

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Departamento de Física

Campus de Rio Claro

Entropia de Tsallis e sua aplicação em ações da Bolsa de Valores

Edilson Fernandes de Souza

Orientador: Prof. Dr. José Roberto Campanha

Dissertação de Mestrado
elaborado junto ao
Programa de Pós-
Graduação em Física –
Área de Concentração em
Física Aplicada.

Rio Claro
S.P. Brasil
2009

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Programa de Pós – Graduação em Física

Campus de Rio Claro

Entropia de Tsallis e sua aplicação em ações da Bolsa de Valores

Edilson Fernandes de Souza
Orientador: Prof. Dr. José Roberto Campanha

Prof. Dr. José Roberto Campanha - Orientador
IGCE/RC

Prof. Dr. Edson Denis Leonel
IGCE/RC

Prof. Dr. Camilo Rodrigues Neto
EACH/USP/São Paulo (SP)

Rio Claro
S.P. Brasil
2009

Agradecimentos

Gostaria primeiramente de agradecer a Deus por me amparar nos momentos difíceis, me dar força interior para superar as dificuldades, mostrar os caminhos nas horas incertas, me suprir em todas as minhas necessidades, estar comigo nos momentos de conquista, alegria, felicidade e, por estar comigo todos os segundos da minha vida.

Ao meu pai, minha mãe e meu irmão, pelo amor, carinho, incentivo, paciência, pela sólida formação dada até minha juventude, que me proporcionou a continuidade nos estudos até a chegada a este mestrado, meus eternos agradecimentos.

Ao Prof. Dr. Hari Mohan Gupta, pela paciência, amizade e carinho que teve por mim, por ter me orientado até a sua morte, e infelizmente não estará presente fisicamente, somente em nossos corações na defesa.

Ao Prof. Dr. José Roberto Campanha, meu orientador, por ter-me recebido como seu aluno, pela paciência, amizade, incentivo, e atenção dispensada para a elaboração e desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Edson Denis Leonel que se mostrou um grande amigo e um excelente professor, pois sempre me ajudou e me incentivou.

A todos os docentes e funcionários do Departamento de Física, pela forma carinhosa, gentil com que sempre me trataram, e pela atenção que me deram nos momentos difíceis.

A Fernanda Ceccato pelo amor e carinho, por ter me apoiado, ter tido paciência e nunca ter deixado de acreditar e incentivar.

Ao Sr. Luiz Antônio Pinto, meu gerente, que fez com que eu conseguisse conciliar o estudo com o trabalho, além de me incentivar e acreditar.

Ao amigo Otávio Augusto de Barros que incentivou e ajudou nos momentos difíceis.

Ao amigo Silas Alexandre Vitone, que mesmo estando na Austrália jamais deixou de acreditar que eu conseguiria.

Aos meus amigos, que são muitos e não conseguiria citar todos, que me ajudaram, apoiaram e incentivaram, agradeço a todos.

A Kassima e o Gabriel, esposa e filho do Campanha, que me acolheram muito bem, nas idas a Campos do Jordão.

A BOVESPA pela forma gentil com que nos atendeu por e-mail fornecendo os dados para a realização deste projeto.

Por fim, a outras pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram com este trabalho e aqui não são mencionadas, ficam meus agradecimentos.

**“Quando se sonha sozinho
é apenas um sonho.
Quando se sonha junto
é o começo da realidade.”**

Miguel de Cervantes

Sumário

Índice	vii
Resumo	ix
Abstract	x
Lista de Figuras	xi
Capítulo 1: Introdução	13
Capítulo 2: Mercado Financeiro e Mercado de Ações	20
Capítulo 3: Distribuições de Probabilidade utilizadas em Sistemas Complexos	32
Capítulo 4: Termodinâmica não-extensiva	44
Capítulo 5: Modelo Proposto e Resultados	52
Capítulo 6: Conclusões	65
Bibliografia	66
Apêndice A: Programa	Anexo

Índice

Capítulo 1	13
Introdução	13
1.1. Método Científico	13
1.2. Mercado Acionário	15
1.3. Definições de Retorno de Preços	16
1.4. Objetivos do Trabalho	17
Capítulo 2	20
Mercado Financeiro e Mercado de Ações	20
2.1. Sistemas Complexos	20
2.2. Complexidade do sistema financeiro	21
2.3. Desenvolvimento do mercado financeiro	22
2.4. Índice da Bolsa de Valores de São Paulo (Ibovespa)	24
2.4.1. A fusão entre BM&F E IBOVESPA	27
2.5. Mercado Acionário e seus modelos	27
2.6. Hipótese do Mercado Eficiente (HME)	29
Capítulo 3	32
Distribuições de Probabilidade utilizadas em Sistemas Complexos	32
3.1. Distribuição do tipo Normal ou Gaussiana	32
3.2. Distribuição do tipo Lei de Potência	35
3.3. Distribuição do tipo Lévy	37
3.4. Distribuição do tipo Mandelbrot	38
3.5. Distribuição do tipo Tsallis	39

3.6. Outras distribuições	40
3.6.1. Distribuição do tipo Log – Normal	40
3.6.2. Distribuição do tipo Lei de Potência Gradualmente Truncada	42
Capítulo 4	44
Termodinâmica não-extensiva	44
4.1. Entropia de Boltzman-Gibbs	44
4.2. Aditividade e Extensividade	45
4.3. Distribuição de probabilidade associada à entropia de Boltzman-Gibbs	46
4.4. Entropia de Tsallis	47
4.5. Distribuição de probabilidade associada à entropia de Tsallis	48
4.6. Relação entre as distribuições do tipo Tsallis e Mandelbrot	50
Capítulo 5	52
Modelo Proposto e Resultados	52
5.1. Modelo proposto	52
5.2. Aplicação do modelo as ações do Banco do Brasil	55
5.3. Aplicação do modelo as ações da Vale	57
5.4. Aplicação do modelo as ações da Votorantin Celulose e Papel	59
5.5. Outras aplicações	62
Capítulo 6	65
Conclusões	65

Resumo

O objetivo do nosso trabalho é a aplicação de um modelo estendido da distribuição do tipo Tsallis e sua aplicação em ações da Bolsa de Valores de São Paulo. Em nosso caso procuramos ações de diferentes setores da nossa economia. Escolhemos então uma ação do setor bancário (Banco do Brasil), do setor de mineração (Vale) e por último uma ação do setor de papel e celulose (Votorantim Celulose e Papel).

Na distribuição do tipo Tsallis o índice entrópico q possui um valor constante, em nosso modelo, propomos que ele seja um função exponencialmente decrescente da variável que descreve o tamanho do sistema sendo considerado. Em nosso caso (ações), a variável em consideração é o retorno clássico.

Observamos que na maioria dos casos tratados, não houve necessidade do modelo estendido, mas em um caso foi necessário o uso deste para encontrarmos o melhor ajuste para a distribuição de probabilidade.

Abstract

The objective of our work is the application of an extended version of Tsallis-type distribution and its application in the shares of stock exchange of São Paulo. In our case seek shares of different sectors of our economy. Then choose an action of the banking sector (Banco do Brasil), of the mining sector (Vale) and finally an action in the sector of paper and cellulose (Votorantim Celulose e Papel).

Tsallis type distribution of the entropy index q has a constant value in our model, we propose that it is an exponentially decreasing function of the variable that describes the size of the system being considered. In our case (stock), the variable account is the classic back.

We observed that in most cases, there was no need for the extended model, but in one case it was necessary to use this to find the best fit for the distribution of probability.

Lista de Figuras

Figura 1: Distribuição do tipo Normal ou Gaussiana

Figura 2: Média e Desvio Padrão na Distribuição Normal (curva A: média = 0 e desvio padrão = 1; curva B: média = 2 e desvio padrão = 1; curva C: média = 5 e desvio padrão = 3)

Figura 3: Distribuição do tipo lei de potência com $\alpha = 2.5$ e $c = 10^5$

Figura 4: Exemplos de gráficos de distribuições do tipo lei de potência

Figura 5: Distribuição do tipo log-normal com $\langle \ln x \rangle = 0$ e $\sigma = 1$

Figura 6: Ilustra a utilização de parâmetros (modelo proposto) no ajuste de uma curva.

Figura 7: Logaritmo do número de vezes (frequência) que a ação teve uma determinada variação pela variação percentual multiplicado por 10^3 (bbas3)

Figura 8: Logaritmo do número de vezes (frequência) que a ação teve uma determinada variação pela variação percentual multiplicado por 10^3 (vale5)

Figura 9: Logaritmo do número de vezes (frequência) que a ação teve uma determinada variação pela variação percentual multiplicado por 10^3 (vcpa4)

Figura 10: Densidade de frequência vs. vazão de água

Figura 11: Densidade de frequência vs. precipitação pluviométrica

Figura 12: Densidade de frequência vs. manchas solares por mês

Capítulo 1

Introdução

1.1. O Método Científico

A física procura entender as leis da natureza muitas vezes exprimindo essas leis de forma matemática. Muitos foram os sistemas analisados com grande sucesso. Como exemplos podemos citar o eletromagnetismo, a mecânica quântica, a relatividade etc. Mas existem sistemas, denominados sistemas complexos tais como: a internet, o cérebro, a bolsa de valores e outros, cuja formulação matemática está ainda em sua fase inicial. A habilidade em lidar com modelos matemáticos, fez com que o físico tivesse maior facilidade em lidar com os assim denominados sistemas complexos. Surge então a grande pergunta: a física pode estudar ou criar modelos que descrevam as oscilações de uma bolsa de valores? A palavra descrever poderia assemelhar-se com previsão, e esta desempenha um papel crucial. Ingenuamente poderia-se pensar que o significado da palavra previsão é bastante evidente e nenhuma explicação é necessária. Na realidade, o seu significado mudou já no passado e ainda está mudando (Parisi, 2002).

Sabemos também que trabalhar com ativos financeiros envolve quantidades que variam de maneira complexa. Os sistemas que o físico modela variam, podendo ir desde sistemas simples como moléculas em um gás, ou a dinâmica das estrelas de uma galáxia, como também a interação de agentes financeiros no pregão da bolsa de valores vendendo e comprando ações.

