



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Campus de Ilha Solteira

PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**ESTUDO DE CAMPO ELÉTRICO EM LINHA DE
TRANSMISSÃO UTILIZANDO O
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

Elson Borges da Silva Filho

Prof. Dr. Luiz Fernando Bovolato
Orientador

Dissertação de Mestrado

Ilha Solteira – SP
Abril de 2008

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**“Estudo de Campo Elétrico em Linha de Transmissão
Utilizando o
Método dos Elementos de Contorno”**

ELSON BORGES DA SILVA FILHO

Orientador: Prof. Dr. Luiz Fernando Bovolato

Dissertação apresentada à Faculdade de
Engenharia - UNESP – Campus de Ilha
Solteira, para obtenção do título de
Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de Conhecimento: Automação.

Ilha Solteira – SP
Abril/2008

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP - Ilha Solteira.

S586e	Silva Filho, Elson Borges da. Estudo de campo elétrico em linha de transmissão utilizando o método dos elementos de contorno / Elson Borges da Silva Filho -- Ilha Solteira : [s.n.], 2008 207 f. : il. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2008 Orientador: Luiz Fernando Bovolato Bibliografia: p. 154-155 1. Métodos de elementos de contorno. 2. Linhas elétricas aéreas. 3. Campos elétricos. 4. Maxwell, Equações de.
-------	--



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Estudo de Campo Elétrico em Linha de Transmissão utilizando o Método dos Elementos de Contorno

AUTOR: ELSON BORGES DA SILVA FILHO

ORIENTADOR: Prof. Dr. LUIZ FERNANDO BOVOLATO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de MESTRE em ENGENHARIA ELÉTRICA pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. LUIZ FERNANDO BOVOLATO

Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. SERGIO KUROKAWA

Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. AFONSO JOSÉ DO PRADO

Departamento de Engenharia Elétrica / Universidade Estadual de Londrina

Data da realização: 28 de março de 2008.

Presidente da Comissão Examinadora
Prof. Dr. LUIZ FERNANDO BOVOLATO

DEDICATORIA

Dedico este trabalho aos meus pais,
Elson Borges e Marieta Parreira e aos
meus irmãos, Livia e Vinicius.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Luiz Fernando Bovolato pela atenção esclarecedora, transmitindo tranquilidade e confiança para a continuidade do trabalho. A ele gostaria de expressar minha gratidão pela compreensão e amizade oferecidas e admiração pelo caráter e profissionalismo incontestável.

Aos professores do Programa de Engenharia Elétrica e Matemática pela colaboração extra quando necessitei de seus conhecimentos.

Aos amigos e companheiros Rogério Marcos, Fernando Brandão, Fábio Durão, Wilson Borges e Esrom Afonso pelos momentos compartilhados, pela amizade e pela ajuda prestada.

A CAPES, pelo apoio financeiro desta pesquisa.

Aos amigos que adquiri, como um prêmio extra.

Aos meus pais Elson e Marieta e irmãos Livia e Vinicius pela compreensão e estímulo fundamental a conclusão desta etapa na minha carreira profissional.

A Deus que está nos abençoando com este projeto.

OBJETIVO DESTE TRABALHO

O objetivo deste trabalho é estudar o campo elétrico utilizando o método dos elementos de contorno e também desenvolver o método para o cálculo de potencial escalar elétrico e campo elétrico, que será utilizado para cálculo de campos em linhas de transmissão.

Resumo

Este trabalho analisa a aplicação em linhas de transmissão do método dos elementos de contorno para cálculo de potencial e campo elétrico, com um enfoque em eletrostática. O método dos elementos de contorno baseia-se numa formulação integral que elimina a discretização do domínio, restando apenas o contorno, permitindo o cálculo do potencial e do campo elétrico no contorno e na região estudada. O trabalho configura-se como uma revisão sobre eletrostática, ressaltando as equações de Laplace e Poisson, que serão utilizadas para encontrar as equações integrais do contorno. Há também vários tópicos relacionados ao campo elétrico de linhas de transmissão, bem como, às normas brasileiras e recomendações internacionais que devem ser utilizadas no projeto de linhas de transmissão. O método dos elementos de contorno utiliza tais equações integrais para encontrar o potencial e o campo no contorno, e após conhecidos o potencial e o campo no contorno, pode-se aplicar o método em todo o domínio, obtendo o potencial e o campo. Para isso, apenas o contorno do domínio de interesse deve ser discretizado, o que trás uma enorme vantagem sobre os métodos que utilizam formulação diferencial. Neste trabalho, serão descritas as principais características do código computacional desenvolvido e suas sub-rotinas mais importantes. Para validar o programa, os resultados serão comparados com aqueles calculados por um procedimento analítico, sendo mostrada a eficiência da discretização do solo. São apresentados os resultados obtidos da análise do campo elétrico gerado por algumas silhuetas de linhas de transmissão. Os valores do campo elétrico gerado por estruturas compactas são comparados com estruturas convencionais e estruturas reduzidas (semi-compactas), também serão comparados os valores do gradiente de potencial na superfície dos condutores e suas capacitâncias equivalentes.

Palavras-chave: Método dos Elementos de Contorno (MEC), linhas de transmissão, campo elétrico, potencial elétrico, linhas compactas, equações de Maxwell.

Abstract

This paper analyses the application in transmission lines of the Boundary Element Method (BEM) of the calculation of potential and electric field, with a focus on electrostatic. The Boundary Element Method is based on an integral formulation that eliminates the discretisation of the domain, remaining only the contour, allowing the calculation of the potential and the electric field in the contour and in the region studied. The work is configured as revision on electrostatic, underscoring the equations of Laplace and Poisson, which will be used to find the integral equations of the contour. There are also several topics related to the electric field of transmission lines, as well as to the standards Brazilian and international recommendations to be used in the design of transmission lines. The Boundary Element Method uses such integral equations for finding the potential and electric field in the contour, and after having known the potential and electric field in the contour, the BEM can be applied in the whole domain, and getting the potential and electric field. Therefore, only the contours of the domain of interest should just be discretized, which backward an enormous advantage on the methods that use formulation differential. This paper will describe the main characteristics of computer code developed and their sub-routines more important. To validate the program, the results will be compared with those calculated by an analytic procedure, being shown the efficiency of discretisation of the soil. The results obtained from analysis of the electric field generated by some silhouettes of transmission lines are presented. The values of the electric field generated by compact structures are compared with conventional structures and reduced structures, also will be compared the values of the gradient of potential on the surface of the conductors and their equivalents capacitances.

Keywords: Boundary Element Method (BEM), transmission line, electric field, electric potential, compact line, Maxwell equation.

LISTA DE SÍMBOLOS

∇	$\Rightarrow$	Operador nabla ou del
∇^2	$\Rightarrow$	Operador Laplaciano
E	$\Rightarrow$	Derivada do potencial em relação à direção normal (intensidade do campo elétrico)
D	$\Rightarrow$	Densidade de fluxo elétrico
H	$\Rightarrow$	Intensidade de campo magnético
J	$\Rightarrow$	Densidade de corrente elétrica
B	$\Rightarrow$	Densidade de fluxo magnético
ε_o	$\Rightarrow$	Constante de permissividade do vácuo ou absoluta, igual a 8,859e-12 F/m
ε	$\Rightarrow$	Constante de permissividade do meio
ε_r	$\Rightarrow$	Constante de permissividade relativa ao meio
V ou U	$\Rightarrow$	Diferença de potencial ou potencial
ρ	$\Rightarrow$	Densidade de carga
Ω	$\Rightarrow$	Domínio
Γ	$\Rightarrow$	Contorno
V^*	$\Rightarrow$	Solução fundamental do potencial elétrico
P	$\Rightarrow$	Ponto de observação
i	$\Rightarrow$	Ponto de aplicação da função impulsiva ou ponto fonte
Q ou q	$\Rightarrow$	Carga elétrica
C	$\Rightarrow$	Capacitância
h	$\Rightarrow$	Altura do condutor ao solo
D_u	$\Rightarrow$	Distância, em metros, numericamente igual a tensão
a	$\Rightarrow$	Distância básica, em metros, obtida da Tabela (2.4)
h_s	$\Rightarrow$	Altura de segurança

LISTA DE ABREVIACÕES E SIGLAS

MEC	⇒	Método dos Elementos de Contorno
MDF	⇒	Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo
MEF	⇒	Método dos Elementos Finitos
MSC	⇒	Método de Simulação de Carga
TLM	⇒	Método Matricial das Linhas de Transmissão
MoM	⇒	Método dos Momentos
ICNIRP	⇒	International Commission on Non-Ionizing Radiation Protection
IRPA	⇒	International Radiation Protection Association
ACGIH	⇒	American Conference of Governmental Industrial hygienists
ABNT	⇒	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ABRICEM	⇒	Associação Brasileira de Compatibilidade Eletromagnética
NBR	⇒	Norma Brasileira
NR	⇒	Norma Regulamentadora do Ministério do Trabalho
OMS	⇒	Organização Mundial da Saúde
RI	⇒	Radio Interferência
RA	⇒	Ruído Audível
CAA	⇒	Cabo de Alumínio com Alma de Aço
Dif. %	⇒	Diferença percentual

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1: Introdução		1
1.1	Objetivo e justificativa	4
1.2	Idéia básica do Método dos Elementos de Contorno (MEC)	5
1.3	Organização do trabalho	9
CAPÍTULO 2: Campo elétrico em linhas de transmissão		11
2.1	Equações de Maxwell	11
2.2	Equações de Laplace e Poisson	13
2.3	Condições de contorno	15
2.4	Campo elétrico em uma linha de transmissão	17
2.5	Superfície eqüipotencial de uma linha de transmissão	20
2.6	Carga elétrica de uma linha de transmissão	22
2.7	Efeito da terra no campo elétrico de uma linha de transmissão	23
2.8	Nível de campo elétrico	27
	2.8.1 Normas e recomendações brasileiras	28
	2.8.2 Recomendações ICNIRP	29
	2.8.3 Recomendações da IRPA	31
2.9	Alturas e distâncias de segurança	32
2.10	Medição de campo elétrico em linhas de transmissão	35
2.11	Revisão do capítulo	37
CAPÍTULO 3: Formulação da Equação Integral do Contorno		38
3.1	Método dos resíduos ponderados	39
	3.1.1 Formulação fraca	44
3.2	Métodos de solução da equação integral	45
	3.2.1 Método de contorno	46
3.3	Método dos pontos de colocação	47
3.4	Solução fundamental	49
	3.4.1 Validade da solução fundamental	52
3.5	A equação integral para o cálculo de V e E	55

3.6	Revisão do capítulo	62
CAPÍTULO 4: O Método dos Elementos de Contorno		63
4.1	Discretização do contorno	63
4.1.1	Aproximação das variáveis do problema	68
4.1.1.1	Aproximação constante	69
4.1.1.2	Aproximação linear	70
4.1.1.3	Aproximação quadrática	72
4.1.2	Tratamento de vértices da geometria	74
4.2	Transformação das equações integrais em equações algébricas	77
4.3	Sistema de equações	79
4.4	Obtenção das variáveis no domínio	80
4.5	Domínios infinitos	81
4.6	Métodos de integração	82
4.6.1	Integração numérica	83
4.6.2	Integração analítica	85
4.6.2.1	Integração com aproximação constante do contorno	88
4.6.2.2	Integração com aproximação linear do contorno	89
4.6.3	Cálculo da integral de domínio	91
4.7	Revisão do capítulo	92
CAPÍTULO 5: Implementação computacional		93
5.1	Idéia básica do programa	93
5.2	Considerações sobre a implementação computacional	94
5.2.1	Domínio em estudo	94
5.2.2	Geometria do contorno	95
5.2.3	Discretização do contorno	95
5.2.3.1	Exemplo de discretização	96
5.2.4	Montagem das matrizes	98
5.2.5	Resolução do sistema de equações $AX = F$	98
5.2.6	Cálculo das incógnitas fora do contorno	99

5.3	Descrição do programa computacional	99
5.3.1	Definição do arquivo de entrada	100
5.3.2	Definição do arquivo de saída	101
5.4	Sub-rotinas	102
5.4.1	Sub-rotina CALCONT	105
5.4.2	Sub-rotina INTANALITICA	107
5.4.3	Sub-rotina INTNUMERICA	108
5.4.4	Sub-rotina METGAUSS	110
5.4.5	Sub-rotina CALCPOTCAMP	112
5.5	Revisão do capítulo	114
CAPÍTULO 6: Validação do programa		115
6.1	Método analítico do cálculo do potencial e campo elétrico	115
6.2	Linha bifilar	117
6.3	Linha de transmissão trifásica	126
6.3.1	Método das imagens e discretização do solo	131
6.3.2	Largura da faixa do solo a ser discretizada	133
6.4	Revisão do capítulo	134
CAPÍTULO 7: Linhas compactas		135
7.1	Justificativa a compactação	135
7.2	Estruturas convencionais e compactas	136
7.3	Resultado das comparações	140
7.3.1	Gradiente de potencial elétrico na superfície do condutor	141
7.3.2	Capacitância dos condutores	144
7.3.3	Campo elétrico ao nível do solo	146
7.3.4	Solo plano perfeito e solo irregular	149
7.4	Revisão do capítulo	150
CAPÍTULO 8: Conclusão		152
Referências Bibliográficas		154

APÊNDICES

APÊNDICE A – Arquivo de entrada do programa CALCMEC	156
APÊNDICE B – Arquivo de saída do programa CALCMEC	163
APÊNDICE C – Silhuetas de estruturas	169
APÊNDICE D – Solução por meio do método de contorno	177
APÊNDICE E – Exemplo numérico do programa CALCMEC	181
APÊNDICE F – Programa em Matlab para discretização dos condutores	205

CAPÍTULO 1: Introdução

A utilização de linhas de alta tensão dentro de áreas urbanas é um problema presente em todas as grandes cidades. Sendo assim, é muito importante conhecer o campo elétrico ao redor dos isoladores, da torre de transmissão e no nível do solo.

A compactação de linhas de transmissão de 138 kV e 69 kV, além de considerável economia de investimento, justifica-se pelo crescente uso desse nível de tensão como tensão de subtransmissão em zonas urbanas e suburbanas, onde as faixas de servidão, fatores ambientais e limites de campos podem tornar-se fatores de grande importância.

O campo elétrico gerado por linhas de transmissão aéreas deve ser estimado na fase de projeto da linha, sendo que a intensidade desse campo não deve exceder os valores máximos admissíveis para ambientes urbanos. A distribuição de tal campo depende dos parâmetros da linha de transmissão e podem também depender da região que envolve a linha.

Outro fato que leva à necessidade do cálculo de campos eletromagnéticos é a interferência em elementos externos à linha, como linhas férreas, oleodutos, gasodutos, entre outros. A indução de tensão em tais elementos pode causar grandes danos e colocar vidas em risco.

A maioria dos problemas que necessita do cálculo do campo elétrico apresenta complexidade geométrica, sendo esses problemas descritos por leis complexas. Assim sendo, as soluções analíticas dos mesmos, que correspondem às soluções exatas, são praticamente

impossíveis de serem obtidas em decorrência da complexidade geométrica, sendo então necessária a obtenção de soluções aproximadas por meio de métodos numéricos, onde também são feitas simplificações nas leis constitutivas dos materiais e em suas geometrias.

Os métodos numéricos empregados como ferramentas básicas na elaboração de modelos computacionais sempre foram os métodos das diferenças finitas e dos elementos finitos, desenvolvidos já há algum tempo. O método dos elementos de contorno e a sua aplicação como uma alternativa para a obtenção de soluções numéricas em quase todos os campos da engenharia representa um avanço significativo que ocorreu nessa área do conhecimento nos últimos anos. Em muitos problemas, comprovadamente, esse método é uma alternativa mais precisa que permite a obtenção de respostas mais confiáveis quando comparadas com os métodos usuais, sendo que em algumas aplicações as equações integrais são representações exatas do modelo matemático utilizado para representar o problema físico (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1992).

A resolução de problemas práticos de engenharia por meio da modelagem matemática dos fenômenos físicos envolvidos sempre foi uma tarefa de difícil implementação. Com o surgimento dos computadores, a análise e solução desses problemas foram profundamente modificadas pelo desenvolvimento dos computadores associado aos avanços das técnicas numéricas, tornando-se de grande auxílio nesse aspecto. Tornou-se mais barato e rápido analisar um modelo do que construir vários protótipos.

Na engenharia, alguns dos principais métodos numéricos utilizados são (POUZADA, 1999):

- Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo (FDTD em Inglês);

- Método dos Elementos Finitos (MEF);
- Método Matricial das Linhas de Transmissão (TLM em Inglês);
- Método de Simulação de Carga (MSC);
- Método dos Elementos de Contorno (MEC);

Todas essas técnicas podem ser vistas como versões particularizadas de uma abordagem bem mais geral do Método dos Resíduos Ponderados, ou ainda do Método dos Momentos (MoM) (POUZADA, 1999).

Cada método foi aplicado inicialmente em diferentes campos da engenharia: FDTD e TLM surgiram na engenharia elétrica; MEF e MEC surgiram na engenharia mecânica e civil. As diferenças entre eles consistem na utilização de diferentes funções de ponderação e no número de integrais por partes efetuadas na equação do problema. Cada método tem sua particularidade, que pode torná-lo mais conveniente que o outro para uma determinada situação.

Uma maneira de classificar esses métodos diz respeito à abordagem, que pode ser diferencial ou integral. Isso influi diretamente no tipo de discretização que é feita. Métodos diferenciais necessitam fazê-la em toda a região estudada. O método dos elementos de contorno que tem por sigla MEC, é um método de formulação integral.

Em particular, para aplicações de engenharia elétrica, a literatura tem indicado o sucesso da utilização do MEF para problemas de domínio fechado e o MSC para os problemas de domínio aberto, e na grande maioria dos casos, para problemas onde apenas um material dielétrico é envolvido na modelagem. O MEC também tem sido aplicado na resolução de problemas da área elétrica de domínio aberto quando mais de um material dielétrico é envolvido (BECKER, 1992).

1.1 – Objetivo e justificativa

O objetivo deste trabalho é desenvolver um estudo da intensidade do campo elétrico de linhas de transmissão em zonas urbanas e suburbanas, fazendo uma comparação entre as estruturas convencionais e compactas utilizadas atualmente. Para isso, será utilizado o Método dos Elementos de Contorno (MEC) para obter numericamente o campo elétrico.

Serão analisadas linhas de transmissão da classe de tensão 69 kV e 138 kV, considerando a menor altura dos condutores onde se encontra os maiores valores de campo elétrico. A necessidade de se calcular o campo elétrico no nível do solo se deve à utilização com maior frequência, de estruturas compactas na construção das linhas mencionadas, muitas vezes com faixas de passagem reduzidas ou inexistentes. Também estudos que mostram se a intensidade do campo elétrico gerado por essas linhas compactas está dentro das normas brasileiras. Para essa análise serão consideradas várias configurações de condutores normalmente utilizados em estruturas compactas.

Para esse fim, foi desenvolvida uma ferramenta computacional baseada no Método dos Elementos de Contorno. Isso permite sua aplicação a problemas bidimensionais. O Método dos Elementos de Contorno permite que o campo e o potencial elétrico gerado pelas linhas sejam encontrados por meio da resolução de integrais de forma numérica.

A utilização do MEC nesse trabalho é justificada por tal método ser uma ferramenta nova e de pouca utilização na engenharia elétrica, mas que tem grandes vantagens quando aplicada a problemas que envolvam domínios infinitos ou semi-infinitos.

1.2 – Idéia básica do MEC

A maioria dos problemas de engenharia apresenta complexidade geométrica, sendo esses problemas descritos por leis bastante complexas. Os métodos numéricos empregados como ferramentas básicas na elaboração de modelos computacionais sempre foram os métodos das diferenças finitas e dos elementos finitos. O método dos elementos de contorno e a sua aplicação como uma alternativa para a obtenção de soluções numéricas em quase todos os campos da engenharia representa um avanço significativo que ocorreu nessa área do conhecimento nos últimos anos. Em muitos problemas, comprovadamente, esse método é uma alternativa mais precisa que permite a obtenção de respostas mais confiáveis quando comparadas com as dos métodos usuais, sendo que em algumas aplicações as equações integrais são representações exatas do modelo matemático utilizado para representar o problema físico (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1992).

Em aplicações que envolvam domínios não lineares, é necessário a discretização de todo o domínio de estudo. Mas, na grande maioria dos casos, não é necessário discretizar o domínio da estrutura, apenas o contorno da superfície estudada, simplificando com isso a malha da estrutura e facilitando eventuais modificações na malha e diminuindo o tempo de processamento do programa. Uma outra vantagem é que na maioria dos casos, são desnecessárias malhas muito refinadas para obtenção de respostas com boa precisão.

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) pode ser utilizado na solução de problemas de análise de temperatura, tensão, torção, difusão, escoamento de fluidos, acústica, eletrostática, dentre outros. Ele é particularmente mais indicado em casos de concentração de tensão ou outro tipo de variável, assim como nos casos em que o domínio em estudo estenda-se ao infinito ou semi-infinito. Nesse segundo caso, o uso do MEC facilita bastante a análise,

já que no estudo de uma estrutura em contato com um meio infinito, não é necessário fazer a discretização do meio, mas somente da estrutura em questão (FERNANDES, 2005).

O Método dos Elementos de Contorno (MEC), cuja formulação é baseada em equações integrais, surgiu há pouco mais de 30 anos. Porém, desde o início do século passado, a partir do trabalho de Fredholm (1903), as equações integrais são utilizadas para a solução de alguns problemas físicos. Na década de sessenta, surge à primeira formulação do método dos elementos de contorno dita indireta, de autoria de Kupradze (1965), aplicada a problemas potenciais elásticos, citado por Fernandes (2005).

Somente a partir de 1967, com a publicação do primeiro artigo sobre a formulação direta do método das equações integrais de contorno, para problemas elásticos bidimensionais, de autoria de Rizzo (1967), é que os métodos integrais começam a despertar interesse na comunidade científica. A generalização do método para sua utilização ampla em problemas de engenharia ocorre com o trabalho de Lachat (1975), quando as técnicas de resolução das equações integrais começam a ser vistas como métodos numéricos (citado por FERNANDES, 2005).

O método passa a ser conhecido como Método dos Elementos de Contorno, com a publicação do primeiro livro pelo professor Brebbia (1978), onde o autor formula o método a partir do método dos resíduos ponderados, usando uma função ponderada conveniente (FERNANDES, 2005).

O método dos elementos de contorno é principalmente utilizado nas áreas da engenharia civil e da mecânica. Apesar do MEC se apresentar como uma formulação alternativa ao método dos elementos finitos, principalmente por causa de necessitar de discretizar apenas o contorno da região estudada, e com isso abaixar a ordem da dimensão do

problema, ele ainda não é tão utilizado quanto o FEM. O MEC conta com um centro de pesquisas, o Wessex Institute of Technology, localizado em Southampton, Inglaterra, que atua como forte divulgador e patrocinador do assunto.

Até o presente momento, a pesquisa bibliográfica não apresenta nenhuma dissertação de mestrado e tese de doutorado no Brasil relacionada à aplicação do MEC em linhas de transmissão. São encontrados alguns trabalhos com aplicação em guias de ondas e microondas.

Krajewski (1997) apresenta um dos principais artigos dirigido ao cálculo do campo elétrico utilizando o MEC, sendo o método empregado para uma análise da vizinhança de linhas de transmissão de alta tensão em corrente alternada, considerando a influência de estruturas próximas à linha e irregularidades na superfície do solo.

Zhao e Comber (2000) utilizaram o MEC para o cálculo do campo elétrico em isoladores de linhas de transmissão, considerando o efeito da torre, dos condutores e dos anéis de corona. Foram modelados separadamente os isoladores, sem levar em conta o efeito das torres e condutores.

Zhang et al. (2006) utilizaram o MEC acoplado a outros métodos para o cálculo do campo elétrico em isoladores de linhas de transmissão de alta tensão. O MEC foi acoplado ao método de simulação de carga para o cálculo do campo elétrico na torre e nos isoladores. Para tanto, o MEC foi usado no cálculo dos isoladores e o MSC foi utilizado para o cálculo da estrutura da torre.

Os métodos de contorno têm algumas vantagens importantes sobre os métodos de domínio (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1992):

- Trabalha unicamente com o contorno do domínio de cálculo. É muito mais simples definir o contorno que definir o domínio completo. Em particular, o MEC só requer a discretização do contorno, trazendo uma redução da dimensão do problema com respeito ao MEF e MDF;
- Pode trabalhar muito mais facilmente com problemas que envolvem domínios infinitos;
- O mesmo grau de precisão é obtido nas duas variáveis duais do problema (por exemplo: deslocamentos e tensões, potenciais e fluxos, potenciais elétricos e campo elétrico, etc.).

Por outro lado, os métodos de contorno trabalham com os valores das funções incógnitas no contorno. Então, para se calcular os valores em pontos do domínio, é necessário estabelecer um algoritmo complementar.

Resumidamente, o MEC consiste em obter a solução das equações diferenciais que descrevem o comportamento de um corpo no seu domínio, por meio da solução de equações integrais sobre o contorno. Isso reduz de uma unidade as dimensões de problemas lineares analisados e resulta em uma menor quantidade de dados de entrada. Conseqüentemente, há uma menor quantidade de equações algébricas. Por outro lado, a matriz do sistema é geralmente cheia e não simétrica.

Para obter a equação integral de contorno que possibilita a análise do problema, o MEC necessita de uma solução fundamental. Essa solução fundamental representa a resposta em um ponto do domínio infinito devido à aplicação de força unitária em outro ponto do mesmo domínio. A utilização de uma solução fundamental, que genericamente pode ser classificada como uma desvantagem, na verdade proporciona versatilidade e precisão ao método (BECKER, 1992).

O MEC tem uma grande aplicação em problemas cujos domínios são estendidos ao espaço infinito (ou semi-infinito). Nesses casos, a rede de elementos utilizada pelo MEC na discretização do contorno necessita discretizar apenas uma parte desse contorno, uma vez que a solução fundamental utilizada no método já contempla a influência do infinito ou semi-infinito. Ou seja, não é necessário considerar nos cálculos um contorno fictício para representar o domínio infinito, sendo que esse contorno fictício viria a influenciar nos cálculos. Outros métodos, como por exemplo, o Método dos Elementos Finitos (MEF), utilizam contornos fictícios para representar o domínio infinito. Isso pode causar sérios erros nos resultados numéricos, sobretudo em aplicações onde ondas podem ser refletidas por tais contornos.

1.3 – Organização do trabalho

O capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica sobre eletromagnetismo com ênfase em eletrostática. Faz considerações e mostra como é feito o cálculo do campo e do potencial elétrico para uma linha de transmissão. Também apresenta vários tópicos relacionados às normas brasileiras e recomendações internacionais a respeito de limite de campo elétrico, voltadas para linhas de transmissão.

No capítulo 3 é feita a formulação teórica do método para a obtenção da equação integral de contorno. Para isso é feita a abordagem de vários conceitos utilizados.

O capítulo 4 aborda os métodos de discretização do contorno, mostrando como se obtêm o sistema de equações e os métodos para resolver esse sistema. Também trata de

tópicos relacionados com o MEC. São apresentados os métodos de integração utilizados para resolver as integrais de contorno.

O capítulo 5 apresenta o funcionamento do programa desenvolvido, mostrando as subrotinas utilizadas na implementação computacional do método dos elementos de contorno baseada na solução da equação integral de contorno.

No capítulo 6 é feita a validação do programa desenvolvido, comparando os seus resultados com resultados obtidos com um procedimento analítico. Também são feitas comparações entre a aplicação do método das imagens com o método da discretização do solo.

No capítulo 7 são apresentados alguns resultados das comparações entre as estruturas com espaçamento convencional e compacto, sendo analisadas a intensidades do campo elétrico, do gradiente de potencial na superfície do solo e da capacitância equivalente.

No capítulo 8 são apresentadas as conclusões sobre o trabalho.

Nos apêndices A, B e C são apresentados, respectivamente, os arquivos de entrada de dados, o arquivo de saída de dados e as silhuetas das estruturas analisadas.

No apêndice D está um exemplo de solução por meio do método de contorno.

No apêndice E, há um exemplo de como o programa desenvolvido calcula o valor do campo elétrico em uma superfície. Nesse exemplo, foram mostrados passo a passo todos os cálculos efetuados pelo programa.

No apêndice F, há um programa em Matlab para a discretização dos condutores para ser montado o arquivo de entrada.

CAPÍTULO 2: Campo elétrico em linhas de transmissão

Nesse capítulo, são apresentadas as equações de Maxwell, as equações de Laplace e as equações de Poisson (SHADIKU, 2004). Também vários tópicos relacionados ao campo elétrico em linhas de transmissão, as normas brasileiras e as recomendações internacionais que devem ser utilizadas no projeto de linhas de transmissão. Serão abordados tópicos relacionados ao cálculo do campo e potencial elétrico, limite de campo elétrico, altura e distâncias de segurança. O direcionamento será para a área de eletrostática, não sendo abordada a área de magnetostática.

O cálculo de campo e potencial elétrico são utilizados durante o desenvolvimento de projetos de linhas de transmissão, devido à necessidade de se respeitar os limites estabelecidos dos níveis de campo e potencial elétricos nas vizinhanças de linhas e equipamentos.

2.1 – Equações de Maxwell

Maxwell (1864) propôs uma das teorias mais importante dentro da história de ciência. Na Royal Society, ele apresentou novas equações que resumiam todas as leis conhecidas da eletricidade e do magnetismo. Seu postulado ainda é considerado uma teoria completa de eletromagnetismo macroscópico (SHADIKU, 2004).

As equações de Maxwell, na forma diferencial, são escritas como sendo:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.4)$$

Também podem ser introduzidas as equações para o meio homogêneo, isotrópico e linear:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.7)$$

Assim, têm-se as relações de eletromagnetismo.

No entanto, se forem consideradas condições quase estáticas, ou seja, campos senoidais de baixa frequência é possível estudar separadamente a eletricidade do magnetismo.

Nessas condições as equações de Maxwell podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (2.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.11)$$

As equações (2.8) e (2.9) definem o problema eletrostático, enquanto que as equações (2.10) e (2.11) caracterizam o problema magnetostático. Observa-se que o conjunto de equações são independentes. Isso só é possível em problemas de campos quase estacionários. Em problemas em que a variação do tempo é considerada, qualquer mudança no campo elétrico vai estar associada à outra no campo magnético e vice-versa.

2.2 – Equações de Laplace e Poisson

As equações de Laplace e Poisson resultam em um método em que o potencial elétrico V pode ser encontrado, por meio das condições de contorno do condutor.

Para a eletrostática, as leis que regem o campo e o potencial elétricos podem ser desenvolvidas a partir da relação entre a densidade de fluxo elétrico (equação (2.9)) e o campo elétrico (equação (2.5)).

Substituindo a equação (2.5) na equação (2.9), obtém-se:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (2.12)$$

Considerando um campo eletrostático conservativo ($\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$), no qual, o campo elétrico pode ser definido em termos de potencial escalar elétrico, tem-se (SHADIKU, 2004):

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (2.13)$$

Substituindo a equação (2.13) na equação (2.12), tem-se:

$$\nabla \cdot \varepsilon (\nabla V) = -\rho \quad (2.14)$$

A equação (2.14) é para um meio não homogêneo. Para um meio homogêneo, têm-se:

$$\nabla \cdot (\nabla V) = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (2.15)$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (2.16)$$

ou

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (2.17)$$

Sendo que ρ pode representar uma distribuição linear, superficial ou volumétrica de carga.

A equação (2.16) é a equação de Poisson que define a distribuição de potencial elétrico V . Para obter a solução dessa equação é necessário que as condições de contorno sejam conhecidas. Ou seja, os potenciais impostos nas fronteiras do domínio, bem como as cargas estáticas, devem ser conhecidas.

Em situações em que não há carga estática ($\rho = 0$), a equação (2.9) torna-se:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (2.18)$$

Considerando que ε é constante em toda a região para a qual V é definido, a equação (2.18) torna-se:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (2.19)$$

A equação (2.19) é conhecida como equação de Laplace, sendo que nesse caso as fontes geradoras de campo elétrico são obrigatoriamente as condições de contorno.

A equação de Laplace pode ser expressa em termos de derivadas parciais em coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (2.20)$$

As equações (2.17) e (2.20) mostram que as equações de Laplace e de Poisson são equações diferenciais de segunda ordem. Em situações que envolvem geometria complexa e diferentes materiais, a solução analítica dessa equação não pode ser encontrada, em decorrência dessas razões apresentadas. Nesse caso deve-se utilizar métodos numéricos para a obtenção das soluções (SHADIKU, 2004).

A formulação da equação integral do contorno será feita levando em conta a equação de Poisson, mas após isto ρ será considerada nula (equação de Laplace), admitindo-se que o domínio está em uma região do espaço livre, sem fontes e que a região é homogênea, isotrópica e linear. Obtêm-se, então:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (2.21)$$

$$\nabla^2 V = 0 \quad (2.22)$$

2.3 – Condições de contorno

Nesse item, serão mostradas as diferenças entre as condições de contorno existentes nas superfícies dos sólidos.

Suponha um contorno qualquer onde em toda a sua extensão estejam disponíveis duas variáveis (campo e potencial elétricos). Divide-se o contorno Γ em duas partes (Γ_1 e Γ_2),

admitindo que em Γ_1 o valor do potencial elétrico V seja conhecido e no Γ_2 o valor do campo elétrico $\mathbf{E}$ seja conhecido.

Obrigatoriamente em todo o contorno pelo menos uma variável tem que ser conhecida em cada ponto, de modo que ao ser feita a discretização e os pontos nodais forem definidos, em cada ponto têm-se duas variáveis, sendo apenas uma incógnita (Figura 2.1).

Dessa forma, tem-se:

- $V = \bar{V}$ em $\Gamma_1 \rightarrow$ chamada de condição de contorno essencial ou de Dirichlet;
- $\mathbf{E} = \frac{\partial V}{\partial n} = \bar{\mathbf{E}}$ em $\Gamma_2 \rightarrow$ chamada de condição de contorno natural ou de Neumann;

Sendo que $\bar{V}$ representa o potencial elétrico conhecido e $\bar{\mathbf{E}}$ o campo elétrico conhecido.

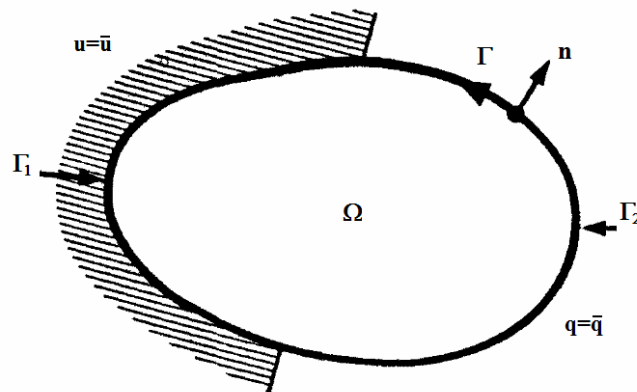


Figura 2.1 - Definição das condições de contorno de Dirichlet e Neumann.

Para melhor definir as condições de contorno, considere um capacitor de placas paralelas, estando suas placas separadas por um dielétrico que tem permissividade relativa ϵ_r . Fazendo a discretização do dielétrico, pode-se definir o potencial elétrico nos pontos alocados

sobre as placas do capacitor e definir o campo elétrico na lateral do dielétrico, como sendo nulo, para isso considera-se que não há dispersão do campo nas bordas (Figura 2.2).

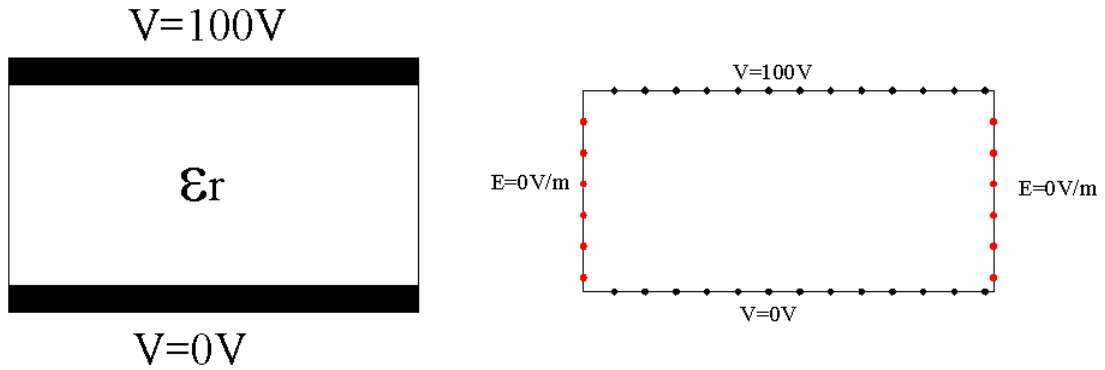


Figura 2.2 – Condições de contorno em um capacitor de placas paralelas.

2.4 – Campo elétrico em uma linha de transmissão

Os condutores das linhas de transmissão energizadas apresentam diferenças de potencial entre si e o solo. Quando as linhas são energizadas, os condutores absorvem da fonte a energia necessária para o seu carregamento, do mesmo modo que um capacitor. As linhas carregadas com cargas elétricas distribuídas ao longo dos condutores e sendo a tensão senoidal, a carga elétrica nos cabos em um ponto qualquer varia de acordo com valores instantâneos das diferenças de potencial aí existentes entre condutores ou entre o condutor e o solo (FUCHS, 1977).

Para o estudo de uma linha de transmissão é importante mostrar uma formulação específica para uma distribuição de cargas em uma linha. Deve-se ressaltar que a linha de transmissão pode ser resumida a uma distribuição linear de carga infinita (SHADIKU, 2004).

Apesar de o enfoque estar sendo dado à eletrostática, o mesmo estudo pode ser direcionado a uma linha de transmissão. Nesse caso, considera-se que a corrente elétrica que percorre a linha é uniforme e constante, ignorando-se o campo magnético que é produzido.

Isso pode ser feito devido à baixa frequência do sistema. Desse modo, pode-se considerar um momento qualquer para fazer uma análise do campo na linha (SHADIKU, 2004).

Para o cálculo do campo, considere uma distribuição linear de carga ao longo do eixo x do condutor, em um sistema de coordenadas cartesianas.

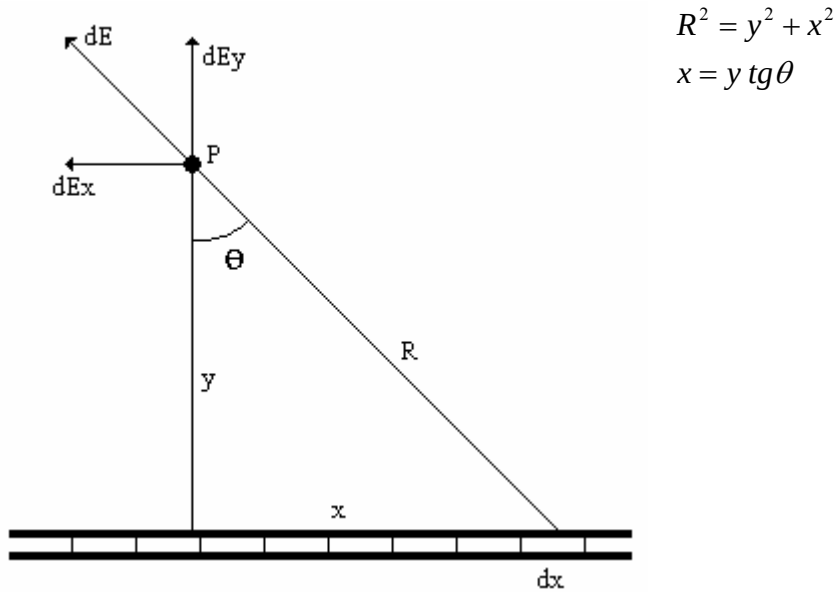


Figura 2.3 – Decomposição do campo elétrico de uma linha infinita

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} \mathbf{a}_R \quad (2.23)$$

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho L dx}{y^2 + x^2} \mathbf{a}_R \quad (2.24)$$

O vetor $d\mathbf{E}$, como a Figura (2.3) mostra, tem as componentes:

$$\begin{aligned} dE_x &= -dE \cos \theta \\ dE_y &= dE \sin \theta \end{aligned} \quad (2.25)$$

O valor negativo de dE_x indica que esta grandeza está orientada no sentido negativo do eixo x. As componentes segundo os eixos x e y do vetor resultante $\mathbf{E}$ no ponto são dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x &= \int d\mathbf{E}_x = - \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \cos\theta \, dE \\ \mathbf{E}_y &= \int d\mathbf{E}_y = - \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \sin\theta \, dE \end{aligned} \quad (2.26)$$

A componente $\mathbf{E}_x$ deve ser nula porque cada elemento de carga, à direita da normal que passa pelo ponto, tem um elemento simétrico correspondente à esquerda tal que suas contribuições na direção do eixo x é igual e de sentido oposto, de modo que seus efeitos se anulam mutuamente.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \mathbf{E}_y &= \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \sin\theta \, dE = 2 \int_{x=0}^{x=\infty} \sin\theta \, dE \\ \mathbf{E} &= 2 \int_{x=0}^{x=\infty} \sin\theta \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_L dx}{y^2 + x^2} \mathbf{a}_y = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \int_{x=0}^{x=\infty} \sin\theta \frac{dx}{y^2 + x^2} \mathbf{a}_y \end{aligned} \quad (2.27)$$

Pela Figura (2.3), pode-se observar que $x=y \tan\theta$ e a derivada é igual à $dx=y \sec^2\theta \, d\theta$.

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \sin\theta \frac{y \sec^2\theta \, d\theta}{y^2 + y^2 \tan^2\theta} \mathbf{a}_y = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \sin\theta \frac{y \sec^2\theta \, d\theta}{y^2 (1 + \tan^2\theta)} \mathbf{a}_y \quad (2.28)$$

sendo $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$;

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \sin\theta \frac{d\theta}{y} \mathbf{a}_y = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 y} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \sin\theta \, d\theta \mathbf{a}_y = \frac{-\rho_L}{2\pi\epsilon_0 y} \cos\theta \mathbf{a}_y \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = \frac{-\rho_L}{2\pi\epsilon_0 y} (0 - 1) \mathbf{a}_y \\ \mathbf{E} &= \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 y} \mathbf{a}_y = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} \mathbf{a}_\rho \end{aligned} \quad (2.29)$$

Onde y é a distância perpendicular à linha da distribuição de carga até o ponto de interesse (raio), e em coordenadas cilíndricas é chamado de ρ . Observe que o ângulo θ é que define a dimensão infinita da linha. Caso a linha fosse finita, haveria apenas alterações no ângulo θ .

Nota-se que o campo diminui inversamente com a distância, enquanto que para a carga pontual, o campo cai inversamente com o quadrado da distância.

Ressalta-se ainda ao se deslocar uma carga puntiforme de um ponto de potencial mais baixo para um ponto de potencial mais elevado, realiza-se trabalho. O valor desse trabalho é numericamente igual à diferença de potencial entre os pontos considerados.

A equação (2.29) foi obtida da Lei de Coulomb, mas ela poderia ter sido obtida por meio da lei de Gauss.

2.5 – Superfície eqüipotencial de uma linha de transmissão

Uma superfície eqüipotencial nada mais é do que um trajeto em torno de uma carga sobre a qual todos os pontos estão ao mesmo potencial elétrico. A Figura (2.4a) mostra uma superfície eqüipotencial considerando duas cargas de mesmo sinal. A Figura (2.4b) mostra uma superfície eqüipotencial considerando duas cargas de sinal oposto.

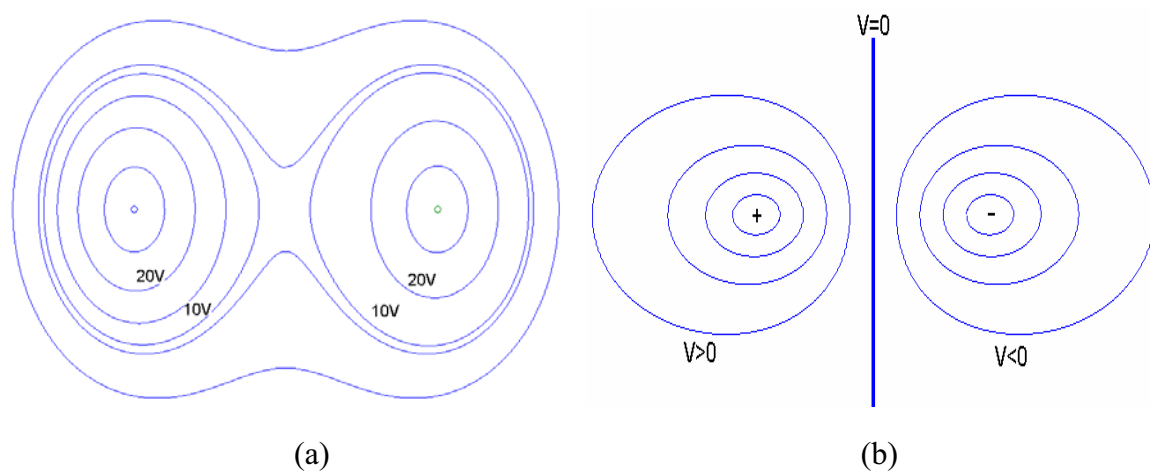


Figura 2.4 – Superfícies eqüipotenciais: (a) duas cargas iguais, de mesmo sinal; (b) duas cargas iguais, de sinais diferentes.

A diferença de potencial elétrico entre os pontos A e B, V_{AB} , é definida como o trabalho para se mover uma carga unitária positiva de A para B em um campo elétrico.

$$V_{AB} = -\frac{W}{Q} = -\int_{\text{Inicial}}^{\text{Final}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.30)$$

Ao dividir o trabalho pela carga na equação (2.30), resulta no valor do trabalho por unidade de carga, que pode ser expresso por joule/coulomb ou como é freqüentemente chamando, volt (V).

Observe que se V_{AB} é positivo, existe um ganho de energia ao se movimentar carga de prova entre os dois pontos imersos no campo elétrico da carga Q . Isso significa que o trabalho é feito por uma força externa. Caso V_{AB} seja negativo, existe uma perda de energia e o trabalho é realizado pelo campo.

Para uma distribuição contínua de cargas $\rho_L dl$ em uma linha infinita, a soma pode ser substituída por uma integração, tal que o potencial elétrico em $\mathbf{r}$ pode ser escrito como:

$$V(r) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{\text{Linha}} \frac{\rho_L(r') dl'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.31)$$

Resolvendo a integral da equação (2.31), encontra-se a equação para a diferença de potencial no infinito.

$$V(r) = -\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) \quad (2.32)$$

Caso seja adotado outro ponto de referencia, cujo potencial será considerado nulo, a equação (2.32) torna-se:

$$V(r) = -\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln(\mathbf{r}) + C \quad (2.33)$$

Onde C é uma constante determinada pelo ponto de referência cujo potencial é considerado nulo.

2.6 – Carga elétrica de uma linha de transmissão

No sistema trifásico, a seguinte condição é assegurada (FUCHS, 1977):

$$\dot{V}_A + \dot{V}_B + \dot{V}_C = 0 \quad (2.34)$$

Sendo que, no instante em que V_a tem seu valor máximo $V_{\max}$, a carga no condutor A também será máxima, isto é, $Q_{\max}$, enquanto que nos condutores b e c, as tensões serão, respectivamente, $V_B = V_C = -\frac{1}{2}V_{\max}$ e as cargas $Q_B = Q_C = -\frac{1}{2}Q_{\max}$. Ao se considerar 120° elétricos depois, tem-se $V_B = V_{\max}$, logo $Q_B = Q_{\max}$ e $V_A = V_C = -\frac{1}{2}V_{\max}$, e assim sucessivamente.

A relação entre carga elétrica Q e tensão é dada por:

$$Q = C V \quad (2.35)$$

Nesse caso, a capacitância depende apenas da estrutura da linha, ou seja, da disposição dos condutores, dos cabos pára-raios, das alturas e das distâncias entre condutores, do número de condutores e subcondutores, etc. (FUCHS, 1977).

2.7 – Efeito do solo no campo elétrico de uma linha de transmissão

Entenda solo e efeito do solo como a superfície do solo e o efeito que o mesmo causa no campo elétrico. O solo altera o campo elétrico da linha de transmissão, influenciando a capacitância. Então, considera-se que o solo é um condutor perfeito, com a forma de um plano de dimensões infinitas, cujos pontos estão a um mesmo potencial. A hipótese do solo representar um condutor plano infinito e equipotencial é limitada pelas irregularidades do terreno e pelo tipo de solo (STEVENSON, 1978). No entanto, essa hipótese nos permite entender o efeito de um solo condutor, sendo muito usada nos cálculos da capacitância de linhas de transmissão.

A teoria das imagens estabelece que em uma dada configuração formada por uma carga próxima a um plano infinito considerado condutor perfeito de potencial nulo (Figura 2.5), o plano pode ser substituído pela própria imagem das cargas com sinal oposto (Figura 2.6). (SHADIKU, 2004)

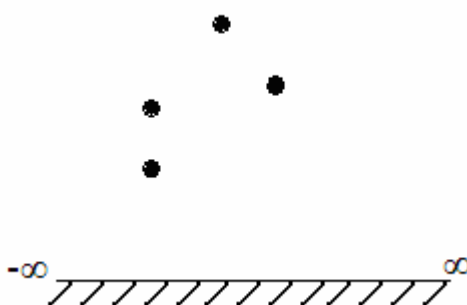


Figura 2.5 – Cargas sobre um plano infinito condutor perfeito de potencial nulo.

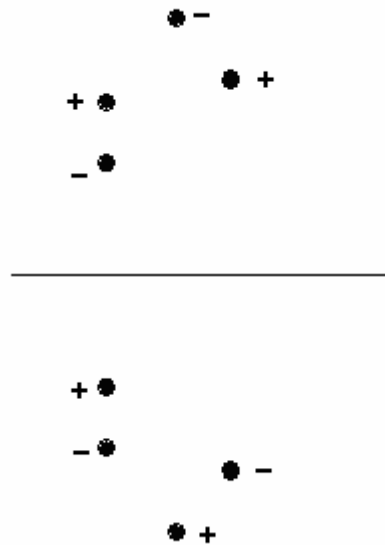


Figura 2.6 – Cargas sobre um plano infinito condutor perfeito de potencial nulo.

