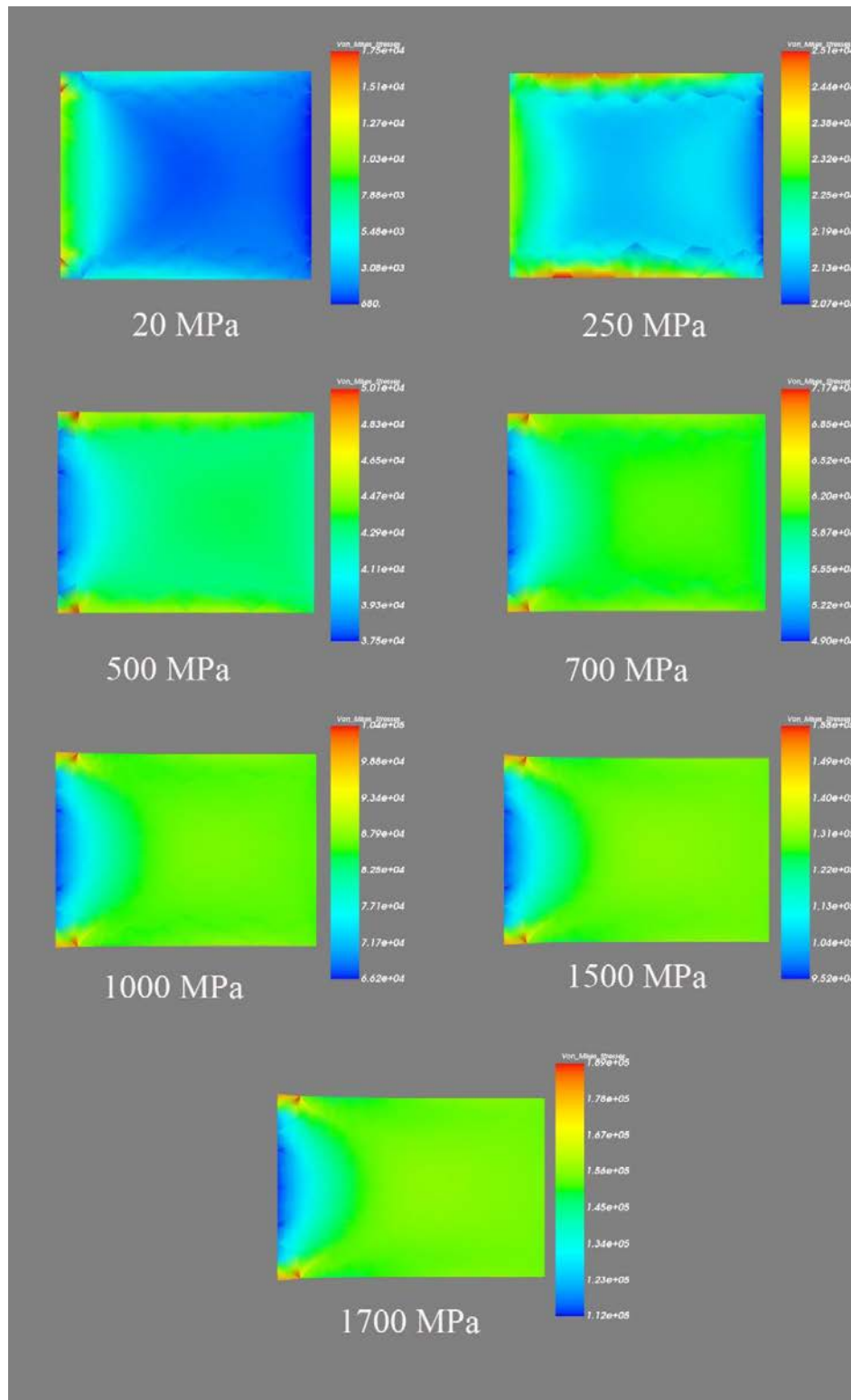
6.2 Simulação e Resultados

Para a simulação a lamina foi considerada homogênea, assim, as propriedades mecânicas utilizadas são calculadas segundos os dados da Tabela 2, que consideram a proporção fibra e resina. Realizou-se um modelo simples, no qual o material foi considerado isotrópico, a fim de familiarizar-se com a biblioteca GetFEM++. Essa familiarização foi

importante porque a própria biblioteca não possui blocos de código para a simulação de materiais anisotrópicos, dessa forma é necessário adaptar os recursos disponibilizados em equações genéricas que atendem ao modelo de materiais anisotrópicos ou ortotrópicos.

