

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

PAULO VICTOR DA SILVA SOARES

Dinâmica de partículas em um campo gravitacional de corpos simétricos com uma cratera

Guaratinguetá

2025

Paulo Victor da Silva Soares

Dinâmica de partículas em um campo gravitacional de corpos simétricos com uma cratera

Dissertação de Mestrado apresentada ao Conselho de Curso de Pós Graduação em Física e Astronomia da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física e Astronomia .

Orientador: Prof^a Dra. Silvia Maria Giuliatti Winter

Coorientador: Prof^o Dr. Gustavo Madeira

Guaratinguetá

2025

S676d	<p>Soares, Paulo Victor da Silva</p> <p>Dinâmica de partículas em um campo gravitacional de corpos simétricos com uma cratera / Paulo Victor da Silva Soares - Guaratinguetá, 2025.</p> <p>76 f : il.</p> <p>Bibliografia: f. 74-76</p> <p>Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá, 2025.</p> <p>Orientadora: Prof^ª. Dr^a Silvia Maria Giuliatti Winter</p> <p>Coorientador: Prof. Dr. Gustavo Madeira</p> <p>1. Mecânica celeste. 2. Dinâmica da partícula. 3. Sistema solar. 4. Métodos de simulação. I. Título.</p>
	CDU 521.1(043)

Luciana Máximo
Bibliotecária/CRB-8 3595

PAULO VICTOR DA SILVA SOARES

**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“MESTRE EM FÍSICA”**

**PROGRAMA: FÍSICA E ASTRONOMIA
CURSO: MESTRADO**

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

Documento assinado digitalmente
 **OLIVIA MARIA BERENGUE**
Data: 30/09/2025 10:09:00-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof^a. Dr^a. Olívia Maria Berengue
Coordenadora

BANCA EXAMINADORA:

Documento assinado digitalmente
 **SILVIA MARIA GIULIATTI WINTER**
Data: 25/09/2025 16:05:50-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof^a. Dr^a. SILVIA MARIA GIULIATTI WINTER
Orientador - UNESP

Documento assinado digitalmente
 **ROSANA APARECIDA NOGUEIRA DE ARAUJO**
Data: 25/09/2025 11:00:46-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof^a. Dr^a. ROSANA APARECIDA NOGUEIRA DE ARAUJO
UNESP

Documento assinado digitalmente
 **MARIA HELENA MOREIRA MORAIS**
Data: 24/09/2025 19:16:45-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof^a. Dr^a. MARIA HELENA MOREIRA MORAIS
UNESP

SETEMBRO de 2025

DADOS CURRICULARES

PAULO VICTOR DA SILVA SOARES

NASCIMENTO 28/01/1999 - Franca / SP

FILIAÇÃO Cesar Rodrigues Soares
Ana Maria da Silva

2017 / 2022 Física - Licenciatura
UNESP

2019 / 2023 Física - Bacharel
UNESP

Dedico este trabalho à minha família e aos meus amigos.

Este trabalho contou com o apoio da seguinte entidade: CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior

RESUMO

Corpos celestes que apresentam distribuição de massa não uniforme ou formato não esférico produzem perturbações gravitacionais capazes de modificar de forma significativa as trajetórias de objetos em sua vizinhança. Neste trabalho, inspirado no objeto transnetuniano (307261) Máni, desenvolvemos um modelo idealizado composto por uma esfera com uma concavidade pontual em seu equador (cratera), a fim de investigar a dinâmica orbital nas proximidades dessa irregularidade. O estudo da estabilidade das regiões ao redor de um corpo com formato irregular é importante para a detecção de satélites ou anéis ao redor desse objeto, e também para as trajetórias de futuras missões espaciais. Foram considerados dois parâmetros físicos principais: o tamanho da concavidade e a frequência angular de rotação do corpo central. Além disso, estabelecemos condições iniciais para a integração numérica das equações do movimento no plano (x,y) , formuladas em um referencial rotacional que acompanha o período de rotação do corpo central. O estudo das regiões de estabilidade foi conduzido através de dois métodos: (i) Superfícies de Seção de Poincaré e (ii) Simulações numéricas de um conjunto de partículas ao redor do corpo principal. Analisando as Superfícies de Seção de Poincaré no caso nominal, isto é, considerando os parâmetros obtidos a partir das estimativas para o Máni, obtivemos as ressonâncias spin-órbita de primeira e segunda ordens. Determinamos numericamente a posição dessas ressonâncias e comparamos-as com a previsão analítica corrigida (levando em conta a irregularidade do formato do corpo) e como resultado, identificamos as ressonâncias $2 : 1$, $3 : 2$, $5 : 4$ e $3 : 1$ e suas larguras. Além disso, obtivemos as trajetórias das partículas associadas a essas ressonâncias no referencial rotacional. A segunda abordagem empregada no estudo da estabilidade consistiu em analisar as variações das estruturas associadas às regiões estáveis e instáveis. A partir de uma grade composta por 160 mil partículas, distribuídas em uma malha com diferentes valores iniciais de semi-eixo maior e excentricidade, foi analisado o tempo de sobrevivência de cada partícula e identificado o seu estado final, sobrevivência, ejeção e colisão. Além disso, buscou-se identificar de que forma certos valores específicos, relacionados à irregularidade do corpo central, podem favorecer a existência de pequenas ilhas de estabilidade imersas em regiões instáveis próximas ao corpo, bem como compreender a evolução dessas regiões à medida que aumenta a concavidade do corpo central. Através desses dois métodos foi possível obter a estrutura dinâmica, ressonâncias e suas larguras e tempo de sobrevivência, da região ao redor de um objeto com uma cratera localizada em seu equador.

PALAVRAS-CHAVE: Mecânica Celeste. Objetos Transnetunianos. (307261) Máni. Estabilidade. Evolução dinâmica. Simulações numéricas.

ABSTRACT

Celestial bodies with a non-uniform mass distribution or a non-spherical shape produce gravitational perturbations capable of significantly modifying the trajectories of objects in their vicinity. In this work, inspired by the trans-Neptunian object (307261) Máni, we develop an idealized model composed of a sphere with a point-like concavity on its equator (a crater) to investigate the orbital dynamics near this irregularity. Studying the stability of regions around an irregularly shaped body is important for detecting satellites or rings around such an object, as well as for planning the trajectories of future space missions. Two main physical parameters were considered: the size of the concavity and the angular rotation frequency of the central body. Furthermore, we established initial conditions for the numerical integration of the equations of motion in the (x,y) plane, formulated in a rotating reference frame that accompanies the central body's rotation period. The study of the stability regions was conducted using two methods: (i) Poincaré Surfaces of Section and (ii) numerical simulations of a set of particles around the main body.

By analysing the Poincaré Surfaces of Section for the nominal case, that is, considering the parameters obtained from the estimates for Máni, we obtained first and second-order spin-orbit resonances. We numerically determined the position of these resonances and compared them with the corrected analytical prediction (taking into account the body's irregular shape). As a result, we identified the $2:1$, $3:2$, $5:4$, and $3:1$ resonances and their widths. Additionally, we obtained the trajectories of the particles associated with these resonances in the rotating reference frame. The second approach used to study stability consisted of analyzing the variations in the structures associated with stable and unstable regions. Using a grid of 160,000 particles, distributed in a mesh with different initial values of semi-major axis and eccentricity, we analyzed the survival time of each particle and identified its final state: survival, ejection, or collision.

Furthermore, we sought to identify how certain specific values, related to the central body's irregularity, might favor the existence of small islands of stability immersed in unstable regions close to the body, as well as to understand the evolution of these regions as the concavity of the central body increases. Through these two methods, it was possible to obtain the dynamical structure, resonances and their widths, and survival times for the region around an object with a crater located on its equator.

KEYWORDS: Celestial Mechanics. Trans-Neptunian Objects. (307261) Máni. Stability. Dynamical evolution. Numerical Simulations.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Posição do centro geométrico p_1 e da cratera p_2 em relação ao centro de massa. O raio do corpo central é definido por R_c .	22
Figura 2	Esquema do sistema dinâmico adotado neste trabalho. O corpo, simétrico e não esférico, possui uma cratera indicada por x_2 , enquanto o centro da porção esférica está em x_1 e o centro de massa (CM) encontra-se deslocado à esquerda. O corpo gira com velocidade angular ω , e em rosa está representada a posição inicial de uma partícula em x_0 , com velocidade inicial $\dot{y}_0$.	23
Figura 3	Representação esquemática de uma Superfície de Seção de Poincaré, construída a partir dos pontos em que uma órbita cruza um plano de referência (P_1, P_2, P_3).	30
Figura 4	Movimento de um corpo ao longo de sua órbita considerando um plano de referência fixo no espaço tridimensional, onde (X, Y, Z) são as coordenadas do sistema de referência inercial, onde $\hat{\Omega}$ é a direção do nodo ascendente, I é a inclinação da órbita em relação ao plano de referência, Ω é a longitude do nodo ascendente, ω é o argumento do pericentro, f a anomalia verdadeira e $\vec{r}$ o vetor posição da partícula em relação a origem do sistema.	32
Figura 5	Superfície de seção de Poincaré para $C_J = 1,800 R_c^2 \omega_k^2$.	42
Figura 6	Representação da trajetória de partículas no referencial girante que estão em órbita periódica.	44
Figura 7	Superfícies de seção de Poincaré para diferentes valores de C_J : (a) $1,715 R_c^2 \omega_k^2$, (b) $1,903 R_c^2 \omega_k^2$, (c) $2,020 R_c^2 \omega_k^2$ e (d) $2,167 R_c^2 \omega_k^2$.	46
Figura 8	Evolução das ilhas de estabilidade da mesma família.	48
Figura 9	Grade $a \times e$ com as posições das ressonâncias spin-órbita calculadas teoricamente e com a largura e seus respectivos centros calculados numericamente a partir de dados extraídos de Superfícies de Seção de Poincaré.	49
Figura 10	Evolução, ao longo de um intervalo de $t = 500 \times \omega_k$ (80,6 dias), de (a) o semi-eixo maior e (b) a excentricidade de três partículas inicialmente em $x_0 = 2,8 R_c$ e $e_0 = 0$, em diferentes cenários: corpo central com cratera ($\mu^* = 2 \times 10^{-3}$, verde), com massa anômala ($\mu = 2 \times 10^{-3}$, marrom) e esférico (preto).	50
Figura 11	Evolução, ao longo de um intervalo de $t = 200 \times \omega_k$ (≈ 32 dias), de (a) o semi-eixo maior e (b) a excentricidade de três partículas iniciadas em $x_0 = 2,8 R_c$ e $e_0 = 0$, com $\dot{y}_0$ definido a partir de $\dot{x}_0 = 0$. São considerados três valores para o parâmetro da cratera: $\mu^* = 0,002$ (azul), $\mu^* = 0,008$ (rosa) e $\mu^* = 0,015$ (roxo).	50
Figura 12	Curvas de velocidade zero para $C_J = 3,805 R_c^2 \omega_k^2$ (preto), $C_J = 3,552 R_c^2 \omega_k^2$ (azul) e $C_J = 3,197 R_c^2 \omega_k^2$ (laranja). Os corpos principais são representados por μ_1 e μ_2 sendo $\mu_2 = 0,2$.	52
Figura 13	Curvas de velocidade zero para $C_J = 1,9481 R_c^2 \omega_k^2$ (laranja), $C_J = 1,945777 R_c^2 \omega_k^2$ (azul) e $C_J = 1,9446 R_c^2 \omega_k^2$ (preto), com $\mu_m = 0.002$.	53

Figura 14 Curvas de velocidade zero para $C_J = 1.93165 R_c^2 \omega_k^2$ (preto), $C_J = 1.934125 R_c^2 \omega_k^2$ (azul), $C_J = 1.93531 R_c^2 \omega_k^2$ (laranja) e $C_J = 1.9358 R_c^2 \omega_k^2$ (verde), com $\mu^* = 0.002$ 54

Figura 15 Grade $a \times e$ formada por 160.000 partículas considerando o parâmetro $\mu^* = 0,002$. A figura apresenta o tempo de sobrevivência das partículas em uma escala de 1 a 10.000 períodos orbitais (isto é, de 4 horas a 1612 dias), destacando em branco a região de alta instabilidade, onde as partículas não completam sequer uma órbita antes de colidir. 56

Figura 16 Grade $a \times e$ formada por 160.000 partículas considerando o parâmetro $\mu^* = 0,002$ mostrando o estado final de cada partícula, indicando em cinza claro a região de alta instabilidade, além de classificar o estado das partículas como sobreviventes (verde), colisões (vermelho) ou ejeções (azul). Os pontos em branco correspondem à largura das ressonâncias (Figura 9). 57

Figura 17 Grade $a \times e$ formada por 160.000 partículas considerando o parâmetro $\mu^* = 0,002$. A figura apresenta o tempo de sobrevivência das partículas em uma escala de 1 a 10.000 períodos orbitais (isto é, de 4 horas a 1612 dias), destacando em branco a região de alta instabilidade, onde as partículas não completam sequer uma órbita antes de colidir. Os pontos em branco correspondem à largura das ressonâncias (Figura 9), enquanto a curva preta representa a região de estabilidade delimitada pelas órbitas de primeiro tipo; ambos os resultados foram obtidos por meio da análise das Superfícies de Seção de Poincaré. 58

Figura 18 Grade $a \times e$ formada por 160.000 partículas que partiram do apocentro considerando o parâmetro $\mu^* = 0,002$ mostrando o estado final de cada partícula, indicando em cinza claro a região de alta instabilidade, além de classificar o estado das partículas como sobreviventes (verde), colisões (vermelho) ou ejeções (azul). Os pontos em branco correspondem à largura das ressonâncias (Figura 9), enquanto a curva preta representa a região de estabilidade delimitada pelas órbitas de primeiro tipo; ambos os resultados foram obtidos por meio da análise das Superfícies de Seção de Poincaré. 59

Figura 19 Grades $a \times e$ formadas por 160.000 partículas considerando o parâmetro $\mu^* = 0,000$ (caso em que o corpo central é esférico). (a) Tempo de sobrevivência em escala de 1 a 10.000 períodos orbitais (4 horas a 1612 dias), destacando em branco a região de alta instabilidade. (b) Estado final das partículas, indicando em cinza claro a região de alta instabilidade e classificando as demais como sobreviventes (verde), colisões (vermelho) ou ejeções (azul). 60

Figura 20 Grade $a \times e$ formada por 160 000 partículas considerando o parâmetro $\mu^* = 0,004$ ($r_c = 56,70$ km). A figura apresenta o tempo de sobrevivência das partículas em uma escala de 1 a 10.000 períodos orbitais (isto é, de 4 horas a 1612 dias), destacando em branco a região de alta instabilidade. 61

Figura 21	Grade $a \times e$ formada por 160 000 partículas considerando o parâmetro $\mu^* = 0,004$ ($r_c = 56,70$ km), mostrando o estado final de cada partícula. A figura indica em cinza claro a região de alta instabilidade e classifica o estado das partículas como sobreviventes (verde), colisões (vermelho) ou ejeções (azul).	62
Figura 22	Grade $a \times e$ formada por 160.000 partículas considerando o parâmetro $\mu^* = 0,008$ ($r_c = 71,43$ km). A figura apresenta o tempo de sobrevivência das partículas em uma escala de 1 a 10.000 períodos orbitais.	63
Figura 23	Grade $a \times e$ formada por 160.000 partículas considerando o parâmetro $\mu^* = 0,008$ ($r_c = 71,43$ km), mostrando o estado final de cada partícula. A figura indica em cinza claro a região de alta instabilidade e classifica o estado das partículas como sobreviventes (verde), colisões (vermelho) ou ejeções (azul).	64
Figura 24	Grade $a \times e$ formada por 160.000 partículas considerando o parâmetro $\mu^* = 0,012$ ($r_c = 81,77$ km). A figura apresenta o tempo de sobrevivência das partículas em uma escala de 1 a 10.000 períodos orbitais (isto é, de 4 horas a 1612 dias), destacando em branco a região de alta instabilidade.	65
Figura 25	Grade $a \times e$ formada por 160.000 partículas considerando o parâmetro $\mu^* = 0,012$ ($r_c = 81,77$ km), mostrando o estado final de cada partícula. A figura indica em cinza claro a região de alta instabilidade e classifica o estado das partículas como sobreviventes (verde), colisões (vermelho) ou ejeções (azul).	66
Figura 26	Grade $a \times e$ formada por 160.000 partículas considerando o parâmetro $\mu^* = 0,018$ ($r_c = 93,60$ km). A figura apresenta o tempo de sobrevivência das partículas em uma escala de 1 a 10.000 períodos orbitais (isto é, de 4 horas a 1612 dias), destacando em branco a região de alta instabilidade.	67
Figura 27	Grade $a \times e$ formada por 160.000 partículas considerando o parâmetro $\mu^* = 0,018$ ($r_c = 93,60$ km), mostrando o estado final de cada partícula. A figura indica em cinza claro a região de alta instabilidade e classifica o estado das partículas como sobreviventes (verde), colisões (vermelho) ou ejeções (azul).	68
Figura 28	Grade $a \times e$ formada por 160.000 partículas considerando o parâmetro $\mu^* = 0,022$ ($r_c = 100,08$ km). A figura apresenta o tempo de sobrevivência das partículas em uma escala de 1 a 10.000 períodos orbitais.	69
Figura 29	Grade $a \times e$ formada por 160.000 partículas considerando o parâmetro $\mu^* = 0,022$ ($r_c = 100,08$ km), mostrando o estado final de cada partícula. A figura indica em cinza claro a região de alta instabilidade e classifica o estado das partículas como sobreviventes (verde), colisões (vermelho) ou ejeções (azul).	70
Figura 30	Estados finais das simulações para diferentes valores de μ^* . Em verde estão as partículas que sobreviveram durante toda a simulação, em vermelho as partículas que colidiram com o corpo central em algum momento, e em azul as partículas que foram ejetadas do sistema. O intervalo considerado para μ^* é $\mu^* \in [2 \times 10^{-3} ; 3 \times 10^{-2}]$.	70

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Comparação metodológica entre os trabalhos de referência e a presente dissertação.	20
Tabela 2 – Relação entre os valores inteiros (m, j) e o tipo de ressonância.	36
Tabela 3 – Resumo dos principais resultados de ocultações estelares para 307261 Máni (ROM-MEL et al., 2023)	39
Tabela 4 – Parâmetros orbitais de 307261 Máni (JPL, CALTECH ; Minor Planet Center)	40
Tabela 5 – Posições iniciais das partículas em órbitas periódicas e suas respectivas ressonâncias.	43
Tabela 6 – Posições teóricas e desvio percentual dos dados obtidos numericamente para cada ressonância.	49
Tabela 7 – Raio Equivalente da Cratera para Diferentes Valores de μ^* , assumindo $M_1 = 1,37 \times 10^{20}$ kg e $\rho = 720$ kg/m ³ . M_2 e r_c representam, respectivamente, a massa removida para formar a cratera e o raio da cratera.	60
Tabela 8 – Distribuição Percentual dos Estados Finais por valor de μ^* de acordo com a Figura 30	66

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	MODELAGEM MATEMÁTICA	18
2.1	Contextualização Metodológica	18
2.2	Equações do movimento	20
2.3	Constante de Jacobi	28
2.4	Superfícies de Seção de Poincaré	30
2.5	Elementos orbitais	31
2.6	Posição inicial na órbita	33
2.7	Ressonância spin-órbita	35
3	ANÁLISE DAS REGIÕES DE ESTABILIDADE COM PARÂMETROS DE MÁNI	38
3.1	O objeto 307261 Mání	38
3.2	Superfícies de Seção de Poincaré e trajetória das partículas	41
3.3	Construção da grade $a \times e$	45
3.4	Curvas de velocidade zero	51
4	GRADES $a \times e$: SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	55
4.1	Comparação entre as técnicas	55
4.2	Variando o tamanho da cratera	59
5	DISCUSSÃO	71
	REFERÊNCIAS	74

1 INTRODUÇÃO

A identificação de regiões de estabilidade são alicerces para trabalhos em dinâmica orbital, pois permitem definir regiões onde são possíveis a previsão do movimento e o tempo de sobrevivência de partículas em um determinado sistema dinâmico. Essas previsões tornam-se importantes em cenários reais, em que há necessidade de considerar agentes perturbadores como a não esfericidade do campo gravitacional, a influência de outros corpos celestes e a pressão de radiação solar. Nesses ambientes, a análise de estabilidade passa a ser indispensável para a viabilidade e segurança de operações, desde o planejamento de missões de longa duração em torno de asteroides (LANG, 2021) até a previsão do movimento de objetos que podem estar em rota de colisão com a Terra (LI; YANG; LUO, 2022).

No sistema Plutão-Charonte, por exemplo, a análise da *sailboat island*, uma região estável, teve implicações diretas na segurança da missão New Horizons (GIULIATTI WINTER et al., 2015). O estudo validou a rota principal da sonda por não cruzar essa região, ao mesmo tempo que demonstrou o risco de uma trajetória alternativa que atravessava-a. Adicionalmente, o mapeamento das áreas mais densas da *sailboat island* serviu como um guia para otimizar a busca por novas luas ou detritos. Essa mesma abordagem é utilizada em outros sistemas binários, como os de asteroides, onde prever a origem de instabilidades é essencial para o sucesso de missões de proximidade (FU; WANG, 2021). Em cenários que necessitam de um maior tempo de permanência no sistema, como no caso de Didymos, o foco se desloca para a robustez da estabilidade. Nesse contexto, Fodde et al. (2023) buscaram encontrar órbitas que se mantenham estáveis, encontrando um balanço entre a estabilidade e condições ideais de observação para missões como a Hera.

O sistema binário Didymos-Dimorphos também serviu como objeto de estudo para a defesa planetária, campo dedicado a desenvolver e testar estratégias de mitigação de riscos de impacto. Nesse contexto, o sistema foi alvo da missão DART da NASA, que aplicou a técnica do impacto cinético para alterar a órbita de Dimorphos ao redor de Didymos. Embora o desvio esperado no período orbital de Dimorphos fosse de 7 minutos em um cenário de colisão perfeitamente inelástica (CHENG et al., 2018), o resultado observado foi muito mais significativo, com a análise das curvas de luz indicando uma mudança de aproximadamente 33 minutos (THOMAS et al., 2023). Essa diferença foi atribuída à ejeção de material da superfície de Dimorphos, que formou uma nuvem de pedregulhos ao seu redor (JEWITT et al., 2023). A determinação e análise das regiões de estabilidade nesse caso, identificam possíveis trajetórias dos pedregulhos ejetados pelo impacto da missão DART (MADEIRA et al., 2024) e que permanecem ao redor de Dimorphos sendo alvos de estudo para a missão Hera, da ESA, cujo encontro com Dimorphos está previsto para 2026. A delimitação de regiões de estabilidade é, portanto, um objetivo comum no estudo de dinâmica orbital de diferentes sistemas, como os binários. Para o planejamento de missões espaciais, é fundamental identificar essas regiões, pois elas podem conter detritos.

A determinação dessas regiões de estabilidade, assim como a simulação da trajetória dos fragmentos, exige a adoção de um modelo matemático que descreva com uma certa precisão o campo gravitacional de um corpo de formato irregular. Na dinâmica orbital, duas abordagens se destacam para essa

finalidade: o modelo de Mascons (concentração de massa) e o de Poliedros.

O modelo de mascons foi originalmente utilizado para explicar anomalias gravitacionais positivas em bacias de impacto lunar (como *Mare Imbrium* e *Mare Serenitatis*), a partir da análise de dados da missão Lunar Orbiter (MULLER; SJOGREN, 1968). Análises mostraram que a aceleração gravitacional nessas áreas era maior que a esperada, indicando concentrações de massa sob a superfície. Esse método consiste em representar o potencial gravitacional do corpo pela soma dos potenciais de um conjunto de massas pontuais em posições fixas, evitando a integração do potencial sobre o volume total do corpo, diminuindo a complexidade do problema.

Como alternativa, Werner (1994) propôs uma abordagem que modela um corpo não esférico aproximando seu formato por um poliedro com um grande número de faces (geralmente triangulares). Este método assume que o corpo possui densidade constante, uma característica fundamental para sua aplicação e também, uma limitação do modelo. A primeira implementação foi realizada por Werner e Scheeres (1996) para representar o campo gravitacional do asteroide 4769 Castalia, permitindo uma comparação quantitativa com as outras duas principais técnicas de modelagem da época (mascons e harmônicos esféricos).

Apesar da alta precisão oferecida pelos modelos de mascons e poliedros, estudos da dinâmica ao redor de corpos irregulares frequentemente utilizam representações simplificadas do campo gravitacional. Essas abordagens permitem isolar e destacar os efeitos de deformações físicas específicas (como protuberâncias e/ou coeficientes de harmônicos esféricos) na estabilidade de partículas ou de objetos sob ação da gravidade do corpo central.

Isso, por exemplo, é realizado por Sicardy et al. (2019a), que analisam a dinâmica de anéis ao redor dos corpos Chariklo e Haumea. O sistema de Chariklo é investigado a partir de dois modelos: como uma esfera com uma anomalia de massa localizada no equador, tendo essa anomalia 10^{-5} da massa do corpo central, ou como um elipsoide. Já Haumea é representado como um elipsoide triaxial homogêneo com um alongamento de maior proeminência. As análises consideram apenas o plano equatorial e incorporam dissipação de energia por colisões. O material localizado dentro do raio de Roche tende a colidir com o corpo central, enquanto o material situado fora desse raio é gradualmente empurrado para além da ressonância 2:1. Consequentemente, para que anéis estáveis existam em corpos assimétricos, é necessário que a ressonância de 2:1 esteja dentro do limite de Roche, condição favorecida por objetos de alta rotação.

Nesse contexto, Madeira et al. (2022) investigam a dinâmica de partículas ao redor de um corpo esférico com uma anomalia de massa localizada no equador, considerando um modelo de densidade constante. Inicialmente, analisam os efeitos da variação da massa anômala μ (normalizada como sendo a razão entre massa da anomalia pela massa do corpo central) mantendo constante a rotação do corpo central $\lambda = 0.471$ (normalizada como sendo a razão entre a velocidade angular do corpo central pela velocidade angular kepleriana que uma partícula teria imediatamente sobre a superfície). Em seguida, fixam $\mu = 10^{-3}$ e estudam a influência da variação de λ . Os resultados revelam a existência de uma região instável ao redor de qualquer corpo com anomalia de massa. Nesta região, encontros próximos com a anomalia aumentam a excentricidade das partículas, levando a colisões com o corpo central ou à sua ejeção. A análise mostra que a extensão dessa região é fortemente influenciada pelo parâmetro de

rotação λ , devido à sobreposição de ressonâncias, e exibe pouca dependência do parâmetro de massa μ . No caso específico de Chariklo, os autores aplicam este modelo e identificam que essa região caótica interna se estende além do raio de corotação. Em contraste, uma região externa estável abriga as órbitas quase circulares dos anéis, contradizendo a hipótese de que estariam presos a uma ressonância spin-órbita 3:1.

Em continuação ao estudo da estabilidade ao redor de corpos simétricos não esféricos, [Ribeiro et al. \(2023\)](#) analisam a dinâmica em torno de corpos modelados como elipsoides de Jacobi, caracterizados por três semieixos distintos, sendo $A > B > C$. O trabalho inclui Haumea, Chariklo e outros cinco corpos hipotéticos. O campo gravitacional é descrito por meio dos coeficientes harmônicos esféricos J_2 (oblaticidade) e C_{22} (elipticidade). A análise foi feita variando o C_{22} e o período de rotação utilizando a técnica de superfícies de seção de Poincaré, que mostraram que as órbitas de primeiro tipo formam uma ampla região estável, caracterizadas suas baixas excentricidades. Já as órbitas ressonantes tendem a apresentar excentricidades maiores e instabilidade. A estabilidade geral dessas regiões aumenta conforme a elipticidade do corpo diminui, o que já era esperado, pois sua elipticidade representa um grau de perturbação no sistema. No caso de Haumea, sua rápida rotação e forma alongada favorecem colisões e ejeções. Corpos com menor velocidade de rotação deslocam as ressonâncias para distâncias maiores, ampliando a região estável e permitindo a formação de novas estruturas ressonantes e minimizando colisões e ejeções. Em velocidades intermediárias de rotação, observa-se a bifurcação da ressonância 6:2, originando uma nova região caótica. Os autores demonstram que métodos convencionais, como o uso de frequências epicíclicas ou a aproximação de dois corpos esféricos, não são adequados para determinar a localização precisa das ressonâncias próximas ao corpo. Assim, propõem a representação geométrica da órbita como uma alternativa mais assertiva. Para Chariklo, o estudo reforça a hipótese de que seus anéis estão associados a órbitas de primeiro tipo, e não à ressonância 3:1.

Esses estudos evidenciam que modelos simplificados podem ser eficazes para analisar os mecanismos dinâmicos que influenciam a estabilidade ao redor de corpos irregulares. Inspirado por essa abordagem, o presente trabalho investiga a dinâmica de partículas em torno de um corpo que apresenta uma concavidade localizada no equador, representada no potencial gravitacional como um ponto de ausência de massa. A metodologia segue de forma análoga à adotada por [Madeira et al. \(2022\)](#), que consideram uma massa anômala, e por [Ribeiro et al. \(2023\)](#), que analisam um elipsoide com os termos de oblaticidade J_2 e de elipticidade C_{22} já mencionados. As equações de movimento são integradas numericamente e, a partir disso, as estruturas dinâmicas associadas às órbitas das partículas são analisadas em espaços de fase, permitindo identificar regiões relacionadas a trajetórias ressonantes e caóticas. Com base nessas análises, descreve-se a estrutura dinâmica do sistema e sua variação conforme o grau de perturbação é aumentado, neste caso correspondente à concavidade. Vale ressaltar que, diferentemente de [Madeira et al. \(2022\)](#), não serão determinadas as larguras teóricas das ressonâncias, e, ao contrário do procedimento adotado em [Ribeiro et al. \(2023\)](#), não será necessária a correção dos semi-eixos maiores associados às ressonâncias a partir da geometria da órbita, uma vez que, naquele estudo, o termo C_{22} deslocava o valor teórico desses semi-eixos. Aqui, a análise da estrutura dinâmica também será realizada sob a ótica do tempo de sobrevivência e do estado final das

partículas cujas órbitas foram simuladas (sobrevivência, colisão ou ejeção).