As qualidades peculiares inerente aos físicos vêm atraindo o interesse de empresas da área financeira. Essa tendência iniciou-se através de Isaac Newton, quando já consagrado pela proposição das leis do movimento e da gravitação universal, ele foi nomeado superintendente da Casa da Moeda Inglesa, participando do processo de reforma monetária daquele ano. Mas Newton não obteve sucesso no mercado acionário, pois perdeu sua fortuna em decorrência da primeira grande queda (crash) do mercado inglês, em 1720, que ficou conhecido como o estouro da *South Sea Buble*. Em decorrência desse fato, Newton observou: “consigo calcular o movimento dos corpos celestiais, mas não a loucura das pessoas” (Ronan, 1987; Westfall, 1995)

Transcorridos 280 anos após a morte de Newton, com grandes avanços, a física moderna, tenta uma maneira capaz de quantificar o grau de insanidade e ganância das pessoas. O sucesso dessa empreitada ainda não é certo, mas grandes instituições financeiras perceberam que prestar atenção no que os físicos têm a dizer pode ser um negócio recompensador, não objetivando apenas o lucro e sim como forma de prevenção, para que aconteça a diminuição da possibilidade dos investidores acabarem como o físico inglês, que teve suas economias pulverizadas devido aos caprichos impiedosos do mercado.

Surge nos anos 90 uma nova disciplina, apelidada de “econofísica”, por analogia com a biofísica e a geofísica. O que influenciou esse surgimento foi que os físicos perceberam que certos sistemas complexos obedeciam a leis de potências, algo já descoberto por Pareto (Pareto, 1896).

Essa nova área propõe leis probabilísticas para entender os movimentos do mercado financeiro, considerando fatores gerais que influenciam o comportamento dos indivíduos que nele atuam. Aplicam-se essas idéias ao estudar mecanismos que levam a formação de bolhas especulativas e quedas violentas dos mercados. Esses fenômenos podem ser tratados em analogia com os chamados fenômenos críticos da física, nos quais os elementos de um sistema subitamente começam a apresentar correlações entre seu comportamento. Um exemplo desse fenômeno é o que acontece com as moléculas de água quando a temperatura crítica de transição do estado líquido para gasoso é ultrapassada.

Igualmente ao fenômeno físico, acontece com os agentes financeiros que se estimulados por condições econômicas externas, passam a se comportar de maneira cooperativa, onde em um ambiente de extremo otimismo, o aumento nos

ganhos de determinada ação pode influenciar vários investidores a acumular cada vez mais frações desses papéis, mesmo não havendo fundamentos econômicos que justifique tanta alta, o que gera a formação de uma bolha especulativa.

Pode ocorrer o inverso, quando algum fato novo traz grande pessimismo ao mercado, acarreta a venda rápida de papéis pelos investidores, devido à queda brusca no valor de suas ações, estabelecendo assim, um “*crash*”.

A contribuição que a econofísica visa realizar aos administradores financeiros é quantificar embora de forma probabilística, o risco de suas aplicações.

Esse tipo de análise com certeza terá grande relevância para que seja possível entender melhor o comportamento econômico, que envolve diversos fatores, como os emocionais, políticos, climáticos etc.

1.2. Mercado Acionário

O bom andamento do sistema monetário de uma nação está relacionado ao bem estar de sua população. Se o papel moeda for o único ativo financeiro esta nação apresenta um sistema financeiro um tanto quanto primitivo. As instituições financeiras fazem com que a moeda e outros ativos financeiros tenham fluência. Estas são especializadas em investimentos, poupança, estabelecem o contato entre os emprestadores e tomadores de recursos, provendo diferentes ativos financeiros para tal.

O mercado acionário é um segmento destinado a negociação de ações, que são emitidas por companhias. Este surge após o mercado de crédito se mostrar insuficiente para garantir fluxos de recursos em condições adequadas para a atividade produtiva. As companhias, tanto nacionais como estrangeiras, captam recursos através das bolsas de valores, vendendo participações ao público, com a emissão de ações. É a forma mais barata para uma empresa captar recursos.

Os participantes do mercado de ações são divididos em dois grupos:

- investidores institucionais;
- investidores individuais.

Os investidores institucionais são aqueles que reúnem recursos de grupos de pessoas ou instituições, além de terem suas atividades amplamente reguladas por

leis e sob controle governamental. Já os investidores individuais são aqueles que atuam diretamente no mercado, e toma para si todos os riscos do investimento.

O valor de uma ação na bolsa depende exclusivamente da oferta e demanda (condições de mercado), e são originados pela situação econômica do país, da empresa, e de outros fatores (Lourenço, 1999).

A ação é um título nominativo negociável e representa uma fração do capital social de uma empresa. As ações podem ser:

- Ordinárias (ON), que concedem o poder de voto nas assembleias deliberativas da companhia, para quem as possuem;
- Preferências (PN), que oferecem às pessoas que as possuem prioridades na distribuição de dividendos, fixo ou mínimo, e no reembolso do capital.

1.3. Definições de Retorno de Preços

A escala de preço a ser utilizada é um dos principais problemas para a realização de análises empíricas e teóricas dos dados financeiros. Como tratamos de preços e índices relacionados à moeda, verificamos que estes possuem flutuações no tempo que são inerentes ao processo econômico. O crescimento da economia ou até mesmo o seu recesso, são alguns fatores que podem alterar a unidade monetária analisada, devida a globalização ou inflação, por exemplo.

É possível escolher entre muitas definições de variáveis estocásticas para analisar o mercado. Considerando $V(t)$ o valor de um índice ou o preço de um ativo e $M(t)$ a variável que descreve a mudança de preços, flutuação de preços ou retorno, as escolhas mais utilizadas são:

- a variação direta dos preços dos índices ou dos ativos, $M_1(t)$. Porém, mudanças que normalmente acontecem no longo prazo, como inflação e ajuste de mercado, afetam o retorno consideravelmente:

$$M_1(t) = V(t + \Delta t) - V(t); \quad (1.1)$$

- a variação deflacionada dos preços dos índices, $M_2(t)$, ou seja, usa-se um fator $D(t)$ para descontar a inflação do período. Com essa aproximação, os

preços passam a refletir apenas a variação de seu valor intrínseco. Existem muitos órgãos que utilizam diferentes metodologias para o cálculo da inflação, fornecendo valores diferentes para $D(t)$, uma das desvantagens dessa definição:

$$M_2(t) = [V(t + \Delta t) - V(t)]D(t); \quad (1.2)$$

- o chamado retorno clássico $M_3(t)$. Tem a vantagem de fornecer o prejuízo percentual ou lucro, informação mais adequada para os investidores, pois fornece o retorno do investimento relativo ao capital empregado:

$$M_3(t) = \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{V(t)} = \frac{M_1(t)}{V(t)}; \quad (1.3)$$

- o retorno logarítmico dos preços $M_4(t)$. Fornece a medida em escala logarítmica da variação percentual dos preços:

$$M_4(t) = \ln V(t + \Delta t) - \ln V(t) = \ln \frac{V(t + \Delta t)}{V(t)}. \quad (1.4)$$

Para dados de alta frequência, as definições $M_3(t)$ e $M_4(t)$ fornecem resultados equivalentes. De (1.1) e (1.2), as definições $M_1(t)$ e $M_2(t)$ também fornecem resultados muito próximos para curtos períodos de tempo ou em períodos longos, se a inflação não for muito grande, pois temos $D(t) \cong 1$.

1.4. Objetivos do Trabalho

Um importante problema na gestão de recursos é o conhecimento da estatística da distribuição de uma variável. Por exemplo, o valor de uma ação ou de um derivativo tem grande importância na economia, logo nos preços dos seus agregados como nos fundos de ações e nos fundos de pensões, refletindo na

qualidade de vida da população. Então conhecermos a estatística da ação tem implicações financeiras e sociais.

Por outro lado, o valor das ações varia de uma forma bastante complexa, dependendo de inúmeros fatores, tais como a especulação, as expectativas políticas, a economia etc.

Uma importante propriedade desse sistema é o escalonamento da lei de potência, que é observado em muitos sistemas desse tipo. Em geral, a lei de potência existe na parte central da distribuição.

Em todo sistema real estão presentes interações de longo alcance e efeitos de memória, que são importantes para uma distribuição estatística, incluindo o sistema social e econômico. A termodinâmica deu uma base microscópica para a lei de potência considerando interações de longo alcance e efeitos de memória (Tsallis, 1988).

Mantega e Stanley (Mantega e Stanley, 1994) introduziram a distribuição do tipo Lévy truncada (Lévy, 1937). Nesse modelo a distribuição de probabilidade é cortada bruscamente para zero num certo valor crítico. Já Gupta e Campanha (Gupta e Campanha, 1999) propuseram a distribuição do tipo Lévy gradualmente truncada, onde o corte da distribuição de probabilidade é gradual, depois de um valor crítico.

Geralmente, para descrevermos as distribuições dos sistemas reais utilizamos a distribuição normal. Quando, porém estamos interessados em distribuições de valores extremos, algumas outras distribuições tais como Wakely, Gumbel, exponencial, Log-Normal, são utilizadas, válidas apenas em determinados intervalos.

No presente trabalho, propomos haver um amortecimento em interações de longo alcance com o aumento da variação do valor das ações. Este procedimento evita o fato da variância infinita. Finalmente, apresentamos uma distribuição estatística generalizada baseada sobre este conceito. Essa distribuição pode ser usada para calcular uma função de distribuição de probabilidade e a probabilidade acumulada, em qualquer intervalo da variação do preço das ações (Gupta e Campanha, 2008).

No capítulo 2 veremos como funciona o mercado financeiro e o mercado de ações. O capítulo 3 está destinado a uma breve descrição relativa às principais distribuições de probabilidade de grande importância para o tema proposto. O

capítulo 4 fará um breve resumo da termodinâmica não extensiva. No capítulo 5 apresentaremos o modelo proposto e os resultados para algumas firmas brasileiras como Banco do Brasil, Vale e Votorantim Celulose e Papel com os preços das ações variando com intervalo de um minuto (alta frequência) e aplicaremos o modelo proposto apresentado neste capítulo. O capítulo 6 descreverá as conclusões do trabalho.

Capítulo 2

Mercado Financeiro e Mercado de Ações

2.1. Sistemas Complexos

Um sistema dinâmico pode se caracterizar por ser regular ou caótico, porém, esses são extremos de um espectro. Entre a ordem monótona de um pêndulo simples e o caos frenético das partículas de um gás há uma fronteira que abriga outra classe de sistemas, os chamados sistemas complexos (Parisi, 2002).

Um sistema é dito ser um sistema complexo quando suas propriedades não são uma consequência natural de seus elementos constituintes vistos isoladamente. As propriedades emergentes de um sistema complexo decorrem em grande parte da relação não-linear entre as partes. O comportamento deste é coletivo, emerge da contribuição de todos os seus componentes ao mesmo tempo, pois suas partes estão correlacionadas entre si, e a influência de cada componente se propaga aos demais mesmo a longa distância. Não se pode dar maior importância às menores escalas de distância em detrimento das maiores. Todas as escalas são igualmente determinantes em seu comportamento global. Essa característica dificulta descrever esses fenômenos. Por isso, a simulação em computador é praticamente a única ferramenta disponível para seu estudo. Do mesmo modo, não devemos confundir o complicado com o complexo.