O Método das imagens consiste em considerar o efeito do solo em um condutor. O método é utilizado para calcular a capacitância da linha, visto que o solo altera o campo elétrico, alterando a capacitância da linha, e influenciando a carga da mesma. O método consiste em se considerar no cálculo da capacitância um condutor de carga igual a da linha, mas de sinal oposto e a uma profundidade da superfície do solo igual a altura do condutor. Tem-se, então, o condutor imagem. Os cálculos são efetuados considerando essa imagem. Esse método pode ser estendido para mais de um condutor.

Se forem considerados condutores imagem para todos os condutores reais, o fluxo elétrico entre os condutores e o solo será perpendicular ao plano que substitui o solo, sendo esse plano uma superfície equipotencial.

Na Figura (2.7), tem-se o desenho das linhas de campo elétrico sem considerar o efeito do solo em uma linha monofásica. E na Figura (2.8), tem-se a mesma linha considerando o efeito do solo na linha de transmissão.

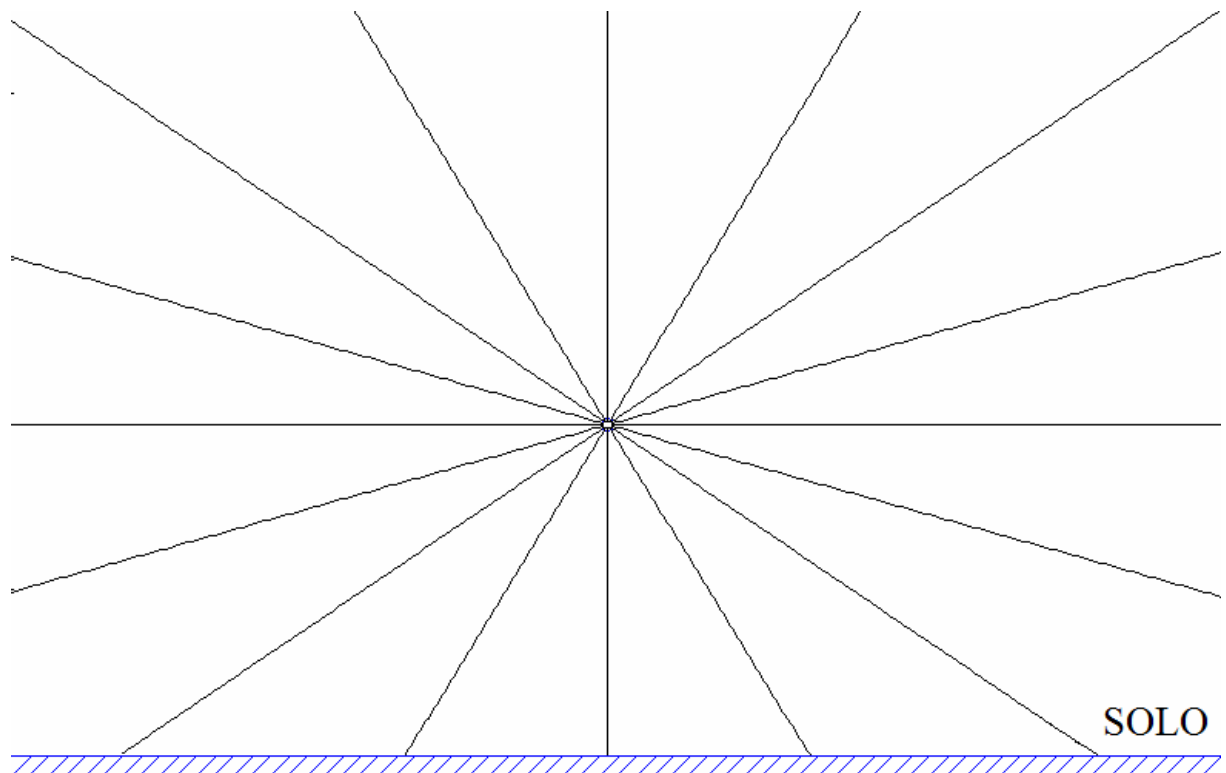


Figura 2.7 – Campo de uma linha sem considerar o efeito do solo.

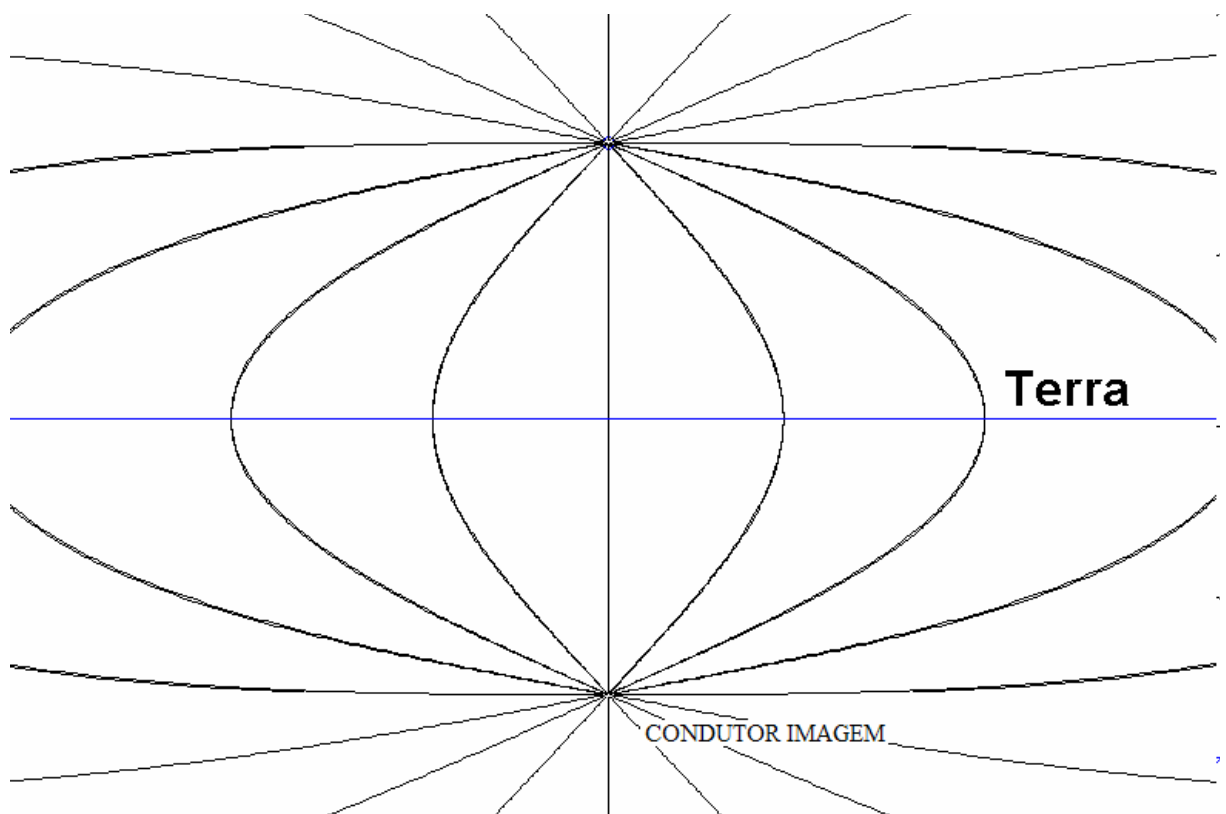


Figura 2.8 – Campo de uma linha considerando o efeito do solo.

Na Figura (2.9), observa-se que as superfícies eqüipotenciais também são influenciadas pelo solo. Ao se levar em conta o efeito do solo no campo elétrico, consegue-se colocar o solo num potencial nulo entre as cargas, condutor e imagem, corrigindo o erro no cálculo do potencial elétrico. Assim na Figura (2.9), o potencial decresce até chegar ao solo e depois começa a aumentar novamente, mas com sinal oposto.

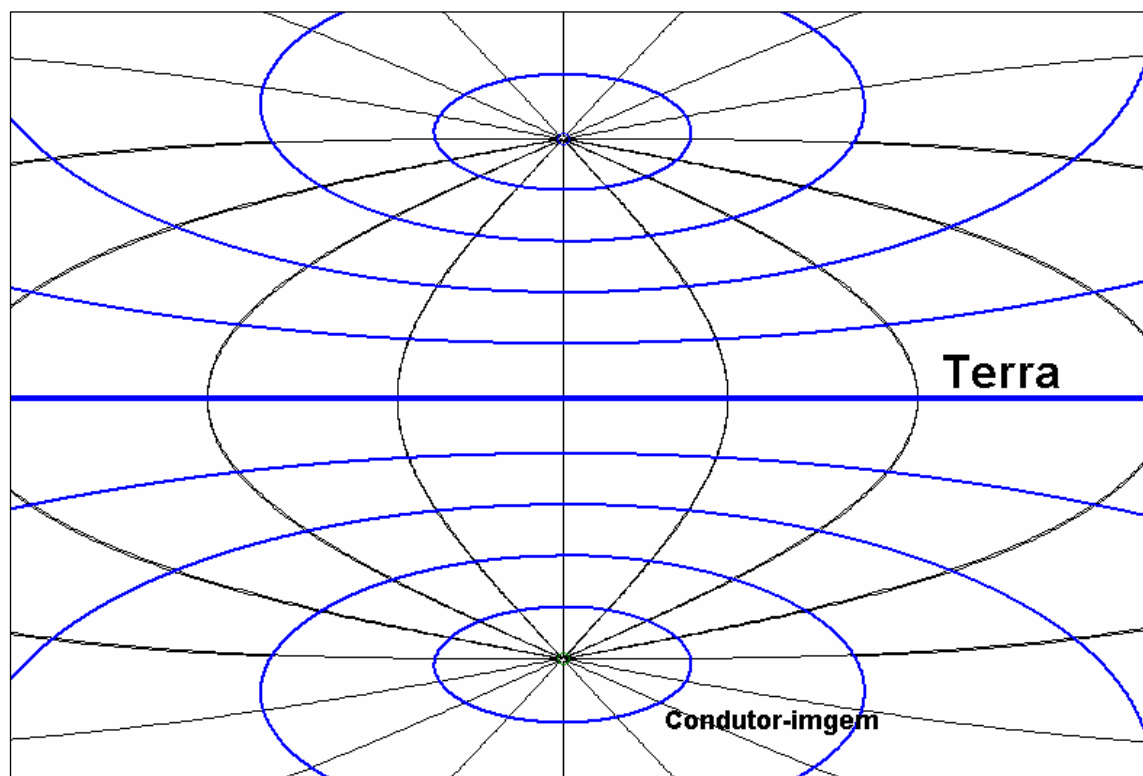


Figura 2.9 – Superfície eqüipotencial em uma linha

O método da teoria das imagens tem por objetivo reduzir o erro nos cálculos, considerando a solo uma superfície eqüipotencial. Em uma consideração mais próxima da realidade, a distância na qual se considera o condutor imagem pode ser bem mais profunda do que a altura da linha, devido as características do solo abaixo mesma.

2.8 – Níveis de campo elétrico

Desde que Wertheimer e Leeper em 1979 pretenderam associar mortalidade por câncer infantil e a proximidade de casas às linhas de distribuição de energia, a comunidade científica internacional iniciou uma cruzada para tentar comprovar essa tese, não alcançando nenhuma conclusão até o momento (ABRICEM, 1999).

A preocupação com efeitos da exposição dos seres humanos a campos elétricos e magnéticos é antiga e muitas entidades têm se preocupado em avaliar o assunto, levando ao surgimento de muitas publicações e normas. A principal referência para o assunto no Brasil é a ABNT, na forma da NBR-5422 (ABNT, 1985), que trata de projetos de linhas de transmissão. Existem também as normas regulamentadoras como a NR-9 e NR-15 do Ministério do Trabalho (BRASIL, 1978), que determinam o limite de campo elétrico e magnético para exposição ocupacional. Sendo que hoje existem vários outros projetos de normas que vem sendo elaboradas pela ABNT em conjunto com as empresas.

As normas brasileiras, atualmente, não determinam limites para campos magnéticos e pouco regulamentam sobre campos elétricos para o público geral, sendo que a NBR-5422, norma relativa a projetos de linhas aéreas de transmissão de energia elétrica, determina apenas o limite de campo elétrico no limite da faixa de servidão. Devido a esse fato, nos projetos de linhas de transmissão, são utilizadas recomendações internacionais como as dadas pela International Radiation Protection Association (IRPA).

2.8.1 – Normas e recomendações Brasileiras

Como dito anteriormente, a NBR-5422, elaborada em 1985, limita o nível do campo elétrico no limite da faixa de servidão de linhas de transmissão em 5 kV/m, não fazendo qualquer outra referência. Atualmente, a ABNT já tem projeto de outras normas, que deverão regulamentar não só os limites de campo elétrico, como o magnético, de uma forma muito mais completa, atendendo as recomendações da International Commission on Non-Ionizing Radiation Protection (ICNIRP).

Além da NBR-5422, têm-se as Normas Regulamentadoras de Segurança e Saúde no Trabalho (NRs), a NR 9 – Programa de Prevenção de Riscos Ambientais, do Ministério do Trabalho e Emprego (BRASIL, 1978a). Tal norma, no item 9.2.5.1.c, estabelece que para as avaliações quantitativas da exposição dos trabalhadores a riscos ambientais, deverão ser considerados os valores dos limites previstos na NR 15 (BRASIL, 1978b) ou, na ausência desses, os valores limites de exposição ocupacional adotados pela *American Conference of Governmental Industrial Hygienists*- ACGIH. Como a NR 15, que trata de atividades e operações insalubres, não considera as atividades desenvolvidas pelos trabalhadores nas redes e subestações elétricas como insalubres e não fixa valores limites para campos elétricos e magnéticos para a frequência de 60 Hz, os valores limites a serem observados para exposições ocupacionais são os da ACGIH conforme estabelecido na NR 9.

Tabela 2.1 – Limites de exposição estabelecidos por normas brasileiras.

Valores Limites para 60 Hz	Campo Elétrico (kV/m)	Densidade de Fluxo Magnético (μT)
Exposição ocupacional	25 ⁽²⁾	1000 ⁽²⁾
Público em Geral	5 ⁽¹⁾⁽²⁾	-

⁽¹⁾ – Limite estabelecido pela NBR-5422.

⁽²⁾ – Limite estabelecido pela ACGIH.

Deve-se entender por exposição ocupacional as populações expostas e os trabalhadores da área de energia elétrica que estão, em geral, submetidos a condições conhecidas e preestabelecidas e deverão estar treinados para enfrentar o risco em potencial e adotar as precauções apropriadas. Os valores são considerados para uma exposição máxima durante a jornada de trabalho de 8 horas diárias.

O público em geral é constituído por pessoas de todas as faixas etárias e condições distintas de saúde, podendo inclusive incluir grupos ou indivíduos particularmente mais susceptíveis. Na maioria dos casos esse público não tem consciência de sua exposição aos campos elétricos e magnéticos. Então, adota-se restrições mais rigorosas para o público em geral do que em relação a população ocupacional exposta.

2.8.2 – Recomendações da ICNIRP

A ICNIRP (*International Commission on Non-Ionizing Radiation Protection*) foi criada em maio de 1992, durante o Oitavo Congresso Internacional da IRPA (*International Radiation Protection Association*) como uma organização científica internacional independente.

Essa organização, sucedeu a INIRP (*International Non-Ionizing Radiation Committee*), que havia sido criada em 1977. Desde esta época, ela vinha desenvolvendo estudos e publicando documentos em colaboração com a Divisão de Saúde Ambiental da Organização Mundial da Saúde (OMS). Esses documentos contêm critérios de saúde e fazem parte do Programa de Critérios de Saúde Ambiental da OMS

As funções da ICNIRP são: investigar os perigos que podem ser associados com as diferentes formas de radiações não ionizantes, desenvolver diretrizes internacionais sobre limites de exposição a radiações não ionizantes e tratar de todos os aspectos de proteção a essas radiações.

Em 1998, a ICNIRP revisou estudos anteriores e publicou seu *Guidelines for Limiting Exposure to Time-Varying Electric, Magnetic and Electromagnetic Fields (up to 300 GHz)* (ICNIRP, 1998), que são diretrizes que estabelecem limites para a exposição humana a campos elétricos e magnéticos para frequência até 300 GHz. Essas diretrizes foram estabelecidas tomando como base uma detalhada revisão de toda literatura científica publicada sobre efeitos biológicos provocados pela exposição de seres vivos, não apenas humanos, a campos elétricos e magnéticos, incluindo efeitos térmicos e não térmicos. Em 2001, após uma nova revisão de toda literatura científica publicada a ICNIRP manteve os limites publicados.

A Organização Mundial da Saúde (OMS) reconhece oficialmente a ICNIRP, e as principais conclusões feitas pela OMS são de que a exposição a campos com intensidades inferiores aos limites recomendados nas diretrizes internacionais dessa comissão não aparenta ter qualquer consequência conhecida para a saúde.

Os limites de campo elétrico e magnético estão apresentados na Tabela (2.2) para a frequência de 60 Hz:

Tabela 2.2 – Limites de exposição estabelecidos pelo ICNIRP (ICNIRP, 1998).

Valores Limites para 60 Hz	Campo Elétrico (kV/m)	Densidade de Fluxo Magnético (μ T)
Ocupacional	8,33	417
Público em Geral	4,17	83,3

2.8.3 – Recomendações da IRPA

A IRPA (*International Radiation Protection Association*), recomenda limites de exposição a campos elétricos e magnéticos de 50 e 60 Hz em função do tempo e tipo de exposição, conforme a Tabela (2.3).

Tabela 2.3 – Limites de exposição estabelecidos pela IRPA (TEIXEIRA, 2001).

Características de exposição	Intensidade de Campo Elétrico (kV/m)	Densidade de Fluxo Magnético (μT)
<u>Ocupacional</u>		
Período de Trabalho Integral	10	500
Períodos Curtos	30 ⁽¹⁾	5000 ⁽²⁾
Partes do Corpo		25000
<u>Público em Geral</u>		
Até 24 horas / dia ⁽³⁾	5	100
Poucas Horas por dia ⁽⁴⁾	10	1000

⁽¹⁾ – a duração máxima da exposição ao campo entre 10 e 30 kV/m, pode ser calculada a partir da fórmula $t < 80/E$, onde: t – duração em horas de trabalho, E – intensidade do campo em kV/m.

⁽²⁾ – a máxima duração de exposição é de 2 horas por dia.

⁽³⁾ – restrição aplicável a espaços abertos nos quais os indivíduos do público em geral possam passar parte do tempo durante o dia.

⁽⁴⁾ – esses valores podem ser ultrapassados em poucos minutos ao dia, tomadas as precauções com relação às induções indiretas.

2.9 – Alturas e distâncias de segurança

As distâncias de segurança são os afastamentos mínimos recomendados que os condutores e acessórios energizados devam manter das demais partes da própria linha de transmissão, do terreno ou dos obstáculos próximos.

As distâncias de segurança objetivam evitar a ocorrência de curto-circuito, causado pela aproximação excessiva com os cabos energizados das linhas de transmissão.

A altura dos cabos ao solo depende do comprimento das cadeias de isoladores, do valor das flechas máximas dos condutores e das alturas de segurança necessárias. O comprimento da cadeia de isoladores é função do tipo, do número de isoladores e das ferragens que as compõem. As flechas máximas são determinadas em função do vão médio entre as torres da linha, bem como, do tipo de cabo condutor utilizado. A tração a ser usada deve ser calculada para a condição de máxima temperatura, como recomenda a NBR-5422 em seu item 5.2.2. As alturas de segurança (h_s) mostradas na Figura (2.10) representam a menor distância admissível entre condutores e o solo em qualquer momento da vida da linha. São fixadas igualmente pela NBR-5422, em seu item 10.2.1.1. Dependendo da classe de tensão da linha e da natureza do terreno ou dos obstáculos por ela cruzados, a referida norma apresenta dois métodos de cálculo dessas distâncias. Um método designado como convencional e um método alternativo, que para sua aplicação depende de uma análise probabilística dos valores máximos das sobretensões a que a linha poderá ser submetida.

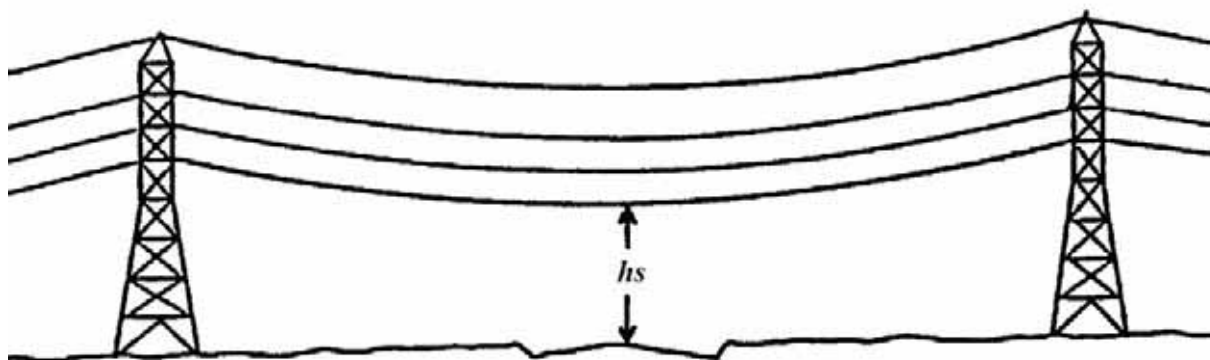


Figura 2.10 – Menor distância do condutor ao solo (ABNT, 1985).

Para evitar problemas, o projeto das linhas leva em consideração condições especiais que possam implicar em aproximação dos cabos elétricos, como travessias, presença de veículos agrícolas, árvores etc.

Tabela 2.4 – Distância básica (ABNT, 1985).

Região ou obstáculo atravessado pela linha ou que ela se aproxime	Distância básica (a)
Locais acessíveis apenas a pedestres	6,0
Locais onde circulam máquinas agrícolas	6,5
Rodovias, ruas e avenidas	8,0
Ferrovias não eletrificadas	9,0
Ferrovias eletrificadas ou com previsão de eletrificação	12,0
Suporte de linha pertencente a ferrovia	4,0
Águas navegáveis	$H + 2,0$
Águas não navegáveis	6,0
Linhas de energia elétrica	1,2
Linhas de telecomunicação	1,8
Telhados e terraços	4,0
Paredes	3,0
Instalações transportadoras	3,0
Veículos rodoviários e ferroviários	3,0

Para cálculo da altura mínima dos suportes, pode-se empregar o método convencional descrito na NBR-5422:

$$\begin{aligned}hs &= a + 0,01 \left(\frac{Du}{\sqrt{3}} - 50 \right), \quad \text{para } V > 87kV \\ \text{ou} \\ hs &= a, \quad \text{para } V \leq 87kV\end{aligned}\tag{2.36}$$

Sendo:

V – tensão máxima de operação da linha, valor eficaz, fase-fase, em kV;

Du – distância, em metros, numericamente igual a V ;

a – distância básica, em metros, obtida da Tabela (2.4), seu valor depende do tipo de obstáculo.

Observações:

- Para altitudes superiores a 1000 metros em relação ao nível do mar, o valor da segunda parcela de hs deve ser acrescido de 3% para cada 300 metros de altitude acima de 1000 metros;
- Em locais acessíveis somente a pessoal autorizado, podem ser utilizadas distâncias menores que as calculadas pela fórmula básica;
- No cálculo das distâncias dos condutores à superfície de água navegáveis, H corresponde a altura, em metros, do maior mastro e deve ser fixado pela autoridade responsável pela navegação da via considerada, levando-se em conta o nível máximo de cheia ocorrido nos últimos 10 anos;
- No cálculo de distâncias verticais de partes de uma linha às de outra linha de transmissão, o valor de Du , na fórmula básica, corresponde a tensão mais elevada das

duas linhas consideradas. Se ambas forem superiores a 87 kV, deve-se calcular a parcela $0,01(Du/\sqrt{3} - 50)$ para ambas e somar-se o resultado das duas tensões ao valor básico de a;

- As distâncias indicadas para telhados e terraços são válidas para os casos em que os mesmos não sejam acessíveis a pedestres. Caso contrário, o espaçamento deve ser de seis metros (6 m). As distâncias devem ainda ser aumentadas convenientemente, se isso se fizer necessário, em vista da existência de equipamentos como guindastes ou andaimes, piscinas, jardins, ou da execução de trabalhos de conservação, extinção de incêndios, etc;
- No cálculo da distância dos condutores a paredes cegas (equação 2.37), nas quais por acordo entre as partes interessadas, não for permitida a abertura de janelas, portas, etc., ressalvadas as disposições legais pertinentes, a distância mínima pode ser calculada pela fórmula a seguir, adotando-se 0,5 m como o valor mínimo:

$$h_s = \frac{Du}{150} \quad (2.37)$$

A altura mínima dos condutores ao solo tem grande importância não só para a segurança, mas também para o nível do campo elétrico, visto que conforme a altura diminui, a intensidade do campo elétrico aumenta. No caso de linhas que atravessem ruas e avenidas, essa altura torna-se ainda mais importante, devido ao grande fluxo de pessoas.

2.10 – Medição de campo elétrico em linha de transmissão

Os locais para medição de níveis de campos elétricos deverão ser previamente selecionados, por meio de avaliação da planta, de forma que seja mapeada a distribuição

desses campos na área a ser avaliada, levando-se em consideração as regiões onde teoricamente se apresentam campos em níveis mais elevados. Esses locais deverão ainda, quando possível, apresentar fácil acesso e localização afastada de outras fontes emissoras eletromagnéticas. Especialmente na avaliação de níveis de campos elétricos, recomenda-se que os pontos de medição apresentem localização afastada de árvores e massas metálicas, que interferem no resultado das medições. Na impossibilidade de se atender a tal premissa, todos os agentes interferentes citados deverão ser identificados e discriminados com suas respectivas características, geometria e locação em relação aos respectivos pontos de medição, para que sejam considerados na avaliação final dos trabalhos (ABRICEM, 2007).

Além dos critérios acima, os pontos para mapeamento das linhas citadas deverão ser selecionados em regiões preferencialmente afastadas de ângulos fortes (superiores a trinta graus), transposições ou cruzamentos com outras linhas, que igualmente interferem no resultado das medições. Na impossibilidade do atendimento a essa recomendação, ou quando é desejável a obtenção de níveis máximos de intensidade de campo no ponto selecionado, considerando-se a influência dos agentes citados e a presença de múltiplas fontes geradoras de campos, todos deverão ser também identificados e caracterizados na forma acima citada, para que sejam considerados na avaliação final dos trabalhos. Nesse caso, se necessário, recomenda-se que as medições sejam complementadas por uma avaliação espectral, para que sejam especificamente identificadas e quantificadas as contribuições não pertinentes à fonte avaliada. Sugere-se preferencialmente que os pontos para medição sejam selecionados no meio dos vãos das linhas, onde os campos apresentam magnitudes importantes e não são influenciados por estruturas metálicas que suportam os respectivos condutores.

Os campos elétricos e magnéticos deverão ser medidos a uma altura de um metro (1 m) acima do nível do solo, para comparação com os níveis de segurança recomendados.

Eventualmente, poderão ser realizadas medições a 1,70 m acima do solo, altura compatível com os membros superiores da escala humana.

Em áreas urbanas e regiões habitadas ou com circulação, bem como, com concentração de público, contíguas às linhas de transmissão e subtransmissão, os pontos para mapeamento das áreas citadas deverão ser selecionados considerando-se as condições mencionadas dos locais, tais como praças, avenidas, etc., além de residências, escolas, clubes, hospitais, igrejas, etc.

2.11 – Revisão do capítulo

Nesse capítulo, foram apresentadas expressões matemáticas para a modelagem de fenômenos eletromagnéticos, sendo utilizadas as equações de Maxwell para a condição estática, consideradas nos próximos capítulos. Apresentou-se a diferença entre as duas condições de contorno (Dirichlet e Neumann).

Apresentou-se ainda os cálculos do campo e do potencial elétrico de linhas de transmissão e as normas brasileiras, bem como, as recomendações internacionais sobre os limites de campo elétrico. Foram mostradas as alturas e distâncias de segurança de condutores ao solo, nos diversos obstáculos e regiões percorridas pela linha de transmissão.

CAPÍTULO 3: Formulação da equação integral do contorno

O Método dos Elementos de Contorno utiliza um método de solução de equações diferenciais parciais. A sua formulação transforma as equações diferenciais em equações integrais sobre o contorno da região em estudo. Essas equações integrais são resolvidas analítica e numericamente com a integração feita ao longo do contorno, sendo este percurso dividido em segmentos, chamados de elementos de contorno, nos quais as condições de contorno do problema são aplicadas.

Neste capítulo, o Método dos Resíduos Ponderados será aplicado à equação de Poisson, obtendo-se as respectivas equações integrais escritas em termos de resíduos ponderados. A partir dessa equação, dependendo do tipo de técnica de resíduos ponderados que se utiliza, pode ser obtida a equação integral tanto para o método dos elementos finitos como para o método dos elementos de contorno. Neste trabalho, será utilizado o Método de Pontos de Colocação, sendo que também poderia ser utilizado o Método de Galerkin (HARTMANN, 1989).

Outra forma de se obter as equações integrais é através do teorema de Green ou do teorema de reciprocidade de Betti (BECKER, 1992).

3.1 – Método dos resíduos ponderados

O Método dos Resíduos Ponderados são procedimentos numéricos para a solução de um conjunto de equações diferenciáveis. Considerando a equação de Poisson, que define a distribuição de potencial elétrico em um domínio bidimensional:

$$\nabla^2 V = b \quad (3.1)$$

onde : $\nabla^2 V = \frac{\partial^2(V)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(V)}{\partial y^2}$, sendo $\nabla^2(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2}$ o operador de Laplace.

Onde V é a função que governa a equação e cujo valor se quer determinar. Já $\mathbf{E}$ é a sua derivada em relação a normal, sendo também uma incógnita e b é uma função de (x, y) conhecida. Isto é $b = -\rho/\varepsilon$. Quando aplicado à eletrostática, V_i representa o potencial escalar elétrico no ponto i , sendo chamado neste trabalho de potencial elétrico. Sua derivada em relação a normal, $\left(\mathbf{E} = \frac{\partial V}{\partial n}\right)$, em problemas elétricos representa a intensidade do campo elétrico na direção normal.

Na maioria dos problemas de engenharia, a solução exata da grande maioria de suas equações não pode ser conhecida devido a sua complexidade da geometria envolvida. A solução se dá apenas de forma aproximada.

Chamado de V_0 a solução exata da equação (3.1), pode-se expressar uma solução aproximada de V_0 por:

$$V \cong V_0 \quad (3.2)$$

com

$$V = \sum_{K=1}^{NN} \alpha_k \varphi_k \quad (3.3)$$

Sendo que:

- α_k – coeficientes a determinar, podendo ser associados aos valores nodais da variável V ;
- φ_k – funções linearmente independentes e conhecidas, definidas no domínio Ω ;
- NN – número de nós.

Quando necessário, pode-se somar ao membro direito da equação (3.3) uma parcela constante α_o a fim de acomodar a porção não homogênea da equação diferencial em estudo.

Como a variável V é aproximada no domínio Ω , pode-se dizer que a equação (3.1) não é mais satisfeita de forma exata. Ou seja:

$$\nabla^2 V - b \neq 0 \quad (3.4)$$

Desse modo, é introduzido um erro para a aproximação de V , igual a:

$$R = \nabla^2 V - b \quad (3.5)$$

O Método dos Resíduos Ponderados consiste em minimizar o erro da aproximação fazendo com que o erro ponderado no domínio seja nulo. Ou seja:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 V - b) w d\Omega = 0 \quad (3.6)$$

A equação acima pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 V - b) w d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - b \right) w d\Omega = 0 \quad (3.7)$$

Sendo w uma função de ponderação, que deve ser contínua até a segunda derivada. A restrição da função w deve ser contínua até a segunda derivada se deve do fato de ter que se integrar por partes duas vezes, impondo que w seja contínua, pelo menos por trecho, até a segunda derivada. Isto também significa que a ordem de continuidade da função V pode ser relaxada, daí a designação de formulação fraca. Observa-se que esta mesma imposição já estava aplicada ao potencial elétrico pelo operador laplaciano.

A fim de determinar qual seria o erro ponderado no contorno, serão feitas quatro integrações por partes da equação (3.6). Efetuando as duas primeiras integrações, tem-se:

$$\int_{\Omega} \left(V \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + V \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - bw \right) d\Omega + \int_{\Gamma} w \frac{\partial V}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} V \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (3.8)$$

Sendo que: $\frac{\partial V}{\partial x} n_x + \frac{\partial V}{\partial y} n_y = \frac{\partial V}{\partial n}$ e $\frac{\partial w}{\partial x} n_x + \frac{\partial w}{\partial y} n_y = \frac{\partial w}{\partial n}$, Γ é o contorno do domínio

Ω e $\vec{n}$ é o vetor normal definido sobre Γ na direção indicada pela Figura (3.1).

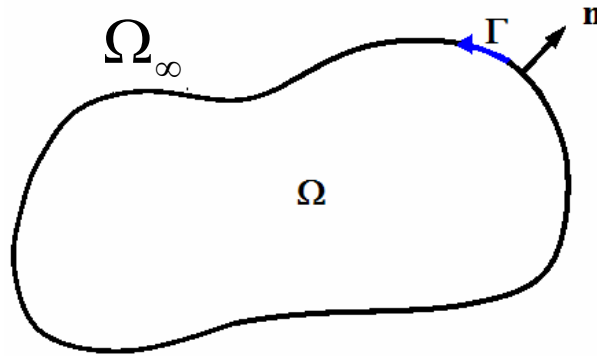


Figura 3.1 - Definição do vetor normal ao contorno Γ do domínio Ω .

Note que na Figura (3.1), o vetor $\vec{n}$ está definido no sentido de dentro para fora do domínio, sendo que se ele estivesse definido para dentro do contorno, estaria indicando um buraco de contorno Γ de domínio infinito Ω_∞ .

Na equação (3.8), pode-se observar a atuação do operador laplaciano sobre a função w :

$$\int_{\Omega} V(\nabla^2 w) d\Omega - \int_{\Omega} b w d\Omega + \int_{\Gamma} w \frac{\partial V}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} V \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (3.9)$$

Sendo que, na equação (3.6), w atuava sobre a função de aproximação em V . Como essas expressões são iguais, pode-se reescrever a equação (3.9), igualandoa com a equação (3.6):

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 V - b) w d\Omega = \int_{\Omega} V(\nabla^2 w) d\Omega - \int_{\Omega} b w d\Omega + \int_{\Gamma} w \frac{\partial V}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} V \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \quad (3.10)$$

A parcela $(-bw)$ aparece nos dois termos, podendo ser cancelada. Logo:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 V) w d\Omega = \int_{\Omega} V(\nabla^2 w) d\Omega + \int_{\Gamma} w \frac{\partial V}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} V \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \quad (3.11)$$

Reescrevendo a equação (3.11), verifica-se que ele representa o teorema de Green. Isto é:

$$\int_{\Omega} [(\nabla^2 V) w - (V \nabla^2 w)] d\Omega = \int_{\Gamma} \left(w \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (3.12)$$

A equação (3.8) pode ser escrita considerando as condições de contorno. Então, com a divisão do contorno em duas partes, $(\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2)$, tem-se:

$$\int_{\Omega} \left(V \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + V \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - bw \right) d\Omega + \int_{\Gamma_1} w \mathbf{E} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} w \bar{\mathbf{E}} d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \bar{V} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} V \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (3.13)$$

Integrando-se mais uma vez por partes, tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(-\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} - bw \right) d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma} V \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_1} w \mathbf{E} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} w \bar{\mathbf{E}} d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \bar{V} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} V \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Separando a primeira integral do contorno Γ em duas partes (Γ_1 e Γ_2), tem-se:

$$\int_{\Omega} \left(-\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} - bw \right) d\Omega + \int_{\Gamma_1} V \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_1} w \mathbf{E} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} w \bar{\mathbf{E}} d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \bar{V} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (3.15)$$

Integrando se uma última vez, tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(w \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + w \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - bw \right) d\Omega - \\ & - \int_{\Gamma} w \mathbf{E} d\Gamma + \int_{\Gamma_1} V \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_1} w \mathbf{E} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} w \bar{\mathbf{E}} d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \bar{V} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Separando a primeira integral do contorno em duas partes (Γ_1 e Γ_2), tem-se:

$$\int_{\Omega} \left(w \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + w \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - bw \right) d\Omega - \int_{\Gamma_2} w \mathbf{E} d\Gamma + \int_{\Gamma_1} V \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} w \bar{\mathbf{E}} d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \bar{V} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (3.17)$$

Juntando os termos iguais em Γ_1 e Γ_2 , tem-se:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 V - b) w d\Omega - \int_{\Gamma_2} w (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{E}}) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (V - \bar{V}) \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (3.18)$$

A equação (3.18) pode ser igualada a equação (3.6):

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 V - b) w d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla^2 V - b) w d\Omega - \int_{\Gamma_2} w (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{E}}) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (V - \bar{V}) \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \quad (3.19)$$

Da equação (3.19), o erro ponderado no domínio e no contorno é deduzido por:

- $R = \nabla^2 V - b \rightarrow$ erro no domínio Ω ;
- $R_1 = V - \bar{V} \rightarrow$ erro no contorno Γ_1 ;
- $R_2 = \mathbf{E} - \bar{\mathbf{E}} \rightarrow$ erro do contorno Γ_2 .

Substituindo-se os erros definidos pelas expressões anteriores na equação (3.19), tem-se:

$$\int_{\Omega} R w d\Omega - \int_{\Gamma_2} w R_1 d\Gamma + \int_{\Gamma_1} R_2 \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (3.20)$$

Apesar da equação (3.19) ter sido deduzida para o caso de V e $\mathbf{E}$ serem aproximados, ela é válida caso sejam exatos, apresentando, então, erro nulo.

3.1.1 – Formulação fraca

O processo para obtenção da equação integral pode ser considerado como uma combinação do método dos resíduos ponderados com um processo de integração por partes que reduz ou enfraquece a ordem de continuidade exigida para a função em V .

Então, a equação integral para a formulação com o MEC é obtida integrando-se a equação (3.18) duas vezes por parte, enfraquecendo a continuidade exigida para a função em V . Assim, integrando-se a equação (3.18) por partes duas vezes, tem-se:

$$\int_{\Omega} V (\nabla^2 w) d\Omega - \int_{\Omega} b w d\Omega + \int_{\Gamma} w \frac{\partial V}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} V \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} w (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{E}}) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (V - \bar{V}) \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (3.21)$$

A equação (3.21) pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega} V(\nabla^2 w) d\Omega - \int_{\Omega} b w d\Omega + \int_{\Gamma} w \frac{\partial V}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} V \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (3.22)$$

A partir da equação (3.22), obtém-se a formulação da integral de contorno para problemas Laplacianos com o MEC. Essa mesma equação também poderia ser obtida diretamente a partir da equação (3.6), que após integrada por partes duas vezes, resulta na equação (3.9).

3.2 – Métodos de solução da equação integral

Há três tipos de métodos de solução para a equação integral, dependendo do tipo de técnica de resíduo ponderado utilizado (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1992):

- Método do Domínio. Quando a solução aproximada de V satisfaz somente as condições de contorno, sendo $R_1 = V - \bar{V} = 0$, $R_2 = \mathbf{E} - \bar{\mathbf{E}} = 0$ e $R = \nabla^2 V - b \neq 0$, ou seja, as incógnitas do problema são definidas no domínio Ω . Com esse método admite-se uma aproximação para V ;
- Método de Contorno. A função em V satisfaz somente a equação diferencial no domínio, sendo as incógnitas do problema definidas apenas ao longo do contorno. No caso da equação (3.19), adota-se V de tal forma que $\nabla^2 V = 0$. As incógnitas do problema ficam exclusivamente na fronteira;
- Método Misto. Quando não são satisfeitas nem as condições de contorno, nem a equação diferencial no domínio.

3.2.1 – Método de contorno

Observa-se que o Método dos Elementos de Contorno se enquadra na segunda classificação. Uma importante observação: durante o processo de dupla integração por partes da seção anterior, o operador associado à equação em estudo foi transferido e passou a atuar sobre a função de ponderação w . Um Método de Contorno poderá, então, ser aplicado escolhendo uma função w que satisfaça identicamente a equação em estudo e não mais suas condições de contorno. Em outras palavras, a equação (3.22) poderá ser resolvida apenas com as integrações no contorno, desde que a integração sobre o domínio Ω possa ser:

- Reduzida à zero. Nesse caso, w satisfaz a equação diferencial na sua forma homogênea, ou seja, no caso da equação de Poisson, tem-se $\nabla^2 w = 0$;

$$-\int_{\Omega} b w d\Omega + \int_{\Gamma} w \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} V \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (3.23)$$

- Calculada facilmente. Nesse caso, w satisfaz a equação diferencial no domínio sobre observação de tal modo que seja possível obter uma equação integral que tenha variáveis definidas apenas em integrais ao longo do contorno Γ . Na formulação com o MEC, usualmente se emprega uma função w que satisfaça essa condição. Assim, a função de ponderação w é igual a solução fundamental da equação governante.

3.3 – Método de pontos de colocação

Com o objetivo de satisfazer a segunda condição citada no item (3.3.1), utiliza-se o Método de Pontos de Colocação para obter a função de ponderação.

O Método de Pontos de Colocação pode ser considerado como uma variação do Método dos Resíduos Ponderados, na qual a função delta de Dirac é aplicada. Além do Método de Pontos de Colocação, há também o Método de Galerkin e ambos podem ser considerados como variação do Método dos Resíduos Ponderados.

No Método de Pontos de Colocação, N pontos são escolhidos no contorno, fazendo o resíduo ser nulo nesses pontos. A função de ponderação é dada pela função delta de Dirac $(\delta(x - x_o))$.

A função delta é definida, em uma dimensão, por:

$$\delta(x - x_o) = \begin{cases} \infty & \text{se } x = x_o \\ 0 & \text{se } x \neq x_o \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_o) dx = 1 \quad (3.24)$$

Isso pode ser compreendido, de uma forma elementar, como o limite de uma função contínua ordinária. Assim, a função delta de Dirac é singular no ponto x_o . Considerando as propriedades da função delta de Dirac, pode-se dizer que:

$$\int_{-a}^{+a} F(x) \delta(x - x_o) dx = F(x_o) \quad (3.25)$$

Onde $F(x)$ representa o valor da função F no ponto x_o .

Em qualquer equação envolvendo a função delta de Dirac, o domínio de integração pode ser reduzido a qualquer intervalo que contenha o ponto onde o argumento da função delta de Dirac se anula.

Depois de definida a função delta de Dirac $(\delta(\vec{r} - \vec{r}'))$, ela deve ser aplicada a uma função de ponderação, onde $\vec{r}$ é o vetor de posição associado ao ponto de observação, e $\vec{r}'$ é o vetor posição associado ao ponto de aplicação da função impulsiva delta de Dirac.

O conceito da distribuição delta de Dirac é muito importante para a formulação do Método dos Elementos de Contorno. Considerando:

$$w = \beta_1 \psi_1 + \beta_2 \psi_2 + \dots + \beta_N \psi_N$$

E sendo β_i coeficientes arbitrários e ψ_i funções de forma linearmente independente.

$$\text{Onde: } \psi_i = \delta(\vec{r} - \vec{r}_i') \quad 1 \leq i \leq N$$

Considerando as propriedades da função delta de Dirac, pode-se dizer que:

$$\int_{\Omega} V \delta(\vec{r} - \vec{r}_i') d\Omega = V(\vec{r}_i') \quad (3.26)$$

Com $V(\vec{r}_i')$ representando o valor da função em V no ponto indicado pelo vetor $\vec{r}_i'$.

Considerando a equação de Poisson $(\nabla^2 w = b)$, para se obter a equação de contorno utilizando a função delta de Dirac, adota-se $b = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_i')$, chegando-se à seguinte equação diferencial:

$$\nabla^2 w = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_i') \quad (3.27)$$

Com isso, a função w é obtida de tal forma que satisfaz a equação (3.27).

$$w = V^*(\vec{r}, \vec{r}')$$

Sendo V^* denominado como solução fundamental. Considerando-se as equações (3.26) e (3.27), bem com, a solução fundamental como função de ponderação, tem-se:

$$\int_{\Omega} V (\nabla^2 V^*) d\Omega = - \int_{\Omega} V \delta(\vec{r} - \vec{r}_i') d\Omega = -V(\vec{r}_i') = -V_i \quad (3.28)$$

Reescrevendo a equação (3.28):

$$\int_{\Omega} V (\nabla^2 V^*) d\Omega = -V_i \quad (3.29)$$

O índice i está associado ao ponto de aplicação da função impulsiva.

No apêndice D foi feito um exemplo, aplicando a teoria até aqui apresentada, considerando um domínio unidimensional.

3.4 – Solução fundamental

A solução fundamental V^* satisfaz a equação de Laplace e representa o campo gerado por uma carga unitária concentrada que age em um ponto i . O efeito dessa carga se propaga desde o ponto de i até o infinito sem qualquer consideração de condições de contorno (FERNANDES, 2005).

O desenvolvimento apresentado acima permite reescrever a equação (3.22), como:

$$V_i = - \int_{\Omega} b V^* d\Omega + \int_{\Gamma} V^* \frac{\partial V}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} V \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \quad (3.30)$$

Uma vez calculado o valor de w ($w = V^*$), o valor de $\frac{\partial w}{\partial n}$ pode ser facilmente calculado por:

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial V^*}{\partial n} = \mathbf{E}^*$$

A equação (3.30) pode ser reescrita, levando em conta as condições de contorno:

$$V_i + \int_{\Omega} b V^* d\Omega + \int_{\Gamma_1} \bar{V} \mathbf{E}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} V \mathbf{E}^* d\Gamma = \int_{\Gamma_1} V^* \mathbf{E} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} V^* \bar{\mathbf{E}} d\Gamma \quad (3.31)$$

Ou de forma compacta:

$$V_i + \int_{\Omega} b V^* d\Omega + \int_{\Gamma} V \mathbf{E}^* d\Gamma = \int_{\Gamma} V^* \mathbf{E} d\Gamma \quad (3.32)$$

A equação (3.32) é utilizada como ponto de partida para a aplicação do MEC, note que as equações (3.23) e (3.30) são representações integrais exatas, isto é, ainda não foi introduzida nenhuma aproximação na formulação. A solução do problema passa a ser aproximada quando se faz necessário discretizar o contorno do sólido em elementos nos quais as variáveis V e $\mathbf{E}$ são aproximadas.

De acordo com as equações (3.24) e (3.25), a resultante do carregamento definido pela função delta de Dirac $\delta(\vec{r} - \vec{r}_i')$ num domínio Ω é a força unitária aplicada no ponto indicado pelo vetor $\vec{r}'$. Assim, seja o domínio Ω , onde é válida a equação diferencial que governa o problema físico estudado, de contorno Γ , contido em um domínio infinito Ω_{∞} , cujo contorno é Γ_{∞} , (Figura 3.2). Designando-se b^* de carregamento fundamental, a carga unitária b^* não precisa necessariamente ser aplicada em um ponto do domínio finito Ω , onde está definido o

problema físico que se quer estudar. Ela pode ser aplicada em qualquer ponto do domínio infinito Ω_∞ , sendo que o ponto de colocação será aqui designado de i . Observa-se que pontos de colocação muito afastados do contorno Γ ou muito próximos, não produzem resultados numéricos confiáveis (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1992).

No caso da equação (3.32), o problema real é aquele relativo a uma fonte b qualquer distribuída em uma área de domínio Ω_b , contida no domínio finito Ω (Figura 3.2), que provocará em um ponto p do domínio Ω os seguintes valores de potencial e campo elétrico: $V(p)$ e $E(p)$. No problema potencial representado pela equação de Laplace, obtida para $b=0$ na equação de Poisson, o problema real corresponde ao potencial e campo elétrico prescritos ao longo do contorno Γ , que provocarão em um ponto p do domínio um potencial $V(p)$ e um campo elétrico $E(p)$. O problema fundamental é aquele provocado pela fonte unitária b^* aplicada em um ponto. Essa fonte b^* provocará em um ponto p qualquer do domínio Ω um potencial $V^*(i, p)$ e um campo elétrico $E^*(i, p)$. (FERNANDES, 2005)

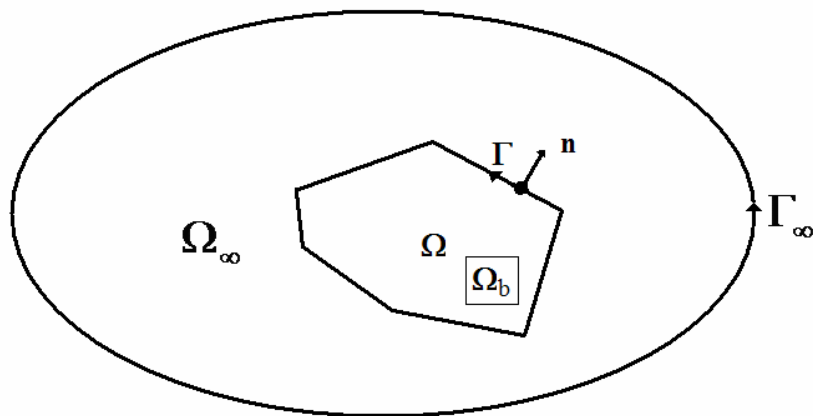


Figura 3.2 – Contorno de Domínio infinito.

3.4.1 – Validade da solução fundamental

Na validação da expressão da solução fundamental V^* , será usado o sistema de coordenadas cilíndricas, pois é o mais conveniente para representar as respostas devido a cargas pontuais, como é o caso do carregamento fundamental.

Na seção de formulações fracas apresentou-se a limitação que a função de ponderação w , agora aplicada como solução fundamental, devia ter derivadas contínuas até a segunda ordem. Pelas propriedades da função impulsiva, têm-se:

$$\nabla^2 V^* = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (3.33)$$

$$\int_{\Omega} \nabla^2 V^* d\Omega = -1 \quad (3.34)$$

Utilizando a integração por partes na equação acima, tem-se:

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial V^*}{\partial n} d\Gamma = -1 \quad (3.35)$$

Na equação (3.35) mostra-se constante o campo elétrico que atravessa o contorno Γ .