A escolha de um objeto com tal característica não é arbitrária: observações recentes, obtidas por meio da técnica de ocultação estelar, revelaram características topográficas peculiares em Centauros e TNOs, sugerindo a presença de crateras e outras assimetrias significativas em seus formatos. A técnica de ocultação estelar, aplicada pela primeira vez a TNOs em 2009 (ELLIOT et al., 2010), é uma ferramenta útil para mensurar algumas propriedades físicas como dimensão, formato, período de rotação, além de detectar a presença de anéis, atmosfera ou satélites, a partir da análise das curvas de luz geradas pela passagem do corpo em frente a uma estrela (HOWELL, 2000). Além de ser uma alternativa acessível à observação direta, uma vez que não demanda muitos recursos tecnológicos para sua utilização, essa técnica foi útil para a descoberta dos anéis de Urano (Elliot et al., 1977), bem como na detecção de anéis ao redor de corpos menores, como o centauro Chariklo (BRAGA-RIBAS et al., 2014; BÉRARD et al., 2017) e os TNOs Haumea (ORTIZ et al., 2017) e Quaoar (MORGADO et al., 2023), localizados no Cinturão de Kuiper, definido pela região de 30 a 50 UA de distância do Sol. Os dados obtidos a partir dessas observações também têm servido como motivação para estudos em estabilidade dinâmica, por expor irregularidades significativas em corpos como Chariklo e Haumea, seja por seus formatos elipsoidais ou pela presença de anomalias de massa (LEIVA et al., 2017; SICARDY et al., 2019a; SICARDY, 2020; MADEIRA et al., 2022; RIBEIRO et al., 2023).

Entre os casos mencionados, destacamos o TNO Máni (ou 2002 MS_4), cuja topografia foi detalhada por (ROMMEL et al., 2023) com base em nove ocultações estelares realizadas entre 2019 e 2022, envolvendo 116 telescópios distribuídos entre a Europa, Norte da África e Ásia Ocidental. As observações revelaram feições como uma depressão de 11 km de profundidade, uma elevação de 25 km e, principalmente, uma grande cratera equatorial com 322 km de extensão e 45 km de profundidade, representando mais de 10% do raio do corpo. Foi analisado a razão de massa equivalente à cratera (que representa seu tamanho) e mantido o período de rotação do corpo ao longo do estudo. Utilizando os dados de (Rommel et al., 2023) como referência para os valores iniciais, foram realizadas as integrações numéricas das equações de movimento, com o objetivo de mapear as regiões de estabilidade do sistema e investigar como essas regiões evoluem com a variação de cada parâmetro.

Essa dissertação foi elaborada em 5 capítulos, apresentados a seguir:

O Capítulo 2 descreve os fundamentos teóricos e a implementação numérica adotados neste trabalho, incluindo: a formulação das equações de movimento no referencial girante, a definição da constante de Jacobi, a técnica das superfícies de seção de Poincaré, os elementos orbitais, a caracterização do objeto 307261 Máni e os aspectos da ressonância spin-órbita.

O Capítulo 3 apresenta a análise das regiões de estabilidade por meio das Superfícies de Seção de Poincaré, considerando os parâmetros físicos fixos (λ e μ) e variando a constante de Jacobi. A partir desses resultados, foi construída uma grade no espaço definido pelo semi-eixo maior (a) e pela excentricidade (e) das órbitas, destacando numericamente a posição e a largura das ressonâncias spin-órbita.

O Capítulo 4 apresenta mapas de estabilidade gerados a partir de partículas distribuídas em um intervalo de valores de a e e , utilizando o tempo de sobrevivência como critério para avaliar a estabilidade. Neste capítulo, investiga-se o efeito da variação de μ na estrutura dinâmica do sistema.

No Capítulo 5, discutimos os resultados, fazemos comparações com estudos prévios que abordam problemas análogos, permitindo contextualizar e validar as análises apresentadas. Por fim, são indicadas propostas de trabalhos futuros que poderão expandir as investigações aqui desenvolvidas, tanto aprimorando os modelos adotados quanto explorando novos cenários dinâmicos.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA

Os objetivos deste trabalho são analisar as regiões de estabilidade em torno de um corpo central não esférico e simétrico, contendo uma cratera no equador, e investigar como essas regiões se modificam com a variação do tamanho da cratera e do período de rotação do corpo central. Buscamos compreender os efeitos dessas variações no campo gravitacional e sua influência sobre a dinâmica das partículas próximas.

2.1 CONTEXTUALIZAÇÃO METODOLÓGICA

Para investigar a estrutura dinâmica em sistemas compostos por corpos de formatos irregulares necessita-se de modelagens matemáticas bem como ferramentas de integração numérica, onde os dados resultantes das simulações que consideram essas modelagens e que usam essas ferramentas, são analisados e interpretados para descrever consequências de forças perturbativas na estrutura dinâmica do sistema. Esta dissertação foi desenvolvida sobre um alicerce metodológico consolidado por alguns estudos semelhantes a esse, que utilizam ferramentas analíticas e numéricas para descrever a dinâmica de partículas em diferentes sistemas. Esta seção tem como objetivo explicitar que a abordagem aqui adotada para o estudo do objeto transnetuniano (307261) Máni não é isolada, mas sim uma extensão direta de técnicas já validadas anteriormente. Especificamente, o modelo matemático da cratera aqui proposto é análogo ao modelo de massa anômala, explorado em [Madeira et al. \(2022\)](#), estando a única diferença presente na modelagem, pois neste trabalho consideramos uma ausência de massa.

A base teórica para a compreensão da interação entre um corpo central irregular e um conjunto de partículas distribuídas ao redor do corpo foi feita em [Sicardy et al. \(2019b\)](#). Ao investigarem a dinâmica de anéis ao redor de Centauros, como Chariklo, e planetas anões, como Haumea, os autores estabeleceram que irregularidades topográficas ou elongações do corpo central geram fortes ressonâncias spin-órbita. O trabalho de [Sicardy et al. \(2019b\)](#) fornece ferramentas para uma abordagem analítica e numérica que são fundamentais para proceder com um estudo dinâmico em um problema de dois corpos que considera a rotação do corpo central. Um dos resultados sugere que termos não-axisimétricos do potencial gravitacional estão relacionados com a remoção de objetos na região de corotação (região em que o período orbital das partículas é o mesmo que o período de rotação do corpo central), isto é, a região se torna instável e o material que inicialmente estava ali é empurrado para uma região mais externa do sistema.

Dentre os trabalhos correlatos, a referência mais direta para o desenvolvimento desta dissertação é a de [Madeira et al. \(2022\)](#). Estes autores investigaram a dinâmica ao redor de um corpo esférico contendo uma massa anômala localizada no equador. A importância deste artigo para o nosso estudo está na equivalência matemática e conceitual dos modelos físicos adotados. Enquanto [Madeira et al. \(2022\)](#) definem o potencial gravitacional considerando uma massa anômala positiva adicionada ao corpo central, a modelagem aqui apresentada utiliza a mesma estrutura de equações diferenciais, porém considerando uma ausência de massa, a cratera, o que literalmente se traduz no uso de um parâmetro de massa anômala, porém negativo.

A metodologia empregada nesta dissertação espelha algumas das técnicas e análises empregadas em [Madeira et al. \(2022\)](#). Assim como os autores utilizaram as Superfícies de Seção de Poincaré para analisar a estabilidade a partir da topologia dos espaços de fase e definir numericamente as larguras das ressonâncias, nós aplicamos a mesma técnica para identificar e caracterizar as ilhas e suas respectivas evoluções e, por fim, determinar a estabilidade em regiões próximas do corpo central. Vale salientar que em [Madeira et al. \(2022\)](#) os resultados das larguras das ressonâncias obtidas numericamente foram comparados com as previsões teóricas obtidas analiticamente, algo que não está no escopo desta dissertação. A identificação das ressonâncias de primeira ordem e de segunda ordem nas Superfícies de Seção de Poincaré seguem o mesmo princípio para a identificação dos tipos de órbita (primeiro e segundo tipo, periódicas e quase periódicas) e também para a caracterização do caos.

Ainda no contexto de corpos irregulares, [Ribeiro et al. \(2023\)](#) estenderam a análise para corpos com formato de elipsoide de Jacobi (prolatos), como o planeta anão Haumea. Embora o modelo de potencial de [Ribeiro et al. \(2023\)](#) inclua termos de elipticidade que não estão presentes no modelo de cratera pontual desta dissertação, uma parte da metodologia e da análise de estabilidade é aderida neste trabalho. Um ponto relevante para comparação é o comportamento das órbitas de primeiro tipo. Tanto em [Madeira et al. \(2022\)](#) quanto em [Ribeiro et al. \(2023\)](#), e confirmado nos resultados desta dissertação, as órbitas periódicas de primeiro tipo, associadas a órbitas com baixa excentricidade, formam uma região de estabilidade caracterizada pela ausência de caos generalizado, tendo apenas caos confinado entre as regiões de ressonância. Isso reforça a conclusão de que, independentemente da natureza da perturbação (seja uma proeminência, uma cratera ou um elipsoide), existem órbitas estáveis em que eventualmente possam abrigar satélites ou anéis. Adicionalmente, [Ribeiro et al. \(2023\)](#) introduziram o Método da Geometria da Órbita para corrigir a localização das ressonâncias, pois se utilizados os elementos keplerianos para isso, há uma divergência expressiva na localização dessas ressonâncias, principalmente em regiões próximas do corpo central com formato de elipsoide. Nesta dissertação, a perturbação introduzida no campo gravitacional provém unicamente de uma cratera localizada no equador do corpo central (o que, na ausência dessa assimetria, o tornaria esférico). Por essa razão, a determinação das ressonâncias spin-órbita não exigiu considerar a geometria da órbita. Ressalta-se que, em [Madeira et al. \(2022\)](#), essa mesma correção também não foi necessária.

Em suma, este trabalho se insere nesta mesma linha de pesquisa desses trabalhos mencionados. Ao adotarmos o modelo de [Madeira et al. \(2022\)](#) com a inversão do sinal da massa anômala, investigamos o cenário físico oposto. A Tabela [I](#) resume a relação entre os trabalhos basilares e a presente dissertação, destacando as semelhanças nos métodos empregados e as especificidades dos modelos físicos.

Desta forma, os resultados aqui apresentados caracterizam não apenas a estrutura dinâmica utilizando os parâmetros de Máni, mas também nos traz o entendimento de como essa estrutura evolui devido o aumento do grau de perturbação no sistema, complementando o espectro de casos anteriormente explorados pela literatura neste contexto de corpos irregulares.

Na próxima seção serão desenvolvidas as equações de movimento com base na modelagem matemática adotada, são elas que serão integradas numericamente para obtenção dos resultados presentes nesse trabalho.

Tabela 1 – Comparação metodológica entre os trabalhos de referência e a presente dissertação.

Trabalho	Modelo Físico	Motivação para aplicação
(SICARDY et al., 2019b)	Expansão de potencial (harmônicos (C_{22}) e massa anômala)	Confinamento de material (Chariklo e Haumea)
(MADEIRA et al., 2022)	Esfera com massa pontual ($\mu > 0$)	Dinâmica em um sistema em que o corpo central possui uma massa anômala (Chariklo)
(RIBEIRO et al., 2023)	Elipsoide (J_2 e C_{22})	Dinâmica em um sistema em que o corpo central é um elipsoide (Haumea)
Presente Trabalho	Esfera com ausência de massa pontual ($\mu^* = -\mu$)	Dinâmica em um sistema em que o corpo central possui uma cratera (Máni)

2.2 EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

Em dinâmica orbital, o problema de dois corpos descreve o movimento de duas massas pontuais sob atração gravitacional mútua. Por ser um sistema integrável, sua solução analítica permite descrever a órbita por um conjunto de parâmetros. Cinco deles, os elementos orbitais, definem a forma e a orientação da órbita no espaço: o semi-eixo maior (a), a excentricidade (e), a inclinação (i), o argumento do pericentro (ω) e a longitude do nodo ascendente (Ω). Para localizar o corpo em sua trajetória, utiliza-se um sexto parâmetro, que é uma referência de tempo, como o tempo de passagem pelo pericentro (τ).

Neste trabalho, consideramos um sistema composto por um corpo central que apresenta uma assimetria de massa em seu equador causada pela presença de uma cratera profunda, a qual modifica o campo gravitacional, causando uma perturbação na trajetória de partículas e objetos nas proximidades da região.

Para um corpo perfeitamente esférico com distribuição de massa homogênea, uma aproximação de primeira ordem é válida: o corpo pode ser representado como um ponto de massa localizado em seu centro de massa. Nesse caso, não é necessário considerar o formato do corpo, pois a força gravitacional atua como se toda a massa estivesse concentrada nesse ponto. Além disso, a rotação do corpo não afeta a estrutura dinâmica ao seu redor, independente de sua velocidade angular.

No entanto, o corpo central do sistema dinâmico estudado neste trabalho não é esférico, o que resulta em uma assimetria no campo gravitacional ao seu redor; para representá-lo, é necessário descrever o centro de massa do sistema (origem), a posição do centro geométrico do corpo central e a localização da cratera, ambos em relação ao centro de massa.

Seguindo as condições descritas em Madeira et al. (2022), consideramos a velocidade angular do corpo central constante, dada por $\omega_c = 2\pi/T$, onde T representa o período de rotação. Para simplificar o sistema, normalizamos as grandezas, adotando a constante gravitacional $G = 1$, a massa do corpo central $M = 1$ e $R_c = 1$ como o raio do corpo central e também a distância entre o centro geométrico da porção esférica do corpo e a cratera. Para normalizar a unidade de tempo, assumimos a frequência

Kepleriana crítica com base nas outras grandezas normalizadas:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{GM}{R_c^3}} = \sqrt{\frac{4\pi G\rho}{3}} = 1, \quad (1)$$

onde ω_k , determinada pela terceira lei de Kepler, representa a velocidade angular Kepleriana que uma partícula teria caso orbitasse o corpo central em uma trajetória imediatamente acima de sua superfície.

Definem-se dois parâmetros físicos:

- $\lambda = \omega_c/\omega_k$, que representa a taxa de rotação do corpo central;
- $\mu^* = m/M$, que corresponde à massa normalizada da cratera, onde m é a massa do material retirado para a formação da cratera, M é a massa total do corpo central dada por $M = M_0 + m$, e M_0 representa a massa do corpo central sem a cratera. Ressalta-se que, na modelagem, μ^* é considerado positivo, uma vez que a massa removida para a formação da cratera é tratada como positiva. Entretanto, nas integrações numéricas, μ^* assume valor negativo, a fim de distingui-lo de uma massa anômala.

Considera-se que o corpo central possui densidade ρ e que o material retirado para formar a cratera tem a mesma densidade ρ . Para o cálculo de m , assume-se que a cratera é esférica, ou seja,

$$m = V \cdot \rho = \left(\frac{4\pi r_c^3}{3} \right) \rho,$$

onde V e r_c são o volume e o raio da cratera.

Para definir a posição do centro geométrico da porção esférica do corpo central e da cratera no sistema, começamos expressando a equação do centro de massa:

$$C_M = \frac{x_1 M_0 + x_2 m}{M_0 + m}. \quad (2)$$

Sendo x_1 e x_2 as posições no eixo x do centro geométrico do corpo central (ou seja, o centro do corpo central caso ele fosse esférico) e da cratera, respectivamente, e:

$$x_2 - x_1 = 1 \quad (3)$$

representa a distância entre eles.

Como lidamos com o sistema com a origem no centro de massa, então tomamos $CM = 0$, logo:

$$0 = x_1 \frac{M_0}{M_0 + m} + x_2 \frac{m}{M_0 + m} \rightarrow x_1 \frac{M_0}{M_0 + m} = -x_2 \frac{m}{M_0 + m} \quad (4)$$

Chamaremos $\mu_1 = \frac{M_0}{M_0 + m}$ e $\mu^* = \frac{m}{M_0 + m}$, então:

$$x_1 \mu_1 = -x_2 \mu^* \quad (5)$$

Temos:

$$x_1 = -x_2 \frac{\mu^*}{\mu_1} \quad (6)$$

Substituindo (6) em (3):

$$x_2 + x_2 \frac{\mu^*}{\mu_1} = 1 \rightarrow \frac{x_2 \mu_1 + x_2 \mu^*}{\mu_1} = 1 \quad (7)$$

Isolando x_2 :

$$x_2 = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu^*} \quad (8)$$

Sendo $\mu_1 = 1 - \mu^*$, obtemos que:

$$x_2 = \frac{1 - \mu^*}{1 - \mu^* + \mu^*} \quad (9)$$

Portanto,

$$x_2 = 1 - \mu^* \quad (10)$$

E para encontrar a posição de x_1 :

$$x_1 = -x_2 \frac{\mu^*}{\mu_1} = -\frac{\mu_1 \mu^*}{\mu_1} \quad (11)$$

Portanto,

$$x_1 = -\mu^* \quad (12)$$

Sendo assim, as posições do centro da porção esférica do corpo central e da cratera em relação ao centro de massa são:

$$p_1 = (x_1, y_1) = (-\mu^*, 0) \quad (13)$$

e

$$p_2 = (x_2, y_2) = (1 - \mu^*, 0) \quad (14)$$

Essas posições estão ilustradas na **Figura 1**, logo abaixo:

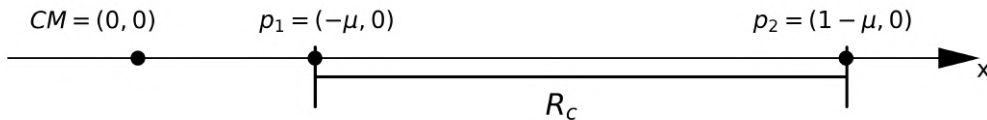


Figura 1 – Posição do centro geométrico p_1 e da cratera p_2 em relação ao centro de massa. O raio do corpo central é definido por R_c .

A expressão do potencial gravitacional devido ao sistema terá a contribuição do corpo central e da cratera, definimos $r_1 = (x - x_1, y - y_1)$ e $r_2 = (x - x_2, y - y_2)$ como a distância da partícula teste em relação ao centro da porção esférica do corpo central e da cratera, respectivamente, vale ressaltar

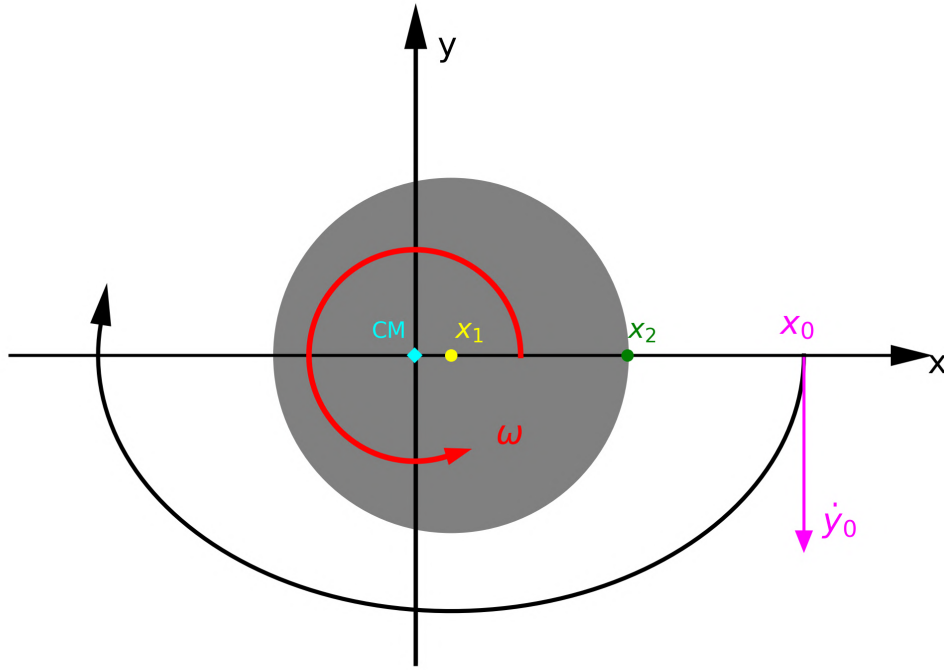


Figura 2 – Esquema do sistema dinâmico adotado neste trabalho. O corpo, simétrico e não esférico, possui uma cratera indicada por x_2 , enquanto o centro da porção esférica está em x_1 e o centro de massa (CM) encontra-se deslocado à esquerda. O corpo gira com velocidade angular ω , e em rosa está representada a posição inicial de uma partícula em x_0 , com velocidade inicial $\dot{y}_0$.

que $r(t) = (x(t), y(t))$ é a posição da partícula teste em determinado instante. E assim, a expressão do potencial normalizada devido ao corpo com a cratera é escrito como:

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{1}{r_1} - \frac{\mu^*}{r_2} \quad (15)$$

A [Figura 2](#) ilustra o sistema dinâmico, no qual o corpo central gira com frequência angular ω_c em torno do eixo z , que está sobre o centro de massa CM e é perpendicular ao plano (x, y) . A figura também exibe o centro geométrico (p_1) do corpo, a cratera representada por um ponto de massa (p_2) e um recorte da trajetória de uma partícula, cuja posição inicial é $(x_0, 0)$ e sua velocidade inicial é $(0, \dot{y}_0)$.

Obtemos as equações do movimento a partir da relação entre as coordenadas do sistema de referência inercial e o sistema de referência rotacional. Para isso, adotamos o plano $(\hat{X}, \hat{Y})$ no sistema de referência inercial com origem no centro de massa do sistema. Considerando r_1 e r_2 as distâncias da partícula em relação ao centro da porção esférica do corpo central e em relação a cratera no referencial inercial, respectivamente, temos:

$$r_1 = \sqrt{(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2} \quad (16)$$

$$r_2 = \sqrt{(X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2} \quad (17)$$

Queremos as componentes da aceleração em X, Y e, sabendo que $\mathbf{F} = m_p \cdot \mathbf{a}$, onde m_p é a massa da partícula e que, por definição, a força gravitacional $\mathbf{F} = -\nabla U$, temos:

$$\nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial X}, \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \quad (18)$$

As derivadas parciais são:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(-\frac{1}{r_1} - \frac{\mu^*}{r_2} \right) = \frac{(X - X_1)}{r_1^3} + \frac{\mu^*(X - X_2)}{r_2^3} \quad (19)$$

E

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left(-\frac{1}{r_1} - \frac{\mu^*}{r_2} \right) = \frac{(Y - Y_1)}{r_1^3} + \frac{\mu^*(Y - Y_2)}{r_2^3} \quad (20)$$

De forma geral obtemos a força que age sobre uma partícula no sistema de referência inercial:

$$\mathbf{F} = -\nabla U = - \left(\frac{(X - X_1)}{r_1^3} + \frac{\mu^*(X - X_2)}{r_2^3}, \frac{(Y - Y_1)}{r_1^3} + \frac{\mu^*(Y - Y_2)}{r_2^3} \right) \quad (21)$$

As componentes da aceleração no plano (X, Y) são expressas por:

$$\ddot{X} = \frac{X_1 - X}{r_1^3} + \frac{\mu^*(X_2 - X)}{r_2^3} \quad (22)$$

$$\ddot{Y} = \frac{Y_1 - Y}{r_1^3} + \frac{\mu^*(Y_2 - Y)}{r_2^3} \quad (23)$$

O módulo das distâncias entre a partícula e o centro geométrico do corpo central (r_1) e entre a partícula e a cratera (r_2) é o mesmo, independentemente do referencial adotado. Considerando as posições x_1 e x_2 no referencial rotacional, as distâncias r_1 e r_2 podem ser descritas de forma equivalente como:

$$r_1 = \sqrt{(x - \mu^*)^2 + y^2} \quad (24)$$

$$r_2 = \sqrt{(x - 1 + \mu^*)^2 + y^2} \quad (25)$$

Para considerar a rotação do corpo central, adotamos um referencial girante (x, y) , no qual rotaciona com a mesma frequência angular do corpo (λt). Assumindo que esse plano é perpendicular ao eixo de rotação do corpo, ao aplicar uma matriz de rotação simples em torno do eixo z , é possível transformar as coordenadas do sistema inercial para o sistema rotacional. A expressão da matriz de rotação simples nesse contexto, é descrita como:

$$\mathbf{R}(t) = \begin{bmatrix} \cos(\lambda t) & -\sin(\lambda t) \\ \sin(\lambda t) & \cos(\lambda t) \end{bmatrix}, \quad (26)$$

As coordenadas (x, y) no sistema de referência rotacional são obtidas aplicando a matriz de rotação $\mathbf{R}(t)$ às coordenadas (X, Y) do sistema inercial:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \mathbf{R}(t) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Isso resulta nas expressões:

$$X = x \cos(\lambda t) - y \sin(\lambda t) \quad (28)$$

$$Y = x \sin(\lambda t) + y \cos(\lambda t) \quad (29)$$

Para obter as componentes da velocidade no sistema rotacional, derivamos as expressões de X e Y em relação ao tempo t :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \frac{d}{dt} (x \cos(\lambda t) - y \sin(\lambda t)), \\ \dot{Y} &= \frac{d}{dt} (x \sin(\lambda t) + y \cos(\lambda t)). \end{aligned} \quad (30)$$

Aplicando a regra do produto e a derivada das funções trigonométricas, obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \dot{x} \cos(\lambda t) - x \lambda \sin(\lambda t) - \dot{y} \sin(\lambda t) - y \lambda \cos(\lambda t), \\ \dot{Y} &= \dot{x} \sin(\lambda t) + x \lambda \cos(\lambda t) + \dot{y} \cos(\lambda t) - y \lambda \sin(\lambda t). \end{aligned} \quad (31)$$

Reorganizando os termos, podemos escrever:

$$\dot{X} = (\dot{x} - \lambda y) \cos(\lambda t) - (\dot{y} + \lambda x) \sin(\lambda t) \quad (32)$$

$$\dot{Y} = (\dot{x} - \lambda y) \sin(\lambda t) + (\dot{y} + \lambda x) \cos(\lambda t) \quad (33)$$

Essas expressões podem ser escritas na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = \mathbf{R}(t) \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} - \lambda y \\ \dot{y} + \lambda x \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Para obter as componentes da aceleração no sistema rotacional, derivamos as expressões de $\dot{X}$ e $\dot{Y}$ em relação ao tempo t :

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= \frac{d}{dt} ((\dot{x} - \lambda y) \cos(\lambda t) - (\dot{y} + \lambda x) \sin(\lambda t)), \\ \ddot{Y} &= \frac{d}{dt} ((\dot{x} - \lambda y) \sin(\lambda t) + (\dot{y} + \lambda x) \cos(\lambda t)). \end{aligned} \quad (35)$$

Aplicando a regra do produto e simplificando, obtemos:

$$\begin{aligned}
\ddot{X} &= (\ddot{x} - \lambda \dot{y}) \cos(\lambda t) - (\dot{x} - \lambda y) \lambda \sin(\lambda t) \\
&\quad - (\ddot{y} + \lambda \dot{x}) \sin(\lambda t) - (\dot{y} + \lambda x) \lambda \cos(\lambda t), \\
\ddot{Y} &= (\ddot{x} - \lambda \dot{y}) \sin(\lambda t) + (\dot{x} - \lambda y) \lambda \cos(\lambda t) \\
&\quad + (\ddot{y} + \lambda \dot{x}) \cos(\lambda t) - (\dot{y} + \lambda x) \lambda \sin(\lambda t).
\end{aligned} \tag{36}$$

Reorganizando os termos, chegamos a:

$$\ddot{X} = (\ddot{x} - 2\lambda \dot{y} - \lambda^2 x) \cos(\lambda t) - (\ddot{y} + 2\lambda \dot{x} - \lambda^2 y) \sin(\lambda t) \tag{37}$$

$$\ddot{Y} = (\ddot{x} - 2\lambda \dot{y} - \lambda^2 x) \sin(\lambda t) + (\ddot{y} + 2\lambda \dot{x} - \lambda^2 y) \cos(\lambda t) \tag{38}$$

Essas expressões podem ser escritas na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{bmatrix} = \mathbf{R}(t) \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x} - 2\lambda \dot{y} - \lambda^2 x \\ \ddot{y} + 2\lambda \dot{x} - \lambda^2 y \end{bmatrix} \tag{39}$$

As matrizes das componentes da posição, velocidade e aceleração no sistema de referência inercial são, respectivamente:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \mathbf{R}(t) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \tag{40}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = \mathbf{R}(t) \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} - \lambda y \\ \dot{y} + \lambda x \end{bmatrix}, \tag{41}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{bmatrix} = \mathbf{R}(t) \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x} - 2\lambda \dot{y} - \lambda^2 x \\ \ddot{y} + 2\lambda \dot{x} - \lambda^2 y \end{bmatrix}. \tag{42}$$

Podemos observar que as equações (22) e (23) apresentam as expressões para a aceleração no sistema de referência inercial, sendo que o módulo das distâncias é equivalente nos referenciais inercial e rotacional. Aplicando a matriz de rotação diretamente nessas equações e substituindo as distâncias entre a partícula e o centro geométrico do corpo central, bem como entre a partícula e a cratera, por suas componentes no referencial rotacional, podemos igualar os resultados obtidos às expressões (37) e (38), chegando à forma desejada:

$$\begin{aligned}
&(\ddot{x} - 2\lambda \dot{y} - \lambda^2 x) \cdot \cos(\lambda t) - (\ddot{y} + 2\lambda \dot{x} - \lambda^2 y) \cdot \sin(\lambda t) = \\
&\quad \left[\frac{x_1 - x}{r_1^3} + \frac{\mu^*(x_2 - x)}{r_2^3} \right] \cdot \cos(\lambda t) + \left[\frac{1}{r_1^3} + \frac{\mu^*}{r_2^3} \right] \cdot y \sin(\lambda t) \tag{43}
\end{aligned}$$

$$(\ddot{x} - 2\lambda\dot{y} - \lambda^2 x) \cdot \sin(\lambda t) + (\ddot{y} + 2\lambda\dot{x} - \lambda^2 y) \cdot \cos(\lambda t) = \left[\frac{x_1 - x}{r_1^3} + \frac{\mu^*(x_2 - x)}{r_2^3} \right] \cdot \sin(\lambda t) - \left[\frac{1}{r_1^3} + \frac{\mu^*}{r_2^3} \right] \cdot y \cos(\lambda t) \quad (44)$$

Multiplicamos a primeira equação por $\cos(\lambda t)$ e a segunda equação por $\sin(\lambda t)$, e somamos os resultados.