As Figuras 21, 22 e 23 demonstram os mapas de tensões e as deformações axiais do equivalentes de Von Mises, para as três malhas projetadas.

Figura 21: Mapa de tensões de Falha obtidos para malha de tamanho 0,5



Fonte: Própria

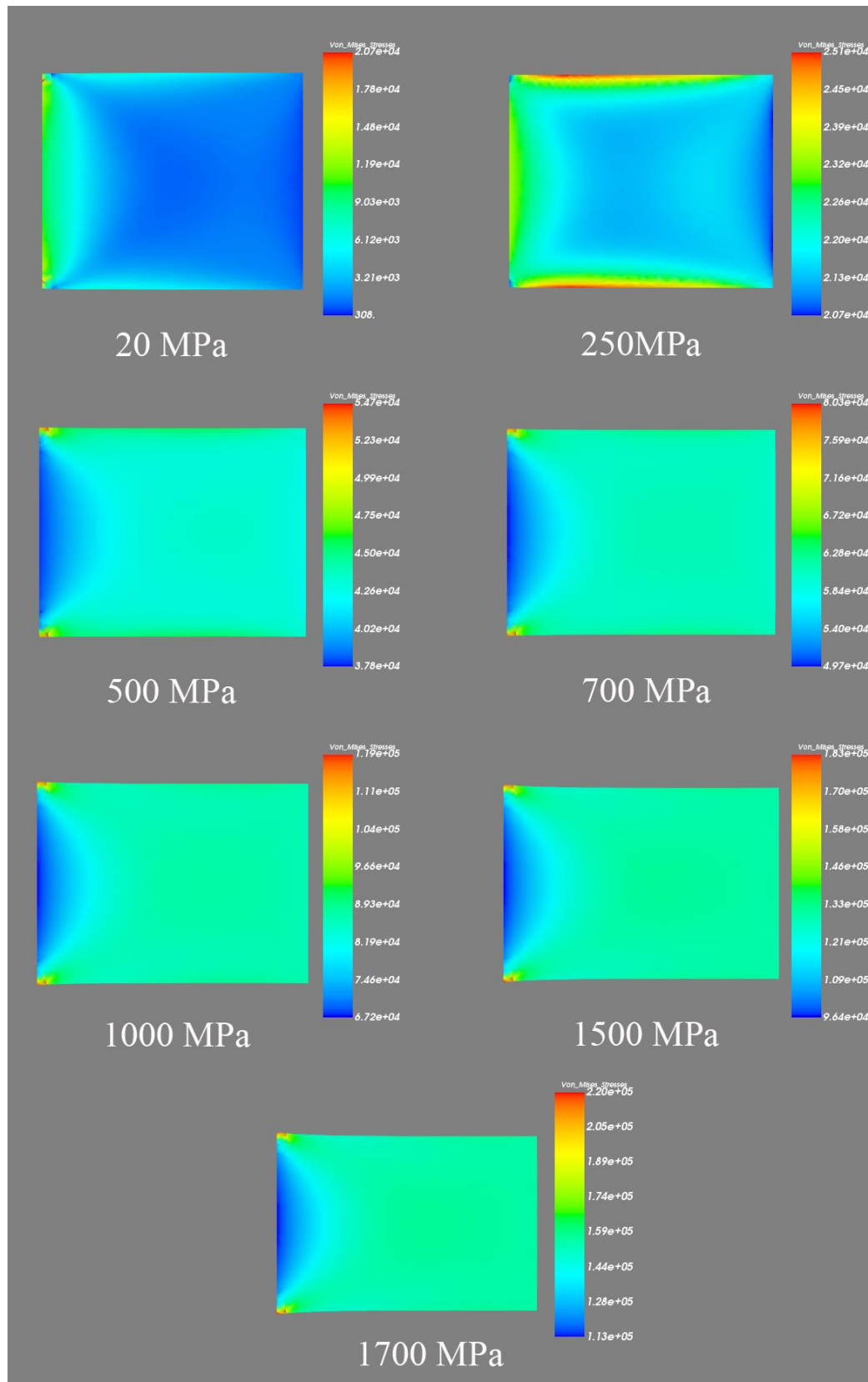
Na Figura 21 é possível observar as distribuições de tensões obtidas para a malha 0,5

nas 7 tensões simuladas. Claramente é possível observar a falta de refino na malha por leves descontinuidades na tensão, isto ocorre porque a aproximação foi realizada para poucos pontos no objeto, gerando mudanças abruptas de tensões nos mapas.