Considerando-se o domínio Ω como sendo representado por uma circunferência de domínio Ω_C , centrada no ponto de aplicação da função impulsiva, tem-se que a direção radial e a direção normal ao contorno da circunferência são as mesmas. Também, por simetria, a derivada de V^* na direção radial é constante, isto é:

$$\int_{\Gamma_C} \frac{\partial V^*}{\partial n} d\Gamma = -1 = \int_{\Gamma_C} \frac{\partial V^*}{\partial r} d\Gamma = C \int_{\Gamma_C} d\Gamma \quad (3.36)$$

Onde: Γ_C é o perímetro de Ω_C .

A grandeza C é uma constante de cálculo imediato.

$$C = \frac{-1}{2\pi r}$$

Pois $\int_{\Gamma_C} d\Gamma$ é a área da circunferência e $r = \vec{r} - \vec{r}'$ é a distância do ponto de aplicação

da função impulsiva até o ponto de observação. Pela natureza do problema, é evidente que a solução fundamental terá simetria radial a partir de seu ponto de aplicação. (POUZADA, 1999)

Na situação apresentada, a solução fundamental é obtida por derivação:

$$\frac{\partial V^*}{\partial r} = \frac{-1}{2\pi r} \quad (3.37)$$

$$V^* = \frac{1}{2\pi} \ln(r) \quad (3.38)$$

A solução fundamental, na equação (3.38), satisfaz a equação (3.33), desde que $r \neq 0$.

Para provar que a equação (3.38) satisfaz a equação (3.33), considera-se que V^* é apenas função de r em um sistema de coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) , e impondo

$$\frac{\partial V^*}{\partial \phi} \equiv 0 \quad e \quad \frac{\partial V^*}{\partial z} \equiv 0, \text{ tem-se:}$$

$$\nabla^2 V^* = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V^*}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 V^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V^*}{\partial r} \quad (3.39)$$

A partir da equação (3.37), calcula-se:

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial r^2} = \frac{1}{2\pi r^2} \quad (3.40)$$

Substituindo as equações (3.37) e (3.40) na equação (3.39), tem-se:

$$\nabla^2 V^* = \frac{1}{2\pi r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{-1}{2\pi r} \right) \equiv 0, \quad r \neq 0 \quad (3.41)$$

A equação (3.40) confirma que a equação (3.38) é a solução fundamental da equação de Laplace no caso bidimensional de uma circunferência.

Uma vez constatada a validade da solução fundamental V^* , usada como função de ponderação, calcula-se facilmente o valor de $\partial w / \partial n$. Então:

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial V^*}{\partial n} = \mathbf{E}^* \quad (3.42)$$

Ou seja:

$$\mathbf{E}^*(\vec{r}, \vec{r}') = \text{grad } V^* \cdot \hat{n} \quad (3.43)$$

A equação (3.43) é a projeção do gradiente da solução fundamental sobre a normal ao contorno no ponto, associado ao vetor de posição $\vec{r}$ calculado.

Devido à simetria da solução, tem-se:

$$\mathbf{E}^*(\vec{r}, \vec{r}') = \hat{r} \frac{\partial V^*}{\partial r} \cdot \hat{n} \quad (3.44)$$

Onde: $\hat{r}$ é o versor radial aplicado a partir da localização da função impulsiva, isto é:

$$\vec{r} - \vec{r}' = r \hat{r}, \quad r \geq 0 \quad (3.45)$$

O resultado para a situação bidimensional citado acima é:

$$\mathbf{E}^*(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi r} \cos(\alpha) \quad (3.46)$$

Sendo: $\frac{\partial r}{\partial n} = \cos(\hat{r}, \hat{n}) = \cos(\alpha)$; α é o ângulo formado entre os versores radial e

normal no ponto de observação.

3.5 – A equação integral para o cálculo de V e $\mathbf{E}$

O desenvolvimento apresentado nas seções anteriores permitiu encontrar a equação (3.32), que é o ponto de partida para aplicações do MEC. Para a determinação dos valores de V e $\mathbf{E}$, ainda desconhecidos em parte do contorno, torna-se necessário aplicar a função impulsiva sobre o contorno. Então, ocorrerá o aparecimento de singularidades nos integrandos das expressões de V^* e $\mathbf{E}^*$, como consequência da situação:

$$\vec{r} = \vec{r}' \Leftrightarrow r = 0 \quad i \in \text{ao elemento } j \quad (3.47)$$

$$r = \vec{r} - \vec{r}' \quad (3.48)$$

Nesse caso, realiza-se um estudo particular a fim de eliminar tal singularidade. Além disso, para integrar o elemento do contorno ao qual o ponto i pertence, a integração analítica devido à singularidade existente.

Considerando o caso bidimensional, torna-se o ponto i como interno ao domínio Ω , aproximando tal ponto do contorno Γ por um processo de limite (Figura 3.3).

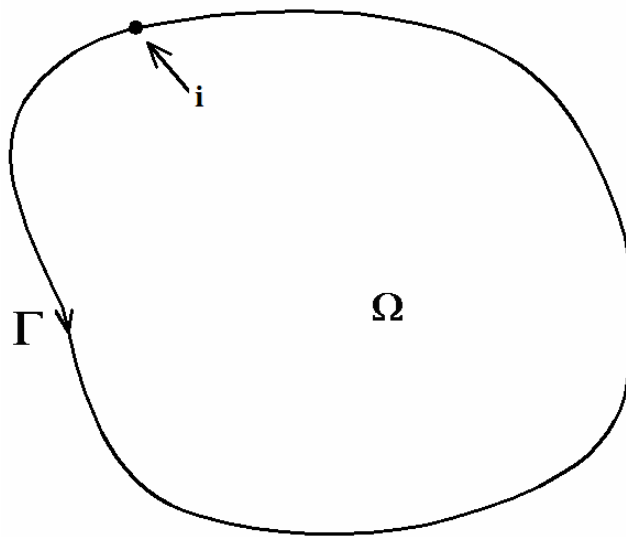


Figura 3.3 – Aplicação da função impulsiva sobre o contorno Γ .

Para representar os integrandos das integrais de contorno acima como função da distância r , isto é, $f(r)$, foi considerada uma pequena seção circular de raio ε . Ou seja, equivalente a uma seção de cilindro com eixo normal ao plano do papel centrado no ponto i . Assim, Γ_ε é o contorno da seção circular, $\Gamma_{-\varepsilon}$ a porção de contorno do problema original e Ω_ε é o domínio associado a Γ_ε (Figura 3.4).

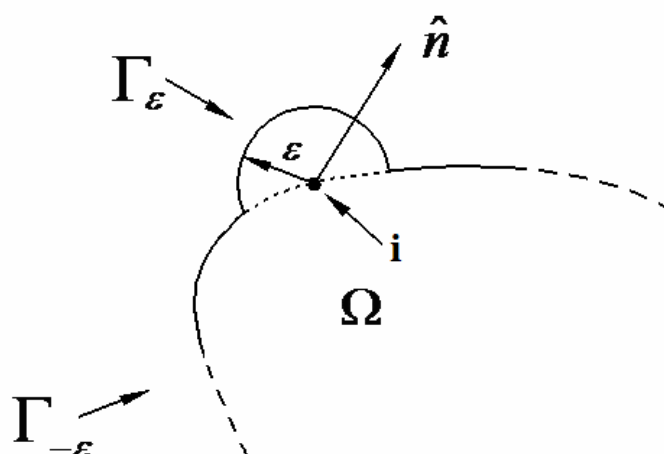


Figura 3.4 – Condução do ponto i ao contorno por um processo de limite.

Então:

$$\int_{\Gamma} f(r) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma-\varepsilon} f(r) d\Gamma + \int_{\Gamma\varepsilon} f(r) d\Gamma \right\} = \int_{\Gamma} f(r) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma\varepsilon} f(r) d\Gamma \quad (3.50)$$

A primeira integral do membro direito não mais apresenta singularidade. Este artifício será utilizado na equação (3.32).

Aplicando o processo de limite na integração do membro $\left(\int_{\Gamma} V^* \mathbf{E} d\Gamma \right)$ da equação (3.32) e considerando as Figuras (3.3) e (3.4), têm-se:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} V^* \mathbf{E} d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) q d\Gamma \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} V^* \mathbf{E} d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) q \varepsilon d\theta \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} V^* \mathbf{E} d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) q \varepsilon (\theta_2 - \theta_1) = 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

A equação (3.51) mostra não haver alteração no seu lado direito de quando o ponto i é deslocado para o contorno. Assim, θ_1 e θ_2 são, respectivamente, os ângulos formados entre uma referência arbitrária e o versor tangente ao contorno antes e depois do ponto i , respeitado seu sentido de percurso.

Aplicando a integral de contorno em outro membro da equação (3.32) e sendo o membro $\left(\int_{\Gamma} V \mathbf{E}^* d\Gamma \right)$, têm-se:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} V \mathbf{E}^* d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} V \frac{\partial V^*}{\partial n} d\Gamma$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} V \mathbf{E}^* d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} V \left(\frac{-1}{2\pi\varepsilon} \right) \varepsilon d\theta = -\frac{1}{2\pi} V(\theta_2 - \theta_1) \quad (3.52)$$

Na Figura (3.5), o ponto i está localizado numa porção suave de contorno; portanto $\theta_2 - \theta_1 = \pi$ radianos.

Na Figura (3.6), o ponto i está localizado sobre uma ponta do contorno, em um vértice, e, conseqüentemente $\theta_2 - \theta_1 \neq \pi$ radianos.

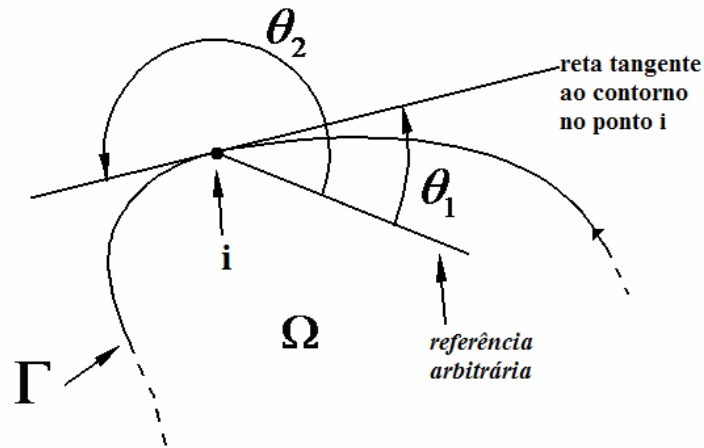


Figura 3.5 – Ponto de aplicação sobre região suave do contorno.

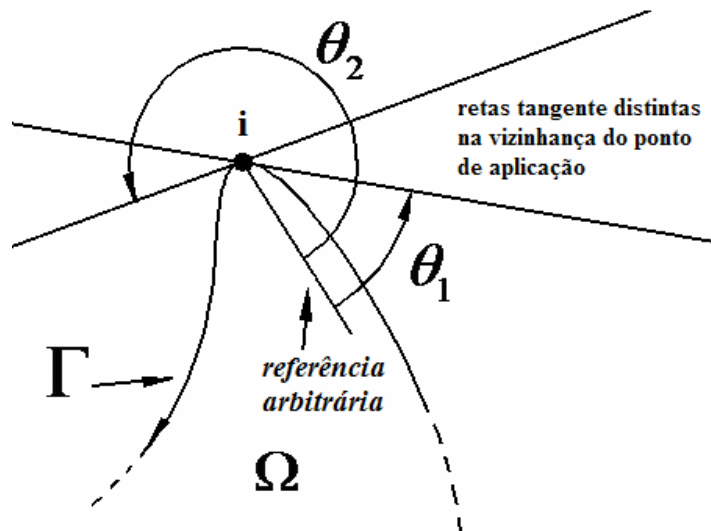


Figura 3.6 – Ponto de aplicação sobre região do contorno descontínua.

Por raciocínio semelhante ao utilizado para a equação (3.51), a integral de domínio da equação (3.32) leva a:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \varepsilon} b V^* d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^\varepsilon b \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \varepsilon d\varepsilon d\theta = 0 \quad (3.53)$$

Os resultados acima permitem generalizar a equação (3.32) tomando como base a equação (3.50). Então:

$$V_i + \int_{\Omega} b V^* d\Omega + \int_{\Gamma} V \mathbf{E}^* d\Gamma - \frac{1}{2\pi} V_i (\theta_2 - \theta_1) = \int_{\Gamma} V^* \mathbf{E} d\Gamma \quad (3.54)$$

Sendo:

$$V_i - \frac{1}{2\pi} V_i (\theta_2 - \theta_1) = V_i \left[1 - \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} \right] = V_i K_i \quad (3.55)$$

$$K_i = \left[1 - \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} \right] = \frac{2\pi - (\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} = \frac{\theta_{\text{int}}}{2\pi} \quad (3.56)$$

$$K_i V_i + \int_{\Omega} b V^* d\Omega + \int_{\Gamma} V \mathbf{E}^* d\Gamma = \int_{\Gamma} V^* \mathbf{E} d\Gamma \quad (3.57)$$

O fator K_i atua como um coeficiente dependente da localização do ponto i . Este valor de K_i foi formulado para o ponto i sobre a fronteira, $i \in \Gamma$.

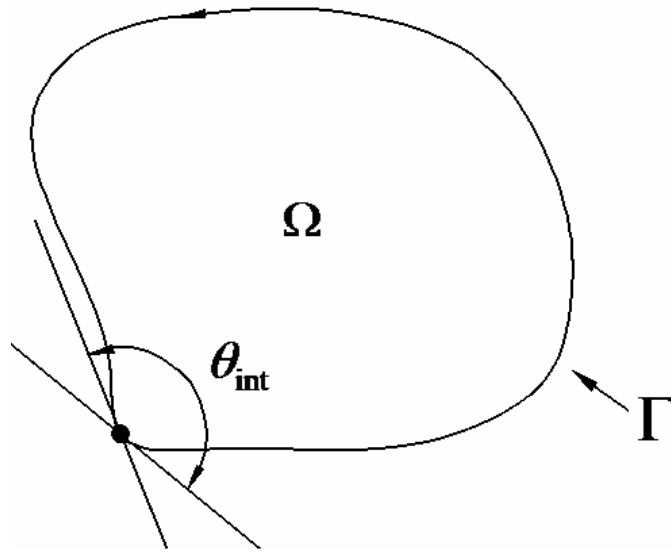


Figura 3.7 – Medição do ângulo interno na região de contorno descontínuo.

A equação (3.57) é a equação integral de contorno para problemas envolvendo a equação de Poisson e no caso de não haver fontes de excitação, tem-se $b \equiv 0$. A equação (3.57) é a equação integral de contorno para problemas envolvendo a equação de Laplace.

No caso de $b \neq 0$, a integral de domínio na equação (3.57) é reescrita como integral de contorno utilizando formulações mais avançadas do MEC, como o Método de Reciprocidade Dupla (MRD), o Método de Reciprocidade Múltipla (MRM), ou simplesmente calculando-a numericamente. Nesse ultimo caso, perde-se a grande vantagem do MEC que é equacionar todo o problema exclusivamente com valores do contorno.

Uma vez conhecido todos os valores de V e $\mathbf{E}$ no contorno, a equação (3.57) pode ser utilizada para o cálculo de V_i interno e externo ao domínio Ω . Nesses casos K_i terá os seguintes valores:

- $K_i = \frac{\theta_{\text{int}}}{2\pi} \rightarrow$ se o ponto i for sobre o contorno, $i \in \Gamma$;
- $K_i = 1 \rightarrow$ se o ponto i for interno ao domínio, $i \in \Omega$;

- $K_i = 0 \rightarrow$ se o ponto i for externo ao domínio, $i \notin \Omega$.

Para contornos suaves, o valor de K_i é igual a 0,5.

Antes de discretizar a região, a equação integral do contorno (3.57) vai ser reescrita com os respectivos índices. A fonte b será considerada nula.

Para o cálculo do potencial em pontos sobre o contorno, têm-se $i \in \Gamma$ e $K_i = \frac{\theta_{\text{int}}}{2\pi}$.

Reescrevendo a equação (3.57), tem-se:

$$K(i)V(i) + \int_{\Gamma} V(P) \mathbf{E}^*(i, P) d\Gamma = \int_{\Gamma} V^*(i, P) \mathbf{E}(P) d\Gamma \quad (3.58)$$

Para o cálculo do potencial em pontos no domínio interno, têm-se $i \neq P$ e $i \in \Omega$ e $K_i = 1$. Reescrevendo a equação (3.57), tem-se:

$$V(i) + \int_{\Gamma} V(P) \mathbf{E}^*(i, P) d\Gamma = \int_{\Gamma} V^*(i, P) \mathbf{E}(P) d\Gamma \quad (3.59)$$

O índice i , indica o ponto de aplicação da função impulsiva, sendo chamado de ponto fonte ou ponto de colocação. O ponto P indicado sobre o contorno é chamado de ponto campo. Para se resolver o problema proposto com o MEC, primeiro resolve-se problema para pontos sobre o contorno, encontrado as incógnitas da equação (3.58). Depois, o potencial para pontos fora do contorno é determinado.

3.6 – Revisão do capítulo

Neste capítulo foram estudadas as equações para o Método dos Elemento de Contorno, sendo que para tanto foi utilizado o Método dos Resíduos Ponderados para transformar a equação diferencial de Poisson/Laplace em uma equação integral com incógnitas apenas no contorno.

Para tanto, foi utilizada a função delta de Dirac para localizar as incógnitas exclusivamente no contorno. Uma solução fundamental que contempla a influência do infinito, foi utilizada como função de ponderação.

CAPÍTULO 4: Método dos Elementos de Contorno

Neste capítulo, serão mostrados vários tópicos relacionados com o MEC. Inicialmente, serão mostrados os vários métodos de discretização ao qual o contorno pode ser submetido. Em seguida, será mostrado como montar e resolver o sistema de equações para a obtenção das incógnitas do problema. Além desses dois tópicos citados, serão tratados alguns tópicos relacionados ao MEC, como: domínio infinito e formulação indireta do MEC. Também será mostrado o método de integração numérica e analítica que pode ser utilizado para resolver as integrais.

4.1 – Discretização do contorno

As integrais sobre o contorno das equações (3.58) e (3.59) são calculadas, de maneira aproximada, por meio da discretização do contorno em elementos. A geometria do elemento pode ser aproximada por uma função qualquer, sendo que o número e a forma dos elementos devem ser escolhidos de tal forma que representem adequadamente o contorno real estudado, podendo ser de maneira exata ou aproximada.

A Figura (4.1) mostra a discretização de um contorno genérico. Os pontos indicados na Figura (4.1) são chamados de nós, pontos nodais ou pontos funcionais. Nesses pontos, são definidas duas variáveis: V e E . Porém, como uma das variáveis é dada pela condição de

contorno, tem-se apenas uma incógnita em cada nó. Observa-se na Figura (4.1) vértices que contém dois nós e outros vértices com apenas um nó. A adoção de dois nós em um mesmo vértice ocorre quando há incógnitas nesse ponto, devido à descontinuidade no valor do campo elétrico ($\mathbf{E}$).

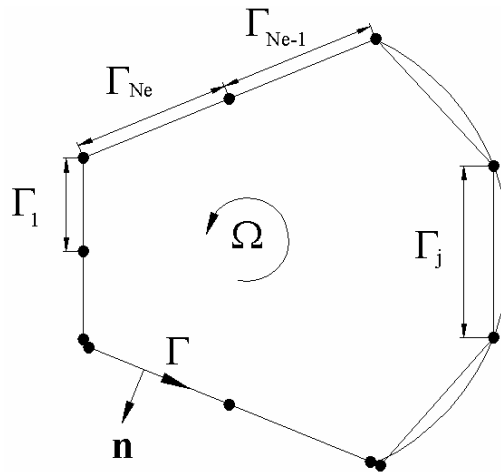


Figura 4.1 – Discretização de um contorno genérico.

Para se obter a solução numérica da equação integral de contorno é necessário que o mesmo seja discretizado em elementos que sejam capazes de aproximar bem a geometria ao longo do contorno. Ou seja, que os valores de V e $\mathbf{E}$ no contorno são interpolados nos elementos. Diferentes tipos de elementos podem ser utilizados para discretizações em duas dimensões, tais como elemento constante, linear ou quadrático. Para discretizações em três dimensões, se faz necessário outros tipos de elementos (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1992).

E necessário observar o sentido de integração, pois esse sentido irá definir a normal do contorno. Considerando a Figura (4.1), para que o domínio de interesse seja o domínio fechado pelo contorno Γ , chamado na Figura (4.1) de Ω , o domínio é integrado no sentido anti-horário, tomado como sentido positivo. Desse modo, o domínio Ω é chamado de domínio interno. Caso o domínio de interesse seja a região exterior ao contorno (Ω_∞), o sentido de integração deve ser no sentido horário e o domínio Ω_∞ passa a ser chamado de

domínio interno e a normal ao contorno passa a apontar para o interior do contorno, sendo chamado de buraco de contorno. O sentido de discretização deve ter o mesmo sentido da integração.

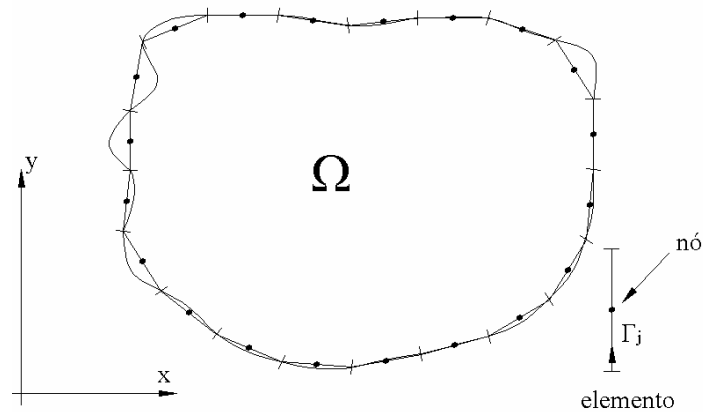


Figura 4.2 – Discretização de um contorno com elemento constante.

No elemento constante mostrado na Figura (4.2), as variáveis de contorno V e $\mathbf{E}$, denominadas prescritas e incógnitas, respectivamente, são consideradas constantes em cada elemento e iguais ao seu valor no ponto funcional localizado no meio do elemento.

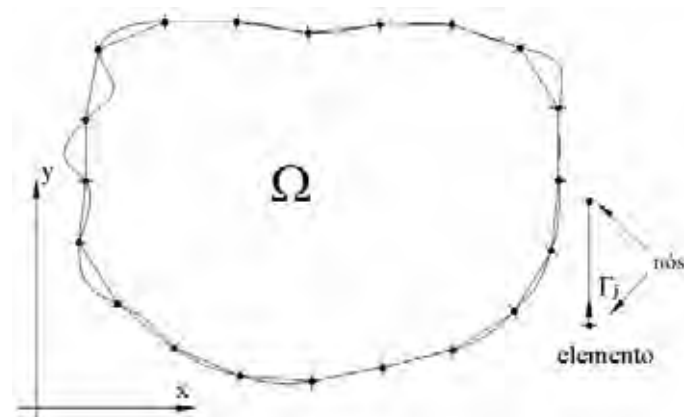


Figura 4.3 – Discretização de um contorno com elemento Linear.

Já para o elemento linear mostrado na Figura (4.3), V e $\mathbf{E}$ variam linearmente dentro de cada elemento em função dos valores nos dois nós funcionais localizados nos pontos extremos do elemento.

No elemento quadrático mostrado na Figura (4.4), tanto a geometria quanto os valores de V e $\mathbf{E}$ no contorno são representados utilizando-se as funções de interpolação para dois nós extremos e um nó central.

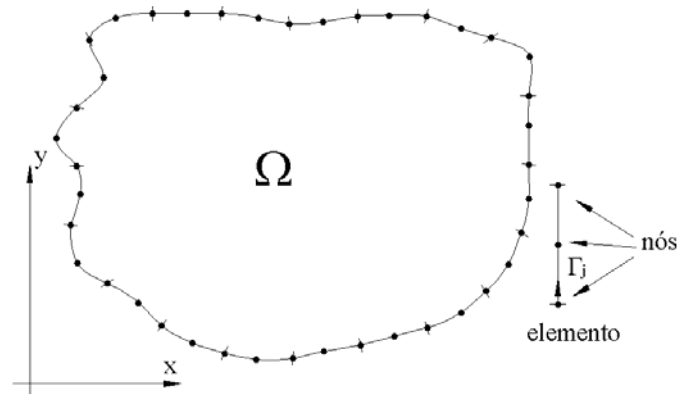


Figura 4.4 – Discretização de um contorno com elemento quadrático.

Uma vez discretizado o contorno, a geometria e também as variáveis V e $\mathbf{E}$ do contorno são equacionadas. Os métodos numéricos costumam fazer uso de uma coordenada local adimensional em cada elemento, representada por ξ ($-1 \leq \xi \leq 1$), sendo que a variação da coordenada local provoca a varredura de todo o elemento j .

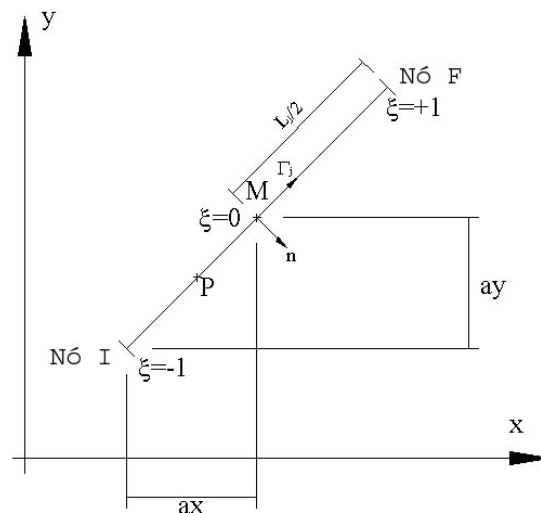


Figura 4.5 – Geometria do elemento aproximado por função linear.

No caso da função escolhida para aproximar a geometria ser linear, os elementos serão retos, sendo necessário apenas dois nós para representar sua geometria. Na figura 4.5, os nós nó I e nó F são respectivamente, o nó inicial e nó final. Para se obterem elementos curvos, uma adotada uma função de aproximação quadrática é adotada, sendo necessário três nós no elemento. Na Figura (4.5), o nó I é o nó inicial, o nó F é o nó final, M é o ponto do meio do elemento, L_j é o comprimento do elemento j e $\vec{n}$ é a direção normal ao contorno Γ_j . No caso, tem-se: $-L_j/2 \leq \Gamma_j \leq L_j/2$.

Se o ponto de colocação i não pertencer ao elemento que está sendo integrado, as integrais serão resolvidas numericamente. Por isso, é conveniente expressar a variável Γ_j em coordenadas cartesianas de um ponto $P(x^P, y^P)$ qualquer do elemento e em função de sua coordenada local homogênea ξ . Da Figura (4.5), são deduzidas as equações:

$$\Gamma_j = \xi \frac{L_j}{2} \rightarrow d\Gamma_j = \frac{L_j}{2} d\xi \quad (4.1)$$

$$x^P(\xi) = x^M + \xi ax \quad (4.2.a)$$

$$y^P(\xi) = y^M + \xi ay \quad (4.2.b)$$

Onde: x^P e y^P são as coordenadas nas direções x e y , respectivamente, do ponto P ; x^M e y^M são as coordenadas nas direções x e y , respectivamente, do ponto M . Assim, tem-se:

$$x^M = (x^{nóI} + x^{nóF})/2 \quad (4.3.a)$$

$$y^M = (y^{nóI} + y^{nóF})/2 \quad (4.3.b)$$

$$ax = (x^{nóF} - x^{nóI})/2 \quad (4.4.a)$$

$$ay = (y^{nóF} - y^{nóI})/2 \quad (4.4.b)$$

As equações (4.2) podem ser escritas numa só equação matricial, onde os valores das coordenadas do ponto P são dados em função das coordenadas dos nós I e F:

$$\begin{Bmatrix} x^P \\ y^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x^{nóI} \\ x^{nóF} \\ y^{nóI} \\ y^{nóF} \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

Onde: $\{x^{nóI} \ x^{nóF} \ y^{nóI} \ y^{nóF}\}$ são os vetores dos valores nodais das coordenadas e ϕ_k

são as funções de interpolação lineares, que são dadas de forma geral para o caso linear por:

$$\phi_1(P) = (1 - \xi)/2 \quad (4.6.a)$$

$$\phi_2(P) = (1 + \xi)/2 \quad (4.6.b)$$

Sendo ξ a coordenada local homogênea do ponto P.

Portando, a integral ao longo do contorno Γ é calculada de forma aproximada, fazendo-se a discretização do contorno em Ne elementos e a mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas homogêneas. Ou seja:

$$\int_{\Gamma} F(\Gamma) d\Gamma = \sum_{j=1}^{Ne} \int_{-L_j/2}^{L_j/2} F(\Gamma_j) d\Gamma_j = \sum_{j=1}^{Ne} \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi \quad (4.7)$$

4.1.1 – Aproximação das variáveis do problema

A aproximação das variáveis é feita para os três tipos de problemas em duas dimensões: constante, linear e quadrática. A aproximação das variáveis no elemento é feita para expressar o valor da variável V ou E em um ponto P qualquer de um elemento j em função dos seus valores nodais e das funções de interpolação. As variáveis são escritas em

termos de coordenadas homogêneas para viabilizar a integração numérica. Com isso, $V(P)$ e $E(P)$ são dados por:

$$V(P) = \phi^T(P) V_j \quad (4.8.a)$$

$$E(P) = \phi^T(P) E_j \quad (4.8.b)$$

Onde: $\phi^T(P)$ é o vetor que contém as funções de interpolação ou funções de forma, escritas em termos de coordenadas homogêneas; V_j e E_j são os vetores com os valores nodais de V e E , respectivamente, do elemento j .

O número de nós a ser definido no elemento, assim como a definição das funções de forma, dependerá do tipo de aproximação adotada.

4.1.1.1 – Aproximação constante

No caso da aproximação adotada para as variáveis ser constante, necessita-se de apenas um nó em cada elemento. Os valores de V e E , em qualquer ponto do elemento j , são iguais ao do nó 1 (NO_j^1), que é definido no meio do elemento j (Figura 4.6). Nesse caso, a função de forma (ϕ_1) assume um valor constante igual a um, e a equações (4.8) assume a forma:

$$\phi_1(P) = 1 \quad (4.9)$$

$$V(P) = \phi_1(P) V_j^1 \quad (4.10.a)$$

$$E(P) = \phi_1(P) E_j^1 \quad (4.10.b)$$

Sendo: $P \in$ ao elemento j ; V_j^1 e $\mathbf{E}_j^1$ são os valores de V e $\mathbf{E}$ no nó 1 do elemento j

(NO_j^1) .

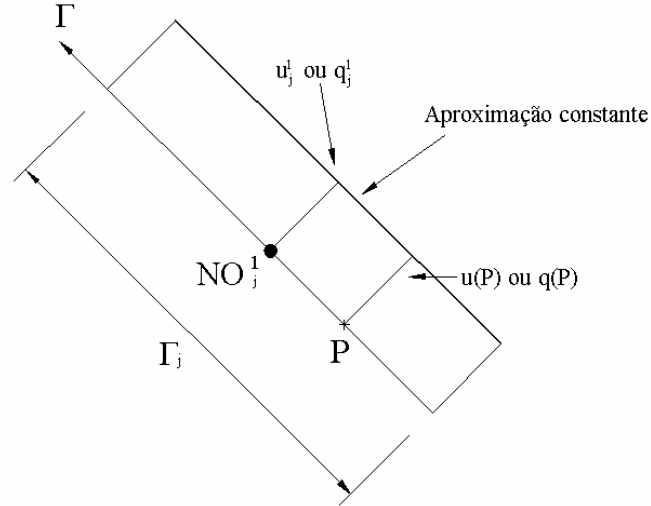


Figura 4.6 – Aproximação constate das variáveis.

Após definir as funções de $V(P)$ e $\mathbf{E}(P)$, é possível reescrever a equação (3.58) com auxílio das funções de forma para o cálculo de V e $\mathbf{E}$ no contorno:

$$\frac{1}{2} V(i) + \sum_{j=1}^{Ne} V_j^1 \int_{\Gamma} \mathbf{E}^*(i, P) d\Gamma = \sum_{j=1}^{Ne} \mathbf{E}_j^1 \int_{\Gamma} V^*(i, P) d\Gamma \quad (4.11)$$

Pelo fato dos valores de V e $\mathbf{E}$ serem definidos no meio do elemento, o contorno é obrigatoriamente suave nos pontos de aplicação da função impulsiva e, portanto: $K(i) = \frac{1}{2}$.

4.1.1.2 – Aproximação linear

No caso da aproximação adotada para as variáveis ser linear, necessita-se de dois nós em cada elemento, um em cada extremidade do elemento (Figura 4.7). Para a aproximação

linear as funções de forma ficam iguais às equações (4.6), e as equações (4.8) para V e $\mathbf{E}$ assumem a seguinte forma:

$$V(P) = [\phi_1(P) \quad \phi_2(P)] \begin{bmatrix} V_j^1 \\ V_j^2 \end{bmatrix} \quad (4.12.a)$$

$$\mathbf{E}(P) = [\phi_1(P) \quad \phi_2(P)] \begin{bmatrix} \mathbf{E}_j^1 \\ \mathbf{E}_j^2 \end{bmatrix} \quad (4.12.b)$$

Sendo: $P \in$ ao elemento j ; V_j^{NS} e $\mathbf{E}_j^{NS}$ são os valores de V e $\mathbf{E}$ no nó NS do elemento j (NO_j^{NS}); $\phi_1(P)$ e $\phi_2(P)$ são iguais a, respectivamente, $\phi_1(\xi)$ e $\phi_2(\xi)$ nas equações (4.6). As funções de forma $\phi_1(P)$ e $\phi_2(P)$ devem ser definidas de tal maneira que, para o cálculo de V e $\mathbf{E}$ nos pontos nodais sejam iguais a um e nula para o restante do elemento j .

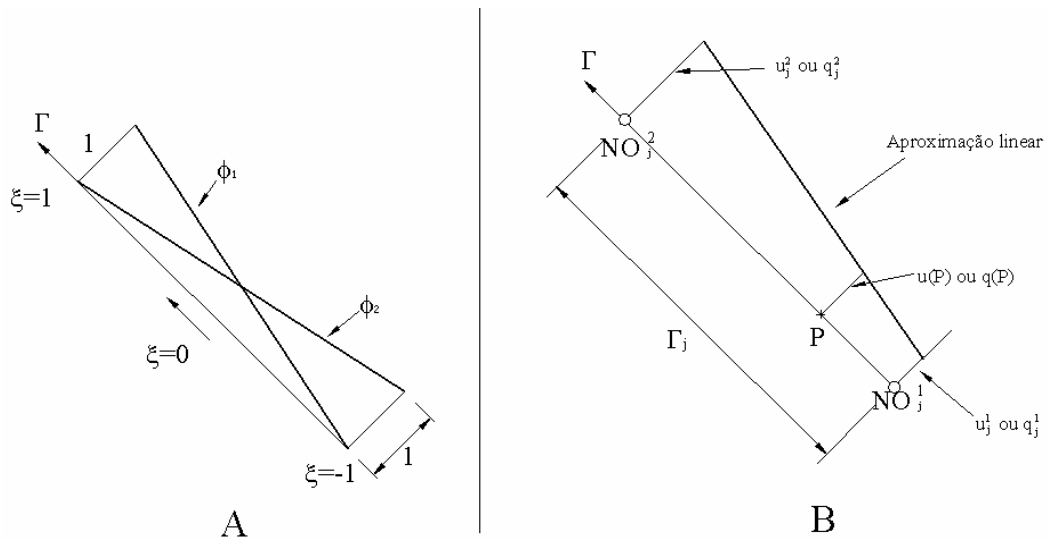


Figura 4.7 – Aproximação linear das variáveis.

Após definir a função de $V(P)$ e $\mathbf{E}(P)$, é possível reescrever a equação (3.58) com o auxílio das funções de forma para o cálculo de V e $\mathbf{E}$ no contorno:

$$K(i)V(i) + \sum_{j=1}^{Ne} \begin{bmatrix} V_j^1 \\ V_j^2 \end{bmatrix} \int_{\Gamma} [\phi_1(P) \quad \phi_2(P)] \mathbf{E}^*(i,P) d\Gamma = \sum_{j=1}^{Ne} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_j^1 \\ \mathbf{E}_j^2 \end{bmatrix} \int_{\Gamma} V^*(i,P) [\phi_1(P) \quad \phi_2(P)] d\Gamma \quad (4.13)$$

4.1.1.3 – Aproximação quadrática

Se as variáveis forem aproximadas por funções quadráticas, serão necessários três pontos nodais em cada elemento. Nesse caso, as equações (4.8) são dadas por:

$$V(P) = [\phi_1(P) \quad \phi_2(P) \quad \phi_3(P)] \begin{bmatrix} V_j^1 \\ V_j^2 \\ V_j^3 \end{bmatrix} \quad (4.14.a)$$

$$\mathbf{E}(P) = [\phi_1(P) \quad \phi_2(P) \quad \phi_3(P)] \begin{bmatrix} \mathbf{E}_j^1 \\ \mathbf{E}_j^2 \\ \mathbf{E}_j^3 \end{bmatrix} \quad (4.14.b)$$

Onde: V_j^{NS} e $\mathbf{E}_j^{NS}$ (com NS representando o número de nós) são os valores de V e $\mathbf{E}$ no nó NS do elemento j (NO_j^{NS}) (Figura 4.8); ϕ_{NS} são as funções de forma quadráticas, que na forma geral, são dadas por:

$$\phi_1(P) = \frac{\xi(\xi_3 - \xi)}{\xi_1(\xi_3 - \xi_1)} \quad (4.15.a)$$

$$\phi_2(P) = 1 - \frac{\xi_3 + \xi_1}{\xi_1 \xi_3} \xi + \frac{1}{\xi_1 \xi_3} \xi^2 \quad (4.15.b)$$

$$\phi_3(P) = \frac{\xi(\xi_1 - \xi)}{\xi_3(\xi_1 - \xi_3)} \quad (4.15.c)$$

Onde: ξ é a coordenada adimensional do ponto P ; ξ_1 é a coordenada do nó 1; ξ_3 é a coordenada do nó 3. No caso de se adotarem os nós 1 e 3 coincidentes com os pontos

extremos do elemento (nós I e F da Figura 4.5), têm-se $\xi_1 = -1$ e $\xi_3 = 1$, e as equações (4.15) resultam em:

$$\phi_1(P) = -0,5 \xi (1 - \xi) \quad (4.16.a)$$

$$\phi_2(P) = 1 - \xi^2 \quad (4.16.b)$$

$$\phi_3(P) = 0,5 \xi (1 + \xi) \quad (4.16.c)$$

As funções de forma para o cálculo de V e $\mathbf{E}$ no contorno são definidas de maneira que sejam iguais a um ($\phi_{NS} = 1$) para o nó NS e nulas para os demais nós, como é mostrado na Figura (4.8).

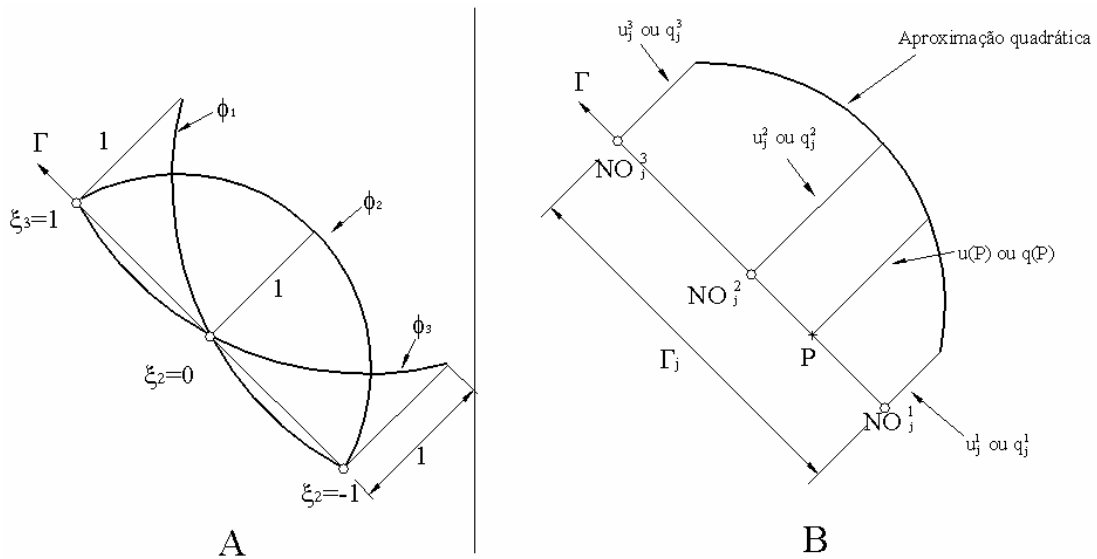


Figura 4.8 – Aproximação quadrática das variáveis.

Após definir a função de $V(P)$ e $\mathbf{E}(P)$, é possível reescrever a equação (3.58) com o auxílio das funções de forma para o cálculo de V e $\mathbf{E}$ no contorno:

$$\begin{aligned}
K(i) V(i) + \sum_{j=1}^{Ne} \begin{bmatrix} V_j^1 \\ V_j^2 \\ V_j^3 \end{bmatrix} \int_{\Gamma} [\phi_1(P) \quad \phi_2(P) \quad \phi_3(P)] \mathbf{E}^*(i, P) d\Gamma = \\
= \sum_{j=1}^{Ne} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_j^1 \\ \mathbf{E}_j^2 \\ \mathbf{E}_j^3 \end{bmatrix} \int_{\Gamma} V^*(i, P) [\phi_1(P) \quad \phi_2(P) \quad \phi_3(P)] d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.17}$$

4.1.2 – Tratamento de vértices da geometria

Uma questão importante que se apresenta está relacionada às descontinuidades nos valores das variáveis entre dois elementos adjacentes. No caso do potencial V nunca haverá descontinuidade no seu valor ao longo do contorno, pois o seu valor é único em um ponto. Isto é, o potencial no final do elemento $j-1$ (NO_{j-1}^3) será sempre igual ao potencial no início do elemento j (NO_j^1), considerando a aproximação quadrática. Porém, o campo elétrico poderá apresentar descontinuidade no seu valor entre dois elementos consecutivos, para a direção normal. Assim, o elemento anterior ao vértice tem uma normal ao contorno e o elemento posterior ao vértice tem-se outra normal ao contorno (Figura 4.9). Desse modo, há quatro situações, dependendo das condições de contorno:

- As intensidades do campo elétrico $\mathbf{E}_{j-1}^3$ e $\mathbf{E}_j^1$ são prescritas, portanto tem-se apenas uma incógnita no vértice, que é o valor do potencial, pois $V_{j-1}^3 = V_j^1$;
- As intensidades do campo elétrico $\mathbf{E}_{j-1}^3$ e do potencial V_{j-1}^3 são prescritas. Nesse caso, a incógnita no vértice é o valor de $\mathbf{E}_j^1$;

- As intensidades do campo elétrico $\mathbf{E}_j^1$ e o potencial V_j^1 são prescritas. Nesse caso, a incógnita no vértice é o valor de $\mathbf{E}_{j-1}^3$;
- Os potenciais V_{j-1}^3 e V_j^1 são prescritos. Nesse caso, têm-se duas incógnitas no vértice, dadas por $\mathbf{E}_{j-1}^3$ e $\mathbf{E}_j^1$.

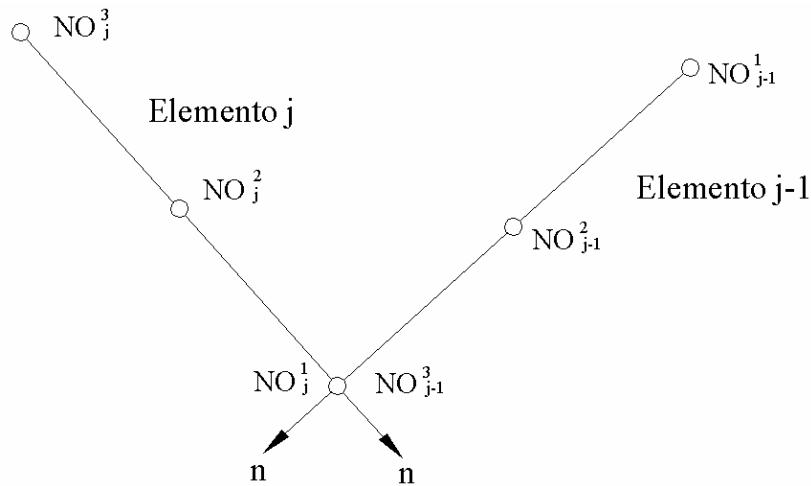


Figura 4.9 – Elementos descontínuos.

Quando há duas incógnitas no vértice $\mathbf{E}_{j-1}^3$ e $\mathbf{E}_j^1$, é necessária a definição de nós duplos para representar a descontinuidade da variável $\mathbf{E}$. Os nós duplos NO_{j-1}^3 e NO_j^1 são dois nós definidos com as mesmas coordenadas, com a finalidade de obter duas equações independentes. As coordenadas do nó duplo são recalculados de tal forma que o nó se torne interno ao respectivo elemento e não mais coincidente com o vértice (Figura 4.10). O elemento que possuir o nó duplo será um elemento descontínuo, isto é, não haverá continuidade da variável $\mathbf{E}$ entre dois elementos consecutivos.

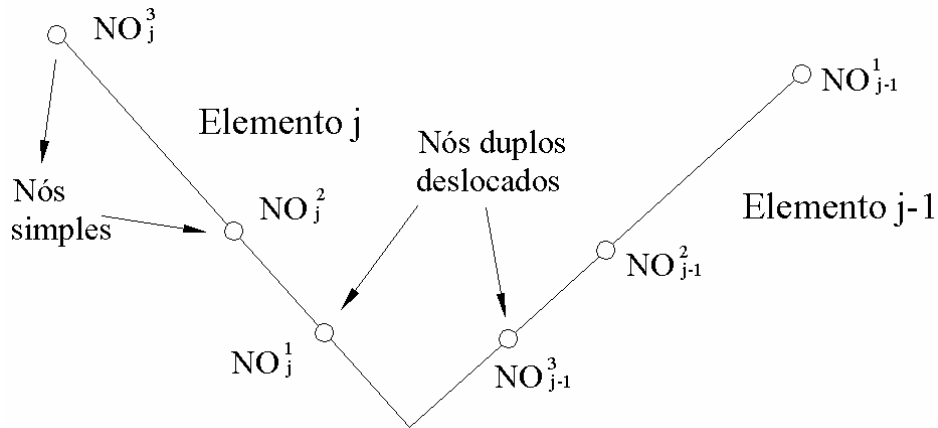


Figura 4.10 – Nós duplos deslocados.

O cálculo das coordenadas do nó duplo é feito a partir das equações (4.2), considerando-se $0,4 \leq |\xi| \leq 0,6$. Esses limites são adotados para o valor de ξ , obtendo-se um afastamento conveniente entre os nós locais do elemento, a fim de evitar problemas de singularidade no sistema de equações. Desse modo, o ponto i não coincide mais com o nó do elemento, sendo que o potencial $V(i)$ neste ponto deve ser escrito em função dos potenciais nodais do elemento, utilizando-se as equações (4.12.a) e (4.14.a), dependendo do tipo de aproximação adotada para as variáveis. A aproximação constante das variáveis nunca utilizará nós duplos, já que seu nó é definido no meio do elemento.

Outra forma de se representar a descontinuidade no valor do campo elétrico é adotar as funções dadas pela equação (4.15). Desse modo, na extremidade do elemento onde há descontinuidade, o nó do elemento não é mais definido na extremidade: $-0,6 \leq \xi_1 \leq -0,4$ e/ou $0,4 \leq \xi_3 \leq 0,6$. A diferença entre os dois esquemas é no segundo, o nó já é definido na posição deslocada, não havendo a necessidade de escrever o potencial desse nó em função dos potenciais nodais do elemento ao qual o ponto pertence. Ele já é um nó do contorno. Nos resultados, os valores das variáveis serão referentes à posição deslocada e não à extremidade do elemento.

4.2 – Transformação das equações integrais em equações algébricas

A obtenção de um sistema de N equações lineares e N incógnitas é feita aplicando a excitação impulsiva sucessivamente em cada um dos NN nós que constituem o contorno discretizado. Nesse caso, NN é igual ao número total de nós do contorno. A equação integral (3.58) do potencial V em um ponto i do contorno será transformada em equação algébrica, por meio da discretização do contorno em elementos, nos quais as variáveis são aproximadas pelas equações (4.8). Portanto, a equação (3.58) é calculada de forma aproximada, da seguinte forma:

$$K(i)V(i) + \sum_{j=1}^{Ne} \left[\int_{\Gamma_j} \phi^T(P) \mathbf{E}^*(i, P) d\Gamma_j \right] V_j = \sum_{j=1}^{Ne} \left[\int_{\Gamma_j} V^*(i, P) \phi^T(P) d\Gamma_j \right] \mathbf{E}_j \quad (4.18)$$

Sendo: Ne o número total de elementos do contorno. A equação (4.18) corresponde a forma geral das equações (4.11), (4.13) e (4.17), que foram especificadas para um método de aproximação específico.

Definindo-se os seguintes vetores, de dimensão $(1 \times NN)$, sendo NN igual a $Ne \times NS$ e NS o número de nós necessários no elemento para a aproximação das variáveis:

$$h_j^{NS}(i) = \int_{\Gamma_j} \mathbf{E}^*(i, P) \phi_{NS}(P) d\Gamma_j \quad (4.19)$$

$$g_j^{NS}(i) = \int_{\Gamma_j} V^*(i, P) \phi_{NS}(P) d\Gamma_j \quad (4.20)$$

A equação (4.18) pode ser reescrita definindo os coeficientes dados em (4.19) e (4.20), da seguinte forma:

$$K(i)V(i) + \sum_{j=1}^{Ne} h_j^{NS}(i) V_j^{NS} = \sum_{j=1}^{Ne} g_j^{NS}(i) \mathbf{E}_j^{NS} \quad (4.21)$$

Aplicando-se a função impulsiva a todos os NN nós do contorno, obtém-se um sistema de equações referenciadas às grandezas nodais de todo o contorno. É evidente que a montagem do sistema dependerá da escolha da modelagem das incógnitas nos elementos.

Como $V(i)$ representa também uma grandeza nodal, a parcela $K(i)V(i)$ é incorporada convenientemente ao somatório do membro esquerdo, onde o ponto i pertence ao nó NS do elemento j .