1ª equação:

$$\begin{aligned} & [(\ddot{x} - 2\lambda\dot{y} - \lambda^2 x) \cos(\lambda t) - (\ddot{y} + 2\lambda\dot{x} - \lambda^2 y) \sin(\lambda t)] \cos(\lambda t) = \\ & (\ddot{x} - 2\lambda\dot{y} - \lambda^2 x) \cos^2(\lambda t) - (\ddot{y} + 2\lambda\dot{x} - \lambda^2 y) \sin(\lambda t) \cos(\lambda t) \end{aligned} \quad (45)$$

2ª equação:

$$\begin{aligned} & [(\ddot{x} - 2\lambda\dot{y} - \lambda^2 x) \sin(\lambda t) + (\ddot{y} + 2\lambda\dot{x} - \lambda^2 y) \cos(\lambda t)] \sin(\lambda t) = \\ & (\ddot{x} - 2\lambda\dot{y} - \lambda^2 x) \sin^2(\lambda t) + (\ddot{y} + 2\lambda\dot{x} - \lambda^2 y) \sin(\lambda t) \cos(\lambda t) \end{aligned} \quad (46)$$

Somando as duas:

$$(\ddot{x} - 2\lambda\dot{y} - \lambda^2 x) \cos^2(\lambda t) + (\ddot{x} - 2\lambda\dot{y} - \lambda^2 x) \sin^2(\lambda t) \quad (47)$$

$$= (\ddot{x} - 2\lambda\dot{y} - \lambda^2 x) (\cos^2(\lambda t) + \sin^2(\lambda t)) \quad (48)$$

$$= \ddot{x} - 2\lambda\dot{y} - \lambda^2 x \quad (49)$$

Lado direito da soma:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{x_1 - x}{r_1^3} + \frac{\mu^*(x_2 - x)}{r_2^3} \right] \cos^2(\lambda t) + \left[\frac{1}{r_1^3} + \frac{\mu^*}{r_2^3} \right] y \sin(\lambda t) \cos(\lambda t) + \\ & \left[\frac{x_1 - x}{r_1^3} + \frac{\mu^*(x_2 - x)}{r_2^3} \right] \sin^2(\lambda t) - \left[\frac{1}{r_1^3} + \frac{\mu^*}{r_2^3} \right] y \sin(\lambda t) \cos(\lambda t) = \\ & \left[\frac{x_1 - x}{r_1^3} + \frac{\mu^*(x_2 - x)}{r_2^3} \right] (\cos^2(\lambda t) + \sin^2(\lambda t)) = \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \frac{\mu^*(x_2 - x)}{r_2^3} \end{aligned} \quad (50)$$

Depois disso, multiplicamos a primeira equação novamente, dessa vez por $-\sin(\lambda t)$ e a segunda equação por $\cos(\lambda t)$, e somamos os resultados.

1ª equação:

$$\begin{aligned} & - [(\ddot{x} - 2\lambda\dot{y} - \lambda^2 x) \cos(\lambda t) - (\ddot{y} + 2\lambda\dot{x} - \lambda^2 y) \sin(\lambda t)] \sin(\lambda t) \\ & = -(\ddot{x} - 2\lambda\dot{y} - \lambda^2 x) \sin(\lambda t) \cos(\lambda t) + (\ddot{y} + 2\lambda\dot{x} - \lambda^2 y) \sin^2(\lambda t) \end{aligned} \quad (51)$$

2ª equação:

$$\begin{aligned} & [(\ddot{x} - 2\lambda\dot{y} - \lambda^2 x) \sin(\lambda t) + (\ddot{y} + 2\lambda\dot{x} - \lambda^2 y) \cos(\lambda t)] \cos(\lambda t) \\ & = (\ddot{x} - 2\lambda\dot{y} - \lambda^2 x) \sin(\lambda t) \cos(\lambda t) + (\ddot{y} + 2\lambda\dot{x} - \lambda^2 y) \cos^2(\lambda t) \end{aligned} \quad (52)$$

Somando as duas:

$$\begin{aligned} & (\ddot{y} + 2\lambda\dot{x} - \lambda^2 y) \sin^2(\lambda t) + (\ddot{y} + 2\lambda\dot{x} - \lambda^2 y) \cos^2(\lambda t) = \\ & (\ddot{y} + 2\lambda\dot{x} - \lambda^2 y)(\sin^2(\lambda t) + \cos^2(\lambda t)) = \ddot{y} + 2\lambda\dot{x} - \lambda^2 y \end{aligned} \quad (53)$$

Lado direito da soma:

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{x_1 - x}{r_1^3} + \frac{\mu^*(x_2 - x)}{r_2^3} \right] \sin(\lambda t) \cos(\lambda t) - \left[\frac{1}{r_1^3} + \frac{\mu^*}{r_2^3} \right] y \sin^2(\lambda t) + \\ & \left[\frac{x_1 - x}{r_1^3} + \frac{\mu^*(x_2 - x)}{r_2^3} \right] \sin(\lambda t) \cos(\lambda t) - \left[\frac{1}{r_1^3} + \frac{\mu^*}{r_2^3} \right] y \cos^2(\lambda t) = \\ & - \left[\frac{1}{r_1^3} + \frac{\mu^*}{r_2^3} \right] y (\sin^2(\lambda t) + \cos^2(\lambda t)) = - \left[\frac{1}{r_1^3} + \frac{\mu^*}{r_2^3} \right] y \end{aligned} \quad (54)$$

Então, obtemos as equações de movimento no sistema de referência rotacional:

$$\ddot{x} - 2\lambda\dot{y} - \lambda^2 x = - \left[\frac{x + \mu^*}{r_1^3} + \frac{\mu^*(x - 1)}{r_2^3} \right] \quad (55)$$

$$\ddot{y} + 2\lambda\dot{x} - \lambda^2 y = - \left[\frac{1}{r_1^3} + \frac{\mu^*}{r_2^3} \right] y \quad (56)$$

Com o lado direito sendo as componentes da força em x e y, respectivamente. Representamos as equações do movimento no sistema de referência rotacional de acordo com [Scheeres et al. \(1996\)](#):

$$\ddot{x} = 2\lambda\dot{y} + \lambda^2 x - F_x \quad (57)$$

$$\ddot{y} = -2\lambda\dot{x} + \lambda^2 y - F_y \quad (58)$$

onde $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ são as componentes da aceleração, $\dot{x}$, $\dot{y}$ são as componentes da velocidade e x , y as componentes da posição da partícula no referencial girante. F_x , F_y são as derivadas parciais do potencial, ou seja, as componentes da força.

2.3 CONSTANTE DE JACOBI

Embora o problema de dois corpos possua constantes de movimento (energia e vetor momento angular), no caso de um corpo não esfericamente simétrico com rotação, a energia e o momento angular por unidade de massa deixam de ser constantes, sendo apenas a constante de Jacobi conservada, esta

é definida a partir de uma manipulação das equações (57) e (58); então multiplicamos a (57) por $\dot{x}$ e (58) por $\dot{y}$:

$$\dot{x}\ddot{x} - 2\lambda\dot{x}\dot{y} = \lambda^2 x\dot{x} + U_x\dot{x} \quad (59)$$

$$\dot{y}\ddot{y} + 2\lambda\dot{y}\dot{x} = \lambda^2 y\dot{y} + U_y\dot{y} \quad (60)$$

Então, somamos as duas equações multiplicadas:

$$\dot{x}\ddot{x} - 2\lambda\dot{x}\dot{y} + \dot{y}\ddot{y} + 2\lambda\dot{y}\dot{x} = \lambda^2 x\dot{x} + U_x\dot{x} + \lambda^2 y\dot{y} + U_y\dot{y} \quad (61)$$

Note que os termos $-2\lambda\dot{x}\dot{y}$ e $+2\lambda\dot{y}\dot{x}$ se cancelam:

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = \lambda^2 x\dot{x} + \lambda^2 y\dot{y} + U_x\dot{x} + U_y\dot{y} \quad (62)$$

O lado esquerdo fica:

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} \quad (63)$$

Aplicando a regra da cadeia, podemos reescrever como a derivada temporal da energia cinética:

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (64)$$

E do lado direito temos

$$\lambda^2 x\dot{x} + \lambda^2 y\dot{y} + U_x\dot{x} + U_y\dot{y} \quad (65)$$

Esse termo pode ser reescrito como a derivada temporal de uma função combinada:

$$\lambda^2(x\dot{x} + y\dot{y}) = \frac{1}{2}\lambda^2 \frac{d}{dt} (x^2 + y^2) \quad (66)$$

e

$$U_x\dot{x} + U_y\dot{y} = \frac{dU}{dt} \quad (67)$$

Então, o lado direito se torna:

$$\frac{1}{2}\lambda^2 \frac{d}{dt} (x^2 + y^2) + \frac{dU}{dt} \quad (68)$$

Portanto, a equação (61) pode ser expressa como:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}\lambda^2 \frac{d}{dt} (x^2 + y^2) + \frac{dU}{dt} \quad (69)$$

Integrando essa expressão em dt , temos:

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + C_J = \frac{1}{2}\lambda^2(x^2 + y^2) + U \quad (70)$$

Onde C_J é a constante de integração, sendo nesse caso chamada de Constante de Jacobi. Podemos reescrever a expressão da seguinte forma:

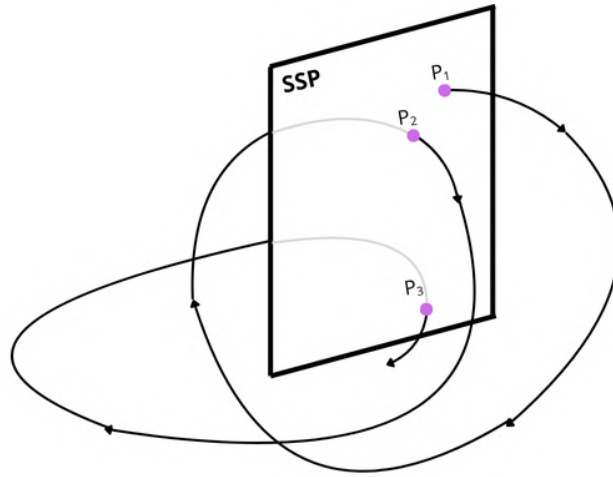


Figura 3 – Representação esquemática de uma Superfície de Seção de Poincaré, construída a partir dos pontos em que uma órbita cruza um plano de referência (P_1 , P_2 , P_3).

$$C_J = \lambda^2(x^2 + y^2) + 2U - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 \quad (71)$$

A equação da Constante de Jacobi (C_J) é a base para a construção de Superfícies de Seção de Poincaré, técnica que será apresentada no próximo capítulo. A partir de um valor escolhido para C_J , determinamos uma das condições iniciais para a integração numérica das equações de movimento.

2.4 SUPERFÍCIES DE SEÇÃO DE POINCARÉ

Uma superfície de Poincaré trata-se de um mapa gerado pelo cruzamento de pontos das trajetórias no espaço de fase com uma seção fixa do sistema. Esses mapas são gerados no espaço de fase para valores fixos da constante de Jacobi (RIBEIRO et al., 2023), utilizada como ferramenta para analisar regiões estáveis, instáveis e caóticas (no referencial girante) de um dado sistema. Essa técnica tem sido amplamente empregada em estudos do Problema Restrito de Três Corpos (Hénon, 1965a; Hénon, 1965b; Hénon, 1966a; Hénon, 1966b; Jefferys, 1971; WINTER; MURRAY, 1994a; WINTER; MURRAY, 1994b), permitindo a análise da estabilidade e do caos no sistema, assim como a identificação de regiões de ressonância de movimento médio.

No contexto do Problema de Dois Corpos com assimetria do corpo primário, anteriormente aplicado em Borderes-Motta e Winter (2018), Winter, Borderes-Motta e Ribeiro (2019), Madeira et al. (2022), Ribeiro et al. (2023) e aqui estendido para o caso de um corpo com uma cratera posicionada sobre o equador, as partículas, cuja massa são desprezíveis, descrevem movimento ao redor do corpo central, apresentando regiões estáveis associadas a ressonâncias spin-órbita, a órbitas de primeiro tipo, associadas a baixas excentricidades, além de áreas de instabilidade e caos.

A construção das SSPs e a análise detalhada da estabilidade, apresentadas nos Capítulos 3 e 4, são realizadas a partir da integração numérica das equações de movimento no referencial girante (57 e 58) para dadas condições iniciais. Para isso, foi utilizada a função `solve_ivp`, parte da biblioteca SciPy em Python, com o método RK45 (Runge–Kutta de ordem 4–5), um integrador adaptativo que ajusta automaticamente o passo de integração para garantir a precisão desejada. As simulações foram

paralelizadas, distribuindo os cálculos entre múltiplos núcleos de CPU, o que reduziu significativamente o tempo total de execução.

Os gráficos de Superfícies de Seção de Poincaré são, portanto, representações planas do espaço de fase, onde as trajetórias do sistema dinâmico são registradas cada vez que cruzam a condição $y = 0$. Nesse caso, as equações (57) e (58) são integradas numericamente assumindo um valor constante de C_J , a partir do qual se obtém a componente inicial da velocidade em y ($\dot{y}_0$). Com as condições iniciais $x, \dot{x}$ e $y_0 = 0$, são retornados os valores $x, y, \dot{x}$ e $\dot{y}$. Assim, constrói-se o espaço de fase $x \times \dot{x}$ com pontos discretos, representando as interseções das partículas teste com o plano.

2.5 ELEMENTOS ORBITAIS

Os elementos orbitais servem para a caracterização da órbita de um corpo, definindo a forma e a orientação de sua trajetória. Eles são fundamentais para a nossa análise, pois as regiões de estabilidade e instabilidade serão descritas em função do semi-eixo maior (a) e da excentricidade (e), além de estudarmos a variação temporal desses elementos em casos específicos.

- O semieixo maior a define o tamanho da órbita e está diretamente relacionado ao período orbital pela terceira lei de Kepler.
- A excentricidade e indica o formato da órbita, sendo $e = 0$ para órbitas circulares, $0 < e < 1$ para órbitas elípticas, $e = 1$ para órbitas parabólicas e $e > 1$ para órbitas hiperbólicas.
- A inclinação I representa o ângulo entre o plano orbital e um plano de referência, geralmente o plano equatorial ou da eclíptica.
- A longitude do nodo ascendente Ω mede o ângulo entre uma direção de referência, como o equinócio vernal, e o ponto onde o corpo cruza o plano de referência movendo-se de sul para norte, definindo assim a orientação da órbita no espaço.
- O argumento do pericentro ω é o ângulo entre o nodo ascendente e o pericentro, medido dentro do plano orbital, indicando a orientação da órbita dentro do seu próprio plano.
- O tempo de passagem pelo pericentro τ , responsável por dar a referência de tempo para o sistema.

Convertemos agora as coordenadas de posição (X, Y, Z) e velocidade ($\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$) de uma partícula em uma órbita elíptica no plano de referência inercial, no instante t , em um conjunto de seis elementos orbitais: a (semieixo maior), e (excentricidade), I (inclinação), Ω (longitude do nodo ascendente), ω (argumento do pericentro) e f (anomalia verdadeira), além do tempo de passagem pelo pericentro, τ . Assume-se que a massa do objeto central é M e que as partículas teste não possuem massa, de modo que sua contribuição nas equações seja desprezível e, a partir das componentes no referencial inercial, os elementos orbitais são calculados. Os vetores de posição $\mathbf{r}$ e velocidade $\mathbf{v}$ no referencial inercial são definidos conforme Murray e Dermott (1999):

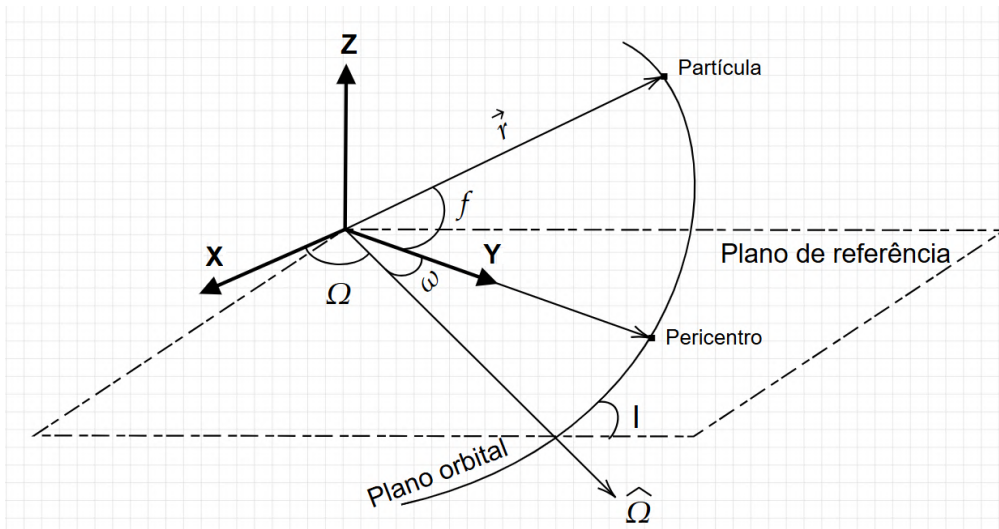


Figura 4 – Movimento de um corpo ao longo de sua órbita considerando um plano de referência fixo no espaço tridimensional, onde (X, Y, Z) são as coordenadas do sistema de referência inercial, onde $\hat{\Omega}$ é a direção do nodo ascendente, I é a inclinação da órbita em relação ao plano de referência, Ω é a longitude do nodo ascendente, ω é o argumento do pericentro, f a anomalia verdadeira e $\vec{r}$ o vetor posição da partícula em relação a origem do sistema.

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix}. \quad (72)$$

As magnitudes dos vetores de posição e velocidade são calculadas por:

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad (73)$$

$$v = \sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2} \quad (74)$$

O vetor do momento angular orbital $\mathbf{h}$ é obtido pelo produto vetorial entre $\mathbf{r}$ e $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (75)$$

A magnitude do momento angular h é dada por:

$$h = \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2} \quad (76)$$

A inclinação i é o ângulo entre o vetor do momento angular $\mathbf{h}$ e o eixo z :

$$I = \arctan \left(\frac{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}}{h_z} \right) \quad (77)$$

A longitude do nodo ascendente Ω é o ângulo entre o nodo ascendente e o eixo de referência:

$$\Omega = \arctan \left(\frac{h_y}{h_x} \right) \quad (78)$$

O semieixo maior a e a excentricidade e são calculados por:

$$a = \left(\frac{2}{r} - \frac{v^2}{GM} \right)^{-1} \quad (79)$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{h^2}{GMa}} \quad (80)$$

onde G é a constante gravitacional e M é a massa do corpo central.

A anomalia verdadeira f é o ângulo entre o vetor de posição r e o pericentro:

$$f = \arctan \left(\frac{a(1 - e^2)vr}{a(1 - e^2)h - r} \right) \quad (81)$$

O argumento do pericentro ω é o ângulo entre o nodo ascendente e o pericentro:

$$\omega = \arctan \left(\frac{A}{\cos(\Omega)^{-1}xr^{-1} + \sin A \cdot \sin \Omega \cdot \cos I} \right) - f \quad (82)$$

onde A é uma variável auxiliar definida como:

$$A = \frac{Z}{r \cdot \sin(I)} \quad (83)$$

Na próxima seção, apresentaremos as expressões que permitem determinar as componentes de posição e velocidade no referencial inercial (X,Y,VX,VY) a partir do par de condições iniciais (a,e). Esses resultados serão fundamentais para o segundo método adotado neste trabalho, baseado em simulações numéricas realizadas sobre uma grade de condições iniciais.

2.6 POSIÇÃO INICIAL NA ÓRBITA

Para construir a grade de condições iniciais na grade (a, e) , é necessário compreender como obter as componentes de posição e velocidade no referencial inercial a partir desses elementos orbitais. Esse procedimento consiste em converter as componentes para o referencial girante, integrar as equações de movimento e, posteriormente, recuperar a evolução temporal dos elementos orbitais, bem como o tempo de sobrevivência e o estado final das partículas (sobrevivência, colisão ou ejeção).

Assume-se que as partículas iniciam ou no pericentro ou no apocentro de suas órbitas. Essa escolha simplifica as expressões e permite organizar a grade de forma consistente: cada partícula, embora possua valores distintos de (a, e) , começa na mesma fase orbital (pericentro ou apocentro). Antes disso, apresentamos as expressões que fornecem as componentes da posição e velocidade no referencial inercial a partir do semi-eixo maior (a), da excentricidade (e) e da anomalia verdadeira (f).

Seguindo Murray e Dermott (1999), temos que a solução do Problema de 2 Corpos é a equação geral de uma cônica em coordenadas polares, expressa por:

$$r(f) = \frac{p}{1 + e \cos(f)} \quad (84)$$

onde p é o *semilatus rectum*. No caso da elipse, $p = a(1 - e^2)$, de modo que utilizamos:

$$r(f) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(f)} \quad (85)$$

Note que, no apocentro ou no pericentro, temos $\dot{Y} = \dot{X} = 0$. Assim, as componentes relevantes serão X e $\dot{Y}$.

No pericentro, $f = 0$. Substituindo em $r(f)$:

$$r_p = r(0) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(0)} = \frac{a(1 - e)(1 + e)}{(1 + e)} = a(1 - e) \quad (86)$$

No apocentro, $f = \pi$:

$$r_a = r(\pi) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\pi)} = \frac{a(1 - e)(1 - e)}{(1 - e)} = a(1 + e) \quad (87)$$

Como $Y = 0$ nesses pontos, as coordenadas X_p e X_a são:

$$X_p = a(1 - e) \quad (88)$$

$$X_a = a(1 + e) \quad (89)$$

As componentes da velocidade são obtidas pela expressão:

$$\dot{Y} = \frac{na}{\sqrt{1 - e^2}}(e + \cos(f)) \quad (90)$$

onde n é o movimento médio, $n = \sqrt{GM/R_c^3}$.

No pericentro ($f = 0$):

$$\dot{Y}_p(f) = \dot{Y}_p(0) = \frac{na}{\sqrt{1 - e^2}}(e + \cos(0)) = \frac{na(1 + e)}{\sqrt{(1 - e)}\sqrt{1 + e}} = na\sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \quad (91)$$

No apocentro ($f = \pi$):

$$\dot{Y}_a(f) = \dot{Y}_a(\pi) = \frac{na}{\sqrt{1 - e^2}}(e + \cos(\pi)) = \frac{na(1 - e)}{\sqrt{(1 - e)}\sqrt{1 + e}} = na\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \quad (92)$$

Como $\dot{X} = 0$, as velocidades no pericentro e no apocentro são, respectivamente:

$$\dot{Y}_p = na\sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \quad (93)$$

$$\dot{Y}_a = na\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \quad (94)$$

Essas expressões são fundamentais para determinar as condições iniciais necessárias à integração das equações de movimento. Nas simulações destinadas à construção das Superfícies de Seção de

Poincaré, as condições iniciais foram fixadas em $y_0 = 0$ e $\dot{x}_0 = 0$, restando determinar a velocidade $\dot{y}_0$ em função da Constante de Jacobi (C_J). A magnitude dessa velocidade é obtida isolando o termo da velocidade $\dot{y}$ na expressão da integral de Jacobi (equação (71)), resultando em:

$$\dot{y}^2 = \lambda^2(x^2 + y^2) + 2U - \dot{x}^2 - C_J \quad (95)$$

As partículas iniciam a simulação no apocentro de suas órbitas. No programa desenvolvido, o sinal de $\dot{y}_0$ é definido de acordo com a posição inicial em relação ao raio síncrono: utilizamos $\dot{y}_0 < 0$ para partículas que começam internas ao raio síncrono e $\dot{y}_0 > 0$ para aquelas que começam externas a ele. Essa condição assegura a direção correta do movimento no referencial rotacional, no qual órbitas internas evoluem no sentido anti-horário e órbitas externas no sentido horário. A equação (96) apresenta a expressão para a velocidade no referencial inercial ($\dot{Y}$) no instante inicial ($t = 0$):

$$\dot{Y}_0 = \dot{y}_0 + \lambda x_0 \quad (96)$$

Os termos associados à rotação do sistema, λ , e à posição inicial, x_0 , são positivos. No programa utilizado para integrar as órbitas e construir as Superfícies de Seção de Poincaré, adotamos $\dot{y}_0 \leq 0$ sempre que a partícula inicia sua trajetória com $x_0 \geq a_{\text{sinc}}$. Para determinados valores de C_J — e, portanto, de $\dot{y}_0$ — as estruturas internas e próximas ao raio síncrono tornam-se visíveis nos gráficos. As partículas foram iniciadas com condições $x_0 \in [1,0 ; 7,0] R_c$ e $C_J \in [1,715 ; 2,167] R_c^2 \omega_k^2$, para a análise de todas as ressonâncias de primeira ordem foi utilizado $\dot{x}_0 = 0$ exceto para a ressonância 3 : 1 que foi necessário utilizar $\dot{x}_0 \neq 0$.

A próxima seção apresenta o conceito de ressonância spin-órbita e as expressões para o seu cálculo teórico, incluindo as correções decorrentes da irregularidade do corpo central.

2.7 RESSONÂNCIA SPIN-ÓRBITA

Descrito o método a ser utilizado, é importante, agora, compreender conceito de ressonância spin-órbita para proceder com as análises. Em dinâmica orbital, entender o que são ressonâncias é fundamental, sendo as ressonâncias de movimento médio um exemplo bastante conhecido. Nesse caso, ocorre uma comensurabilidade entre o movimento médio de dois corpos que orbitam o mesmo corpo central, como no sistema Netuno-Plutão, no qual a cada três voltas de Netuno ao redor do Sol, Plutão completa duas.

Já a ressonância spin-órbita pode ser entendida como uma comensurabilidade entre o movimento orbital de uma partícula e o período de rotação do corpo central em torno do qual ela orbita. Um exemplo é o dos satélites geossíncronos da Terra, que completam uma órbita no mesmo intervalo em que a Terra realiza uma rotação.

Um parâmetro de referência para o estudo das ressonâncias é o raio síncrono, definido como a distância orbital na qual o período da partícula é igual ao período de rotação do corpo central. Pela Terceira Lei de Kepler temos:

$$a_{sync} = \left(\frac{GM_0}{\omega_c^2} \right)^{1/3} = \left(\frac{G}{\omega_c^2 \mu^*} \right)^{1/3}, \quad (97)$$

Partículas com semi-eixo maior inferior ao raio síncrono ($a < a_{sync}$) apresentam uma velocidade orbital maior que a velocidade de rotação do corpo central ($\omega_p > \omega_c$), enquanto aquelas localizadas além desse limite ($a > a_{sync}$) apresentam uma velocidade angular menor ($\omega_p < \omega_c$). Essas diferenças devem ser consideradas para determinação do sinal (positivo ou negativo) da velocidade relativa da partícula e, conseqüentemente, para a construção das Superfícies de Seção de Poincaré.

A condição geral para uma ressonância $m : (m - j)$ pode ser expressa como (SICARDY et al., 2019a):

$$m \cdot \omega_c = (m - j) \cdot \omega_p(a, \mu) + j \cdot \dot{\varpi}(a, \mu) \quad (98)$$

onde m e j são inteiros que definem a razão de comensurabilidade, e j define a ordem da ressonância. Nesse trabalho não consideramos os casos em que $m = 1$ e $j = 0$, inerente a ressonância spin-órbita 1:1 e nem o caso em que $j = m$, inerente a ressonâncias apsidais, ou seja, um tipo de ressonância spin-órbita na qual o movimento da partícula está em comensurabilidade com a taxa de precessão de sua linha dos ápsides. Consideramos os casos de acordo com a Tabela 2.

Tabela 2 – Relação entre os valores inteiros (m, j) e o tipo de ressonância.

m	j	$\omega_c : \omega_p$
-1	1	2:1
-2	1	3:2
-4	1	5:4
-1	2	3:1

As frequências orbitais, que correspondem à taxa média de revolução da partícula em torno do corpo central, e epicíclica radial, associada às pequenas oscilações radiais em torno da órbita média, podem ser obtidas a partir de Chandrasekhar (1942):

$$\omega_p^2 = \frac{1}{r} \frac{dU_0}{dr}, \quad \kappa^2 = \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} (r^4 \omega_p^2), \quad (99)$$

onde U_0 representa a parte axisimétrica do potencial gravitacional. Seguindo a abordagem de Madeira et al. (2022), que analisaram o caso de um corpo esférico com uma massa anômala, consideramos aqui uma situação análoga, em que a anomalia é modelada como uma cratera, o que se reflete no valor negativo de μ . O potencial é descrito, em ambos os casos, da seguinte forma:

$$U_0 = -\frac{1}{r} \left(1 + \mu + \frac{\mu}{4} \alpha^2 \right), \quad (100)$$

com $\alpha = 1/a$ e a o semieixo maior da partícula. Mantendo apenas os termos de menor ordem em μ , obtêm-se:

$$\omega_p^2 = \frac{1}{a^3} \left(1 + \mu + \frac{3\mu}{4} \alpha^2 \right), \quad (101)$$

$$\kappa^2 = \frac{1}{a^3} \left(1 + \mu - \frac{3\mu}{4} \alpha^2 \right). \quad (102)$$

A partir dessas expressões e definindo qual tipo de ressonância investigar (em termos de m e j), é possível determinar numericamente a localização das ressonâncias localizadas relativamente próximas ao corpo central. No próximo capítulo, apresentaremos uma análise detalhada das regiões de estabilidade considerando parâmetros físicos fixos para o sistema em estudo.

3 ANÁLISE DAS REGIÕES DE ESTABILIDADE COM PARÂMETROS DE MÁNI

Este capítulo inicialmente possui uma seção dedicada a abordar as características conhecidas do objeto transnetuniano Máni, posterior a isso é apresentada a análise da dinâmica de partículas ao redor de um corpo simétrico não esférico com foco na identificação de regiões de estabilidade e instabilidade. Buscamos caracterizar os tipos de ressonância spin-órbita e suas respectivas larguras em uma grade de parâmetros $a \times e$. Para isso, exploramos a evolução da topologia do espaço de fases através da variação da constante de Jacobi (C_J), desde valores que marcam o surgimento das primeiras regiões de estabilidade até aqueles em que predominam as órbitas de primeiro tipo, caracterizadas por excentricidade quase zero e não associadas a ressonâncias (RIBEIRO et al., 2023) (para o sistema analisado, $C_J \in [1,650; 2,426] R_c^2 \omega_k^2$). A partir da análise das SSP's, calculamos os elementos orbitais de órbitas periódicas (centros das ilhas de estabilidade) e quasi-periódicas (curvas que delineam o limite de cada ilha de estabilidade). Utilizando a equação (98), identificamos os tipos de ressonância spin-órbita associados a cada região da grade.

A investigação da dinâmica para cada valor de C_J começou com uma amostragem inicial de 40 partículas, distribuídas com velocidade inicial $\dot{x}_0 = 0$ e posições x_0 no intervalo $[1, 7] R_c$. Este intervalo foi escolhido para focar a análise na região próxima ao corpo e, ao mesmo tempo, obter uma caracterização preliminar da estrutura do espaço de fases.

Posteriormente, para a construção das SSP's finais, a amostragem foi aprimorada. Incluímos condições com $\dot{x}_0 \neq 0$, essenciais para representar ilhas de estabilidade de ordem par e simétricas em relação ao eixo $\dot{x} = 0$, e outros valores de x_0 , além de distribuir mais partículas para $x_0 > 7 R_c$. O objetivo foi obter uma representação mais precisa das órbitas periódicas, quasi-periódicas e suas respectivas estruturas.

Para construir o limite da região de instabilidade na grade $a \times e$, selecionamos, a partir de cada SSP, a primeira partícula a sobreviver, delineando a fronteira da região de estabilidade/caos (partículas que sobrevivem), com a região de instabilidade, onde partículas colidem imediatamente com o corpo central devido as condições iniciais. Posteriormente, fazemos a conversão das coordenadas do referencial girante para o inercial, utilizando as equações (28), (29), (32), (33), (37) e (38), o que nos permitiu definir, numericamente, as larguras e os centros das ressonâncias.

