



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**

**“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”**

**CAMPUS GUARATINGUETÁ**

**GLÁUCIO GONZAGA MARTINS**

**A métrica de Schwarzschild aplicada na deflexão da luz**

Guaratinguetá

2023

**Gláucio Gonzaga Martins**

**A métrica de Schwarzschild aplicada na deflexão da luz**

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Bacharelado em Física da Faculdade de Engenharia e Ciências do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Saulo Henrique Pereira

Guaratinguetá

2023

|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| M386m | <p>Martins, Glaucio Gonzaga</p> <p>A Métrica de Schwarzschild aplicada na deflexão da luz<br/>/ Glaucio Gonzaga Martins - Guaratinguetá, 2023.<br/>54 f : il.<br/>Bibliografia: f. 50</p> <p>Trabalho de Graduação em Física (Bacharel) –<br/>Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia e<br/>Ciências de Guaratinguetá, 2023.<br/>Orientador: Prof. Dr. Saulo Henrique Pereira</p> <p>1. Gravidade (Física) - Medição. 2. Luz - espalhamento.<br/>3. Relatividade geral (Física). I. Título.</p> <p>CDU 531.5</p> |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Luciana Máximo  
Bibliotecária/CRB-8 3595



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
CAMPUS GUARATINGUETÁ

GLÁUCIO GONZAGA MARTINS

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO  
PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE  
"GRADUAÇÃO EM BACHAREL EM FÍSICA"

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE  
GRADUAÇÃO EM BACHARELADO EM FÍSICA.

Prof. Dr. MARCO AURÉLIO ALVARENGA MONTEIRO  
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. SAULO HENRIQUE PEREIRA  
Orientador/UNESP-FEG

Prof. Dr. MÁRCIO EDUARDO DA SILVA ALVES  
ICT/UNESP

Prof. Dr. ALESSANDRO L. RIBEIRO DOS SANTOS  
UNESP-FEG

Janeiro de 2023

à minha esposa Gislaine, que com paciência sempre me apoiou durante minha jornada neste Curso, mesmo em seus delicados momentos de saúde.

“Lembre-se de olhar para o alto, para as estrelas,  
e não para baixo, para os seus pés.”  
Stephen Hawking

## RESUMO

Uma imagem que sempre está em minhas lembranças é a de uma noite estrelada de Lua cheia. Atualmente, sempre que tenho a mesma oportunidade rememoro a mesma sensação e contemplação daquele dia. Porém, os poucos anos no estudo da Física adicionou a esta contemplação, indagações e a procura de respostas. Portanto, devido ao fenômeno da deflexão da luz ser a primeira comprovação da Teoria da Relatividade Geral este tema será o meu primeiro estudo que estará representado neste Trabalho de Conclusão de Curso. O objetivo será estudar como o raio de luz desvia sua trajetória e o porquê deste desvio ocorrer no momento em que esta trajetória passa a uma distância específica de um corpo massivo. A deflexão da luz tornou-se uma ferramenta chave na Astronomia e o estudo deste fenômeno, além de relembrar a importância científica do Brasil, descreverá alguns conceitos dos pilares da Relatividade Geral. Primeiramente, estudaremos as Bases da Relatividade Geral em seus princípios descrevendo sistemas de coordenadas. Por tratar de um sistema esférico veremos como a curvatura deste sistema se manifesta, avaliaremos uma função em um ponto utilizando a derivação e ainda para este espaço curvo veremos objetos chamados tensores, já que estes elementos estão presentes na proposta de Einstein de que a gravidade deveria ser uma manifestação da curvatura do espaço-tempo. Como uma simples aplicação das equações de Einstein estudaremos a métrica de Schwarzschild e suas propriedades. Investigaremos a deflexão da luz à medida que passa por um campo gravitacional, onde trataremos das geodésicas e quantidades que são conservadas na trajetória e em sua deflexão. Por fim, obteremos a equação da deflexão da luz com a aplicação da métrica de Schwarzschild. Assim, concluímos que a solução de Schwarzschild é a única solução na Teoria da Relatividade Geral que foi inteiramente comprovada experimentalmente, contudo a Teoria da Relatividade Geral ainda necessita avançar mais inclusive com implementação da mecânica quântica. Pela sua vasta aplicabilidade em sistemas reais a solução de Schwarzschild é a mais importante solução exata das equações de campo de Einstein. Porém apesar de a solução contribuir com um grande prestígio para a Teoria da Relatividade Geral ela é apenas uma parte e não o todo.

**PALAVRAS-CHAVE:** Gravidade; métrica de Schwarzschild; deflexão da luz.

## ABSTRACT

An image that is always in my memory is that of a starry night with a full moon. Currently, whenever I have the same opportunity, I remember the same feeling and contemplation of that day. However, the few years in the study of Physics added to this contemplation, questions, and the search for answers. Therefore, due to the phenomenon of light deflection being the first proof of the Theory of General Relativity, this theme will be my first study that will be represented in this Course Completion Work. The objective is to study how the light ray deviates from its trajectory and why this deviation occurs when this trajectory passes at a specific distance from a massive body. The deflection of light has become a key tool in Astronomy and the study of this phenomenon, in addition to recalling the scientific importance of Brazil, will describe some concepts of the pillars of General Relativity. First, we will study the Bases of General Relativity in its principles describing coordinate systems. As it is a spherical system, we will see how the curvature of this system manifests itself, we will evaluate a function at a point using the derivation and even for this curved space, we will see objects called tensors, since these elements are present in Einstein's proposal that gravity should be a manifestation of the curvature of space-time. As a simple application of Einstein's equations, we will study the Schwarzschild metric and its properties. We will investigate the deflection of light as it passes through a gravitational field, where we will deal with the geodesics and quantities that are conserved in the trajectory and its deflection. Finally, we will obtain the light deflection equation with the application of the Schwarzschild metric. Thus, we conclude that the Schwarzschild solution is the only solution in the Theory of General Relativity that has been fully proven experimentally, however, the Theory of General Relativity still needs to advance further, including the implementation of quantum mechanics. Due to its wide applicability in real systems, the Schwarzschild solution is the most important exact solution of Einstein's field equations. Porém apesar de a solução contribuir com um grande prestígio para a Teoria da Relatividade Geral ela é apenas uma parte e não o todo. But despite the solution contributes great prestige to the General Theory of Relativity, it is only part and not a whole.

**KEYWORDS:** Gravity; Schwarzschild metric; light deflection.

## SUMÁRIO

|                                                                        |           |
|------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1 INTRODUÇÃO.....</b>                                               | <b>8</b>  |
| <b>2 BASES DA RELATIVIDADE GERAL.....</b>                              | <b>10</b> |
| 2.1 OS PRINCÍPIOS.....                                                 | 10        |
| 2.1.1 Princípio da Equivalência.....                                   | 10        |
| 2.1.2 Princípio da Covariância.....                                    | 12        |
| 2.1.3 Princípio da Correspondência.....                                | 13        |
| 2.2 FORÇAS GRAVITACIONAIS.....                                         | 13        |
| 2.3 CONEXÃO AFIM E O TENSOR MÉTRICO.....                               | 14        |
| 2.4 DERIVADA COVARIANTE.....                                           | 18        |
| 2.5 TENSOR DE RIEMANN.....                                             | 19        |
| 2.6 TENSOR E ESCALAR DE RICCI.....                                     | 21        |
| 2.7 A EQUAÇÃO DE EINSTEIN.....                                         | 21        |
| <b>3 A MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD.....</b>                               | <b>22</b> |
| 3.1 LIMITE NEWTONIANO.....                                             | 23        |
| 3.2 A MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD.....                                    | 26        |
| 3.2.1 Propriedade.....                                                 | 32        |
| <b>4 A MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD APLICADA A DEFLEXÃO DA LUZ.....</b>    | <b>34</b> |
| 4.1 RAIO DE SCHWARZSCHILD.....                                         | 35        |
| 4.2 A GEODÉSICA.....                                                   | 36        |
| 4.3 QUANTIDADES CONSERVADAS.....                                       | 37        |
| 4.3.1 Energia e Momento angular.....                                   | 38        |
| 4.4 A APLICAÇÃO DA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD NA DEFLEXÃO DA<br>LUZ..... | 40        |
| <b>5 CONCLUSÃO.....</b>                                                | <b>48</b> |
| <b>REFERÊNCIAS .....</b>                                               | <b>50</b> |
| <b>APÊNDICE – Deduções.....</b>                                        | <b>51</b> |

## 1 INTRODUÇÃO

A Teoria da Relatividade Geral é uma Teoria da Gravidade e também uma generalização da Relatividade Restrita. A gravidade é que molda o universo, determinando a geometria do espaço e do tempo. Através de milhares de anos de história humana a explicação da gravitação teve a crença aristotélica de que os objetos tinham um lugar natural no universo centrado na Terra. Mais tarde, a ideia de Newton da gravidade ser uma força. Então surgiu a concepção de Einstein que a gravidade era uma manifestação de curvatura do espaço-tempo.<sup>1</sup>

Em 1911, Einstein divulgou o valor do desvio da luz de uma estrela que passasse pela superfície do Sol, cuja estimativa foi calculado através de suas equações que constam na Teoria da Gravitação. Este resultado foi calculado por Johann Georg Von Söldner utilizando a Teoria Newtoniana a mais de cem anos antes. A primeira proposta de experimento para verificar a Teoria de Einstein era que a intensidade do desvio poderia ser medido durante um eclipse solar.<sup>2</sup>

Em 1912, vieram ao sudeste do Brasil vários astrônomos com o objetivo de verificar a modificação da posição relativa das estrelas, mas com mau tempo as observações não tiveram sucesso.<sup>2</sup>

Em 1915, Einstein comunicou a versão final da Teoria da Relatividade Geral com suas equações de campo para a deflexão da luz no valor de 1,75 segundos de arco, corrigindo a estimativa da deflexão da luz em duas vezes o resultado que obteve em 1911.<sup>2</sup>

Em 1919, foram organizadas duas expedições pelo Comitê Conjunto Permanente de Eclipses (Joint Permanent Eclipse Committee), uma expedição foi liderada pelo Astrofísico britânico Arthur Eddington, na Ilha do Príncipe na África e a outra expedição foi liderada pelo Físico britânico Andrew Claude de la Cherois Crommelin, na cidade de Sobral no nordeste brasileiro. O objetivo era obter fotografias do mesmo campo visual do eclipse e outras regiões, para a medição da variação na posição aparente das estrelas. O mau tempo tanto prejudicou as imagens obtidas na Ilha do Príncipe como também em Sobral. Porém, algumas das imagens obtidas em Sobral foram consideradas muito boas.<sup>2</sup> As imagens obtidas em Sobral foram analisadas e inicialmente estavam entre o valor newtoniano e o valor publicada por Einstein; no entanto no decorrer dos estudos, as correções das distorções causadas pelos efeitos da refração e da aberração resultou em maior concordância com os cálculos de Einstein. E assim, neste mesmo ano a conclusão geral escrita no artigo científico

foi que os resultados das expedições deixaram poucas dúvidas de que o desvio da luz ocorreu na vizinhança do sol e que a quantidade de desvio atribuído pela Relatividade Geral de Einstein era de fato ao campo gravitacional da estrela.<sup>9</sup>

Em anos seguintes, eclipses do Sol ocorreram e as medidas da deflexão da luz foram mais precisas e concordaram com as previsões da Teoria da Relatividade Geral. No entanto, saltos qualitativos na precisão das medições do desvio da radiação eletromagnética pelo campo gravitacional do Sol veio com técnica na medição da mudança nas ondas de rádio quando estão próximas do disco solar.<sup>2</sup>

Assim, o desenvolvimento do estudo da deflexão da luz por um corpo massivo nos remete a um conceito que as leis da física devem ser invariantes sob transformações. A consistência deve ser esperada em relação às previsões bem-sucedidas das teorias anteriores. É necessário um sistema de coordenadas cuja a equação de movimento seja um quadrivetor, pois formam quantidades escalares invariantes que não mudam de um referencial para o outro, e se transformam da mesma maneira entre referenciais, conforme a matriz de transformação que relaciona estes referenciais.

Nota-se que deflexão ocorre por um espaço que não é plano e a geometria Riemanniana tem uma grande importância. Com isto, como uma simples aplicação da equação de Einstein, a solução de Schwarzschild em uma região vazia em torno de um corpo massivo não rotativo e esfericamente simétrico determina caminhos geodésicos, cujo comportamento de pulsos de luz ou mesmo corpos massivos podem ser discutidos.

Com isto, a solução de Schwarzschild é a primeira solução exata da equação de campos de Einstein e até hoje a mais importante solução pela sua vasta aplicabilidade.