Observa-se que nas tensões de 20 e 250 MPa existe um acúmulo de tensão nas laterais do objeto, indicado pela coloração vermelha. Isto pode estar associado ao tipo de resposta que o material tem em relação à aplicação de carga. Além disso, este comportamento pode ser explicado por um desajuste do modelo para baixas tensões, visto que o critério utilizado trabalha melhor na zona plástica (Ponter, A. R. S. e Carter, 1997; Ponter, A.R.S. e Carter, 1997). Modelos propostos se encontram ajustados em certas faixas, excluindo outras faixas de respostas confiáveis.

Na tensão de 500 MPa é possível observar ainda um leve acúmulo de tensão nas laterais, indicado pela coloração amarela. A partir de 700 MPa as tensões se concentram nos cantos do lado engastado, o que é o mais compatível com a distribuição esperada. A partir de 1000 MPa é possível ver uma certa estricção do objeto, indicando deformação plástica. Em 1700 MPa a lâmina atinge a tensão máxima de 189 MPa, indicado pela coloração vermelha, nessa tensão o material é considerado fraturado.

Figura 22: Mapa de tensões da Falha obtidos para malha de tamanho 0,3

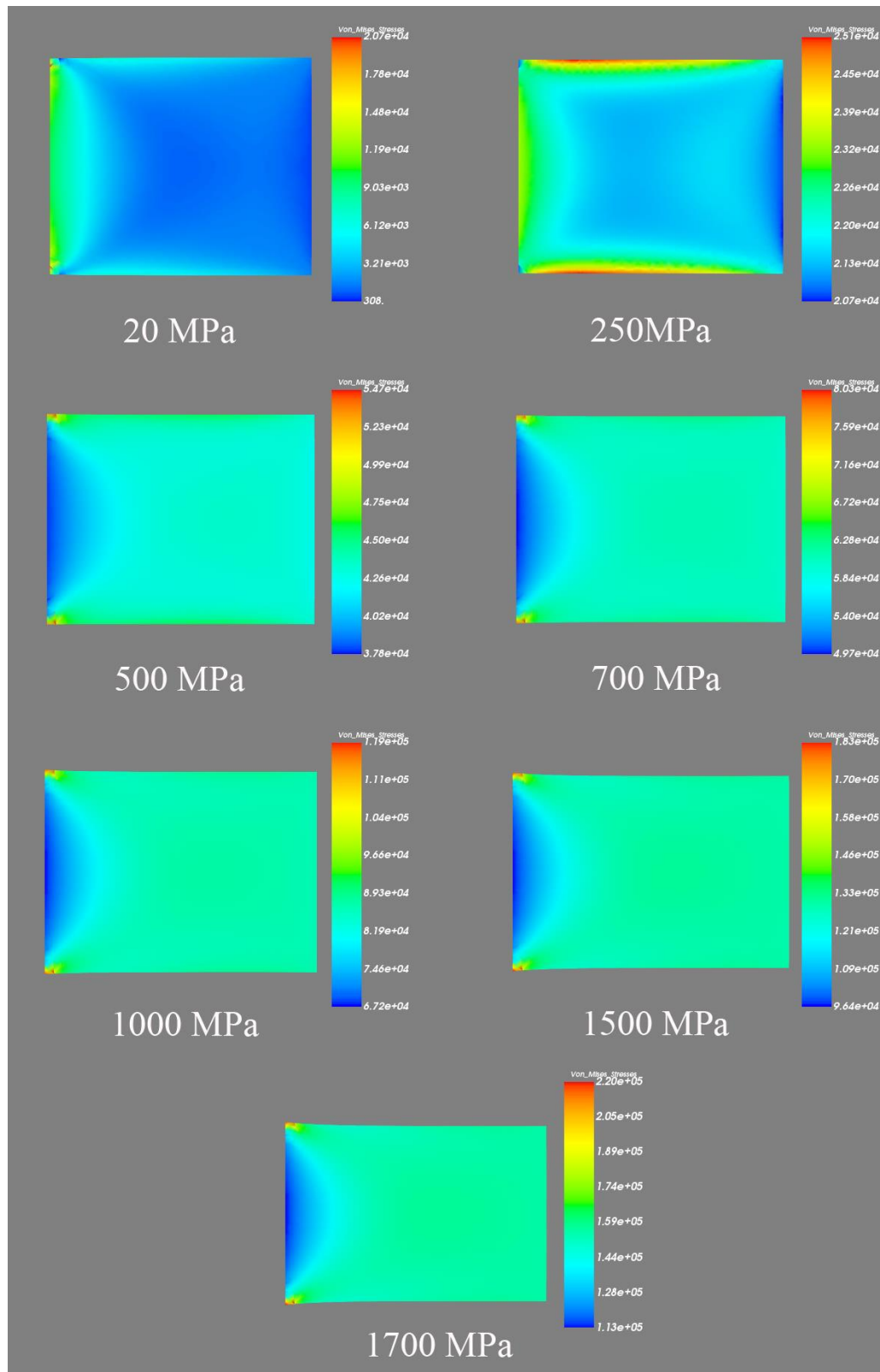


Fonte: Própria

Na Figura 22 observa-se que os mapas de tensões para a malha 0,3, sendo claramente perceptível a melhora das respostas obtidas com o refino da malha. Isto pode ser associado ao aumento no número de pontos usados na solução do problema, o que leva a uma suavização das transições de tensões nos mapas. Para a malha 0,3, o padrão de tensões obtido é semelhante ao da Figura 21, o que observou-se respostas não ajustadas nas tensões de 20 e 250 MPa. Na tensão aplicada de 500 MPa ainda há alguma concentração de tensão, caracterizada pela coloração verde nas laterais da malha. Observa-se que ao contrário da malha 0,5 o acúmulo é muito menos evidente, indicando que a malha mais grosseira não teve nós o suficiente para a resolução do problema de forma a ter uma representação real.

Semelhante ao observado na Figura 21 a partir de 700 MPa as tensões se concentram nos cantos do lado engastado. A partir de 1000 MPa é possível ver uma certa estricção do objeto, indicando deformação plástica. Em 1700 MPa a lâmina atinge a tensão máxima de 209 MPa, ilustrada pela coloração vermelha nas quinas, indicando fratura da lâmina.