A simulação computacional trata os sistemas complexos como modelos de muitos “agentes” (denominação genérica para os indivíduos de uma população, firmas em uma economia de mercado etc) que evoluem sob influência mútua,

segundo as regras de cada modelo. Essas regras são, em geral, muito simplificadas em comparação à realidade que inspira o próprio modelo. Por exemplo, o gracioso, porém complexo, “balé” de um cardume de peixes poderia ser modelado a partir de instruções simples, do tipo “cada peixe se orienta por aquele que está perto dele”.

Os padrões que aparecem nos Sistemas Complexos são muitas vezes auto-similares numa ampla faixa de escalas, implicando no que denominamos de invariância de escala (não possuem uma escala característica) e no surgimento de uma lei de potência para o comportamento das propriedades desses sistemas. O aparecimento desse tipo de lei é ainda objeto de estudo.

2.2. Complexidade do sistema financeiro

O fato do estudo da economia ser realizado de maneira qualitativa ou semi-quantitativa, e devido aos inúmeros fatores que a influenciam fazem com que ela seja um exemplo do que denominamos sistemas complexos. Pode-se dizer que um sistema é tão mais complexo quanto maior for a quantidade de informação necessária para descrevê-lo. O estudo da economia então envolve fatores que interligados entre si, como a psicologia, o desenvolvimento tecnológico, o clima etc, que não são possíveis de serem descritos por um conjunto simples de equações.

Em meados do século XX, alguns temas da área econômica e financeira despertaram interesse de grandes estudiosos da Física Estatística, como o desenvolvimento, a dinâmica e o crescimento de empresas (Thaler, 1993) e o comportamento estatístico da evolução dos preços das ações da bolsa de valores.

Mandelbrot (Mandelbrot, 1963) demonstra que os logaritmos da variação dos preços de determinados derivativos (algodão) obedecem a uma lei de distribuição do tipo lei de potência. Gupta e Campanha (Gupta e Campanha, 2002) concluíram que os preços de mercado possuem propriedades fractais e que sua distribuição obedece a uma lei de potência gradualmente truncada.

2.3. Desenvolvimento do mercado financeiro

O sistema monetário contribui para o desenvolvimento de um país. Basta observarmos que, em um país economicamente desenvolvido há inúmeros ativos financeiros (Arthur, 1999), e onde a sociedade não gira em torno apenas do papel moeda.

Para que ocorra o intercambio entre emprestadores e tomadores de recursos (independentemente do ativo financeiro), existem as instituições financeiras, que propiciam a fluidez dos diversos ativos negociados.

A nação que apresentar um bom desenvolvimento do mercado acionário só terá benefícios, pois ocorrerá a geração de empregos e grande expansão do setor privado, pois esse repassará seus recursos aos setores menos favorecidos. Uma das principais formas de repasse são as ações.

Representando uma parcela do capital social de uma empresa, as ações são títulos nominativos negociáveis. O detentor desses títulos possui por sua vez uma parte do capital de uma empresa, tornando-se sócio dela. Dentro do conjunto de ações ocorre uma divisão, onde aquele detentor que possui o direito de voto nas assembleias cuja finalidade é decidir sobre algum fator da companhia, será possuidor de ações ordinárias. Já aquele que possui preferência no tocante à distribuição dos resultados, ou no caso de possível liquidação da companhia será possuidor de ações preferenciais e não terá o direito a voto.

O valor das ações varia de acordo com sua “classificação”, pelo fato das empresas no final de cada exercício dividir seus lucros entre os acionistas, essa divisão é denominada dividendos, que é estabelecido no estatuto social da empresa e será de no mínimo 25% do total do lucro líquido ajustado. Caso o dividendo não seja estabelecido no estatuto da companhia, aquele que possui ações preferenciais, como o próprio nome diz, terá direito a 10% a mais nos dividendos do que aquele que possui ações ordinárias.

Investidores são pessoas ou instituições que aplicam recursos com objetivo de alcançar ganhos, na maioria das vezes a médio e longo prazo. Para que ocorra o investimento em ações, se faz necessário procurar uma corretora de valores, que são intermediários financeiros, constituídos por profissionais que analisam o mercado, informando sua real situação, obtendo-se os melhores resultados.

Através dos investimentos no mercado e da compra e venda das ações, é estabelecido o fluxo de oferta e procura, e conseqüentemente, o preço adequado da ação. O que vem a interferir é a maior ou menor oferta ou procura de determinada ação, influenciando o processo de desvalorização da ação em questão. Outro fator que se relaciona com o preço das ações, são as especulações futuras da empresa emissora de tal ação. Essas especulações são criadas através de notícias sobre o mercado no qual a empresa atua e até mesmo com a divulgação do balanço da empresa, entre outros aspectos.

É através da variação do preço da ação durante um determinado período de tempo que determinamos se este valor está em alta ou em baixa. Basta relacionar o último preço negociado da ação e o seu preço de fechamento no dia anterior. Está em alta a ação cujo último preço negociado for superior ao preço de fechamento do dia anterior, caso contrária estará em baixa.

A bolsa de valores é o local onde são realizadas as negociações de compra e venda de títulos e valores mobiliários de forma transparente. Tem como fundamento a preservação de padrões éticos de negociação, organizando-se através de associações civis, sem fins lucrativos e cuja criação visa o interesse público, atuando conjuntamente com a Comissão de Valores Mobiliários – CVM, fiscalizando o mercado, através de seus membros e sociedades corretoras.

O mundo das finanças, devido á globalização, fez com que o mercado financeiro atuasse 24 horas por dia em todo o mundo, o que acarretou seu enorme crescimento, ocorrendo grandes movimentações de dinheiro, ativos e mercadorias.

Na década de 80, iniciam-se as negociações de ativos financeiros de maneira eletrônica, onde os dados poderiam ser visualizados rapidamente, pois as pessoas que queriam comprar ou vender determinado ativo financeiro, a partir daquele momento, têm acesso ao seu preço, pelo fato de ser armazenado eletronicamente.

Uma das características marcantes do mercado financeiro é a sua complexidade. As regras que o norteiam são estáveis, pelo fato de ocorrer constante monitoramento da evolução do preço do ativo em determinado tempo, e do volume e número de transações dos ativos financeiros. É através desses dados monitorados que se torna possível o desenvolvimento de modelos para que seja testada sua validade.

2.4. Índice da Bolsa de Valores de São Paulo (Ibovespa)

Para que seja possível a definição do Ibovespa, é necessário destacar alguns aspectos. Para que ocorra a composição do índice, são escolhidas ações, que farão parte de um grupo, na qual será realizado o investimento teórico representado pelo índice. Esse conjunto de elementos é denominado carteira teórica.

Com finalidade de indicar o comportamento do mercado acionário de forma global, é utilizado o índice de valores, que irá indicar o desempenho de uma carteira teórica de ações. Assim, indicará se em um determinado período de tempo as ações do mercado sofreram valorização ou desvalorização, estes cálculos são realizados pelas Bolsas de Valores ou por instituições financeiras.

Esse índice é importante pelo fato dos administradores de recursos, corretoras de valores, instituições financeiras, investidores e indivíduos em geral, o utilizam para obterem informações acerca do mercado acionário. O índice é medido através de “pontos”. Esse por sua vez representa um valor absoluto, servindo de instrumento de comparação, demonstrando a variação do valor de uma carteira de ativos durante um período de tempo. A variação dos pontos do índice representa a rentabilidade. Para que se chegue ao resultado é necessário dividir o valor do índice em uma determinada data pelo valor do índice na data de referência passada, subtrai-se 1 do resultado obtido nessa operação e multiplica-se o resultado por 100 para se obter a rentabilidade em termo percentuais da carteira.

Para que sejam realizadas as negociações em torno do mercado acionário, é necessário um recinto, ocupado pelos operadores, que recebem ordem dos investidores, por intermédio de uma corretora credenciada, se deve ou não realizar os negócios em questão. Esse espaço é denominado pregão, que pode ser um recinto físico (viva – voz) ou eletrônico, via terminais.

As corretoras de valores que intercedem nas negociações, visando à preservação de seus clientes, estando habilitadas a negociar valores mobiliários no pregão físico ou eletrônico, são instituições financeiras, de compra e venda devidamente credenciada pelo Banco Central e pela Comissão de Valores Mobiliários.

Após a exposição desses aspectos, chega-se no fato em questão, o Ibovespa. Sua grande importância se dá pelo fato de ser o melhor indicador de desempenho médio das cotações das ações brasileiras no mercado. Ele retrata o

comportamento dos mais relevantes papéis negociados na Bolsa de valores de São Paulo (Bovespa), e além do mais, possui credibilidade, pois desde sua implementação em 2 de janeiro de 1969 não sofreu nenhuma alteração metodológica.

A participação de cada ação na carteira teórica reflete diretamente na representatividade de títulos no mercado à vista, em termo de número de negócios e volume financeiro, que é ajustada ao tamanho da amostra.

$$IN = \sqrt{\frac{n_i v_i}{NV}} \quad (2.1)$$

Onde:

IN : índice de negociação;

n_i : número de negócios com ação “ i ” no mercado à vista;

N : número total de negócios no mercado à vista da Bovespa;

v_i : volume financeiro gerado pelos negócios com a ação “ i ” no mercado à vista;

V : volume financeiro total do mercado à vista Bovespa

As ações que fazem parte dessa carteira possuem grande representatividade, pois correspondem a mais de 80% do número de negócios e do volume financeiro negociados no mercado à vista. Assim se metade dessas ações estiver subindo, o mercado, medido pelo índice Bovespa, está em alta, e se estiver caindo, está em baixa, ou seja, a bolsa fechou em “alta” quando o índice de fechamento de determinado pregão é superior ao índice de fechamento do pregão anterior. Analogamente para quando a bolsa fecha em “baixa” ou “estável”.

A Bovespa não fixa limite de alta para os índices que calcula e nem há limite de baixa para um índice, ou seja, os preços das ações podem subir ilimitadamente, porém mais importante do que o nível de alta do índice é a tendência de alta dos preços sinalizada pelo mercado. No entanto, a Bolsa adota para o índice Bovespa um mecanismo chamado de “interruptor de circuitos” (“*circuit breaker*”), que consiste na interrupção das negociações quando o Ibovespa atinge um determinado percentual de queda. O mecanismo de “*circuit breaker*” tem como objetivo amenizar

quedas. Este parâmetro foi determinado de acordo com a volatilidade histórica do índice.