A equação (4.21) ainda pode ser reescrita de forma matricial, como:

$$[H] V_j^{NS} = [G] \mathbf{E}_j^{NS} \quad (4.22)$$

Essa equação é considerada como uma versão discretizada da equação integral do problema. As matrizes $[H]$ e $[G]$ são conhecidas genericamente como matrizes de influência, pois contemplam a influência de cada ponto de aplicação do impulso sobre as variáveis nodais, tendo dimensão de $NS \times NS$. No cálculo dos elementos dessas matrizes há influências dos aspectos geométricos e da natureza do problema em estudo.

O vetor coluna V_j^{NS} contém os potenciais desconhecidos de alguns nós e os demais elementos desse vetor contêm os valores de potencial fixados como condição de contorno de Dirichlet. Situação análoga ocorre com o vetor coluna $\mathbf{E}_j^{NS}$. Alguns elementos de $\mathbf{E}_j^{NS}$ são incógnitas e os demais contêm os valores da derivada normal fixados como condição de contorno de Neumann.

4.3 – Sistema de Equações

Para o caso de problemas de potencial, tem-se uma incógnita em cada ponto nodal sobre o contorno, sendo duas variáveis nesses pontos (V e E). Uma delas é dada como condição de contorno.

Escrevendo-se todas as equações necessárias para a solução do problema, obtém-se o sistema de equações dado por (4.22), onde a dimensão das matrizes $[H]$ e $[G]$ são de dimensão $NS \times NS$ para o caso dado pela equação (4.21).

Após a imposição das condições de contorno, o sistema (4.22) é resolvido da seguinte forma: isolam-se todas as incógnitas no vetor V_j^{NS} , trocando-se as respectivas colunas das matrizes $[H]$ e $[G]$. Com isso, a matriz $[H]$ se transforma em $[A]$, $[G]$ se transforma em $[\bar{G}]$, e os vetores V_j^{NS} e E_j^{NS} se transformam em X e $\bar{Q}$. Nesse caso X contém todas as incógnitas do problema e $\bar{Q}$ contém os valores prescritos de V e E . Multiplica-se a matriz $[\bar{G}]$ pelo vetor $\bar{Q}$, obtendo-se B . Assim, o sistema definido por (4.22) torna-se:

$$[A]X = B \quad (4.23)$$

Onde: X é o vetor solução, composto pelos potenciais e pelas intensidades do campo elétrico incógnitas nos nós do contorno.

Seja o seguinte sistema de equações, onde $n = NN$:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1k} & \cdots & H_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{k1} & \cdots & H_{kk} & \cdots & H_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{n1} & \cdots & H_{nk} & \cdots & H_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^k \\ \vdots \\ v^n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1k} & \cdots & G_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{k1} & \cdots & G_{kk} & \cdots & G_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{n1} & \cdots & G_{nk} & \cdots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^k \\ \vdots \\ e^n \end{Bmatrix}$$

$[H] \qquad V_j^{NS} \qquad [G] \qquad \mathbf{E}_j^{NS}$

Admitindo-se, por exemplo, que no nó k seja prescrito o potencial elétrico e , nos nós 1 e n , o campo elétrico, permutam-se as colunas, de modo que no primeiro membro só haja incógnitas e no segundo membro só haja valores conhecidos. O sistema resulta em:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & \cdots & -G_{1k} & \cdots & H_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{k1} & \cdots & -G_{kk} & \cdots & H_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{n1} & \cdots & -G_{nk} & \cdots & H_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^k \\ \vdots \\ v^n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & \cdots & -H_{1k} & \cdots & G_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{k1} & \cdots & -H_{kk} & \cdots & G_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{n1} & \cdots & -H_{nk} & \cdots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e^1 \\ \vdots \\ v^k \\ \vdots \\ e^n \end{Bmatrix}$$

$[A] \qquad X \qquad [\bar{G}] \qquad \bar{Q}$

E, finalmente, o sistema de equações (4.23) pode ser resolvido com a utilização do Método da Eliminação de Gauss. (PRESS, 1992)

4.4 – Obtenção das variáveis no domínio

Com a solução do sistema (4.23), obtêm-se todas as incógnitas nodais sobre o contorno, isto é, os vetores V_j^{NS} e $\mathbf{E}_j^{NS}$ passam a ser conhecidos. Portanto, para se obter os valores de V e $\mathbf{E}$ em pontos no domínio, basta escrever a equação de $V(i)$ (3.59) no ponto desejado do domínio.

4.5 – Domínios infinitos

Na dedução das equações mostradas anteriormente, o problema foi definido em um domínio finito, de contorno finito. Porém, no caso em que os fenômenos físicos acontecem em regiões infinitas ou semi-infinitas, sendo esse o caso das linhas de transmissão, o campo e o potencial elétricos são calculados no domínio infinito.

Considere a Figura (4.11), onde está representado um contorno circular Γ_∞ , situado a uma distância suficientemente grande do buraco de contorno Γ , como um caso de aplicações do método em problemas que envolvam o domínio infinito. A direção da normal ao contorno Γ tem o sentido inverso daquele definido na Figura (3.2), pois, nesse caso, existe a necessidade de definir um buraco de contorno Γ , dentro do domínio infinito de contorno Γ_∞ . Portanto, o domínio Ω é definido por um contorno interno Γ e um contorno externo Γ_∞ . Nesse caso, para um ponto sobre o contorno, a equação (3.58) resulta em:

$$K(i)V(i) = \int_{\Gamma} V^*(i, P) \mathbf{E}(P) d\Gamma - \int_{\Gamma} V(P) \mathbf{E}^*(i, P) d\Gamma + \int_{\Gamma_\infty} V^*(i, P_\infty) \mathbf{E}(P_\infty) d\Gamma_\infty - \int_{\Gamma_\infty} V(P_\infty) \mathbf{E}^*(i, P_\infty) d\Gamma_\infty \quad (4.24)$$

Para um observador em P_∞ , o buraco definido pelo contorno Γ é um único ponto. Ou seja, um ponto i sobre Γ , ou próximo de Γ , se confunde com o próprio contorno Γ . Assim, todos os fenômenos físicos que ocorrem nas vizinhanças de Γ serão equivalentes à aplicação de um potencial V em i .

Sendo c o valor da resultante do potencial elétrico aplicado no contorno finito Γ ou seja, $V = c$, esse potencial elétrico provoca em P_∞ um potencial elétrico dado pela própria solução fundamental:

$$V(P_\infty) = \left(-\frac{1}{2\pi} \ln r \right) c = c V^*(i, P_\infty) \quad (4.25)$$

$$\mathbf{E}(P_\infty) = \left(-\frac{1}{2\pi r} \cos(\alpha) \right) c = c V^*(i, P_\infty) \quad (4.26)$$

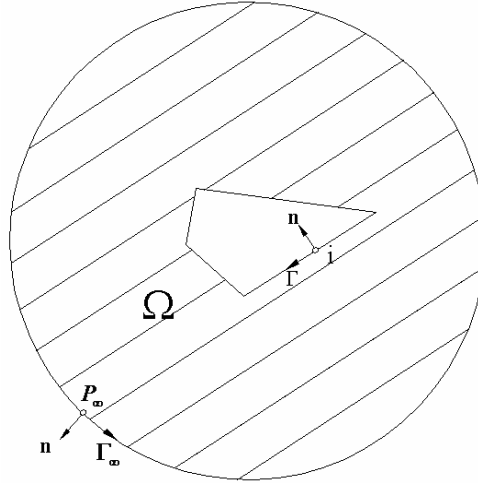


Figura 4.11 – Buraco em meio infinito.

Substituindo-se (4.25) e (4.26) em (4.24), as integrais sobre o contorno Γ_∞ se anulam. Logo, a equação (4.24) resulta na equação (3.58). Ou seja, a representação integral do potencial elétrico é a mesma para domínios finitos e infinitos. Essa propriedade é conhecida como condição de regularidade e ocorre para a maioria dos problemas em meios infinitos ou semi-infinitos. (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1992)

4.6 – Métodos de integração

Para a montagem das matrizes serão necessárias integrações das equações (4.19) e (4.20). Para isso, é necessário aplicar alguns métodos de integração:

- Integração numérica;
- Integração numérica com tratamento especial;

- Integração analítica.

A integração numérica é utilizada para os casos em que o ponto de colocação i não pertence ao elemento a ser integrado, como nos casos das equações referentes a um ponto interno. O mesmo não ocorre com a equação do ponto i , sobre o contorno, onde a integração numérica somente poderá ser utilizada se o mesmo não pertencer ao elemento considerado ($i \neq P$). Adotando-se esquemas particulares de integração, as integrais poderiam ser calculadas numericamente, mesmo para o caso em que i pertença ao elemento que está sendo integrado ($i = P$). O método de integração numérica utilizado nesses casos é o da quadratura de Gauss, em virtude de sua simplicidade.

A integração analítica e a integração numérica com tratamento especial são utilizadas no caso de $i = P$. Isto se deve ao fato da solução fundamental, equação (3.38), depender da distância $r = \vec{r} - \vec{r}'$ entre o ponto de aplicação da função impulsiva, denominado ponto fonte, e o ponto de observação, denominado ponto campo. Nos casos em que $i \neq P$, a distância r nunca será nula. O caso $i = P$ ocorre quando o ponto de aplicação estiver no elemento sobre o qual efetua-se a integração e, pela natureza da solução fundamental, o integrando apresenta singularidade que precisa ser verificada a fim de se montar a equação matricial.

4.6.1 – Integração numérica

Para a integração numérica, é conveniente que a expressão a ser integrada seja escrita em coordenadas homogêneas. Como exemplo, considere a integral (4.19). Fazendo a mudança de coordenada, dada por (4.1), a integral (4.19) é reescrita da seguinte forma:

$$h_j^{NS}(i) = \int_{\Gamma_j} \mathbf{E}^*(i, P) \phi_{NS}(P) d\Gamma_j \quad (4.36)$$

Onde: NS é o nó local do elemento j onde se mede a resposta da fonte unitária.

A integração numérica é feita pela fórmula de quadratura de Gauss (HOFFMAN, 2001), que é dada por:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{ig=1}^{Ng} f(\xi_{ig}) W_{ig} \quad (4.37)$$

Onde: $f(\xi)$ é a função a ser integrada, escrita em relação à coordenada ξ ; Ng é o número de pontos de integração (ponto de Gauss); ξ_{ig} é a coordenada adimensional do ponto ig de integração, definida em função do Ng ; W_{ig} é o fator ponderado, também definido em função de Ng .

A equação (4.36) é calculada, utilizando a fórmula (4.37), da seguinte forma:

$$h_j^{NS}(i) = \frac{L_j}{2} \sum_{ig=1}^{Ng} \mathbf{E}^*(i, \xi_{ig}) \phi_{NS}(\xi_{ig}) W_{ig} \quad (4.38)$$

O número Ng de pontos de integração é escolhido em função da distância entre o ponto fonte i e o elemento a ser integrado, considerando-se, ainda, o comprimento do elemento e a função a ser integrada. Quanto mais próximo estiver o ponto i do elemento a ser integrado, maior deve ser o número de pontos de Gauss adotados na integração. Designando-se rs como a distância entre i e o nó inicial do elemento, o seguinte esquema produz resultados satisfatórios: adota-se $Ng = 8$ se $rs \leq 2L_j$; $Ng = 4$ se $2L_j \leq rs \leq 12L_j$; $Ng = 2$ se $rs > 12L_j$. O mesmo procedimento pode ser usado para realizar a integração numérica na equação (4.20).

4.6.2 – Integração analítica

A integração analítica é utilizada quando o ponto de colocação i pertence ao elemento j , que está sendo integrado. A solução analítica é obtida resolvendo-se a integral sobre o contorno $\Gamma_j - \bar{\Gamma}$, fazendo-se o limite de $\bar{\Gamma}$ tender a zero (Figura 4.12). Seja o elemento j , representado na Figura 4.12 e definido pelo trecho Γ_j do contorno, sendo $-a \leq \Gamma_j \leq b$. No caso da equação (4.18) do potencial, os coeficientes definidos em (4.19) e (4.20) são obtidos analiticamente da seguinte forma:

$$\begin{aligned} h_j^{NS}(i) &= \int_{\Gamma_j} \mathbf{E}^*(i, P) \phi_{NS}(P) d\Gamma_j = \lim_{\bar{\Gamma}=0} \int_{\Gamma_j - \bar{\Gamma}} \mathbf{E}^*(i, P) \phi_{NS} d\Gamma_j(P) \\ &= \lim_{\bar{\Gamma}=0} \left[\int_{-a}^{-\xi} \mathbf{E}^*(i, P) \phi_{NS} d\Gamma_j(P) + \int_{\xi}^b \mathbf{E}^*(i, P) \phi_{NS} d\Gamma_j(P) \right] \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} g_j^{NS}(i) &= \int_{\Gamma_j} V^*(i, P) \phi_{NS}(P) d\Gamma_j = \lim_{\bar{\Gamma}=0} \int_{\Gamma_j - \bar{\Gamma}} V^*(i, P) \phi_{NS} d\Gamma_j(P) \\ &= \lim_{\bar{\Gamma}=0} \left[\int_{-a}^{-\xi} V^*(i, P) \phi_{NS} d\Gamma_j(P) + \int_{\xi}^b V^*(i, P) \phi_{NS} d\Gamma_j(P) \right] \end{aligned} \quad (4.40)$$

As integrais são resolvidas em dois trechos: $-a \leq \Gamma_j \leq -\xi$ e $\xi \leq \Gamma_j \leq b$. Nas integrais definidas nas equações (4.39) e (4.40), as expressões fundamentais são escritas em termos da variável r e a função da interpolação ϕ expressa em termos da coordenada Γ . Portanto, para resolver as integrais, a função ϕ e o contorno infinitesimal $d\Gamma_j$ são escritos em termos de r , sendo que a relação entre as coordenadas r e Γ depende do trecho a ser estudado. Isto é feito como mostrado abaixo:

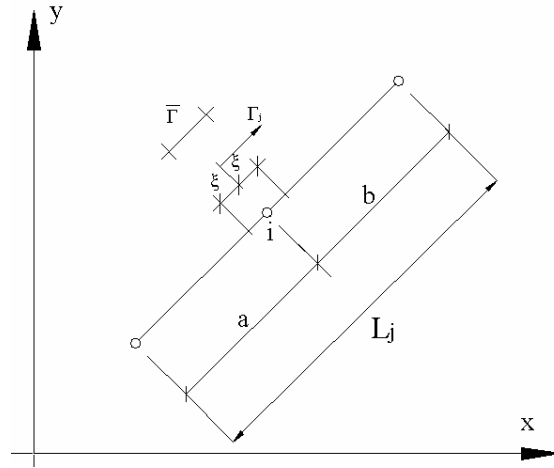


Figura 4.12 – Elemento j , que contém o ponto de colocação i .

a) Trecho $-a \leq \Gamma_j \leq -\xi$

No trecho mostrado na Figura (4.13), o vetor $\vec{r}_s$, $\vec{r}_s = \vec{r} - \vec{r}'$, tem sentido contrário ao da coordenada Γ_j . Logo, sendo $\vec{s}$ a direção tangencial ao contorno, tem-se:

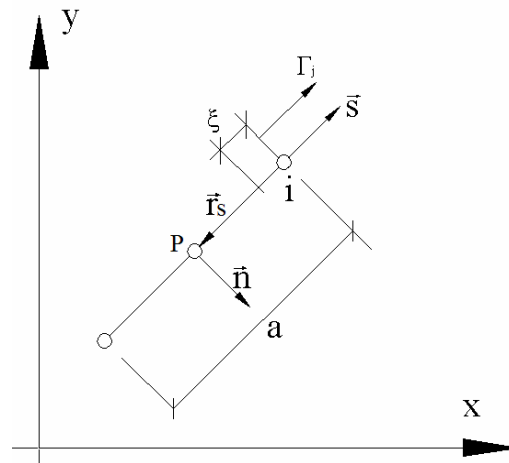


Figura 4.13 – Representação do trecho $-a \leq \Gamma_j \leq -\xi$

$$r = -\Gamma_j \quad (4.41)$$

$$dr = -d\Gamma_j \quad (4.42)$$

$$a \leq \Gamma_j \leq \xi \quad (4.43)$$

b) Trecho $\xi \leq \Gamma_j \leq b$

No trecho mostrado na Figura 4.14, o vetor $\vec{r}_s$, tem mesmo sentido da coordenada Γ_j .

Logo, sendo $\vec{s}$ a direção tangencial ao contorno, tem-se:

$$r = \Gamma_j \quad (4.44)$$

$$dr = d\Gamma_j \quad (4.45)$$

$$\xi \leq \Gamma_j \leq b \quad (4.46)$$

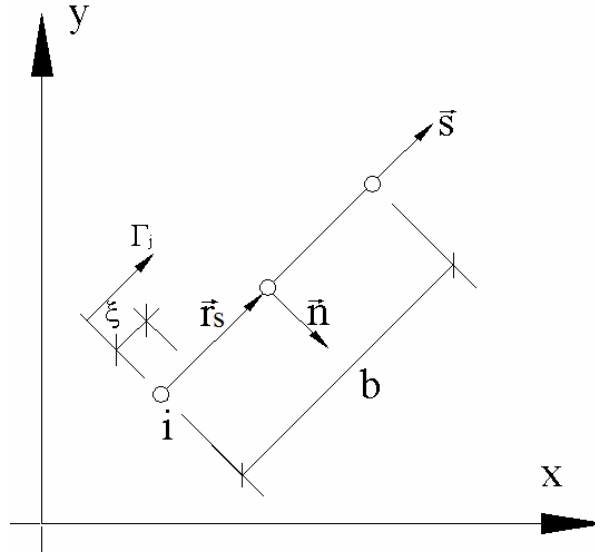


Figura 4.14 – Representação do trecho $\xi \leq \Gamma_j \leq b$

Em ambos os trechos, o vetor $\vec{r}_s$ é perpendicular à direção $\vec{n}$ normal ao contorno (Figuras 4.13 e 4.14) e, portanto, tem-se:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = 0 \quad (4.47)$$

A função ϕ depende do tipo de aproximação adotada para as variáveis. Substituindo-se (4.47) na expressão $\mathbf{E}^*$, obtém-se $\mathbf{E}^* = 0$, fazendo com que $h_j^{NS}(i)$ da equação (4.39) se

anule. Portanto, apenas a equação (4.40) é calculada analiticamente, considerando-se o tipo de aproximação adotada. A seguir será mostrado apenas o cálculo da integral analítica da equação (4.40) para o caso da aproximação constante e linear.

4.6.2.1 – Integração com aproximação constante do contorno

Neste caso a função de interpolação é dada por $\phi=1$. Considerando-se a expressão (3.38) da solução fundamental, se o ponto i pertence ao elemento j e coincide com o nó definido no meio do elemento, a equação (4.40) resulta em:

$$g_j^{NS}(i) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\xi=0} \left[\int_{-L_j/2}^{-\xi} \ln(r) d\Gamma_j(P) + \int_{\xi}^{L_j/2} \ln(r) d\Gamma_j(P) \right] \quad (4.48)$$

Considerando as relações (4.41), (4.42), (4.43), (4.44), (4.45) e (4.46), chega-se a:

$$\begin{aligned} g_j^{NS}(i) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\xi=0} \left[\int_{L_j/2}^{\xi} \ln(r) dr(P) - \int_{\xi}^{L_j/2} \ln(r) dr(P) \right] = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \lim_{\xi=0} \left[r(\ln r - 1) \Big|_{L_j/2}^{\xi} - r(\ln r - 1) \Big|_{\xi}^{L_j/2} \right] = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \lim_{\xi=0} \left[\xi(\ln \xi - 1) - \frac{L_j}{2} \left(\ln \left(\frac{L_j}{2} \right) - 1 \right) - \frac{L_j}{2} \left(\ln \left(\frac{L_j}{2} \right) - 1 \right) + \xi(\ln \xi - 1) \right] = \\ &= -\frac{L_j}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{L_j}{2} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (4.49)$$

Fazendo o limite de ξ tender a zero, os termos infinitos se anulam e a integral resulta em um valor finito.

4.6.2.2 – Integração com aproximação linear do contorno

Neste caso, são necessários dois nós no elemento e, portanto, devem ser consideradas as seguintes possibilidades para a posição do ponto i :

a) Ponto i coincide com o nó 1 (NO_j^1) (Figura 4.7).

Esse caso está representado pela Figura 4.14, fazendo $b = L_j$. Logo, tem-se, $0 \leq \Gamma_j \leq L_j$, sendo as funções de interpolação dadas por:

$$\phi_1 = 1 - \frac{\Gamma_j}{L_j} \quad (4.50.a)$$

$$\phi_2 = \frac{\Gamma_j}{L_j} \quad (4.50.b)$$

Quando $\Gamma_j = 0$ (nó 1), tem-se $\phi_1 = 1$ e $\phi_2 = 0$. Para $\Gamma_j = L_j$ (nó 2), tem-se $\phi_1 = 0$ e $\phi_2 = 1$.

Considerando-se as expressões (3.38) e (4.50) e ainda levando-se em conta que nesse caso o trecho $-a \leq \Gamma_j \leq -\xi$ não existe, a equação (4.40) resulta em:

$$g_j^{1(i)}(i) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\xi=0} \left[\int_{\xi}^{L_j} \ln(r) \left(1 - \frac{\Gamma_j}{L_j} \right) d\Gamma_j(P) \right] \quad (4.51.a)$$

$$g_j^{2(i)}(i) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\xi=0} \left[\int_{\xi}^{L_j} \ln(r) \left(\frac{\Gamma_j}{L_j} \right) d\Gamma_j(P) \right] \quad (4.51.b)$$

Considerando as equações (4.44), (4.45) e (4.46), as equações (4.51) resultam em:

$$\begin{aligned}
g_j^{1(i)}(i) &= -\frac{1}{2\pi} \lim_{\xi=0} \left[\int_{\xi}^{L_j} \left(\ln(r) - \frac{r}{L_j} \ln(r) \right) dr \right] = \\
&= -\frac{1}{2\pi} \lim_{\xi=0} \left[r(\ln r - 1) - \frac{r}{L_j} \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \right]_{\xi}^{L_j} = \frac{L_j}{4\pi} \left(\frac{3}{2} - \ln L_j \right)
\end{aligned} \tag{4.52.a}$$

$$g_j^{2(i)}(i) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\xi=0} \left[\int_{\xi}^{L_j} \frac{r}{L_j} \ln(r) dr \right] = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\xi=0} \left[\frac{r^2}{2L_j} \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \right]_{\xi}^{L_j} = \frac{L_j}{4\pi} \left(\frac{1}{2} - \ln L_j \right) \tag{4.52.b}$$

b) Ponto "i" coincide com o nó 2 (NO_j^2) (ver Figura 4.7).

Esse caso está representado pela Figura 4.13, fazendo $a = L_j$. Logo, tem-se,

$-L_j \leq \Gamma_j \leq 0$, sendo as funções de interpolação dadas por:

$$\phi_1 = -\frac{\Gamma_j}{L_j} \tag{4.53.a}$$

$$\phi_2 = 1 + \frac{\Gamma_j}{L_j} \tag{4.53.b}$$

Quando $\Gamma_j = -L_j$ (nó 1), tem-se $\phi_1 = 1$ e $\phi_2 = 0$. Para $\Gamma_j = 0$ (nó 2), tem-se $\phi_1 = 0$ e

$\phi_2 = 1$.

Considerando-se as expressões (3.38) e (4.53) e ainda levando-se em conta que nesse caso o trecho $\xi \leq \Gamma_j \leq b$ não existe, a equação (4.40) resulta em:

$$g_j^{1(2)}(i) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\xi=0} \left[\int_{-L_j}^{-\xi} \ln(r) \left(-\frac{\Gamma_j}{L_j} \right) d\Gamma_j(P) \right] \quad (4.54.a)$$

$$g_j^{2(2)}(i) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\xi=0} \left[\int_{-L_j}^{-\xi} \ln(r) \left(1 + \frac{\Gamma_j}{L_j} \right) d\Gamma_j(P) \right] \quad (4.54.b)$$

Considerando-se as equações (4.41), (4.42) e (4.43), as equações (4.54) resultam em:

$$g_j^{1(2)}(i) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\xi=0} \left[\int_{L_j}^{\xi} \frac{r}{L_j} \ln(r) dr \right] = \frac{L_j}{4\pi} \left(\frac{1}{2} - \ln L_j \right) = g_j^{2(1)}(i) \quad (4.55.a)$$

$$g_j^{2(2)}(i) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\xi=0} \left[\int_{L_j}^{\xi} \left(\ln(r) - \frac{r}{L_j} \ln(r) \right) dr \right] = \frac{L_j}{4\pi} \left(\frac{3}{2} - \ln L_j \right) = g_j^{1(1)}(i) \quad (4.55.b)$$

4.6.3 – Cálculo da integral de domínio

Nos capítulos anteriores, o MEC foi aplicado ao problema de potencial elétrico por meio da equação 3.57, sendo considerado o caso em que a fonte b era nula. Caso a fonte b não seja nula, utiliza-se a integral de domínio da equação (3.57), onde a função b é conhecida.

Independente da função b , definida no integrando, ser ou não conhecida, a integral de domínio pode ser resolvida por meio da discretização do domínio em células, nas quais a função b é aproximada por funções de interpolação. Há vários procedimentos numéricos que podem ser adotados para resolver a integral de domínio sobre uma célula.

Considerando b em um subdomínio Ω_b (Figura 3.2), a integral sobre o subdomínio Ω_b envolvendo uma função conhecida, é transformada em integral ao longo do contorno Γ_b

do subdomínio Ω_b , facilitando bastante o cálculo da mesma. Para isto, formulações mais avançadas do MEC são utilizadas, tais como, o Método de Reciprocidade Dupla (MRD), o Método de Reciprocidade Múltipla (MRM) ou, simplesmente, calculando-a numericamente. No entanto, nesse caso, a principal vantagem do MEC não é mais utilizada. Ou seja, não é possível equacionar todo o problema exclusivamente com valores do contorno. Estes métodos são descritos por Brebbia e Domingues (1992), e não serão abordados neste trabalho.

4.7 – Revisão do capítulo

Neste capítulo, foi mostrada a discretização do contorno em elementos, por meio de três tipos de elementos. Caso o contorno tenha vértices, há a necessidade de um tratamento para corrigir as discontinuidades do campo elétrico nos nós. Também foi abordada neste capítulo, a solução do sistema de equações obtido com a discretização, além de alguns tópicos relacionados não só a discretização, mas também ao MEC, tais como a discretização do contorno para domínios infinitos.

Também foi mostrado como são resolvidas as integrais do contorno. Elas são resolvidas, basicamente, de duas formas: numericamente, com a ajuda da fórmula de quadratura de Gauss e analiticamente, quando contêm singularidades. Assim, as integrais analíticas dependem do tipo de elemento utilizado na discretização do contorno e a integral do termo, $h_j^{NS}(i)$, será sempre nula, sendo calculado apenas o termo $g_j^{NS}(i)$ da equação integral para a singularidade.

CAPÍTULO 5: Implementação

Neste capítulo, serão mostrados os passos necessários para implementação computacional do método dos elementos de contorno baseado na solução da equação integral de contorno apresentada anteriormente pelas equações (3.58) e (3.59).

Este capítulo descreve as principais características do código computacional desenvolvido e suas sub-rotinas mais importantes, definindo as suas estruturas de entrada e saída de dados. O programa desenvolvido recebeu o nome de CALCMEC, sendo elaborado na linguagem FORTRAN.

Como nos demais métodos numéricos, é necessário considerar vários aspectos para uma adequada implementação, independentemente de sua maior ou menor sofisticação. O código desenvolvido atende unicamente casos bidimensionais, sendo direcionado para cálculo de campo e potencial elétricos em linhas de transmissão.

5.1 – Idéia básica do programa

O programa desenvolvido pode ser resumido como sendo uma aplicação direta do método. Ou seja:

- Conhecendo $\bar{V}$ em Γ_1 e $\bar{E}$ em Γ_2 ;

- A resolução do sistema de equações torna conhecidos os valores de V em Γ_2 e E em Γ_1 ;
- A partir dos itens anteriores, a aplicação numérica da formulação integral de contorno permite o cálculo da variável da equação em estudo em qualquer ponto interno do domínio, considerando o sentido de discretização anti-horário.

O programa foi desenvolvido em FORTRAN, sendo direcionado para aplicações em linhas de transmissão, nas quais o potencial elétrico nos contornos é conhecido, simplificando a entrada de dados da geometria da linha.

5.2 – Considerações sobre a implementação computacional

5.2.1 – Domínio em estudo

Para aplicação em linhas de transmissão, o domínio de interesse é o domínio infinito, sendo que o domínio interno dos condutores não representa interesse. Para encontrar o potencial e campo elétricos no domínio infinito, durante a discretização dos condutores no programa, tomou-se o cuidado de fazer a discretização no sentido horário, conforme mostrado na secção 4.6. Assim, é possível encontrar o potencial e campo elétricos em qualquer ponto do domínio infinito. O programa não foi desenvolvido para cálculo de potencial elétrico e campo elétrico no domínio interno, pois no caso de condutores de linha de transmissão estes valores já são conhecidos e constantes no seu interior.

5.2.2 – Geometria do contorno

A aplicação do MEC em domínios abertos não necessita da discretização do contorno infinito, sendo necessário apenas a discretização de contornos fechados. No caso, domínios abertos são infinitos ou semi-infinitos. Já os contornos fechados são os próprios condutores. Essa é uma grande vantagem no caso das linhas de transmissão, sendo necessária apenas a discretização do contorno do condutor no sentido horário e do solo ou dos condutores imagem. A discretização do solo ou a aplicação do Método das imagens será abordada posteriormente.

5.2.3 – Discretização do contorno

Para encontrar o campo e o potencial elétricos é necessário discretizar o contorno em elementos, os quais aproximam a geometria do problema. Os valores de V e $\mathbf{E}$ no contorno são interpolados nos elementos. Em formulações bidimensionais os principais são os elementos constantes, lineares e quadráticos, ver secção 4.2.

Para esta implementação, foi escolhido o elemento constante, devido a simplicidade da geometria. A escolha da discretização por elementos lineares e quadráticos implicaria em uma redundância. Para geometrias com curvas mais acentuadas e vértices, a discretização com elementos constantes não é apropriada.

5.2.3.1 – Exemplo de discretização

A discretização dos condutores foi feita de modo bastante simples, devido ao modo como o programa foi desenvolvido. O programa, dependendo do tipo de arquivo de entrada, efetua a discretização dos condutores e do solo plano. Caso seja necessário, a discretização dos condutores fora do programa, é feita de forma bastante simples.

Foi desenvolvida uma rotina em Matlab para realizar a discretização dos condutores a partir da informação da posição do centro do condutor, do raio e do número de elementos (Figura 5.1). O modo de discretização é o mesmo para todos os condutores e para o cabo pára-raios. Conhecendo o centro do condutor e o raio do mesmo, calcula-se um ponto na superfície do contorno, considerando-se um ângulo inicial nulo. A partir deste ponto, o contorno do condutor será discretizado no sentido horário. Para isto, divide-se uma circunferência pelo número de elementos considerados. Assim, obtêm-se um ângulo que será utilizado para calcular outros pontos sobre o contorno. Desse modo, efetua-se a divisão do contorno dos condutores, ou seja, efetua-se a discretização do contorno.

No apêndice F é mostrada a linha de programação utilizada em Matlab para efetuar a discretização dos condutores:

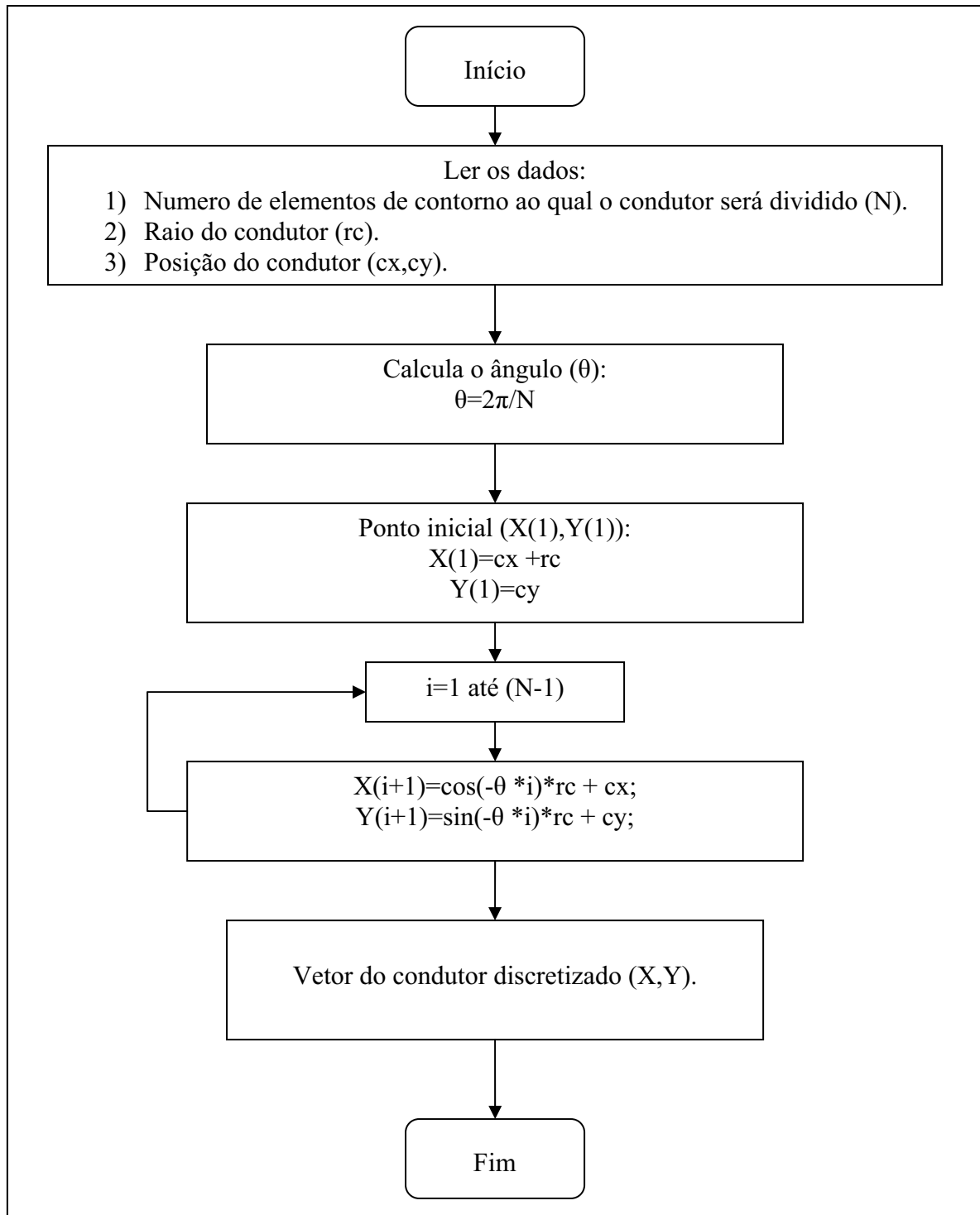


Figura 5.1: Diagrama de fluxo para o a discretização do condutor.

5.2.4 – Montagem das matrizes

A montagem do um sistema de N equações e N incógnitas é feita aplicando a excitação impulsiva sucessivamente em cada um dos NN nós que constituem o contorno discretizado, conforme mostrado na secção 4.3. Desse modo, as matrizes $[G]$ e $[H]$ são montadas, obtendo-se o sistema $[H]V_j^{NS} = [G]E_j^{NS}$. As integrações para o cálculo dos coeficientes de $[H]$ e $[G]$ são resolvidas numericamente. Neste trabalho, foi utilizado a quadratura de Gauss com quatro pontos de Gauss.

Após encontrar as matrizes $[G]$ e $[H]$, é formado o sistema $[A]X = F$.

5.2.5 – Resolução do sistema de equações

Após calcular as matrizes $[G]$ e $[H]$, o sistema $[A]X = F$ é formado conforme descrito na secção 4.4. Após a montagem do sistema $[A]X = F$, este deve ser resolvido para que os valores do potencial e campo elétricos no contorno sejam encontrados. Ou seja determinar os valores de todas as incógnitas.

Para resolver esse sistema, é utilizado o Método da Eliminação de Gauss.

5.2.6 – Cálculo das incógnitas fora do contorno

Após a resolução do sistema $[A]X = F$, todas as incógnitas do problema no contorno são encontradas. Assim, é possível encontrar o potencial e o campo elétricos em qualquer ponto no domínio infinito.

5.3 – Descrição do programa computacional

O diagrama de fluxo da Figura (5.2) apresenta os procedimentos seguidos pelo programa desenvolvido. Os procedimentos indicados na Figura (5.2) estão divididos em sub-rotinas, facilitando a montagem do programa.

Na Figura 5.2, os passos 1 e 2 estão reunidos nas sub-rotinas ENTIMG, ENTSOLO e ENTCOMPL. O passo 3 está na sub-rotina CALCONT. O passo 4 está na sub-rotina METGAUSS. O passo 5 está na sub-rotina CALCPOTCAMP e o passo 6 está na sub-rotina SAIDNORM. Além dessas sub-rotinas, existem mais duas sub-rotinas, INTANALITICA e INTNUMERICA, que efetuam a integração analítica e aplicam o método da quadratura de Gauss para a integração numérica, respectivamente.

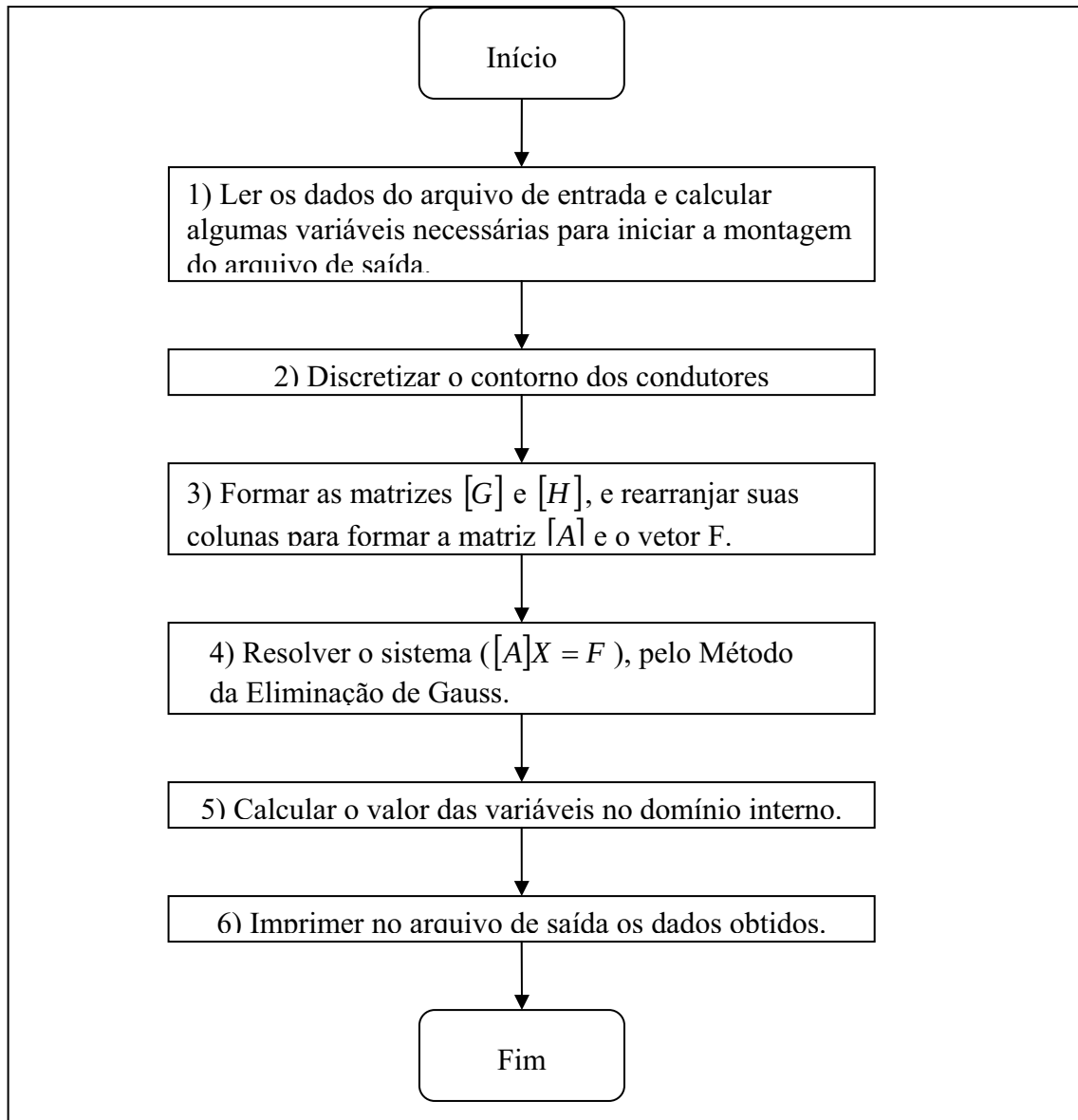


Figura 5.2: Diagrama de fluxo básico.

5.3.1 – Definição do arquivo de entrada

Foram feitas três sub-rotinas para a leitura de dados do arquivo de entrada. Cada uma delas é aplicada para um tipo de arquivo de entrada.

Na sub-rotina ENTCOMPL, o arquivo de entrada deve conter a discretização de todos os contornos envolvidos no trabalho, ou seja, os dados de discretização dos condutores e do solo. De outra forma, dos condutores e de suas imagens. Necessita-se da descrição do potencial elétrico em todos os elementos. O arquivo de entrada dessa sub-rotina é mais complexo, podendo ser utilizada para outros tipos de contornos que não sejam circulares.

Na sub-rotina ENTIMAG, o método das imagens é aplicado para fazer a consideração do solo no cálculo do campo elétrico e do potencial elétrico. No arquivo de entrada, deve ser informada a quantidade, posição e diâmetro dos condutores. O próprio programa discretiza os condutores reais e gera também a discretização dos condutores imagem. O arquivo de entrada é muito mais simples que o utilizado pela sub-rotina ENTCOMPL. No entanto, sua aplicação está limitada às linhas de transmissão e ao método das imagens.

Na sub-rotina ENTSOLO, é feita a discretização do solo, considerando o mesmo plano e de potencial nulo. O arquivo de entrada é igual ao utilizado pela sub-rotina ENTIMAG. Sua aplicação também está limitada às linhas de transmissão com a discretização do solo plano e de potencial nulo.

Além dos dados já mencionados, o arquivo de entrada deve conter ainda os pontos no domínio onde o campo elétrico será calculado. O apêndice A contém exemplos de arquivos de entrada para as 3 sub-rotinas.

5.3.2 – Definição do arquivo de saída

O arquivo de saída começa a ser montado durante a leitura do arquivo de entrada, permitindo que se possam identificar erros no arquivo de entrada.

Os dados obtidos a partir do arquivo de entrada, que são impressos no arquivo de saída são:

- Número de elementos de contorno;
- Número de pontos onde a função é calculada fora do contorno;
- Número de superfícies de contorno;
- Último nó de cada contorno;
- Coordenadas dos pontos nodais no contorno;
- A condição inicial do ponto nodal do contorno. Ou seja, campo elétrico e potencial elétrico.

No final do programa são impressos os dados calculados:

- O potencial elétrico e o campo elétrico resultante nos pontos nodais do contorno;
- O potencial elétrico e campo elétrico em função de x e y , bem como, os valores resultantes nos pontos indicados no arquivo de entrada.

O apêndice B trás um exemplo de arquivo de saída do programa CALCMEC.

5.4 – Sub-rotinas

O programa desenvolvido possui 9 sub-rotinas, a seguir identificadas:

- ENTCOMPL – sub-rotina para leitura do arquivo de entrada;
- ENTIMAG – sub-rotina para leitura do arquivo de entrada;
- ENTSOLO – sub-rotina para leitura do arquivo de entrada;

- CALCONT – monta as matrizes $[G]$ e $[H]$ e forma o sistema $[A]X = F$;
- INTNUMERICA – calcula os coeficientes de $[G]$ e $[H]$, quando P_i é diferente de P_j ;
- INTANALITICA – calcula os coeficientes de $[G]$ e $[H]$ da diagonal. Ou seja, P_i igual a P_j ;
- METGAUSS – resolve o sistema $[A]X = F$ pelo Método da Eliminação de Gauss, encontrando todas as incógnitas no contorno;
- CALCPOTCAMP – calcula o potencial elétrico e campo elétrico em pontos no domínio;
- SAIDNORM – imprime os resultados no arquivo de saída.

A seguir são mostrados os diagramas do funcionamento básico das principais sub-rotinas e do programa principal.

Na Figura 5.3, é mostrado a estrutura do programa, com a ordem da execução das sub-rotinas, descritas anteriormente.

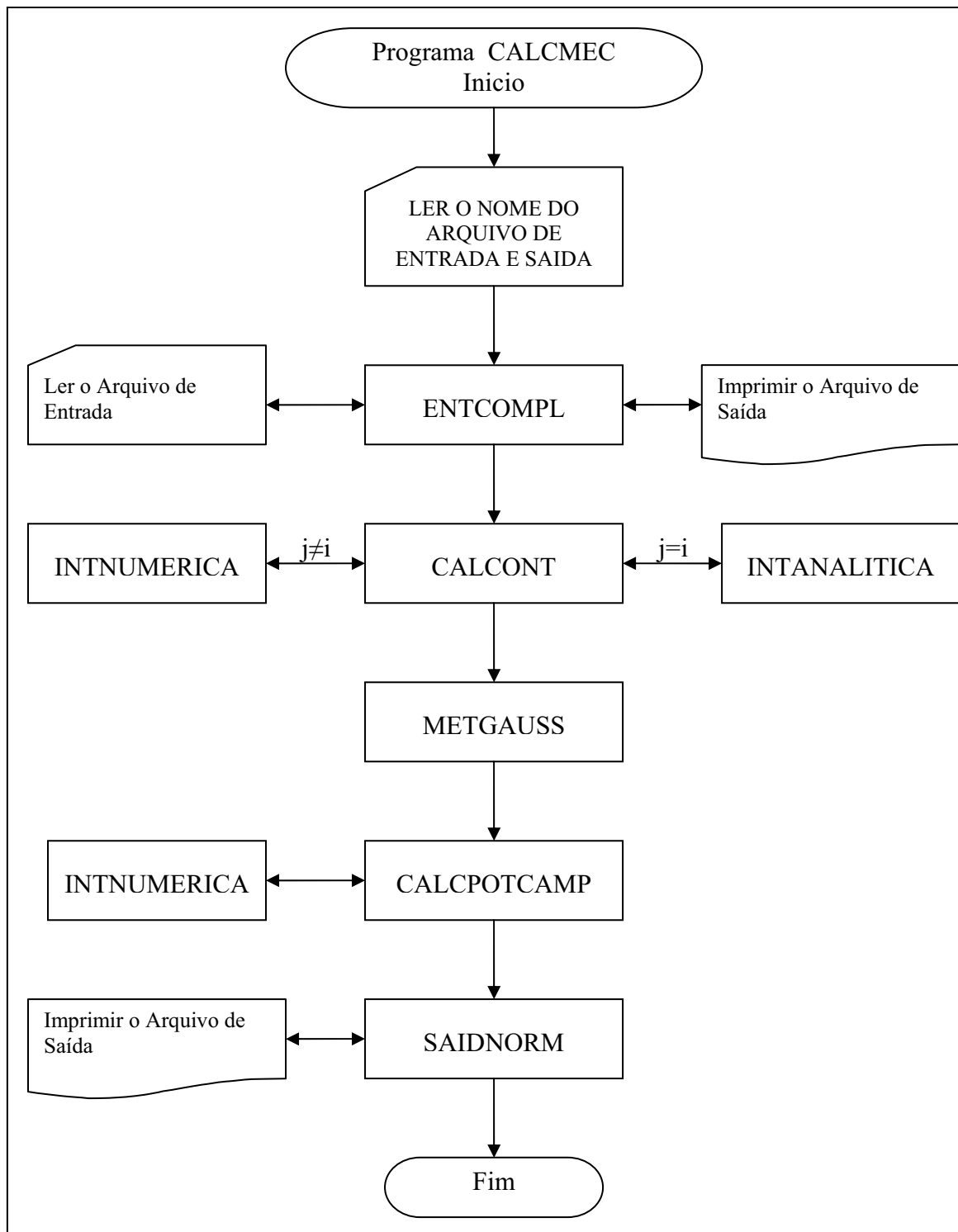


Figura 5.3: Programa principal – CALCMEC

5.4.1 – Sub-rotina CALCONT

Na sub-rotina CALCONT, é efetuado o cálculo dos pontos nodais de cada elemento, que serão utilizados no cálculo das matrizes $[G]$ e $[H]$. Além disto, nessa sub-rotina, as sub-rotinas INTNUMERICA e INTANALITICA são chamadas para efetuar o cálculo dos coeficientes de $[G]$ e $[H]$. Uma vez que os coeficientes de $[G]$ e $[H]$ sejam conhecidos, o programa efetua a transformação do sistema de matrizes $[H]V_j^{NS} = [G]E_j^{NS}$ em um sistema que pode ser facilmente resolvido pelo método da eliminação de Gauss. Ou seja, obtém-se o sistema $[A] \cdot X = F$, onde X representa o vetor com as incógnitas do sistema, $[A]$ é a matriz $[G]$ e F é um vetor que é obtido da multiplicação entre vetor V e a matriz $[H]$. Todos os cálculos que são feitos nesta sub-rotina são mostrados no Apêndice E.

Os dados de entrada da sub-rotina CALCONT são os vetores com as coordenadas dos elementos e o potencial elétrico em cada elemento, tendo como saída as matrizes $[G]$, $[H]$ e $[A]$, bem como, o vetor F .