## 2 BASES DA RELATIVIDADE GERAL

### 2.1 OS PRINCÍPIOS

Os estudos dos fenômenos naturais são uma tarefa complexa. Baseiam-se em teorias, observações e experimentações de um processo que envolve o método científico. Esta busca de princípios fundamentais envolve a observação e experimentação, a abstração e indução, as leis e as teorias físicas, e o domínio de validade.<sup>4</sup> Albert Einstein estava motivado em busca por três princípios básicos: o Princípio da Equivalência, o Princípio da Covariância e o Princípio da Correspondência.<sup>1</sup>

#### 2.1.1 Princípio da Equivalência

Em 1907, com o entendimento inesperado que descreveu mais tarde como “Esse foi o pensamento mais feliz da minha vida”, Einstein percebeu que um indivíduo caindo livremente de uma certa altura de forma acelerada na presença de um campo gravitacional seria equivalente a um indivíduo vagando com velocidade constante livre de ação de forças gravitacionais. Essa ideia ligando a gravitação e a aceleração deu início à inclusão da gravitação à teoria da Relatividade, mostrando-lhe que uma teoria do movimento relativo geral incluía as acelerações, bem como movimentos relativos uniformes poderiam ser casos particulares de uma teoria da gravitação. Essa ideia formalizaria mais tarde como o princípio da equivalência, cujo aspecto foi a igualdade da massa gravitacional e inercial.

A mecânica newtoniana envolve dois conceitos diferentes de massa. A massa inercial  $m$ , descreve a resistência de uma partícula quando acelerada por uma força. Esta massa é definida, de acordo com a segunda Lei de Newton, na razão entre a magnitude da força sobre esta partícula e o módulo da aceleração que ela produzirá,  $m = \frac{|F|}{|a|}$ .

A massa gravitacional  $\mu$ , determina a força que uma dada partícula experimenta ou exerce sobre outra partícula como resultado da gravidade. A massa gravitacional é definida pela Lei da gravitação de Newton,  $|F| = G \frac{\mu_1 \mu_2}{d^2}$ , isto é, o módulo da força de atração mútua que duas partículas ou corpos sofrem é proporcional às suas massas  $\mu_1$  e  $\mu_2$  e inversamente proporcional ao quadrado da distância  $d$  que as separa.

A razão  $\mu/m$ , massa gravitacional e massa inercial, possui uma precisão de pelo menos,  $1/10^{11}$ . Na mecânica newtoniana é uma coincidência extraordinária, no entanto para Einstein

era algo que deveria ter uma explicação fundamental. A aceitação desta razão significa que a massa é uma constante e podemos escolher unidades de medidas iguais de modo que  $\mu/m = 1$ . Por isso, podemos ignorar a distinção entre a massa gravitacional e a massa inercial para todos os propósitos práticos.

Situações em queda livre são situações localmente inerciais. Na Física newtoniana, a igualdade da massa inercial e gravitacional implica que a aceleração de qualquer corpo devido a força gravitacional é independente da massa do corpo. Portanto, esse resultado nos leva ao experimento de pensamento, no qual é suposto que um elevador sem atrito e não rotativo está caindo livremente. A aceleração do elevador é independente de sua massa. A consequência é que para um observador dentro do elevador, um objeto que é liberado do repouso permaneceria estático. Para este observador, o objeto estaria livre de qualquer força e continuaria seu estado de repouso. E se este observador, exercesse força sobre este objeto, ele se moveria de acordo com as Leis de Newton. Então, do ponto de vista do observador do elevador em queda livre, um referencial fixo no elevador é um referencial inercial. Esta situação é referencial inercial local, devido a ser necessário que nossas medidas para regiões no espaço e intervalos de tempos seja restrita o suficiente para que não observemos desvios de comportamentos inerciais, pois o campo gravitacional no qual o elevador e seu conteúdo estão localizados não é uniforme. Dois objetos que forem lançados simultaneamente na mesma altura e em lados opostos do elevador cairão cada um em uma direção rumo ao centro da Terra. Isto é, cairão de fato ao longo de caminhos convergentes e gradualmente aproximar-se-ão um do outro.

Esses efeitos geralmente são pequenos, mas se os experimentos fossem realizados com precisão e um intervalo de tempo apreciável dentro do elevador em queda livre, os efeitos poderiam ser observáveis. Einstein, formalmente lançou a ideia de que localmente não se pode distinguir entre a gravidade e aceleração.

O conceito do princípio de equivalência é que dentro de uma região localizada do espaço-tempo adjacente a uma concentração de massa, não se pode distinguir qualquer experimento do movimento de corpos dentro de uma apropriada região de aceleração uniforme.

O princípio da equivalência está sujeito a muitos testes experimentais. Vários testes de alta precisão foram realizados ao longo de anos.

Na Tabela 1, será apresentado alguns resultados destes experimentos.

Tabela 1-Testes de afastamento da equivalência das massas gravitacional e inercial.

| Nome                  | Ano  | Experimento                                             | Resultado             |
|-----------------------|------|---------------------------------------------------------|-----------------------|
| Loránd Eötvös         | 1908 | Balança de torção.                                      | $10^{-9}$             |
| Roll, Krotkov e Dicke | 1964 | Escala de torção, com massas de alumínio e ouro.        | $10^{-11}$            |
| David Scott           | 1971 | Jogou um martelo e uma pena na Lua.                     | Não houve afastamento |
| Branginsky e Panov    | 1971 | Escala de torção, com massas de alumínio e platina.     | $10^{-12}$            |
| Grupo Eöt-Wash        | 1987 | Escala de torção com vários materiais.                  | $10^{-12}$            |
| MICROSCOPE            | 2016 | Acelerômetro colocado em órbita sincronizado com o Sol. | $10^{-13}$            |

Fonte: Wikipédia (2022).<sup>10</sup>

De maneira geral, o princípio de equivalência fez com que Einstein previsse dois novos efeitos que eventualmente se tornariam parte da Relatividade Geral.

O primeiro, considere um feixe de luz que viaja horizontalmente. Este feixe entra pela janela e atravessa o interior de um foguete que está acelerado verticalmente para cima em um ângulo reto com o feixe de luz. Do ponto de vista de um observador no foguete a luz se curva para baixo. A equivalência local levou Einstein a prever que um efeito da gravitação seria a deflexão dos raios luminosos em direção ao centro de concentrações de massa.

O segundo seria que este mesmo observador, cujo foguete está com uma aceleração ascendente, registraria em um detector localizado no piso a luz emitida do teto desviada para o vermelho, isto é, a frequência seria diminuída. Assim, levaria Einstein a prever que a luz emitida por uma concentração de massa teria a frequência de seu comprimento de onda aumentado, devido à força gravitacional, desviando a luz para o vermelho.

Com a ideia de que localmente um observador em queda livre era equivalente a um observador inercial, veio a questão das transformações de coordenadas, assim mostrando que na Relatividade Geral essas transformações deveriam ser diferentes das transformações existentes da Relatividade Especial.

### 2.1.2 Princípio da Covariância

O princípio da covariância amplia o princípio da equivalência exigindo que exista a equivalência física de todas as situações, inclusive as não inerciais.

As leis da Física devem ter a mesma forma em todos os referenciais inerciais. Isto implica que as Leis da Física devem ser invariantes de forma sob as transformações de Lorentz. A força gravitacional newtoniana não pode ser descrita como parte de um quadri vetor, porque ela obedece a transformações de Galileu.

O princípio da covariância mantém as Leis Física invariante sob a covariância geral de transformações de coordenadas. As Leis devem ser expressas em termos de objetos matemáticos chamados de tensores.

Tensores são objetos matemáticos multicomponentes que generalizam a noção de vetores que estão associados a um conjunto de operações matemáticas, tais como: adição, subtração, multiplicação e contração.

### 2.1.3 Princípio da Correspondência

Para a Relatividade Geral, a consistência deve ser esperada com a Relatividade Especial e a teoria newtoniana da gravitação. O princípio da Correspondência afirma que uma nova teoria deve explicar as previsões bem-sucedidas das teorias anteriores.

Um dos requisitos é garantido pelo uso de um espaço-tempo que é localmente equivalente ao espaço-tempo de Minkowski, fornecendo as equações tensoriais adequadas na formulação da Relatividade e assim conter a correspondência na ideia que estará baseada em um campo gravitacional.

## 2.2 FORÇAS GRAVITACIONAIS

Vamos descrever nosso sistema de coordenadas como sendo  $x''$ , para uma coordenada inercial cartesiana e  $\xi''$ , para um sistema de coordenada em queda livre, com aceleração  $\mathbf{g}$  em direção e em relação a  $x''$ . As Leis da Relatividade Restrita valem para o referencial  $\xi''$ , que está se movendo apenas por forças gravitacionais.<sup>3</sup>

O Princípio de Equivalência faz com que o sistema de coordenadas em queda livre tenha uma equação de movimento que em linha reta no espaço-tempo sua aceleração seja um quadrivetor(4-vetor) aceleração igual a zero. O  $d\tau$  se refere ao tempo próprio:<sup>3</sup>

$$d\tau^2 = \pm \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta,$$

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} = 0. \quad (2.2.1)$$

O sistema de coordenadas  $x^\mu$  pode ser curvilínea, acelerada, rotativa ou qualquer outra. O sistema de coordenadas  $\xi^\alpha$  pode ser escrita em função de  $x^\mu$ , obtendo assim com a equação (2.2.1):<sup>3</sup>

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{d \xi^\alpha}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = 0. \quad (2.2.2)$$

O fator  $\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}$  é uma matriz de transformação entre os referenciais inerciais e não inerciais semelhante com a matriz de transformação de Lorentz no tensor métrico de Minkowski.<sup>3</sup>

A derivada em relação ao tempo próprio vai agir nos dois termos (Vide apêndice):<sup>3</sup>

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0. \quad (2.2.3)$$

Multiplicando a equação (2.2.3) pela transformação inversa  $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$  e usando a seguinte propriedade  $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\lambda$ . O resultado será:<sup>3</sup>

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (2.2.4)$$

### 2.3 CONEXÃO AFIM E O TENSOR MÉTRICO

Todas as formas pelas quais a curvatura se manifesta depende de algo chamado conexão. A conexão Afim(símbolo de Christoffel) é um objeto de 64 componentes que relaciona vetores nos espaços tangentes de pontos próximos. Vamos utilizar esta conexão para escrever de forma simplificada a equação (2.2.4):<sup>3</sup>

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (2.3.1)$$

onde definimos:<sup>3</sup>

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}}. \quad (2.3.2)$$

A equação (2.3.1) é a equação de movimento de uma partícula em um referencial generalizado  $x$ . Se  $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$  obtém-se  $\frac{d^2 x^{\lambda}}{d\tau^2} = 0$ , equivalendo a  $x^{\mu}$  e a  $\xi^{\mu}$  que representa o referencial particular onde não há aceleração.<sup>3</sup>

Para calcular todas as componentes da Conexão Afim e resolver a equação diferencial (2.3.1) que está escrita em função dos dois sistemas de coordenadas  $x$  e  $\xi$ , precisamos conhecer qual é a transformação entre  $x$  e  $\xi$ , que pode não ser trivial obter esta relação. Contudo, podemos reescrever essa quantidade de forma independente do sistema de coordenadas, utilizando o tensor métrico que é um outro objeto que carrega as informações da transformação entre os sistemas de coordenadas.<sup>3</sup>

O tensor métrico de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  é o referente na Relatividade Restrita. Vamos então denotar um tensor métrico, válido em  $x^{\mu}$ , por  $g_{\mu\nu}$ . Através do invariante  $ds^2$ , vamos relacionar  $\eta_{\mu\nu}$  e  $g_{\mu\nu}$ .<sup>3</sup>

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^{\alpha} d\xi^{\beta} = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \quad (2.3.3-A)$$

Seja:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} dx^{\mu} dx^{\nu}. \quad (2.3.3-B)$$

No espaço-tempo de 4-dimensões a generalização é  $dx^{\alpha}$ , tal que o elemento  $dx^0 \equiv cdt$ . O diferencial  $dx^{\alpha}$  se transforma como um 4-vetor contravariante:

$$dx^{\alpha} \rightarrow dx'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} dx^{\beta} \quad \text{para escrever } d\xi^{\alpha} \text{ e } d\xi^{\beta}. \text{ Comparando com as equações (2.3.3-A) e}$$

(2.3.3-B), o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  é definido por:<sup>3</sup>

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\beta}. \quad (2.3.4)$$

Da mesma forma que na relatividade restrita temos uma relação entre o tensor métrico de Minkowski e a matriz de transformação de Lorentz,  $\eta'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \eta^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \eta^{\alpha\beta}$  encontramos aqui uma relação entre o tensor métrico geral  $g_{\mu\nu}$  e a matriz de transformações gerais de coordenadas  $\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}$ . Esta relação, por sua vez, define a Conexão Afim através da equação (2.3.2).<sup>3</sup>

A Conexão Afim e o tensor métrico generalizado podem ser escritos em termos das transformações entre os sistemas de coordenadas  $\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}$ . Assim sendo deve existir uma relação direta entre  $g_{\mu\nu}$  e  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ , sem a necessidade de precisarmos conhecer explicitamente  $\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}$ .<sup>3</sup>

Fazendo a derivação do tensor métrico (2.3.4), vamos então obter essa relação direta em relação a  $x^\lambda$ :<sup>3</sup>

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}, \quad (2.3.5)$$

utilizando a relação  $\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \Gamma^\kappa_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\kappa}$  obtemos:<sup>3</sup>

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \eta_{\alpha\beta}. \quad (2.3.6)$$

Finalmente, utilizando a relação (2.3.4), obtemos:<sup>3</sup>

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} + \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} g_{\kappa\mu}. \quad (2.3.7)$$