O “circuit breaker” é ativado tomando por base o valor de fechamento do Ibovespa do dia anterior, da seguinte maneira:

- interrupção de meia hora para uma queda de 10% no índice;
- interrupção adicional de uma hora se o índice cair mais 5% após a reabertura dos negócios (completando uma queda de 15%).

É importante deixar claro que a Bovespa assegura um período de 30 minutos de negociação no final da sessão regular, de modo a possibilitar que os compradores e vendedores ajustem suas posições.

A apuração do índice Bovespa é o somatório dos pesos (quantidade teórica da ação multiplicada pelo último preço da mesma) das ações integrantes de sua carteira teórica. Assim sendo, pode ser apurado por meio da seguinte fórmula:

$$Ibovespa_t = \sum_{i=1}^n P_{i,t} Q_{i,t} \quad (2.2)$$

Onde:

$Ibovespa_t$ = índice Bovespa no instante t;

n = número total de ações componentes da carteira teórica;

$P_{i,t}$ = último preço da ação “i” no instante t;

$Q_{i,t}$ = quantidade teórica da ação “i” na carteira no instante t.

Para que uma empresa possa fazer parte da Bovespa, esta empresa tem que ser uma companhia aberta, ou seja, que promove a colocação de valores mobiliários em bolsas de valores ou no mercado de balcão. São considerados valores mobiliários: ações, debêntures, bônus de subscrição e notas promissórias para a distribuição pública.

A Bovespa dispõe de um sistema de negociação que permite que se enviem ordens de compra e venda de ações através da internet que se chama *Home Broker*, onde, para se obter esse sistema é necessário ser cliente de uma corretora da Bovespa, ou uma corretora associada.

A Petrobrás, a Vale, a Telemar, a Eletrobrás, a Brasil Telecom Participações, a Embratel, o Globo Cabo e o Bradesco, são as empresas mais negociadas e de maior peso no índice.

Além do Ibovespa, o mercado paulista de ações conta com outros índices, de menor visibilidade na mídia, mas importantes no trabalho dos analistas que é o IBrX – Índice Brasil, que é um índice de preços que mede o retorno de uma carteira composta por 100 ações selecionadas entre as mais negociadas na Bovespa, em termos de números de negócios e volume financeiro. Mais recentemente foi criado o índice IBrX – 50, cuja carteira é composta por 50 ações.

2.4.1. A fusão entre BM&F E IBOVESPA

A BM&FBOVESPA S.A. - Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros foi criada em 2008 com a integração entre Bolsa de Mercadorias & Futuros (BM&F) e Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA). Juntas, as companhias formam a terceira maior bolsa do mundo em valor de mercado, a segunda das Américas e a líder no continente latino-americano. A nova bolsa oferece para negociação ações, títulos, contratos referenciados em ativos financeiros, índices, taxas, mercadorias e moedas nas modalidades à vista e de liquidação futura.

Líder no mercado de valores e derivativos da América Latina, a missão que a BM&FBOVESPA tem é a de atuar na dinâmica macroeconômica de crescimento do mercado latino-americano e posicionar não apenas a Bolsa, mas também o Brasil como centro financeiro internacional de negociação de ações, *commodities* e outros instrumentos financeiros, com excelência operacional e atitudes socialmente responsáveis.

2.5. Mercado Acionário e seus modelos

O Mercado Acionário é um segmento destinado a negociação de ações, que são emitidas por companhias. Este surge após o mercado de crédito se mostrar insuficiente para garantir fluxos de recursos em condições adequadas para a atividade produtiva. As companhias tanto nacionais como estrangeiras, captam

recursos através das bolsas de valores, vendendo participações ao público, com a emissão de ações. É a forma mais barata para uma empresa captar recursos.

O valor de uma ação na bolsa depende exclusivamente da oferta e demanda (condições de mercado), e é originado pela situação econômica do país, uma empresa específica, ou de seu setor econômico.

A tentativa pioneira de se modelar o mercado acionário foi feita por Bachelier em 1900 (Bachelier, 1900), onde o preço de opções (derivativos de outro ativo fundamental no qual paga-se, no dia do vencimento, o máximo entre o valor de mercado deste ativo fundamental e o valor acordado em contrato) em mercados especulativos, era descrito como um processo aleatório.

A partir dos anos 50 deram-se novas tentativas de modelagem do mercado acionário, quando resultados empíricos sobre a correlação temporal das variações nos preços dos ativos financeiros mostraram que essas correlações eram desprezíveis e que o comportamento da série temporal de preços dos ativos poderia ser marchas aleatórias não correlacionadas (movimento Browniano aritmético). Bachelier que havia proposto que as mudanças de preços estariam distribuídas gaussianamente foi trocado pelo modelo no qual o preço dos ativos obedecem a uma distribuição do tipo Log – Normal, isto é, os preços demonstram um movimento Browniano geométrico. Em um movimento Browniano geométrico, as diferenças dos logaritmos dos preços estão gaussianamente distribuídos. Este modelo ficou conhecido por fornecer somente uma primeira aproximação do que é observado nos dados atuais. Por essa razão, um número grande de modelos alternativos têm sido propostos.

Vários estudos têm sido realizados em sistemas financeiros e econômicos. Uma primeira área de estudos objetiva a caracterização estatística completa do processo estocástico das variações do preço de um ativo financeiro, sendo esta uma área bastante ativa. Tentativas estão sendo feitas para desenvolver o modelo estocástico mais satisfatório que descreva os fenômenos encontrados nos dados econômicos.

Dentro dessa proposta, Mandelbrot, nos anos 60, propôs que as variações de preços obedecem a uma distribuição do tipo Lévy, com parâmetro α variando entre 0 e 2, e cujo comportamento tem um decaimento do tipo lei de potência para grandes valores do argumento (Lévy, 1937). A distribuição do tipo Lévy possui momentos divergentes quando $\alpha < 2$. Estes processos, apesar de bem definidos

matematicamente, são extremamente difíceis de serem aplicados a sistemas reais, pois, em geral os momentos das distribuições estão relacionados às propriedades do sistema.

Outra preocupação é com o desenvolvimento de modelos dinâmicos que procuram descrever as características essenciais dos mercados financeiros reais. O modelo de Black e Scholes apresentada uma fórmula racional do cálculo do preço de um contrato de opção (Black and Scholes, 1973). Desde então, vários outros modelos têm sido propostos (por exemplo, modelos econométricos de séries temporais como os ARCH e GARCH). Tentativas paralelas para se modelar o mercado financeiro têm sido desenvolvidas por economistas e, em particular, na econometria. (Moyano, 2006)

Distribuições que obedecem as leis de potência não possuem uma escala típica, ou seja, são invariantes por mudança de escala. A quebra de invariância de escala associada ao encurtamento da cauda da distribuição de um ativo financeiro está relacionada a fatores externos tais como suspensão de cotações, bandas de flutuação de câmbio e outras.

2.6. Hipótese do Mercado Eficiente (HME)

O número de investidores ativos ou indiretos, que se envolvem com o mercado financeiro através de fundos tem aumentado no Brasil nos últimos anos e, assim, o interesse por trabalhos que elucidem o seu funcionamento tem crescido. O jargão financeiro, contudo, pode desencorajar essa busca por conhecimento e oportunidades.

Quando os economistas se referem ao mercado de capitais como sendo eficiente querem dizer que, os preços de ativos e retornos são determinados pela lei da oferta e da procura num mercado competitivo. A idéia de mercados eficientes é uma hipótese na qual se baseiam diversos modelos financeiros e, apesar de difícil de ser sustentada teoricamente e empiricamente, é essencial para o entendimento do mercado financeiro.

Então, indivíduos diferentes não possuem vantagens comparativas na aquisição de informação. Segue-se que em tal mundo, não deverá existir nenhuma oportunidade de obter um retorno numa ação que esteja em excesso ao preço justo

para o risco da compra daquela ação. Em suma, lucros anormais, resultados da compra e venda de ativos, não devem existir nesta teoria.

Um mercado é considerado eficiente quando os preços dos ativos reproduzem plenamente a informação disponível e refletem novas informações de forma precisa e imediata. Mercados eficientes são freqüentemente confundidos com mercados perfeitos, mas, ao contrário da eficiência, a perfeição implica ausência de fricções como custos de transação ou impostos.

A eficiência é fruto da racionalidade dos agentes e da competição. Os agentes, baseados num entendimento correto do processo de criação de valor, formulam suas expectativas de preços fazendo o melhor uso da informação disponível e, assim, refletem de forma precisa nos preços. A competição garante que novas informações sejam reproduzidas imediatamente nos preços, uma vez que os participantes do mercado estão a procura de oportunidades de lucro e prontos a analisar todas essas informações.

As avaliações irracionais, por serem descorrelacionadas, se anulam e caso investidores apresentem o mesmo comportamento irracional suas influências nos preços são eliminadas pelos especuladores racionais.

Isto descreve a Hipótese do Mercado Eficiente (HME), formulado nos anos 60: o preço do mercado de uma ação no tempo t , p_t , já incorpora todas as informações relevantes e a única razão para a eventual mudança no preço entre o tempo t e $t + \Delta t$ é a chegada de novas informações ou acontecimentos não antecipados.

Outra forma de descrever o HME é dizer que, em um mercado eficiente, é impossível para investidores realizarem lucro anormal comprando e vendendo ações. Dizemos que estamos sob a tutela de um “jogo limpo”. A teoria elementar do jogo limpo vem do matemático Girolamo Cardano desde 1565: o mais fundamental princípio de todos em jogos limpos é simplesmente a de condições iguais para cada jogador. Caso as condições não forem iguais, um dos jogadores é injusto e o outro um tolo.

Contudo, como os investidores desviam da racionalidade e a competição nem sempre é plena, diversos níveis de eficiência são observados nos mercados. Assim, é possível que, por exemplo, análises técnicas (dados de mercado) e análises

fundamentalistas (que utilizam dados econômicos e contábeis) tenham alguma capacidade de prever preços futuros.

O Mercado Eficiente é um sistema ideal. Mercados reais são aproximadamente eficientes. Quando uma dada informação afeta o mercado numa direção específica, o mercado não é completamente eficiente, o que é detectado na série temporal de dados. No entanto, estas flutuações duram até que o mercado misture todas as fontes de informação durante a formulação de preços, recuperando sua eficiência.

Capítulo 3

Distribuições de Probabilidade utilizadas em Sistemas Complexos

Procuraremos demonstrar, nesse capítulo, algumas distribuições probabilísticas (Feller, 1971), que são de grande interesse para a Física, e são usadas no estudo dos sistemas complexos.