3.1 O OBJETO 307261 MÁNI

O transnetuniano (307261) 2002 MS₄, atualmente chamado de Máni, foi descoberto em 18 de junho de 2002 pelos astrônomos Chad Trujillo e Michael E. Brown. Encontra-se no Cinturão de Kuiper, uma região além da órbita de Netuno que se estende aproximadamente de 37 a 48 unidades astronômicas (UA) do Sol. Essa região é de grande interesse científico, pois abriga os objetos transnetunianos (TNOs), considerados remanescentes da formação do Sistema Solar e que preservam informações sobre o período de formação do sistema solar externo (BARUCCI, 2008).

Características físicas do TNO Máni estimadas pelas observações de Rommel et al. (2023) estão apresentadas na Tabela 3. Essas informações foram obtidas por meio de eventos de ocultação estelar e

forneem medidas diretas do tamanho, forma, albedo e topografia superficial do objeto.

Tabela 3 – Resumo dos principais resultados de ocultações estelares para 307261 Máni (Rommel et al., 2023)

Parâmetro	Valor(es) e Incertezas
Semieixo maior projetado (a')	412 ± 10 km
Semieixo menor projetado (b')	385 ± 17 km
Diâmetro equivalente à área projetada	796 ± 24 km
Albedo geométrico derivado (p_V)	$0,100 \pm 0,025$ (com $H_V = 3,63 \pm 0,05$ mag)
Topografia	Depressão de 11 km; Pico de 25 km; Cratera de 322 km e 45 km de profundidade

Com base na oblicidade observada e nos períodos de rotação estimados por Thirouin (2013) (7,33 h e 10,44 h), Rommel et al. (2023) considerou que os limites superiores obtidos para a densidade (8,0 e 3,9 g/cm³, respectivamente) são muito altos, sugerindo que a oblicidade real pode ser maior do que a estimada. Ao aplicar o limite superior teórico de oblicidade para um esferoide de Maclaurin (em termos de eixos principais de inércia $A = B < C$), obtêm-se limites inferiores para a densidade de 0,72 g/cm³ (para 7,44 h) e 0,36 g/cm³ (para 10,44 h). Esses amplos intervalos de densidade indicam que a verdadeira oblicidade do objeto pode estar subestimada ou que as variações na curva de luz se devem à topografia superficial.

Quando um corpo rígido em rotação atinge equilíbrio hidrostático, sua forma pode se desviar da esfericidade. Uma das soluções clássicas para a forma de corpos em rotação, assumindo fluido homogêneo e rotação em torno do eixo principal, é a aproximação pelo elipsoide de Maclaurin. Esse elipsoide representa um corpo oblato, ou seja, um elipsoide de revolução com dois eixos iguais e um menor, descrevendo um corpo com simetria axial, como planetas achatados nos polos.

Os semieixos que definem sua geometria são $A = B$, que representam os semieixos equatoriais, e C , o semieixo polar, menor que A . A forma do elipsoide é descrita pela equação:

$$\frac{x^2 + y^2}{A^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1, \quad \text{com } A > C. \quad (103)$$

Essa configuração é aplicável a corpos com baixas a moderadas taxas de rotação, para os quais a simetria axial é mantida e a forma oblata é uma solução estável em equilíbrio hidrostático.

A tabela 4 apresenta os parâmetros orbitais de Máni, conforme dados do JPL Small-Body Database e do Minor Planet Center.

Para as simulações baseadas nos dados do Máni, os parâmetros físicos (μ^* , λ) foram calculados considerando as estimativas feitas em Rommel et al. (2023). A partir da classificação do objeto como um elipsoide de Maclaurin ($A = B > C$) e utilizando seu limite superior de oblicidade ($\epsilon = 0,417$), consideramos os semi-eixos $A = B \approx 401,37$ km e $C = 234$ km. Entretanto, o modelo adotado neste trabalho simplifica o corpo para uma esfera com raio de volume equivalente, $R_c \approx 335$ km, incorporando uma cratera também esférica, com raio $r_c = 45$ km, igual à sua profundidade.

Tabela 4 – Parâmetros orbitais de 307261 Máni (JPL, CALTECH, ; Minor Planet Center,)

Parâmetro	Valor aproximado
Período orbital	269–272 anos
Semieixo maior	41,7–41,9 UA
Excentricidade	0,14–0,15
Inclinação	17,6°–17,8°
Periélio	35,6–36,1 UA
Afélio	47,8–47,9 UA
Última passagem pelo periélio	Abril de 1853
Próxima passagem pelo periélio	Junho de 2123

A equação para o raio equivalente é:

$$R_c = (A \cdot B \cdot C)^{1/3}. \quad (104)$$

A massa do corpo central (M_0) e a massa removida para formar a cratera (m_c) foram estimadas considerando uma distribuição uniforme de densidade, com valor máximo $\rho = 720 \text{ kg/m}^3$, correspondente a um período de rotação de $T = 7,44 \text{ h}$. Utilizando a relação:

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho r^3, \quad (105)$$

obteve-se $M_0 = 1,13 \times 10^{20} \text{ kg}$ para o corpo central e $m_c = 2,75 \times 10^{17} \text{ kg}$ para a massa retirada para formar a cratera.

Para definir a taxa de rotação do sistema (λ), foi considerado o período de rotação em segundos:

$$T_{rot} = (T \cdot 60 \cdot 60) = 26.784 \text{ s}, \quad (106)$$

então a frequência angular do corpo central foi calculada como:

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T_{rot}}. \quad (107)$$

A frequência kepleriana crítica foi definida por:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{G(M_0 + m_c)}{R_c^3}}, \quad (108)$$

onde G é a constante gravitacional. Com esses valores, determinou-se a taxa de rotação:

$$\lambda = \frac{\omega_c}{\omega_k} \approx 0,52, \quad (109)$$

e o parâmetro físico associado à razão de massas:

$$\mu^* = \frac{m_c}{M_0} \approx 2 \times 10^{-3}. \quad (110)$$

Com as características do TNO Máni estabelecidas, a próxima seção aborda o processo de investigação da estabilidade nesse sistema a partir da técnica das Superfícies de Seção de Poincaré, utilizando os dados estimados nesta seção.

3.2 SUPERFÍCIES DE SEÇÃO DE POINCARÉ E TRAJETÓRIA DAS PARTÍCULAS

Para investigar a dinâmica orbital considerando os parâmetros estimados do TNO 307261 Máni, construímos as Superfícies de Seção de Poincaré (SSPs) para diferentes valores de C_J . As simulações utilizaram parâmetros baseados em estimativas para este corpo: a massa reduzida $\mu^* = 2 \times 10^{-3}$ e a taxa de rotação $\lambda \approx 0,52$.

Focamos na região interna a $x_0 = 11 R_c$, pois é nas proximidades do corpo que o efeito da cratera é mais pronunciado, influenciando a trajetória de partículas. As integrações numéricas foram interrompidas caso a partícula colidisse com o corpo central ($r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq R_c$) ou fosse ejetada do sistema ($r \geq 100 R_c$).

A partir das SSP's, é possível estimar se determinadas ilhas de estabilidade estão associadas a uma ressonância. No entanto, apenas com essa ferramenta, não é possível inferir a comensurabilidade da ressonância, mas é possível identificar sua ordem, ou seja, o número inteiro j presente na expressão (98).

Com base nisso, focamos nossa análise em ressonâncias de primeira e segunda ordens, pois são as de maior intensidade.

Com base nisso, focamos nossa análise em ressonâncias de primeira e segunda ordens, pois são as de maior intensidade. A força de um termo ressonante na função perturbadora é proporcional a $e^{|k|}$, onde e é a excentricidade e k é a ordem da ressonância. Como a excentricidade é tipicamente menor que 1, o termo diminui consideravelmente com o aumento da ordem, tornando os efeitos de primeira e segunda ordens os mais significativos (como apresentado na equação 6.143 de Murray e Dermott (1999)).

A Figura 5 ilustra um exemplo para $C_J = 1,800 R_c^2 \omega_k^2$. Seguindo a estratégia de amostragem descrita anteriormente, esta seção foi construída com um total de 109 partículas: partimos de um conjunto inicial de 40 pontos (distribuídos uniformemente em $x_0 \in [1,0 ; 7,0] R_c$), que foi então complementado com 69 partículas em diferentes componentes ($x_0 ; \dot{x}_0$) selecionados para garantir um bom delineamento das estruturas na SSP.

A região de instabilidade compreende as condições iniciais que levam à colisão ou ejeção quase imediata da partícula. No gráfico, as partículas nessa região estão localizadas ao longo do eixo $\dot{x}_0 = 0 R_c \omega_k$ de $x = 1 R_c$ até aproximadamente $x = 2,8 R_c$ por pontos um ao lado do outro. As regiões caóticas são identificadas pelos pontos pretos dispersos no gráfico. Nessas regiões, a dinâmica é governada pelo caos, que se caracteriza pelo afastamento exponencial de duas trajetórias que partiram de condições iniciais muito próximas. Essa sensibilidade garante que o conhecimento do estado futuro de uma partícula não permita prever o comportamento de outra, mesmo que tenham começado em pontos quase idênticos (LEONEL, 2019). Consequentemente, embora uma partícula nessa região possa colidir, ser ejetada ou permanecer em órbita, seu destino a longo prazo é imprevisível.

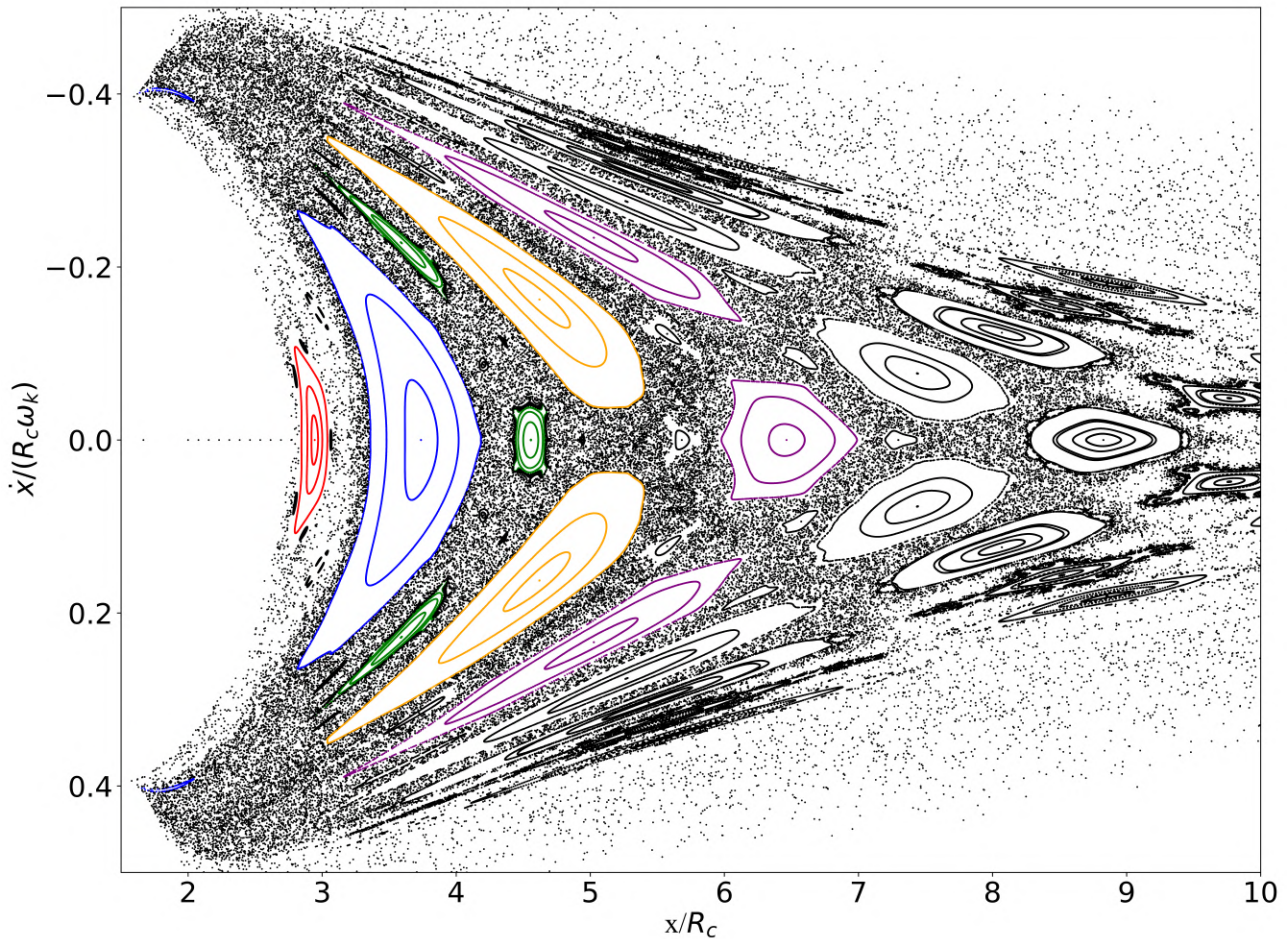


Figura 5 – Superfície de seção de Poincaré para $C_J = 1,800 R_c^2 \omega_k^2$.

Cada ilha de estabilidade é composta por um conjunto de curvas fechadas que representam órbitas quasi-periódicas. Embora essas trajetórias permaneçam confinadas a uma superfície no espaço de fases, elas não são estritamente periódicas (LEONEL, 2019). Isso significa que a órbita retorna arbitrariamente perto de pontos anteriores, mas a dinâmica nunca se repete de forma exata em intervalos de tempo fixos. Elas circundam um ponto central fixo, que corresponde à órbita periódica, na qual a partícula retorna ao mesmo ponto no espaço de fase em intervalos de tempo regulares, resultando em uma dinâmica regular e previsível (LEONEL, 2019). À medida que as curvas se aproximam deste centro, seu tamanho diminui, convergindo para o ponto fixo. A fronteira que delimita uma ilha de estabilidade, separando-a da região caótica ou de outra ilha, é conhecida como separatriz.

A Figura 5, construída a partir dos dados resultantes da integração das equações de movimento para $C_J = 1,800 R_c^2 \omega_k^2$, exibem algumas ilhas no espaço de fases, que estão relacionadas a diferentes ressonâncias, identificamos a ordem delas de acordo com Murray e Dermott (1999) e Morbidelli (2002):

- Ressonâncias de 1ª Ordem: As ilhas em vermelho e azul, sendo as mais internas, são representadas por uma única ilha cada. Isso indica que estão associadas a ressonâncias de primeira ordem.
- Ressonâncias de 2ª Ordem: A estrutura em laranja consiste em um par de ilhas simétricas em

Tabela 5 – Posições iniciais das partículas em órbitas periódicas e suas respectivas ressonâncias.

Figura 6	Ordem da ressonância	Cor	$x_0 (R_c)$	$\dot{x} (R_c \omega_k)$
(a)	1 ^a	Vermelho	2,94454	0,00
(b)	1 ^a	Azul	3,73669	0,00
(c)	2 ^a	Laranja	4,62061	0,16242
(d)	3 ^a	Verde	4,55650	0,00
(e)	3 ^a	Roxo	6,46385	0,00

relação ao eixo $\dot{x} = 0$. Essa configuração de duas ilhas é característica de ressonâncias de segunda ordem.

- Ressonâncias de 3^a Ordem: As estruturas em roxo e em verde são formadas, cada uma, por um conjunto de três ilhas, identificadas como ressonâncias de terceira ordem.
- Ordens superiores e caos: Além destas, observa-se cadeias de ilhas em preto, correspondentes a ressonâncias de ordens superiores. Todas essas estruturas regulares estão imersas em um mar de pontos pretos dispersos, que representa a região caótica, onde dada uma condição inicial, a evolução da trajetória é imprevisível.

Essa análise visual da topologia da SSP permite-nos identificar a ordem j das principais ressonâncias presentes no sistema para este valor específico de energia.

Para entender melhor o movimento das partículas em órbitas periódicas no referencial girante, isto é, que se encontram no centro de cada uma das ilhas de estabilidade associadas a diferentes ressonâncias, analisamos não apenas a posição x e velocidade $\dot{x}$ no momento que a partícula cruza o plano $(x; \dot{x})$, mas a forma com que essa trajetória evolui ao longo do tempo. Então, selecionadas as partículas que estão em órbita periódica a partir das suas respectivas condições iniciais $(x_0; \dot{x}_0)$, foram selecionadas as órbitas periódicas referente as ilhas que estão destacadas com diferentes cores e estas estão representadas com suas respectivas cores na Figura 6. Mais informações na Tabela 5.

Para compreender a trajetória das partículas em órbitas periódicas no sistema de referência girante, focamos naquelas localizadas nos centros das ilhas de estabilidade, as quais estão associadas a diferentes ressonâncias. Analisamos não apenas a interseção da partícula com o plano $(x, \dot{x})$, mas também a evolução temporal de sua trajetória por 10.000 períodos orbitais (1612 dias). As órbitas periódicas correspondentes às ilhas destacadas em diferentes cores na Figura 5, e detalhadas na Tabela 5, foram selecionadas e são representadas com cores distintas na Figura 6.

Nos gráficos da Figura 6, que representam órbitas periódicas no referencial girante, o corpo central (não mostrado) estaria circunscrito pela região $x, y \in [-1; 1] R_c$. Conforme discutido, a presença da cratera no ponto $(1; 0)$ introduz uma perturbação no sistema. Na ausência dessa cratera, as ilhas de estabilidade associadas às ressonâncias não existiriam pois não haveriam ressonâncias; órbitas periódicas exibiriam apenas trajetórias circulares.

A análise dessas trajetórias na Figura 6 revela características distintas:

- As órbitas associadas às ressonâncias de 1^a ordem (Figura 6(a) e Figura 6(b)) não cruzam entre si dentro de um período orbital.

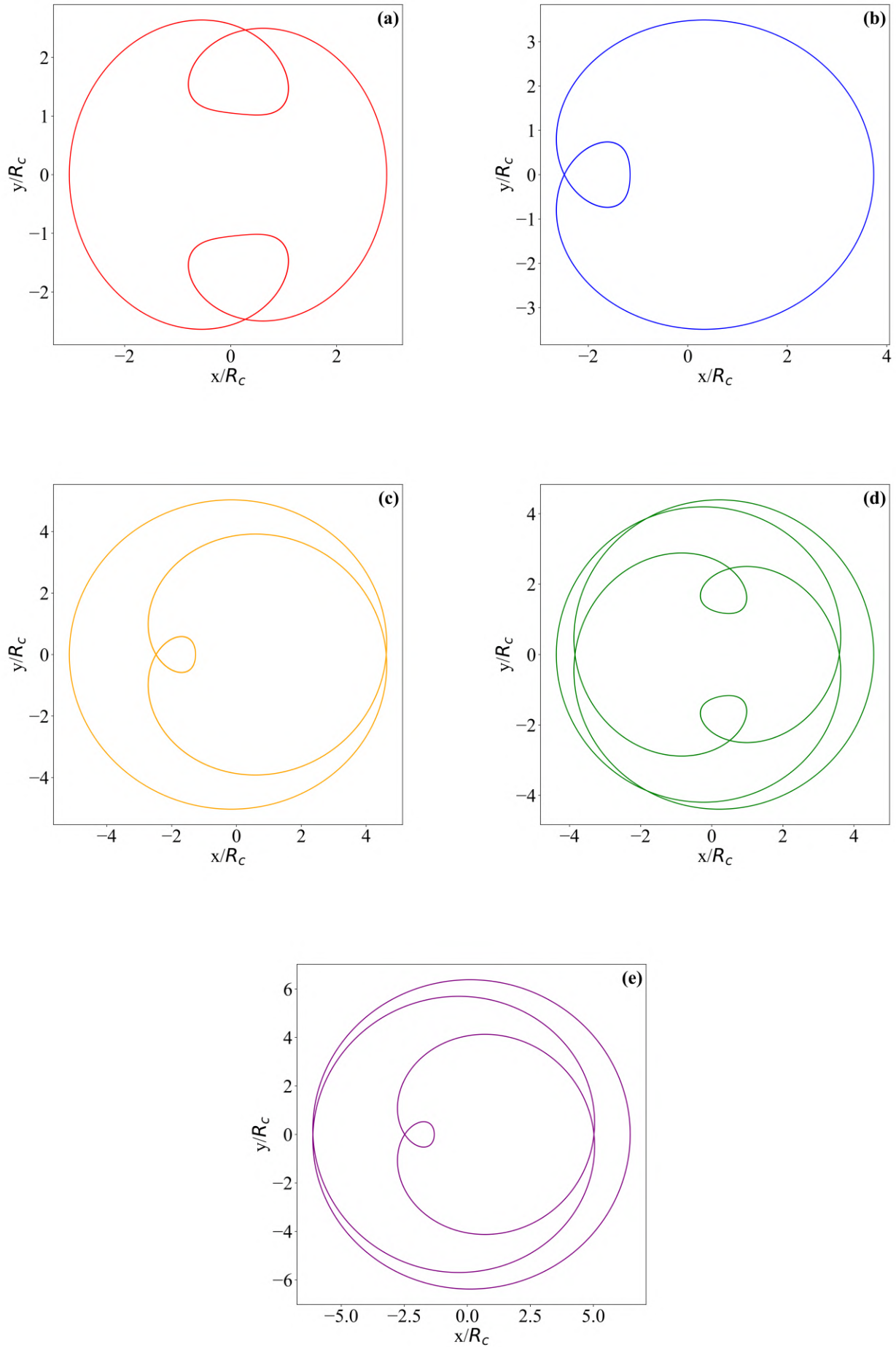


Figura 6 – Representação da trajetória de partículas no referencial girante que estão em órbita periódica.

- A trajetória de 2ª ordem (Figura 6(c)) exibe um único ponto de cruzamento da órbita.
- As órbitas de 3ª ordem (Figura 6(d) e Figura 6(e)) se cruzam duas vezes por período.

Analisando, podemos notar que não há cruzamento na órbita em 1 período orbital para as trajetórias associadas a ressonâncias de 1ª ordem (Figura 6 (a) e (b)); já a trajetória da partícula associada a ressonância de 2ª ordem (Figura 6 (c)), notamos um cruzamento da órbita ao lado direito do gráfico. Na (Figura 6 (d) e (e)), que representam a trajetória das partículas que estão associadas a ressonâncias de 3ª ordem, podemos notar que essas órbitas se cruzam por duas vezes.

3.3 CONSTRUÇÃO DA GRADE $a \times e$

Para construir a grade $a \times e$, que indica a qual ressonância uma partícula com determinado semieixo maior (a) e excentricidade (e) está associada, baseamo-nos em análises a partir de SSP's. A construção dessa grade e a observação da evolução das estruturas associadas a diferentes ressonâncias foram realizadas por meio de simulações com 55 valores distintos da constante de Jacobi (C_J), dentro do intervalo $C_J \in [1,715 ; 2,167] R_c^2 \omega_k^2$. Este intervalo foi selecionado para garantir a observação das regiões associadas as ressonâncias de interesse, destacadas anteriormente. No limite inferior ($C_J = 1,715 R_c^2 \omega_k^2$), as partículas iniciam com alta excentricidade, resultando em um número menor de regiões estáveis, mais distantes, mas que ainda contêm pelo menos uma das ressonâncias de interesse. No limite superior, ou seja, $C_J = 2,167 R_c^2 \omega_k^2$ (ver Figura 7(d)), devido o valor de C_J ser relativamente alto, as órbitas estão associadas a baixas excentricidades; as estruturas associadas a ressonâncias de interesse colapsaram quase todas em órbitas periódicas e quase-periódicas de primeiro tipo, sobrando apenas a que está em laranja.

Para ilustrar um pouco a evolução das estruturas associadas a ressonâncias, com valores distintos de C_J , a Figura 7 exibe quatro SSP's, duas delas considerando os limites do intervalo de valores de C_J apresentados previamente e mais dois valores intermediários.

Na Figura 7 (a), inerente a $C_J = 1,715 R_c^2 \omega_k^2$, é possível observar o surgimento de estruturas de estabilidade associadas a órbitas de alta excentricidade (inerentes ao valor relativamente baixo de C_J), com uma região de instabilidade que se estende do raio do corpo central até $x \approx 4,6 R_c$, além da presença de uma ressonância de segunda ordem, colorida em laranja. Podemos observar também a presença de algumas estruturas associadas a ressonâncias de ordem maior que 2, porém, nessa SSP, a instabilidade e o caos são predominantes.

A Figura 7 (b), referente a $C_J = 1,903 R_c^2 \omega_k^2$, exibe um aumento no número de estruturas de estabilidade associadas a ressonâncias, incluindo o surgimento de uma ilha associada a ressonância de primeira ordem (colorida em rosa). Verifica-se também que estas estruturas se encontram mais próximas do corpo central, o que corresponde a uma região de instabilidade significativamente menor em comparação com a figura anterior.

A Figura 7 (c), calculada para $C_J = 2,020 R_c^2 \omega_k^2$, mostra o surgimento de uma nova estrutura estável próxima a $x \approx 2,3 R_c$, associada a uma órbita de primeiro tipo. Isso indica que partículas iniciando com x_0 nesta região, em órbitas circulares, tendem a mantê-las. Observa-se também o

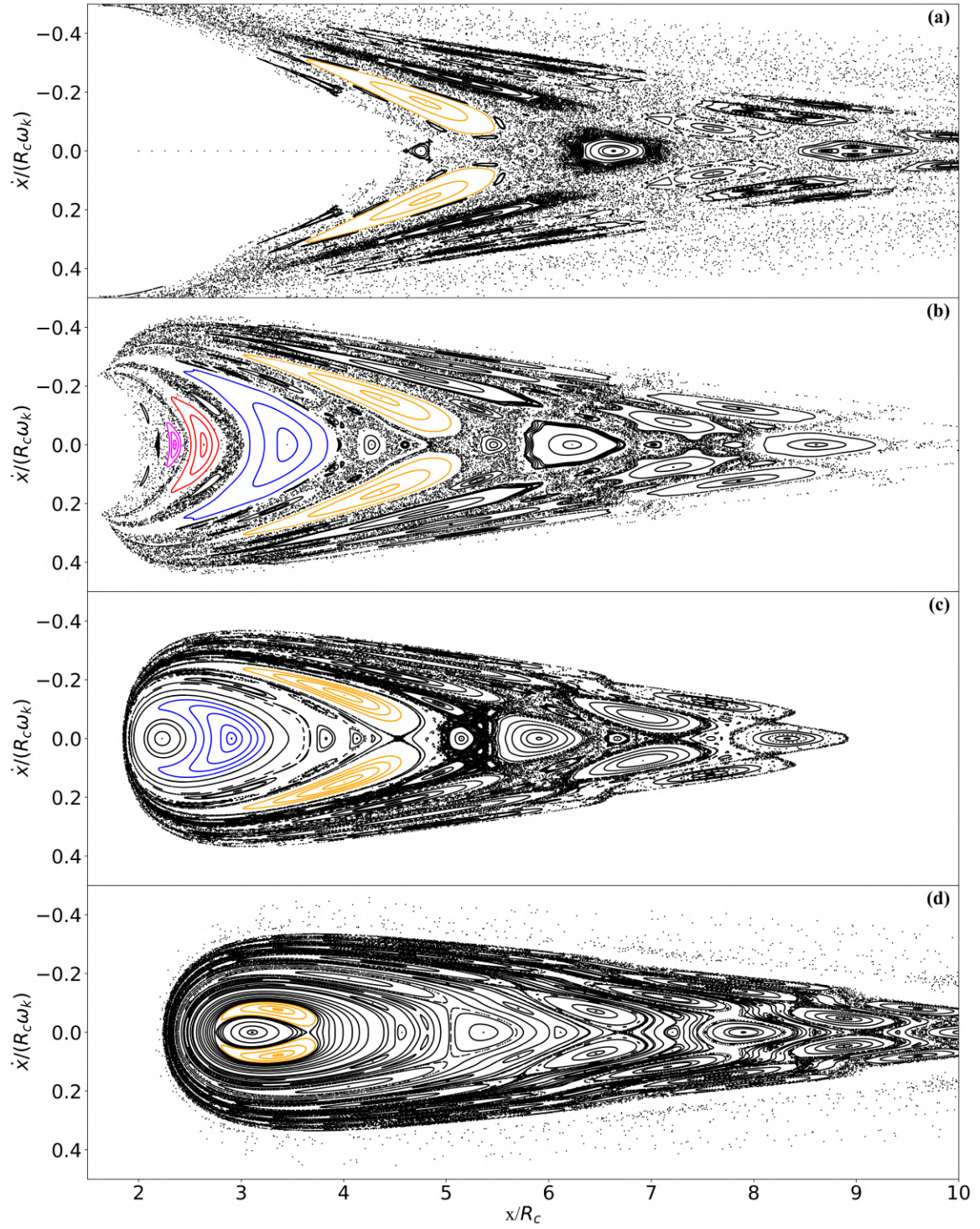


Figura 7 – Superfícies de seção de Poincaré para diferentes valores de C_J : (a) $1,715 R_c^2\omega_k^2$, (b) $1,903 R_c^2\omega_k^2$, (c) $2,020 R_c^2\omega_k^2$ e (d) $2,167 R_c^2\omega_k^2$.

desaparecimento das ilhas de ressonância rosa e vermelha, restando apenas as estruturas em azul e laranja.

Já na [Figura 7](#) (d), considerando o $C_J = 2,167 R_c^2 \omega_k^2$, nota-se que, embora a região estável tenha se expandido em relação à figura anterior, a estrutura associada à órbita de primeiro tipo aumenta, a estrutura em azul (relacionada à ressonância de primeira ordem) desaparece, e, entre as estruturas de interesse, apenas a laranja, associada à ressonância de segunda ordem, permanece.

Analisando a [Figura 7](#) podemos inferir que, à medida que C_J aumenta, as ressonâncias tendem a convergir para órbitas do primeiro tipo. Essas órbitas estão associadas a partículas que iniciam seu movimento em uma órbita circular, ou seja, com excentricidade inicial $e_0 = 0$, o que caracteriza sua formação e comportamento dinâmico. Esse comportamento é consistente, uma vez que o crescimento de C_J está associado à redução da excentricidade das órbitas.

A [Figura 8](#) ilustra, de maneira detalhada, o comportamento descrito anteriormente. Nela, cada ressonância é plotada isoladamente, mostrando sua evolução à medida que C_J aumenta. Observa-se que, para dois valores distintos de C_J em cada caso, as ressonâncias tornam-se progressivamente menores e deslocam-se para a esquerda, convergindo em direção à órbita de primeiro tipo. Essa representação individual reforça a tendência geral de redução da excentricidade das órbitas com o aumento de C_J .

Durante a análise das SSP's para cada valor de C_J , houve um processo de extração dos valores mais interno e mais externo de x para cada órbita quase-periódica. Esses valores foram obtidos na separatriz, região em que ocorre a transição entre o movimento regular (associado a uma órbita quase-periódica) e caótico. Além disso, extraímos o valor de x correspondente ao centro de cada ilha de estabilidade associada às ressonâncias em estudo.