Esta expressão relaciona a Conexão Afim com a métrica  $g_{\mu\nu}$ . Entretanto se isolarmos a Conexão Afim e adicionarmos a equação acima à mesma equação com  $\mu$  e  $\lambda$  trocados e subtraídos da mesma equação com  $\nu$  e  $\lambda$ , também trocados:<sup>3</sup>

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = g_{\kappa\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa + g_{\kappa\mu} \Gamma_{\lambda\nu}^\kappa + g_{\kappa\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa + g_{\kappa\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\kappa - g_{\kappa\lambda} \Gamma_{\nu\mu}^\kappa - g_{\kappa\mu} \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa. \quad (2.3.8)$$

Com a definição de  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  em (2.3.1) e notando que a Conexão Afim é simétrica pela troca dos índices covariantes  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ , resultará em:<sup>3</sup>

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = 2 g_{\kappa\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa. \quad (2.3.9)$$

Por fim, se existir uma matriz inversa de  $g_{\nu\sigma}$  e estar de acordo com a convenção do somatório  $\eta^{\beta\delta} \eta_{\alpha\delta} = \delta_\alpha^\beta$ , como se fosse uma matriz que representa  $\eta^{\beta\gamma}$  que é numericamente igual a  $\eta_{\beta\gamma}$ , como analogia a métrica de Minkowski, então:<sup>3</sup>

$$g^{\nu\sigma} g_{\kappa\nu} = \delta_\kappa^\sigma, \quad (2.3.10)$$

multiplicando a equação (2.3.10), por  $g^{\nu\sigma}$ , obteremos:<sup>3</sup>

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right). \quad (2.3.11)$$

Uma consequência importante dessa definição da Conexão Afim em termos do tensor métrico e que recuperamos o caso particular  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$ , se fizermos  $g_{\mu\nu}$  igual  $\eta_{\mu\nu}$  e a equação (2.3.1) se torna (2.2.1) como esperado. Assim não precisamos conhecer a transformação geral de coordenadas  $\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}$ , conhecendo a métrica  $g^{\mu\nu}$  específica para um determinado sistema físico, podemos conhecer a Conexão Afim.<sup>3</sup>

## 2.4 DERIVADA COVARIANTE

Definir a derivada de uma função envolve avaliar a função em algum ponto. Em um espaço plano isso não apresenta nenhum problema particular. E, nem é complicado em um espaço curvo enquanto estamos considerando apenas funções. Porém, isto acaba sendo mais complicado na Relatividade Geral. E ainda, transportar um tensor  $V^\nu$ , requer alguns cuidados, pois o transporte paralelo envolve coeficientes de conexão da equação (2.3.11).<sup>1</sup>

A regra de transformação para um vetor contravariante  $V^\mu$ , sob uma transformação de coordenadas  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$  considerando uma transformação geral qualquer, é análoga da transformação do referencial inercial para um referencial não inercial.<sup>1</sup>

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu \quad (2.4.1)$$

Quando se faz uma derivada no espaço-tempo plano, onde a curvatura é nula, basta a matriz de transformação de Lorentz  $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$ , para realizar a derivação de forma correta. Mas no espaço-tempo curvo, a derivada precisa ser corrigida naquele ponto do espaço-tempo com o intuito de adicionar a curvatura.

Porém, quando se aplica a derivada em um tensor o resultado da transformação não se transforma como um tensor (vide apêndice):<sup>3</sup>

$$\frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} V^\nu + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} \quad (2.4.2)$$

Contudo, se utilizarmos a derivada usual e o objeto geométrico que conecta espaços tangentes próximos, isto é a conexão Afim, obteremos a correta transformação de coordenadas para a nova definição de derivada (vide apêndice):<sup>3</sup>

$$\frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\lambda} + \Gamma'^\mu_{\delta\lambda} V'^\delta = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \left( \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} + \Gamma^\nu_{\delta\rho} V^\delta \right). \quad (2.4.3)$$

Este objeto é chamado de **Derivada Covariante**, que é formalmente definida por:<sup>3</sup>

$$\nabla_{\mu} \equiv \partial_{\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma} = \partial_{\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}. \quad (2.4.4)$$

Por exemplo, se aplicarmos em um vetor  $V^{\alpha}$ , os índices devem ser aplicados corretamente devido claramente a esta formalidade:<sup>3</sup>

$$\nabla_{\mu} V^{\alpha} \equiv \partial_{\mu} V^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} V^{\sigma} \quad (2.4.5)$$

De acordo com o princípio da covariância, as leis da física devem assumir a mesma forma em todos os referenciais. Na prática isso significa que eles devem ser expressos como relações tensoriais covariantes sob transformações gerais de coordenadas. Operações algébricas legítimas envolvendo tensores incluem adição e subtração (desde que os tipos sejam idênticos), multiplicação e contração. A derivada parcial de um tensor geralmente não produz outro tensor, mas o processo de derivação covariante sim. Isso pode ser aplicado a um tensor de qualquer ordem.<sup>1</sup>

Quando agimos em um tensor de segunda ordem com índices contravariantes ou covariantes, devemos ter um termo de Conexão Afim para cada índice, ou seja:<sup>1</sup>

$$\nabla_{\mu} T^{\alpha\beta} \equiv \partial_{\mu} T^{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} T^{\sigma\beta} + \Gamma^{\beta}_{\sigma\mu} T^{\alpha\sigma}, \quad (2.4.6)$$

$$\nabla_{\mu} T_{\alpha\beta} \equiv \partial_{\mu} T_{\alpha\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\mu} T_{\sigma\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\mu} T_{\alpha\sigma}. \quad (2.4.7)$$

## 2.5 TENSOR DE RIEMANN

Em uma variedade de Riemann n-dimensional, considere uma métrica  $g_{\sigma\nu}$  que pode ser usada para determinar os coeficientes de conexão do espaço  $\Gamma^{\sigma}_{\nu\kappa}$  ( $\sigma = 1, \dots, n$ ). Suponha que temos um vetor  $\mathbf{v}$  especificado em algum ponto  $\mathbf{P}$  e que transportamos em paralelo esse vetor em torno de um retângulo infinitesimal  $\mathbf{PQRS}$  com lados especificados por  $d\mathbf{x}^{\nu}$  e  $d\mathbf{x}^{\kappa}$ . Este processo é ilustrado na Figura 1, onde o transporte paralelo do vetor chega de volta a  $\mathbf{P}$  é denotado  $\mathbf{v} \parallel \mathbf{P}$  e é mostrado como sendo diferente de  $\mathbf{v}$  por causa da curvatura do espaço.

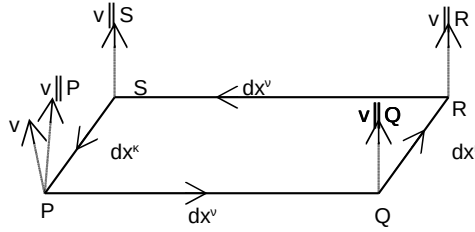
Devemos esperar a diferença entre  $\mathbf{v} \parallel \mathbf{P}$  e  $\mathbf{v}$  para ter componentes que são proporcionais ao deslocamento infinitesimal e às componentes do vetor original, então podemos escrever qualquer componente dado a diferença como:<sup>1</sup>

$$v_{\parallel P}^{\sigma} - v^{\sigma} = \sum_{\mu, \nu, \kappa} R^{\sigma}_{\mu \nu \kappa} v^{\mu} dx^{\nu} dx^{\kappa}$$

onde:

$$R^{\sigma}_{\mu \nu \kappa} \equiv \partial_{\nu} \Gamma^{\sigma}_{\mu \kappa} - \partial_{\kappa} \Gamma^{\sigma}_{\mu \nu} + \Gamma^{\sigma}_{\eta \nu} \Gamma^{\eta}_{\mu \kappa} - \Gamma^{\sigma}_{\eta \kappa} \Gamma^{\eta}_{\mu \nu}. \quad (2.5.1)$$

Figura 1-Um vetor  $\mathbf{v}$  no ponto P é transportado paralelamente em torno de um retângulo infinitesimal PQRS para produzir outro vetor  $\mathbf{v} \parallel \mathbf{P}$  no ponto P.



Fonte: Robert J.A. Lambourne (2010).

O tensor  $R^{\sigma}_{\mu \nu \kappa}$  será alguma medida da curvatura e é conhecido como o tensor de curvatura de Riemann ou tensor de Riemann. Se for um espaço plano sabemos que  $\mathbf{v} \parallel \mathbf{P} = \mathbf{v}$ , então  $R^{\sigma}_{\mu \nu \kappa} = 0$  para todas as escolhas de  $\mu, \nu, \kappa$  e  $\sigma$ . Quando o transporte paralelo é realmente realizado, teremos então a equação (2.5.1).

Sob uma transformação geral de coordenadas, a quantidade  $R^{\sigma}_{\mu \nu \kappa}$  se transforma da maneira exigida para um tensor de 4ª ordem com um índice contravariante e três índices covariantes. Finalmente temos um quantitativo para a medida de curvatura que se relaciona diretamente com a métrica, mesmo de maneira complicada é claramente uma quantidade intrínseca que não requer nenhum índice incorporado em dimensões superiores.

Em  $n$  dimensões o tensor de Riemann tem  $n^4$  componentes, dando  $4^4 = 256$  componentes em quatro dimensões. No entanto, por causa da definição da conexão equação (2.3.11) e equação (2.5.1), o tensor de Riemann tem muitas simetrias envolvendo seus índices. Por exemplo:

$$R^{\sigma}_{\mu \nu \kappa} = -R^{\sigma}_{\mu \kappa \nu}. \quad (2.5.2)$$

Essas simetrias reduzem o número de componentes independentes para 6 em espaços tridimensionais e apenas um em espaços bidimensionais. Em duas dimensões, o único componente independente pode ser relacionado a curvatura gaussiana. Do ponto de vista da geometria riemanniana esta é a explicação do teorema Egregium de Gauss<sup>5</sup>, com a sua implicação de que a teoria da curvatura gaussiana é intrínseca.

## 2.6 TENSOR E ESCALAR DE RICCI

Embora o tensor de Riemann seja fundamental para o estudo de espaços curvos, há dois tensores que se mostram muito úteis. Se contraíssemos o primeiro e terceiro índices no tensor de Riemann, utilizando o tensor métrico  $g^{\sigma\nu}$  obtemos um novo tensor de 2<sup>a</sup> ordem com componentes:

$$g^{\sigma\nu} R_{\sigma\mu\nu\kappa} = R^{\nu}_{\mu\nu\kappa} \equiv R_{\mu\kappa}, \quad (2.6.1-A)$$

$$R_{\mu\kappa} = \partial_{\sigma} \Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma} - \partial_{\kappa} \Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\eta}^{\eta} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\sigma}. \quad (2.6.1-B)$$

Este novo tensor é conhecido como tensor de Ricci. Segue da definição do tensor Riemann que o tensor Ricci é simétrico em relação à troca de seus índices, isto é,  $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$ . Além disso, a contração dos índices no tensor de Ricci, resulta:

$$R \equiv g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa}, \quad (2.6.2)$$

o escalar de curvatura ou escalar de Ricci). É importante a observação que todas essas grandezas relacionadas à curvatura são expressas em termos dos componentes do tensor métrico  $g^{\mu\kappa}$  e suas derivadas.

## 2.7 A EQUAÇÃO DE EINSTEIN

A proposta de Einstein foi que a gravidade deveria ser considerada uma manifestação da curvatura do espaço-tempo, pois a ideia newtoniana de força gravitacional não tinha

sentido na Relatividade Geral. Einstein estava procurando uma teoria geométrica da gravidade. Portanto, necessitava encontrar um objeto geométrico para relacionar com um tensor de energia momento,  $T_{\mu\kappa}$  claramente necessitava de um tensor de 2ª ordem.<sup>3</sup>

A equação (2.3.1) para um sistema de coordenadas generalizados na Relatividade Geral equivale a equação do movimento de uma partícula na mecânica clássica que é representada pela 2ª Lei de Newton. Na mecânica clássica sabemos que a 2ª Lei de Newton obtida através de uma função Lagrangeana por meio da equação de Euler-Lagrange, que por sua vez é obtida pelo princípio variacional de uma quantidade chamada Ação, definida como a integral no tempo da Lagrangeana,  $S \equiv \int L dt$ , procedimento conhecido como princípio de mínima ação.<sup>3</sup>

A equação de Einstein no vácuo é dada por relação entre o tensor de Ricci, a métrica e o escalar de Ricci. Esta quantidade e seus componentes são dados pela equação a seguir e resolver esta equação significa encontrar métricas  $g_{\mu\kappa}$  que a satisfaçam.<sup>3</sup>

$$R_{\mu\kappa} - \frac{1}{2} g_{\mu\kappa} R = 0 \quad (2.7.1)$$

A depender do caso é conveniente definir o tensor de Einstein:<sup>3</sup>

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\kappa} - \frac{1}{2} g_{\mu\kappa} R,$$

de tal forma que uma condição a ser satisfeita pelo tensor contravariante é sua conservação pela derivada covariante:  $\nabla_\mu G^{\mu\kappa} = 0$ .<sup>3</sup>

### 3 A MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

Como uma simples aplicação da equação de Einstein, a solução de Schwarzschild é o precursor natural à preparação do estudo dos buracos negros que revolucionou o pensamento da Astrofísica. Nos limitaremos a solução exterior de Schwarzschild que descreve o espaço-tempo geométrico na região vazia em torno de um corpo de massa  $M$ , não rotativo e esfericamente simétrico e sem carga.