3.1. Distribuição do tipo Normal ou Gaussiana

A distribuição do tipo Normal é uma das mais importantes distribuições da estatística. Foi desenvolvida pelo matemático francês Abraham de Moivre (Moivre, 1733) como sendo uma aproximação da distribuição Binomial. E redescoberta no século XIX por Laplace (Laplace, 1781) e Gauss (Gauss, 1816), conhecido também como distribuição de Gauss ou Gaussiana, quando desenvolveram a teoria dos Erros de Observação utilizando a função normal.

A distribuição Normal possui grande uso na estatística inferencial além de descrever uma série de fenômenos físicos e financeiros (Tucker, 1992). É inteiramente descrita por seus parâmetros de média e desvio padrão, ou seja, conhecendo-se estes se consegue determinar qualquer probabilidade em uma Normal.

Muitas vezes essa distribuição é também apelidada de curva em forma de sino (*Bell Curve*), como mostra a figura abaixo.

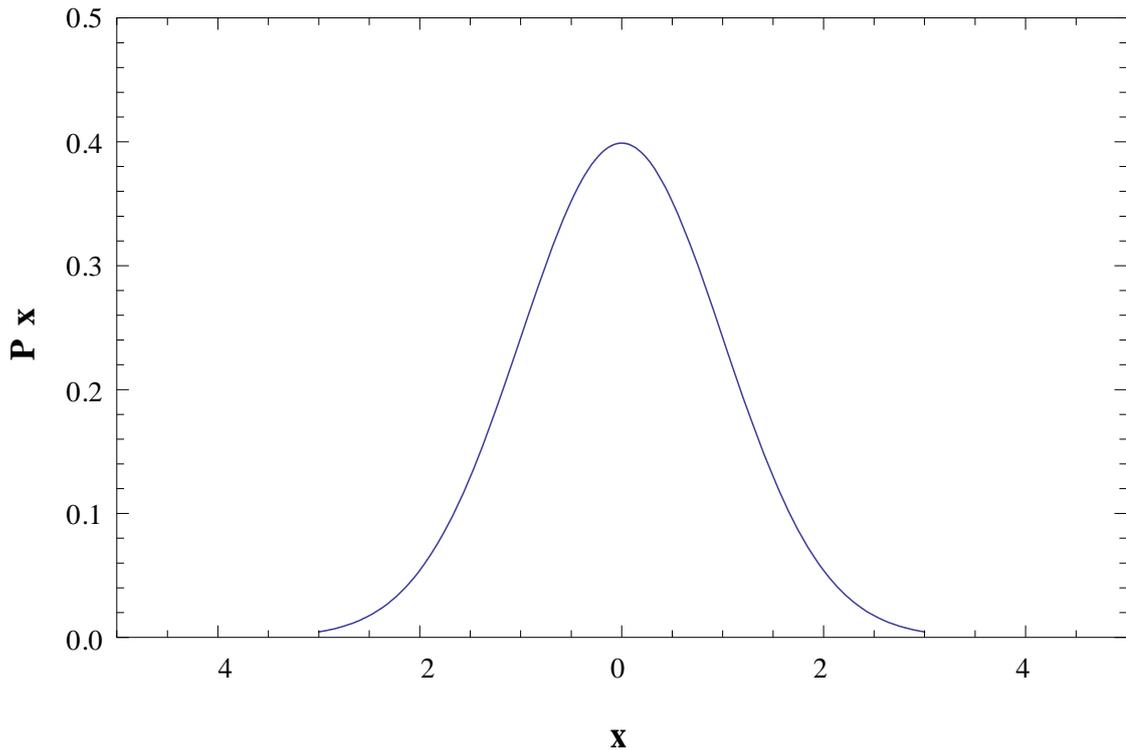


Figura 1: Distribuição do tipo Normal ou Gaussiana

A equação da curva Normal é especificada usando dois parâmetros: a média μ , e o desvio padrão σ , ou equivalentemente a variância σ^2 . Denotamos $N(\mu, \sigma^2)$ à curva Normal com média μ e variância σ^2 (Magalhães, 2001). A média refere-se ao centro da distribuição e o desvio padrão ao espalhamento de curva. Para referência, a equação da curva é

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (3.1)$$

As estimativas de μ e σ são dadas por:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \text{e} \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}. \quad (3.2)$$

A distribuição do tipo Normal é simétrica. A curva é afetada pelos valores numéricos de μ e σ , como mostra o diagrama abaixo.

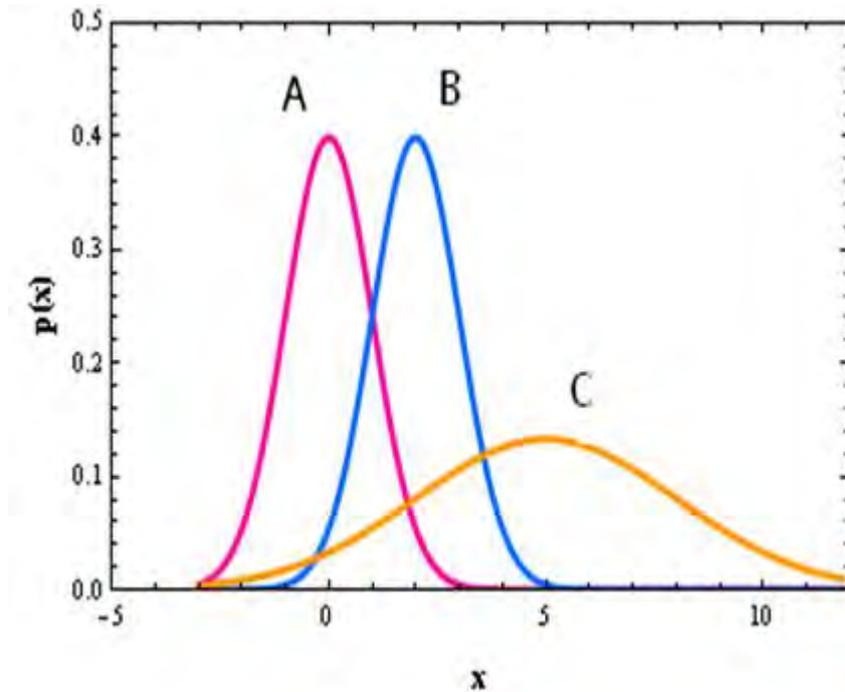


Figura 2: Média e Desvio Padrão na Distribuição Normal (curva A: média = 0 e desvio padrão = 1; curva B: média = 2 e desvio padrão = 1; curva C: média = 5 e desvio padrão = 3)

A área sob a curva normal (na verdade abaixo de qualquer função de densidade de probabilidade) é 1. Então, para quaisquer dois valores específicos podemos determinar a proporção de área sob a curva entre esses dois valores.

Para a distribuição do tipo Normal, as proporções de valores caindo dentro de um, dois, ou três desvios padrão da média são:

Varição	Proporção
$\mu \pm 1\sigma$	68.3%
$\mu \pm 2\sigma$	95.5%
$\mu \pm 3\sigma$	99.7%

Quando desejamos calcular probabilidades para diferentes valores de μ e σ , a variável x cuja distribuição é $p(x)$ é transformada numa forma padronizada Z , que denominamos distribuição normal padrão, pois tal distribuição é tabelada. Dessa forma se considerarmos:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}, \quad (3.3)$$

então $p(Z)$ é dado por:

$$p(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}}. \quad (3.4)$$

Um interessante uso da distribuição normal é que ela serve de aproximação para o cálculo de outras distribuições quando o número de observações torna-se grande. Essa importante propriedade provém do Teorema Central do Limite que diz que *"toda soma de variáveis aleatórias independentes de média finita e variância limitada é aproximadamente Normal, desde que o número de termos da soma seja suficientemente grande"*.

3.2. Distribuição do tipo Lei de Potência

Algumas distribuições são assimétricas, ao contrário da distribuição normal. Nesta distribuição, a probabilidade $p(x)$ a partir de um valor máximo, cai bem mais devagar do que se espera na distribuição do tipo normal, para valores cada vez maiores de x . Algumas dessas distribuições podem ser explicadas pela lei de potência.

A distribuição do tipo lei de potência (Pareto, 1896; Lévy, 1937) foi primeiramente notada por Pareto na renda pessoal, e posteriormente por outros em muitos sistemas complexos físicos (Solomon, 1993), econômicos (Mandelbrot, 1963), biológicos (Peng, 1993) e educacionais (Chavarette, 2002; Gupta, Campanha e Chavarette, 2003).

A distribuição de Lei de Potência de acordo com Pareto (1896) é dada por:

$$p(x) = \frac{c}{x^\alpha}, \quad (3.5)$$

onde $p(x)$ é a probabilidade de ocorrência do evento; c é uma constante e α é o expoente da distribuição. Aplicando log em ambos os lados temos que:

$$\log p(x) = -\alpha \log(x) + \log c. \quad (3.6)$$

Dessa forma, podemos dizer que a distribuição do tipo lei de potência são os gráficos do tipo $\log p(x)$ vs. $\log(x)$ que apresentam como resultado uma linha reta com α sendo a inclinação da reta. A figura abaixo mostra distribuição do tipo lei de potência com $\alpha = 2.5$ e $c = 10^5$.