Com esses valores: x interno, x externo e x do centro das ilhas de estabilidade, realizamos simulações para obter as componentes de aceleração, velocidade e posição no referencial girante. Esses dados foram então convertidos para o referencial inercial, permitindo o cálculo dos elementos orbitais.

A [Figura 9](#) apresenta um gráfico $a \times e$, onde as cores representam a largura e o centro de cada ressonância analisada. A região em cinza indica instabilidade, ou seja, valores de a e e para os quais não há possibilidade de existência de partículas estáveis, pois dadas condições iniciais, o semi-eixo inicial da órbita é $a_0 \leq 1 R_c$. O valor $a_{\text{sync}} = 1,542125 R_c$ marca a posição do raio síncrono. As linhas tracejadas correspondem aos valores teóricos de a para cada ressonância estudada. Há também uma região delimitada em preto que está associada aos limites da órbita de primeiro tipo, que por definição estão associadas a baixas excentricidades (encontradas em Superfícies de Seção de Poincaré para $C_J \geq 1.967 R_c^2 \omega_k^2$), dentro dessa região delimitada por essa curva podemos afirmar que é uma região estável.

A fim de comparar os valores de a extraídos das simulações numéricas com os valores obtidos a partir do cálculo teórico da ressonância, foram calculados os respectivos desvios percentuais com base na expressão:

$$D_p = \frac{|a_i - a|}{a} \times 100\% \quad (111)$$

Os resultados obtidos estão apresentados na Tabela [6](#). Nota-se que os desvios percentuais das

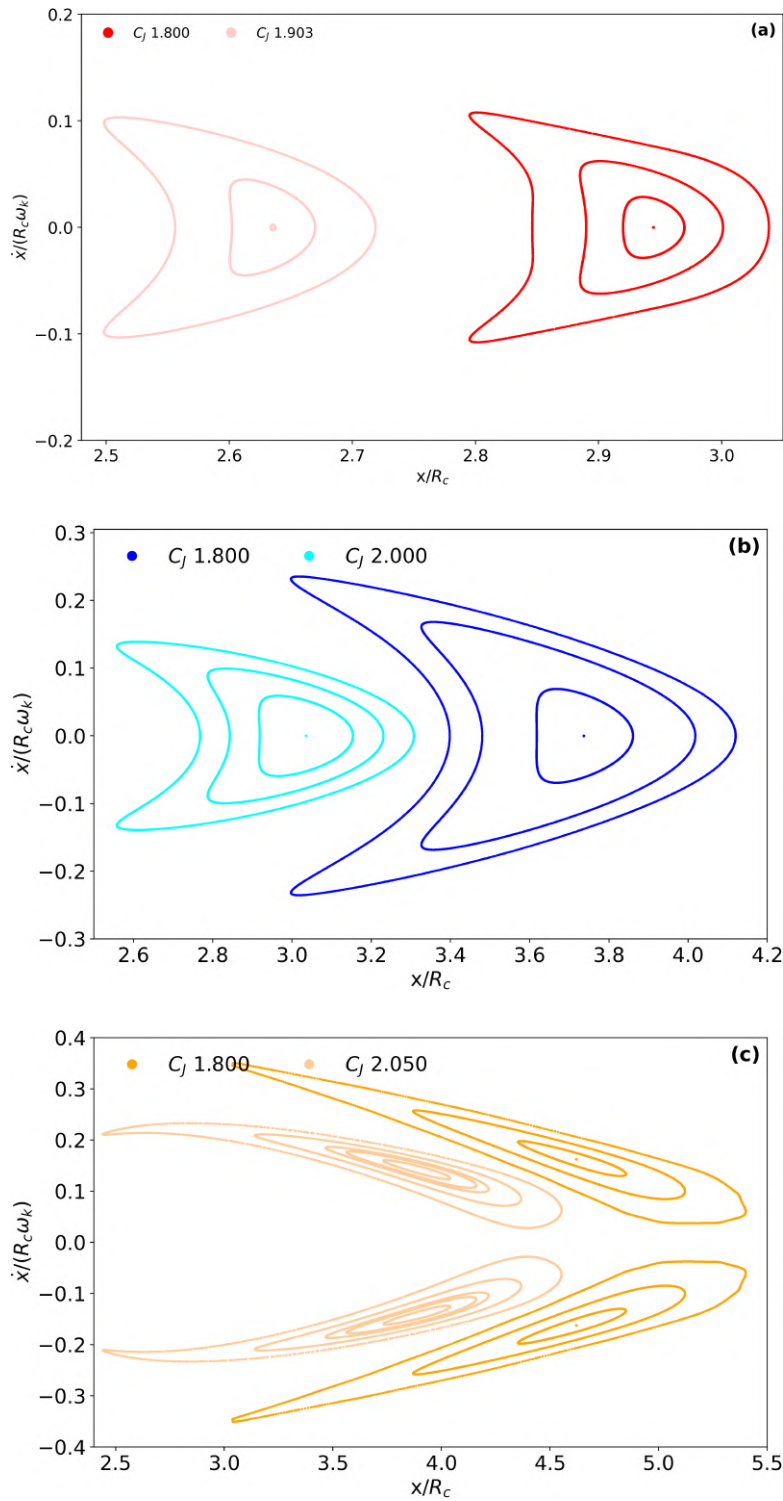


Figura 8 – Evolução das ilhas de estabilidade da mesma família.

ressonâncias mais próximas do corpo central, como as 3:2 e 5:4, são significativamente maiores em relação às mais distantes. Esse comportamento decorre do fato de que, nas regiões próximas ao corpo central, as perturbações gravitacionais são mais intensas, o que leva a desvios mais expressivos na integração numérica das equações de movimento, conforme evidenciado pelas expansões nas equações (101) e (102) na variável μ^* .

Na Figura 10, comparamos o efeito de uma cratera com o de uma massa anômala, considerando a razão de massa da massa anômala como $\mu_c = |\mu|$. Em ambos os casos, adotamos $x_0 = 2,8 R_c$, mas o

Tabela 6 – Posições teóricas e desvio percentual dos dados obtidos numericamente para cada ressonância.

Ressonância	Posição teórica da ressonância a (R_c)	Desvio percentual (D_p)
3:1	3,2	0,1%
2:1	2,4	0,1%
3:2	2,0	1,4%
5:4	1,8	0,8%

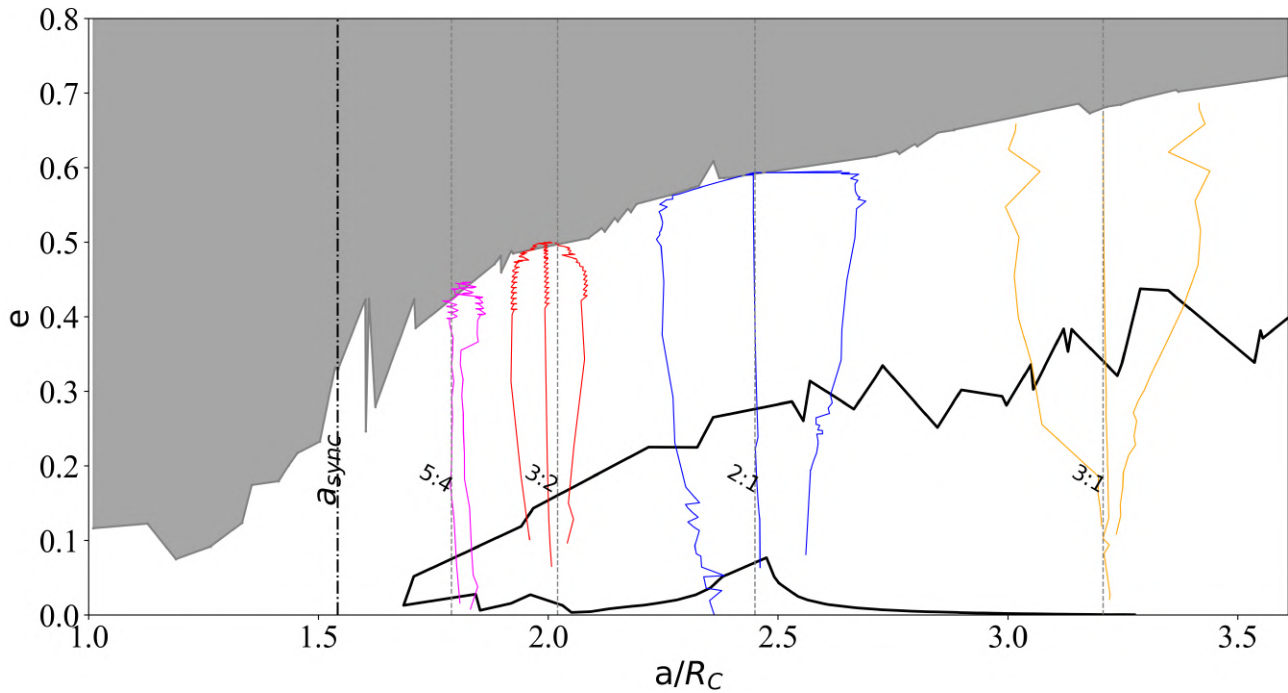


Figura 9 – Grade $a \times e$ com as posições das ressonâncias spin-orbita calculadas teoricamente e com a largura e seus respectivos centros calculados numericamente a partir de dados extraídos de Superfícies de Seção de Poincaré.

valor de $\dot{y}_0$ foi calculado de forma distinta: ao invés de ser obtido a partir de C_J pela equação (71), determinamos $\dot{y}_0$ impondo $\dot{x}_0 = 0$, de modo que a órbita de cada partícula iniciasse com excentricidade $e_0 = 0$.

A Figura 10 mostra a variação do semi-eixo maior e da excentricidade ao longo do tempo para três cenários: um corpo central com cratera (curvas em verde), com massa anômala (curvas em marrom) e um corpo central esférico (linha preta). Observa-se que, nos casos da massa anômala e da cratera, a variação do semi-eixo maior apresenta uma defasagem de 180° , enquanto a variação da excentricidade exibe uma defasagem que aumenta gradualmente com o tempo. Esse descompasso ocorre em razão da presença da massa anômala, pois após encontros próximos é provável que a partícula sofra uma mudança de órbita, alterando a fase de sua evolução. Como esperado, no caso do corpo central esférico, a órbita permanece circular ($e = 0$), evidenciando a ausência de perturbações adicionais.

Para compreender, de maneira direta, a influência do tamanho da cratera na variação temporal dos elementos orbitais, analisamos a evolução de órbitas inicialmente circulares ($e_0 = 0$), variando o tamanho da cratera (através do parâmetro μ^*), observamos na Figura 11 a influência dessa anomalia nos períodos orbitais das partículas teste. Assim como na análise anterior, as três partículas foram

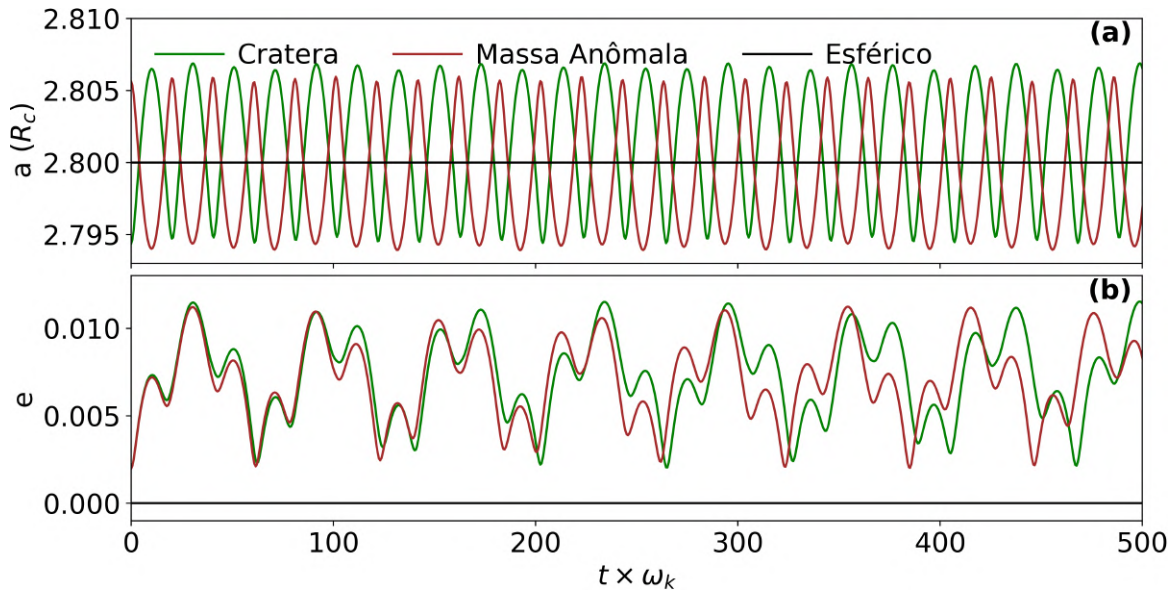


Figura 10 – Evolução, ao longo de um intervalo de $t = 500 \times \omega_k$ (80,6 dias), de (a) o semi-eixo maior e (b) a excentricidade de três partículas inicialmente em $x_0 = 2,8 R_c$ e $e_0 = 0$, em diferentes cenários: corpo central com cratera ($\mu^* = 2 \times 10^{-3}$, verde), com massa anômala ($\mu = 2 \times 10^{-3}$, marrom) e esférico (preto).

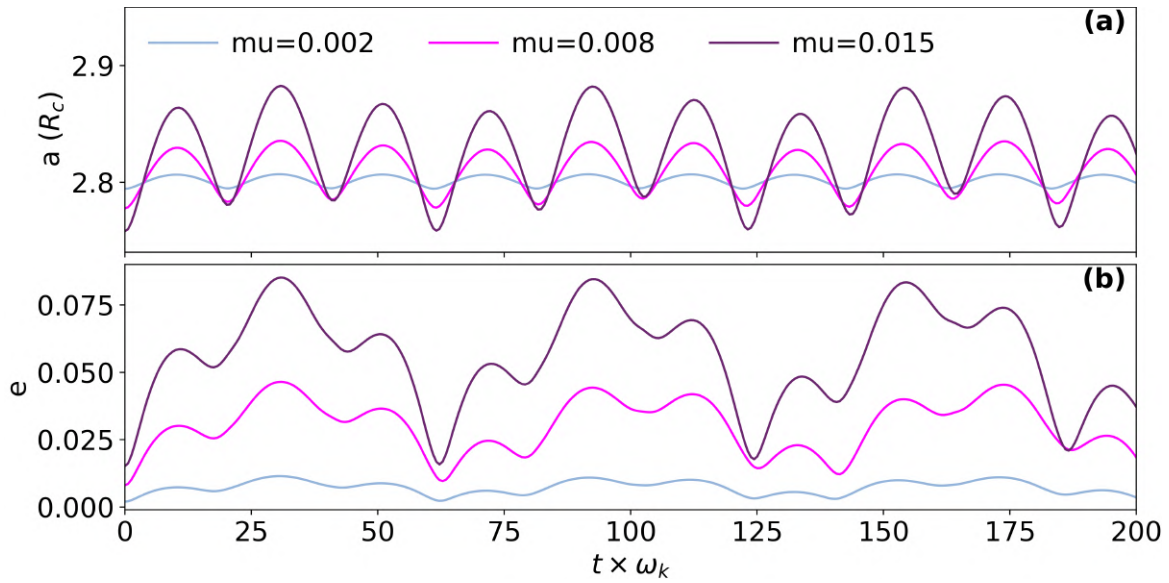


Figura 11 – Evolução, ao longo de um intervalo de $t = 200 \times \omega_k$ (≈ 32 dias), de (a) o semi-eixo maior e (b) a excentricidade de três partículas iniciadas em $x_0 = 2,8 R_c$ e $e_0 = 0$, com $\dot{y}_0$ definido a partir de $\dot{x}_0 = 0$. São considerados três valores para o parâmetro da cratera: $\mu^* = 0,002$ (azul), $\mu^* = 0,008$ (rosa) e $\mu^* = 0,015$ (roxo).

iniciadas em $x_0 = 2,8 R_c$, com $\dot{y}_0$ definido a partir de $\dot{x}_0 = 0$ para garantir $e_0 = 0$, nos casos em que $\mu^* = 2 \times 10^{-3}$, $\mu^* = 8 \times 10^{-3}$ e $\mu^* = 15 \times 10^{-3}$.

Para um tempo total de simulação fixo para todos os casos em $t = 62832 \times \omega_k$, equivalente a 1612 dias, obtemos os seguintes dados:

- Para $\mu^* = 2 \times 10^{-3}$:

Foram detectadas 2141 períodos orbitais, com período médio de $29,332 \pm 0,047$ (unidades de tempo da simulação). O período da primeira órbita foi 29,301.

- Para $\mu^* = 8 \times 10^{-3}$:

Registraram-se 2158 períodos orbitais, com período médio de $29,101 \pm 0,201$. A primeira órbita completou-se em 28,976, mostrando leve variação em relação ao caso anterior.

- $\mu^* = 15 \times 10^{-3}$:

Observaram-se 2166 períodos orbitais, com período médio de $28,988 \pm 0,415$. O período inicial foi 28,796, evidenciando que há maior dispersão nos períodos à medida que μ aumenta.

Na [Figura 11](#), nota-se que a frequência de oscilação do semi-eixo maior está relacionada ao movimento de translação da partícula no sistema girante. Também se observam *kicks* nas curvas $t \times a$ e $t \times e$, resultantes de encontros próximos com a cratera. Com o aumento de μ^* , o período dessas oscilações sofre leves alterações, devido ao deslocamento do baricentro do sistema.

Neste capítulo, apresentamos a primeira abordagem para o estudo da estabilidade ao redor de um sistema idealizado com base nos dados do TNO Máni. Discutimos o procedimento utilizado para determinar a órbita das partículas, identificamos se elas descrevem órbitas periódicas, quasi-periódicas ou caóticas, e foram localizadas e estimadas as larguras das ressonâncias spin-órbita, considerando os parâmetros $\mu^* = 0,002$ e $\lambda \approx 0,52$.

3.4 CURVAS DE VELOCIDADE ZERO

As curvas de velocidade zero constituem um conceito fundamental, por exemplo, no Problema Circular Restrito de Três Corpos (PCR3C), pois delimitam as regiões do espaço de fase que são inacessíveis a uma partícula de teste para um dado valor de C_J . No plano (x, y) , essas curvas correspondem às projeções bidimensionais das superfícies de velocidade zero e são completamente determinadas pela constante de Jacobi (C_J), a única integral de movimento referente ao PCR3C ([MURRAY; DERMOTT, 1999](#)).

Matematicamente, essas curvas são obtidas impondo que a velocidade da partícula seja nula ($v^2 = 0$) na equação da constante de Jacobi:

$$C_J = 2U - v^2, \quad (112)$$

onde U é o potencial gravitacional gerado pelos dois corpos principais (enquanto o terceiro corpo, de massa desprezível, é afetado gravitacionalmente pelos dois corpos massivos). A forma explícita mais utilizada para representar essas curvas é:

$$n_m^2(x^2 + y^2) + 2 \left(\frac{\mu_1}{r_1^*} + \frac{\mu_2}{r_2^*} \right) = C_J, \quad (113)$$

em que n_m é o movimento médio do sistema, μ_1 e μ_2 são os parâmetros de massa dos corpos primário e secundário, e r_1^* e r_2^* representam as distâncias da partícula em relação a cada um deles.

Um exemplo de curva de velocidade zero no Problema Circular Restrito de Três Corpos pode ser encontrado na Figura 3.7 de [Murray e Dermott \(1999\)](#), na qual são utilizados os valores de constante de Jacobi $C_J = [3,805 ; 3,552 ; 3,197]$ $R_c^2 \omega_k^2$ e parâmetro de massa $\mu_2 = 0,2$. A [Figura 12](#) apresenta uma reprodução dessa configuração.

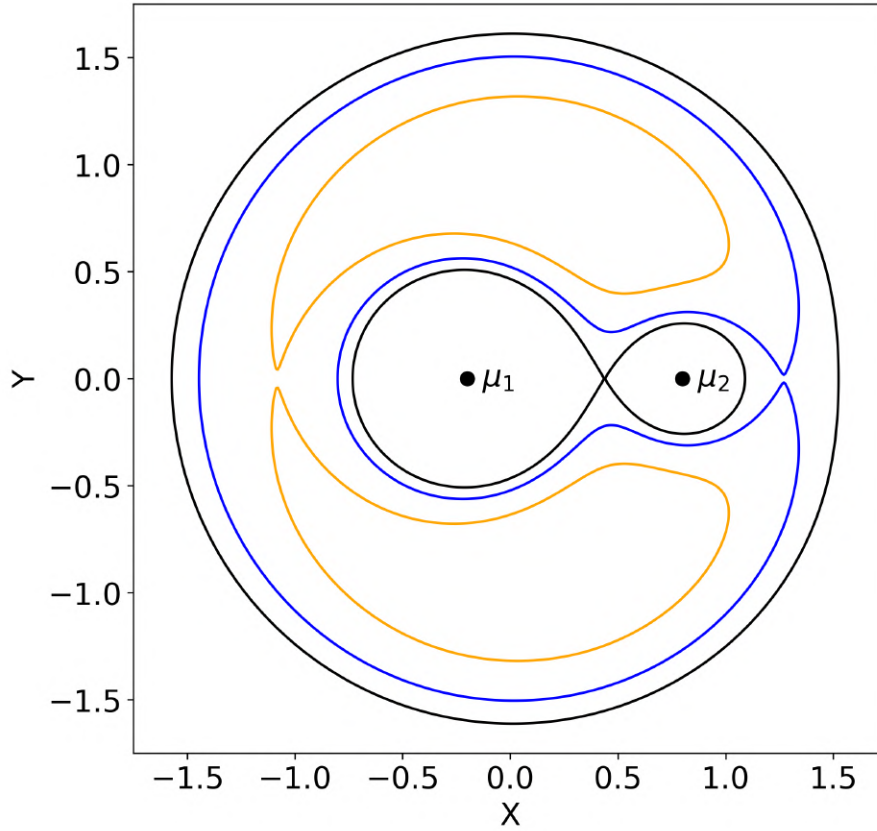


Figura 12 – Curvas de velocidade zero para $C_J = 3,805 R_c^2 \omega_k^2$ (preto), $C_J = 3,552 R_c^2 \omega_k^2$ (azul) e $C_J = 3,197 R_c^2 \omega_k^2$ (laranja). Os corpos principais são representados por μ_1 e μ_2 sendo $\mu_2 = 0,2$

A [Figura 12](#) mostra as curvas de velocidade zero para três valores críticos da constante de Jacobi. Para o maior valor, $C_J = 3,805 R_c^2 \omega_k^2$ (curva em preto), observa-se o ponto de equilíbrio lagrangiano L_1 , localizado no ponto crítico mais interno da curva. O ponto L_2 encontra-se sobre a separatriz formada para $C_J = 3,552 R_c^2 \omega_k^2$ (curva em azul), enquanto o ponto L_3 corresponde ao valor $C_J = 3,197 R_c^2 \omega_k^2$ (curva em laranja). Os pontos de equilíbrio triangulares L_4 e L_5 são estáveis e estão internas à curva associada ao menor valor de C_J . A estabilidade dos pontos Lagrangianos foram verificadas através de Teoria de Perturbação, embora as CVZ podem dar um indicativo da estabilidade desses pontos.

Esta análise tem como objetivo caracterizar a estrutura do espaço de fase, possibilitando a identificação dos pontos de equilíbrio.

É possível construir curvas de velocidade zero no contexto do Problema de Dois Corpos com rotação, considerando uma massa anômala ou, no caso estudado, uma cratera, ambas posicionadas no equador do corpo principal. Ajustando a equação [\(113\)](#) para o caso de dois corpos, obtém-se:

$$\lambda^2(x^2 + y^2) + 2 \left(\frac{1}{R_c} + \frac{\mu^*}{r_c} \right) = C_J, \quad (114)$$

Comparando com a equação [\(71\)](#), nota-se que a única diferença é que a equação [\(114\)](#) considera $v^2 = 0$. Para o caso da massa anômala, utilizando o parâmetro associado à massa $\mu_m = 0,002$, obtemos a [Figura 13](#). Observa-se que a curva laranja, associada a $C_J = 1,9481 R_c^2 \omega_k^2$, é a mais externa, com extremidades próximas a um ponto de equilíbrio; a curva intermediária em azul, para

$C_J = 1,945777 R_c^2 \omega_k^2$, apresenta extremidades próximas a outro ponto; e as curvas associadas a $C_J = 1,9446 R_c^2 \omega_k^2$ envolvem dois pontos de equilíbrio.

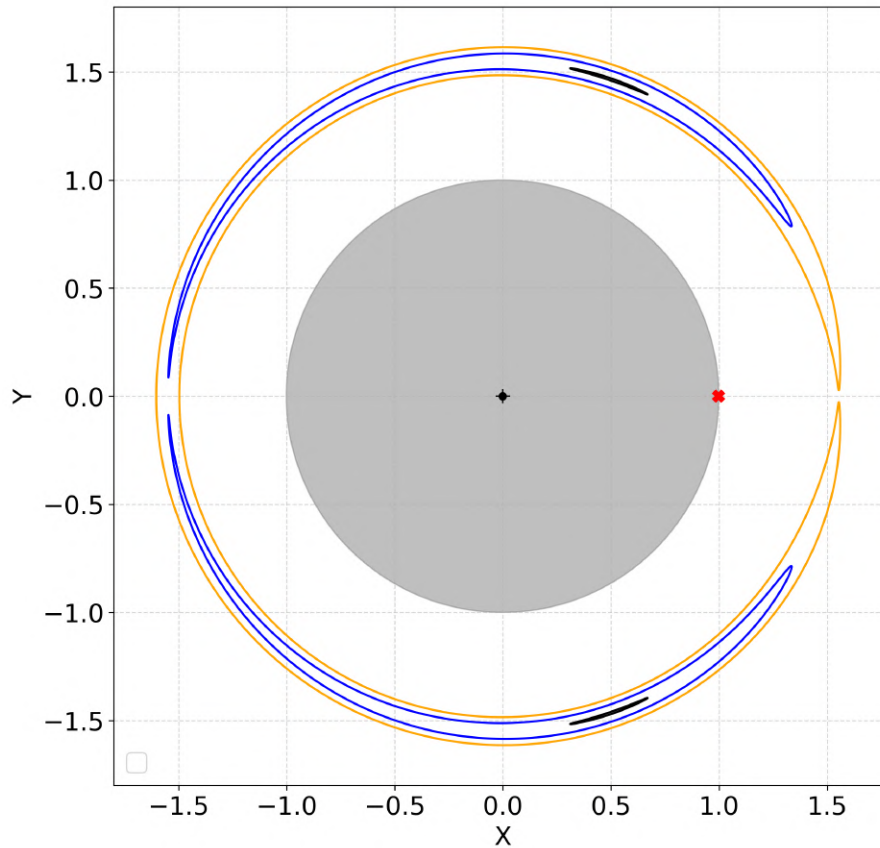


Figura 13 – Curvas de velocidade zero para $C_J = 1,9481 R_c^2 \omega_k^2$ (laranja), $C_J = 1,945777 R_c^2 \omega_k^2$ (azul) e $C_J = 1,9446 R_c^2 \omega_k^2$ (preto), com $\mu_m = 0.002$.

A [Figura 14](#) apresenta curvas de velocidade zero para quatro valores da constante de Jacobi. A curva em preto, associada a $C_J = 1,93165 R_c^2 \omega_k^2$, é a mais interna, envolvendo um provável ponto de equilíbrio. As duas curvas em azul, para $C_J = 1,934125 R_c^2 \omega_k^2$, são assimétricas. A curva laranja, $C_J = 1,93531 R_c^2 \omega_k^2$, tem extremidades que se aproximam dos pontos de equilíbrio, e a curva verde, $C_J = 1,9358 R_c^2 \omega_k^2$, é a mais externa, englobando possíveis quatro pontos de equilíbrio desse sistema.

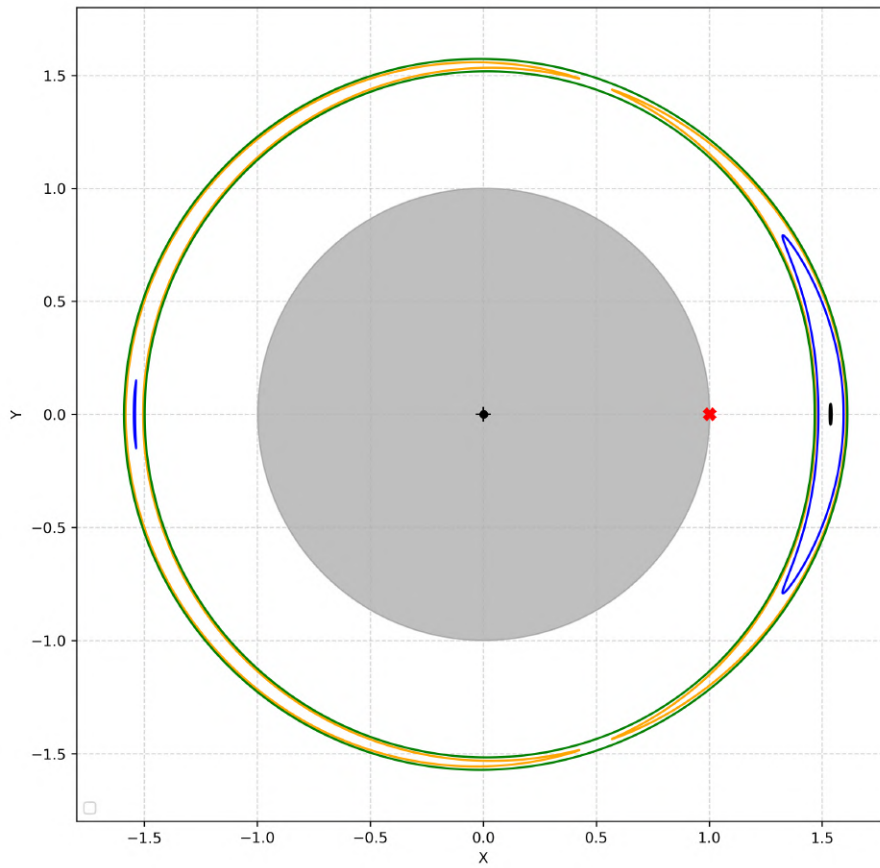


Figura 14 – Curvas de velocidade zero para $C_J = 1.93165 R_c^2 \omega_k^2$ (preto), $C_J = 1.934125 R_c^2 \omega_k^2$ (azul), $C_J = 1.93531 R_c^2 \omega_k^2$ (laranja) e $C_J = 1.9358 R_c^2 \omega_k^2$ (verde), com $\mu^* = 0.002$.

A diferença nas curvas de velocidade zero, observadas no Problema de Dois Corpos com rotação, massa anômala e cratera, está relacionada com a diferença de massa no equador de cada corpo principal. Essas curvas mostram a formação de pontos de equilíbrio, estáveis ou instáveis.