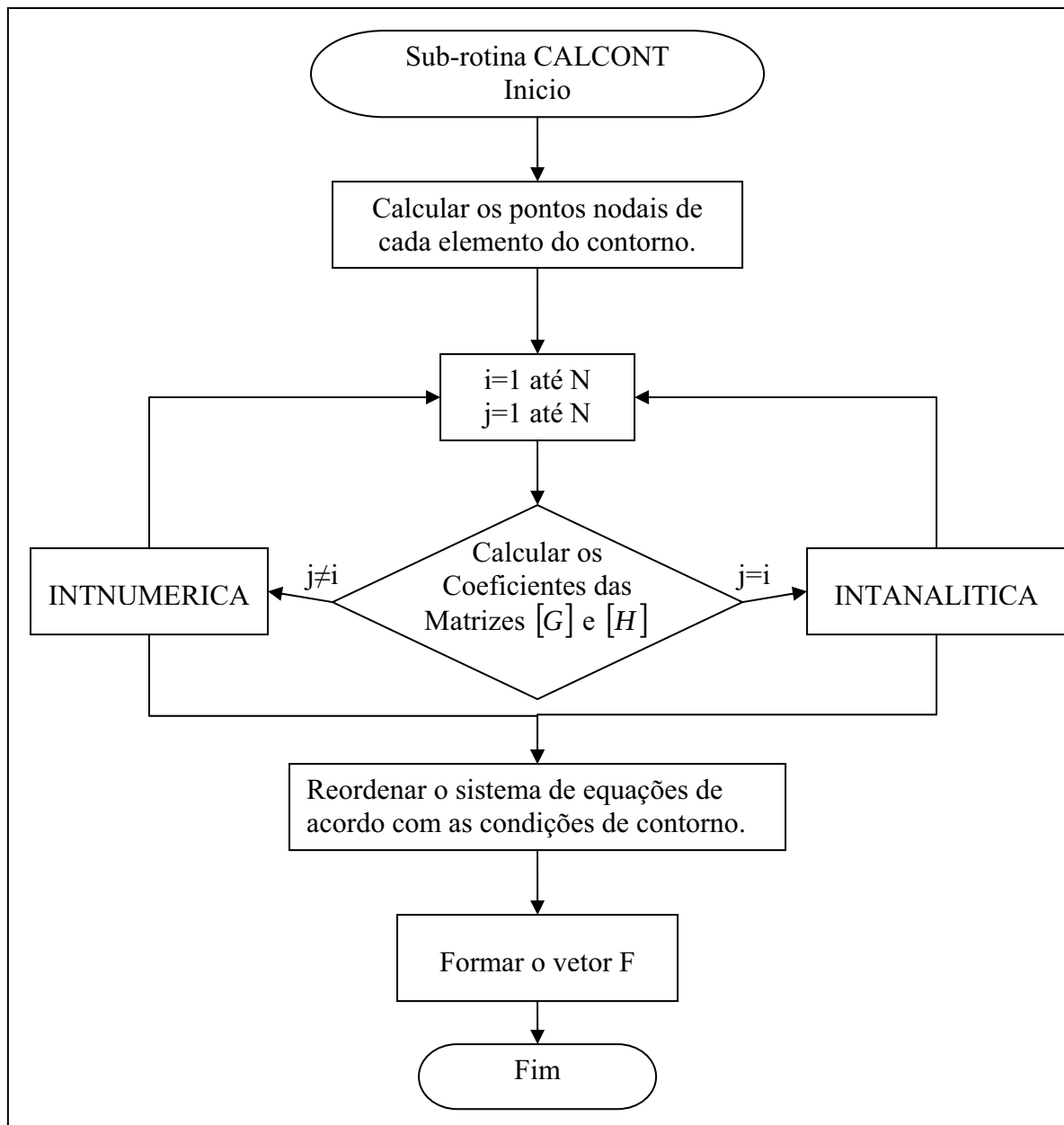


Figura 5.4: Sub-rotina CALCONT

5.4.2 – Sub-rotina INTANALITICA

Na sub-rotina INTANALITICA, é feita à integração analítica no caso do ponto i pertencer ao ponto j , conforme descrito no Capítulo 4 e mostrado no Apêndice E.

Para efetuar o cálculo, é necessário que sejam informados, na entrada da sub-rotina, os valores dos nós que definem elemento. Ou seja, os nós inicial e final tem seus valores definidos.

Ambas as matrizes $[G]$ e $[H]$ estão com seus valores multiplicados por 2π , sendo uma simplificação do programa.

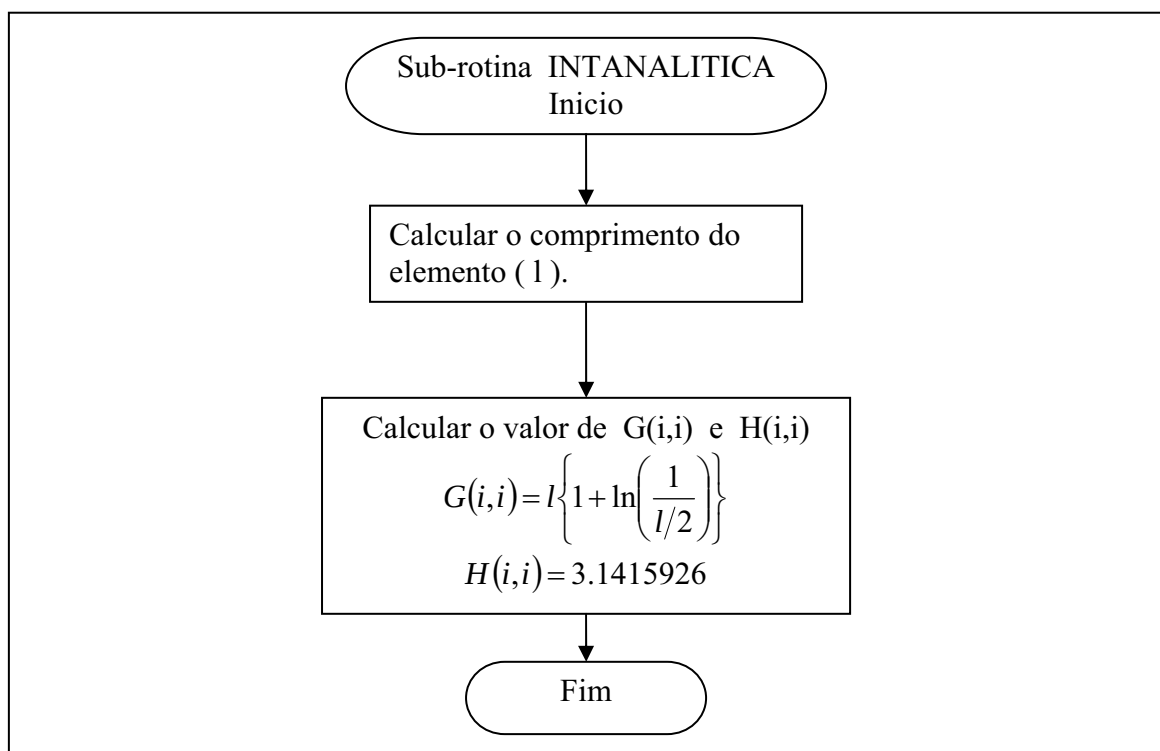


Figura 5.5: Sub-rotina INTANALITICA

5.4.3 – Sub-rotina INTNUMERICA

Na sub-rotina INTNUMERICA, é efetuada a integração numérica, aplicando o método da quadratura de Gauss com quatro pontos de Gauss (HOFFMAN, 2001).

No programa, a sub-rotina INTNUMERICA faz o cálculo dos coeficientes de $[G]$ e $[H]$, no caso do ponto i não pertencer ao ponto j , conforme descrito no Capítulo 4 e mostrado no Apêndice E. Esta sub-rotina é utilizada em dois momentos durante o programa, quando há incógnitas no contorno, para o cálculo de $[G]$ e $[H]$, e após isto, para encontrar o valor do campo elétrico e do potencial elétrico fora do contorno. Nesse segundo caso, além do cálculo das matrizes $[G]$ e $[H]$, a sub-rotina também efetua o cálculo de alguns termos relacionados ao campo elétrico em relação ao eixo x e y , permitindo o cálculo da direção do campo elétrico.

Esta sub-rotina necessita como dados de entrada do ponto nodal, dos pontos que definem o elemento e de algumas constantes relativas ao método da quadratura de Gauss. Seus resultados são os coeficientes das matrizes $[G]$ e $[H]$.

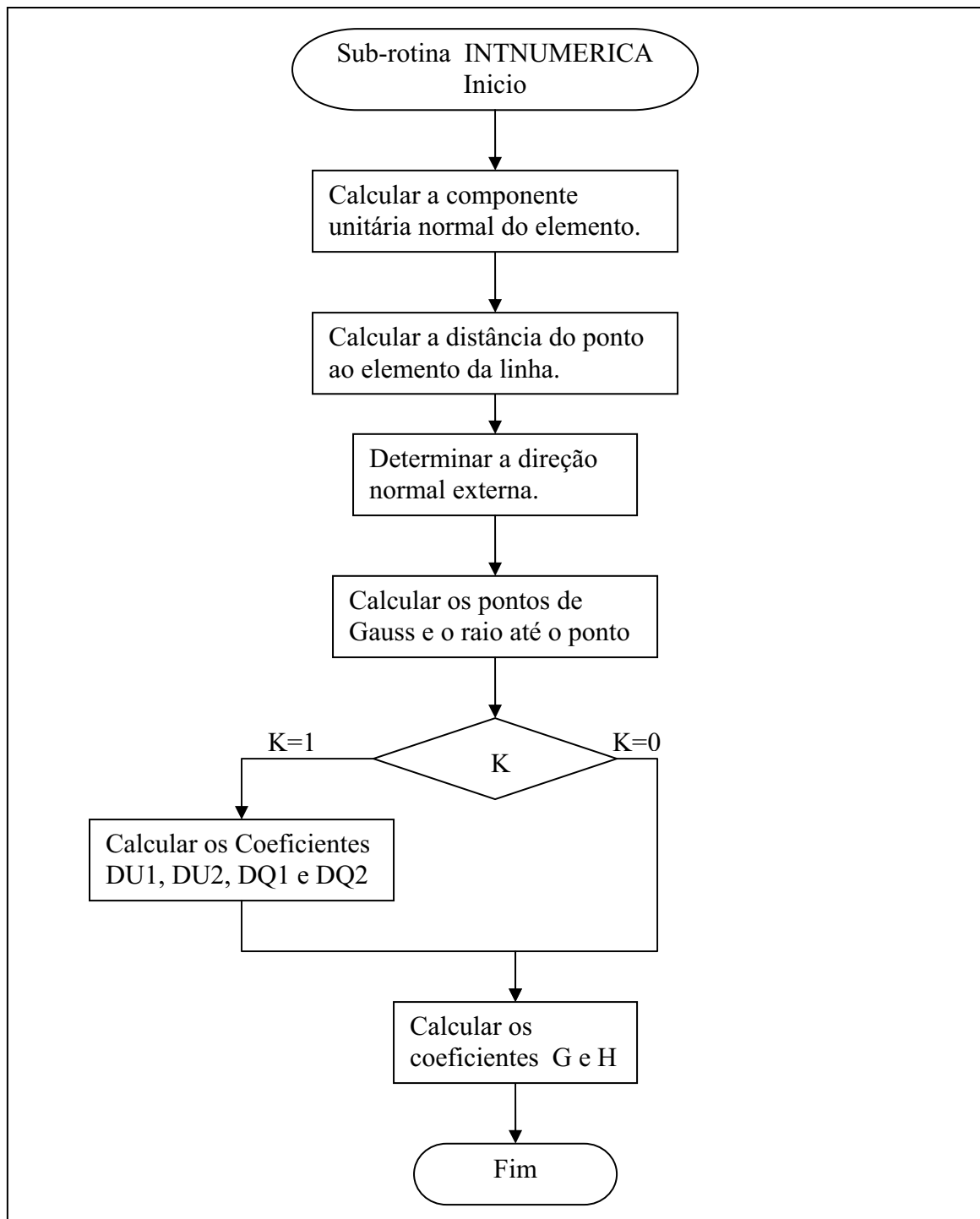


Figura 5.6: Sub-rotina INTNUMERICA

5.4.4 – Sub-rotina METGAUSS

Na sub-rotina METGAUSS, o método da eliminação de Gauss é aplicado ao sistema $[A] \cdot X = F$ para obter os valores da incógnita X , que representa os valores do campo elétrico no contorno. Uma vez que os valores de X são conhecidos, são calculados os valores do campo elétrico e do potencial elétrico no domínio.

O Método da Eliminação de Gauss consiste em um método no qual um sistema de equações com N incógnitas e N variáveis pode ser resolvido.

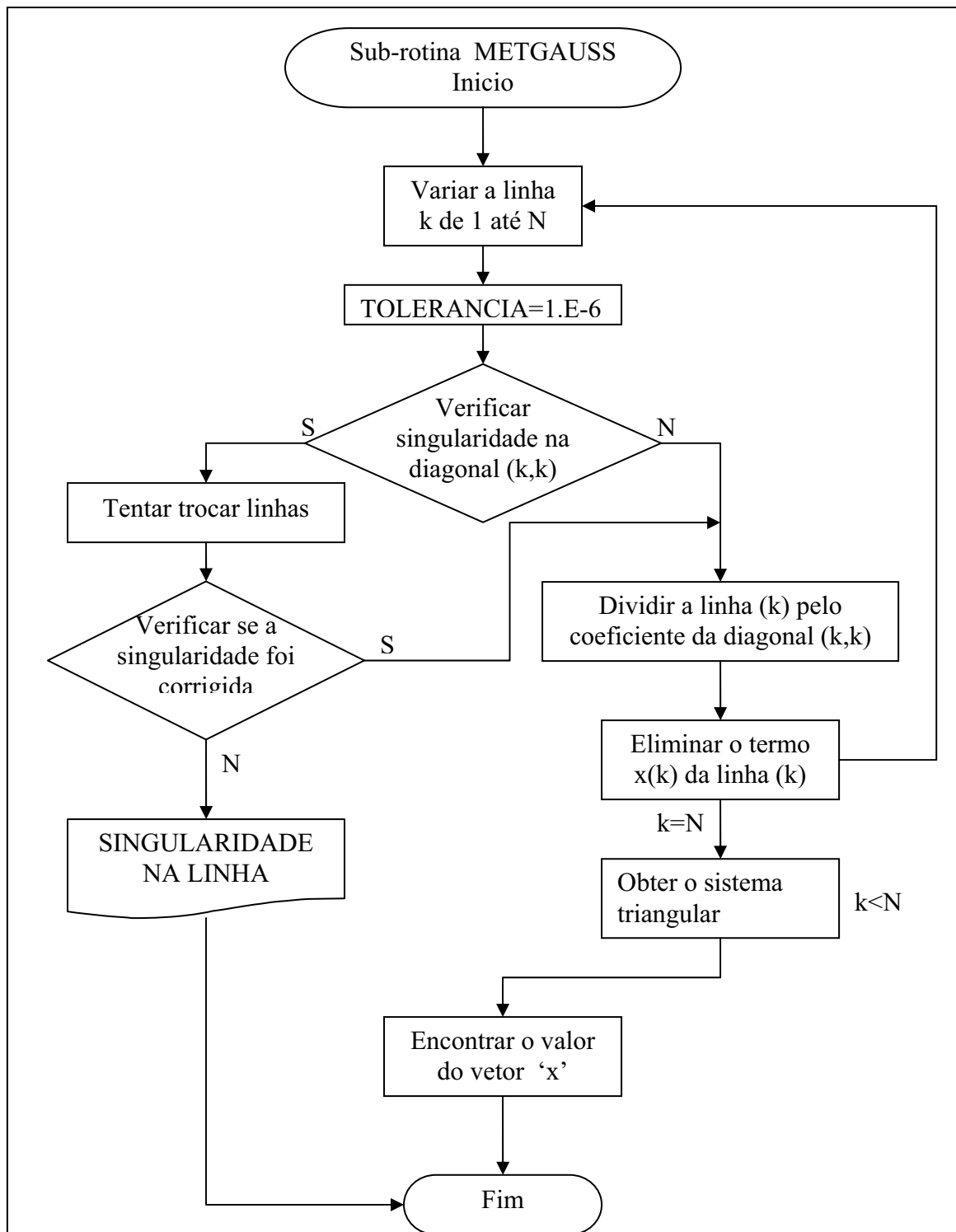


Figura 5.7: Sub-rotina METGAUSS

5.4.5 – Sub-rotina CALCPOTCAMP

Na sub-rotina CALCPOTCAMP, é efetuado o cálculo do potencial elétrico e do campo elétrico fora do contorno. Para efetuar esse cálculo a sub-rotina INTNUMERICA é chamada novamente, para calcular todos os termos das matrizes $[G]$ e $[H]$. São calculados também os valores de algumas variáveis que permitem à sub-rotina CALCPOTCAMP efetuar o cálculo do campo elétrico resultante nas direções do eixo x e y.

Esta sub-rotina trabalha com os vetores do potencial elétrico e do campo elétrico no contorno e dos vetores, com a discretização do contorno e com o vetor dos pontos onde o potencial elétrico e o campo elétrico devem ser calculados fora do contorno.

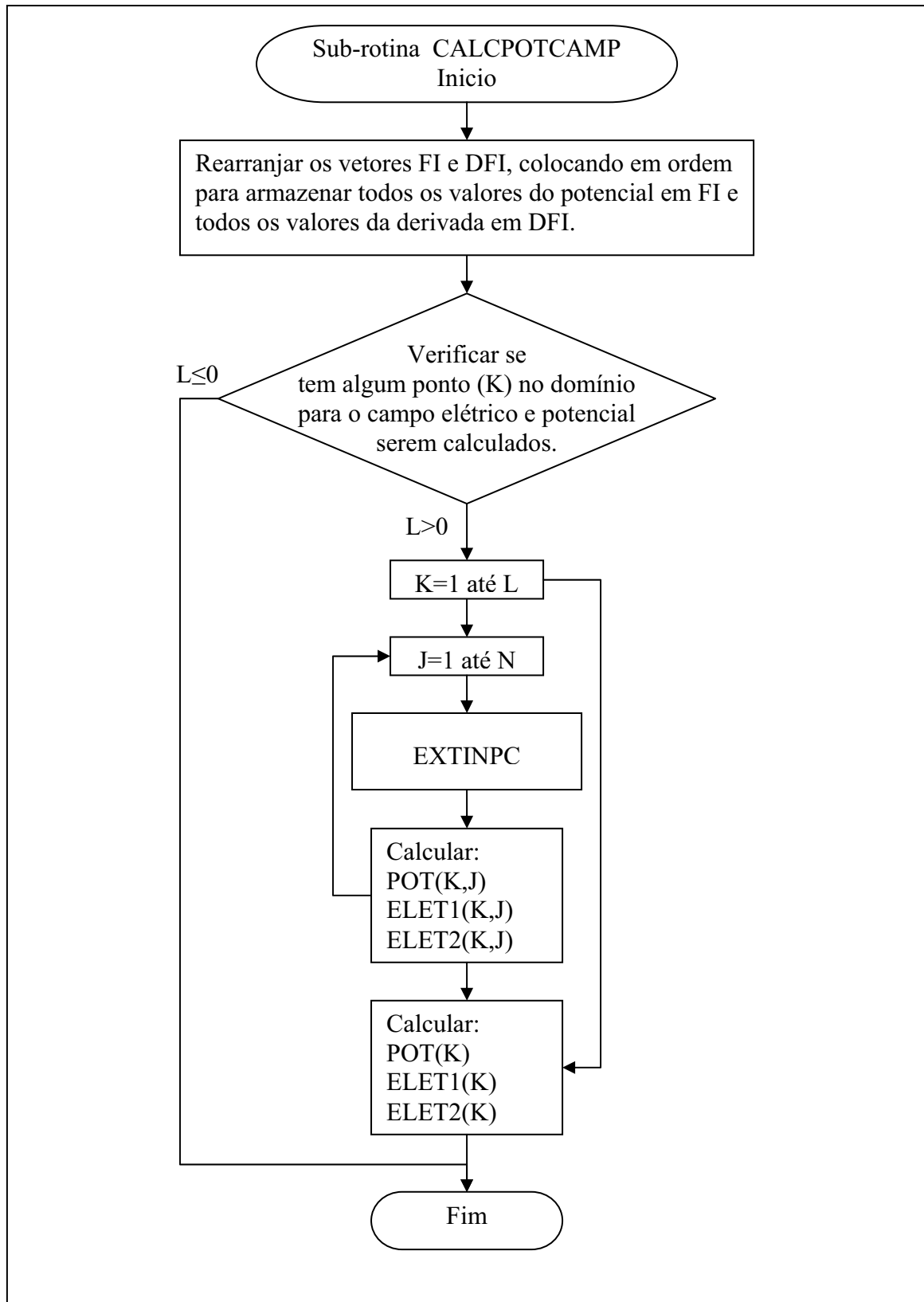


Figura 5.8: Sub-rotina CALCPOTCAMP

5.5 – Revisão do capítulo

Neste capítulo foi mostrado como é feita a implementação computacional, por meio das sub-rotinas que compõem o programa. Foram apresentados os fluxogramas do programa principal e de suas sub-rotinas. Também foi mostrado como é montado o arquivo de entrada e a saída de dados do programa.

CAPÍTULO 6: Validação do Programa

Este capítulo tem por objetivo comprovar a eficiência do programa computacional desenvolvido. Para isso, serão comparados seus resultados com resultados obtidos por meio do método analítico. O método analítico utilizado neste trabalho, (SHADIKU, 2004) e (FUCHS, 1977), consiste no cálculo da capacitância dos condutores e, utilizando os valores dessas capacitâncias, no cálculo da carga do condutor. Assim, o cálculo do campo elétrico é efetuado. Também será mostrada a eficiência da discretização do solo, sendo seus resultados comparados com o método das imagens.

6.1 – Método analítico do cálculo do potencial e campo elétrico

A capacitância para linhas monofásicas pode ser obtida pela seguinte fórmula:

$$C_{ab} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_o}{\ln(D/rc)} \quad (6.1)$$

Onde:

C_{ab} – capacitância entre os condutores a e b;

D – distância entre os condutores a e b;

rc – raio do condutor.

Para exemplos com um só condutor e o solo, considera-se a teoria das imagens.

Depois de encontrar a capacitância, calcula-se a carga que será utilizada no cálculo do campo elétrico e do potencial elétrico. A relação entre a capacitância e a carga elétrica do condutor é dada pela seguinte fórmula:

$$\begin{aligned}Q_a &= U_a \cdot C_{ab} \\Q_b &= U_b \cdot C_{ab}\end{aligned}\tag{6.2}$$

Onde:

Q – carga elétrica do condutor;

V – tensão do condutor.

Após encontrar a carga elétrica do condutor, utiliza-se a seguinte fórmula para o cálculo do campo elétrico em linhas monofásicas:

$$E = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_o \cdot r}\tag{6.3}$$

Onde:

ε_o – permissividade absoluta ou do vácuo;

r – distância da carga até o ponto onde se quer conhecer a intensidade do campo elétrico;

E – intensidade do campo elétrico.

Para o cálculo do potencial em linhas monofásicas, utilizar a seguinte fórmula:

$$V_{ab} = -\frac{Q_a}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_o} \cdot \ln(ra) - \frac{Q_b}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_o} \cdot \ln(rb) \quad (6.4)$$

Onde:

V_{ab} – potencial em um ponto no espaço devido a linha monofásica;

ra e rb – raio entre o condutor e o ponto onde se quer encontrar o potencial elétrico.

O método analítico (FUCHS, 1977) e (STEVENSON, 1978). Consiste em se calcular a capacitância para se obter a carga elétrica de cada condutor e do cabo pára-raios. O método para o cálculo da carga depende da quantidade de circuitos e do número de cabos pára-raios. Com isso, é montada a matriz $[A]$ denominada matriz dos coeficientes de potencial elétrico. A partir dessa matriz encontra-se a carga elétrica em cada condutor. O método para o cálculo da carga é bastante complexo, variando com o número de condutores e circuitos da linha, não sendo desenvolvido neste trabalho (FUCHS, 1977) e (STEVENSON, 1978).

Após o cálculo da carga elétrica de cada condutor, calcula-se o campo elétrico. O campo elétrico em um ponto p é igual a somatória vetorial do campo elétrico gerado por cada condutor no ponto p . Para esse cálculo a equação (2.29) é utilizada.

6.2 – Linha bifilar infinita

O primeiro exemplo da aplicação do programa é uma linha bifilar infinita, formada por dois fios circulares e paralelos, envolvidos pelo meio de permissividade constante (Figura 6.1).

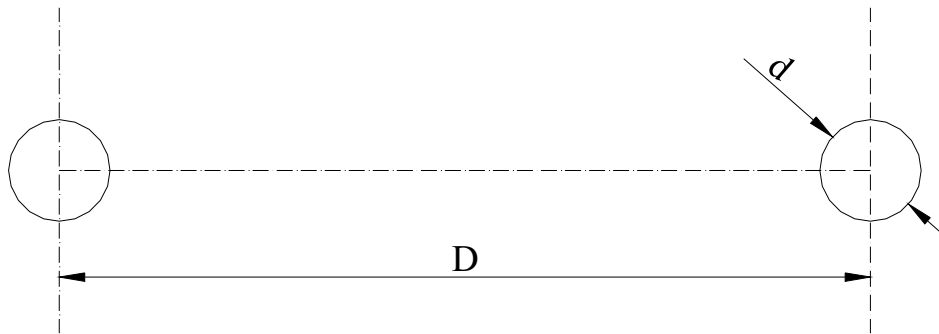


Figura 6.1: linha bifilar infinita.

Considere a distância entre os eixos dos fios sendo $D = 80$ mm, o diâmetro de cada fio vale $d = 10$ mm. A tensão aplicada é -5 V no lado esquerdo e 5 V no lado direito.

Três discretizações foram efetuadas:

- 8 elementos por condutor;
- 16 elementos por condutor;
- 32 elementos por condutor.

O objetivo é mostrar que, mesmo com poucos elementos, os resultados convergem rapidamente para os valores da solução analítica conhecida.

Dada a geometria do problema, a discretização do contorno foi efetuada no sentido horário. A Figura (6.2), (6.3) e (6.4) mostra as três discretizações.

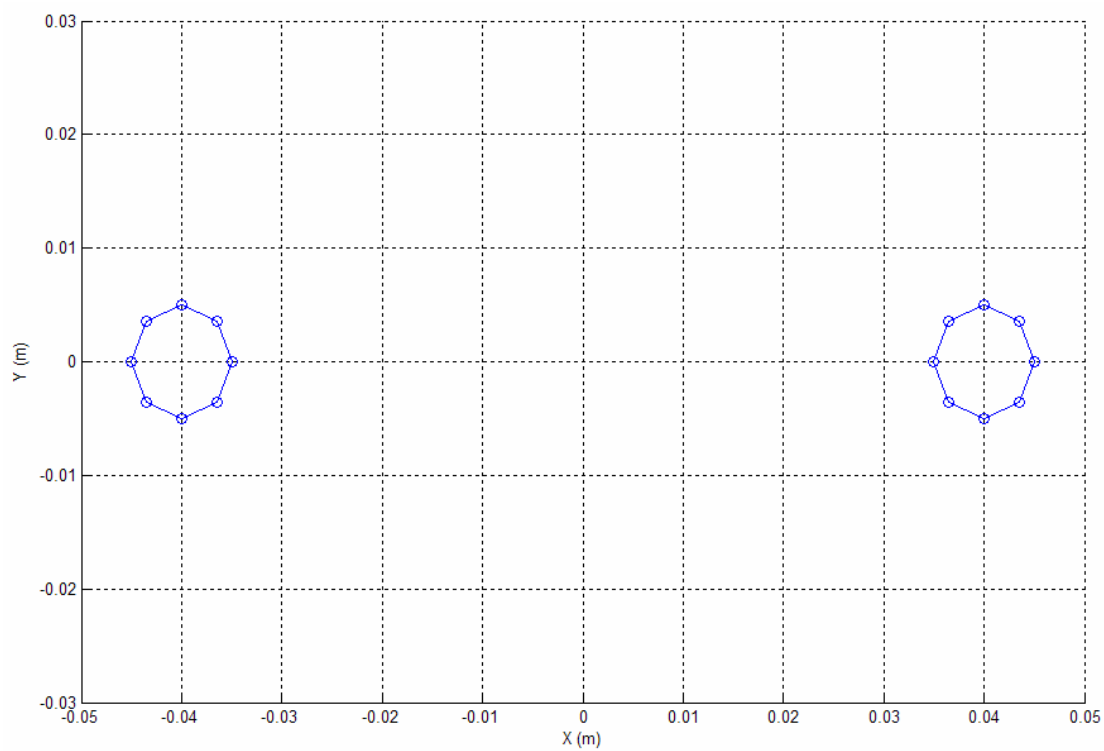


Figura 6.2: Discretização com 8 elementos da linha bifilar.

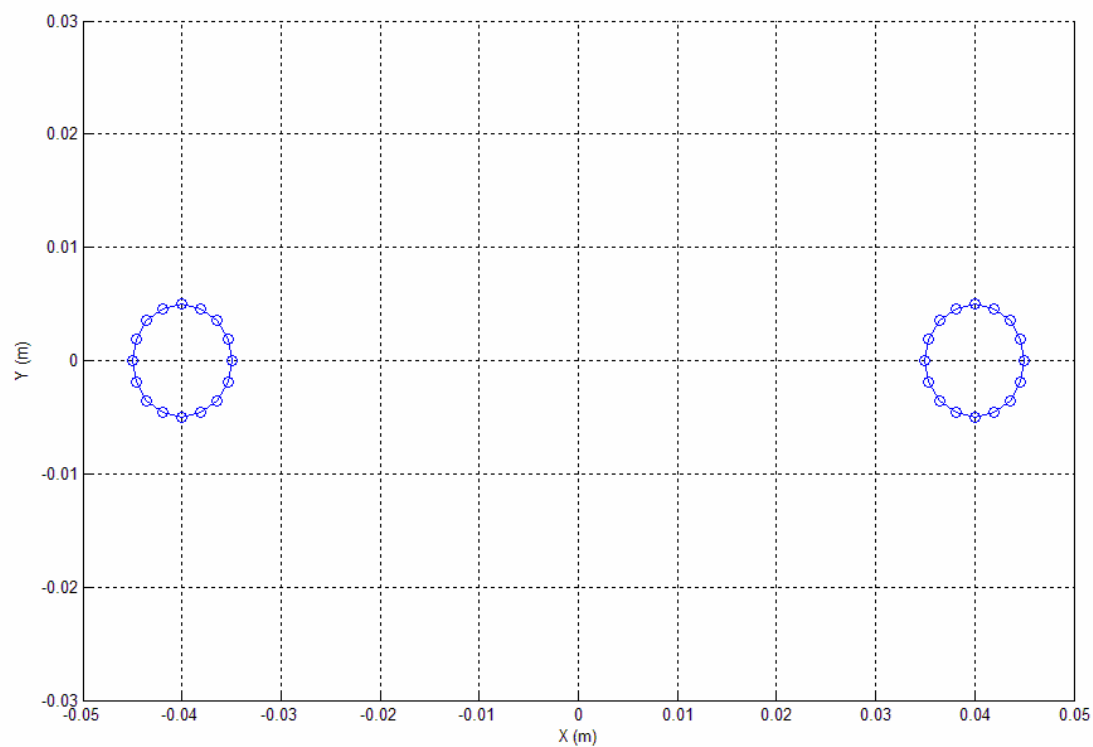


Figura 6.3: Discretização com 16 elementos da linha bifilar.

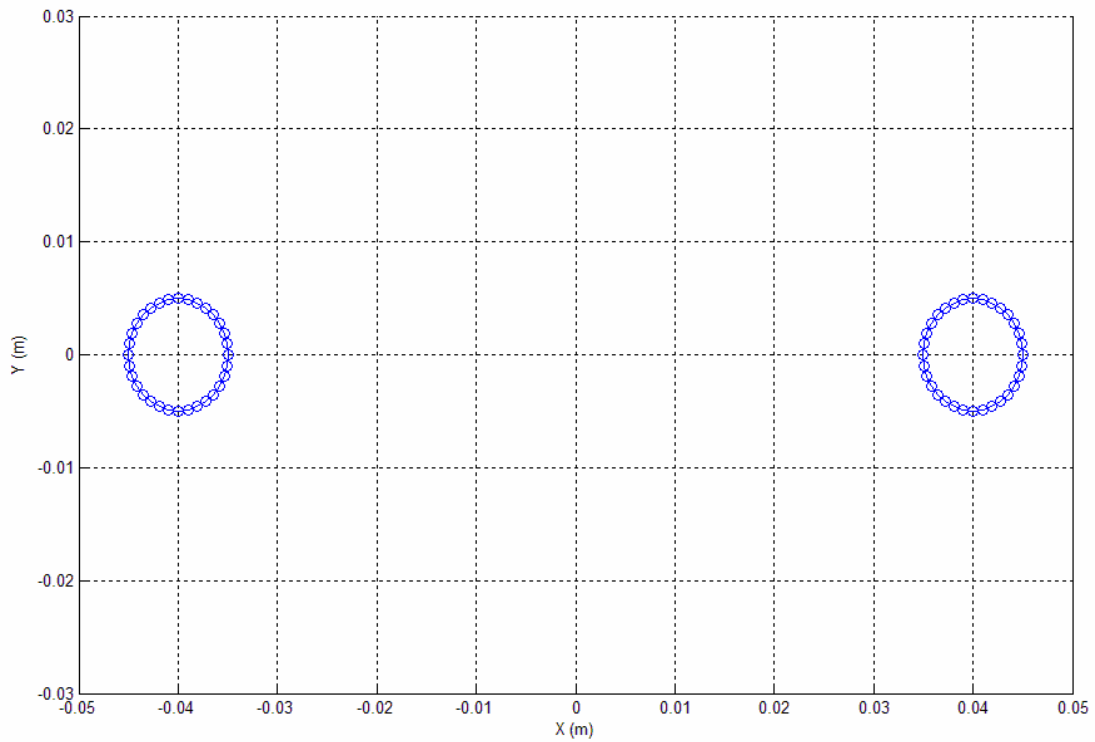


Figura 6.4: Discretização com 32 elementos da linha bifilar.

Os resultados obtidos para a linha bifilar com 8 elementos são mostrados na Tabela (6.1), que apresenta os valores das coordenadas dos nós da função, os valores de V e os valores resultantes do campo elétrico no contorno.

Tabela 6.1: Resultados obtidos: discretização com 8 elementos.

PONTOS NODAIS DO CONTO			
X (m)	Y (m)	Potencial (V)	Campo elétrico (V/m)
0.44268E-01	-0.17678E-02	0.50000E+01	0.32446E+03
0.41768E-01	-0.42678E-02	0.50000E+01	0.34440E+03
0.38232E-01	-0.42678E-02	0.50000E+01	0.37725E+03
0.35732E-01	-0.17678E-02	0.50000E+01	0.40454E+03
0.35732E-01	0.17678E-02	0.50000E+01	0.40454E+03
0.38232E-01	0.42678E-02	0.50000E+01	0.37725E+03
0.41768E-01	0.42678E-02	0.50000E+01	0.34440E+03
0.44268E-01	0.17678E-02	0.50000E+01	0.32446E+03
-0.35732E-01	-0.17678E-02	-0.50000E+01	-0.40454E+03
-0.38232E-01	-0.42678E-02	-0.50000E+01	-0.37725E+03
-0.41768E-01	-0.42678E-02	-0.50000E+01	-0.34440E+03
-0.44268E-01	-0.17678E-02	-0.50000E+01	-0.32446E+03
-0.44268E-01	0.17678E-02	-0.50000E+01	-0.32446E+03
-0.41768E-01	0.42678E-02	-0.50000E+01	-0.34440E+03
-0.38232E-01	0.42678E-02	-0.50000E+01	-0.37725E+03
-0.35732E-01	0.17678E-02	-0.50000E+01	-0.40454E+03

A partir do conhecimento do potencial elétrico e do campo elétrico em todos os elementos, é possível determinar o potencial elétrico e o campo elétrico em qualquer ponto do domínio de interesse. Tabelas com o potencial elétrico e campo elétrico para 16 e 32 elementos não serão mostradas por não acrescentarem informações relevantes ao estudo.

As Figuras (6.5) a (6.10) mostram o resultado do potencial e campo elétrico ao longo de um segmento paralelo ao eixo x, sendo $y=0.015$ m e x variando de -0.1 mm a 0.1 mm. O resultado obtido com as discretizações são registrados junto com o resultado analítico para efeito de comparação.

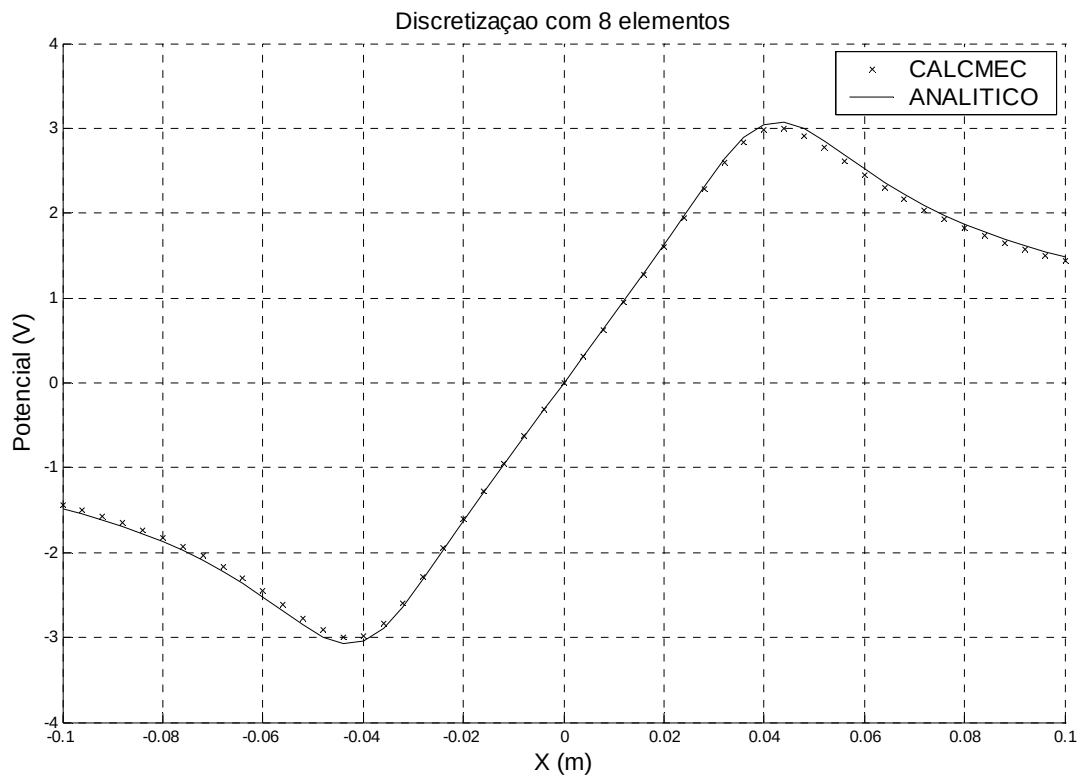


Figura 6.5: Potencial – discretização com 8 elementos.

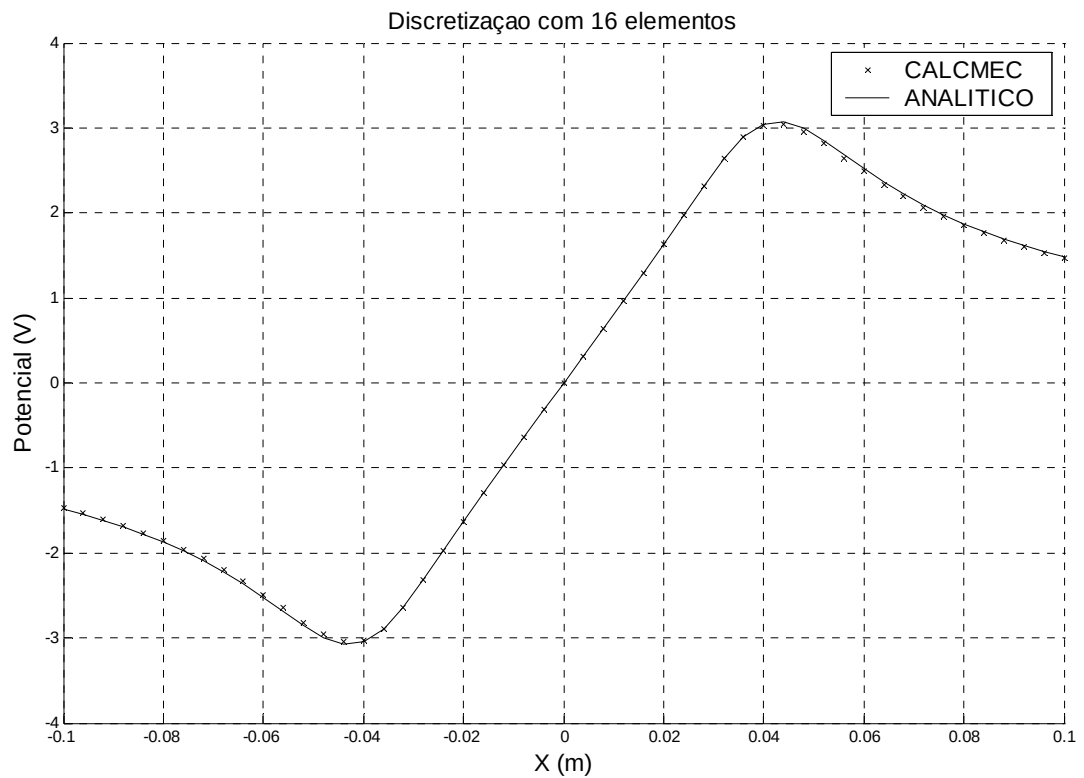


Figura 6.6: Potencial – discretização com 16 elementos.

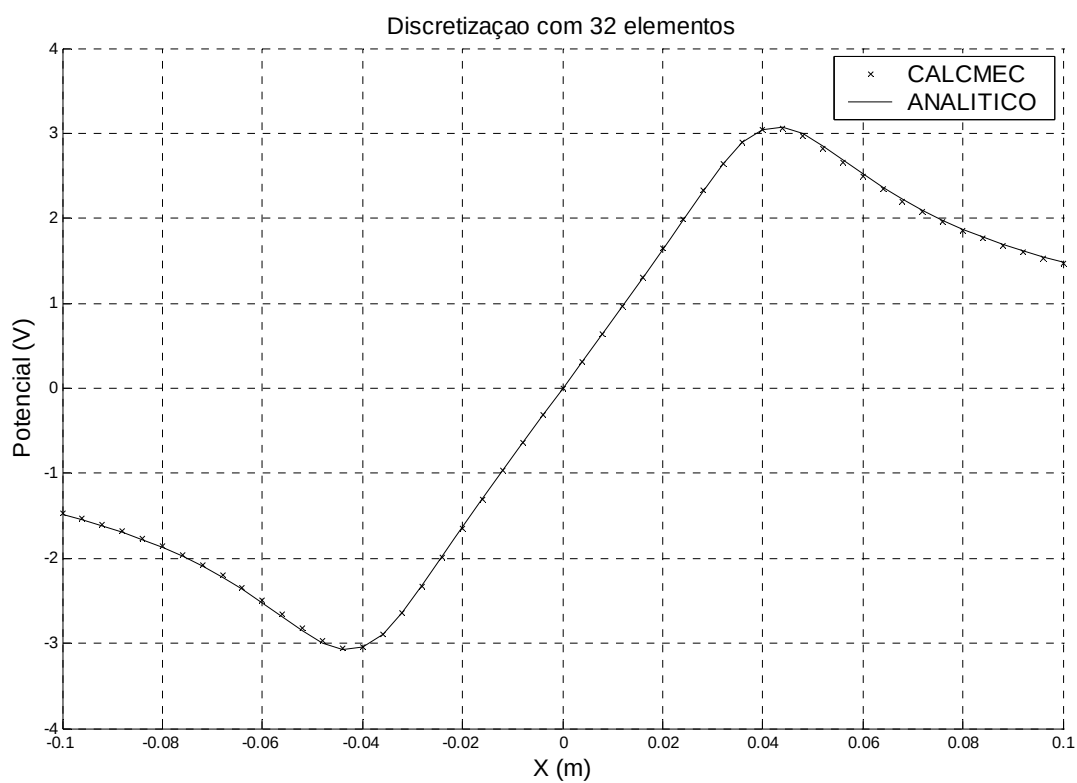


Figura 6.7: Potencial – discretização com 32 elementos.

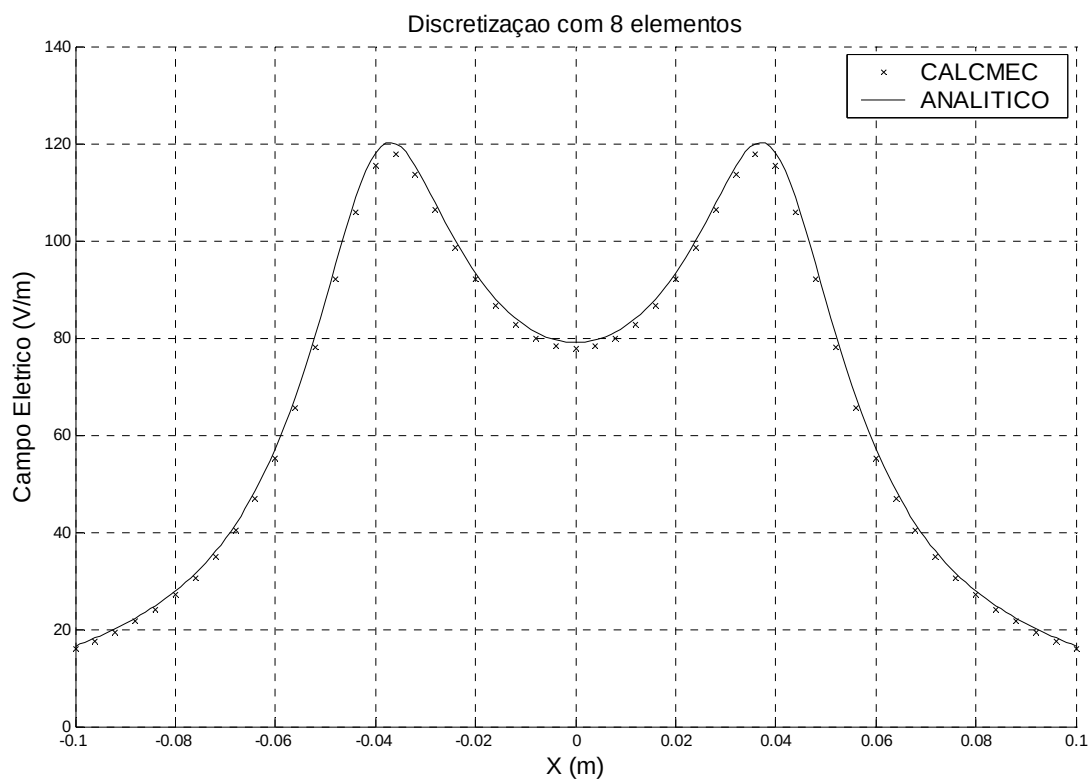


Figura 6.8: Campo elétrico – discretização com 8 elementos.

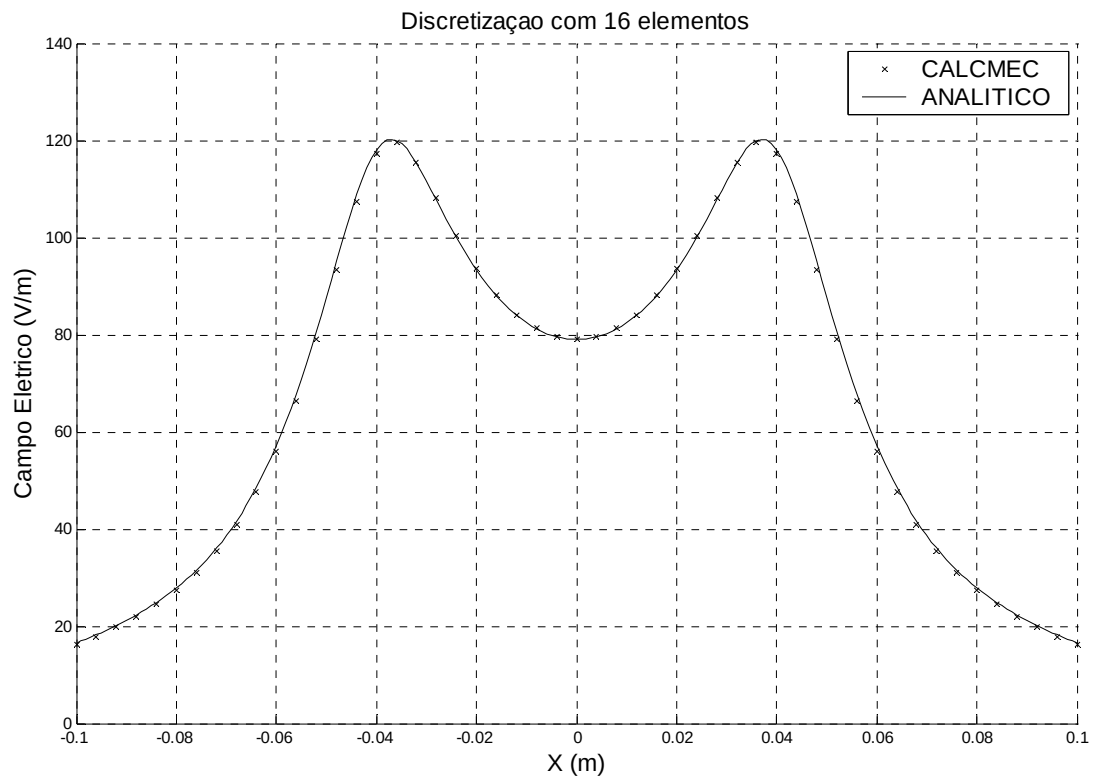


Figura 6.9 Campo elétrico – discretização com 16 elementos.