### 3.1 LIMITE NEWTONIANO

A gravidade newtoniana é conhecida por ser válida quando os campos gravitacionais são muito fracos para produzir velocidades próximas à velocidade da luz. Em tais situações, a Relatividade Geral deve ser consistente fazendo as mesmas previsões que a gravidade newtoniana. Vamos supor que estes efeitos gravitacionais são fracos, que quaisquer movimentos são suficientemente lentos e além disso, que a gravitação newtoniana diz respeito ao movimento apenas de matéria e não radiação.<sup>3</sup>

Portanto, no limite de baixas velocidades  $\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau}$ , onde  $i=0,1,2,3$ , define às coordenadas espaciais  $x^0=ct, x^1=r, x^2=\theta$  e  $x^3=\phi$ . A desigualdade pode ser escrita como

$$\frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{dt} \frac{dt}{d\tau} \rightarrow \frac{dx^i}{dt} \ll \frac{d(ct)}{dt} \rightarrow v^i \ll c.$$

A equação de movimento de uma partícula em um sistema de coordenadas geral equação (2.3.1), tem uma relação com a Conexão Afim e que se baseia em uma métrica geral adequada para a Relatividade Geral,  $g_{\mu\nu}$ .<sup>3</sup>

Então a equação (2.3.1) é desenvolvida para:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{00} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} + \Gamma^\lambda_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} + 2\Gamma^\lambda_{0j} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} = 0, \quad (3.1.1)$$

que quando se usa o limite de baixas velocidades é aproximadamente:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{00} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} \approx 0, \quad (3.1.2)$$

podendo ser simplificada para:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + c^2 \Gamma^\lambda_{00} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \approx 0, \quad (3.1.3)$$

sendo a equivalência da 2ª Lei de Newton para baixas velocidades, na Relatividade Geral.<sup>3</sup>

Agora utilizando a equação (2.3.11) e usando a aproximação de que a métrica é estacionária, da seguinte maneira:  $\frac{\partial}{\partial x^0} g_{\alpha\beta} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} g_{\alpha\beta} \approx 0$ , vamos encontrar  $\Gamma_{00}^\lambda$ :<sup>3</sup>

$$\Gamma_{00}^\lambda = -\frac{1}{2} g^{\nu\lambda} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu}. \quad (3.1.4)$$

A suposição de que os efeitos gravitacionais são fracos nos permite supor que os coeficientes métricos são próximos aos da métrica de Minkowski, que em coordenadas esféricas será escrita da seguinte forma:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (3.1.5)$$

Vamos expandir  $g_{\mu\nu}$  no limite chamado de campo fraco:<sup>3</sup>

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad \text{tal que} \quad |\eta_{\mu\nu}| \gg |h_{\mu\nu}|. \quad (3.1.6)$$

Vamos escrever  $h_{\mu\nu}$ , da seguinte forma:<sup>3</sup>

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{30} & h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.1.7)$$

Substituídos  $\eta_{\mu\nu}$  e  $h_{\mu\nu}$ , na equação (3.1.6) e depois na equação (3.1.4) e limitar aos termos lineares em  $h_{\mu\nu}$ , teremos:<sup>3</sup>

$$\Gamma_{00}^\lambda = -\frac{1}{2} (\eta^{\nu\lambda} + h^{\nu\lambda}) \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\eta_{00} + h_{00}) \approx -\frac{1}{2} \eta^{\nu\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\nu} h_{00} + \dots \quad (3.1.8)$$

Voltando na equação (3.1.3), obtemos:<sup>3</sup>

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} - \frac{c^2}{2} \eta^{\nu\lambda} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\nu} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \approx 0. \quad (3.1.9)$$

Analisando a componente **0** da equação:<sup>3</sup>

$$\frac{d^2 x^0}{d\tau^2} \approx \frac{c^2}{2} \eta^{\nu 0} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\nu} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \approx \frac{c^2}{2} \left[ \eta^{00} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^0} + \eta^{i0} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \right] \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \approx 0. \quad (3.1.10)$$

A métrica assumida é estacionária e os termos  $\eta^{i0} = 0$ . Observe a soma  $i=1,2,3$ , no segundo termo. Portanto a equação:

$$\frac{d^2 x^0}{d\tau^2} = c \frac{d^2 t}{d\tau^2} \approx 0, \quad (3.1.11)$$

nos diz que  $\frac{dt}{d\tau}$  é igual a uma constante.<sup>3</sup>

Analisando a componente  $i=1,2,3$  da equação:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} \approx \frac{c^2}{2} \eta^{\nu i} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\nu} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \approx \frac{c^2}{2} \left[ \eta^{0i} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^0} + \eta^{ji} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^j} \right] \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2, \quad (3.1.12)$$

O primeiro termo do lado direito é nulo. Observe que a soma em  $j=1,2,3$  no segundo termo, e o fato de que  $\eta^{ij} = -1$  se  $i=j$  e zero se  $i \neq j$ . O lado esquerdo pode ser

simplificado usando  $\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\tau}$ , e portanto  $\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{d^2 x^i}{dt^2} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2$ .<sup>3</sup>

Assim a equação (3.1.12) se simplifica para:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{c^2}{2} \left[ \eta^{1i} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^1} + \eta^{2i} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^2} + \eta^{3i} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^3} \right], \quad (3.1.13)$$

ou vetorialmente:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} \vec{\nabla} h_{00}, \quad (3.1.14)$$

onde  $\vec{r}$  é o vetor posição da partícula. Esta expressão está muito próxima da lei de gravitação newtoniana, escrita na forma:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla} U, \quad (3.1.15)$$

onde  $U$  é a energia potencial gravitacional:

$$U = -\frac{GMm}{r}, \quad (3.1.16)$$

$$\text{portanto: } \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \Phi, \quad \Phi = -\frac{GM}{r}, \quad (3.1.17)$$

e  $\Phi$  é o potencial escalar gravitacional.<sup>3</sup>

Comparando a equação (3.1.17) com a equação (3.1.14) identificamos  $h_{00}$ :

$$h_{00} = \frac{-2GM}{c^2 r}, \quad (3.1.18)$$

assim obtemos a componente da métrica que reproduz o resultado newtoniano:<sup>3</sup>

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}, \quad (3.1.19)$$

### 3.2 A MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

A solução de Schwarzschild também determina caminhos geodésicos em uma região descrita por essa solução. Isso permite estudar o movimento de partículas massivas e sem massa em tal região e assim discutir o comportamento de corpos massivos e pulsos de luz que se movem apenas sob a influência da gravidade.

No entanto, a simetria da região envolvida sugere que seria sensato usar um sistema de coordenadas esféricas com origem no centro do corpo maciço, e também parece provável que a solução envolverá a massa  $M$  de alguma forma. Assim vamos nos referir às coordenadas como coordenadas de Schwarzschild e denotá-las por  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = -r$ ,  $x^2 = -\theta$  e  $x^3 = -\phi$  e fixar  $c = 1$ .

Embora as equações de Einstein sejam altamente não lineares, a razão pela qual podemos resolvê-las para uma estrela estática e esfericamente simétrica é que a simetria presente no problema restringe muito a forma da solução. Por exemplo, como a massa gravitacional é estática, os componentes métricos seriam independentes do tempo. Além disso, a simetria esférica do problema requer que os componentes da métrica podem depender apenas da coordenada radial  $r$ . Vamos relembrar que em coordenadas esféricas, o espaço-tempo plano pode ser caracterizado pelo elemento de linha:<sup>6</sup>

$$(ds)^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (3.2.1)$$

Podemos generalizar este elemento de linha para um espaço curvo estático e isotrópico, como:<sup>6</sup>

$$(ds)^2 = A(r) dt^2 - B(r) dr^2 - C(r) r^2 d\theta^2 - D(r) r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (3.2.2)$$

As seguintes suposições foram usadas para escrever o elemento de linha desta forma. Em primeiro lugar, uma vez que os componentes métricos são independentes do tempo, o elemento de linha deve ser invariável se deixarmos  $dt \rightarrow -dt$ , isto implica que termos lineares em  $dt$  não podem ocorrer. A isotropia também diz que se deixarmos  $d\theta \rightarrow -d\theta$  ou  $d\phi \rightarrow -d\phi$ , o elemento de linha deve ser invariante. Assim, termos da forma “ $drd\theta$ ”, “ $drd\phi$ ” ou “ $d\theta d\phi$ ” não podem ocorrer. Isso restringe a forma da métrica a ser diagonal, como descrita na equação (3.2.2).<sup>6</sup>

Vejamos agora o elemento de linha (3.2.2) num tempo fixo ( $dt=0$ ) e um raio fixo ( $dr=0$ ), fixando ( $d\phi=0$ ) e com  $\varepsilon = r d\theta$ , teremos:<sup>6</sup>

$$(ds)^2 = -C(r) \varepsilon^2. \quad (3.2.3)$$

Por outro lado, se olharmos para o elemento de linha na mesma fatia do espaço-tempo, mas fixando ( $\theta = \pi/2$ ) e com  $\varepsilon = r d\phi$ , então:<sup>6</sup>

$$(ds)^2 = -D(r) \varepsilon^2. \quad (3.2.4)$$

No entanto, se o espaço é isotrópico, esses dois comprimentos devem ser iguais, assim exigindo que:<sup>6</sup>

$$C(r) = D(r). \quad (3.2.5)$$

Assim voltando a equação (3.2.2), podemos escrever o elemento de linha como:<sup>6</sup>

$$(ds)^2 = A(r) dt^2 - B(r) dr^2 - C(r) r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.2.6)$$

Usando  $\dot{C} = \frac{dC(r)}{dr}$ , podemos notar, que a função “C(r)” em (3.2.6) pode tomar a seguinte forma:<sup>6</sup>

$$\tilde{r}^2 = [C(r)] r^2, \quad (3.2.7)$$

$$d\tilde{r} = \left[ (C(r))^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \frac{r \dot{C}(r)}{(C(r))^{\frac{3}{2}}} \right] dr, \quad (3.2.8)$$

e, também, obteremos o seguinte:<sup>6</sup>

$$dr = f(\tilde{r}) d\tilde{r}. \quad (3.2.9)$$

Assim, com a equação (3.2.8), podemos obter:<sup>6</sup>

$$f(\tilde{r}) = \frac{2(C(r))^{\frac{1}{2}}}{2(C(r)) + r \dot{C}(r)}, \quad (3.2.10)$$

e substituindo na equação (3.2.9), teremos as seguintes definições para a equação (3.2.6):<sup>6</sup>

$$A(r) = \tilde{A}(\tilde{r}), \quad B(r) dr^2 = \tilde{B}(\tilde{r}) d\tilde{r}^2, \quad C(r) r^2 = \tilde{r}^2, \quad (3.2.11)$$

e assim, escrevemos para o elemento de linha:<sup>6</sup>

$$(ds)^2 = \tilde{A}(\tilde{r}) dt^2 - \tilde{B}(\tilde{r}) d\tilde{r}^2 - \tilde{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.2.12)$$

Isto denota que com uma escolha adequada do sistema de coordenadas, o elemento de linha para um campo gravitacional estático e esfericamente simétrico pode ser escrito como elemento de linha de Schwarzschild generalizado.<sup>6</sup>

$$(ds)^2 = A(r) dt^2 - B(r) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.2.13)$$

Birkhoff demonstrou que a exigência de uma força gravitacional estática é supérfluo para o elemento de linha Schwarzschild. Na verdade, ele mostrou que mesmo quando uma estrela esfericamente simétrica ou uma massa gravitacional está passando por um movimento radial, o elemento de linha pode ser escrito na forma de elemento de linha de Schwarzschild generalizado.<sup>6</sup>

Agora a equação (3.2.13) é dada em termos de duas funções desconhecidas  $A(r)$  e  $B(r)$  e assim os componentes métricos da diagonal podem ser escritas como:<sup>6</sup>

$$g_{00}=g_{tt}=A(r), \quad (3.2.14-A)$$

$$g_{11}=g_{rr}=-B(r), \quad (3.2.14-B)$$

$$g_{22}=g_{\theta\theta}=-r^2, \quad (3.2.14-C)$$

$$g_{33}=g_{\phi\phi}=-r^2 \sin^2 \theta. \quad (3.2.14-D)$$

Para determinar as formas das funções  $A(r)$  e  $B(r)$  podemos resolver a equação (2.7.1) calculando as conexões e o tensor de curvatura para o vácuo.<sup>6</sup>

Com a equação (2.3.11), podemos calcular os componentes não triviais da conexão Afim, com as seguintes simplificações:  $\dot{A}=\frac{dA(r)}{dr}$  e  $\dot{B}=\frac{dB(r)}{dr}$ .<sup>6</sup>

Para  $\sigma=0$  :