Figura 23: Mapa de tensões da falha obtidos para malha de tamanho 0,2



Fonte: Própria

A Figura 23 apresenta os resultados obtidos para a malha 0,2, pode-se observar que

das três malhas utilizadas esta é a que apresenta a transição mais suave entre as tensões, dessa forma mais próximas aos fenômenos reais. Assim como as malhas de 0,5 e 0,3 apresenta acúmulo de tensão nas laterais do objeto nas tensões de 20 MPa e de 250 MPa, porém, por causa do refino de elemento, melhora a delimitação visual da tensão. Na tensão aplicada de 500 MPa ainda há um leve acúmulo de tensão, caracterizada pela coloração verde nas laterais da malha. Observa-se que ao contrário das outras malhas, o acúmulo é muito menor, indicando que a malha mais fina teve nós o suficiente para a resolução, de forma a ter uma representação real do problema.

De acordo com o observado nas outras malhas, a partir de 700 MPa as tensões se concentram nos cantos do lado engastado e a partir de 1000 MPa é possível observar deformações nas laterais do objeto. Em 1700 MPa a lâmina atinge a tensão máxima de 220 MPa, indicada pela coloração vermelha nas quinas, ocorrendo fratura da lâmina. Observa-se que com o refino da malha o valor de tensão máxima obtida pelo modelo é maior comparado com às outras.

A simulação de diferentes tensões é importante para que se localize a melhor faixa de resposta do modelo garantindo, dessa forma, a efetividade das respostas obtidas. Assim, pelos resultados obtidos, indica-se que o modelo não se encontra ajustado para baixas tensões.

7 CONCLUSÕES

Foi realizado o desenvolvimento de um modelo para a predição de falha de laminas de compósitos em uma situação de tração estática, pela qual foram obtidos os mapas de tensões. As simulações foram feitas para três malhas diferentes com o objetivo de ilustrar os efeitos de refino de elementos e do custo computacional nas próprias distribuições de tensões. Além disso, várias tensões foram simuladas para observar como os mapas de tensões mudam de acordo com a aplicação de carga. Foi também determinado como o modelo responde sob diferentes tensões aplicadas, evidenciando assim as faixas de tensões, na qual o modelo reproduz resultados confiáveis