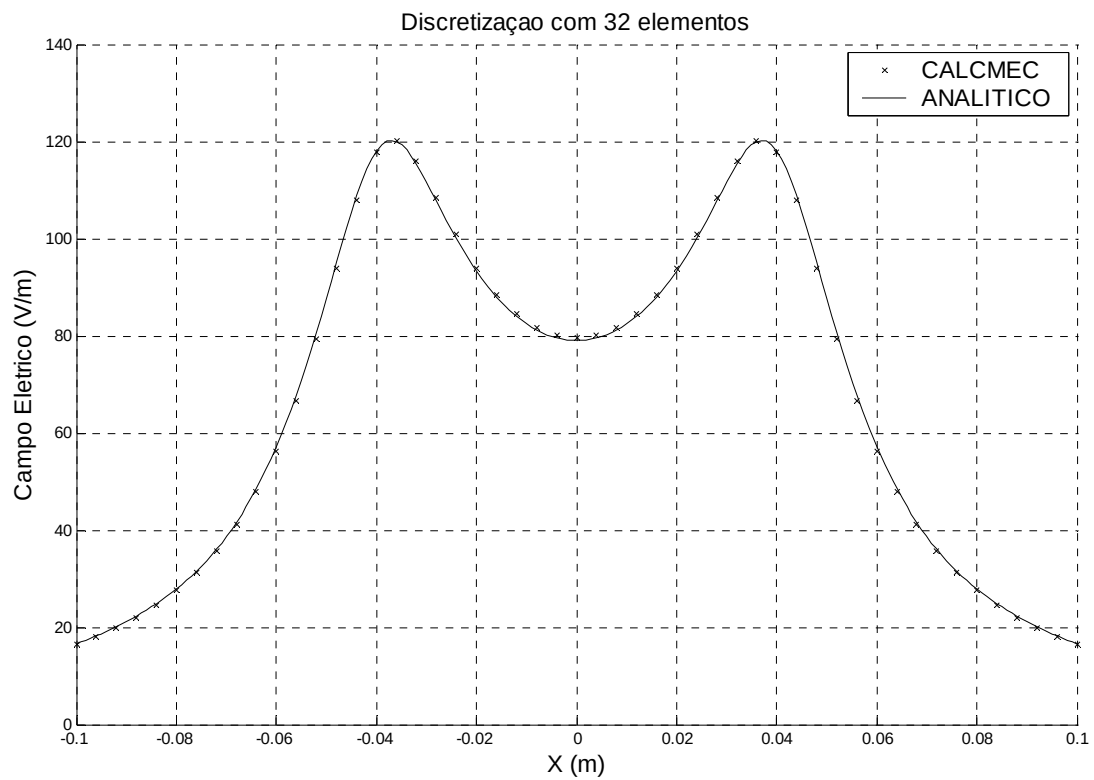


Figura 6.10: Campo elétrico – discretização com 32 elementos.

Analisando as Figuras (6.5) a (6.10), observa-se que, com o aumento do número de elementos, os resultados convergem para a solução analítica. Também nota-se que mesmo com poucos elementos o erro obtido é muito pequeno.

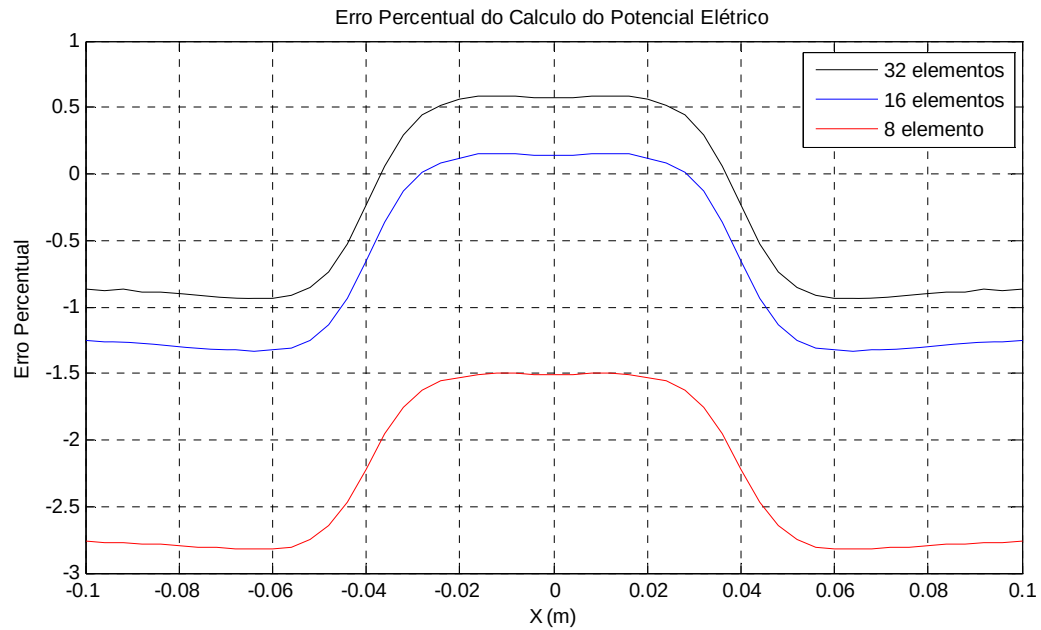


Figura 6.11: Erro percentual do calculo do campo elétrico.

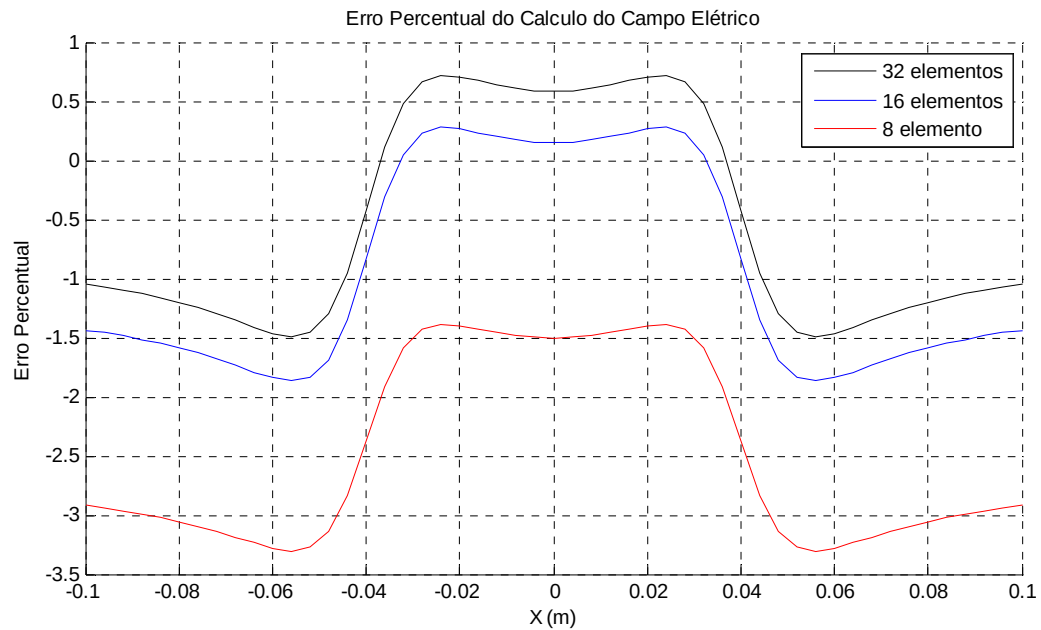


Figura 6.12: Erro percentual do calculo do campo elétrico.

A Figura 6.11, apresenta o gráfico do erro percentual do calculo do potencial elétrico para 8, 16 e 32 elementos, comparados com o método analítico. Verifica-se que com o aumento do número de elementos o erro reduz consideravelmente. Observa-se, também, que o erro mesmo com 8 elementos é pequeno para pontos próximos dos condutores, tendo seu valor aumentado a medida que se afasta dos condutores.

A Figura 6.12, apresenta o gráfico do erro percentual do calculo do campo elétrico para 8, 16 e 32 elementos, comparados com o método analítico. Verifica-se que com o aumento do número de elementos o erro reduz consideravelmente. Observa-se, também, que o erro mesmo com 8 elementos é pequeno para pontos próximos dos condutores, tendo seu valor aumentado a medida que se afasta dos condutores.

6.3 – Linha de transmissão trifásica

Como segundo exemplo, será considerada uma linha de transmissão trifásica. Nesse exemplo, será considerado o efeito do solo. Para isso o programa permite que o cálculo seja feito de duas ou três formas: considerando o método das imagens, ou fazendo a discretização de uma parte do solo sob a linha, e considerando este solo com potencial igual a zero.

Os resultados obtidos com os dois métodos serão comparados com o cálculo do campo elétrico pelo método analítico, descrito por Stevenson (1978) e Fuchs (1977). Para tanto algumas considerações foram feitas:

- Foram considerados os condutores circulares e com superfície lisa;
- A altura dos condutores foi considerada a menor admissível em norma, isto por se tratar de uma análise da disposição dos condutores e não de uma linha existente;

- A superfície terrestre foi admitida como sendo um plano equipotencial nulo. Isso foi feito para que fosse possível a comparação entre a aplicação com o método das imagens e a discretização do solo;
- As linhas de transmissão foram consideradas equilibradas;
- Não foram feitas transposições, pois a linha foi considerada como sendo curta;
- Foram consideradas linhas com pára-raios multiterrados e, portanto, as cargas no cabo pára-raios chegam por condução desde o solo, sendo o potencial elétrico nulo;
- A tensão da linha é de 69 kV, a altura mínima do condutor ao solo de 8 metros, a distância entre fases de 2 metros, os cabos condutores CAA Linnet e cabo pára-raios 3/8".

Considerações em relação a montagem do arquivo de entrada:

- A posição dos condutores a ser informada no arquivo de entrada deve ser em metros, sendo que o diâmetro dos condutores deve estar em milímetros;
- A tensão que deve ser informada no programa deve estar em kV e é a tensão em relação ao solo;
- Todas as discretizações dos condutores foram feitas com 32 elementos por condutor;
- A discretização do solo compreendeu uma faixa de 100 metros para cada lado da linha.

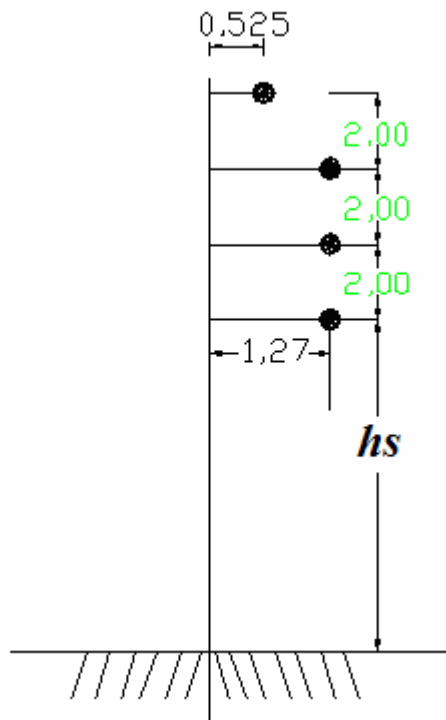


Figura 6.13: Disposição dos condutores (PSVP – 69).

A Figura (6.13) apresenta uma estrutura PSVP – 69 vertical, com isoladores tipo pilar, circuito simples de 69 kV e um cabo pára-raios. A altura hs , que representa a menor distância do condutor ao solo, foi considerada a menor possível dada por norma (ABNT, 1985), que para o caso de linhas em perímetro urbano é de 8 metros. Trata-se de um caso hipotético, sendo que em linhas reais essa altura dependeria da altura dos postes, do vão e da flecha dos condutores.

O cálculo do campo elétrico é feito no ponto onde os condutores estão mais próximos do solo, onde a intensidade do campo elétrico em relação ao solo é a maior. Geralmente, isso ocorre no meio do vão e assim, o campo elétrico sofre pouca influência da torre.

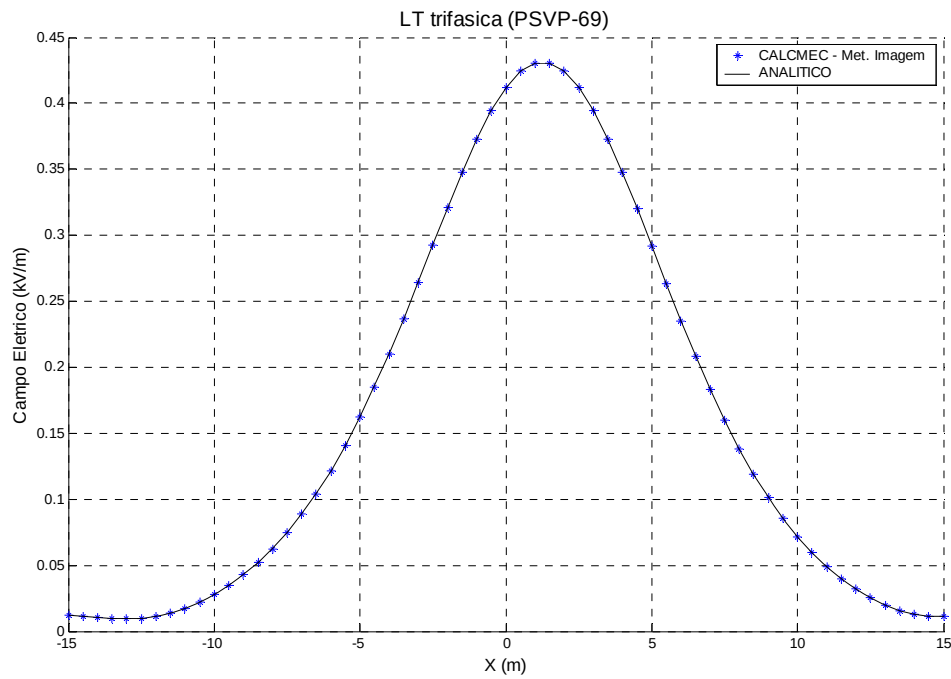


Figura 6.14: Método analítico versus CALCMEC utilizando o método das imagens.

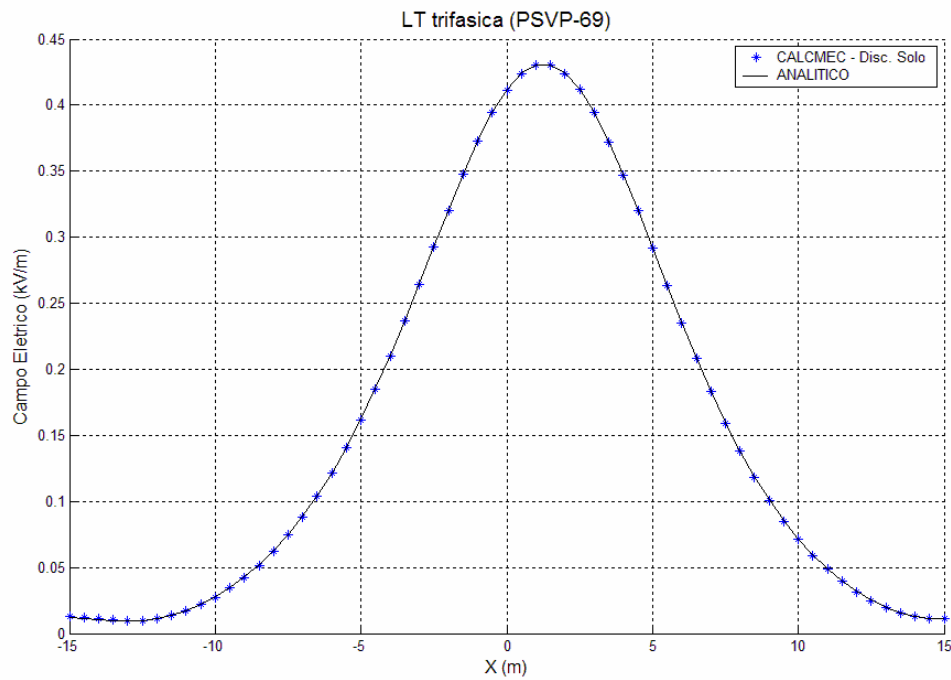


Figura 6.15: Método analítico versus CALCMEC utilizando a discretização do solo.

Visualmente não se pode observar diferença nos gráficos gerados pelo método analítico e pelo programa com a aplicação do método das imagens e aplicação da

discretização do solo. Então foram colocados em forma de gráfico (Figura 6.16) a variação do erro dos dois gráficos (Figura 6.14 e 6.15).

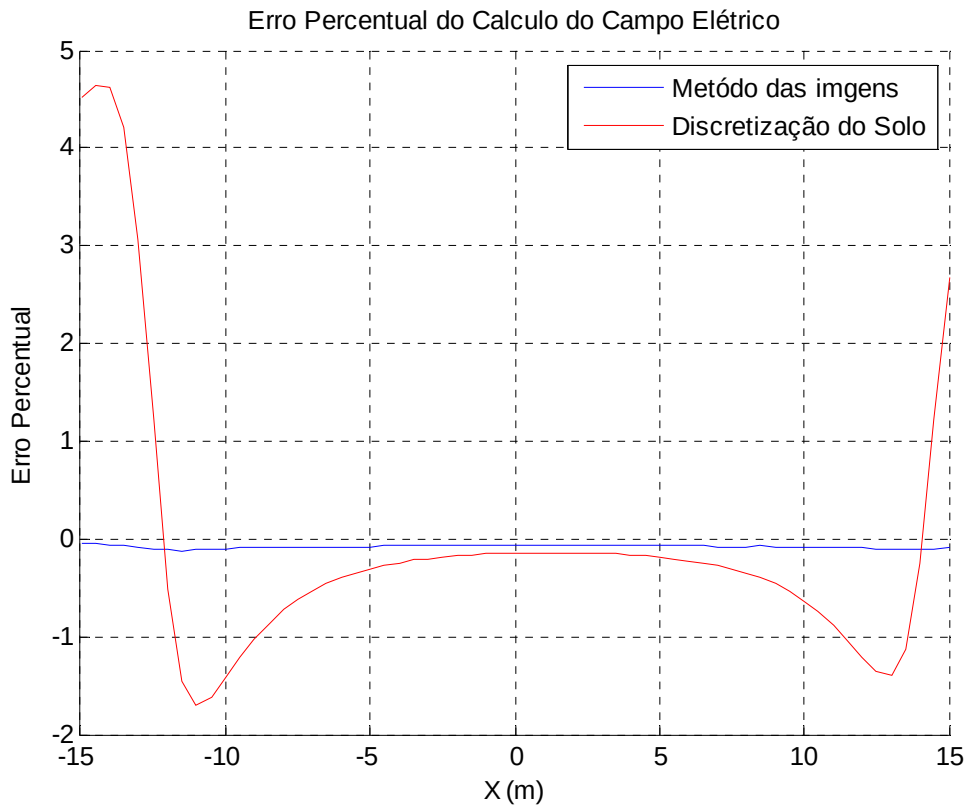


Figura 6.16: Erro percentual do cálculo do campo elétrico da linha trifásica.

A Figura (6.16) apresentam o erro percentual resultante da aplicação de ambos os métodos, comparados com o método analítico. Como se pode notar o erro no meio da linha é muito pequeno para ambos os métodos. O erro nos extremos da linha para a discretização do solo, aumenta com devido a distancia dos condutores com o ponto onde foi calculado o campo. Já para o método das imagens o erro mantém-se quase constante.

No caso do aumento da quantidade de elementos, ao qual o contorno foi discretizado, o erro percentual é reduzido, para ambos os métodos. Deve-se ter o cuidado no aumento do numero de elementos para evitar singularidade no calculo do raio entre o ponto de aplicação da função impulsiva (i) e o ponto de observação (P).

6.3.1 – Método das imagens e discretização do solo

O método das imagens (Figura 6.17) tem a vantagem de considerar a influência do solo no cálculo do campo elétrico de forma analítica. Nele se considera um solo plano e de potencial nulo. No entanto, muitas vezes, o solo sob a linha de transmissão é irregular e tem obstáculos. Apesar disso o método das imagens é de grande importância por permitir levar em conta a influência do solo nos cálculos. A Figura 6.17, mostra a aplicação do método das imagens, gerando um plano condutor perfeito de potencial nulo, através da imagem da linha.

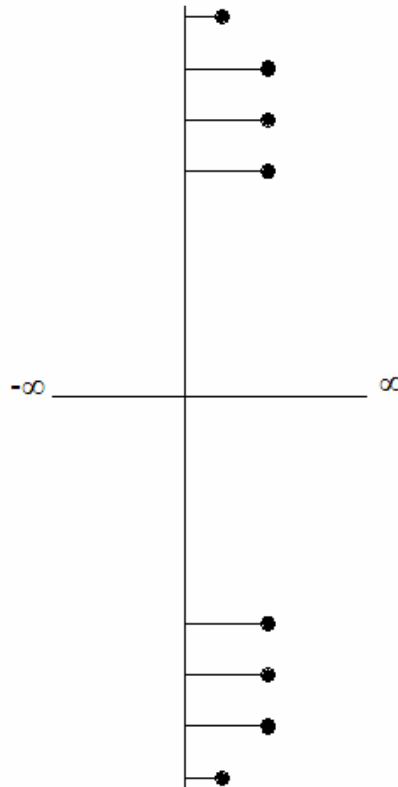


Figura 6.17: Aplicação do método das imagens.

O programa desenvolvido tem uma grande vantagem de permitir a discretização de parte do solo (Figura 6.18), não sendo necessário a discretização de $-\infty$ até o $+\infty$. Com apenas a discretização de uma pequena porção do solo sob a linha, já se tem resultados satisfatórios. Mas a grande vantagem da discretização do solo é a possibilidade de se discretizar superfícies

irregulares sob a linha de transmissão, permitindo a obtenção de resultados mais próximos do comportamento real da linha.

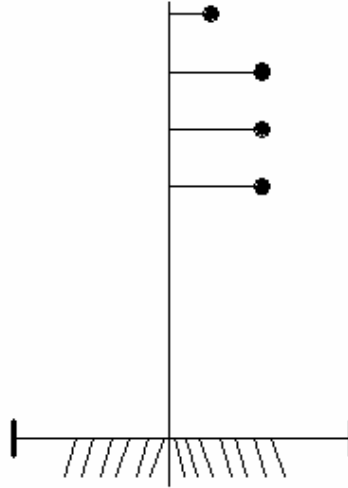


Figura 6.18: Discretização de um pedaço do solo.

Há discretização de um solo irregular (Figura 6.19) tem a vantagem de considerar nos cálculos do campo elétrico e do potencial elétrico a influência do solo com suas irregularidades e obstáculos. No capítulo 7 é apresentado um exemplo da discretização de um solo irregular, com a mesma linha, considerando o solo um plano perfeito.

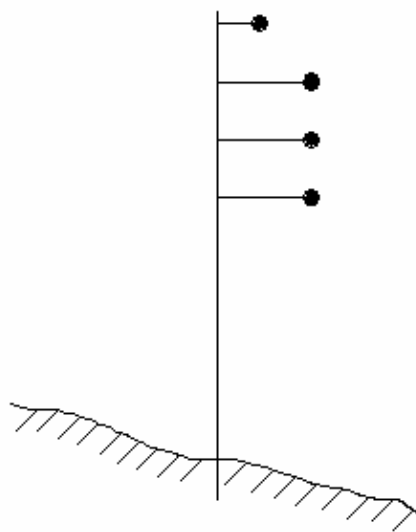


Figura 6.19: Discretização do solo irregular.

6.3.2 – Largura da faixa de solo a ser discretizada

Esta simulação foi feita para mostrar a influência da extensão da faixa lateral do solo a ser discretizado para que os resultados tenham erros desprezíveis.

Para a simulação foram consideradas duas discretizações do solo, uma considerando uma discretização de uma faixa lateral de 50 metros e outra com 100 metros, ambas considerando o solo plano, isso foi feito para se verificar a influência do tamanho do solo a ser discretizado nos resultados.

Foi considerada uma linha unifilar de tensão 100V, a uma altura de 10 metros sobre um solo plano de potencial elétrico nulo. O diâmetro do condutor é 40 mm.

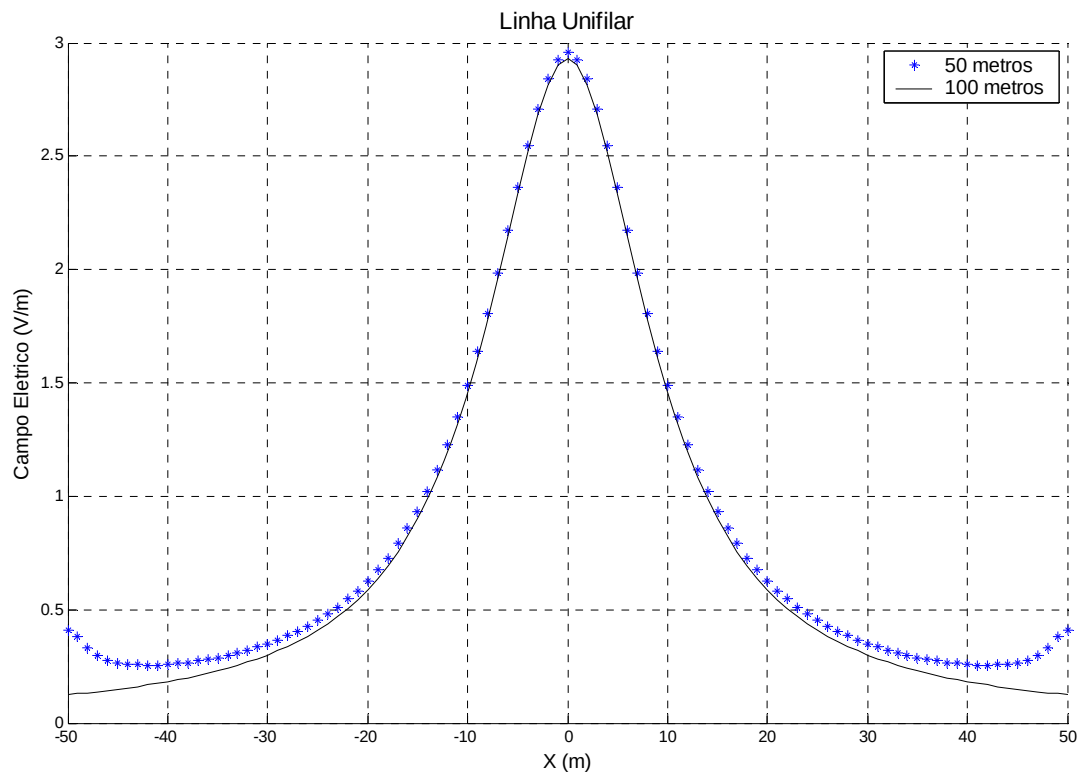


Figura 6.20: Comparação da discretização de 50 e 100 metros de solo.

Observa-se na Figura (6.20) que até 15 metros dos dois lados da faixa lateral, os resultados para ambas as considerações são muito próximos. A partir desse ponto a discretização da faixa lateral de 50 metros passa a apresentar resultados divergentes em relação à discretização com maior numero de pontos. Assim, quanto mais o ponto onde se quer calcular o campo se aproxima dos extremos do solo discretizado, maior será o erro. Para minimizar tal erro, bastaria aumentar a porção do solo a ser discretizada, sendo o tamanho dessa faixa dependente do ponto mais distante do eixo a ser analisado.

O aumento da faixa lateral a partir de 100 metros não resultaria em melhoria nos resultados da intensidade do campo elétrico nas proximidades da linha de transmissão.

6.4 – Revisão do capítulo

Neste capítulo, foram comparados os resultados obtidos por meio do o programa CALCMEC com resultados obtidos analiticamente. Ou seja, o programa foi avaliado, sendo que os resultados obtidos foram bastante satisfatórios, mesmo aqueles obtidos com um número pequeno de elementos. Também foi mostrada a eficiência da discretização do solo sendo seus resultados comparados com o do método das imagens.

CAPÍTULO 7: Linhas Compactas

Neste capítulo, será mostrada a compactação de linhas de transmissão. Também serão apresentados os resultados obtidos da análise do campo elétrico gerado por algumas silhuetas de linhas de transmissão. Os valores do campo elétrico gerado por estruturas compactas serão comparados com estruturas convencionais e estruturas reduzidas (semi-compactas). Também serão comparados os valores de capacitância equivalente e do gradiente de potencial elétrico na superfície dos condutores.

7.1 – Justificativa à compactação

A compactação de linhas de transmissão de 138 kV, além de considerável economia de investimentos, justifica-se pelo crescente uso desse nível de tensão como subtransmissão em zonas urbanas, onde faixas de servidão tornam-se de grande importância.

Basicamente, a compactação consiste na redução das distâncias entre condutores e pode também ser acompanhada da redução nas distâncias entre condutores e estrutura aterrada (fase-massa). A redução das distâncias fase-massa dependerá do tipo de suporte dos condutores que esteja sendo utilizadas, ou seja, cadeia de suspensão ou isoladores rígidos. São vários os fatores que podem limitar a compactação, entre eles, fatores elétricos, mecânicos e de desempenho.

Os fatores elétricos que têm maior influência na compactação são as distâncias elétrica mínima fase-fase, fase-massa, suportabilidade elétrica a frequência industrial, surtos de manobra e descargas atmosféricas, interferência e ruído de rádio e televisão, ruído audível e perdas corona.

Os fatores mecânicos são principalmente os resultantes do balanço dos condutores, especialmente, no meio do vão. O movimento de condutores que causa a aproximação entre fases pode ser evitado com vãos mais curtos ou com aplicação de separadores isolantes entre as fases no meio do vão.

Os fatores de desempenho se referem ao número de saídas esperado da linha, devido à operação normal de frequência industrial, surtos de manobra e descargas atmosféricas.

A maior vantagem da compactação está no reaproveitamento de linhas, fazendo a conversão de linhas de 69 kV para 138 kV ou de 138 kV para 230 kV, o que permite um aumento na capacidade de transporte.

O valor do campo elétrico em um projeto de linha de transmissão é de fundamental importância para a análise das condições de operação da linha. Vários fatores são determinados em função do campo elétrico, tais como as perdas por efeito corona, interferência em rádios e TV e ruído audível.

7.2 – Estruturas convencionais e compactas

As estruturas convencionais em 138 kV apresentam separação entre fases considerando os condutores na vertical de 3,40 a 3,80 metros, e estruturas compactas tem sua

separação na vertical de 2,20 a 1,70 metros, sendo que estruturas com espaçamento de 2,20 m são consideradas semi-compactas.

A diferença das estruturas convencionais e reduzidas está basicamente no espaçamento vertical, sendo que o espaçamento horizontal tanto para circuito simples como duplo não se modifica, sendo de 2,20 m a partir do eixo da linha. As estruturas compactas têm seu espaçamento horizontal reduzido para 1,70 m a partir do eixo da linha, tanto para circuito duplo como para circuito simples. A redução do espaçamento horizontal é possível com a redução da distância entre fase-massa e com a adoção de algumas medidas no caso de circuito duplo, como a modificação da seqüência de fases. Ou seja, condutores de mesma fase são colocados na horizontal e o vão é reduzido. Isso faz com que se reduza a diferença de potencial elétrico entre os condutores, reduzindo o balanço dos condutores no meio do vão.

Nas Figuras 7.1 a 7.3 estão apresentadas às silhuetas para uma linha de circuito simples com 1 cabo pára-raios, sendo h a altura mínima do condutor ao solo.

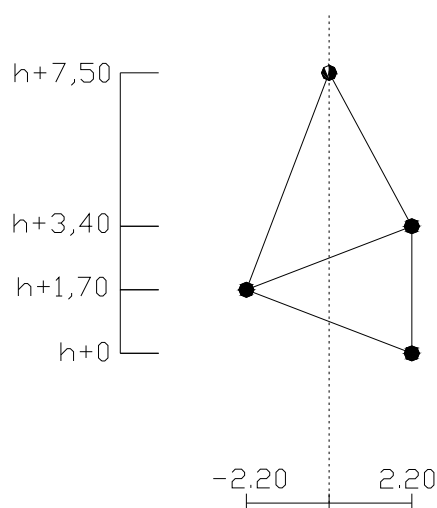


Figura 7.1: Estrutura tipo CSTCC – Espaçamento convencional.

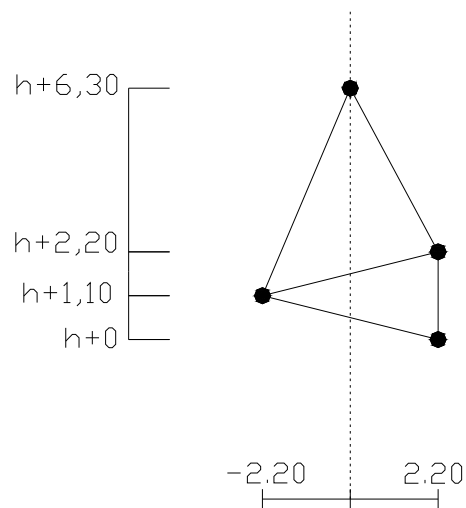


Figura 7.2: Estrutura tipo CSTRC – Espaçamento reduzido.

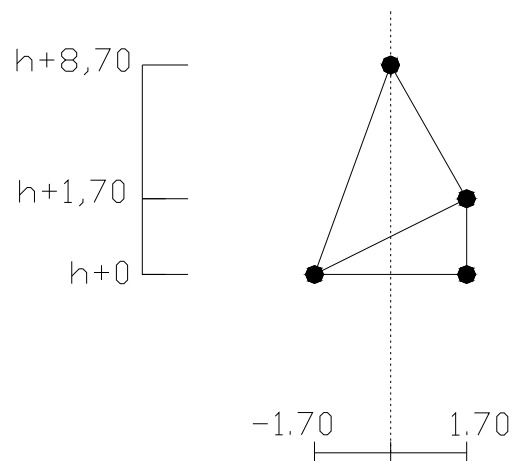


Figura 7.3: Estrutura tipo CSTPC – Espaçamento compacto.

Nas Figuras 7.4 a 7.6 estão apresentadas a silhueta para uma linha de circuito duplo com 1 cabo pára-raios, sendo h a altura mínima do condutor ao solo.

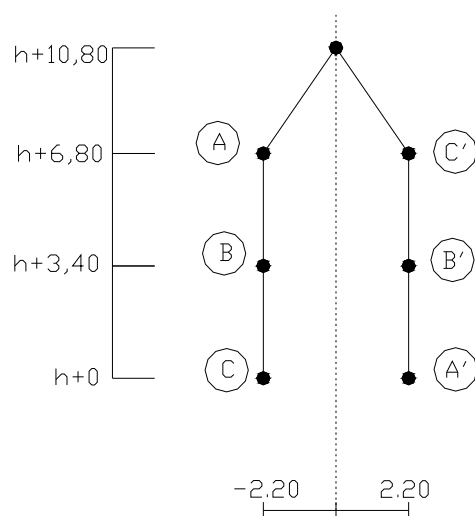


Figura 7.4: Estrutura tipo CDPC1P – Espaçamento convencional.

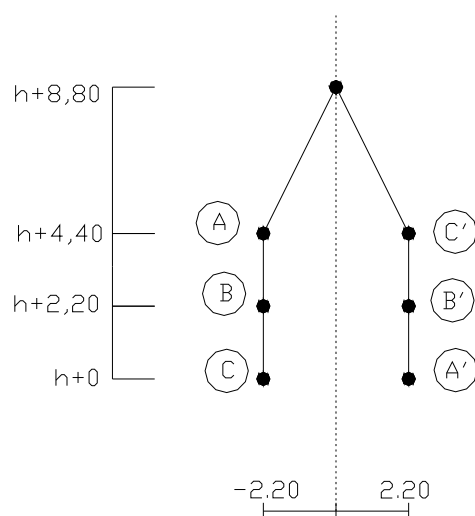


Figura 7.5: Estrutura tipo CDPR1P – Espaçamento reduzido.

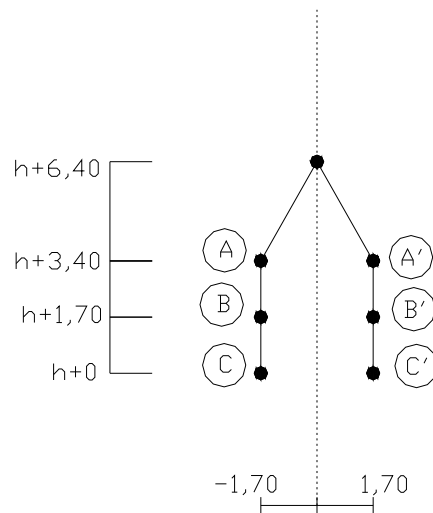


Figura 7.6: Estrutura tipo CDPP1P – Espaçamento compacto.

7.3 – Resultados das comparações

Para o estudo comparativo foi analisado o campo elétrico ao nível do solo, considerando o solo plano e posteriormente considerando-o irregular. Também será analisado o gradiente de potencial elétrico na superfície dos condutores dessas linhas.

Aspectos das silhuetas analisadas:

- CSTCC – Estrutura em circuito simples com um cabo pára-raios, espaçamento convencional entre fases, e tensão de 138 kV. Os detalhes são mostrados no apêndice C1;
- CSTRC – Estrutura em circuito simples com um cabo pára-raios, espaçamento reduzido entre fases, e tensão de 138 kV. Os detalhes são mostrados no apêndice C2;
- CSTPC – Estrutura em circuito simples com um cabo pára-raios, espaçamento compacto entre fases, e tensão de 138 kV. Os detalhes são mostrados no apêndice C3;

- CDPC1P – Estrutura para circuito duplo em paralelo com um cabo pára-raios, espaçamento convencional entre fases, e tensão de 138 kV. Os detalhes são mostrados no apêndice C4;
- CDPR1P – Estrutura para circuito duplo em paralelo com um cabo pára-raios, espaçamento reduzido entre fases, e tensão de 138 kV. Os detalhes são mostrados no apêndice C5;
- CDPP1P – Estrutura para circuito duplo em paralelo com um cabo pára-raios, espaçamento compacto entre fases, e tensão de 138 kV. Os detalhes são mostrados no apêndice C6.

Foram utilizados condutores tipo CAA - Linnet e cabos pára-raios de diâmetro 3,05 mm, com uma altura mínima dos condutores ao solo de 8,3 m. Essa é a menor distância de condutores ao solo em áreas urbanas. As estruturas foram obtidas do trabalho de Fernandes (2004), e se tratam de estruturas em uso no Brasil.

7.3.1 – Gradiente de potencial elétrico na superfície dos condutores

O valor do gradiente de potencial elétrico na superfície dos condutores de uma linha de transmissão tem importância fundamental para o aparecimento de manifestações como o efeito corona, rádio interferência (RI), ruído audível (RA) e, por consequência, as perdas elétricas ao longo da linha.

Considere, inicialmente, um condutor cilíndrico reto de raio r , de grande comprimento, de forma que se possa examinar um pedaço de comprimento unitário sem que ele seja afetado por quaisquer efeitos das extremidades. O condutor está longe de quaisquer outros condutores

ou planos condutores. Esse condutor possui uma carga Q uniformemente distribuída sobre a sua superfície, e tem um campo elétrico originado de sua superfície de maneira uniforme e concêntrica.

O gradiente de potencial elétrico médio de uma linha de transmissão pode ser calculado a partir da seguinte fórmula:

$$[\Delta E] = \left(\frac{1}{2\pi\epsilon} \right) [1/r] [Q] \quad (7.1)$$

Sendo:

$[\Delta E]$ – Vetor dos gradientes de potencial médio na superfície do condutor em kV/cm.

$[1/r]$ – Vetor dos inversos dos raios dos condutores em cm.

$[Q]$ – Vetor das cargas elétricas da linha de transmissão.

O programa CALCMEC informa o gradiente de potencial elétrico na superfície do condutor, fornecendo os valores em cada ponto da discretização do condutor, e não somente o gradiente de potencial elétrico médio. Isso é útil para a análise das perdas em linhas de transmissão.

As Tabelas (7.1) a (7.6) apresentam os valores do gradiente de potencial elétrico médio calculado em função do condutor utilizado com o programa, para cada tipo de estrutura. Para esses cálculos foi considerada a tensão máxima em todos os condutores.

Nas Tabelas (7.1) a (7.3) os valores foram comparados entre as silhuetas CSTCC E CSTCP que são respectivamente uma estrutura com espaçamento convencional e uma estrutura com espaçamento compacto.

Tabela 7.1: Gradiente de potencial na superfície do condutor – Fase A com Tensão Máxima.

Silhueta		Gradiente de potencial medio (kV/cm)		
		Condutor		
		A	B	C
CSTCC	Ua Max	13,9156	6,7602	6,7748
CSTPC	Ua Max	14,4467	6,5674	6,8415
	Dif. %	3,82%	-2,85%	0,98%

Tabela 7.2: Gradiente de potencial na superfície do condutor – Fase B com Tensão Máxima.

Silhueta		Gradiente de potencial medio (kV/cm)		
		Condutor		
		A	B	C
CSTCC	Ub Max	7,0385	14,4002	7,8162
CSTPC	Ub Max	7,0666	15,7771	9,1704
	Dif. %	0,40%	9,56%	17,33%

Tabela 7.3: Gradiente de potencial na superfície do condutor – Fase C com Tensão Máxima.

Silhueta		gradiente de potencial medio (kV/cm)		
		Condutor		
		A	B	C
CSTCC	Uc Max	6,8771	7,6401	14,5910
CSTPC	Uc Max	7,3801	9,2097	16,0118
	Dif. %	7,31%	20,54%	9,74%

Nas Tabelas (7.4) a (7.6) os valores foram comparados entre as silhuetas CDPC1P e CDPP1P que são respectivamente uma estrutura com espaçamento convencional e uma estrutura com espaçamento compacto.

Tabela 7.4: Gradiente de potencial na superfície do condutor – Fase A com Tensão Máxima.

Silhueta		gradiente de potencial medio (kV/cm)		
		Condutor		
		A	B	C
CDPC1P	Ua Max	14,8555	7,3496	6,9200
CDPP1P	Ua Max	15,0574	8,5622	6,1197
	Dif. %	1,36%	16,50%	-11,57%

Tabela 7.5: Gradiente de potencial na superfície do condutor – Fase B com Tensão Máxima.

Silhueta		gradiente de potencial medio (kV/cm)		
		Condutor		
		A	B	C
CDPC1P	Ub Max	7,9588	14,6631	8,0008
CDPP1P	Ub Max	9,0614	17,0054	9,0656
	Dif. %	13,85%	15,97%	13,31%

Tabela 7.6: Gradiente de potencial na superfície do condutor – Fase C com Tensão Máxima.

Silhueta		gradiente de potencial medio (kV/cm)		
		Condutor		
		A	B	C
CDPC1P	Uc Max	6,9126	7,3266	14,9063
CDPP1P	Uc Max	5,9961	8,4431	15,1853
	Dif. %	-13,26%	15,24%	1,87%

Observa-se um aumento do gradiente de potencial elétrico médio na superfície dos condutores implica em um aumento das perdas por corona. Segundo Fuchs (1977), para que uma linha apresente desempenho satisfatório face ao fenômeno do corona, é necessário que o gradiente de potencial elétrico na superfície dos condutores ou subcondutores seja inferior ao valor do gradiente critico visual dessa linha. Ainda segundo Fuchs (1977), espera-se desempenho satisfatório, seja no que diz respeito a perdas, seja quanto ao nível de intensidade de ruídos de radio interferência, com gradientes de potencial elétrico da ordem de 17 kV/cm.

7.3.2 – Capacitância dos condutores

A capacitância distribuída uniformemente ao longo da superfície do condutor também pode ser determinada numericamente por meio da equação (7.2):

$$C = \frac{Q}{V} \quad (7.2)$$

A diferença de potencial V é conhecida e Q é a carga armazenada em um dos condutores. Considerando-se um condutor de comprimento unitário, o valor da carga na superfície é calculado por:

$$Q = \int_{\Gamma} \rho_l d\Gamma \quad (7.3)$$

$$Q \cong \sum_i \rho_i \Gamma_i \quad (7.4)$$

Supondo-se um condutor perfeito, o valor da componente normal do vetor deslocamento elétrico é numericamente igual a densidade superficial de carga. Então, a relação constitutiva $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ aplicada na equação (7.4) resulta:

$$Q \cong \sum_i \varepsilon \frac{\partial V_i}{\partial n} \Gamma_i \quad (7.5)$$

com i varrendo todos os elementos associados a um dos condutores.

Os resultados do gradiente de potencial elétrico na superfície dos condutores, aplicados nas equações (7.5) e (7.2), fornecem o valor da capacitância equivalente por unidade de comprimento da linha.

Uma vez que as capacitâncias equivalentes dos condutores são encontradas, calcula-se a capacitância de seqüência positiva, por meio da média aritmética das capacitâncias equivalentes:

$$C_{11} = \frac{C_a + C_b + C_c}{3} \quad (7.6)$$

As Tabelas (7.7) e (7.8) apresentam as capacitâncias equivalentes e de serviço e fazem uma comparação entre as estruturas convencionais e compactas. Os valores foram obtidos a

partir do arquivo de saída por meio da análise dos dados, sendo que para isso foi utilizada a permissividade do meio, $\varepsilon = \varepsilon_o \cdot \varepsilon_r$, considerando $\varepsilon_o = 8,859 \text{ [nF / km]}$ e $\varepsilon_r = 1$.

Tabela 7.7: Capacitâncias equivalentes

Silhueta	Capacitância Aparente (nF/km)			Capacitância de Serviço (nF/km)
	CA	CB	CC	Cs
CSTCC	8,9147	9,2251	9,3473	9,16237
CSTPC	9,2549	1,01072	1,02575	9,8732
Dif. %	3,82%	9,56%	9,74%	7,76%

Tabela 7.8: Capacitâncias equivalentes

Silhueta	Capacitância Aparente (nF/km)			Capacitância de Serviço (F/km)
	CA	CB	CC	Cs
CSPC1P	9,5168	9,3935	9,5493	9,48653
CSPP1P	9,6461	1,0894	9,7281	1,00894
Dif. %	1,36%	15,97%	1,87%	6,35%

Apesar das estruturas CSPC1P e CSPP1P serem de circuito duplo só foram apresentadas as capacitâncias de um dos circuitos visto que as mesmas se repetem no outro circuito devido a simetria.

Analisando os resultados, observa-se um aumento da capacitância nas linhas compactas (CSTPC e CSPP1P).

7.3.3 – Campo elétrico ao nível do solo

As Figuras (7.7) e (7.8) apresentam o perfil do campo elétrico 1 m acima do nível do solo. Para esta comparação, foi considerada uma altura mínima dos condutores em relação ao solo de 8 metros e uma faixa de passagem de 30 metros, sendo considerado um solo plano condutor.

Na Figura (7.7), são comparadas silhuetas CSTCC, CSTRC E CSTCP que são respectivamente estruturas com espaçamento convencional, reduzido e compacto.

Na Figura (7.8), são comparadas silhuetas CDPC1P, CDPR1P e CDPP1P que são respectivamente estruturas com espaçamento convencional, reduzido e compacto.

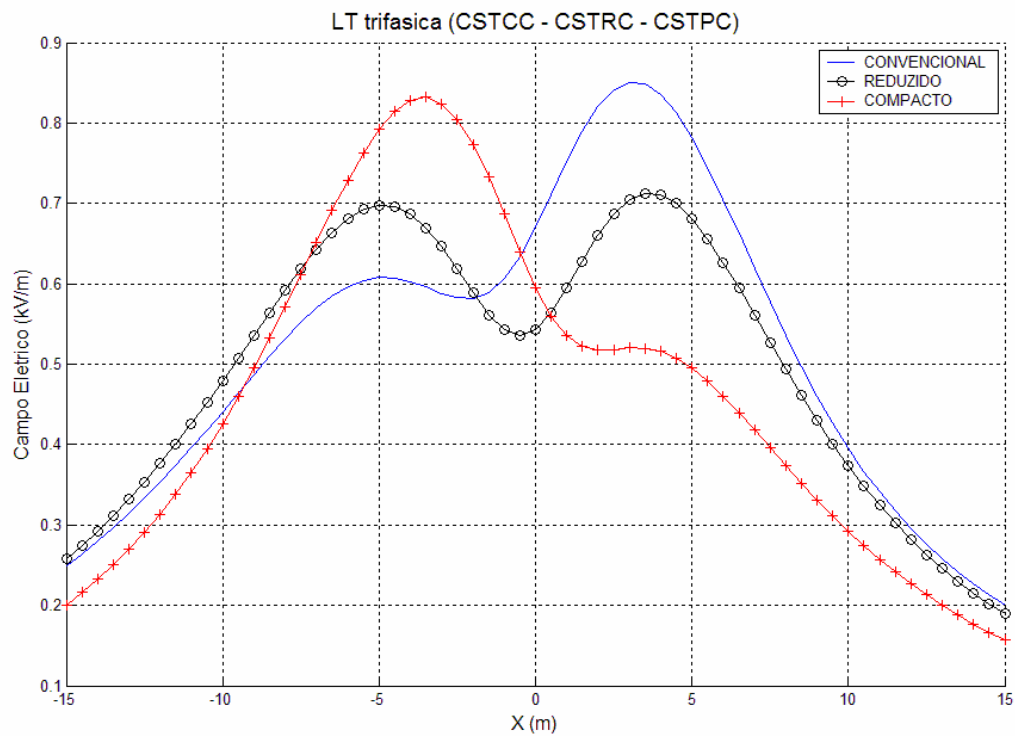


Figura 7.7: Campo elétrico a 1 metro acima do nível do solo.

Na Figura (7.7), observa-se uma redução do campo elétrico ao nível do solo nas estruturas reduzidas e compactas, No meio da linha, a maior redução ocorre com a estrutura com espaçamento reduzido e, no limite da faixa de passagem, ocorre uma maior redução com a estrutura com espaçamento compacto. Isso ocorre devido à aproximação dos condutores.

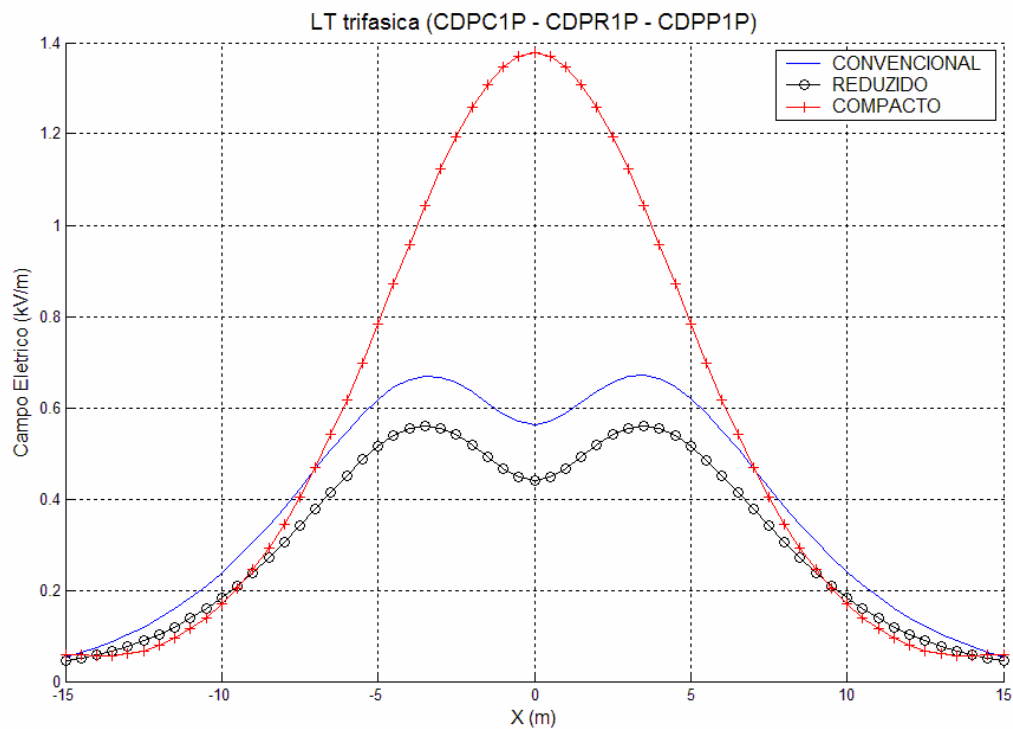


Figura 7.8: Campo elétrico a 1 metro acima do nível do solo.