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2} \frac{\dot{A}(r)}{A(r)} = \Gamma_{10}^0, \quad (3.2.15)$$

para  $\sigma=1$  :

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} \frac{\dot{A}}{B}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \frac{\dot{B}}{B}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{r}{B}, & \Gamma_{33}^1 &= -\frac{r \sin^2 \theta}{B}, \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

para  $\sigma=2$  :

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \quad (3.2.17)$$

Agora podemos obter o tensor de Ricci, a partir das conexões Afins e utilizando a equação (2.6.1). Desta forma, obteremos o seguinte (vide apêndice):<sup>6</sup>

$$R_{00} = \frac{\ddot{A}}{2B} - \frac{1}{4} \frac{\dot{A}\dot{B}}{B^2} - \frac{1}{4} \frac{\dot{A}^2}{AB} + \frac{\dot{A}}{rB} = 0, \quad (3.2.18)$$

$$R_{11} = -\frac{\ddot{A}}{2A} + \frac{1}{4} \frac{\dot{A}^2}{A^2} + \frac{1}{4} \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}}{rB} = 0, \quad (3.2.19)$$

$$R_{22} = 1 - \frac{1}{B} - \frac{r}{2B} \left( \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right), \quad (3.2.20)$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta R_{22}, \quad (3.2.21)$$

sendo as demais componentes nulas.<sup>6</sup>

Multiplicando a equação (3.2.18), por  $\frac{B}{A}$  e somando a equação (3.2.19), obteremos:

$$\frac{\dot{A}}{A} = -\frac{\dot{B}}{B}, \quad AB = \text{Constante} = k. \quad (3.2.22)$$

A continuidade dos cálculos será impor condições de contorno para grandes distâncias, dá seguinte forma:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) \rightarrow 1,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} B(r) \rightarrow 1. \quad (3.2.23)$$

Com isto, determinamos a constante de integração  $k=1$  na equação (3.2.22) e assim:

$$A(r)B(r) = 1,$$

$$B(r) = \frac{1}{A(r)}, \quad (3.2.24)$$

e agora substituindo a relação na equação (3.2.20), vamos obter:

$$A(r) + \frac{rA}{2} \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{A}}{A} \right) - 1 = 0,$$

$$A(r) + r \dot{A}(r) = 1,$$

$$\frac{d(rA(r))}{dr} = 1,$$

com a seguinte solução:

$$rA(r) = r + \text{Constante} = r + m. \quad (3.2.25)$$

Portanto, podemos identificar que:

$$A(r) = 1 + \frac{m}{r}, \quad (3.2.26)$$

$$B(r) = \frac{1}{A(r)} = \left(1 + \frac{m}{r}\right)^{-1}. \quad (3.2.27)$$

Assim a equação (3.2.13), pode ser escrita da seguinte forma:<sup>6</sup>

$$(ds)^2 = \left(1 + \frac{m}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.2.28)$$

Para chegar a consistência dos resultados, usamos o limite newtoniano para relacionar o raio de Schwarzschild e uma massa  $M$  de um corpo esférico, simétrico e centrado na origem,  $g_{00} = 1 + h_{00} = 1 - \frac{2\Phi}{c^2}$  (onde  $\Phi$  é o potencial gravitacional newtoniano). Observa-se que o potencial gravitacional newtoniano fora do corpo em uma distância  $r$  é  $\Phi = -\frac{GM}{r}$ . Assim, no limite newtoniano,  $g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}$ , podemos identificar como é a constante  $m$  da equação (3.2.28), e assim observar que o valor do raio de Schwarzschild é de  $R_s = \frac{2GM}{c^2}$ .<sup>6</sup>

E, por fim, obtêm-se o elemento de linha de Schwarzschild:

$$(ds)^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.2.29)$$

Por fim, a consequência é que a solução de Schwarzschild pode ser representada por uma matriz diagonal, da seguinte forma:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2GM}{c^2 r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (3.2.30)$$

### 3.2.1 Propriedade

Uma propriedade básica é a geometria esférica. Para qualquer valor particular do tempo com um raio fixo  $r$ ,  $dt=0$  e  $dr=0$ , a equação (3.2.1) torna-se:<sup>7</sup>

$$(ds)^2 = -R^2(d\theta)^2 - R^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2. \quad (3.2.1.1)$$

Desta forma, descreve uma geometria bidimensional na superfície de uma esfera de raio  $R$ . Do ponto de vista físico nenhum ponto nesta superfície esférica é mais especial do que qualquer outro ponto. O fato de que o valor de  $\phi$  não aparece em nenhum dos coeficientes métricos fica claro que ele não é privilegiado. No entanto, o mesmo não é verdade para  $\theta$ , que aparece no coeficiente métrico que multiplica  $(d\phi)^2$ . Isso faz parecer que pode haver algo especial sobre certos valores de  $\theta$ .<sup>7</sup>

A razão pela qual  $\theta$  é escolhido desta forma não tem nada a ver com a gravitação de um corpo esfericamente simétrico e sim devido à forma como definimos em coordenadas esféricas. Quando usamos tais coordenadas temos que escolher alguma direção radial para ser o eixo polar. Essa direção é atribuída especialmente ao valor da coordenada. Mesmo no caso de um corpo estático e esfericamente simétrico, não há nada fisicamente especial na direção escolhida para desempenhar esse papel. Qualquer outra direção a partir da origem poderia facilmente ter sido escolhido como eixo polar.<sup>7</sup>

É sempre importante distinguir entre efeitos físicos reais e efeitos não físicos produzido apenas pelo sistema de coordenadas. A necessidade dessa distinção é clara, nem sempre é fácil dizer se a equação é resultado de características das coordenadas ou da gravitação.<sup>7</sup>

A solução de Schwarzschild é esfericamente simétrica em qualquer valor do tempo  $t$ , todos pontos com o mesmo valor de  $r$  são fisicamente equivalentes. O espaço-tempo tem as mesmas simetrias que uma esfera, então é dito ser invariante sob rotações sobre a origem. É claro que isso não significa que pontos com diferentes valores de  $r$  sejam fisicamente equivalentes. De fato, já vimos que no limite newtoniano, pontos em diferentes valores de  $r$  corresponderão a diferentes valores da força gravitacional. Além disso, um dos principais resultados da derivação foi que os coeficientes da métrica no elemento de linha Schwarzschild contêm termos da forma  $1 - \frac{2GM}{c^2 r}$ , que são funções de  $r$ .<sup>7</sup>

No elemento de linha Schwarzschild, o fator  $1 - \frac{2GM}{c^2 r}$  aparece nos coeficientes da métrica do termo  $c^2(dt)^2$  e do termo  $(dr)^2$ . O fator é independente da direção e se aproxima de 1 quando  $r$  se torna muito grande. O significado de grande neste contexto depende do valor de  $M$ . Isto é, se  $r$  é suficientemente grande para tornar o termo  $\frac{2GM}{c^2 r}$  muito menor que 1, então  $1 - \frac{2GM}{c^2 r} \rightarrow 1$  e o elemento de linha Schwarzschild, na equação (3.2.1), torna-se o elemento de linha de Minkowski:<sup>7</sup>

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (3.2.1.2)$$

Este elemento de linha de Minkowski descreve o espaço-tempo plano da relatividade Geral em coordenadas esféricas. Esta é a forma que devemos esperar quando o elemento de linha Schwarzschild está longe a partir da origem onde os efeitos gravitacionais devido à massa do corpo esférico e simétrico serão desprezível.<sup>7</sup>

Outra propriedade é a do espaço-tempo de Schwarzschild sendo estacionário, o que implica que nenhum dos coeficientes métricos depende de  $t$ . Então, se  $t_1$  e  $t_2$  representam as coordenadas de tempo de eventos vizinhos, então  $dt = t_2 - t_1 = (t_2 + t_0) - (t_1 + t_0) = t'_2 - t'_1 = dt'$  e a métrica é invariável sob uma transformação de coordenadas da forma  $t \rightarrow t' = t + t_0$ , onde  $t_0$  é uma constante. Este aspecto específico da independência do tempo é descrito como invariância sob translação no tempo e é outra simetria da solução.<sup>7</sup>

Como já dito, para que a métrica seja estática, também é importante que o elemento de linha não contenha nenhum termo da forma  $drdt$ ,  $d\theta dt$  ou  $d\phi dt$ . Tais termos são frequentemente chamados de termos cruzados ou termos mistos e são típicos de situações que envolvem rotação. A métrica de Schwarzschild é estacionária e estática.<sup>7</sup>

Uma característica marcante da métrica de Schwarzschild é seu comportamento quando  $r$  aproxima-se do raio de Schwarzschild,  $R_s = \frac{2GM}{c^2}$ . Como  $r \rightarrow R_s$ , o fator  $(1 - \frac{R_s}{r})$  resulta o coeficiente métrico  $g_{00} \rightarrow 0$ , enquanto o fator  $(1 - \frac{R_s}{r})^{-1}$  resulta  $g_{11} \rightarrow \infty$ .<sup>7</sup>

O crescimento ilimitado deste último fator é descrito como uma singularidade na métrica de Schwarzschild. Esta singularidade particular é de fato uma consequência das coordenadas que estamos usando para descrever a solução de Schwarzschild. Ou seja, é uma singularidade de coordenada e não uma singularidade gravitacional significativa.<sup>7</sup>

Uma singularidade de coordenada pode ser removida por uma transformação apropriada da coordenada, porém não seria possível se a singularidade fosse gravitacional. Mesmo assim, esta singularidade da coordenada é uma característica da solução que descreve a coordenada de Schwarzschild indicando o significado de  $R_s$ .<sup>7</sup>

Ao considerar esta singularidade de coordenadas é importante lembrar que a solução de Schwarzschild que está sendo discutida é exterior e descreve o espaço-tempo fora de um corpo esfericamente simétrico de massa  $M$ .<sup>7</sup>

Idealizando um corpo com a massa do Sol (cerca de  $2,0 \times 10^{30}$  kg), o raio de Schwarzschild é de 3,0 km. Isso se comparado ao raio solar de cerca de 0,7 milhão de km, então no caso de um corpo normal semelhante a uma estrela, o raio de Schwarzschild está profundamente dentro do corpo.<sup>7</sup>

Outro ponto a ser observado é que a métrica de Schwarzschild também possui uma singularidade em  $r=0$ . Esta é uma singularidade gravitacional marcada pelo crescimento ilimitado de invariantes relacionados com a curvatura, e não podem ser removida por qualquer mudança de coordenadas. Esta singularidade é pouco relevante para a solução exterior, mas é bastante significativa ao estudo dos buracos negros.<sup>7</sup>

De acordo com a solução de Schwarzschild, a geometria do espaço-tempo fora de um corpo esfericamente simétrico é caracterizado por uma única quantidade  $M$ , que representa a massa total dessa distribuição.<sup>7</sup>

Este resultado é conhecido como Teorema de Birkhoff. Uma de suas implicações é que um corpo esfericamente simétrico que está se expandindo ou se contraindo em uma direção puramente radial ou mesmo pulsando radialmente, não pode produzir nenhum sinal gravitacional desse movimento radial além daquela região esférica que contém o material do próprio corpo. Portanto, para poder emitir ondas gravitacionais, uma estrela deve sofrer diferentes deformações.<sup>7</sup>

#### **4 A MÉTRICA DE SCHWARSZCHILD APLICADA A DEFLEXÃO DA LUZ**

Vamos tratar o efeito da deflexão em linha reta para os fótons, à medida que passa por um campo gravitacional.

Historicamente, este foi o primeiro efeito relativístico geral a ser previsto antes de ser observado, e sua confirmação no eclipse de 1919 fez de Einstein uma celebridade internacional. O fato de ter sido uma equipe britânica que fez as observações para confirmar

as teorias do físico alemão, acidentalmente ajudaram a aliviar a tensão pós-guerra entre as comunidades científicas dos dois países.<sup>2</sup>

Nos tempos modernos, o fenômeno da deflexão da luz tornou-se uma ferramenta chave da astronomia. Primeiro, precisamos entender como e porque a gravidade desvia a luz.