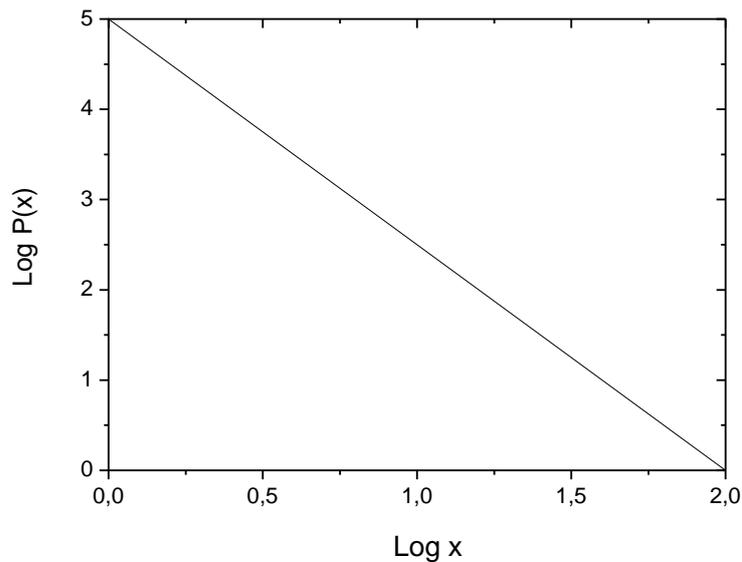
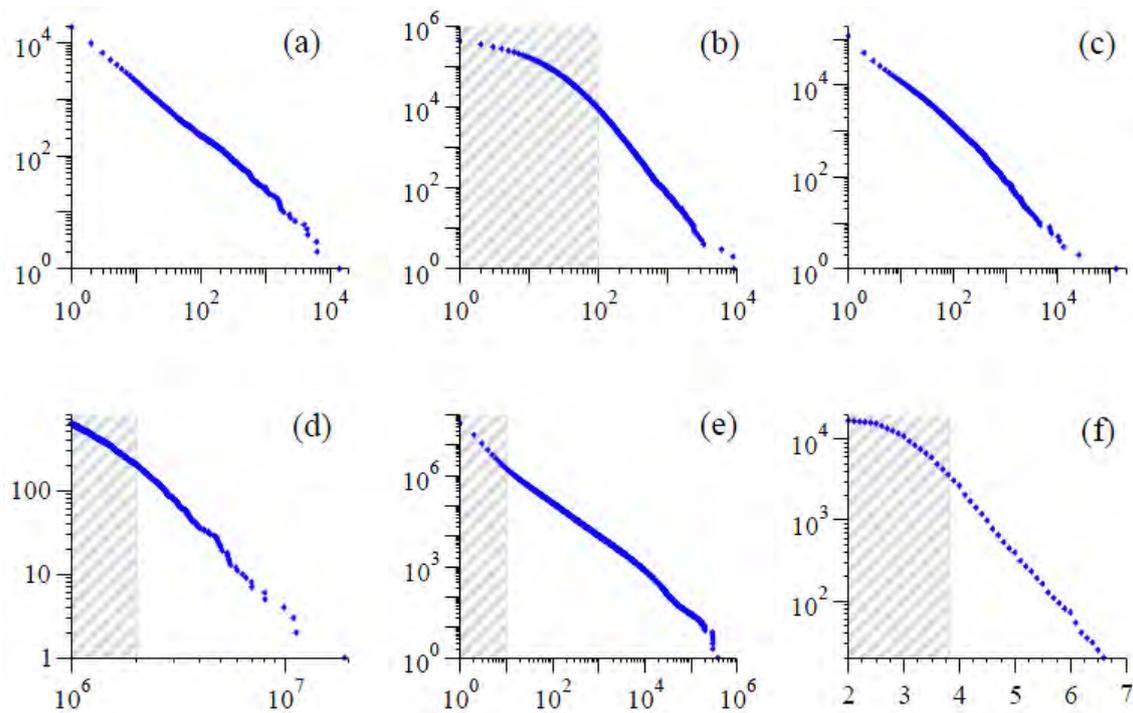


Figura 3: Distribuição do tipo lei de potência com $\alpha = 2.5$ e $c = 10^5$

Um exemplo desta distribuição é a magnitude dos terremotos (figura 4). Os terremotos distribuem-se em função da energia liberada, de acordo com a lei de potência (Geller, 1997). A distribuição da extinção de espécies na Terra (Vines, 1999) é, curiosamente, idêntica à lei de potência da distribuição de terremotos.

Outros exemplos (Newman, 2006) que seguem a lei de potência são mostrados na figura abaixo, no gráfico (a) temos os números de palavras no romance *Moby Dick* de *Hermann Melville*, no gráfico (b) temos números de citações para os artigos científicos publicados em 1981, a partir da data de publicação até

Junho de 1997, no gráfico (c) temos números de visitas em sites da Internet por 60.000 usuários do serviço de Internet America Online no dia 1 de Dezembro de 1997, no gráfico (d) temos o número de exemplares de livros vendidos em best-seller os E.U.A. entre 1895 e 1965, no gráfico (e) temos o número de chamadas recebidas no telefone pelos clientes da AT&T nos E.U.A. para um único dia e no gráfico (f) temos a magnitude dos terremotos na Califórnia entre Janeiro de 1910 e Maio de 1992.



Figur

a 4: Exemplos de gráficos de distribuições do tipo lei de potência

3.3. Distribuição do tipo Lévy

As distribuições do tipo Lévy (Lévy, 1937) regem muitos processos na natureza, como a fotocondutividade em semicondutores amorfos ou o ritmo cardíaco de indivíduos saudáveis. Sua expressão na forma simétrica e com média zero, é dada a partir da função característica:

$$L_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp(-\gamma q^\alpha) \cos(qx) dq; \quad (3.7)$$

Com parâmetro de Lévy ($0 < \alpha \leq 2$) e um fator de escala positivo γ . Para $\alpha = 2$ temos a distribuição Gaussiana.

Para grandes valores de x , a distribuição do tipo Lévy tem comportamento de lei de potência, $L_\alpha(x) \approx x^{-(\alpha+1)}$. Verificamos também que o segundo momento:

$$\langle x^2 \rangle = \int x^2 L_\alpha(x) dx \approx \int x^2 x^{-(\alpha+1)} dx \approx \int x^{1-\alpha} dx, \quad (3.8)$$

é divergente para os processos com $0 < \alpha < 2$.

Devido ao fato do segundo momento das distribuições empíricas ser finito, esta converjirá para uma distribuição Gaussiana.

3.4. Distribuição do tipo Mandelbrot

Algumas vezes, regularidades em sistemas complexos podem ser identificados e expressos em termos de leis simples. Exemplos típicos dessas situações podem ser encontrados na distribuição da população das grandes cidades, incêndios florestais, índices econômicos, ecologia, epidemias etc. Muitos desses sistemas complexos podem ser descritos através da distribuição do tipo Mandelbrot, através da equação:

$$p(x) = \frac{b}{(c+x)^\alpha}, \quad (3.9)$$

onde $p(x)$ é a probabilidade de ocorrência do evento; c e b são constantes e α é o expoente da distribuição. É de fácil percepção que Mandelbrot generaliza a distribuição do tipo Pareto, descrita acima, aonde é colocada mais uma constante. A distribuição do tipo Mandelbrot também se coloca no contexto da mecânica estatística generalizada e pode ser escrita de outra maneira:

$$p(x) = N_0 \left[1 - (q-1)\lambda x \right]^{-\frac{1}{1-q}}. \quad (3.10)$$

Veremos a seguir que esta distribuição acaba sendo um caso análogo ao descrito por Tsallis.

3.5. Distribuição do tipo Tsallis

A energia e a entropia são quantidades extensivas em problemas tradicionais da mecânica estatística de equilíbrio. Esses resultados só serão válidos à medida que diferentes regiões do sistema sejam independentes. Existem sistemas com interações de longo alcance, no entanto, para os quais não é possível assumir esta independência.

Tsallis (Tsallis, 1988) obteve a distribuição do tipo lei de potência através da termodinâmica não-extensiva, na qual levou em consideração interação de longo alcance e memória. A distribuição do tipo Tsallis é dada por:

$$p_q(x) = A_q \left[1 + (q-1) B_q (x - \overline{\mu}_q)^2 \right]^{\frac{1}{1-q}} \quad (q < 3), \quad (3.11)$$

onde:

$$A_q = \frac{\Gamma \left[\frac{5-3q}{2-2q} \right]}{\Gamma \left[\frac{2-q}{1-q} \right]} \sqrt{\frac{1-q}{\pi} B_q} \quad q < 1, \quad (3.12)$$

$$A_q = \frac{\Gamma \left[\frac{1}{q-1} \right]}{\Gamma \left[\frac{3-q}{2q-2} \right]} \sqrt{\frac{q-1}{\pi} B_q} \quad q > 1, \quad (3.13)$$

$$B_q = \left[(3-q) \overline{\sigma}_q^{-2} \right]^{-1}; \quad (3.14)$$

$$\overline{\mu}_q = \int x \frac{[p(x)]^q}{\int [p(x)]^q dx} dx. \quad (3.15)$$

Esta distribuição será vista no capítulo 4.

3.6. Outras distribuições

Abaixo gostaria de mencionar algumas distribuições probabilísticas que são importantes para a física e utilizada em sistemas complexos, mas que não serão abordadas neste trabalho.

3.6.1. Distribuição do tipo Log - Normal

Uma distribuição que é freqüentemente associada á distribuição com caudas longas é a distribuição do tipo log-normal (Aitchison, 1957). Ela é definida por:

$$p(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right)^2}. \quad (3.16)$$

As estimativas de μ e σ são dadas por:

$$\mu_{\log} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(x_i) \quad \text{e} \quad \sigma_{\log} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\log x_i - \mu_{\log})^2}. \quad (3.17)$$

O gráfico de $p(x)$ é dado por:

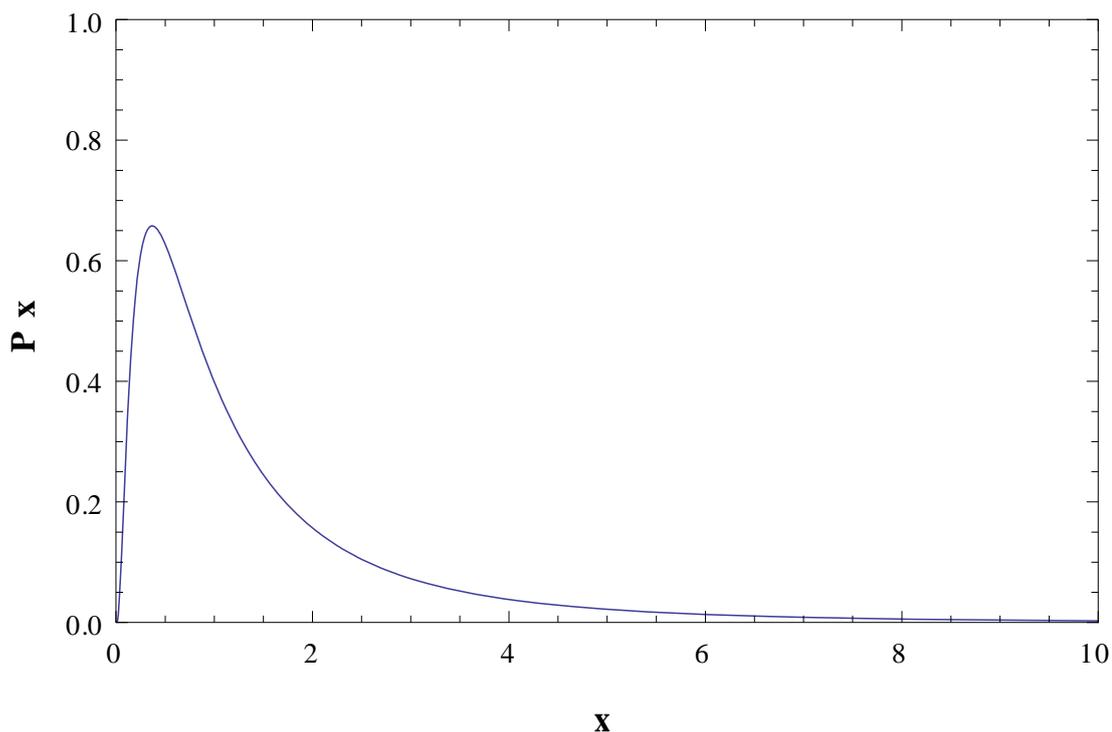


Figura 5: Distribuição do tipo log-normal com $\langle \ln x \rangle = 0$ e $\sigma = 1$

Shockley (Shockley, 1957) propôs a distribuição do tipo log-normal para o caso da publicação de documentos técnicos. Ele relata que num tempo determinado, a probabilidade de um pesquisador produzir um trabalho de sucesso seria o produto de um conjunto de probabilidades que acarretaria no sucesso do empreendimento.