Na Figura (7.8), também haveria uma redução do campo ao nível do solo, se não fosse uma prática utilizada para permitir uma maior aproximação dos condutores feitas pelos projetistas, que consiste na colocação das fases iguais em paralelo na horizontal, de modo a reduzir a diferença de potencial entre esses condutores. No apêndice C, foram colocadas as silhuetas das estruturas CDPC1P, CDPR1P e CDPP1P colocando também a seqüência de fases adotadas. Devido a modificação da seqüência de fases, o campo elétrico debaixo da linha acaba tendo o seu valor quase que dobrado.

Devido ao nível de tensão das linhas (138 kV), o limite de campo elétrico no limite da faixa de passagem não foi ultrapassado. Mesmo em ambiente urbano onde não é possível haver faixa de passagem, o limite do campo elétrico não é ultrapassado.

7.3.4 – Solo plano perfeito e Solo irregular.

Nesse item é mostrado a discretização do solo irregular e de um solo plano, para verificar-se o efeito do solo irregular nos cálculos.

A Figura (7.9), mostra a silhueta da linha analisada.

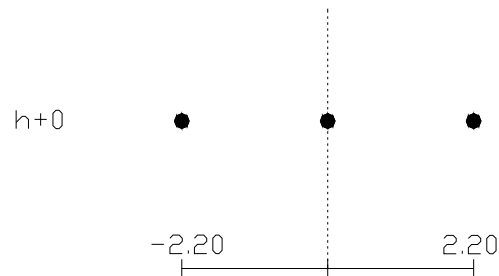


Figura 7.9: Estrutura tipo CSHSP.

A Figura (7.10), representa o perfil do solo irregular, que será utilizado para comparação com um solo plano perfeito.

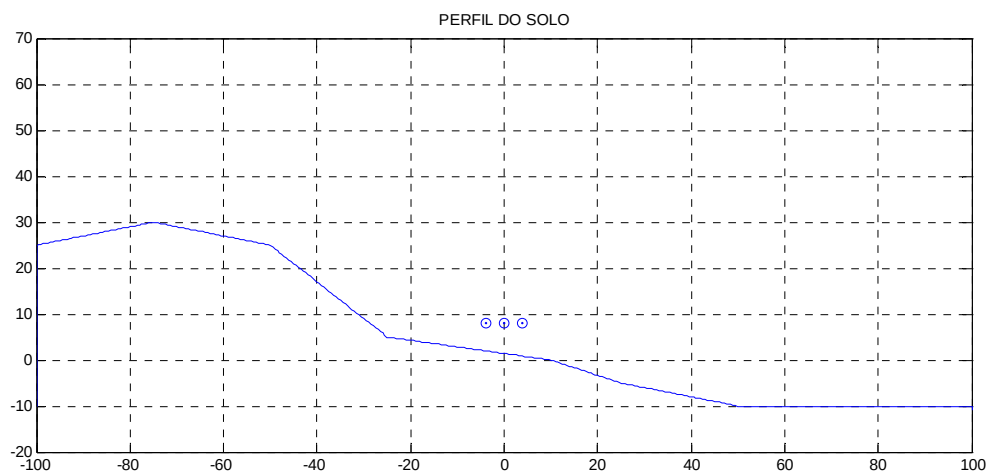


Figura 7.10: Perfil do solo irregular.

Esta comparação tem por objetivo mostrar a influência do solo no campo elétrico. Essa mesma influência ocorre quando a linha está próxima de edificações. Para tal comparação foi utilizada uma estrutura convencional de 69kV apresentada no apêndice C7.

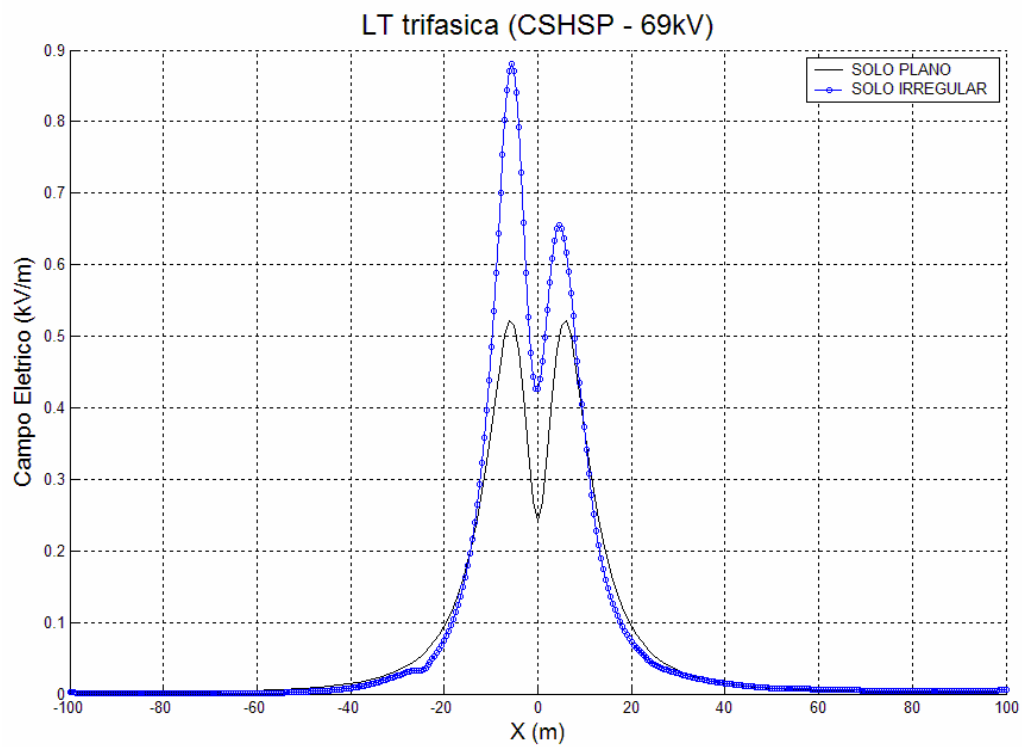


Figura 7.11: Campo elétrico a 1 metro acima do nível do solo.

Pela Figura (7.11), pode-se observar que o campo elétrico abaixo dos condutores é maior para o solo irregular, isso ocorre devido a irregularidade do solo.

7.4 – Revisão do capítulo

Neste capítulo, foi mostrado como é feita a compactação de linhas de transmissão, sendo realizadas algumas comparações entre silhuetas. Também foram comparados os resultados do gradiente de potencial elétrico na superfície dos condutores e suas capacitâncias equivalentes.

CAPÍTULO 8: Conclusão

Neste trabalho, foi realizado um estudo do campo elétrico gerado por linhas de transmissão utilizando o Método dos Elementos de Contorno. Para isso a equação de Poisson, que é governada pelas equações de Maxwell, foi transformada em uma equação integral de contorno. Para aplicação do MEC. Para a análise do campo elétrico em linhas de transmissão da classe 69 e 138 kV, foi desenvolvido um programa baseado no método dos elementos de contorno. O programa foi chamado de CALCMEC e com ele é possível encontrar o campo elétrico na região de interesse, seja ela, a superfície do condutor ou o espaço livre. Com o programa, foi calculada a intensidade do campo elétrico a um metro da superfície de solo e o gradiente de potencial elétrico na superfície do condutor, com tais dados foi possível encontrar a capacitância equivalente da linha.

As análises feitas com o programa foram satisfatórias e corresponderam aos resultados analíticos, comprovando a validade do MEC. A precisão do MEC foi comparada com um método analítico (FUCHS, 1977). Para a validação do método e do programa, foram feitas três comparações, com o objetivo de não deixar dúvidas com relação à validade do programa. Foram comparados com o método analítico, os dados obtidos como o programa, fazendo uso da discretização do solo e do método das imagens, sendo seus resultados excelentes. Outro ponto positivo do método e do programa é o cálculo do campo elétrico considerando o solo irregular sob a linha de transmissão, o que vem melhorar os resultados dos cálculos. O tempo de cálculo do programa é muito pequeno, mesmo com muitos pontos, não sendo necessário

um computador com grande capacidade de processamento. Deve-se observar que a discretização utilizada pelo programa é a mais simples, isto é, com elementos constantes, e sendo a discretização dos condutores feita com poucos elementos, mostrando que o MEC não necessita de uma grande malha para gerar ótimos resultados.

Os resultados, considerando uma superfície plana, mostraram que a redução das distâncias entre os condutores causa diminuição na intensidade do campo elétrico no nível do solo em circuitos simples. Em circuitos duplos em paralelo, o mesmo não ocorre, devido a modificação da seqüência de fases para permitir uma maior aproximação entre os condutores. Apesar do aumento do campo elétrico nos circuitos duplos em paralelo, os níveis de campo elétrico para as linhas analisadas continuam sendo baixos, devido, principalmente, às classes de tensão utilizadas nessas linhas. Mesmo que as linhas em perímetro urbano não disponham de faixa de passagem, os níveis de campo elétrico ainda ficam abaixo dos limites estipulados na ABNT (1985).

Os resultados do gradiente de potencial elétrico na superfície dos condutores se mostraram preocupantes. As linhas compactas em circuito duplo, por exemplo, apresentam resultados máximos próximos dos limites de desempenho satisfatório, no que diz respeito à perdas por corona e a intensidade de ruídos de radio interferência. Assim, com o aumento do gradiente de potencial elétrico na superfície dos condutores, as perdas por corona e os problemas relacionados a radio interferência, bem como, ruído audível devem se agravar. Isso é uma grande desvantagem em linhas que passam por regiões urbanas.

Este trabalho procurou mostrar a eficiência do Método dos Elementos de Contorno para aplicação em linhas de transmissão e faz uma análise de estruturas largamente utilizadas atualmente em linhas de transmissão em todo o Brasil.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE COMPATIBILIDADE ELETROMAGNETICA-ABRICEM. **Diretrizes para limitação da exposição a campos elétricos, magnéticos e eletromagnéticos, variáveis no tempo (até 300 GHz)**, [s.l: s.n.],1999. Disponível em: <http://www.abricem.com.br/bancoinfo_normas.html>. Acesso em: 3 nov. 2007.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE COMPATIBILIDADE ELETROMAGNETICA – ABRICEM. **Norma exposição ambiental a campos elétricos e magnéticos - 60Hz:** apresenta projeto de norma da ABNT desenvolvido pela ABRICEM. [s.l: s.n.], 2000, 9p. Disponível em: <http://www.abricem.com.br/bancoinfo_normas.html>. Acesso em: 3 nov. 2007.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – ABNT. **NBR 5422:** projeto de linhas aéreas de transmissão de energia elétrica. Rio de Janeiro: ABNT, 1985. 57p.

BECKER, A. A. **The boundary element method in engineering:** a complete course. Cambridge: Ed. McGraw-Hill, 1992. 337p.

BRASIL. Ministério do Trabalho e Emprego. **Norma regulamentadora – NR9:** programa de prevenção de riscos ambientais (109.000-3). Brasília, jul. 1978. Disponível em: <http://www.mte.gov.br/legislacao/normas_regulamentadoras/default.asp>. Acesso em: 10 jun. 2007.

BRASIL. Ministério do Trabalho e Emprego. Portaria 3.214 de 8 de junho de 1978. **Norma Regulamentadora – NR15:** atividades e operações insalubres (115.000-6). Brasília, DF, jul. 1978. Disponível em: <<http://www.mte.gov.br/>>. Acesso em: 10 jun. 2007.

BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. **Boundary element an introductory course.** 2. ed. Southampton: Ed. Wit Press - Computational Mechanics Publications, 1992. 313p.

FERNANDES, G. R. **Introdução ao método dos elementos de contorno.** Ilha Solteira: [s.n.], 2005. 122p.

FERNANDES, M. A. **Implantação, estudos e avaliação paramétrica de linhas de transmissão.** 2004. 248f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2004.

FUCHS, R. D. **Transmissão de energia elétrica:** linhas aéreas. Rio de Janeiro: LTC, 1977. 2v. 588p.

HARTMANN, F. **Introduction to boundary elements :** theory and applications. New York: Springer-Verlag, 1989. 416p.

HOFFMAN, J. D. **Numerical methods for engineers and scientists.** 2. ed. New York: Marcel Dekker, 2001. 808p.

INTERNATIONAL COMMISSION ON NON-IONIZING RADIATION PROTECTION – ICNIRP. Guidelines for limiting exposure to time-varying electric, magnetic, and electromagnetic fields (up to 300 GHz). **Health Physics**, [s.l], v.74, n.4, p.494-522, Abril 1998.

KRAJEWSKI, W. BEM analysis of electric field excited by overhead HV lines erected in built-up areas. **IEE Proc-Sci. Meas. Technol.**, Stevenage, v.144, n.2, p.81-86, Mar 1997.

POUZADA, E. V. S. **Estudo da aplicação do método dos elementos de contorno à análise de propagação em estruturas guiantes**. 1999. Paginação irregular, Tese (Doutorado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

PRESS, W. H. et al. **Numerical recipes in FORTRAN 77** – the art of scientific computing. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 963p.

SADIKU, M. N. O. **Elementos de eletromagnetismo**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2004. 687p.

STEVENSON, W. D. **Elementos de análise de sistema de potência**. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1978. 458p.

TEIXEIRA, P. C. O. Avaliação dos níveis de campos elétricos e magnéticos em linhas de transmissão da CTEEP. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE PRODUÇÃO E TRANSMISSÃO DE ENERGIA ELÉTRICA, n. 16, 2001, Campinas. **Anais...** Campinas: [s.l], 2001. 6p. Disponível em: < http://www.xixsnptee.com.br/acervo_tecnico/acervo/Snpteevi/scq/scq-029.pdf >. Acesso em: 15 out. 2006.

WERTHEIMER, N.; LEEPER, E. Electrical wiring configurations and childhood cancer. **Am. J. Epidemiol.**, [s.l], v.109, n.3, p.273-284, 1979.

ZHANG, B. et al. Electric field calculation for HV insulators on the head of transmission tower by coupling CSM with BEM. **IEEE Trans. On Magnetic**, New York, v.42, n.4, p.543-546, April. 2006.

ZHAO, T; COMBER, M. G. Calculation of electric field and potential distribution along nonceramic insulators considering the effects of conductors and transmission towers. **IEEE Trans. On Power Delivery**, New York, v.15, n.1, p.313-318, Jan. 2000.

**ESTUDO DE CAMPO ELÉTRICO EM LINHA DE SUBTRANSMISSÃO
UTILIZANDO O
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

APÊNDICE A

ARQUIVO DE ENTRADA DO PROGRAMA CALCMEC

APÊNDICE A1 – Arquivo de entrada para a aplicação do método das imagens.

Linha Trifasica Modelo

1.

61. 4. 32.

1.27 8. 18.31

1.27 10. 18.31

1.27 12. 18.31

0.525 14. 3.05

3.9837e+001

-1.9919e+001

-1.9919e+001

0.

-15. 01.

-14.5 01.

-14. 01.

-13.5 01.

-13. 01.

-12.5 01.

-12. 01.

-11.5 01.

-11. 01.

-10.5 01.

-10. 01.

-09.5 01.

-09. 01.

-08.5 01.

-08. 01.

-07.5 01.

-07. 01.

-06.5 01.

-06. 01.

-05.5 01.

-05. 01.

-04.5 01.

-04. 01.

-03.5 01.

-03. 01.

-02.5 01.

-02. 01.

-01.5 01.

-01. 01.

-00.5 01.

00. 01.

00.5 01.

01. 01.

01.5 01.

02. 01.

02.5 01.

03. 01.

03.5 01.
04. 01.
04.5 01.
05. 01.
05.5 01.
06. 01.
06.5 01.
07. 01.
07.5 01.
08. 01.
08.5 01.
09. 01.
09.5 01.
10. 01.
10.5 01.
11. 01.
11.5 01.
12. 01.
12.5 01.
13. 01.
13.5 01.
14. 01.
14.5 01.
15. 01.

APÊNDICE A2 – Arquivo de entrada para discretização do formato solo.

Linha Trifasica Modelo

3.

61. 4. 32.

1.27 8. 18.31
1.27 10. 18.31
1.27 12. 18.31
0.525 14. 3.05

3.9837e+001
-1.9919e+001
-1.9919e+001
0.

-15. 01.
-14.5 01.
-14. 01.
-13.5 01.
-13. 01.
-12.5 01.
-12. 01.
-11.5 01.
-11. 01.
-10.5 01.
-10. 01.
-09.5 01.
-09. 01.
-08.5 01.
-08. 01.
-07.5 01.
-07. 01.
-06.5 01.
-06. 01.
-05.5 01.
-05. 01.
-04.5 01.
-04. 01.
-03.5 01.
-03. 01.
-02.5 01.
-02. 01.
-01.5 01.
-01. 01.
-00.5 01.
00. 01.
00.5 01.
01. 01.
01.5 01.

02. 01.
02.5 01.
03. 01.
03.5 01.
04. 01.
04.5 01.
05. 01.
05.5 01.
06. 01.
06.5 01.
07. 01.
07.5 01.
08. 01.
08.5 01.
09. 01.
09.5 01.
10. 01.
10.5 01.
11. 01.
11.5 01.
12. 01.
12.5 01.
13. 01.
13.5 01.
14. 01.
14.5 01.
15. 01.

APÊNDICE A3 – Arquivo de entrada deve conter a discretização de todos os contornos envolvidos no trabalho (condutores e solo ou condutores e imagem dos condutores).

Linha Bifilar Infinita

2.

16. 51. 2. 8. 16.

4.500000000000000e-002 0.
 4.353553390593274e-002 -3.535533905932737e-003
 4.000000000000000e-002 -5.000000000000000e-003
 3.646446609406726e-002 -3.535533905932738e-003
 3.500000000000000e-002 -6.123233995736766e-019
 3.646446609406726e-002 3.535533905932737e-003
 4.000000000000000e-002 5.000000000000000e-003
 4.353553390593274e-002 3.535533905932739e-003

-3.500000000000000e-002 0.
 -3.646446609406726e-002 -3.535533905932737e-003
 -4.000000000000000e-002 -5.000000000000000e-003
 -4.353553390593274e-002 -3.535533905932738e-003
 -4.500000000000000e-002 -6.123233995736766e-019
 -4.353553390593274e-002 3.535533905932737e-003
 -4.000000000000000e-002 5.000000000000000e-003
 -3.646446609406726e-002 3.535533905932739e-003

5.
 5.
 5.
 5.
 5.
 5.
 5.
 5.

-5.
 -5.
 -5.
 -5.
 -5.
 -5.
 -5.
 -5.

-1.0000e-001 1.5000e-002
 -9.6000e-002 1.5000e-002
 -9.2000e-002 1.5000e-002
 -8.8000e-002 1.5000e-002
 -8.4000e-002 1.5000e-002
 -8.0000e-002 1.5000e-002

-7.6000e-002 1.5000e-002
-7.2000e-002 1.5000e-002
-6.8000e-002 1.5000e-002
-6.4000e-002 1.5000e-002
-6.0000e-002 1.5000e-002
-5.6000e-002 1.5000e-002
-5.2000e-002 1.5000e-002
-4.8000e-002 1.5000e-002
-4.4000e-002 1.5000e-002
-4.0000e-002 1.5000e-002
-3.6000e-002 1.5000e-002
-3.2000e-002 1.5000e-002
-2.8000e-002 1.5000e-002
-2.4000e-002 1.5000e-002
-2.0000e-002 1.5000e-002
-1.6000e-002 1.5000e-002
-1.2000e-002 1.5000e-002
-8.0000e-003 1.5000e-002
-4.0000e-003 1.5000e-002
0 1.5000e-002
4.0000e-003 1.5000e-002
8.0000e-003 1.5000e-002
1.2000e-002 1.5000e-002
1.6000e-002 1.5000e-002
2.0000e-002 1.5000e-002
2.4000e-002 1.5000e-002
2.8000e-002 1.5000e-002
3.2000e-002 1.5000e-002
3.6000e-002 1.5000e-002
4.0000e-002 1.5000e-002
4.4000e-002 1.5000e-002
4.8000e-002 1.5000e-002
5.2000e-002 1.5000e-002
5.6000e-002 1.5000e-002
6.0000e-002 1.5000e-002
6.4000e-002 1.5000e-002
6.8000e-002 1.5000e-002
7.2000e-002 1.5000e-002
7.6000e-002 1.5000e-002
8.0000e-002 1.5000e-002
8.4000e-002 1.5000e-002
8.8000e-002 1.5000e-002
9.2000e-002 1.5000e-002
9.6000e-002 1.5000e-002
1.0000e-001 1.5000e-002

**ESTUDO DE CAMPO ELÉTRICO EM LINHA DE SUBTRANSMISSÃO
UTILIZANDO O
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

APÊNDICE B

ARQUIVO DE SAIDA DO PROGRAMA CALCMEC

APÊNDICE B – Exemplo de arquivo de saída

Linha Bifilar Infinita

DADOS

NUMERO DE ELEMENTOS DE CONTORNO = 64

NUMERO DE PONTOS NO DOMINIO ONDE A FUNÇÃO É CALCULADA = 51

NUMERO DE SUPERFICIES DE CONTORNOS = 2

ULTIMONO DE CADA CONTORNO = 32, 64,

COORDENADAS DOS PONTOS NODAIS NO CONTORNO

PONTO	X	Y
1	0.45000E-01	0.00000E+00
2	0.44904E-01	-0.97545E-03
3	0.44619E-01	-0.19134E-02
4	0.44157E-01	-0.27779E-02
5	0.43536E-01	-0.35355E-02
6	0.42778E-01	-0.41573E-02
7	0.41913E-01	-0.46194E-02
8	0.40975E-01	-0.49039E-02
9	0.40000E-01	-0.50000E-02
10	0.39025E-01	-0.49039E-02
11	0.38087E-01	-0.46194E-02
12	0.37222E-01	-0.41573E-02
13	0.36464E-01	-0.35355E-02
14	0.35843E-01	-0.27779E-02
15	0.35381E-01	-0.19134E-02
16	0.35096E-01	-0.97545E-03
17	0.35000E-01	-0.61232E-18
18	0.35096E-01	0.97545E-03
19	0.35381E-01	0.19134E-02
20	0.35843E-01	0.27779E-02
21	0.36464E-01	0.35355E-02
22	0.37222E-01	0.41573E-02
23	0.38087E-01	0.46194E-02
24	0.39025E-01	0.49039E-02
25	0.40000E-01	0.50000E-02
26	0.40975E-01	0.49039E-02
27	0.41913E-01	0.46194E-02
28	0.42778E-01	0.41573E-02
29	0.43536E-01	0.35355E-02
30	0.44157E-01	0.27779E-02
31	0.44619E-01	0.19134E-02
32	0.44904E-01	0.97545E-03
33	-0.35000E-01	0.00000E+00
34	-0.35096E-01	-0.97545E-03
35	-0.35381E-01	-0.19134E-02
36	-0.35843E-01	-0.27779E-02
37	-0.36464E-01	-0.35355E-02
38	-0.37222E-01	-0.41573E-02
39	-0.38087E-01	-0.46194E-02

40	-0.39025E-01	-0.49039E-02
41	-0.40000E-01	-0.50000E-02
42	-0.40975E-01	-0.49039E-02
43	-0.41913E-01	-0.46194E-02
44	-0.42778E-01	-0.41573E-02
45	-0.43536E-01	-0.35355E-02
46	-0.44157E-01	-0.27779E-02
47	-0.44619E-01	-0.19134E-02
48	-0.44904E-01	-0.97545E-03
49	-0.45000E-01	-0.61232E-18
50	-0.44904E-01	0.97545E-03
51	-0.44619E-01	0.19134E-02
52	-0.44157E-01	0.27779E-02
53	-0.43536E-01	0.35355E-02
54	-0.42778E-01	0.41573E-02
55	-0.41913E-01	0.46194E-02
56	-0.40975E-01	0.49039E-02
57	-0.40000E-01	0.50000E-02
58	-0.39025E-01	0.49039E-02
59	-0.38087E-01	0.46194E-02
60	-0.37222E-01	0.41573E-02
61	-0.36464E-01	0.35355E-02
62	-0.35843E-01	0.27779E-02
63	-0.35381E-01	0.19134E-02
64	-0.35096E-01	0.97545E-03

CONDICOES DE CONTORNO

NO	CAMPO ELETRICO
1	0.50000E+01
2	0.50000E+01
3	0.50000E+01
4	0.50000E+01
5	0.50000E+01
6	0.50000E+01
7	0.50000E+01
8	0.50000E+01
9	0.50000E+01
10	0.50000E+01
11	0.50000E+01
12	0.50000E+01
13	0.50000E+01
14	0.50000E+01
15	0.50000E+01
16	0.50000E+01
17	0.50000E+01
18	0.50000E+01
19	0.50000E+01
20	0.50000E+01
21	0.50000E+01
22	0.50000E+01
23	0.50000E+01
24	0.50000E+01
25	0.50000E+01
26	0.50000E+01
27	0.50000E+01
28	0.50000E+01
29	0.50000E+01
30	0.50000E+01

31 0.50000E+01
32 0.50000E+01
33 -0.50000E+01
34 -0.50000E+01
35 -0.50000E+01
36 -0.50000E+01
37 -0.50000E+01
38 -0.50000E+01
39 -0.50000E+01
40 -0.50000E+01
41 -0.50000E+01
42 -0.50000E+01
43 -0.50000E+01
44 -0.50000E+01
45 -0.50000E+01
46 -0.50000E+01
47 -0.50000E+01
48 -0.50000E+01
49 -0.50000E+01
50 -0.50000E+01
51 -0.50000E+01
52 -0.50000E+01
53 -0.50000E+01
54 -0.50000E+01
55 -0.50000E+01
56 -0.50000E+01
57 -0.50000E+01
58 -0.50000E+01
59 -0.50000E+01
60 -0.50000E+01
61 -0.50000E+01
62 -0.50000E+01
63 -0.50000E+01
64 -0.50000E+01

RESULTADOS

PONTOS NODAIS DO CONTORNO

X	Y	POTENCIAL	CAMPO ELETRICO
0.44952E-01	-0.48773E-03	0.50000E+01	0.31889E+03
0.44762E-01	-0.14444E-02	0.50000E+01	0.32025E+03
0.44388E-01	-0.23456E-02	0.50000E+01	0.32295E+03
0.43846E-01	-0.31567E-02	0.50000E+01	0.32692E+03
0.43157E-01	-0.38464E-02	0.50000E+01	0.33219E+03
0.42346E-01	-0.43884E-02	0.50000E+01	0.33853E+03
0.41444E-01	-0.47617E-02	0.50000E+01	0.34591E+03
0.40488E-01	-0.49520E-02	0.50000E+01	0.35410E+03
0.39512E-01	-0.49520E-02	0.50000E+01	0.36286E+03
0.38556E-01	-0.47617E-02	0.50000E+01	0.37186E+03
0.37654E-01	-0.43884E-02	0.50000E+01	0.38079E+03
0.36843E-01	-0.38464E-02	0.50000E+01	0.38919E+03
0.36154E-01	-0.31567E-02	0.50000E+01	0.39664E+03
0.35612E-01	-0.23456E-02	0.50000E+01	0.40268E+03
0.35238E-01	-0.14444E-02	0.50000E+01	0.40697E+03
0.35048E-01	-0.48773E-03	0.50000E+01	0.40917E+03
0.35048E-01	0.48773E-03	0.50000E+01	0.40917E+03
0.35238E-01	0.14444E-02	0.50000E+01	0.40697E+03

0.35612E-01	0.23456E-02	0.50000E+01	0.40269E+03
0.36154E-01	0.31567E-02	0.50000E+01	0.39664E+03
0.36843E-01	0.38464E-02	0.50000E+01	0.38919E+03
0.37654E-01	0.43884E-02	0.50000E+01	0.38079E+03
0.38556E-01	0.47617E-02	0.50000E+01	0.37186E+03
0.39512E-01	0.49520E-02	0.50000E+01	0.36286E+03
0.40488E-01	0.49520E-02	0.50000E+01	0.35410E+03
0.41444E-01	0.47617E-02	0.50000E+01	0.34590E+03
0.42346E-01	0.43884E-02	0.50000E+01	0.33853E+03
0.43157E-01	0.38464E-02	0.50000E+01	0.33219E+03
0.43846E-01	0.31567E-02	0.50000E+01	0.32692E+03
0.44388E-01	0.23456E-02	0.50000E+01	0.32295E+03
0.44762E-01	0.14444E-02	0.50000E+01	0.32025E+03
0.44952E-01	0.48773E-03	0.50000E+01	0.31889E+03
-0.35048E-01	-0.48773E-03	-0.50000E+01	-0.40917E+03
-0.35238E-01	-0.14444E-02	-0.50000E+01	-0.40697E+03
-0.35612E-01	-0.23456E-02	-0.50000E+01	-0.40269E+03
-0.36154E-01	-0.31567E-02	-0.50000E+01	-0.39664E+03
-0.36843E-01	-0.38464E-02	-0.50000E+01	-0.38919E+03
-0.37654E-01	-0.43884E-02	-0.50000E+01	-0.38078E+03
-0.38556E-01	-0.47617E-02	-0.50000E+01	-0.37187E+03
-0.39512E-01	-0.49520E-02	-0.50000E+01	-0.36286E+03
-0.40488E-01	-0.49520E-02	-0.50000E+01	-0.35410E+03
-0.41444E-01	-0.47617E-02	-0.50000E+01	-0.34590E+03
-0.42346E-01	-0.43884E-02	-0.50000E+01	-0.33854E+03
-0.43157E-01	-0.38464E-02	-0.50000E+01	-0.33219E+03
-0.43846E-01	-0.31567E-02	-0.50000E+01	-0.32692E+03
-0.44388E-01	-0.23456E-02	-0.50000E+01	-0.32295E+03
-0.44762E-01	-0.14444E-02	-0.50000E+01	-0.32025E+03
-0.44952E-01	-0.48773E-03	-0.50000E+01	-0.31889E+03
-0.44952E-01	0.48773E-03	-0.50000E+01	-0.31890E+03
-0.44762E-01	0.14444E-02	-0.50000E+01	-0.32024E+03
-0.44388E-01	0.23456E-02	-0.50000E+01	-0.32295E+03
-0.43846E-01	0.31567E-02	-0.50000E+01	-0.32692E+03
-0.43157E-01	0.38464E-02	-0.50000E+01	-0.33219E+03
-0.42346E-01	0.43884E-02	-0.50000E+01	-0.33854E+03
-0.41444E-01	0.47617E-02	-0.50000E+01	-0.34590E+03
-0.40488E-01	0.49520E-02	-0.50000E+01	-0.35410E+03
-0.39512E-01	0.49520E-02	-0.50000E+01	-0.36286E+03
-0.38556E-01	0.47617E-02	-0.50000E+01	-0.37186E+03
-0.37654E-01	0.43884E-02	-0.50000E+01	-0.38078E+03
-0.36843E-01	0.38464E-02	-0.50000E+01	-0.38919E+03
-0.36154E-01	0.31567E-02	-0.50000E+01	-0.39664E+03
-0.35612E-01	0.23456E-02	-0.50000E+01	-0.40269E+03
-0.35238E-01	0.14444E-02	-0.50000E+01	-0.40696E+03
-0.35048E-01	0.48773E-03	-0.50000E+01	-0.40917E+03

PONTOS INTERNOS

X	Y	POTENCIAL	CAMPO ELET. X	CAMPO ELET. Y	CAMPO ELET. TOTAL
-0.10000E+00	0.15000E-01	-0.14708E+01	-0.15396E+02	0.56328E+01	0.16394E+02
-0.96000E-01	0.15000E-01	-0.15351E+01	-0.16773E+02	0.65138E+01	0.17993E+02
-0.92000E-01	0.15000E-01	-0.16053E+01	-0.18335E+02	0.75941E+01	0.19846E+02
-0.88000E-01	0.15000E-01	-0.16821E+01	-0.20115E+02	0.89341E+01	0.22009E+02
-0.84000E-01	0.15000E-01	-0.17665E+01	-0.22144E+02	0.10618E+02	0.24558E+02
-0.80000E-01	0.15000E-01	-0.18596E+01	-0.24460E+02	0.12763E+02	0.27590E+02
-0.76000E-01	0.15000E-01	-0.19626E+01	-0.27093E+02	0.15537E+02	0.31232E+02
-0.72000E-01	0.15000E-01	-0.20768E+01	-0.30056E+02	0.19186E+02	0.35657E+02

-0.68000E-01	0.15000E-01	-0.22034E+01	-0.33308E+02	0.24063E+02	0.41091E+02
-0.64000E-01	0.15000E-01	-0.23434E+01	-0.36689E+02	0.30683E+02	0.47828E+02
-0.60000E-01	0.15000E-01	-0.24966E+01	-0.39762E+02	0.39766E+02	0.56235E+02
-0.56000E-01	0.15000E-01	-0.26598E+01	-0.41506E+02	0.52202E+02	0.66692E+02
-0.52000E-01	0.15000E-01	-0.28241E+01	-0.39801E+02	0.68699E+02	0.79396E+02
-0.48000E-01	0.15000E-01	-0.29688E+01	-0.30985E+02	0.88564E+02	0.93828E+02
-0.44000E-01	0.15000E-01	-0.30569E+01	-0.11040E+02	0.10731E+03	0.10787E+03
-0.40000E-01	0.15000E-01	-0.30427E+01	0.19362E+02	0.11606E+03	0.11766E+03
-0.36000E-01	0.15000E-01	-0.29006E+01	0.50804E+02	0.10882E+03	0.12010E+03
-0.32000E-01	0.15000E-01	-0.26492E+01	0.72901E+02	0.90164E+02	0.11595E+03
-0.28000E-01	0.15000E-01	-0.23327E+01	0.83682E+02	0.69173E+02	0.10857E+03
-0.24000E-01	0.15000E-01	-0.19898E+01	0.86877E+02	0.51096E+02	0.10079E+03
-0.20000E-01	0.15000E-01	-0.16426E+01	0.86371E+02	0.37011E+02	0.93967E+02
-0.16000E-01	0.15000E-01	-0.13006E+01	0.84530E+02	0.26275E+02	0.88519E+02
-0.12000E-01	0.15000E-01	-0.96653E+00	0.82529E+02	0.17939E+02	0.84456E+02
-0.80000E-02	0.15000E-01	-0.63985E+00	0.80900E+02	0.11183E+02	0.81670E+02
-0.40000E-02	0.15000E-01	-0.31853E+00	0.79867E+02	0.53716E+01	0.80047E+02
0.00000E+00	0.15000E-01	0.12618E-05	0.79515E+02	0.30516E-07	0.79515E+02
0.40000E-02	0.15000E-01	0.31853E+00	0.79867E+02	-0.53716E+01	0.80047E+02
0.80000E-02	0.15000E-01	0.63985E+00	0.80900E+02	-0.11183E+02	0.81670E+02
0.12000E-01	0.15000E-01	0.96653E+00	0.82529E+02	-0.17939E+02	0.84456E+02
0.16000E-01	0.15000E-01	0.13006E+01	0.84530E+02	-0.26275E+02	0.88519E+02
0.20000E-01	0.15000E-01	0.16426E+01	0.86371E+02	-0.37011E+02	0.93967E+02
0.24000E-01	0.15000E-01	0.19898E+01	0.86877E+02	-0.51096E+02	0.10079E+03
0.28000E-01	0.15000E-01	0.23327E+01	0.83682E+02	-0.69173E+02	0.10857E+03
0.32000E-01	0.15000E-01	0.26492E+01	0.72901E+02	-0.90164E+02	0.11595E+03
0.36000E-01	0.15000E-01	0.29006E+01	0.50804E+02	-0.10882E+03	0.12010E+03
0.40000E-01	0.15000E-01	0.30427E+01	0.19362E+02	-0.11606E+03	0.11766E+03
0.44000E-01	0.15000E-01	0.30569E+01	-0.11040E+02	-0.10731E+03	0.10787E+03
0.48000E-01	0.15000E-01	0.29688E+01	-0.30985E+02	-0.88564E+02	0.93828E+02
0.52000E-01	0.15000E-01	0.28241E+01	-0.39801E+02	-0.68699E+02	0.79396E+02
0.56000E-01	0.15000E-01	0.26598E+01	-0.41506E+02	-0.52202E+02	0.66692E+02
0.60000E-01	0.15000E-01	0.24966E+01	-0.39762E+02	-0.39766E+02	0.56235E+02
0.64000E-01	0.15000E-01	0.23434E+01	-0.36689E+02	-0.30683E+02	0.47828E+02
0.68000E-01	0.15000E-01	0.22034E+01	-0.33308E+02	-0.24063E+02	0.41091E+02
0.72000E-01	0.15000E-01	0.20768E+01	-0.30056E+02	-0.19186E+02	0.35657E+02
0.76000E-01	0.15000E-01	0.19626E+01	-0.27093E+02	-0.15537E+02	0.31232E+02
0.80000E-01	0.15000E-01	0.18596E+01	-0.24460E+02	-0.12762E+02	0.27590E+02
0.84000E-01	0.15000E-01	0.17665E+01	-0.22144E+02	-0.10618E+02	0.24558E+02
0.88000E-01	0.15000E-01	0.16821E+01	-0.20115E+02	-0.89341E+01	0.22009E+02
0.92000E-01	0.15000E-01	0.16053E+01	-0.18335E+02	-0.75941E+01	0.19846E+02
0.96000E-01	0.15000E-01	0.15351E+01	-0.16773E+02	-0.65138E+01	0.17993E+02
0.10000E+00	0.15000E-01	0.14708E+01	-0.15396E+02	-0.56328E+01	0.16394E+02

**ESTUDO DE CAMPO ELÉTRICO EM LINHA DE SUBTRANSMISSÃO
UTILIZANDO O
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

APÊNDICE C
SILHUETAS DE ESTRUTURAS

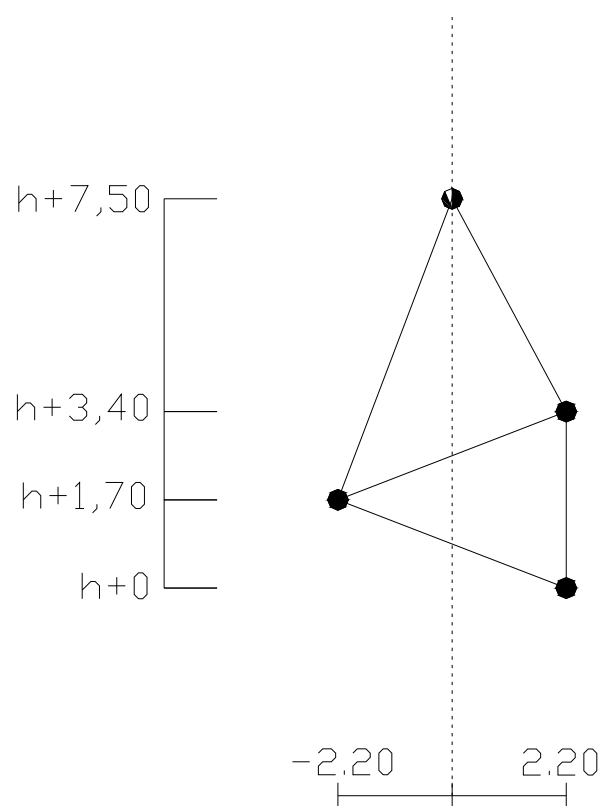
APÊNDICE C1 – Silhueta da estrutura**ESTRUTURA TIPO CSTCC**

CIRCUITO SIMPLES TRIANGULAR

ESPAÇAMENTO CONVENSIONAL

Um cabo pára-raios central

Tensão nominal 138 kV



h – altura mínima do condutor inferior ao solo, em metros.

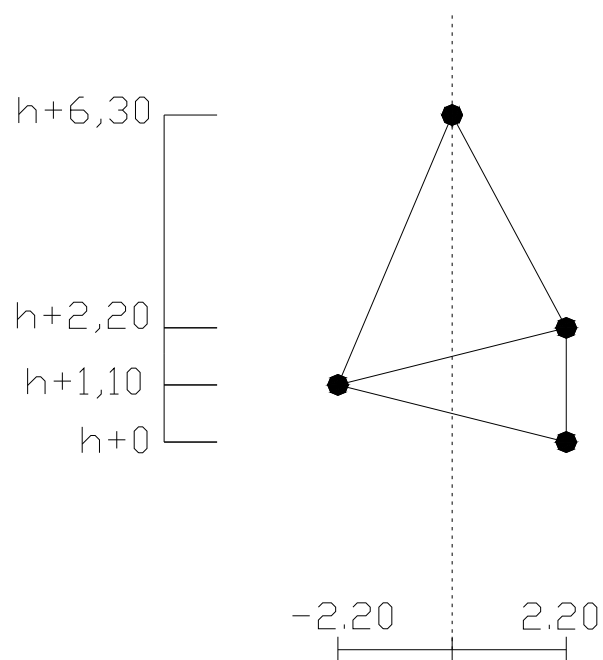
APÊNDICE C2 – Silhueta da estrutura**ESTRUTURA TIPO CSTRC**

CIRCUITO SIMPLES TRIANGULAR

ESPAÇAMENTO REDUZIDO

Um cabo pára-raios central

Tensão nominal 138 kV



h – altura mínima do condutor inferior ao solo, em metros.

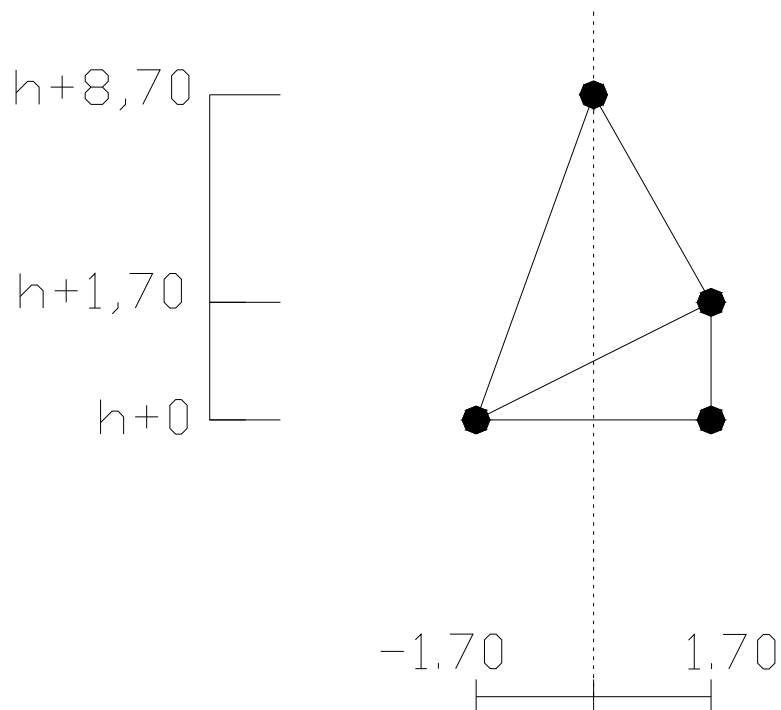
APÊNDICE C3 – Silhueta da estrutura**ESTRUTURA TIPO CSTPC**

CIRCUITO SIMPLES TRIANGULAR

ESPAÇAMENTO COMPACTO

Um cabo pára-raios central

Tensão nominal 138 kV



h – altura mínima do condutor inferior ao solo, em metros.

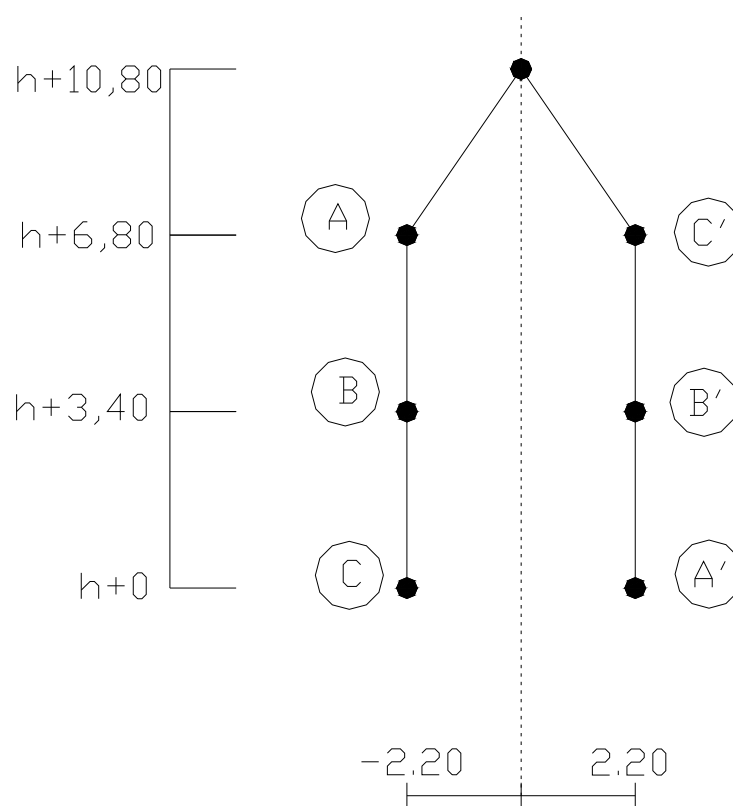
APÊNDICE C4 – Silhueta da estrutura**ESTRUTURA TIPO CDPC1P**

CIRCUITO DUPLO PARALELO

ESPAÇAMENTO CONVENSIONAL

Um cabo pára-raios central

Tensão nominal 138 kV



h – altura mínima do condutor inferior ao solo, em metros.

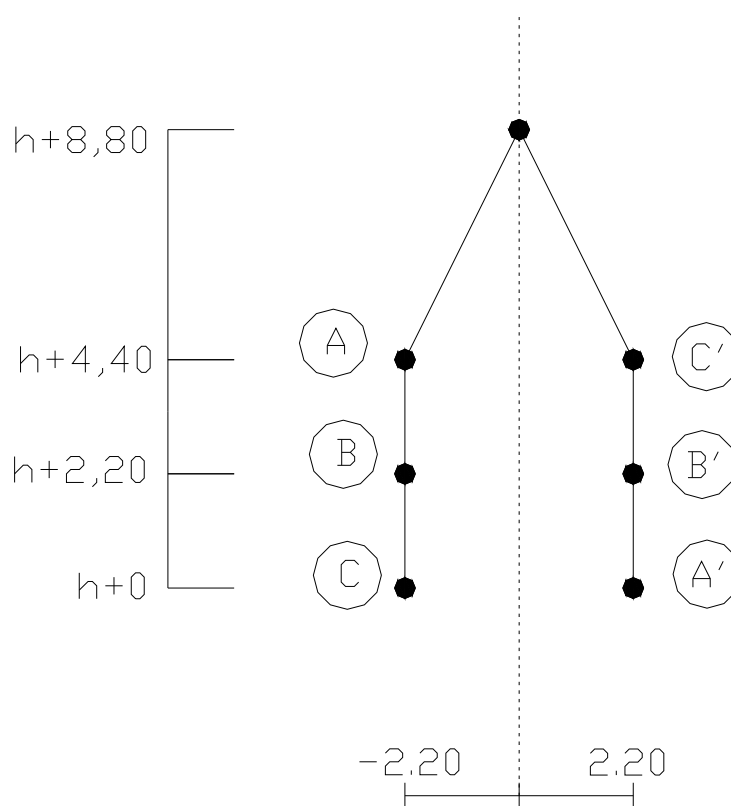
APÊNDICE C5 – Silhueta da estrutura**ESTRUTURA TIPO CDPR1P**

CIRCUITO DUPLO PARALELO

ESPAÇAMENTO REDUZIDO

Um cabo pára-raios central

Tensão nominal 138 kV



h – altura mínima do condutor inferior ao solo, em metros.

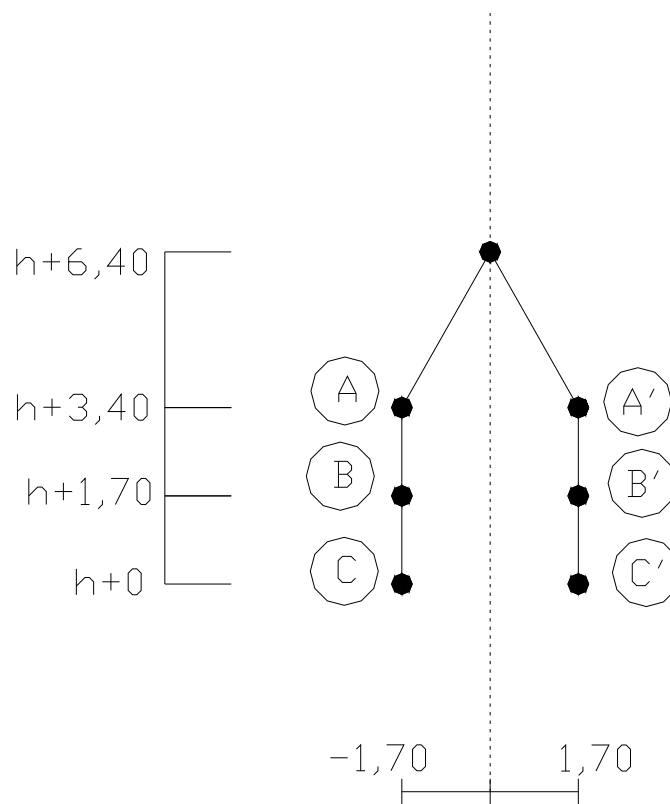
APÊNDICE C6 – Silhueta da estrutura**ESTRUTURA TIPO CDPP1P**

CIRCUITO DUPLO PARALELO

ESPAÇAMENTO COMPACTO

Um cabo pára-raios central

Tensão nominal 138 kV



h – altura mínima do condutor inferior ao solo, em metros.