A métrica que foi obtida é bastante notável em vários aspectos, equação (3.2.29). A métrica contém apenas uma única constante de integração  $\left(\frac{-2GM}{C^2}\right)$ , implicando que a métrica no exterior de um corpo esférico é completamente independente da composição desse corpo. O campo no exterior da estrela sempre tem a forma da equação de Schwarzschild. Isso simplifica consideravelmente a interpretação física e em especial a discussão posterior sobre a deflexão da luz, porque envolve apenas o exterior da estrela.<sup>7</sup>

#### 4.1 RAIOS DE SCHWARZSCHILD

Começamos nossa investigação da métrica de Schwarzschild analisando as coordenadas e seu alcance.<sup>8</sup>

Como já dito, as coordenadas polares  $\theta$  e  $\phi$  têm sua interpretação e alcance padrão. A coordenada de tempo  $t$  pode ser interpretada como o tempo próprio de um observador estático infinitamente distante da estrela, em  $r \rightarrow \infty$ . Assim, dada a planicidade assintótica da solução, podemos pensar em  $t$  como medida do tempo de Minkowski.<sup>8</sup>

A questão do possível alcance do raio  $r$  é a priori mais interessante. A interpretação geométrica de  $r$  é a de um raio de área, ou seja, é caracterizada pelo fato da área da superfície de uma esfera de raio constante  $r$  é  $4\pi r^2$ .<sup>8</sup>

Além disso, a métrica é por construção uma métrica do vácuo. Assim, se a estrela tem raio  $r_0$ , então a solução só é válida para  $r > r_0$ . O raio de um objeto físico é quase sempre muito maior do que raio de Schwarzschild, como nos exemplos da Tabela 2:<sup>8</sup>

Tabela 2-Tabela comparativa do Raio de Schwarzschild e de um objeto físico.

| Objeto                          | Próton                                 | Terra                     | Sol                              |
|---------------------------------|----------------------------------------|---------------------------|----------------------------------|
| Massa (M)                       | $\approx 10^{-24}\text{g}$             | $\approx 10^{27}\text{g}$ | $\approx 10^{33}\text{g}$        |
| Raio de Schwarzschild ( $r_s$ ) | $\approx 2,5 \times 10^{-52}\text{cm}$ | $\approx 1\text{cm}$      | $\approx 3\text{km}$             |
| Raio do objeto ( $r_0$ )        | $\approx 10^{-13}\text{cm}$            | $\approx 6000\text{km}$   | $\approx 7 \times 10^5\text{km}$ |

Fonte: Produção do próprio autor.

No entanto, para objetos mais compactos seu raio pode se aproximar do raio de Schwarzschild. Por exemplo, para estrelas de nêutrons pode-se ter  $r_s \sim 0,1 r_0$ .<sup>8</sup>

Algo interessante acontece em  $r=r_s$ . As geodésicas são perfeitamente bem-comportadas em  $r_s$ , isto é, um horizonte de eventos e um ponto sem retorno em quando  $r_0 < r_s$ .<sup>8</sup>

## 4.2 A GEODÉSICA

As curvas mais importantes no espaço plano são as linhas retas. Um dos Axiomas de Euclides refere-se a continuidade de qualquer reta finita de maneira única. Então, uma linha reta no espaço euclidiano é a única curva que transporta paralelamente seu próprio vetor tangente. Em um espaço curvo, também podemos desenhar linhas que são o mais reta possível exigindo transporte paralelo do vetor tangente, isto é as geodésicas.<sup>7</sup>

Em um sistema localmente inercial essas linhas são retas, equação (2.3.1), que é uma equação diferencial não linear de segunda ordem para  $x^\lambda(\tau)$ . O símbolo de Christoffel  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  é uma função conhecida das coordenadas  $x^\lambda$ . Tem uma única solução quando as condições iniciais em  $\tau=\tau_0$ , como são dadas:  $x_0^\lambda = x^\lambda(\tau_0)$ . Então dando uma posição inicial e uma direção inicial, obtemos uma única geodésica.<sup>7</sup>

Lembre-se que se mudarmos de parâmetro mudamos matematicamente a curva (embora não os pontos por onde passa). Agora, se  $\tau$  é um parâmetro de uma geodésica de modo que a equação (2.3.1) for satisfeita, e se definirmos um novo parâmetro  $\sigma = a\tau + b$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes (não dependendo da posição na curva), então  $\sigma$  também é um parâmetro em que a equação (2.3.1) é satisfeita:<sup>7</sup>

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\sigma^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0. \quad (4.2.1)$$

De um modo geral, apenas transformações lineares de  $\tau$  como a  $\sigma = a\tau + b$ , dará novos parâmetros em que a equação geodésica é satisfeita. Um parâmetro como  $\tau$  e  $\sigma$  acima é chamado um parâmetro afim.<sup>7</sup>

### 4.3 QUANTIDADES CONSERVADAS

Para uma partícula devemos perceber que a gravidade é uma força. A energia cinética e o momento desta partícula não são conservados sob sua ação. No ponto de vista deste trabalho não podemos esperar encontrar um sistema de coordenadas em que os componentes de  $\vec{p}$  são constantes ao longo da trajetória de uma partícula. Há uma exceção notável a isso, sendo importante o suficiente para olhar em detalhe.<sup>7</sup>

A equação geodésica pode ser escrita para os componentes contraídos do  $\vec{p}$  como segue:<sup>7</sup>

$$\frac{Mdp_\beta}{d\tau} = \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} p^\alpha p_\gamma. \quad (4.3.1)$$

Agora, o lado direito acaba por ser simples:<sup>7</sup>

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} p^\alpha p_\gamma = \frac{1}{2} g^{\gamma\nu} \left( \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right) p^\alpha p_\gamma, \quad (4.3.2)$$

O produto  $p^\nu p^\alpha$  é simétrico em  $\nu$  e  $\alpha$ , enquanto o primeiro e terceiro termos entre parênteses são antissimétricos em  $\nu$  e  $\alpha$ . Portanto, eles se cancelam deixando apenas o termo do meio:<sup>7</sup>

$$\Gamma^\gamma_{\beta\alpha} p^\alpha p_\gamma = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} p^\nu p^\alpha. \quad (4.3.3)$$

A equação geodésica pode assim, em completa generalidade, ser escrita:<sup>7</sup>

$$\frac{Mdp_\beta}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} p^\nu p^\alpha. \quad (4.3.4)$$

Portanto, temos o seguinte resultado importante: se todos os componentes  $g_{\nu\alpha}$  são independentes de  $x^\beta$  para algum índice fixo  $\beta$ , então  $p_\beta$  é uma constante ao longo da trajetória de qualquer partícula. Por exemplo, suponha que temos um campo gravitacional estacionário, isto é, independente do tempo. Então um sistema de coordenadas pode ser encontrado em que os componentes métricos são independentes do tempo, e nesse sistema  $p_0$  é conservado. Portanto,  $p_0$  é geralmente chamado de energia da partícula. Observe que as coordenadas também podem ser encontradas em que esta mesma métrica tem componentes dependentes do tempo. O quadro em que os componentes métricos são estacionários é especial, como habitualmente encontramos em nosso laboratório, a Terra. Portanto,  $p_0$  neste referencial está relacionado com a energia usual definida no laboratório, e inclui a energia potencial gravitacional da partícula. A constância de  $p_0$  ao longo da trajetória de uma partícula generaliza o conceito newtoniano de energia conservada. É uma métrica especial, se todos os componentes puderem ser independentes do tempo dessa maneira, então energia conservada não pode ser definida. De maneira semelhante, se uma métrica é axialmente simétrica, então as coordenadas podem ser encontradas onde  $g_{\alpha\beta}$  é independente do ângulo  $\theta$  em torno do eixo. Então  $p_\theta$  será conservado. Esse é o momento angular da partícula. <sup>7</sup>

#### 4.3.1 Energia e Momento angular

Vimos na equação (4.3.4) e discussão associada, que quando um espaço-tempo tem uma certa simetria há um componente de momento conservado associado para trajetórias. Nosso espaço tem a independência de tempo e a simetria esférica, assim os valores das quantidades conservadas resultam da determinação da trajetória. Nós trataremos em paralelo **partículas** e **fótons**. A independência temporal da métrica significa que a energia  $p_0$  é constante na trajetória. Para partículas massivas  $m \neq 0$ , definiremos a energia por unidade de massa como  $E_p$ , enquanto para fótons usamos uma notação  $E_f$ .<sup>7</sup>

$$\text{Partícula: } E_p := \frac{p_0}{m},$$

$$\text{Fóton: } E_f = p_0.$$

A independência da métrica do ângulo  $\phi$  em torno do eixo implica que o momento angular  $p_\phi$  é constante. Novamente definimos o momento angular específico  $L_p$ , para partículas massivas e o momento angular  $L_f$ , para fótons:<sup>7</sup>

Partícula:  $L_p = \frac{p_\phi}{m},$

Fóton:  $L_f = p_\phi.$

Por causa da simetria esférica, o movimento é sempre confinado a um único plano, e podemos escolher esse plano para ser o plano equatorial. Então  $\theta$  é constante em  $(\theta = \frac{\pi}{2})$  para a órbita, então  $\frac{d\theta}{d\lambda} = 0$  onde  $\lambda$  é qualquer parâmetro na órbita. Mas  $p_\theta$  é proporcional a isso, então também desaparece. Os outros componentes do momento são:<sup>7</sup>

$$p^0 = g^{00} p_0 = g_{00} p^0 = m \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E_p, \quad (4.3.1.1)$$

Partícula:

$$p^r = m \frac{dr}{d\tau}, \quad (4.3.1.2)$$

$$p^\phi = g^{\phi\phi} p_\phi = m \frac{1}{r^2} L_p. \quad (4.3.1.3)$$

Fóton:

$$p^0 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E_f, \quad (4.3.1.4)$$

$$p^r = \frac{dr}{d\tau}, \quad (4.3.1.5)$$

$$p^\phi = \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{L_f}{r^2}. \quad (4.3.1.6)$$

#### 4.4 A APLICAÇÃO DA MÉTRICA DE SCHWARSZCHILD NA DEFLEXÃO DA LUZ

Agora vamos fazer duas suposições, a primeira é assumir que a luz se comporta como qualquer partícula e portanto seu movimento em um campo gravitacional é dado pela equação geodésica, a equação (2.3.1).<sup>6</sup>

A segunda suposição é assumir que o intervalo de tempo próprio para fótons é de acordo com o espaço-tempo de Minkowski, isto é:<sup>6</sup>

$$d\tau^2=0. \quad (4.4.1)$$

Assim, as equações geodésicas para os fótons são semelhantes as outras partículas quando particularizamos apenas o movimento equatorial. Por simplicidade vamos definir o valor de  $c=1$  e o uso da notação de Newton, assim as equações serão as seguintes Lagrangianas para este movimento:<sup>6</sup>

$$L=g_{\lambda\mu}\dot{x}^\lambda\dot{x}^\mu, \quad (4.4.2)$$

$$L=\left(1-\frac{2GM}{r}\right)\dot{t}^2-\left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2-r^2\dot{\theta}^2-r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2. \quad (4.4.3)$$

O  $\phi$  da equação desta Lagrangiana leva à relação (vide apêndice):<sup>6</sup>

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}-\frac{\partial L}{\partial \phi}=0, \quad (4.4.4)$$

$$r^2\dot{\phi}=Constante=l. \quad (4.4.5)$$

Da mesma forma, a equação para o  $t$  (vide apêndice):<sup>6</sup>

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{t}}-\frac{\partial L}{\partial t}=0, \quad (4.4.6)$$

$$\left(1-\frac{2GM}{r}\right)\dot{t}=Constante=k. \quad (4.4.7)$$

Para  $r$ , temos a seguinte forma da equação (vide apêndice):<sup>6</sup>

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}-\frac{\partial L}{\partial r}=0, \quad (4.4.8)$$

$$\left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1}\ddot{r}-\left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-2}\frac{GM}{r^2}\dot{r}^2+\frac{GM}{r^2}\dot{t}^2-r\dot{\phi}^2=0. \quad (4.4.9)$$

A diferença que existe a respeito a equação de uma partícula é que no caso do fóton estamos impondo algumas restrições como:  $d\tau^2=0$  . Que se traduz (vide apêndice):<sup>6</sup>

$$g_{\lambda\mu} \frac{dx^\lambda}{d\nu} \frac{dx^\mu}{d\nu} = 0, \quad (4.4.10)$$

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)r^2 - \frac{k^2 r^4}{l^2} = 0. \quad (4.4.11)$$

Usando a relação  $u = \frac{1}{r}$  e substituindo na equação (4.4.11), obteremos:<sup>6</sup>

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + (1 - 2GMu)u^2 - \frac{k^2}{l^2} = 0. \quad (4.4.12)$$

Diferenciando a equação com respeito a  $\phi$ , teremos:<sup>6</sup>

$$2\left(\frac{du}{d\phi}\right)\left(\frac{d^2u}{d\phi^2}\right) + 2u \frac{du}{d\phi} - 6GMu^2 \frac{du}{d\phi} = 0,$$

$$\frac{du}{d\phi} \left(\frac{d^2u}{d\phi^2} + u - 3GMu^2\right) = 0. \quad (4.4.13)$$

Portanto, as equações geodésicas radiais, levam-nos as equações:<sup>6</sup>

$$\frac{du}{d\phi} = 0, \quad (4.4.14)$$

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u - 3GMu^2 = 0, \quad (4.4.15)$$

que implica em uma órbita circular onde o vetor raio não muda, em (4.4.14). E configurando  $\dot{r} = \ddot{r} = 0$  , na equação radial em (4.4.9) vemos que para isso ser verdade:<sup>6</sup>

$$\frac{GM}{r^2} \dot{t}^2 = r \dot{\phi}^2. \quad (4.4.16)$$

Por outro lado, a equação (4.4.11) do elemento de linha para esta órbita nos dá:<sup>6</sup>

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t}^2 = r^2 \dot{\phi}^2. \quad (4.4.17)$$

Comparando as equações (4.4.16) e (4.4.17), podemos determinar:<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{3GM}{r}\right)t^2 &= 0, \\ r &= 3GM = \frac{3}{2} \left(\frac{2GM}{C^2}\right) = \frac{3}{2} r_s \end{aligned} \quad (4.4.18)$$