Vários exemplos de usos da distribuição do tipo log-normal são dados por Eckhard Limpert, Werner A. Stahel e Markus Abbt (Eckhard Limpert, Werner A. Stahel and Markus Abbt, 2001), e podemos citar entre eles:

- Idade de casamento
- Períodos latentes (tempo de infecção e primeiros sintomas)
- No manto terrestre a concentração de elementos e sua radioatividade
- Na ciência atmosférica o tamanho dos aerossóis
- O número de letras por palavra e o número de palavras por sentença

3.6.2. Distribuição do tipo Lei de Potência Gradualmente Truncada

Os sistemas físicos reais apresentam variância finita, mas a distribuição de lei de potência possui variância infinita. Ao aplicarmos então, a distribuição de Lévy, Pareto ou ainda em alguns casos de log-normal, precisamos truncar as distribuições após um determinado valor, a fim de evitar um desvio padrão infinito.

Pareto explicou a distribuição de lei de potência baseando-se na realimentação positiva. De uma forma simples, um exemplo da economia seria de que o “dinheiro faz dinheiro”. Para explicarmos uma distribuição do tipo lei de potência gradualmente truncada usaremos como exemplo o trabalho de Gupta e Campanha (Gupta e Campanha, 1999, 2000) onde consideraram que a validade da Lei de Potência tem um limite devido à capacidade física do sistema, e, portanto, a realimentação positiva também deveria cessar após certo valor crítico de alguma variável. Como em sistemas complexos temos várias interações e um grande número de componentes interagindo de maneiras diferentes, eles propuseram que o truncamento desta realimentação positiva fosse gradual após um valor crítico.

A distribuição proposta por Gupta e Campanha denominada de *Distribuição de Lei de Potência Gradualmente Truncada* é dada por:

$$p_{GT}(x) = p(x)f(x), \quad (3.18)$$

onde $p(x)$ é a distribuição de lei de potência:

$$p(x) = \frac{c_1}{c_2 + (|x - x_m|)^{1+\alpha}}, \quad (3.19)$$

x_m é o valor de x onde a probabilidade é máxima, c_1 e c_2 (c_2 pode ser obtido através da condição de re-normalização) são constantes:

$$c_1 = c_2 p(x_m), \quad (3.20)$$

e, $f(x)$ é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq x_c \\ \exp\left[-\left(\frac{|x-x_c|^{2-\alpha}}{k}\right)\right] & \text{se } |x| > x_c \end{cases} \quad (3.21)$$

Essa distribuição aproxima-se da distribuição Normal para grandes valores de x , o que é a condição essencial para qualquer distribuição pelo Teorema do Limite Central. Assim, α é o índice de lei de potência, x_c é o ponto crítico onde começa o truncamento gradual devido ao limite físico do sistema (geralmente é muito maior do que x_m), e k é uma constante. Para valores menores de k , o truncamento será mais rápido.

Esta distribuição tem desvio padrão finito e também variância finita. No limite obtém-se uma distribuição Normal como exigido pelo Teorema do Limite Central. Esta distribuição também obedece à lei de potência em sua parte central e decaimento exponencial nos valores extremos de x . A distribuição Gradualmente Truncada torna mais simples a extração de informações úteis que descrevem o sistema real. Essa distribuição foi aplicada para a distribuição da bolsa de valores de Nova York (S&P 500) (Gupta e Campanha, 2000), faturamento de firmas dos E.U.A (Gupta e Campanha, 2001) e notas de vestibular da Unesp (Gupta, Campanha e Chavarette, 2003).

Capítulo 4

Termodinâmica não-extensiva

4.1. Entropia de Boltzman-Gibbs

A mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs foi formulada a mais de um século e, desde então, tem sido um sucesso notável para uma enorme variedade de sistemas, com a entropia ocupando um papel central. Boltzmann e Gibbs associam a idéia termodinâmica de entropia com uma abordagem probabilística do sistema, onde se tem microestados i com probabilidade p_i . A entropia é descrita como sendo:

$$S_{BG} = -k \sum_{i=1}^w p_i \ln p_i, \quad (4.1)$$

onde k é uma constante positiva, w é a quantidade de microestados e p_i é a probabilidade do sistema se encontrar em um estado i .

É fácil ver que a equação (4.1) satisfaz várias propriedades matemáticas. Entre elas, temos que S é não-negativo, extensivo, estável e côncavo.

Quando se tem a equiprobabilidade dos microestados, $p_i = \frac{1}{w}$, (hipótese de equiprobabilidade) a entropia S_{BG} pode ser expressa como:

$$S_{BG} = k \ln w. \quad (4.2)$$

Esta equação, conhecida como princípio de Boltzmann, é uma das expressões fundamentais da mecânica estatística, onde k é uma constante positiva, e w é o número de microestados compatíveis com o estado microscópico do sistema isolado. Também podemos afirmar que esta equação matemática diz que a entropia (que mede o grau de desordem de um sistema) cresce com o número de possibilidades w que o sistema apresenta. Por outro lado, sabemos que o número w , por sua vez, cresce com a energia.

Para um caso contínuo de estados possíveis x , a entropia pode ser expressa como sendo:

$$S_{BG} = -k \int p(x) \ln p(x) dx. \quad (4.3)$$

A incerteza probabilística também pode ser chamada de entropia da informação devido à sua expressão matemática ser análoga a da entropia termodinâmica, dada pela equação (4.3).

4.2. Aditividade e Extensividade

Se um sistema A tem uma entropia associada $S(A)$, e um sistema B tem uma entropia associada $S(B)$, esta quantidade é aditiva se verificar que:

$$S_{BG}(A+B) = S(A) + S(B). \quad (4.4)$$

Essa relação é verdadeira sob a hipótese de poder desprezar as interações entre elementos pertencentes aos diferentes subsistemas. Tal fato não é verdadeiro para sistemas com interações de longo alcance ou com memória.

No caso de N subsistemas diferentes, a relação (4.4) se generaliza imediatamente da forma:

$$S\left(\sum_{i=1}^N B_i\right) = \sum_{i=1}^N S(B_i). \quad (4.5)$$

Para o caso de subsistemas iguais, $B_i = B$, se tem que:

$$S\left(\sum_{i=1}^N B_i\right) = S(NB) = NS(B). \quad (4.6)$$

Por outro lado, o conceito de extensividade se relaciona com a seguinte expressão:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|S(N)|}{N} < \infty. \quad (4.7)$$

Um sistema extensivo tem um comportamento assintótico com o número de subsistemas N tal que existe um fator de proporcionalidade finito entre $|S(N)|$ e N .

A aditividade implica em extensividade, onde $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S(NB)}{N} = S(B)$. Portanto, se pode considerar que um sistema extensivo é assintoticamente aditivo.

4.3. Distribuição de Probabilidade associada à Boltzman-Gibbs

É possível encontrar a distribuição de probabilidade (utilizaremos a versão do sistema contínuo (4.3)) que maximiza a entropia de Boltzman-Gibbs restrita aos vínculos:

$$1. \int p(x) dx = 1; \quad (4.8)$$

$$2. \int xp(x) dx = \langle x \rangle; \quad (4.9)$$

$$3. \int (x - \langle x \rangle)^2 p(x) dx = \sigma^2. \quad (4.10)$$

A fórmula para $p(x)$, que maximiza a entropia (dada pela equação (4.3)) sujeita aos vínculos acima, é obtida através da técnica dos multiplicadores de Lagrange (Cortines, 2005), e dada por:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (4.11)$$

Observamos que se trata da distribuição Gaussiana.

4.4. Entropia de Tsallis

A mecânica estatística não-extensiva, interações de longo alcance e efeitos de memória, surge com o trabalho de Constantino Tsallis (Tsallis, 1988, 1989), no qual ele propõe uma generalização para a entropia de Boltzmann-Gibbs. Tal generalização passou a ser chamada de entropia de Tsallis e este trabalho passou a ser tema de intensos estudos nos últimos anos devido ao sucesso da teoria em descrever os mais diversos fenômenos físicos.

O ponto inicial proposto por Tsallis foi à entropia generalizada, que é dada por:

$$S_q = k \frac{1 - \sum_{i=1}^w p_i^q}{q-1}, \quad (4.12)$$

onde w é o número de microestados, p_i é a probabilidade do sistema se encontrar em um estado i e k é uma constante. Para um sistema contínuo temos:

$$S_q = k \frac{1 - \int [p(x)]^q dx}{1-q}. \quad (4.13)$$

Esta entropia possui as propriedades de positividade e concavidade para $q > 0$. Para $q < 0$ a entropia de Tsallis é convexa.

Utilizando a fórmula da entropia acima para o caso de dois sistemas A e B observamos que:

$$S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + (1-q)S_q(A)S_q(B). \quad (4.14)$$

Assim podemos concluir que, a entropia de Tsallis é não-extensiva e observamos ainda que no limite de $q \rightarrow 1$, obtemos novamente a extensividade da entropia (Boltzmann-Gibbs) é recuperada.

$$\lim_{q \rightarrow 1} S_q = S_{BG}. \quad (4.15)$$

4.5. Distribuição de probabilidade associada à entropia de Tsallis

É possível encontrar a distribuição de probabilidade (utilizaremos a versão do sistema contínuo (4.13)) que maximiza a entropia generalizada de Tsallis restrita aos vínculos:

$$1. \int p(x) dx = 1; \quad (4.16)$$

$$2. \int x \frac{[p(x)]^q}{\int [p(x)]^q dx} dx \equiv \langle x \rangle_q = \bar{\mu}_q; \quad (4.17)$$

$$3. \int (x - \bar{\mu}_q)^2 \frac{[p(x)]^q}{\int [p(x)]^q dx} dx \equiv \left\langle (x - \bar{\mu}_q)^2 \right\rangle_q = \bar{\sigma}_q^2. \quad (4.18)$$

O primeiro vínculo é apenas uma condição de normalização da função densidade da probabilidade. Entretanto, os dois outros vínculos correspondem à média generalizada e a variância de x .