REFERÊNCIAS

- ADVANI, S. G.; SOZER, E. M. **Process Modeling in Composites Manufacturing**. First ed. New York: Marcel Dekker, Inc, 2002.
- BATISTA, F. **Identificação de parâmetros Elásticos em placas finas de materiais compósitos**. [s.l.] UNICAMP, 2005.
- BEYERLEIN, I. J.; LANDIS, C. M. Shear-lag model for failure simulations of unidirectional fiber composites including matrix stiffness. **Mechanics of Materials**, v. 31, n. 5, p. 331–350, 1999.
- BOSCOLO, M.; BANERJEE, J. R. Layer-wise dynamic stiffness solution for free vibration analysis of laminated composite plates. **Journal of Sound and Vibration**, v. 333, n. 1, p. 200–227, 2014.
- BOWER, A. F. **Applied Mechanics of Solids**. first ed. Denvers: CRC Press, 2010.
- BUTUC, M. C. **Forming Limit Diagrams. Definition of Plastic Instability Criteria**. [s.l.] Porto University, 2004.
- CALLISTER, W. D. **Materials Science and Engineering: an Introduction**. 5 ed. ed. [s.l.: s.n.].
- CHANDRUPATLA, T. R.; BELEGUNDU, A. D. **Elementos Finitos**. 4. ed. [s.l.] Pearson education, 2014.
- COX, H. L. The elasticity and strength of paper and other fibrous materials. **British Journal of Applied Physics**, v. 3, n. 3, p. 72–79, 1952.
- DEMASI, L. Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part I: Governing equations. **Composite Structures**, v. 87, n. 3, p. 195–205, 2009.
- FISH, J.; BELYTSCHKO, T. **Um primeiro Curso em elementos finitos**. Tradução e ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- GAY, D.; HOA, S. V. **Composite Materials: Design and Applications**. First ed. Danvers: CRC Press, 2007.
- HASHIMOTO, M. *et al.* Composites : Part A Prediction of tensile strength of discontinuous carbon fiber / polypropylene composite with fiber orientation distribution. **Composites Part A**, v. 43, n. 10, p. 1791–1799, 2012.
- JONES, R. M. **Mechanics of Composite Materials**. 2 ed. ed. New York: Taylor & Francis, 1999.
- KAW, A. K. **Mechanics of Composite Materials**. 1 ed. ed. Florida: CRC Press, 1997.

KELLY, A.; TYSON, W. R. Tensile properties of fibre-reinforced metals: Copper/tungsten and copper/molybdenum. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 13, n. 6, p. 329–350, 1965.

LEVY NETO, F.; PARDINI, L. C. **Compósitos Estruturais**. 1. ed. [s.l.] Editora Edgard Blucher LTDA, 2006.

MELENDO, A. *et al.* **GiD**, 2016.

NAIRN, J. A. On the use of shear-lag methods for analysis of stress transfer in unidirectional composites. v. 26, p. 63–80, 1997.

OKABE, T.; SASAYAMA, T.; KOYANAGI, J. Micromechanical simulation of tensile failure of discontinuous fiber-reinforced polymer matrix composites using Spring Element Model. **Composites Part A: Applied Science and Manufacturing**, v. 56, p. 64–71, 2014.

POMMIER, J.; RENARD, Y. **GetFEM++ project**, 2015. Disponível em: <<http://download.gna.org/getfem/html/homepage/index.html>>

PONTER, A. R. S.; CARTER, K. F. Limit state solutions, based upon linear elastic solutions with a spatially varying elastic modulus. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 140, n. 96, p. 237–258, 1997.

PONTER, A. R. S.; CARTER, K. F. Shakedown state simulation techniques solutions based on linear elastic solutions. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 140, n. 3, p. 259–279, 1997.

Python Language Reference, version 3.5. Python Software Foundation, , 2015. Disponível em: <<http://www.python.org>>

RAMACHANDRAN, P.; VAROQUAUX, G. Mayavi: 3D Visualization of Scientific Data. **IEEE Computing in Science & Engineering**, v. 13, n. 2, p. 40–51, 2011.

SASAYAMA, T. *et al.* Prediction of failure properties of injection-molded short glass fiber-reinforced polyamide 6,6. **Composites Part A: Applied Science and Manufacturing**, v. 52, p. 45–54, 2013.

SAYAS, F. J. **A gentle introduction to the Finite Element Method An introduction**. Disponível em: <<http://www.math.udel.edu/~fjsayas/anIntro2FEM.pdf>>. Acesso em: 10 ago. 2016.

SOUZA, KERLLES RAFAEL PEREIRA. **Análise de Tensões em Placas Finas Laminadas sob Carregamento Dinâmico Usando o Método dos Elementos de Contorno**. [s.l.] UNICAMP, 2009.

STEWART, J. **Cálculo, Volume II**. 3. ed. [s.l.] Cengage, 2013.

Tiobe. Disponível em: <www.tiobe.com>. Acesso em: 5 set. 2016.

WANG, F. *et al.* Micromechanical modelling of the progressive failure in unidirectional composites reinforced with bamboo fibres. **Mechanics of Materials**, v. 94, p. 180–192, 2016.