Isso mostra que órbitas circulares para fótons são possíveis apenas se o raio da órbita satisfaz a condição acima. Mas notamos aqui que este valor do raio da órbita para a maioria dos objetos (estrelas) está dentro do raio físico do objeto e portanto, tal órbita não é fisicamente significativa. Assim, a equação radial que produzirá a órbita que defletirá a trajetória do fótons é dado pela equação (4.4.15).<sup>6</sup>

O termo  $u - 3GMu^2$  da equação (4.4.15) é uma correção relativista. E ainda, o termo  $3GMu^2$  é pequeno em comparação com termo  $u$ . Fato que podemos observar mesmo considerando a trajetória do raio de luz próximo à superfície física do planeta ou da estrela, da seguinte forma:<sup>6</sup>

$$3GMu^2 \ll u \Rightarrow \frac{3GMu^2}{u} \ll \frac{u}{u} \Rightarrow \frac{3}{2} \frac{2GM}{r} \Rightarrow \frac{3}{2} \frac{r_s}{r} \ll 1. \quad (4.4.19)$$

Assim, se desprezarmos o último termo da equação (4.4.15), podemos perguntar qual é a trajetória do raio de luz que satisfaça:<sup>6</sup>

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 0. \quad (4.4.20)$$

A solução geral desta equação é dada, como se segue:<sup>6</sup>

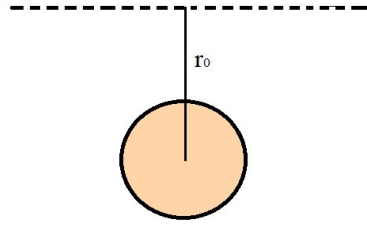
$$\begin{aligned} u(\phi) &= A \sin \phi, \\ \frac{1}{r} &= A \sin \phi, \\ r \sin \phi &= \frac{1}{A} = \text{Constante}. \end{aligned} \quad (4.4.21)$$

Denota-se que os raios viajam em linha reta, se reconhecemos que em  $r \sin \phi$  é a representação do valor da coordenada em y da trajetória do fóton e tal solução representa uma linha reta paralela a coordenada x (eixo equatorial). Podemos observar que  $\frac{1}{A}$  é à

distância de maior aproximação do fóton à estrela (ou corpo massivo esférico). Denotando  $\frac{1}{A}$  para  $r_0$ , a solução de ordem mais baixa da equação (4.4.15), pode ser escrita como:<sup>6</sup>

$$u = \frac{1}{r_0} \sin \phi. \quad (4.4.22)$$

Figura 2 – Trajetória do fóton perto da estrela.



Fonte: Ashok Das (2011).

A Equação (4.4.22), mostra que os raios de luz não são afetados pela força gravitacional, como mostrado na figura 2. Para encontrar o efeito do campo gravitacional temos que resolver a equação (4.4.15),

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 3GMu^2 = \varepsilon u^2. \quad (4.4.23)$$

O termo  $\varepsilon = 3GM$  é um pequeno parâmetro que pode ser usado como um parâmetro de perturbação na determinação da solução. Assim perturbativamente podemos escrever equação (4.4.22):

$$u \approx \frac{1}{r_0} \sin \phi + \varepsilon u_1, \quad (4.4.24)$$

e substituindo  $u$  na equação (4.4.23), mantendo os termos apenas até ordem linear temos em  $\varepsilon$ :

$$-\frac{1}{r_0} \sin \phi + \varepsilon \frac{d^2 u_1}{d\phi^2} + \left( \frac{1}{r_0} \sin \phi + \varepsilon u_1 \right) = \varepsilon \left( \frac{1}{r_0} \sin \phi + \varepsilon u_1 \right)^2,$$

$$\varepsilon \left( \frac{d^2 u_1}{d\phi^2} + u_1 \right) = \varepsilon \frac{1}{r_0^2} \sin^2 \phi = \varepsilon \frac{1}{2r_0^2} (1 - \cos 2\phi),$$

$$\frac{d^2 u_1}{d\phi^2} + u_1 = \frac{1}{2r_0^2} (1 - \cos 2\phi). \quad (4.4.25)$$

Então podemos escolher uma solução gera para a equação (4.4.25), da seguinte forma:

$$u_1 = a + b \cos 2\phi, \quad (4.4.26)$$

Quando substituimos a equação (4.4.26), na equação (4.4.25), obtemos:

$$-4b \cos 2\phi + a + b \cos 2\phi = \frac{1}{2r_0^2} (1 - \cos 2\phi),$$

$$a - 3b \cos 2\phi = \frac{1}{2r_0^2} (1 - \cos 2\phi). \quad (4.4.27)$$

Isto determina que:

$$a = \frac{1}{2r_0^2}, \quad b = \frac{1}{6r_0^2}, \quad (4.4.28)$$

e, então para a equação (4.4.24) podemos escrever:

$$u(\phi) \approx \frac{1}{r_0} \sin \phi + \varepsilon \left( \frac{1}{2r_0^2} + \frac{1}{6r_0^2} \cos 2\phi \right),$$

$$\frac{1}{r} \approx \frac{1}{r_0} \sin \phi + \frac{3GM}{2r_0^2} \left( 1 + \frac{1}{3} \cos 2\phi \right). \quad (4.4.29)$$

Em uma infinitésima separação, se nós assumirmos que o raio de luz entra em  $\phi \approx 0$ , ele manterá sua trajetória ao infinito em  $\phi \approx \pi$ . Se as correções relativísticas não estiverem presentes, então é claro que o ângulo de incidência é exatamente  $\phi = 0$  e o ângulo de saída é  $\phi = \pi$ .

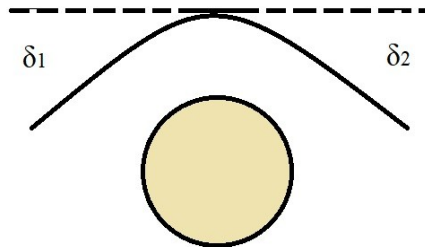
Então vamos supôr, que por causa dos efeitos gravitacionais o raio de luz entra em  $\phi = -\delta_1$  é defletido e segue em  $\phi = \pi + \delta_2$ , como é indicado abaixo, na figura 3. Onde “ $\delta_1$  e  $\delta_2$ ” são pequenos ângulos. Isto claramente implica que a incidência é:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_0} \text{sen}(-\delta_1) + \frac{3GM}{2r_0^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2(\delta_2)\right) &= 0, \\ -\frac{\delta_1}{r_0} + \frac{3GM}{2r_0^2} \left(1 + \frac{1}{3}\right) &= 0, \\ \delta_1 &= \frac{2GM}{r_0}. \end{aligned} \quad (4.4.30)$$

Da mesma forma, na outra extremidade teremos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_0} \text{sen}(\pi + \delta_2) + \frac{3GM}{2r_0^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos(2\pi + 2\delta_2)\right) &= 0, \\ -\frac{\text{sen} \delta_2}{r_0} + \frac{3GM}{2r_0^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\delta_2\right) &= 0, \\ -\frac{\delta_2}{r_0} + \frac{3GM}{2r_0^2} \left(1 + \frac{1}{3}\right) &= 0, \\ \delta_2 &= \frac{2GM}{r_0}. \end{aligned} \quad (4.4.31)$$

Figura 3 – Curvatura do raio de luz perto de uma estrela.



Fonte: Ashok Das (2011).

Isso mostra que a deflexão no caminho do raio de luz que entra é a mesma que quando sai, isto é esperado da simetria esférica do problema. A quantidade total de deflexão no caminho do raio de luz, na presença da estrela, é dado por:

$$\delta_1 + \delta_2 = \frac{4GM}{r_0}, \quad (4.4.32)$$

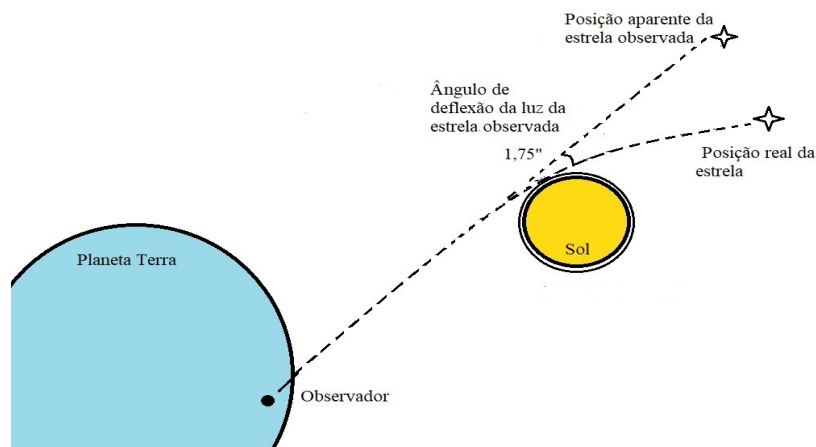
e será maior quando o parâmetro de impacto ( $r_0$ ) for menor. A deflexão da luz, pode ser testado experimentalmente e geralmente é feito estudando os raios de luz que pastam na superfície do Sol. Neste caso, a previsão teórica para a deflexão é de  $1,75''$ . Medidas anteriores desse fenômeno envolveram imagens estelares durante o eclipse solar e, em seguida, compará-las com aquelas tiradas seis meses depois, quando o sol não está no campo de visão. Isso mostra uma deflexão entre  $1.5''$  e  $3.0''$ . Devemos lembrar que esta é uma experiência muito difícil e vários fatores mudam durante o intervalo de seis meses. Consequentemente, as medições não podem dar resultados muito precisos. Nos últimos anos, usa-se radiotelescópios para medir os sinais de rádio de fontes pontuais como quasares, à medida que eles passam perto do sol. Tais medições dão um valor de  $1,57''$  à  $1,82''$  para a deflexão do sinal com um erro de  $0,2''$ . Isso é um teste bom o bastante para uma previsão teórica. <sup>7</sup>

Por exemplo, o efeito máximo da trajetória para uma distância igual ao raio do Sol,  $r_0 = R_\odot$ , na figura 4.

$$\text{Dado: } M_\odot = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}, \quad R_\odot = 6,95 \times 10^8 \text{ m} \quad c = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$(\Delta\phi)_\odot, \text{máx} = 8,48 \times 10^{-6} \text{ rad} = 1,75''$$

Figura 4-Efeito da deflexão da luz.



Fonte: Confeccionada pelo próprio autor.

Uma observação da terra de uma estrela que não está no limbo do sol, não é preciso corrigir a deflexão.

Para Júpiter, por exemplo:<sup>7</sup>

$$(\Delta\phi), \text{máx} = 6,42 \times 10^{-8} \text{ rad} = 0,013''$$

Esta deflexão foi medida pelo satélite de Astrometria Hiparcos. Claro que, observações por satélites de posições estelares são realizadas de uma posição próximo a Terra, e para as estrelas que não estão perto do sol, o satélite receberá sua luz antes que haja a deflexão total, dada pela equação (4.4.32).<sup>7</sup>

Um observador na posição do satélite observa uma posição aparente na direção do vetor tangente a trajetória do raio de luz, e se ele conhece a distância “ $r_0$ ” do Sol, ele pode calcular a verdadeira direção da estrela.<sup>7</sup>

Embora a deflexão da luz fosse a chave para estabelecer a exatidão da relatividade geral é interessante que exista um argumento puramente newtoniano para a deflexão da luz. Esse foi previsto pela primeira vez por Cavendish em 1784 e pelo astrônomo alemão J.G.Von Söldner(1776-1833), em 1801.<sup>7</sup>

O argumento baseia-se no comportamento da luz como partícula movendo-se com a velocidade da luz “ $c$ ”.<sup>7</sup>

Como o movimento de uma partícula no campo gravitacional depende apenas de sua velocidade, Cavendish e Von Söldner foram capazes de calcular o resultado simples de que a deflexão da luz seria  $\frac{2M}{r_0}$ .<sup>7</sup>

O próprio Einstein desconhecendo esse trabalho obteve o mesmo resultado em 1908, exatamente o início de sua busca por uma teoria relativista da gravidade. Assim o triunfo da Relatividade Geral não era para que ele predissesse uma deflexão, mas sim a quantidade certa da deflexão.<sup>7</sup>

A razão pela qual este resultado é a metade do resultado totalmente relativista, não é difícil de compreender. Lembre-se que as órbitas dos planetas dependem somente de  $g^{00}$ , porque as velocidades das partículas é diferente da velocidade da luz. Os incrementos espaciais  $dr$  são comparáveis aos incrementos do tempo  $dt$ . Isto significa que a parte espacial da métrica  $g^{rr}$  são de igual peso com  $g^{00}$ , na determinação do movimento de um fóton.<sup>7</sup>

Observando a equação (3.2.28), vemos que há desvios iguais de planicidade tanto em  $g^{00}$  quanto em  $g^{rr}$ . Qualquer que seja a deflexão produzida por  $g^{00}$  (a única parte da métrica que os cálculos newtonianos eram sensíveis) é dobrada por  $g^{rr}$ .<sup>7</sup>

Por fim, a deflexão da luz na relatividade geral é comparada com a gravidade newtoniana sendo uma direta evidência para a curvatura do espaço, bem como para o tempo.