No próximo capítulo, analisaremos a evolução do sistema dinâmico à medida que o parâmetro μ^* é variado.

4 GRADES $a \times e$: SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo, adotamos uma abordagem complementar à análise do espaço de fase apresentada anteriormente para investigar a estabilidade no sistema.

A avaliação da estabilidade baseia-se em dois critérios principais para cada partícula: o tempo de sobrevivência no sistema e seu estado final. O estado final é classificado como: "sobrevivência", se a partícula permanecer no sistema por 10.000 órbitas (equivalente a 1612 dias terrestres), "colisão", se houver impacto com o corpo central; ou "ejeção", se escapar do sistema, isto é, quando a partícula está a mais de $100 R_c$ de distância do centro de massa. O objetivo desta análise também é investigar como a estrutura das regiões de estabilidade, definidas por esses tempos e estados, é modificada pelo aumento do tamanho da cratera. Para visualizar essa dependência, construímos mapas de estabilidade detalhados, organizados em grades de semi-eixo maior (a) e excentricidade (e).

Cada mapa de estabilidade representa o resultado de uma simulação de 160,000 partículas, dispostas em uma malha uniforme de 400×400 pontos, cobrindo as condições iniciais de semi-eixo maior $a \in [1, 0 ; 3, 5] R_c$ e excentricidade $e \in [0, 001 ; 0, 7]$. As trajetórias individuais foram numericamente integradas utilizando as equações de movimento (Equações 57 e 58), utilizando o método RK45, conforme descrito previamente.

4.1 COMPARAÇÃO ENTRE AS TÉCNICAS

Adotamos os parâmetros estimados de Máni, considerando a massa reduzida $\mu^* = 2 \times 10^{-3}$ e a taxa de rotação $\lambda \approx 0.52$, correspondentes a uma concavidade de raio $r_c = 45,01$ km, equivalente a uma massa $m_c = 2,75 \times 10^{17}$ kg e a um período de rotação $T = 7,44$ h. Podemos comparar a Figura 9 com os resultados obtidos pela grade construída a partir de uma malha de 160,000 partículas com diferentes condições iniciais.

Analisando a Figura 15, observamos que a região estável se estende até aproximadamente $e = 0.7$ para partículas com $a \approx 3.5 R_c$. Na vizinhança da ressonância 3:1, em $e \approx 0.67$, identificamos uma estreita região de instabilidade, na qual as partículas sobrevivem entre 1 e 100 períodos orbitais (isto é, entre ≈ 4 horas a 16 dias). Ao comparar com a Figura 9, notamos que a delimitação da região estável também se posiciona próxima de $e = 0,7$. Já na ressonância 2:1, em $a = 2,38 R_c$, a Figura 9 apresenta, na interface entre a região estável e a região instável, uma pequena estrutura em formato de "V" invertido. Analisando a mesma região na Figura 15, evidencia-se uma ranhura composta por partículas em órbitas estáveis adjacentes a partículas instáveis. Em relação à ressonância 3:2, localizada em torno de $e = 0.47$, ambas as figuras indicam o limite extremo da região estável, com uma ranhura visível na Figura 15. Ao confrontar com a Figura 9, observa-se um pequeno "V" em $a \approx 1.86 R_c$, possivelmente associado a essa ranhura composta por partículas instáveis. A análise da Figura 16 confirma que, nessa mesma região, tais partículas colidem e encontram-se próximas daquelas que permanecem em sobrevivência. Ao determinar numericamente a largura da ressonância 5:4 na Figura 9, observamos um leve deslocamento para a direita em relação à posição da ressonância prevista analiticamente, com extremidades localizadas em $e \approx 0.37$. Ao comparar com a Figura 15,

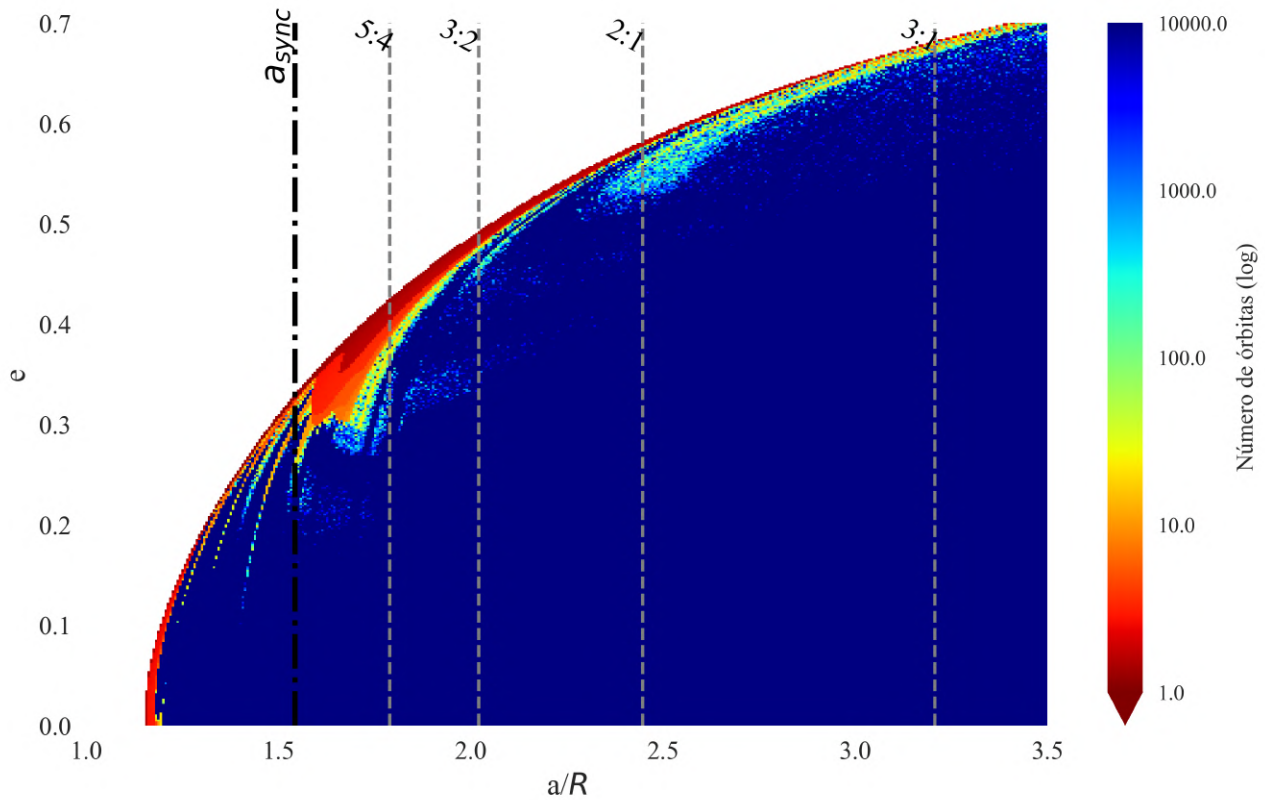


Figura 15 – Grade $a \times e$ formada por 160.000 partículas considerando o parâmetro $\mu^* = 0,002$. A figura apresenta o tempo de sobrevivência das partículas em uma escala de 1 a 10.000 períodos orbitais (isto é, de 4 horas a 1612 dias), destacando em branco a região de alta instabilidade, onde as partículas não completam sequer uma órbita antes de colidir.

nota-se que essa extremidade coincide com o limite da região estável e que, à esquerda dessa linha, em $e \approx 0.37$, a região é predominantemente composta por partículas instáveis, cuja sobrevivência varia entre 1 e 10 períodos orbitais (isto é, de ≈ 4 a 39 horas). Essa assimetria explica o leve deslocamento à direita observado na representação da largura da ressonância 5:4 na [Figura 9](#). Entre a ressonância 5:4 e o a_{sync} , identificamos ranhuras tanto na [Figura 9](#) quanto na [Figura 15](#). Tais ranhuras tornam-se mais frequentes na [Figura 15](#) à medida que se aproxima do corpo central ($a \in [1, 19; 1, 63] R_c$ e $e \in [0; 0, 34]$), possivelmente em decorrência da sobreposição de ressonâncias que ocorre em a_{sync} e suas vizinhanças. No caso da [Figura 9](#), entretanto, há uma limitação técnica na delimitação dessa região a partir das Superfícies de Seção de Poincaré, uma vez que as excentricidades mais baixas ($e \leq 0.24$) estão associadas a altos valores de C_J ($C_J \geq 2.115$) e nesse contexto, o processo de identificação do final da região instável (ou o início da região estável) se torna complexo pela sutileza entre partículas que são instáveis e partículas que possuem um movimento caótico.

Analisando apenas a [Figura 15](#), observamos, próximo ao corpo central, uma pequena região onde as partículas sobrevivem entre 1 e 10 períodos orbitais (isto é, entre 4 e 39 horas). Essa instabilidade, mesmo em órbitas de baixa excentricidade, está associada à proximidade com o corpo central. A região instável se estende ao redor da área estável (em azul); esses encontros aumentam progressivamente suas excentricidades até levarem à colisão com o corpo central ou à ejeção, como se observa em alguns casos com $e \geq 0.5$ e $a \geq 2.5 R_c$ na [Figura 16](#). Destaca-se também que, nas proximidades da órbita síncrona (a_{sync}), a região estável (em azul) apresenta um contorno diferenciado, semelhante a ranhuras

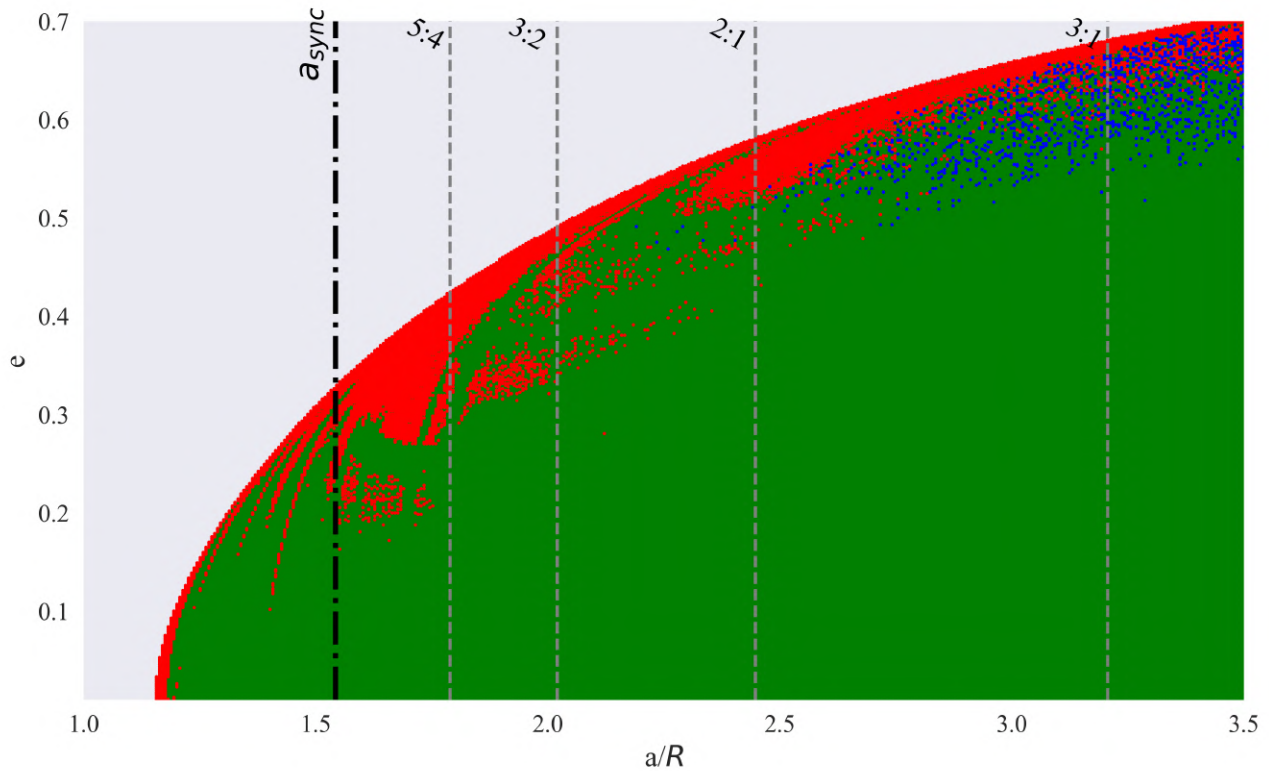


Figura 16 – Grade $a \times e$ formada por 160.000 partículas considerando o parâmetro $\mu^* = 0,002$ mostrando o estado final de cada partícula, indicando em cinza claro a região de alta instabilidade, além de classificar o estado das partículas como sobreviventes (verde), colisões (vermelho) ou ejeções (azul). Os pontos em branco correspondem à largura das ressonâncias (Figura 9).

(nos intervalos $a \in [1,24 ; 1,60]$ R_c $e \in [0,12 ; 0,34]$). Uma interpretação plausível, nesse contexto, é de que exista uma região onde há partículas com órbitas estáveis próximas a uma região que seria instável, ou vice-versa.

Com base na definição de pericentro e apocentro para a determinação das condições iniciais nas simulações (Seção 2.6), apresentamos as novas grades (a, e) nas Figura 17 e Figura 18. A Figura 17 exibe o tempo de sobrevivência das partículas, enquanto a Figura 18 detalha o estado final das mesmas. A diferença fundamental destes resultados em relação aos que serão apresentados posteriormente está nas condições iniciais: nestas duas simulações, as coordenadas de posição e velocidade foram calculadas considerando as partículas inicialmente no apocentro de suas respectivas órbitas. Vale enfatizar que todas as simulações e mapas discutidos nas seções posteriores utilizam condições iniciais considerando que as partículas partem do pericentro.

Nas Figura 17 e Figura 18 foram sobrepostos pontos brancos que demarcam as larguras das ressonâncias 5 : 4, 3 : 2 e 2 : 1, obtidas a partir de análises das Superfícies de Seção de Poincaré. A comparação visual explicita uma coerência entre os métodos, pois agora as partículas nos mapas de sobrevivência e de estado partem com as mesmas condições de fase (posição e velocidade no apocentro) utilizadas na construção das Superfícies de Seção de Poincaré. É possível observar que, estritamente dentro das regiões delimitadas pelos pontos brancos, as partículas sobrevivem por todo o tempo de integração.

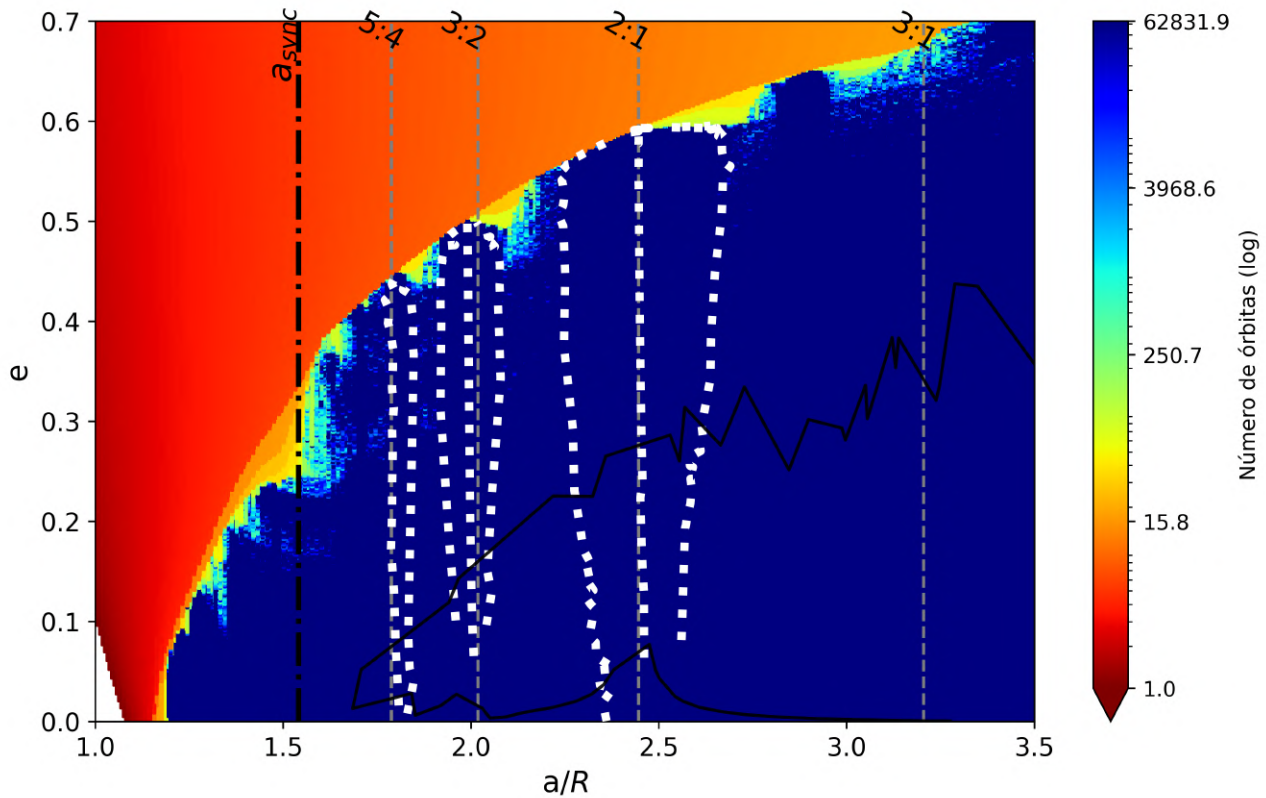


Figura 17 – Grade $a \times e$ formada por 160.000 partículas considerando o parâmetro $\mu^* = 0,002$. A figura apresenta o tempo de sobrevivência das partículas em uma escala de 1 a 10.000 períodos orbitais (isto é, de 4 horas a 1612 dias), destacando em branco a região de alta instabilidade, onde as partículas não completam sequer uma órbita antes de colidir. Os pontos em branco correspondem à largura das ressonâncias (Figura 9), enquanto a curva preta representa a região de estabilidade delimitada pelas órbitas de primeiro tipo; ambos os resultados foram obtidos por meio da análise das Superfícies de Seção de Poincaré.

A existência de uma região de estabilidade em $a \approx 2.8 R$, perceptível ainda que não claramente delimitada a partir da análise das Superfícies de Seção de Poincaré, sugere a presença de uma ressonância adicional. De modo análogo aos casos 5:4, 3:2 e 2:1, observa-se uma estrutura na qual todas as partículas sobrevivem ao tempo total de simulação, mesmo estando essa região limitada por instabilidade nas vizinhanças em altas excentricidades. Como foram mapeadas apenas as ressonâncias com comensurabilidades de primeira e segunda ordem, essa ressonância talvez seja de ordem superior (≥ 3).

Vale salientar que a ressonância 3:1 não foi incluída nesta análise combinada. Por se tratar de uma ressonância de ordem par, ela não apresenta uma estrutura bem definida no plano de seção quando impomos $\dot{x} = 0$. Isso implica que as trajetórias correspondentes não partem, nas Superfícies de Seção de Poincaré, nem do apocentro nem do pericentro da órbita. Consequentemente, essa ressonância não é comparável com o método da grade, que pressupõe explicitamente que as partículas iniciem a integração posicionadas em uma dessas configurações, pericentro ou apocentro, para o cálculo das posições e velocidades iniciais e posterior integração numérica das equações de movimento.

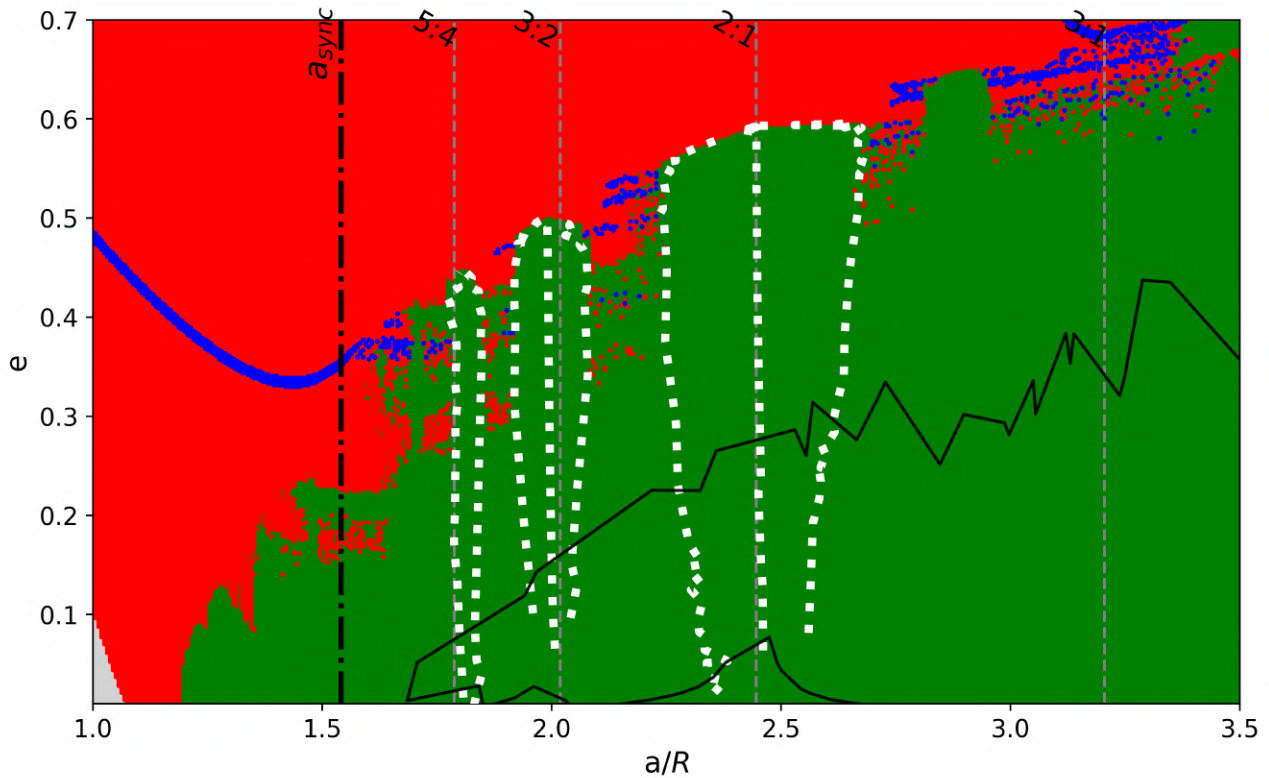


Figura 18 – Grade $a \times e$ formada por 160.000 partículas que partiram do apocentro considerando o parâmetro $\mu^* = 0,002$ mostrando o estado final de cada partícula, indicando em cinza claro a região de alta instabilidade, além de classificar o estado das partículas como sobreviventes (verde), colisões (vermelho) ou ejeções (azul). Os pontos em branco correspondem à largura das ressonâncias (Figura 9), enquanto a curva preta representa a região de estabilidade delimitada pelas órbitas de primeiro tipo; ambos os resultados foram obtidos por meio da análise das Superfícies de Seção de Poincaré.

4.2 VARIANDO O TAMANHO DA CRATERA

Nesta seção, investigamos o efeito do aumento da cratera nos mapas de estabilidade $a \times e$, considerando diferentes valores do parâmetro μ . Esse parâmetro corresponde à massa removida para a formação da concavidade e está diretamente ligado ao tamanho da cratera, uma vez que se assume constante a densidade do corpo e, portanto, a distribuição de massa retirada envolvida. Inicialmente, consideramos o corpo esférico, isto é, $\mu^* = 0.000$, adotando um dos valores de densidade estimados por Rommel et al. (2023) para o TNO 307261 Máni, $\rho = 720 \text{ kg/m}^3$. Nesse caso, como o corpo é esférico, seu campo gravitacional também é, de modo que o sistema não apresenta perturbações adicionais.

Mantendo a densidade ρ constante, cada valor de μ^* pode ser associado a um raio de concavidade equivalente. Convém destacar, entretanto, que, embora utilizemos esse modelo esférico para estimar o raio, na implementação do potencial gravitacional nas simulações foi considerado que a concavidade é definida como uma massa removida.

A Tabela 7 apresenta os valores de μ^* investigados e os raios de cratera estimados correspondentes:

Na Figura 19(a) e (b), apresentamos painéis correspondentes ao caso $\mu = 0.000$, ou seja, quando o corpo central é esférico. Esse resultado foi incluído para evidenciar que, na região azul, não ocorrem

Tabela 7 – Raio Equivalente da Cratera para Diferentes Valores de μ^* , assumindo $M_1 = 1,37 \times 10^{20}$ kg e $\rho = 720$ kg/m³. M_2 e r_c representam, respectivamente, a massa removida para formar a cratera e o raio da cratera.

$\mu^* (10^{-3})$	M_2 (kg)	r_c (km)
0,0	—	—
4,0	$5,50 \times 10^{17}$	56,70
6,0	$8,24 \times 10^{17}$	64,90
8,0	$1,10 \times 10^{18}$	71,43
10,0	$1,37 \times 10^{18}$	76,95
12,0	$1,65 \times 10^{18}$	81,77
14,0	$1,92 \times 10^{18}$	86,08
16,0	$2,20 \times 10^{18}$	90,00
18,0	$2,47 \times 10^{18}$	93,60
20,0	$2,75 \times 10^{18}$	96,95
21,0	$2,89 \times 10^{18}$	98,54
22,0	$3,02 \times 10^{18}$	100,08

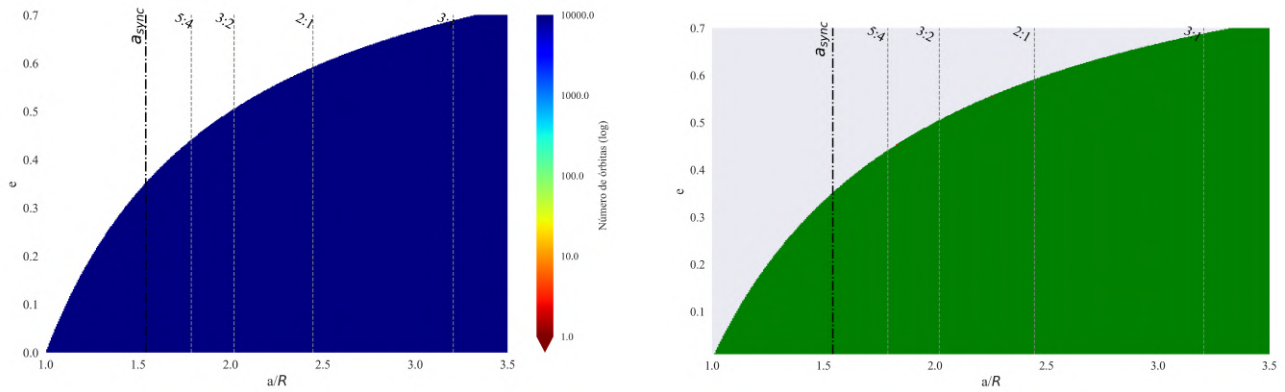


Figura 19 – Grades $a \times e$ formadas por 160.000 partículas considerando o parâmetro $\mu^* = 0,000$ (caso em que o corpo central é esférico). (a) Tempo de sobrevivência em escala de 1 a 10.000 períodos orbitais (4 horas a 1612 dias), destacando em branco a região de alta instabilidade. (b) Estado final das partículas, indicando em cinza claro a região de alta instabilidade e classificando as demais como sobreviventes (verde), colisões (vermelho) ou ejeções (azul).

instabilidades. A região branca corresponde a uma área altamente instável, na qual as partículas iniciam a simulação com o pericentro de suas órbitas já localizado no interior do corpo central, fazendo com que não sobrevivam sequer a uma órbita completa.

Na [Figura 20](#), é apresentada a grade $a \times e$, que mostra o tempo de sobrevivência das partículas para a razão de massa $\mu^* = 0,004$, correspondente a uma concavidade de raio $r_c = 56,7$ km. Observa-se que, no interior de a_{sync} , já discutido na [Figura 15](#), uma região instável, com tempo de sobrevivência em torno de 10 órbitas (≈ 39 horas), adentra a região estável para partículas com $e \leq 0,35$ e $a \leq 1,7 R_c$. Esse comportamento sugere o início de uma separação entre duas áreas estáveis, intercaladas por uma região de instabilidade.

Na [Figura 21](#), essa separação aparece de forma mais evidente, com partículas sobreviventes próximas ao raio síncrono delimitadas por uma região em que ocorrem colisões, ligeiramente à direita desse raio. Isso indica a existência de uma região estável fechada e próxima ao corpo central

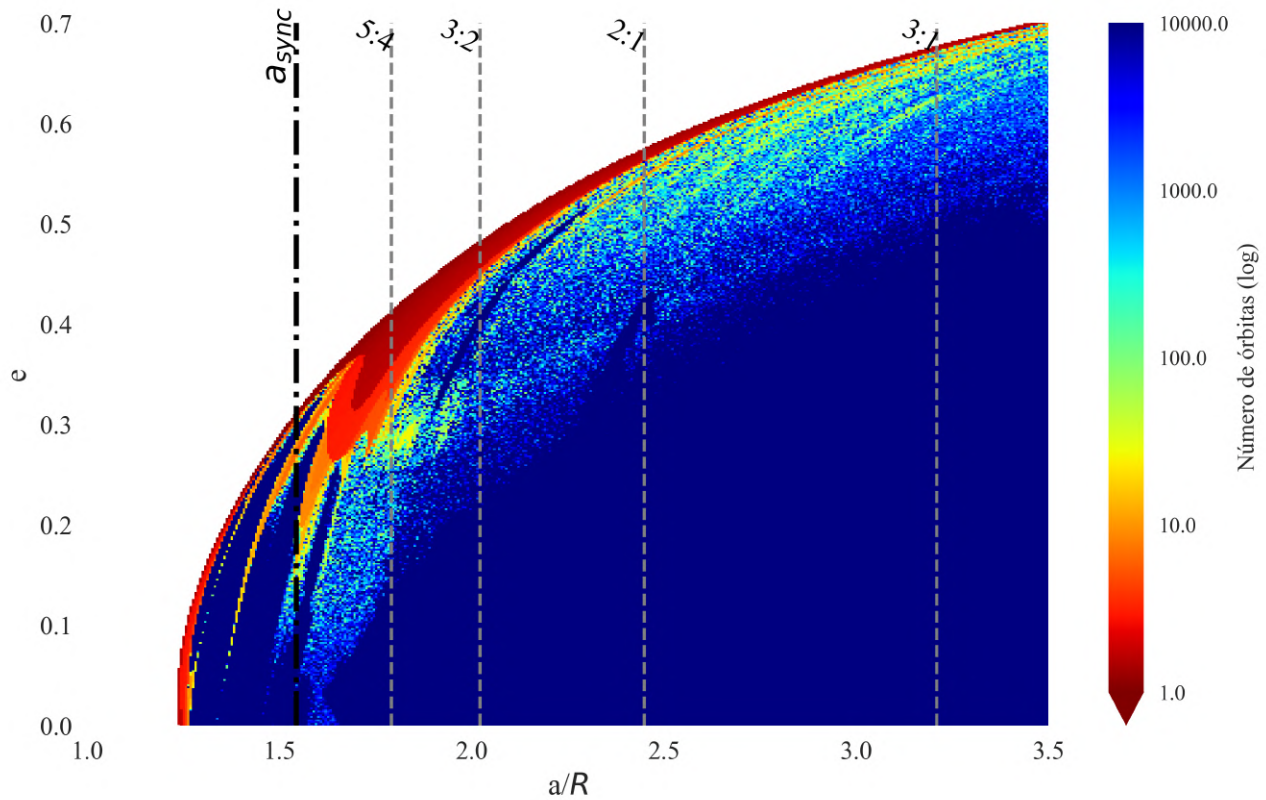


Figura 20 – Grade $a \times e$ formada por 160 000 partículas considerando o parâmetro $\mu^* = 0,004$ ($r_c = 56,70$ km). A figura apresenta o tempo de sobrevivência das partículas em uma escala de 1 a 10.000 períodos orbitais (isto é, de 4 horas a 1612 dias), destacando em branco a região de alta instabilidade.