OBS: A seqüência de fases é modificada de modo a permitir uma maior aproximação dos condutores na horizontal.

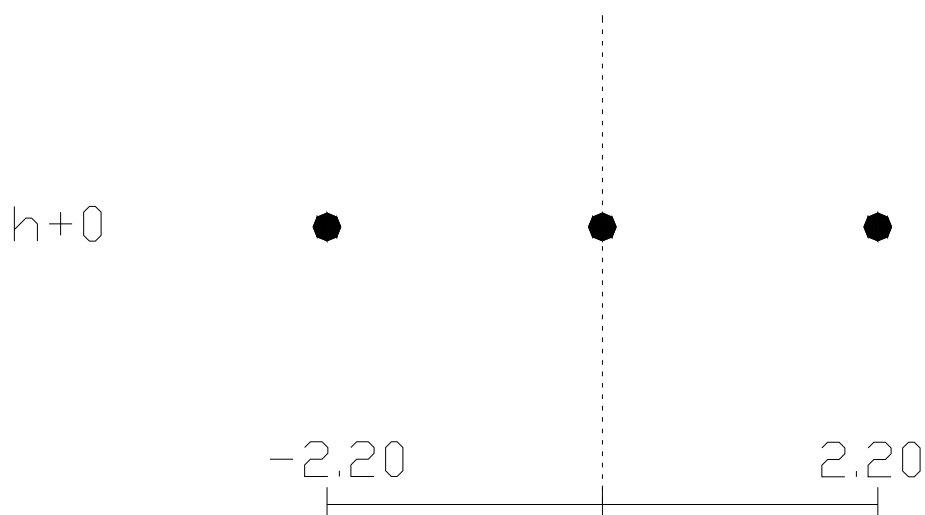
APÊNDICE C7 – Silhueta da estrutura**ESTRUTURA TIPO CSHSP**

CIRCUITO SIMPLES

ESPAÇAMENTO CONVENCIONAL

Sem cabo pára-raios

Tensão nominal 69 kV



h – altura mínima do condutor inferior ao solo, em metros.

**ESTUDO DE CAMPO ELÉTRICO EM LINHA DE SUBTRANSMISSÃO
UTILIZANDO O
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

APÊNDICE D
SOLUÇÃO POR MEIO DO MÉTODO DE CONTORNO

APÊNDICE D – Solução por meio do método de contorno.

Sendo a equação válida num domínio unidimensional

$$\nabla^2 V = b \quad (A.1)$$

$$\frac{d^2 V}{dx^2} - b = 0 \quad 0 \leq x \leq 1$$

Onde b é uma função de x , conhecida. Considerando um método de contorno:

$$\int_{\Omega} V \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) d\Omega - \int_{\Omega} b w d\Omega + \int_{\Gamma} w \mathbf{E} d\Gamma - \int_{\Gamma} V \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (A.2)$$

Tendo as seguintes condições de contorno: $V = \bar{V}$ em $x=0$ e $\mathbf{E} = \frac{df}{dx} = \bar{\mathbf{E}}$ em $x=1$.

Aplicando as condições de contorno na equação (A.2):

$$\int_0^1 V \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) d\Omega - \int_x b w d\Omega + [w \mathbf{E}]_0^1 - \left[V \frac{\partial w}{\partial n} \right]_0^1 = 0 \quad (A.3)$$

Para se ter V e $\mathbf{E}$ definidos apenas ao longo do contorno, ou seja para eliminar da formulação a equação de domínio do lado esquerdo da equação acima adota-se w de tal forma que satisfaça uma das duas condições descritas no item anterior. Nesse caso, adotando-se $b = -\delta(x, x_j)$, sendo $\delta(x, x_j)$ a função Delta de Dirac, a função w deve ser tal que satisfaça a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\delta(x, x_j) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (A.4)$$

Uma solução da equação anterior sem considerar as condições de contorno, é dada por:

$$w = \begin{cases} x & \text{se } x \leq x_j \\ x_j & \text{se } x > x_j \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Aplicando a função Delta de Dirac na equação (A.3), tem-se:

$$-\int_x b w d\Omega + [w \mathbf{E}]_0^1 - \left[V \frac{\partial w}{\partial n} \right]_0^1 = V(x_j) \quad (\text{A.6})$$

Considerando $b = -x$ e também as condições de contorno: $V = 0$ para $x = 0$ e $x = 1$, a equação (A.6) resulta em:

$$\int_0^1 x w d\Omega + [w \mathbf{E}]_1 - [w \mathbf{E}]_0 = V(x_j) \quad (\text{A.7})$$

Substituindo (A.5) na equação (A.7):

$$\int_0^{x_j} x^2 d\Omega + \int_{x_j}^1 x x_j w d\Omega + [w \mathbf{E}]_1 - [w \mathbf{E}]_0 = V(x_j) \quad (\text{A.8})$$

Porém, de acordo com a equação (A.5), $w = 0$ para $x = 0$ e $w = x_j$ para $x = 1$. Portanto, a equação (A.8) resulta em:

$$\int_0^{x_j} x^2 d\Omega + \int_{x_j}^1 x x_j w d\Omega + x_j \mathbf{E}_1 = V(x_j) \quad (\text{A.9})$$

Resolvendo as integrais na equação (A.9), chega-se:

$$V(x_j) = \frac{x_j}{2} - \frac{x_j^3}{6} + x_j \mathbf{E}_1 \quad (\text{A.10})$$

A fim de se obter o valor de $\mathbf{E}_1$, considere a seguinte condição de contorno: $V = 0$ para $x = 1$.

Assim, fazendo-se $x_j = 1$ na equação (A.10), resulta em:

$$V(x_j) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + E_1 = 0 \quad (\text{A.11})$$

Da equação acima, obtém-se o valor de $E_1 = -1/3$, que corresponde ao valor exato da variável, já que nenhuma aproximação foi introduzida para u . Substituindo-se esse valor de E_1 na equação (A.10) chega-se a seguinte expressão, que fornece os valores exatos de V em qualquer ponto do domínio:

$$V(x_j) = \frac{x_j}{6} - \frac{x_j^3}{6} \quad (\text{A.12})$$

Uma outra forma de se chegar à expressão (A.12) é adotando uma solução fundamental w que, além de satisfazer a equação (A.4), satisfaça também as condições de contorno: $w = 0$ para $x = 0$ e $x = 1$. Assim será adotada para w a seguinte solução:

$$w = \begin{cases} (1 - x_j)x & \text{se } x \leq x_j \\ (1 - x)x_j & \text{se } x > x_j \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Nesse caso, levando-se em conta a equação (A.13), a equação (A.7) resulta em:

$$V(x_j) = \int_0^1 x w d\Omega = \int_0^{x_j} (1 - x_j) x^2 d\Omega + \int_{x_j}^1 x (1 - x) x_j d\Omega \quad (\text{A.14})$$

Resolvendo as integrais, chega-se a:

$$V(x_j) = \frac{x_j}{6} - \frac{x_j^3}{6} \quad (\text{A.15})$$

A equação (A.15) é igual a equação (A.12). Soluções fundamentais desse tipo, isto é, que satisfazem tanto a equação diferencial quanto as condições de contorno, são chamadas funções de Green.

**ESTUDO DE CAMPO ELÉTRICO EM LINHA DE SUBTRANSMISSÃO
UTILIZANDO O
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

APÊNDICE E

EXEMPLO NUMÉRICO DO PROGRAMA CALCMEC

APÊNDICE E – EXEMPLO

Este exemplo tem por objetivo descrever o funcionamento do programa CALCMEC e mostrar quais dados são utilizados em cada subrotina.

Para este exemplo foi considerado um caso hipotético de um contorno triangular, o qual foi dividido em três elementos de contorno. Esta divisão não tem por objetivo representar corretamente o contorno em si, mas permitir que o exemplo fosse calculado manualmente.

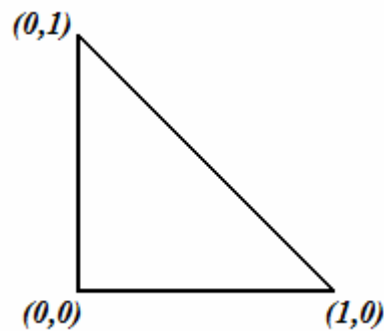


Figura E1 – Exemplo de um contorno triangular.

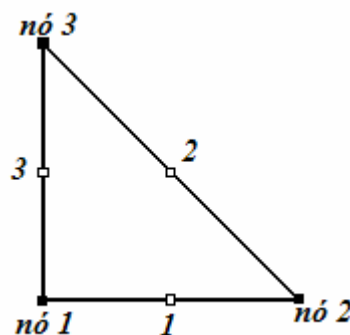


Figura E2 – Divisão do contorno em elementos

Dados do exemplo:

- Número de elementos de contorno – 3,
- Número de superfícies de contorno – 1,
- Potencial na superfície de contorno – 10 V.

Variáveis utilizadas no exemplo:

- N – número de nós no contorno,
- L – número de pontos no domínio,
- M – número de superfícies de contorno,
- NC – número do ultimo no de cada superfície de contorno,
- X e Y – coordenadas dos pontos extremos de cada elemento,
- XM e YM – coordenadas dos pontos nodais ou funcionais de cada elemento,
- G e H – matrizes de influência,
- FI – vetor com o potencial em cada elemento,
- CX e CY – coordenada dos pontos no domínio.

A nomenclatura utilizada é a mesma do programa.

Considerando o exemplo, temos:

- $N = 3$
- $L = 0$
- $M = 1$
- $NC = [3]$
- $X = [0 \quad 1 \quad 0]$
- $Y = [0 \quad 0 \quad 1]$
- $FI = [10 \quad 10 \quad 10]$

Todos estes dados são obtidos no arquivo de entrada.

Com estes dados os valores das matrizes G e H podem ser calculados. Inicialmente deve-se calcular o ponto nodal de cada elemento de contorno.

⇒ Cálculo do ponto nodal ou funcional (XM e YM), que esta no meio de cada elemento de contorno:

Primeiramente devem-se repedir os valores do primeiro coeficiente dos vetores X e Y :

$$\begin{aligned} X &= [0 \quad 1 \quad 0] \\ Y &= [0 \quad 0 \quad 1] \\ &\Downarrow \\ X &= [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \\ Y &= [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \end{aligned}$$

Após isto os valores de XM e YM podem ser calculados com a seguinte fórmula:

$$XM(j) = \frac{X(j) + X(j+1)}{2} \quad YM(j) = \frac{Y(j) + Y(j+1)}{2}$$

Sendo que j deve variar de 1 até 3, sendo que N é o número de elementos de contorno.

Fazendo isto:

$$\begin{aligned} XM(1) &= \frac{X(1) + X(1+1)}{2} = \frac{0+1}{2} = 0,5 & YM(1) &= \frac{Y(1) + Y(1+1)}{2} = \frac{0+0}{2} = 0 \\ XM(2) &= \frac{X(2) + X(2+1)}{2} = \frac{1+0}{2} = 0,5 & YM(2) &= \frac{Y(2) + Y(2+1)}{2} = \frac{0+1}{2} = 0,5 \\ XM(3) &= \frac{X(3) + X(3+1)}{2} = \frac{0+0}{2} = 0 & YM(3) &= \frac{Y(3) + Y(3+1)}{2} = \frac{1+0}{2} = 0,5 \\ XM &= [0,5 \quad 0,5 \quad 0] & YM &= [0 \quad 0,5 \quad 0,5] \end{aligned}$$

Após o cálculo do ponto nodal de cada elemento do contorno, pode-se iniciar o cálculo dos coeficientes das matrizes G e H . Inicialmente serão calculados os coeficientes da diagonal principal, sendo utilizado o a integração analítica descrito no trabalho.

$$g_j^{NS}(i) = -\frac{L_j}{2\pi} \left[\ln\left(\frac{L_j}{2}\right) - 1 \right]$$

$$h_j^{NS}(i) = 0 + K_i$$

As equações de G e H podem ser reescritas da seguinte forma:

$$SR = \frac{L_j}{2} \quad K_i = \frac{1}{2}$$

As matrizes G e H foram multiplicadas por 2π para simplificar as equações:

$$g(i, i) = g_j^{NS}(i) = 2 \cdot SR(1 - \ln(SR))$$

$$h(i, i) = h_j^{NS}(i) = \pi$$

SR – representa o comprimento de cada elemento (L_j) dividido por 2,

$$SR(i) = \frac{\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}}{2}$$

X_2 e X_1 – representa os nós extremos de cada elemento.

$\Rightarrow$ Para o elemento $i = 1$,

$$X(i) = X(1) = X_1 = 0$$

$$Y(i) = Y(1) = Y_1 = 0$$

$$X(i+1) = X(2) = X_2 = 1$$

$$Y(i+1) = Y(2) = Y_2 = 0$$

$$SR(1) = \frac{\sqrt{(0-1)^2 + (0-0)^2}}{2} = 0,5$$

$$g(1,1) = 2 \cdot 0,5(1 - \ln(0,5))$$

$$g(1,1) = 1,693147$$

$$h(1,1) = \pi$$

$\Rightarrow$ Para o elemento $i = 2$,

$$X(2) = X_1 = 1$$

$$Y(2) = Y_1 = 0$$

$$X(3) = X_2 = 0$$

$$Y(3) = Y_2 = 1$$

$$SR(2) = \frac{\sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2}}{2} = 0,70710678$$

$$g(2,2) = 2 \cdot 0,70710678(1 - \ln(0,70710678))$$

$$g(2,2) = 1,9043426341$$

$$h(2,2) = \pi$$

⇒ Para o elemento $i = 3$,

$$X(3) = X1 = 0 \quad Y(3) = Y1 = 1$$

$$X(4) = X2 = 0 \quad Y(4) = Y2 = 0$$

$$SR(3) = \frac{\sqrt{(0-0)^2 + (0-1)^2}}{2} = 0,5$$

$$g(3,3) = 2 \cdot 0,5(1 - \ln(0,5))$$

$$g(3,3) = 1,693147$$

$$h(3,3) = \pi$$

Agora serão calculados os termos de fora da diagonal principal, para isto será necessário utilizar a integração numérica. Para fazer a integração numérica será utilizado o método da quadratura de Gauss.

$$h_j^{NS}(i) = \frac{L_j}{2} \sum_{ig=1}^{Ng} \mathbf{E}^*(i, \xi_{ig}) \phi_{NS}(\xi_{ig}) W_{ig}$$

$$g_j^{NS}(i) = \frac{L_j}{2} \sum_{ig=1}^{Ng} V^*(i, \xi_{ig}) \phi_{NS}(\xi_{ig}) W_{ig}$$

NS – número de pontos nodais por elemento,

Ng – número de pontos de Gauss utilizados pelo método da quadratura de Gauss,

ig – varia de 1 até Ng ,

W_{ig} – são os argumentos definidos em função do número de pontos de Gauss,

ξ_{ig} – são os coeficientes, definidos em função do número de pontos de Gauss.

As equações integrais acima estão escritas em termo de coordenadas homogêneas, para permitir a aplicação do método da quadratura de Gauss.

As equações de G e H podem ser reescritas da seguinte forma:

$$V^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) = \ln\left(\frac{1}{RA_k}\right)$$

$$E^* = -\frac{1}{2\pi r} \cos(\alpha) = -\frac{1}{(RA_k)^2} (DIST)$$

As matrizes G e H foram multiplicadas por 2π para simplificar as equações:

$$h(i, j) = \sum_{k=1}^4 -\frac{1}{(RA_k)^2} (DIST) \cdot W_k \cdot SL$$

$$g(i, j) = \sum_{k=1}^4 \ln\left(\frac{1}{RA_k}\right) W_k \cdot SL$$

SL – representa o comprimento de cada elemento (L_j) dividido por 2,

RA – distância entre os pontos i e o ponto de Gauss.

$DIST$ – distância entre o ponto de aplicação da função impulsiva até uma linha tangente ao elemento.

k – varia os pontos de Gauss, sendo que para este trabalho foram utilizados 4 pontos de Gauss.

$$SL = \frac{\sqrt{AX^2 + AY^2}}{2} \Rightarrow \begin{aligned} AX &= (X_2 - X_1) \\ AY &= (Y_2 - Y_1) \end{aligned}$$

$$DIST = \left| \frac{(TA \cdot XP - YP + Y_1 - TA \cdot X_1)}{\sqrt{TA^2 + 1}} \right| \Rightarrow TA = \frac{AY}{AX}$$

Se AX for igual à zero, $DIST$ pode ser simplificado.

$$DIST = |XP - X_1|$$

$$SIG = (X_1 - XP) \cdot (Y_2 - YP) - (X_2 - XP) \cdot (Y_1 - YP)$$

SIG – determina a direção normal de $DIST$, sendo que se SIG for negativo $DIST = -DIST$, e se for igual ou maior que zero não se altera o valor de $DIST$.

$$\begin{aligned} XCO(k) &= \frac{AX}{2} \cdot \xi_k + BX \\ YCO(k) &= \frac{AY}{2} \cdot \xi_k + BY \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} BX &= (X_2 + X_1)/2 \\ BY &= (Y_2 + Y_1)/2 \end{aligned}$$

$$RA(K) = \sqrt{(XP - XCO(K))^2 + (YP - YCO(K))^2}$$

$\Rightarrow$ Para $i=1$ e $j=2$

$$\begin{aligned} X(j) &= X(2) = X_1 = 1 & Y(j) &= Y(2) = Y_1 = 0 \\ X(j+1) &= X(3) = X_2 = 0 & Y(j+1) &= Y(3) = Y_2 = 1 \\ XM(i) &= XP = 0,5 & YM(i) &= YP = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AX &= (0 - 1) = -1 & SL &= \frac{\sqrt{(-1)^2 + (1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} & TA &= \frac{1}{-1} = -1 \\ AY &= (1 - 0) = 1 \end{aligned}$$

$$DIST = \left| \frac{(-1 \cdot 0,5 - 0 + 0 + 1 \cdot 1)}{\sqrt{(-1)^2 + 1}} \right| = 0,3535534$$

Determinação da direção normal:

$$SIG = (1 - 0,5) \cdot (1 - 0) - (0 - 0,5) \cdot (0 - 0) = 0,5$$

$$DIST = DIST$$

Agora se devem variar os pontos de Gauss para calcular G e H .

Faz k variar de 1 até 4

o Para $k=1$

$$\xi_1 = 0,86113631 \quad W_1 = 0,34785485$$

$$XCO(1) = \frac{-1}{2} \cdot \xi_1 + \frac{0+1}{2} = 0,0694318$$

$$YCO(1) = \frac{1}{2} \cdot \xi_1 + \frac{1+0}{2} = 0,930568$$

$$RA(1) = \sqrt{(0,5 - XCO(1))^2 + (0 - YCO(1))^2} = 1,02535166$$

$$h1 = -\frac{1}{(RA_1)^2} (DIST) W_1 \cdot SL = -\frac{1}{1,02535166^2} \cdot 0,35355339 \cdot 0,34785485 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$h1 = -0,0827165486$$

$$g1 = \ln\left(\frac{1}{RA_1}\right) \cdot W_1 \cdot SL = \ln\left(\frac{1}{1,02535166}\right) \cdot 0,34785485 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -0,006158028$$

o Para $k = 2$

$$\xi_2 = -0,86113631 \quad W_2 = 0,34785485$$

$$XCO(2) = \frac{-1}{2} \cdot \xi_2 + \frac{0+1}{2} = 0,9305680$$

$$YCO(2) = \frac{1}{2} \cdot \xi_2 + \frac{1+0}{2} = 0,0694318$$

$$RA(2) = \sqrt{(0,5 - XCO(2))^2 + (0 - YCO(2))^2} = 0,43613039$$

$$h2 = -\frac{1}{0,43613039^2} \cdot 0,35355339 \cdot 0,34785485 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -0,4571991054$$

$$g2 = \ln\left(\frac{1}{0,43613039}\right) \cdot 0,34785485 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,2041097889$$

o Para $k = 3$

$$\xi_3 = 0,33998104 \quad W_3 = 0,65214515$$

$$XCO(3) = \frac{-1}{2} \cdot \xi_3 + \frac{0+1}{2} = 0,33000948$$

$$YCO(3) = \frac{1}{2} \cdot \xi_3 + \frac{1+0}{2} = 0,66999052$$

$$RA(3) = \sqrt{(0,5 - XCO(3))^2 + (0 - YCO(3))^2} = 0,69121926$$

$$h3 = -\frac{1}{0,69121926^2} \cdot 0,35355339 \cdot 0,65214515 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -0,3412342505$$

$$g3 = \ln\left(\frac{1}{0,69121926}\right) \cdot 0,65214515 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,17029678$$

o Para $k = 4$

$$\xi_4 = -0,33998104 \quad W_4 = 0,65214515$$

$$XCO(4) = \frac{-1}{2} \cdot \xi_4 + \frac{0+1}{2} = 0,66999052$$

$$YCO(4) = \frac{1}{2} \cdot \xi_4 + \frac{1+0}{2} = 0,33000948$$

$$RA(4) = \sqrt{(0,5 - XCO(4))^2 + (0 - YCO(4))^2} = 0,37121831$$

$$h4 = -\frac{1}{0,37121831^2} \cdot 0,35355339 \cdot 0,65214515 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -1,1831110183$$

$$g4 = \ln\left(\frac{1}{0,37121831}\right) \cdot 0,65214515 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,45696987$$

Efetuada a soma dos valores de g e h em cada ponto de Gauss, temos:

$$G(1,2) = g1 + g2 + g3 + g4 = 0,8252184$$

$$H(1,2) = h1 + h2 + h3 + h4 = -2,0642609$$

$\Rightarrow$ **Para $i=1$ e $j=3$**

$$X(j) = X(3) = X1 = 0$$

$$Y(j) = Y(3) = Y1 = 1$$

$$X(j+1) = X(4) = X2 = 0$$

$$Y(j+1) = Y(4) = Y2 = 0$$

$$XM(i) = XP = 0,5$$

$$YM(i) = YP = 0$$

$$AX = (0 - 0) = 0$$

$$SL = \frac{\sqrt{(0)^2 + (-1)^2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$AX = 0$$

$$AY = (0 - 1) = -1$$

$$DIST = |XP - X1| = |0,5 - 0| = 0,5$$

Determinação da direção normal:

$$SIG = (0 - 0,5) \cdot (0 - 0) - (0 - 0,5) \cdot (1 - 0) = 0,5$$

$$DIST = DIST$$

Agora se devem variar os pontos de Gauss para calcular G e H .

Faz k variar de 1 até 4

o Para $k=1$

$$\xi_1 = 0,86113631 \quad W_1 = 0,34785485$$

$$XCO(1) = \frac{0-0}{2} \cdot \xi_1 + \frac{0+0}{2} = 0$$

$$YCO(1) = \frac{0-1}{2} \cdot \xi_1 + \frac{0+1}{2} = 0,069431845$$

$$RA(1) = \sqrt{(0,5 - XCO(1))^2 + (0 - YCO(1))^2} = 0,5047977625$$

$$h1 = -\frac{1}{(RA_1)^2} (DIST) W_1 \cdot SL = -\frac{1}{0,504797762^2} \cdot 0,5 \cdot 0,34785485 \cdot 0,5 =$$

$$h1 = -0,3412740207$$

$$g1 = \ln\left(\frac{1}{RA_1}\right) \cdot W_1 \cdot SL = \ln\left(\frac{1}{0,5047977}\right) \cdot 0,34785485 \cdot 0,5 = 0,1188963355$$

o Para $k = 2$

$$\xi_2 = -0,86113631 \quad W_2 = 0,34785485$$

$$XCO(2) = \frac{0-0}{2} \cdot \xi_2 + \frac{0+0}{2} = 0$$

$$YCO(2) = \frac{0-1}{2} \cdot \xi_2 + \frac{0+1}{2} = 0,930568155$$

$$RA(2) = \sqrt{(0,5 - XCO(2))^2 + (0 - YCO(2))^2} = 1,0563887026$$

$$h2 = -\frac{1}{1,0563887026^2} \cdot 0,5 \cdot 0,34785485 \cdot 0,5 = -0,0779274697$$

$$g2 = \ln\left(\frac{1}{1,0563887026}\right) \cdot 0,34785485 \cdot 0,5 = -0,0095409988$$

o Para $k = 3$

$$\xi_3 = 0,33998104 \quad W_3 = 0,65214515$$

$$XCO(3) = \frac{0-0}{2} \cdot \xi_3 + \frac{0+0}{2} = 0$$

$$YCO(3) = \frac{0-1}{2} \cdot \xi_3 + \frac{0+1}{2} = 0,33000948$$

$$RA(3) = \sqrt{(0,5 - XCO(3))^2 + (0 - YCO(3))^2} = 0,599087854$$

$$h3 = -\frac{1}{0,599087854^2} \cdot 0,5 \cdot 0,65214515 \cdot 0,5 = -0,4542586940$$

$$g3 = \ln\left(\frac{1}{0,599087854}\right) \cdot 0,65214515 \cdot 0,5 = 0,1670623133$$

o Para $k = 4$

$$\xi_4 = -0,33998104 \quad W_4 = 0,65214515$$

$$XCO(4) = \frac{0-0}{2} \cdot \xi_4 + \frac{0+0}{2} = 0$$

$$YCO(4) = \frac{0-1}{2} \cdot \xi_4 + \frac{0+1}{2} = 0,66999052$$

$$RA(4) = \sqrt{(0,5 - XCO(4))^2 + (0 - YCO(4))^2} = 0,835994794$$

$$h4 = -\frac{1}{0,835994794^2} \cdot 0,5 \cdot 0,65214515 \cdot 0,5 = -0,2332797985$$

$$g4 = \ln\left(\frac{1}{0,835994794}\right) \cdot 0,65214515 \cdot 0,5 = 0,0584103237$$

Efetuada a soma dos valores de g e h em cada ponto de Gauss, temos:

$$G(1,3) = g1 + g2 + g3 + g4 = 0,334828$$

$$H(1,3) = h1 + h2 + h3 + h4 = -1,10674$$

$\Rightarrow$ **Para $i = 2$ e $j = 1$**

$$X(j) = X(1) = X1 = 0$$

$$Y(j) = Y(1) = Y1 = 0$$

$$X(j+1) = X(2) = X2 = 1$$

$$Y(j+1) = Y(2) = Y2 = 0$$

$$XM(i) = XP = 0,5$$

$$YM(i) = YP = 0,5$$

$$AX = (1-0) = 1$$

$$AY = (0-0) = 0$$

$$SL = \frac{\sqrt{(1)^2 + (0)^2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$TA = \frac{AY}{AX} = 0$$

$$DIST = \left| \frac{(0 \cdot 0,5 - 0,5 + 0 - 0 \cdot 0)}{\sqrt{(0)^2 + 1}} \right| = \left| \frac{-0,5}{1} \right| = 0,5$$

Determinação da direção normal:

$$SIG = (0 - 0,5) \cdot (0 - 0,5) - (1 - 0,5) \cdot (0 - 0,5) = 0,5$$

$$DIST = DIST$$

Agora se devem variar os pontos de Gauss para calcular G e H .

Faz k variar de 1 até 4

o Para $k = 1$

$$\xi_1 = 0,86113631 \quad W_1 = 0,34785485$$

$$XCO(1) = \frac{1-0}{2} \cdot \xi_1 + \frac{1+0}{2} = 0,930568155$$

$$YCO(1) = \frac{0-0}{2} \cdot \xi_1 + \frac{0+0}{2} = 0$$

$$RA(1) = \sqrt{(0,5 - XCO(1))^2 + (0,5 - YCO(1))^2} = 0,6598400837$$

$$h1 = -\frac{1}{(RA_1)^2} (DIST) W_1 \cdot SL = -\frac{1}{0,659840083732^2} \cdot 0,5 \cdot 0,34785485 \cdot 0,5 =$$

$$h1 = -0,1997379935$$

$$g1 = \ln\left(\frac{1}{RA_1}\right) \cdot W_1 \cdot SL = \ln\left(\frac{1}{0,659840083732}\right) \cdot 0,34785485 \cdot 0,5 = 0,0723116787$$

o Para $k = 2$

$$\xi_2 = -0,86113631 \quad W_2 = 0,34785485$$

$$XCO(2) = \frac{1-0}{2} \cdot \xi_2 + \frac{1+0}{2} = 0,069431845$$

$$YCO(2) = \frac{0-0}{2} \cdot \xi_2 + \frac{0+0}{2} = 0$$

$$RA(2) = \sqrt{(0,5 - XCO(2))^2 + (0,5 - YCO(2))^2} = 0,6598400837$$

$$h2 = -\frac{1}{0,659840083732^2} \cdot 0,5 \cdot 0,34785485 \cdot 0,5 = -0,1997379935$$

$$g2 = \ln\left(\frac{1}{0,659840083732}\right) \cdot 0,34785485 \cdot 0,5 = 0,0723116784$$

o Para $k = 3$

$$\xi_3 = 0,33998104 \quad W_3 = 0,65214515$$

$$XCO(3) = \frac{1-0}{2} \cdot \xi_3 + \frac{1+0}{2} = 0,66999052$$

$$YCO(3) = \frac{0-0}{2} \cdot \xi_3 + \frac{0+0}{2} = 0$$

$$RA(3) = \sqrt{(0,5 - XCO(3))^2 + (0,5 - YCO(3))^2} = 0,5281067854$$

$$h3 = -\frac{1}{0,528106785499^2} \cdot 0,5 \cdot 0,65214515 \cdot 0,5 = -0,5845757319$$

$$g3 = \ln\left(\frac{1}{0,528106785499}\right) \cdot 0,65214515 \cdot 0,5 = 0,2081832431$$

o Para $k = 4$

$$\xi_4 = -0,33998104 \quad W_4 = 0,65214515$$

$$XCO(4) = \frac{1-0}{2} \cdot \xi_4 + \frac{1+0}{2} = 0,33000948$$

$$YCO(4) = \frac{0-0}{2} \cdot \xi_4 + \frac{0+0}{2} = 0$$

$$RA(4) = \sqrt{(0,5 - XCO(4))^2 + (0,5 - YCO(4))^2} = 0,528106785499$$

$$h4 = -\frac{1}{0,528106785499^2} \cdot 0,5 \cdot 0,65214515 \cdot 0,5 = -0,5845757319$$

$$g4 = \ln\left(\frac{1}{0,528106785499}\right) \cdot 0,65214515 \cdot 0,5 = 0,2081832431$$

Efetuada a soma dos valores de g e h em cada ponto de Gauss, temos:

$$G(2,1) = g1 + g2 + g3 + g4 = 0,5609898433$$

$$H(2,1) = h1 + h2 + h3 + h4 = -1,5686274508$$

$\Rightarrow$ **Para $i = 2$ e $j = 3$**

$$X(j) = X(3) = X1 = 0$$

$$X(j+1) = X(4) = X2 = 0$$

$$XM(i) = XP = 0,5$$

$$Y(j) = Y(3) = Y1 = 1$$

$$Y(j+1) = Y(4) = Y2 = 0$$

$$YM(i) = YP = 0,5$$

$$\begin{aligned} AX &= (0-0)=0 \\ AY &= (0-1)=-1 \end{aligned} \quad SL = \frac{\sqrt{(0)^2 + (-1)^2}}{2} = \frac{1}{2} \quad AX = 0$$

$$DIST = |XP - X1| = |0,5 - 0| = 0,5$$

Determinação da direção normal:

$$SIG = (0-0,5) \cdot (0-0,5) - (0-0,5) \cdot (1-0,5) = 0,5$$

$$DIST = DIST$$

Agora se devem variar os pontos de Gauss para calcular G e H .

Faz k variar de 1 até 4

o Para $k = 1$

$$\xi_1 = 0,86113631 \quad W_1 = 0,34785485$$

$$XCO(1) = \frac{0-0}{2} \cdot \xi_1 + \frac{0+0}{2} = 0$$

$$YCO(1) = \frac{0-1}{2} \cdot \xi_1 + \frac{0+1}{2} = 0,069431845$$

$$RA(1) = \sqrt{(0,5 - XCO(1))^2 + (0,5 - YCO(1))^2} = 0,6598400837$$

$$h1 = -\frac{1}{(RA_1)^2} (DIST) W_1 \cdot SL = -\frac{1}{0,6598400837^2} \cdot 0,5 \cdot 0,34785485 \cdot 0,5 =$$

$$h1 = -1,997379935$$

$$g1 = \ln\left(\frac{1}{RA_1}\right) \cdot W_1 \cdot SL = \ln\left(\frac{1}{0,6598400837}\right) \cdot 0,34785485 \cdot 0,5 = 0,0723116784$$

o Para $k = 2$

$$\xi_2 = -0,86113631 \quad W_2 = 0,34785485$$

$$XCO(2) = \frac{0-0}{2} \cdot \xi_2 + \frac{0+0}{2} = 0$$

$$YCO(2) = \frac{0-1}{2} \cdot \xi_2 + \frac{0+1}{2} = 0,930568155$$

$$RA(2) = \sqrt{(0,5 - XCO(2))^2 + (0,5 - YCO(2))^2} = 0,6598400837$$

$$h2 = -\frac{1}{0,6598400837^2} \cdot 0,5 \cdot 0,34785485 \cdot 0,5 = -1,997379935$$

$$g2 = \ln\left(\frac{1}{0,6598400837}\right) \cdot 0,34785485 \cdot 0,5 = 0,0723116784$$

o Para $k = 3$

$$\xi_3 = 0,33998104 \quad W_3 = 0,65214515$$

$$XCO(3) = \frac{0-0}{2} \cdot \xi_3 + \frac{0+0}{2} = 0$$

$$YCO(3) = \frac{0-1}{2} \cdot \xi_3 + \frac{0+1}{2} = 0,33000948$$

$$RA(3) = \sqrt{(0,5 - XCO(3))^2 + (0,5 - YCO(3))^2} = 0,5281067854$$

$$h3 = -\frac{1}{0,5281067854^2} \cdot 0,5 \cdot 0,65214515 \cdot 0,5 = -0,5845757319$$

$$g3 = \ln\left(\frac{1}{0,5281067854}\right) \cdot 0,65214515 \cdot 0,5 = 0,2081832431$$

o Para $k = 4$

$$\xi_4 = -0,33998104 \quad W_4 = 0,65214515$$

$$XCO(4) = \frac{0-0}{2} \cdot \xi_4 + \frac{0+0}{2} = 0$$

$$YCO(4) = \frac{0-1}{2} \cdot \xi_4 + \frac{0+1}{2} = 0,66999052$$

$$RA(4) = \sqrt{(0,5 - XCO(4))^2 + (0,5 - YCO(4))^2} = 0,5281067854$$

$$h4 = -\frac{1}{0,5281067854^2} \cdot 0,5 \cdot 0,65214515 \cdot 0,5 = -0,5845757319$$

$$g4 = \ln\left(\frac{1}{0,5281067854}\right) \cdot 0,65214515 \cdot 0,5 = 0,2081832431$$

Efetuada a soma dos valores de g e h em cada ponto de Gauss, temos:

$$G(2,3) = g1 + g2 + g3 + g4 = 0,5609898433$$

$$H(2,3) = h1 + h2 + h3 + h4 = -1,5686274508$$

$\Rightarrow$ **Para** $i = 3$ e $j = 1$

$$X(j) = X(1) = X1 = 0$$

$$Y(j) = Y(1) = Y1 = 0$$

$$X(j+1) = X(2) = X2 = 1$$

$$Y(j+1) = Y(2) = Y2 = 0$$

$$XM(i) = XP = 0$$

$$YM(i) = YP = 0,5$$

$$AX = (1 - 0) = 1$$

$$AY = (0 - 0) = 0$$

$$SL = \frac{\sqrt{(1)^2 + (0)^2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$TA = \frac{AY}{AX} = 0$$

$$DIST = \left| \frac{(0 \cdot 0 - 0,5 + 0 - 0 \cdot 0)}{\sqrt{(0)^2 + 1}} \right| = \left| \frac{-0,5}{1} \right| = 0,5$$

Determinação da direção normal:

$$SIG = (0 - 0) \cdot (0 - 0,5) - (1 - 0) \cdot (0 - 0,5) = 0,5$$

$$DIST = DIST$$

Agora se devem variar os pontos de Gauss para calcular G e H .

Faz k variar de 1 até 4

o Para $k = 1$

$$\xi_1 = 0,86113631$$

$$W_1 = 0,34785485$$

$$XCO(1) = \frac{1-0}{2} \cdot \xi_1 + \frac{1+0}{2} = 0,930568155$$

$$YCO(1) = \frac{0-0}{2} \cdot \xi_1 + \frac{0+0}{2} = 0$$

$$RA(1) = \sqrt{(0 - XCO(1))^2 + (0,5 - YCO(1))^2} = 1,0563887026$$

$$h1 = -\frac{1}{(RA_1)^2} (DIST) W_1 \cdot SL = -\frac{1}{1,0563887026^2} \cdot 0,5 \cdot 0,34785485 \cdot 0,5 =$$

$$h1 = -0,0779274697$$

$$g1 = \ln\left(\frac{1}{RA_1}\right) \cdot W_1 \cdot SL = \ln\left(\frac{1}{1,0563887026}\right) \cdot 0,34785485 \cdot 0,5 = -0,0095409988$$

o Para $k = 2$

$$\xi_2 = -0,86113631 \quad W_2 = 0,34785485$$

$$XCO(2) = \frac{1-0}{2} \cdot \xi_2 + \frac{1+0}{2} = 0,069431845$$

$$YCO(2) = \frac{0-0}{2} \cdot \xi_2 + \frac{0+0}{2} = 0$$

$$RA(2) = \sqrt{(0 - XCO(2))^2 + (0,5 - YCO(2))^2} = 0,5047977625$$

$$h2 = -\frac{1}{0,5047977625^2} \cdot 0,5 \cdot 0,34785485 \cdot 0,5 = -0,3412740260$$

$$g2 = \ln\left(\frac{1}{0,5047977625}\right) \cdot 0,34785485 \cdot 0,5 = 0,1188963355$$

o Para $k = 3$

$$\xi_3 = 0,33998104 \quad W_3 = 0,65214515$$

$$XCO(3) = \frac{1-0}{2} \cdot \xi_3 + \frac{1+0}{2} = 0,66999052$$

$$YCO(3) = \frac{0-0}{2} \cdot \xi_3 + \frac{0+0}{2} = 0$$

$$RA(3) = \sqrt{(0 - XCO(3))^2 + (0,5 - YCO(3))^2} = 0,8359947947$$

$$h3 = -\frac{1}{0,8359947947^2} \cdot 0,5 \cdot 0,65214515 \cdot 0,5 = -0,2332797980$$

$$g3 = \ln\left(\frac{1}{0,8359947947}\right) \cdot 0,65214515 \cdot 0,5 = 0,0584103234$$

o Para $k = 4$

$$\xi_4 = -0,33998104 \quad W_4 = 0,65214515$$

$$XCO(4) = \frac{1-0}{2} \cdot \xi_4 + \frac{1+0}{2} = 0,33000948$$

$$YCO(4) = \frac{0-0}{2} \cdot \xi_4 + \frac{0+0}{2} = 0$$

$$RA(4) = \sqrt{(0 - XCO(4))^2 + (0,5 - YCO(4))^2} = 0,599087854$$

$$h4 = -\frac{1}{0,599087854^2} \cdot 0,5 \cdot 0,65214515 \cdot 0,5 = -0,4542586939$$

$$g4 = \ln\left(\frac{1}{0,599087854}\right) \cdot 0,65214515 \cdot 0,5 = 0,1670623133$$

Efetutando a soma dos valores de g e h em cada ponto de Gauss, temos:

$$G(3,1) = g1 + g2 + g3 + g4 = 0,334827973$$

$$H(3,1) = h1 + h2 + h3 + h4 = -1,1067399876$$

$\Rightarrow$ **Para $i = 3$ e $j = 2$**

$$X(j) = X(2) = X1 = 1$$

$$Y(j) = Y(2) = Y1 = 0$$

$$X(j+1) = X(3) = X2 = 0$$

$$Y(j+1) = Y(3) = Y2 = 1$$

$$XM(i) = XP = 0$$

$$YM(i) = YP = 0,5$$

$$AX = (0 - 1) = -1$$

$$SL = \frac{\sqrt{(-1)^2 + (1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$TA = \frac{1}{-1} = -1$$

$$AY = (1 - 0) = 1$$

$$DIST = \left| \frac{(-1 \cdot 0 - 0,5 + 0 + 1 \cdot 1)}{\sqrt{(-1)^2 + 1}} \right| = 0,3535534$$

Determinação da direção normal:

$$SIG = (1 - 0,5) \cdot (1 - 0) - (0 - 0,5) \cdot (0 - 0) = 0,5$$

$$DIST = DIST$$

Agora se devem variar os pontos de Gauss para calcular G e H .

Faz k variar de 1 até 4

o Para $k = 1$

$$\xi_1 = 0,86113631$$

$$W_1 = 0,34785485$$

$$XCO(1) = \frac{-1}{2} \cdot \xi_1 + \frac{0+1}{2} = 0,0694318$$

$$YCO(1) = \frac{1}{2} \cdot \xi_1 + \frac{1+0}{2} = 0,930568$$

$$RA(1) = \sqrt{(0 - XCO(1))^2 + (0,5 - YCO(1))^2} = 0,43613039$$

$$h1 = -\frac{1}{(RA_1)^2} (DIST) W_1 \cdot SL = -\frac{1}{0,43613039^2} \cdot 0,35355339 \cdot 0,34785485 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$h1 = -0,4571991046$$

$$g1 = \ln\left(\frac{1}{RA_1}\right) \cdot W_1 \cdot SL = \ln\left(\frac{1}{0,43613039}\right) \cdot 0,34785485 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,2041097889$$

o Para $k = 2$

$$\xi_2 = -0,86113631 \quad W_2 = 0,34785485$$

$$XCO(2) = \frac{-1}{2} \cdot \xi_2 + \frac{0+1}{2} = 0,9305680$$

$$YCO(2) = \frac{1}{2} \cdot \xi_2 + \frac{1+0}{2} = 0,0694318$$

$$RA(2) = \sqrt{(0 - XCO(2))^2 + (0,5 - YCO(2))^2} = 1,0253516602$$

$$h2 = -\frac{1}{1,0253516602^2} \cdot 0,35355339 \cdot 0,34785485 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -0,0827165463$$

$$g2 = \ln\left(\frac{1}{1,0253516602}\right) \cdot 0,34785485 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -0,0061580287$$

o Para $k = 3$

$$\xi_3 = 0,33998104 \quad W_3 = 0,65214515$$

$$XCO(3) = \frac{-1}{2} \cdot \xi_3 + \frac{0+1}{2} = 0,33000948$$

$$YCO(3) = \frac{1}{2} \cdot \xi_3 + \frac{1+0}{2} = 0,66999052$$

$$RA(3) = \sqrt{(0 - XCO(3))^2 + (0,5 - YCO(3))^2} = 0,3712183101$$

$$h3 = -\frac{1}{0,3712183101^2} \cdot 0,35355339 \cdot 0,65214515 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -1,1831101567$$

$$g3 = \ln\left(\frac{1}{0,3712183101}\right) \cdot 0,65214515 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,4569698698$$

o Para $k = 4$

$$\xi_4 = -0,33998104 \quad W_4 = 0,65214515$$

$$XCO(4) = \frac{-1}{2} \cdot \xi_4 + \frac{0+1}{2} = 0,66999052$$

$$YCO(4) = \frac{1}{2} \cdot \xi_4 + \frac{1+0}{2} = 0,33000948$$

$$RA(4) = \sqrt{(0 - XCO(4))^2 + (0,5 - YCO(4))^2} = 0,691219266$$

$$h4 = -\frac{1}{0,691219266^2} \cdot 0,35355339 \cdot 0,65214515 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -0,3412342440$$

$$g4 = \ln\left(\frac{1}{0,691219266}\right) \cdot 0,65214515 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,1702967847$$

Efetuada a soma dos valores de g e h em cada ponto de Gauss, temos:

$$G(3,2) = g1 + g2 + g3 + g4 = 0,8252184147$$

$$H(3,2) = h1 + h2 + h3 + h4 = -2,0642600516$$

Após os cálculos dos coeficientes, as matrizes G e H podem ser montadas.

$$G = \begin{bmatrix} 1,693147 & 0,8252184 & 0,3348279 \\ 0,5609898 & 1,90434263 & 0,5609898 \\ 0,3348279 & 0,8252184 & 1,693147 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} \pi & -2,0642609 & -1,1067399 \\ -1,5686274 & \pi & -1,5686274 \\ -1,1067399 & -2,0642609 & \pi \end{bmatrix}$$

Uma vez que as matrizes G e H obtêm-se o sistema:

$$[H] \cdot FI = [G] \cdot X$$

Onde FI é o vetor do potencial no contorno, que é conhecido e X é o vetor do campo elétrico no contorno, que é desconhecido e que queremos encontrar.

O sistema acima pode ser reescrito de modo a facilitar a aplicação do método da eliminação de Gauss. Como H e FI são conhecidos e não contém incógnitas a multiplicação pode ser efetuada, e a matriz G a partir daqui será chamada de matriz A :

$$\begin{aligned} [H] \cdot FI &= [G] \cdot X \\ \Downarrow \\ F &= A \cdot X \end{aligned}$$

Sendo que:

$$F = [H] \cdot FI = \begin{bmatrix} -0,2940814641 \\ 0,0433785359 \\ -0,2940814641 \end{bmatrix}$$

$$A = G = \begin{bmatrix} 1,693147 & 0,8252184 & 0,3348279 \\ 0,5609898 & 1,90434263 & 0,5609898 \\ 0,3348279 & 0,8252184 & 1,693147 \end{bmatrix}$$

Agora o método da eliminação de Gauss será aplicado ao sistema.

$$\begin{bmatrix} 1,693147 & 0,8252184 & 0,3348279 \\ 0,5609898 & 1,90434263 & 0,5609898 \\ 0,3348279 & 0,8252184 & 1,693147 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,2940814641 \\ 0,0433785359 \\ -0,2940814641 \end{bmatrix}$$

Com o método da eliminação de Gauss obtém-se um sistema triangular equivalente ao sistema linear anterior, que é mostrado a baixo.

$$\begin{bmatrix} 1,693147 & 0,8252184 & 0,3348279 \\ 0 & 1,6309233 & 0,4500513 \\ 0 & 0 & 1,4442474 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,2940814641 \\ 0,1408164439 \\ -0,2930859325 \end{bmatrix}$$

A partir deste sistema é fácil obter os valores das incógnitas.

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,2029333204 \\ 0,1423407622 \\ -0,2029333204 \end{bmatrix}$$

O vetor X apresenta a resposta para o exemplo, uma vez que o potencial e o campo elétrico no contorno são conhecidos em todos os pontos, pode-se facilmente calcular o potencial e o campo em qualquer ponto no domínio.

Abaixo é apresentado o arquivo de saída com o resultado do programa para o exemplo mostrado detalhadamente neste apêndice, onde se pode observar que os resultados são os mesmos.

EXEMPLO PASSO A PASSO

DADOS

NUMERO DE ELEMENTOS DE CONTORNO = 3

NUMERO DE PONTOS NO DOMINIO ONDE A FUNÇÃO É CALCULADA = 0

NUMERO DE SUPERFICIES DE CONTORNOS = 1

ULTIMONO DE CADA CONTORNO = 3,

COORDENADAS DOS PONTOS NODAIS NO CONTORNO

PONTO	X	Y
1	0.00000E+00	0.00000E+00
2	0.10000E+01	0.00000E+00

3 0.00000E+00 0.10000E+01

CONDICOES DE CONTORNO

NO POTENCIAL ELETRICO

1 0.10000E+02

2 0.10000E+02

3 0.10000E+02

RESULTADOS

PONTOS NODAIS DO CONTORNO

X	Y	POTENCIAL	CAMPO ELETRICO
0.50000E+00	0.00000E+00	0.10000E+02	-0.20293E+00
0.50000E+00	0.50000E+00	0.10000E+02	0.14234E+00
0.00000E+00	0.50000E+00	0.10000E+02	-0.20294E+00

**ESTUDO DE CAMPO ELÉTRICO EM LINHA DE SUBTRANSMISSÃO
UTILIZANDO O
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

APÊNDICE F

**PROGRAMA EM MATLAB PARA DISCRETIZAÇÃO DOS
CONDUTORES**

APÊNDICE F – Programa em MATLAB para discretização dos condutores.

```

%*****
%DISCRETIZAÇÃO DO CONTOURNO DOS CONDUTORES E DO CABO PARA-RAIOS
%*****

div = 32; %NUMERO DE ELEMENTOS DE CONTOURNO AO QUAL O CONDUTOR SERA DIVIDIDO
raio=(16.28/2)/1000; %RAIO DO CONDUTOR

%VETORES COM A POSIÇÃO DOS CONDUTORES
dl=[2 0 -2];
h=[(10) (10) (10)];
s=size(h)

%*****
%CONTUDOR REAL
%*****
for N=1:s(2)
centroc=[dl(N) h(N)];
angle = (2*pi)/div;
cx=raio+centroc(1);
cy=centroc(2);
p1=[cx cy];
pA1(1,:)=p1;
for i=1:(div-1)
x=cos(-angle*i)*raio + centroc(1);
y=sin(-angle*i)*raio + centroc(2);
j=i+1;
pA1(j,:)=[x y];
end
px=pA1(:,1);
py=pA1(:,2);
hold on
grid
plot(px,py,'o')
plot(px,py)
end

%*****
%CONDUTOR IMAGEM
%*****
for N=1:s(2)
centroc=[dl(N) -h(N)];
angle = (2*pi)/div;
cx=raio+centroc(1);
cy=centroc(2);
p1=[cx cy];
pA2(1,:)=p1;
for i=1:(div-1)
x=cos(-angle*i)*raio + centroc(1);
y=sin(-angle*i)*raio + centroc(2);
j=i+1;
pA2(j,:)=[x y];
end
px=pA2(:,1);
py=pA2(:,2);
plot(px,py,'x')
plot(px,py)
end

```

```
%*****  
%MATRIZ COM A DISCRETIZAÇÃO DOS CONDUTORES  
saida=[pA1  
        pA2]  
%*****
```