## 5 CONCLUSÃO

Nos dias atuais, medidas dos desvios na posição aparente de estrelas permitem inferir dados que seriam impossíveis de se determinar. Podemos citar, por exemplo, que uma equipe de pesquisadores usando o telescópio espacial Hubble, observaram uma estrela Anã Branca (Stein 2051B), passando na frente de outra que estava mais distante. Nesta passagem, a posição aparente da estrela que estava mais distante sofreu um desvio de 2 milissegundos de arco. Com este efeito estimou-se a massa da Anã Branca de 68% a massa do Sol.

Outra forma que foi pensada por Einstein para verificar sua teoria foi a medição do desvio para o vermelho gravitacional. Pesquisadores conseguiram medir mudanças pequenas no comprimento de onda dos raios gama caindo no campo gravitacional da Terra e também concluíram que o ritmo de um relógio depende de sua distância em relação ao centro da Terra, isto é, depende de sua posição em uma região gravitacional não homogênea. Além

disto, os nossos GPS (Global Positioning System) não seriam capazes de determinar posições com tanta precisão sem a Teoria da Relatividade Geral.

Testes de alta precisão da Teoria Geral da Relatividade continuam até os dias de hoje. O experimento de Robert Pound e Glen Rebka iniciou uma nova era de testes de alta precisão. Alguns destaques nos experimentos de hoje em dia são as detecções diretas de ondas gravitacionais provenientes da fusão de dois buracos negros e também da fusão de duas estrelas de Nêutrons, feitas pelas colaborações do Observatório Avançado de Ondas Gravitacionais por Interferômetro Laser (LIGO) e o Interferômetro “Virgo”. E ainda pode-se destacar a obtenção da primeira imagem da sombra de um buraco negro feito pelo Telescópio Horizonte de Eventos (EHT).

Com esta técnica usando ondas de rádio não há necessidade de um eclipse e quando aplicada usando diferentes comprimentos de ondas, permite discriminar o quanto do desvio é devido à deformação do espaço-tempo e o quanto é devido à refração das ondas eletromagnéticas na coroa solar. Com esta alta precisão nas medições, a Teoria da Relatividade Geral é consolidada e descarta várias outras teorias alternativas.

A solução de Schwarzschild é a única solução na Teoria da Relatividade Geral que foi inteiramente comprovada experimentalmente, contudo a Teoria da Relatividade Geral ainda necessita avançar mais, inclusive com implementação da mecânica quântica.

Portanto, segundo Rindler, a solução externa de Schwarzschild permanece até hoje como a mais importante solução exata das equações de campo de Einstein, pela sua vasta aplicabilidade em sistemas reais, como por exemplo: a deflexão da luz, o cálculo de órbitas planetárias como a previsão do avanço anual do periélio de Mercúrio, o cálculo do desvio para o vermelho, o estudo de objetos denominados buracos negros, o cálculo entre a transmissão e recepção de sinais de rádio lançados ao espaço e etc. Porém apesar de a solução contribuir com um grande prestígio para a Teoria da Relatividade Geral ela é apenas uma parte e não o todo.

## REFERÊNCIAS

- <sup>1</sup>LAMBOURNE, R. J. A. **Relativity, gravitation and cosmology**. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- <sup>2</sup>UNICAMP - Universidade de Campinas. **Sociedade brasileira para o progresso da ciência**. Disponível em: [http://cienciaecultura.bvs.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0009-67252019000300007](http://cienciaecultura.bvs.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0009-67252019000300007). Acesso em: 22 ago. 2022.
- <sup>3</sup>PERREIRA, S. H. **Apostila do curso de introdução a relatividade geral e cosmologia**. Curso de Bacharelado em Física. Unesp, 2022.
- <sup>4</sup>NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física básica**. 5.ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2013.v.1.
- <sup>5</sup>CARMO, M. P. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.
- <sup>6</sup>DAS, A. **Lectures on gravitation**. Londres: World Scientific Publishing, 2011.
- <sup>7</sup>SCHUTZ, B. F. **A first course in general relativity**. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
- <sup>8</sup>BLAU, M. **Lecture notes on general relativity**. Disponível em: <http://www.blau.itp.unibe.ch/GRlecturenotes.html>. Acesso em: 26 abr. 2021.
- <sup>9</sup>DYSON, F. W; EDDINGTON, A. S; DAVIDSON, C. **A determination of deflection light by the Sun's gravitational from observations made at the total eclipse of may 29, 1919**. Disponível em: <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsta.1920.0009>. Acesso em: 15 jan. 2023.
- <sup>10</sup>WIKIPÉDIA. **Experimento de Eötvös**. Disponível em: [https://en.wikipedia.org/wiki/Eötvös\\_experiment](https://en.wikipedia.org/wiki/Eötvös_experiment). Acesso em: 22 ago. 2022.
- <sup>11</sup>RYDER, L. **Introduction to general relativity**. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- <sup>12</sup>CARROL, S. M. **Spacetime and geometry: an introduction to general relativity**. Chicago: Addison Wesley, 2004.
- <sup>13</sup>RINDLER, W. **Relativity: special, geral and cosmological**. 2nd ed. Oxford: Oxford University Press, 2006.
- <sup>14</sup>LANDAU, L; LIFCHITZ, E. **Teoria de campo**. São Paulo: Hermos, 2004.

# APÊNDICE – Deduções.

Equação (2.2.3):

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau}\right) &= \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\right) \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right), \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \left(\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}\right), \\ &= \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0.\end{aligned}$$

Equação(2.4.2):

$$\begin{aligned}\frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\lambda} &= \frac{\partial}{\partial x'^\lambda}\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x'^\lambda}\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right) V^\nu + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial V^\nu}{\partial x'^\lambda}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\rho}\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right) \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} V^\nu + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda}\right) \\ \frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\lambda} &= \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} V^\nu + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho}\end{aligned}$$

Equação(2.4.3):

$$\begin{aligned}\Gamma'^\lambda_{\mu\nu} &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma^\rho_{\tau\sigma} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \\ &\quad \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} (\text{manipular este termo}) \\ \Gamma'^\lambda_{\mu\nu} &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma^\rho_{\tau\sigma} - \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\delta \partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\mu} \\ &\quad - \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\delta \partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\delta} \Gamma'^\lambda_{\mu\nu} - \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma^\rho_{\delta\sigma}\end{aligned}$$

(rearranjar:  $\lambda \rightarrow \mu, \delta \rightarrow \nu, \nu \rightarrow \lambda$ ; multiplicar:  $-V^\nu$ )

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} V^\nu &= -\frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\nu} \Gamma'^\mu_{\delta\lambda} V^\nu + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda} \Gamma^\rho_{\nu\sigma} V^\nu \\ &= -\Gamma'^\mu_{\delta\lambda} V'^\delta + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda} \Gamma^\rho_{\nu\sigma} V^\nu\end{aligned}$$

substituir na Equação(2.4.2)

$$\frac{\partial V'^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} = -\Gamma'^{\mu}_{\delta\lambda} V'^{\delta} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\lambda}} \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} V^{\nu} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial V^{\nu}}{\partial x^{\rho}}$$

$$\frac{\partial V'^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} + \Gamma'^{\mu}_{\delta\lambda} V'^{\delta} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\lambda}} \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} V^{\nu} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial V^{\nu}}{\partial x^{\rho}}$$

$\nu, \rho$  e  $\sigma$  – são índices mudos no primeiro termo lado direito; realizar troca apropriadamente

$$\frac{\partial V'^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} + \Gamma'^{\mu}_{\delta\lambda} V'^{\delta} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \Gamma^{\nu}_{\delta\rho} V^{\delta} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial V^{\nu}}{\partial x^{\rho}}$$

$$\frac{\partial V'^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} + \Gamma'^{\mu}_{\delta\lambda} V'^{\delta} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \left( \frac{\partial V^{\nu}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma^{\nu}_{\delta\rho} V^{\delta} \right).$$

Equação (3.2.18):

$$R_{00} = \frac{\partial \Gamma^{\nu}_{00}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\nu}_{0\nu}}{\partial x^0} + \Gamma^{\eta}_{00} \Gamma^{\nu}_{\nu\eta} - \Gamma^{\eta}_{0\nu} \Gamma^{\nu}_{0\eta}$$

$$R_{00} = \frac{\partial \Gamma^1_{00}}{\partial x^i} + \Gamma^1_{00} \Gamma^1_{00} (\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{31}) - \Gamma^0_{01} \Gamma^1_{00} - \Gamma^1_{00} \Gamma^0_{01}$$

$$R_{00} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\dot{A}}{B} \right) + \left( \frac{1}{2} \frac{\dot{A}}{A} - \frac{1}{2} \frac{\dot{B}}{B} - \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \right) \left( -\frac{1}{2} \frac{\dot{A}}{B} \right)$$

$$R_{00} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\dot{A}}{B} \right) - \frac{1}{2} \frac{\dot{A}}{B} \left( \frac{1}{2} \frac{\dot{A}}{A} - \frac{1}{2} \frac{\dot{B}}{B} - \frac{2}{r} \right)$$

$$R_{00} = \frac{1}{2} \frac{\ddot{A}}{B} - \frac{1}{2} \frac{\dot{A}\dot{B}}{B^2} - \frac{1}{4} \frac{\dot{A}}{AB} + \frac{1}{4} \frac{\dot{A}\dot{B}}{B^2} + \frac{\dot{A}}{rB} = 0,$$

$$\frac{1}{2} \frac{\ddot{A}}{B} - \frac{1}{4} \frac{\dot{A}\dot{B}}{B^2} - \frac{1}{4} \frac{\dot{A}^2}{AB} + \frac{\dot{A}}{rB} = 0.$$

Equação (3.2.19):

$$\begin{aligned}
 R_{11} &= \frac{\partial \Gamma_{11}^\nu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma_{1\nu}^\nu}{\partial x^1} + \Gamma_{11}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\nu - \Gamma_{1\nu}^\eta \Gamma_{0\eta}^\nu \\
 R_{11} &= \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial x^1} - \frac{\partial}{\partial x^1} (\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) + \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3) - \\
 &\quad - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{10}^0 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{13}^3 \\
 R_{11} &= -\frac{1}{2} \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{A}}{A} \right)^2 + \frac{2}{r^2} + \frac{1}{4} \left( \frac{\dot{A}}{A} \frac{\dot{B}}{B} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{\dot{B}}{B} \right)^2 + \frac{\dot{B}}{rB} - \frac{1}{4} \left( \frac{\dot{A}}{A} \right)^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{\dot{B}}{B} \right)^2 - \frac{2}{r^2} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{1}{4} \left( \frac{\dot{A}}{A} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}}{rB} = 0.
 \end{aligned}$$

Equação (3.2.20):

$$\begin{aligned}
 R_{22} &= \frac{\partial \Gamma_{22}^\nu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma_{2\nu}^\nu}{\partial x^2} + \Gamma_{22}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\nu - \Gamma_{2\nu}^\eta \Gamma_{2\eta}^\nu \\
 R_{22} &= \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{23}^3}{\partial x^2} + \Gamma_{22}^1 (\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3) - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{23}^3 \\
 R_{22} &= -\frac{1}{B} + \frac{r\dot{B}}{B^2} + 1 - \frac{1}{2} \frac{r}{B} \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} \right) \\
 &\quad \frac{1}{B} + \frac{r}{2B} \left( \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right) - 1 = 0.
 \end{aligned}$$

Equação (4.4.5):

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= 0, \\
 \frac{d}{d\tau} (-2r^2 \dot{\phi}) &= 0, \quad r^2 \dot{\phi} = \text{Constante} = l.
 \end{aligned}$$

Equação (4.4.7):

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} - \frac{\partial L}{\partial t} &= 0, \\ \frac{d}{d\tau} \left( 2 \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) \dot{t} \right) &= 0, \\ \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) \dot{t} &= \text{Constante} = k.\end{aligned}$$

Equação (4.4.9):

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= 0, \\ \frac{d}{d\tau} \left( -2 \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} \dot{r} \right) - \frac{2GM}{r^2} \dot{t}^2 - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-2} \frac{2GM}{r^2} \dot{r}^2 + 2r \dot{\phi}^2 &= 0, \\ - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} \ddot{r} + \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-2} \frac{2GM}{r^2} \dot{r}^2 - \frac{GM}{r^2} \dot{t}^2 - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-2} \frac{GM}{r^2} \dot{r}^2 + r \dot{\phi}^2 &= 0, \\ \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} \ddot{r} - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-2} \frac{GM}{r^2} \dot{r}^2 + \frac{GM}{r^2} \dot{t}^2 - r \dot{\phi}^2 &= 0.\end{aligned}$$

Equação (4.4.11):

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} &= 0, \\ \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) \dot{t}^2 - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2 &= 0, \\ \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) \frac{\dot{t}^2}{\dot{\phi}^2} - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} \left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 - r^2 &= 0, \\ \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) \frac{k^2}{\left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^2 l^2} \frac{r^4}{l^2} - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} \left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 - r^2 &= 0, \\ \left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 + \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) r^2 - \frac{k^2 r^4}{l^2} &= 0.\end{aligned}$$