($a \in [1,24 ; 1,60] R_c$ e $e \leq 0,35$), separada por uma estreita região onde as partículas colidem. Comparando com a [Figura 15](#), nota-se também o aumento do número de partículas ejetadas, atingindo inclusive aquelas mais próximas ao corpo central e com menor excentricidade. Em ambas figuras, destaca-se ainda uma estreita região estável próxima de $e = 0,4$ (ressonância 3:2). Notamos também a diminuição da altura da região de estabilidade das ressonâncias, bem como um achatamento na curva nas regiões mais próximas do corpo central ($a \leq 1,67 R_c$ e $e \leq 0,35$).

Na [Figura 22](#), apresentamos a grade $a \times e$ com o tempo de sobrevivência das partículas para a razão de massa $\mu^* = 0,008$, equivalente a uma concavidade de raio $r_c = 71,43$ km. Nota-se um aumento da região composta por partículas que sobrevivem menos de 10 órbitas (≈ 39 horas), principalmente próxima ao limite da região branca. Além disso, identificam-se áreas em que o tempo de sobrevivência é de algumas dezenas de órbitas, associadas a partículas em regiões mais próximas do corpo central e/ou com maiores excentricidades. Em contraste, há regiões em que as partículas sobrevivem por centenas ou até milhares de órbitas, correspondendo a órbitas mais afastadas e com excentricidades relativamente altas. Para valores menores de excentricidade, observa-se uma região estável delimitada por $a \geq 1,7 R_c$ e $e \leq 0,42$, além de quatro ilhas de estabilidade bem definidas, localizadas ao longo da linha do raio síncrono.

Na [Figura 23](#), as ilhas formadas por partículas que completaram 10,000 períodos orbitais (1612 dias) tornam-se ainda mais evidentes. Observa-se também o aumento do número de partículas ejetadas, abrangendo uma ampla região mais afastada do corpo central para $e \geq 0,3$, além de áreas próximas

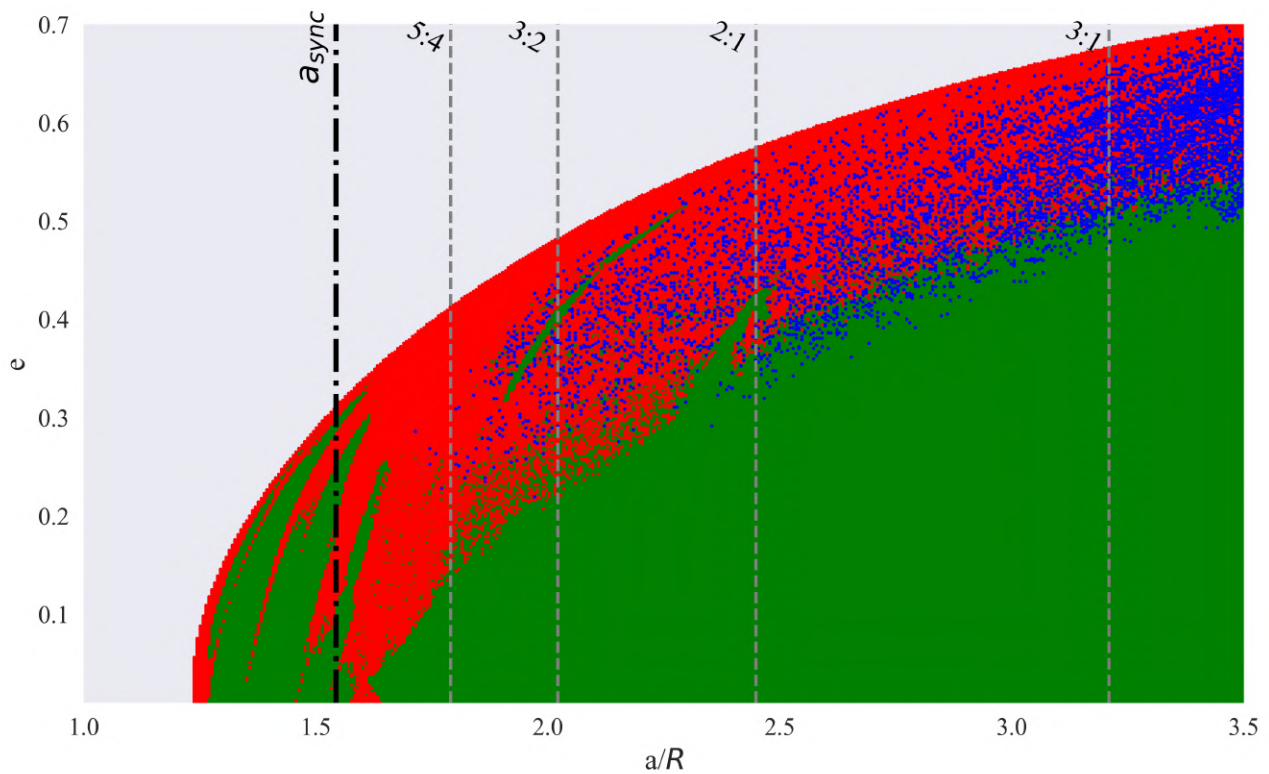


Figura 21 – Grade $a \times e$ formada por 160 000 partículas considerando o parâmetro $\mu^* = 0,004$ ($r_c = 56,70$ km), mostrando o estado final de cada partícula. A figura indica em cinza claro a região de alta instabilidade e classifica o estado das partículas como sobreviventes (verde), colisões (vermelho) ou ejeções (azul).

ao corpo com excentricidades mais baixas. Destaca-se ainda um "gap" em torno de $a \approx 1,8 R_c$, onde partículas em órbitas quase circulares acabam sendo ejetadas.

Na [Figura 24](#), apresentamos a grade $a \times e$, que mostra o tempo de sobrevivência das partículas para a razão de massa $\mu^* = 0,012$, equivalente a uma concavidade de raio $r_c = 81,77$ km. Observa-se de forma nítida a ampliação da região de alta instabilidade, onde as partículas não completam sequer uma órbita, assim como da região vermelha, em que o tempo de sobrevivência é inferior a 10 períodos orbitais (≈ 39 horas). Duas das ilhas de estabilidade, anteriormente localizadas próxima o raio síncrono, aparecem agora reduzidas e deslocadas para valores ligeiramente maiores de a , imersas em uma região instável ainda mais extensa. Destaca-se também uma região em laranja, para $a \geq 2 R_c$ e $e \in [0,2 ; 0,65]$, que se assemelha a uma ranhura. Ela tem início na ressonância 3:2 e atravessa as ressonâncias 2:1 e 3:1. Como indicado pela cor, essa região corresponde a tempos de sobrevivência da ordem de 10 períodos orbitais (≈ 39 horas), sendo circundada por regiões em amarelo e verde, associadas a sobrevivências de até algumas centenas de órbitas.

Na [Figura 25](#), observa-se que as partículas mais próximas do corpo central, exceto aquelas em cinza claro (que não completaram sequer uma órbita), colidem, aparecendo em vermelho. A única exceção são as duas ilhas formadas por partículas sobreviventes, que, para esse valor maior de μ^* , se apresentam comprimidas e deslocadas para uma região ligeiramente mais afastada do corpo central. Destaca-se também que a região estável que cruza a linha da ressonância 3:2, para $e \leq 0,3$, aparece aparentemente isolada, imersas em um mar de partículas ejetadas antes do fim da simulação. Após esse "gap" de

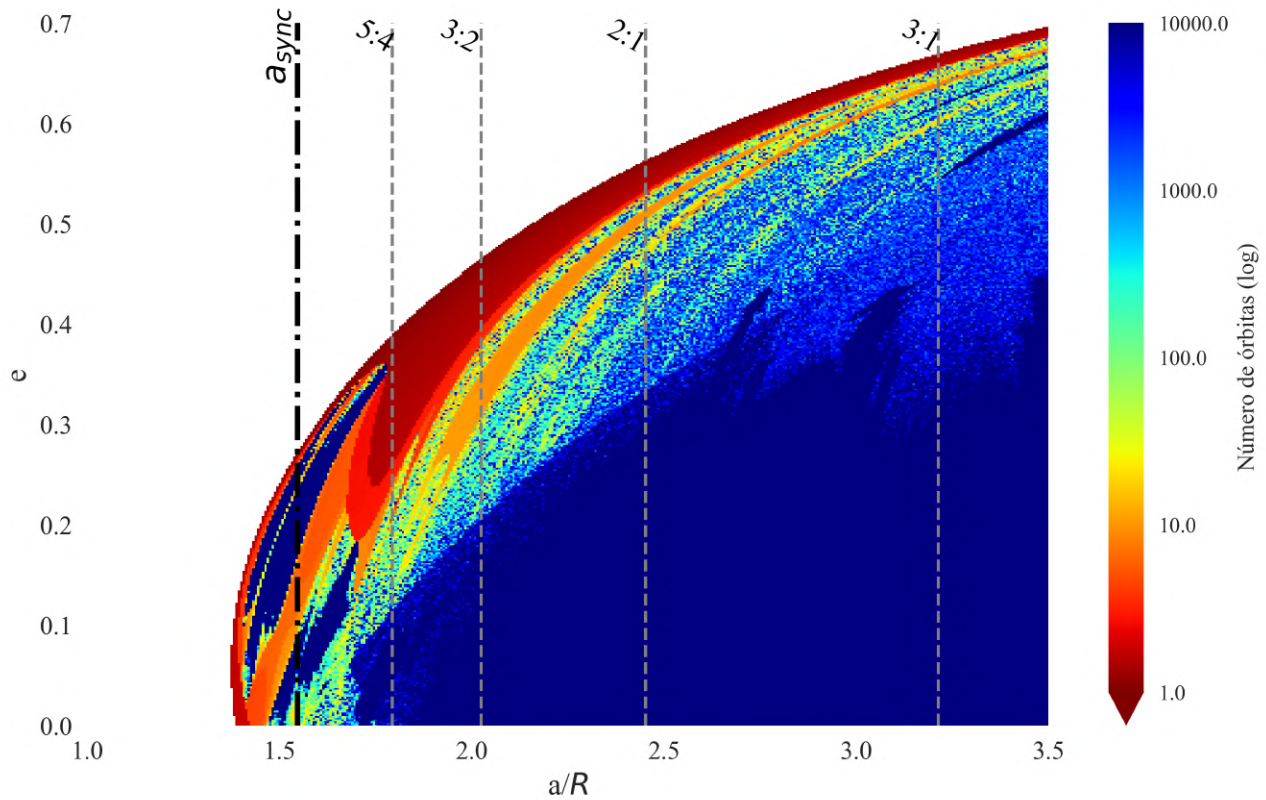


Figura 22 – Grade $a \times e$ formada por 160.000 partículas considerando o parâmetro $\mu^* = 0,008$ ($r_c = 71,43$ km). A figura apresenta o tempo de sobrevivência das partículas em uma escala de 1 a 10.000 períodos orbitais.

partículas ejetadas, identifica-se outra região estável igualmente envolta por uma região formada por partículas ejetadas. A ranhura em laranja mencionada no parágrafo anterior surge aqui em vermelho, indicando que as partículas que a compõem foram colididas durante a integração. Curiosamente, essa ranhura encontra-se cercada por uma região em que a maior parte das partículas foi ejetada, de modo que ela se destaca como um "gap" em que as partículas, embora sobrevivam por menos tempo, terminam colidindo, diferente da maioria das vizinhas, que acabam sendo ejetadas do sistema.

Na [Figura 26](#), apresentamos a grade $a \times e$, que mostra o tempo de sobrevivência das partículas para a razão de massa $\mu^* = 0,018$, correspondente a uma concavidade de raio $r_c = 93,60$ km. Nota-se a ausência das ilhas de estabilidade que, para certos valores de μ^* , surgiam imersas em regiões instáveis. Em contrapartida, aparecem quatro pequenas ilhas dispersas em meio a uma extensa região instável: três delas próximas entre si, localizadas junto à linha da ressonância 3:2 para $e \in [0,1 ; 0,23]$, e uma quarta atravessando a ressonância 2:1, para $e \in [0,36 ; 0,45]$. Esta última se destaca por estar associada a partículas de excentricidade relativamente alta, o que sugere relação com algum tipo de ressonância. Além disso, identificam-se três regiões de estabilidade, separadas por "gaps", iniciando em baixas excentricidades para $a \geq 1,98 R_c$ e $e \leq 0,28$. As partículas nessas regiões não sobrevivem ao tempo total de simulação, mas apresentam tempos consideráveis de sobrevivência, variando de algumas dezenas a alguns milhares de órbitas. Esses detalhes tornam-se mais evidentes na [Figura 27](#), que mostra de forma clara a separação das regiões estáveis pelos "gaps" formados por partículas ejetadas. Vale notar também que o número de partículas ejetadas aumentou significativamente em comparação

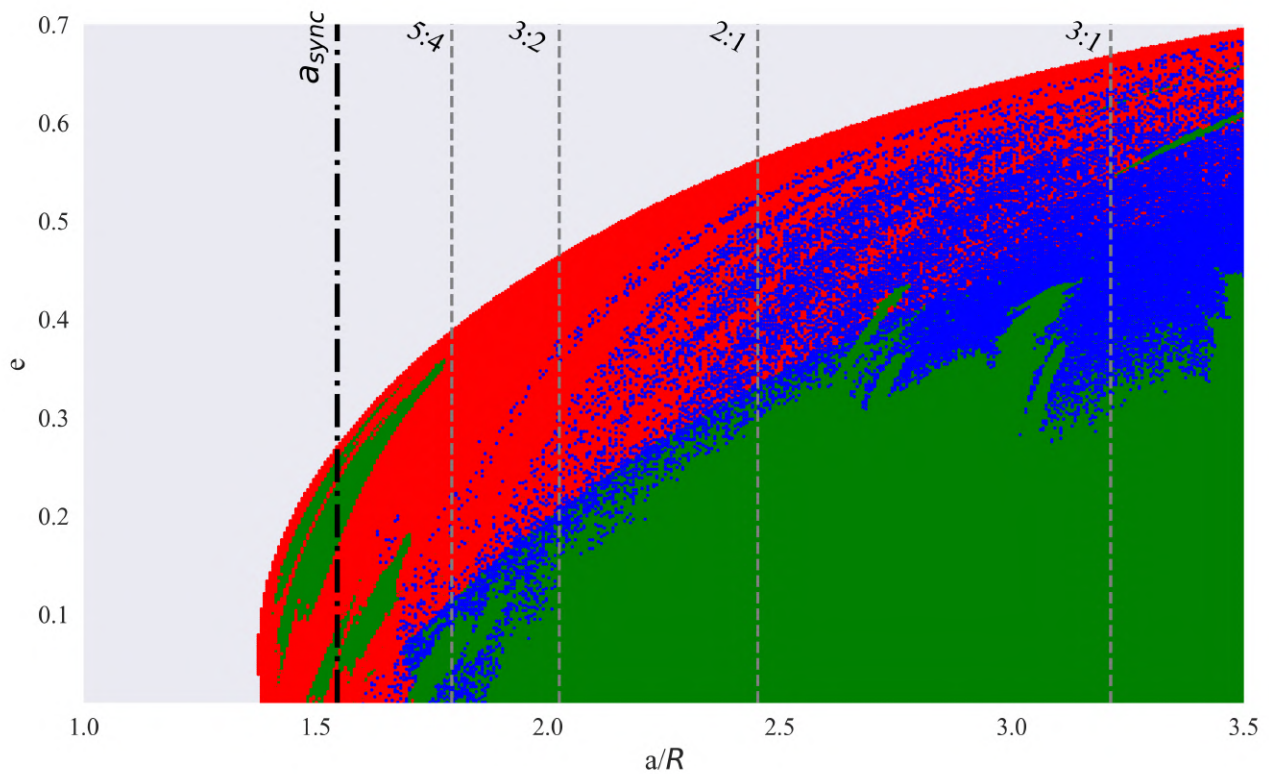


Figura 23 – Grade $a \times e$ formada por 160.000 partículas considerando o parâmetro $\mu^* = 0,008$ ($r_c = 71,43$ km), mostrando o estado final de cada partícula. A figura indica em cinza claro a região de alta instabilidade e classifica o estado das partículas como sobreviventes (verde), colisões (vermelho) ou ejeções (azul).

aos casos anteriores. Outro ponto relevante é a presença, de forma legível, não apenas da ranhura já comentada, mas também de uma segunda, em um intervalo de excentricidade ligeiramente inferior ($e \in [0,34 ; 0,59]$ para $a \geq 2,5 R_c$). Essas ranhuras são compostas por partículas que sobrevivem por menos tempo do que as vizinhas e colidem com o corpo central, enquanto a maioria das partículas que as delimitam é ejetada do sistema. Por fim, destaca-se que, entre todas as figuras analisadas até o momento, esta é a primeira em que a região onde as partículas sobrevivem mais de uma órbita encontra-se inteiramente além do raio síncrono.

Na [Figura 28](#), apresentamos a grade $a \times e$, que mostra o tempo de sobrevivência das partículas para a razão de massa $\mu^* = 0,022$, correspondente a uma concavidade de raio $r_c = 100,08$ km. Observa-se uma drástica redução no tamanho das regiões estáveis e o desaparecimento das ilhas de estabilidade presentes para valores maiores de μ^* . Isso indica que a perturbação tornou-se suficientemente intensa para que a maior parte das partículas não sobrevivesse até o final da simulação. A ranhura, agora única, permanece visível, cruzando as ressonâncias 2:1 e 3:1. Nela, destaca-se uma pequena região em $a \approx 2,5 R_c$, onde algumas partículas sobrevivem por mais tempo em comparação às demais que compõem essa estrutura em laranja, a qual resiste por apenas algumas dezenas de órbitas. As três regiões de estabilidade associadas a excentricidades $e \leq 0,23$, anteriormente separadas por "gaps", também sofreram redução significativa de tamanho, sobretudo a mais próxima do corpo central.

Na [Figura 29](#), observa-se de forma mais evidente a redução da região de estabilidade, agora restrita a $a \in [2,2 ; 2,4] R$ para $e \leq 0,02$. Verifica-se também que a pequena fração de partículas dentro

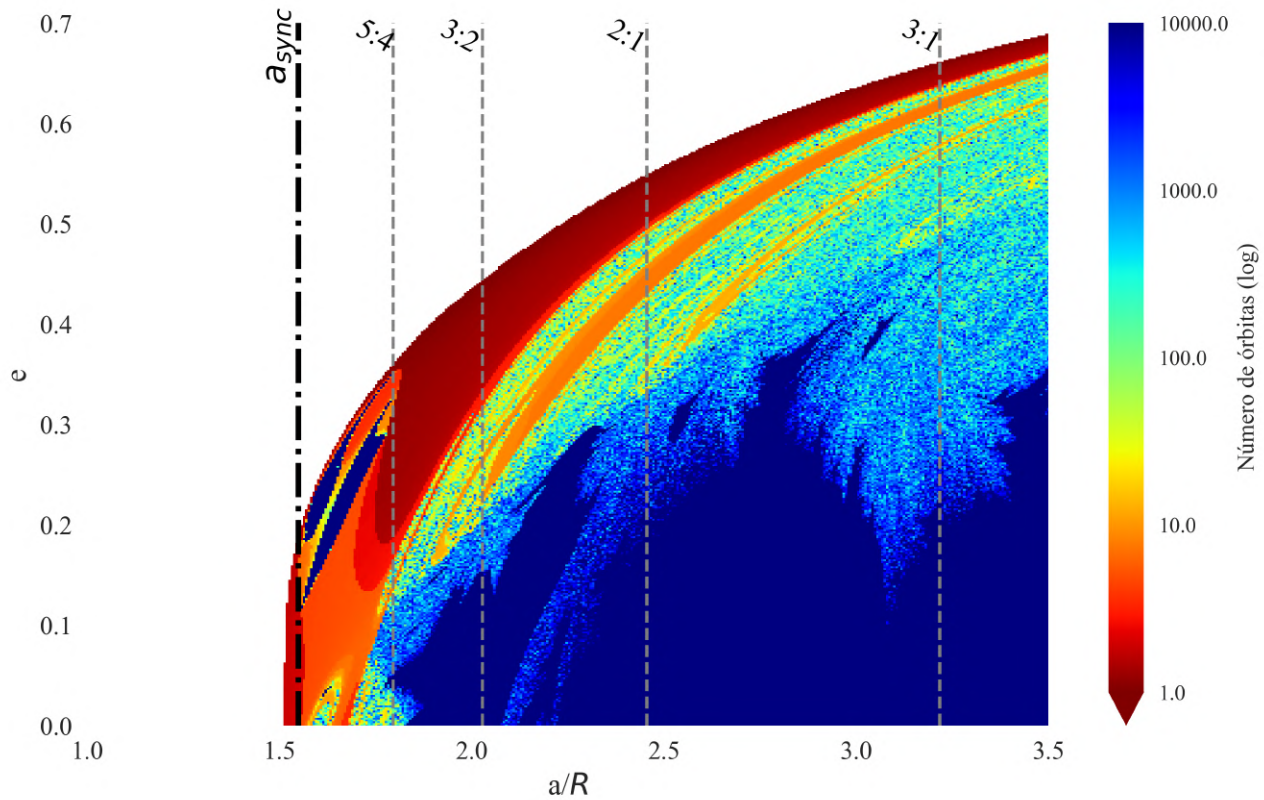


Figura 24 – Grade $a \times e$ formada por 160.000 partículas considerando o parâmetro $\mu^* = 0,012$ ($r_c = 81,77$ km). A figura apresenta o tempo de sobrevivência das partículas em uma escala de 1 a 10.000 períodos orbitais (isto é, de 4 horas a 1612 dias), destacando em branco a região de alta instabilidade.

da ranhura mencionada anteriormente, que cruza a ressonância 2:1 em $e \approx 0,34$, foi ejetada, ao contrário das demais partículas dessa mesma ranhura, que colidiram com o corpo central. Destaca-se ainda uma estreita faixa de partículas sobreviventes em torno de $a = 2,8 R_c$ e $e = 0,37$, peculiar por permanecerem além de 1.000 períodos orbitais (≈ 161 dias), mesmo estando cercadas por partículas que não resistem tanto tempo. Outras pequenas e finas ranhuras podem ser vistas próximas à linha da ressonância 5:4, em baixas excentricidades, formadas pela alternância entre grupos de partículas ejetadas e grupos de partículas que colidiram.

Na [Figura 30](#) é apresentada a distribuição percentual dos estados finais das partículas (sobrevivência, colisão e ejeção) em função de μ^* . Conforme evidenciado também na Tabela [8](#), observa-se uma tendência clara de diminuição da fração de partículas sobreviventes à medida que μ^* aumenta, o que já era esperado, pois este parâmetro está associado ao grau de perturbação introduzido no sistema. Inicialmente, para $\mu^* = 2,0 \times 10^{-3}$, mais de 60% das partículas permanecem em estado de sobrevivência. No entanto, esse percentual decresce continuamente, atingindo cerca de 7% para $\mu^* = 2,1 \times 10^{-2}$, e se mantém próximo a esse valor para $\mu^* = 3,0 \times 10^{-2}$. Esse comportamento indica uma maior instabilidade na trajetória de partículas no sistema considerando altos valores do módulo de μ^* . Paralelamente, o número de partículas que colidem com o corpo central cresce com o aumento de μ^* , tornando-se o estado final predominante a partir de $\mu^* \approx 4,0 \times 10^{-3}$ e alcançando um pico de aproximadamente 65% em $\mu^* = 3,0 \times 10^{-2}$. Já a fração de partículas ejetadas do sistema também se eleva de forma significativa, especialmente para $\mu^* < 8,0 \times 10^{-3}$, atingindo seu máximo

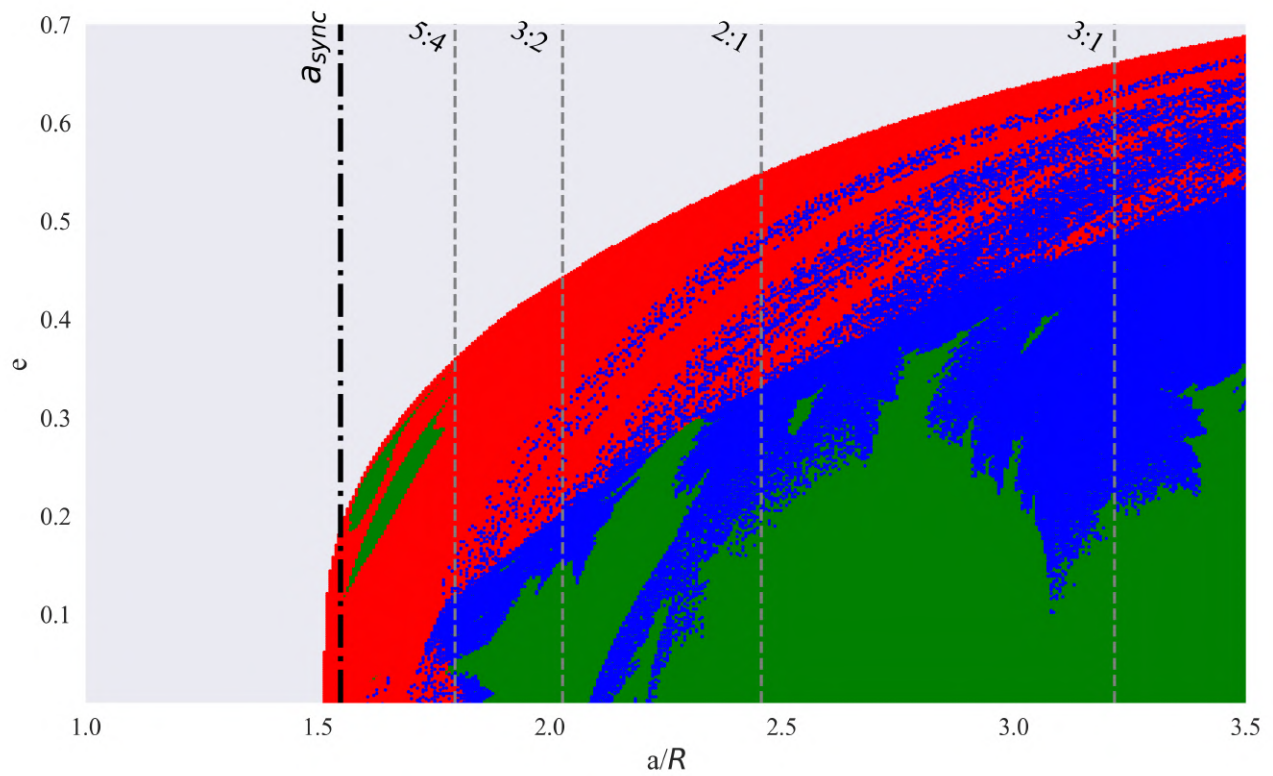


Figura 25 – Grade $a \times e$ formada por 160.000 partículas considerando o parâmetro $\mu^* = 0,012$ ($r_c = 81,77$ km), mostrando o estado final de cada partícula. A figura indica em cinza claro a região de alta instabilidade e classifica o estado das partículas como sobreviventes (verde), colisões (vermelho) ou ejeções (azul).

em $\mu^* = 2,2 \times 10^{-2}$, com cerca de 30% das partículas sendo ejetadas.

Tabela 8 – Distribuição Percentual dos Estados Finais por valor de μ^* de acordo com a [Figura 30](#)

Valor de μ^* (10^{-3})	Sobrevivência (%)	Colisão (%)	Ejeção (%)
2,0	62,17	37,09	0,73
4,0	45,32	51,01	3,67
6,0	37,70	56,40	5,91
8,0	32,65	56,02	11,33
10,0	28,83	57,81	13,36
12,0	22,21	59,95	17,84
14,0	15,61	60,50	23,89
16,0	13,08	60,54	26,38
18,0	11,15	60,77	28,08
21,0	7,24	62,94	29,82
22,0	6,62	63,36	30,02
30,0	7,71	65,47	26,82

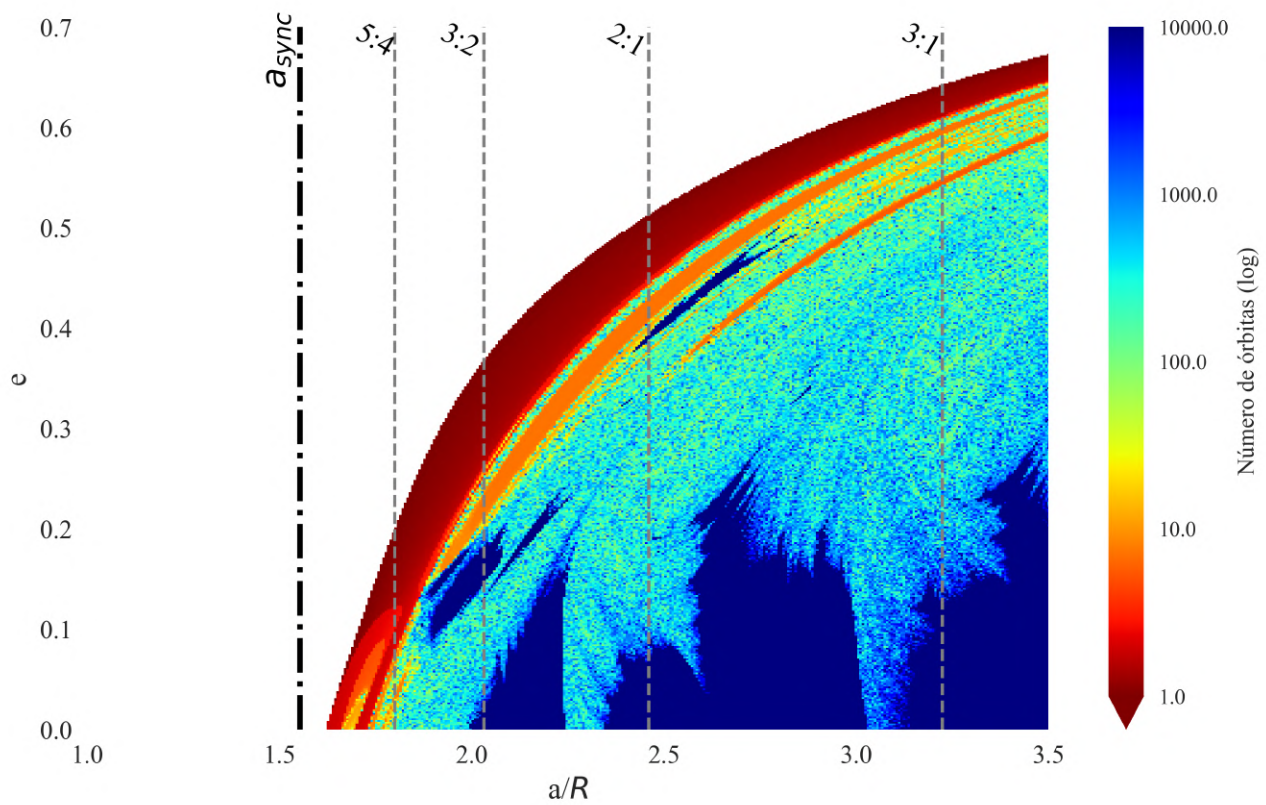


Figura 26 – Grade $a \times e$ formada por 160.000 partículas considerando o parâmetro $\mu^* = 0,018$ ($r_c = 93,60$ km). A figura apresenta o tempo de sobrevivência das partículas em uma escala de 1 a 10.000 períodos orbitais (isto é, de 4 horas a 1612 dias), destacando em branco a região de alta instabilidade.

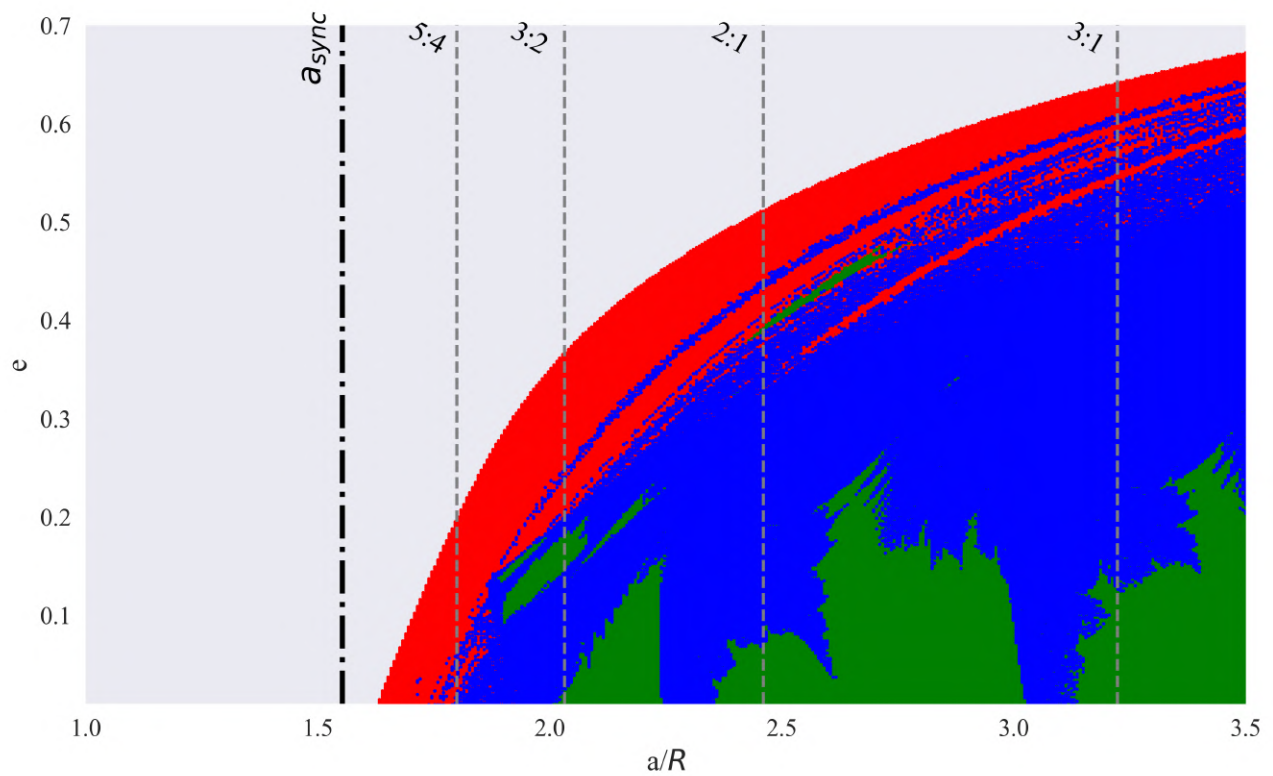


Figura 27 – Grade $a \times e$ formada por 160.000 partículas considerando o parâmetro $\mu^* = 0,018$ ($r_c = 93,60$ km), mostrando o estado final de cada partícula. A figura indica em cinza claro a região de alta instabilidade e classifica o estado das partículas como sobreviventes (verde), colisões (vermelho) ou ejeções (azul).

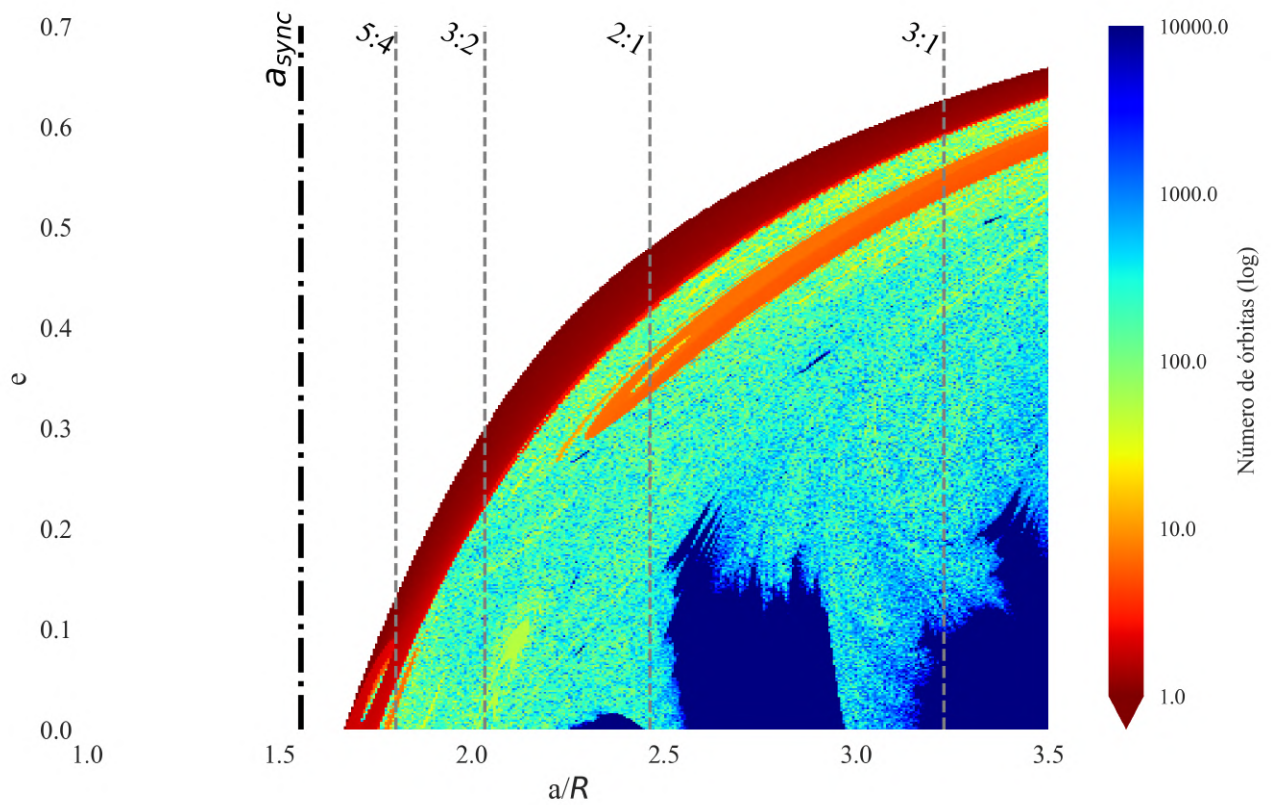


Figura 28 – Grade $a \times e$ formada por 160.000 partículas considerando o parâmetro $\mu^* = 0,022$ ($r_c = 100,08$ km). A figura apresenta o tempo de sobrevivência das partículas em uma escala de 1 a 10.000 períodos orbitais.

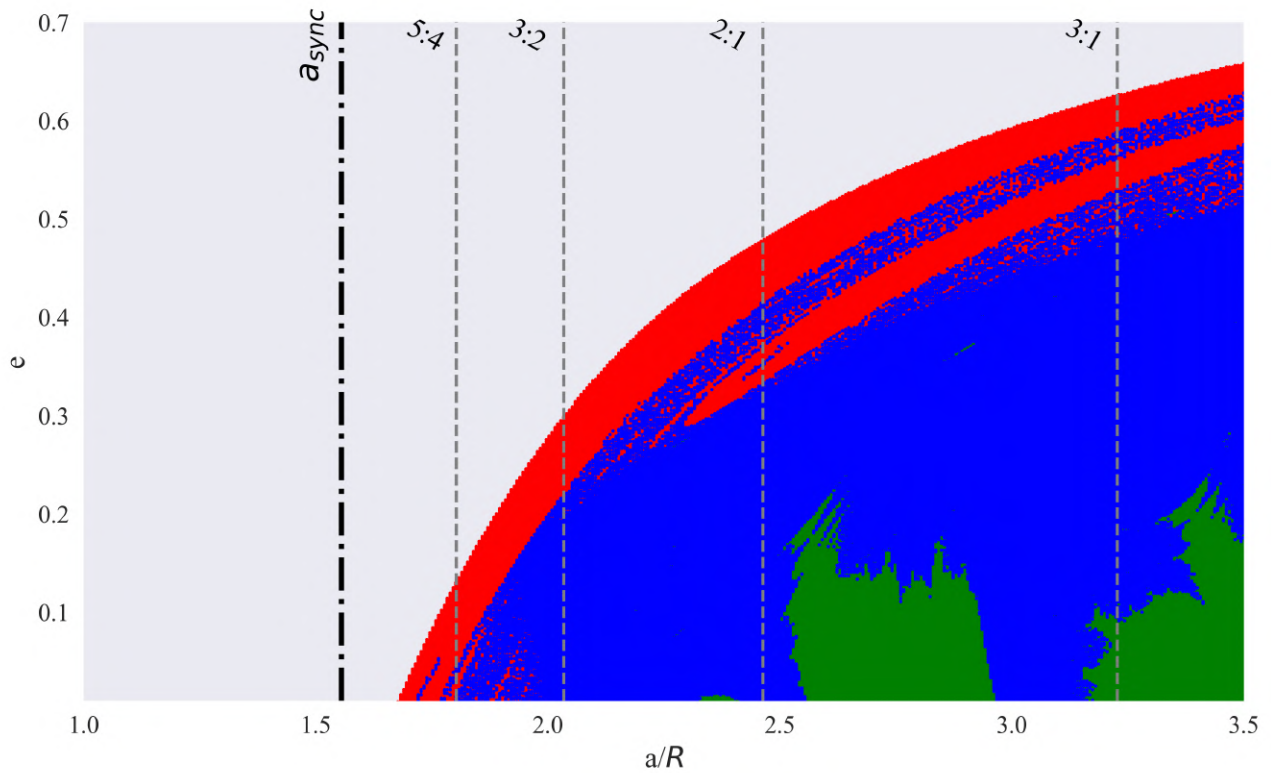


Figura 29 – Grade $a \times e$ formada por 160.000 partículas considerando o parâmetro $\mu^* = 0,022$ ($r_c = 100,08$ km), mostrando o estado final de cada partícula. A figura indica em cinza claro a região de alta instabilidade e classifica o estado das partículas como sobreviventes (verde), colisões (vermelho) ou ejeções (azul).

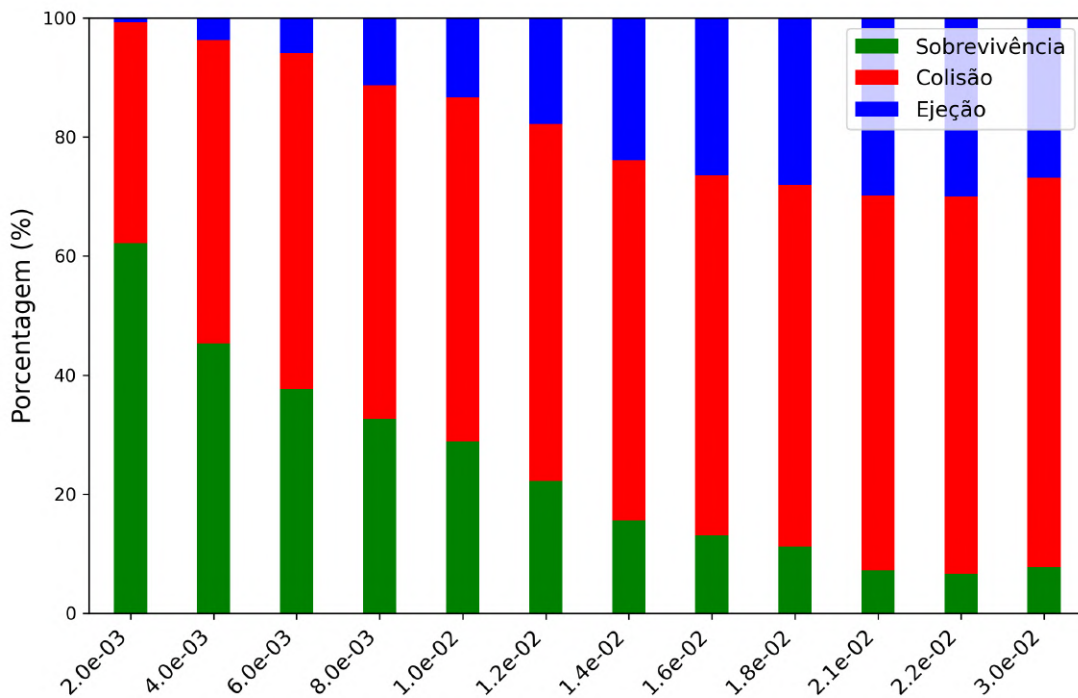


Figura 30 – Estados finais das simulações para diferentes valores de μ^* . Em verde estão as partículas que sobreviveram durante toda a simulação, em vermelho as partículas que colidiram com o corpo central em algum momento, e em azul as partículas que foram ejetadas do sistema. O intervalo considerado para μ^* é $\mu^* \in [2 \times 10^{-3} ; 3 \times 10^{-2}]$.

5 DISCUSSÃO

Pequenos corpos com formatos irregulares são frequentes no Sistema Solar, resultantes de processos como colisões, efeitos de maré ou eventos ocorridos durante sua formação. Considerar essas irregularidades em modelagens matemáticas é essencial para a dinâmica orbital, pois elas alteram o campo gravitacional do corpo e afetam o movimento de partículas e objetos ao seu redor. A caracterização dessas regiões ao redor do corpo é uma etapa fundamental tanto para a engenharia, por exemplo, no planejamento de trajetórias de missões espaciais, quanto para a astronomia observacional, já que permite determinar as regiões de estabilidade onde podem existir satélites ou anéis, bem como regiões de instabilidade.

O objeto de estudo que motiva este trabalho é Máni, um objeto transnetuniano (TNO) que se destaca por uma característica topográfica singular: uma cratera de dimensões expressivas em relação ao seu tamanho. De acordo com [Rommel et al. \(2023\)](#), Máni possui um raio estimado em 396 km. As observações revelaram a presença dessa proeminente cratera com profundidade estimada em 45 km, um valor considerável, já que corresponde a mais de 11% do raio do corpo.

O objetivo deste trabalho é estudar a estrutura dinâmica nas proximidades de um objeto com uma cratera no equador. Para isso, empregamos uma modelagem matemática considerando o movimento no plano, cujas equações de movimento derivam de um potencial gravitacional total, composto pela contribuição da porção esférica do corpo e da própria cratera. A partir dessa formulação, a análise busca mapear as regiões de estabilidade, instabilidade e caos, além de identificar no sistema as posições e larguras das ressonâncias spin-órbita (o período orbital de uma partícula é comensurável com o período de rotação do corpo central).

Para o estudo da estabilidade, foram empregadas duas técnicas: Superfícies de Seção de Poincaré e simulações numéricas de um conjunto de partículas sob o efeito gravitacional de um corpo não esférico. A primeira técnica, as Seções de Poincaré, foi aplicada ao "caso nominal", utilizando os parâmetros estimados para o TNO Máni. O objetivo desta análise foi identificar as ressonâncias spin-órbita, determinando tanto sua localização quanto sua largura. A segunda abordagem, a simulação de um conjunto de partículas, permitiu analisar como a variação no tamanho da cratera afeta as estruturas de estabilidade. Para isso, foi utilizada uma grade com 160 mil partículas distribuídas em uma malha de diferentes valores iniciais de semieixo maior e excentricidade. Analisamos as estruturas associadas ao tempo de sobrevivência dessas partículas, bem como seus estados finais: sobrevivência até o período final da integração numérica, ejeção do sistema ou colisão com o corpo central.

A aplicação desses métodos permitiu, primeiramente, identificar as ressonâncias spin-órbita 2:1, 3:2, 5:4 e 3:1, bem como determinar suas respectivas larguras. Para essas ressonâncias, também foram obtidas as trajetórias das partículas no referencial rotacional. Por meio da segunda abordagem, foram mapeadas as estruturas associadas ao tempo de sobrevivência das partículas, revelando seus estados finais (sobrevivência, ejeção do sistema ou colisão). Adicionalmente, foi analisada a evolução dessas estruturas em resposta à variação no tamanho da cratera.

A análise dos resultados revela importantes implicações para cada uma das técnicas empregadas.

Para o primeiro método, a análise das Superfícies de Seção de Poincaré permitiu determinar a localização das ressonâncias spin-órbita com precisão considerável e a largura dessas ressonâncias. O Desvio Percentual (D_p) máximo de 1,4% obtido para as ressonâncias estudadas reforça a validade desta técnica no contexto do problema. Em relação ao segundo método, os resultados indicam que dimensões específicas da cratera podem gerar "ilhas de estabilidade" localizadas em meio a regiões majoritariamente instáveis, salientando a importância de estudos dinâmicos detalhados para a busca por satélites naturais ou anéis, que poderiam existir de forma estável, mesmo em um ambiente que, à primeira vista, aparenta ser instável. Vale salientar que, apesar de explorados valores de raio de cratera de até 100 km para um corpo de aproximadamente 400 km de raio, tal proporção não é fisicamente factível, já que não há registro de crateras com essa escala. Essa variação foi adotada com o objetivo de investigar o comportamento da estabilidade mesmo em cenários hipotéticos.

A fim de comparar os resultados obtidos neste trabalho com estudos anteriores que forneceram as bases para a abordagem do caso da cratera, em especial o de [Madeira et al. \(2022\)](#), que trata de uma massa anômala, destaca-se que a principal diferença entre os modelos está na mudança de sinal na razão de massas (anomalia/massa total do corpo). Nesse estudo, foram determinadas numericamente a posição e a largura das ressonâncias, além de compará-las com resultados analíticos. No presente trabalho, por sua vez, essas grandezas também foram obtidas numericamente para o caso da cratera, enquanto apenas a posição foi calculada analiticamente. Além disso, os autores analisaram a evolução temporal da excentricidade em dois casos com órbitas iniciais circulares, uma mais próxima e outra mais afastada do corpo central, evidenciando a influência da anomalia na variação desse elemento orbital. De forma análoga, aqui avaliamos o efeito do aumento da intensidade da perturbação, representado pelo crescimento do tamanho da cratera, sobre partículas que iniciam suas simulações em órbitas circulares na mesma posição. Vale ressaltar, ainda, que o estudo anterior analisou as ressonâncias em uma região mais ampla ao redor do corpo, enquanto neste trabalho o foco é compreender a estrutura dinâmica local e sua evolução com o aumento do tamanho da cratera. Assim, diversas ressonâncias identificadas no sistema com massa anômala não foram observadas aqui, uma vez que o intervalo de semi-eixo maior considerado não abrange regiões suficientemente distantes do corpo. Em ambos os trabalhos, contudo, foram encontradas e caracterizadas as ressonâncias 2:1, 3:1 e 3:2.

Este trabalho também apresentou resultados comparáveis aos de [Ribeiro et al. \(2023\)](#), que utilizou a técnica das Superfícies de Seção de Poincaré para o caso de um elipsoide triaxial, isto é, um corpo composto por três semi-eixos de diferentes comprimentos ($A > B > C$). A partir dessa abordagem, os autores definiram a região de estabilidade e, para determinar a posição e a largura das ressonâncias, foi necessário levar em conta a geometria da órbita para estimar os elementos orbitais. Essa consideração se deve ao fato de que, tanto neste estudo quanto em [Madeira et al. \(2022\)](#), não foi incluído o termo C_{22} associado à elipticidade. Quando tal termo é considerado, observa-se um erro significativo na determinação da posição das ressonâncias, especialmente daquelas mais próximas ao corpo central.

Neste trabalho, analisamos, embora não em detalhes, as curvas de velocidade zero para os casos da cratera e da massa anômala (considerando a massa normalizada $|\mu| = 0,002$), evidenciando que essas configurações geram estruturas distintas. Os resultados indicam que os pontos de equilíbrio

estáveis tendem a se alinhar ao eixo associado à menor concentração de massa, indicando variações significativas na estabilidade dos pontos de equilíbrio. Uma investigação de [Sicardy et al. \(2019b\)](#) demonstrou que, no caso da massa anômala, os pontos L_4 e L_5 permanecem linearmente estáveis enquanto $\mu \leq \mu_{cr} \approx 0,0385$, sendo μ_{cr} a razão de massa crítica acima da qual esses pontos perdem estabilidade. Tal resultado fornece um indicativo adicional de que, para o valor considerado neste estudo, para o caso da massa anômala ($\mu = 0,002$), os pontos L_4 e L_5 devem manter-se linearmente estáveis, em concordância com o comportamento observado nas curvas de velocidade zero.

Para trabalhos futuros, uma melhoria importante no modelo seria considerar a variação do período de rotação do corpo central. Essa análise é motivada pelo estudo de [Madeira et al. \(2022\)](#), que, embora aborde uma anomalia de massa em vez de uma cratera, são modelagens similares. Os autores mostraram que a taxa de rotação (λ) é o principal fator que determina a posição das ressonâncias, enquanto o tamanho da anomalia afeta sua largura. Aplicar uma análise semelhante ao modelo de cratera permitiria uma comparação mais completa dos resultados obtidos entre as duas abordagens.

Além disso, outra melhoria seria incorporar outros detalhes que Máni possui em sua topografia. Isso permitiria determinar a estrutura dinâmica ao seu redor com mais precisão, considerando a posição dessas anomalias em termos de latitude e do eixo de rotação em um modelo tridimensional.

REFERÊNCIAS

- BARUCCI, M. A. **The solar system beyond Neptune**. [S.l.]: University of Arizona Press, 2008.
- BORDERES-MOTTA, G.; WINTER, O. C. Poincaré surfaces of section around a 3d irregular body: the case of asteroid 4179 toutatis. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 474, n. 2, p. 2452–2466, 11 2018. ISSN 0035-8711. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/mnras/stx2958>.
- BRAGA-RIBAS, F. et al. A ring system detected around the centaur (10199) chariklo. **Nature**, Springer Science and Business Media LLC, v. 508, n. 7494, p. 72–75, mar. 2014. ISSN 1476-4687. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1038/nature13155>.
- BÉRARD, D. et al. The structure of chariklo's rings from stellar occultations. **The Astronomical Journal**, p. 144–173, 06 2017.
- CHANDRASEKHAR, S. **Principles of stellar dynamics**. [S.l.]: The University of Chicago Press, Chicago, IL, 1942.
- CHENG, A. F. et al. Aida dart asteroid deflection test: Planetary defense and science objectives. **Planetary and Space Science**, Elsevier, v. 157, p. 104–115, 2018.
- Elliot, J. L. et al. Occultation of SAO 158687 by Uranian Satellite Belt. , v. 3051, p. 1, mar. 1977.
- ELLIOT, J. L. et al. Size and albedo of kuiper belt object 55636 from a stellar occultation. **Nature**, Nature Publishing Group UK London, v. 465, n. 7300, p. 897–900, 2010.
- FODDE, I. et al. Robust stability and mission performance of a cubesat orbiting the didymos binary asteroid system. **Acta Astronautica**, Elsevier, v. 203, p. 577–591, 2023.
- FU, T.; WANG, Y. Orbital stability around the primary of a binary asteroid system. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 44, n. 9, p. 1607–1620, 2021.
- GIULIATTI WINTER, S. M. et al. The sailboat island and the new horizons trajectory. **Icarus**, Elsevier, v. 246, p. 339–344, 2015.
- Hénon, M. Exploration numérique du problème restreint. I. Masses égales, orbites périodiques. **Annales d'Astrophysique**, v. 28, p. 499, jan. 1965.
- Hénon, M. Exploration numérique du problème restreint. II. Masses égales, stabilité des orbites périodiques. **Annales d'Astrophysique**, v. 28, p. 992, fev. 1965.
- Hénon, M. Exploration numérique du problème restreint. III. Masses égales, orbites non périodiques. **Annales d'Astrophysique**, v. 29, p. 49, jan. 1966.
- Hénon, M. Exploration numérique du problème restreint. IV. Masses égales, stabilité des orbites non périodiques. **Annales d'Astrophysique**, v. 29, p. 57, jan. 1966.
- HOWELL, S. B. **Handbook of CCD astronomy**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2000. v. 2.
- Jefferys, W. H. An Atlas of Surfaces of Section for the Restricted Problem of Three Bodies. **Published at the Department of Astronomy of the University of Texas at Austin, Ser. II**, v. 3, p. 6, 1971.
- JEWITT, D. et al. The dimorphos boulder swarm. **The Astrophysical Journal Letters**, IOP Publishing, v. 952, n. 1, p. L12, 2023.

JPL, CALTECH. **JPL Small-Body Database Lookup: 307261 (2002 MS4)**. https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb_lookup.html#/?sstr=307261. NASA / Caltech. Accessed: June 2, 2025.

LANG, A. Spacecraft orbital stability zones around asteroid 99942 apophis. **Acta Astronautica**, Elsevier, v. 182, p. 251–263, 2021.

LEIVA, R. et al. Size and shape of chariklo from multi-epoch stellar occultations. **The Astronomical Journal**, IOP Publishing, v. 154, n. 4, p. 159, 2017.

LEONEL, E. D. **Invariância de escala em sistemas dinâmicos não lineares**. [S.l.]: Editora Blucher, 2019.

LI, J.-S.; YANG, Z.; LUO, Y.-Z. A review of space-object collision probability computation methods. **Astrodynamics**, Springer, v. 6, n. 2, p. 95–120, 2022.

MADEIRA, G. et al. Long-term dust dynamics in didymos and dimorphos system: Production, stability, and transport. **Icarus**, Elsevier, v. 412, p. 115997, 2024.

MADEIRA, G. et al. Dynamics around non-spherical symmetric bodies – i. the case of a spherical body with mass anomaly. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 510, n. 1, p. 1450–1469, 12 2022. ISSN 0035-8711. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/mnras/stab3552>.

Minor Planet Center. **Minor Planet Center**. <https://minorplanetcenter.net>. International Astronomical Union. Accessed: June 2, 2025.

MORBIDELLI, A. **Modern celestial mechanics: aspects of solar system dynamics**. [S.l.]: Taylor Francis, 2002.

MORGADO, B. et al. A dense ring of the trans-neptunian object quaoar outside its roche limit. **Nature**, Nature Publishing Group UK London, v. 614, n. 7947, p. 239–243, 2023.

MULLER, P. M.; SJOGREN, W. L. Mascons: Lunar mass concentrations. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 161, n. 3842, p. 680–684, 1968.

MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar System Dynamics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/books/solar-system-dynamics/108745217E4A18190CBA340ED5E477A2>.

ORTIZ, J. L. et al. The size, shape, density and ring of the dwarf planet haumea from a stellar occultation. **Nature**, Nature Publishing Group UK London, v. 550, n. 7675, p. 219–223, 2017.

RIBEIRO, T. et al. Dynamics around non-spherical symmetric bodies: Ii. the case of a prolate body. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 525, n. 1, p. 44–56, 08 2023. ISSN 0035-8711. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/mnras/stad2362>.

ROMMEL, F. L. et al. A large topographic feature on the surface of the trans-neptunian object (307261) 2002 ms4 measured from stellar occultations. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 678, p. A167, out. 2023. ISSN 1432-0746. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/202346892>.

SCHEERES, D. et al. Orbits close to asteroid 4769 castalia. **Icarus**, v. 121, n. 1, p. 67–87, 1996. ISSN 0019-1035. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001910359690072X>.

SICARDY, B. Resonances in nonaxisymmetric gravitational potentials. **The Astronomical Journal**, IOP Publishing, v. 159, n. 3, p. 102, 2020.

SICARDY, B. et al. Ring dynamics around non-axisymmetric bodies with application to chariklo and haumea. **Nature Astronomy**, Nature Publishing Group UK London, v. 3, n. 2, p. 146–153, 2019.

SICARDY, B. et al. Ring dynamics around non-axisymmetric bodies with application to chariklo and haumea. **Nature Astronomy**, v. 3, n. 2, p. 146–153, 2019. ISSN 2397-3366. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/s41550-018-0616-8>.

THIROUIN, A. **Study of trans-neptunian objects using photometric techniques and numerical simulations**. Tese (Doutorado) — Universidad de Granada, 2013.

THOMAS, C. A. et al. Orbital period change of dimorphos due to the dart kinetic impact. **Nature**, Nature Publishing Group UK London, v. 616, n. 7957, p. 448–451, 2023.

WERNER, R. A. The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don't cut corners. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, Springer, v. 59, n. 3, p. 253–278, 1994.

WERNER, R. A.; SCHEERES, D. J. Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 castalia. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, Springer, v. 65, n. 3, p. 313–344, 1996.

WINTER, O. C.; BORDERES-MOTTA, G.; RIBEIRO, T. On the location of the ring around the dwarf planet haumea. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 484, n. 3, p. 3765–3771, 02 2019. ISSN 0035-8711. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/mnras/stz246>.

WINTER, O. C.; MURRAY, C. D. Atlas of the planar, circular, restricted three-body problem. i. internal orbits. **QMW Maths Notes**, London, n. 1, 1994.

WINTER, O. C.; MURRAY, C. D. Atlas of the planar, circular, restricted three-body problem. ii. external orbits. **QMW Maths Notes**, London, n. 2, 1994.