A fórmula para $p(x)$, que maximiza a entropia de Tsallis sujeita aos vínculos acima, é obtida através da técnica dos multiplicadores de Lagrange (Cortines, 2005), e dada por:

$$p_q(x) = A_q \left[1 + (q-1) B_q (x - \bar{\mu}_q)^2 \right]^{\frac{1}{1-q}} \quad (q < 3), \quad (4.19)$$

onde:

$$A_q = \frac{\Gamma \left[\frac{5-3q}{2-2q} \right]}{\Gamma \left[\frac{2-q}{1-q} \right]} \sqrt{\frac{1-q}{\pi}} B_q \quad q < 1, \quad (4.20)$$

$$A_q = \frac{\Gamma \left[\frac{1}{q-1} \right]}{\Gamma \left[\frac{3-q}{2q-2} \right]} \sqrt{\frac{q-1}{\pi}} B_q \quad q > 1, \quad (4.21)$$

e

$$B_q = \left[(3-q) \bar{\sigma}_q^2 \right]^{-1}. \quad (4.22)$$

Definindo a função q-exponencial como:

$$e_q^x \equiv \begin{cases} [1 + (1-q)x]^{\frac{1}{1-q}} \\ 0 \quad \text{se } [1 + (1-q)x] \leq 0 \end{cases}, \quad (4.23)$$

observamos que no limite $q \rightarrow 1$ obtemos $e_1^x = e^x$. Assim podemos reescrever a função de densidade de probabilidade, a partir de agora referida como q-Gaussiana, como sendo:

$$p(x) = A_q e_q^{-B_q(x-\mu_q)^2}. \quad (4.24)$$

As q-Gaussianas tem as seguintes propriedades:

- Para $q \rightarrow 1$, obtêm a Gaussiana usual;
- Para $q > 1$, emerge uma cauda que segue uma lei de potência;
- Para $q < 1$, toda vez que o argumento do q-exponencial torna-se negativo aparece um corte e o suporte é finito.

Caso trocássemos o vínculo número 3 pelo seguinte vínculo:

$$\int |x|^\gamma \frac{[p(x)]^q}{\int [p(x)]^q dx} dx < \infty, \quad (4.25)$$

então a distribuição de probabilidade obtida (Borges, 2004) será dada por:

$$p(x) \propto e_q^{-\beta_q x^\gamma}. \quad (4.26)$$

No caso $q \neq 1$ e $\gamma = 1$ obtemos:

$$p(x) = N_0 [1 - (1-q)ax]^{1/(1-q)}. \quad (4.27)$$

Esta será a equação a ser estendida em nosso modelo.

4.6. Relação entre a distribuição de Tsallis e Mandelbrot

Interações de longo alcance e efeitos de memória estão presentes em muitos sistemas reais, incluindo o sistema econômico, e são importantes para uma distribuição estatística. Tsallis através de considerações termodinâmicas deu uma base microscópica da lei de potência considerando interações de longo alcance e efeitos de memória.

É interessante analisar as relações matemáticas que estão por trás das distribuições. Podemos citar como exemplo a relação entre a lei de potência de Tsallis e a de Mandelbrot, pois efetuando algumas transformações matemáticas observamos que elas se equivalem conforme mostraremos a seguir. Partindo da distribuição do tipo Tsallis, (equação 4.27) repetida abaixo:

$$p(x) = N_0 [1 - (1-q)ax]^{-\frac{1}{1-q}}, \quad (4.28)$$

e se substituirmos $N_0 = bc^\alpha$, $a = \frac{\alpha}{c}$ e $q = 1 + \frac{1}{\alpha}$ acima, obteremos à seguinte expressão:

$$p(x) = \frac{b}{(c+x)^\alpha}, \quad (4.29)$$

que corresponde a distribuição do tipo Mandelbrot.

Capítulo 5

Aplicações no Mercado Financeiro

5.1. Modelo proposto

O modelo proposto para o trabalho em questão é baseado na distribuição de Tsallis generalizada por Gupta e Campanha (Gupta e Campanha, 2002), onde é proposto (diferentemente da distribuição do tipo Tsallis, onde q é constante), que q seja uma função de x (em nosso trabalho a variável x significa a variação do valor das ações durante o tempo considerado, mas em outros exemplos ela pode significar o nível de um rio, a precipitação pluviométrica etc). O valor de q deve variar com x de tal forma que q diminua à medida que x aumente. Se usarmos $q \rightarrow 1$ deverá recuperar a distribuição do tipo Tsallis. O índice de entropia, q igual a 1, ocorre na falta de memória ou de interações de longo alcance. A função mais simples que podemos escolher para $q(x)$ é um decaimento exponencial. Então:

$$q(x) - 1 = (q_0 - 1) \exp(-(\theta x)^i), \quad (5.1)$$

onde q_0 e $q(x)$ são valores do índice de entropia q para o passo de tamanho zero e o passo tamanho x , respectivamente. θ e i são parâmetros ajustáveis dependendo das interações de longo alcance ou memória.

Para grandes valores de x , $q(x)$ se aproxima de 1, e assim, obtemos uma distribuição normal conforme exigido pelo teorema do limite central. Nesse modelo a função distribuição é dada por:

$$p(x) = A \left[1 + (q_0 - 1) B x \exp(-(\theta x)^i) \right]^{-\frac{\exp((\theta x)^i)}{(1-q_0)}}. \quad (5.2)$$

Para simplificarmos vamos substituir $(q_0 - 1)B$ por outra constante λ , e $\frac{1}{(1-q_0)}$ por α . Finalmente a distribuição de probabilidade torna-se:

$$p(x) = A \left[1 + \lambda x \exp(-(\theta x)^i) \right]^{-\alpha \exp((\theta x)^i)}. \quad (5.3)$$

Em nosso trabalho usaremos em vez da distribuição de probabilidades, o número de vezes (freqüência) em que certa ação teve uma variação, isto é, $N(x)$ que está relacionada à $p(x)$ através de

$$p(x) = \left(\frac{N(x)}{N_{Total}} \right). \quad (5.4)$$

Muitas vezes, a freqüência máxima não está em $x=0$. Neste caso necessitamos de mudança, ou seja, deslocar a origem para x_m , onde x_m é o início da variação do preço da ação. No valor de x_m a freqüência é máxima. Assim a distribuição de densidade da freqüência é dada por:

$$N(x) = N_0 \left[1 + \lambda |x - x_m| \exp(-(\theta |x - x_m|)^i) \right]^{-\alpha \exp((\theta |x - x_m|)^i)}. \quad (5.5)$$

Os mecanismos físicos por trás da distribuição de $x > x_m$ e $x < -x_m$ podem ser diferentes e, assim, os parâmetros da distribuição podem ser também diferentes. Dessa forma, os dois casos devem ser tratados separadamente.

O parâmetro N_0 é um valor próximo ao valor máximo da curva (início) os parâmetros α e λ influem na parte central e os parâmetros θ e i influenciam principalmente a cauda da distribuição, conforme mostra a figura abaixo:

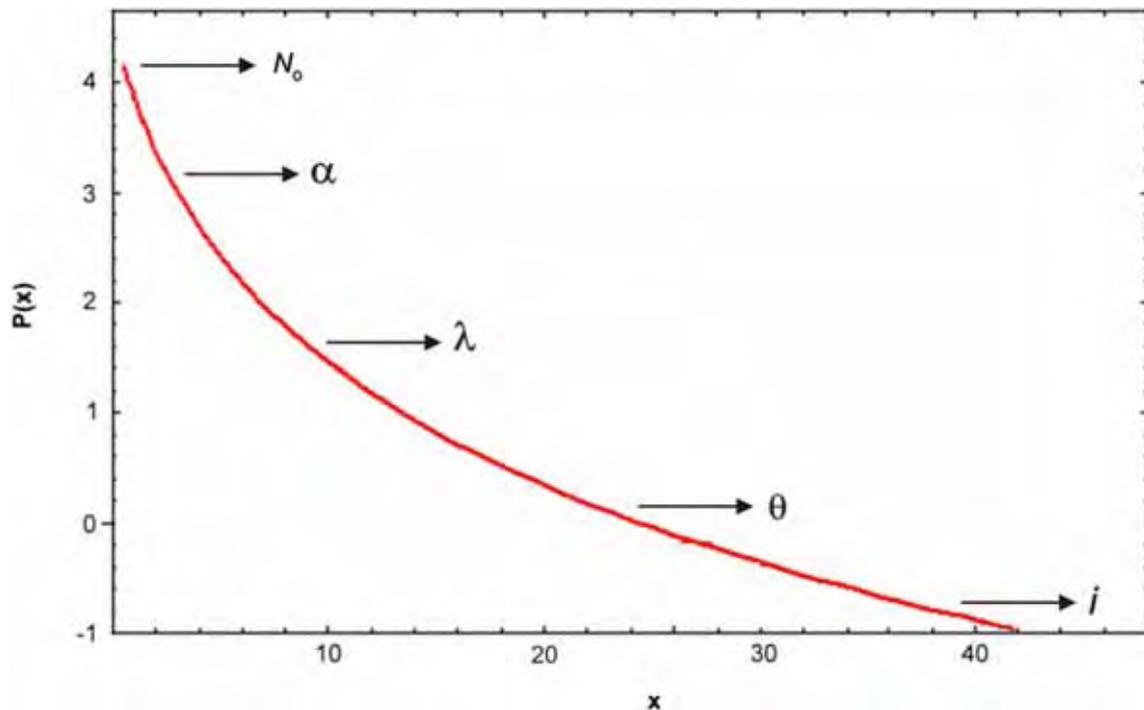


Figura 6: Ilustra a utilização de parâmetros (modelo proposto) no ajuste de uma curva.

Para $i = 0$, obtêm-se a distribuição do tipo Tsallis, como esperado.

O valor de $p(x)$ em $x = 0$ deve ser cuidadosamente estudado, em particular quando $x_m = 0$. Por exemplo, no mercado financeiro, a variação zero no preço de uma ação também inclui os casos em que a ação não é comercializada juntamente com os casos que sua variação é zero. Assim, nestes casos, $p(0)$ deve ser estimado separadamente através de:

$$p(0) = \frac{\text{Eventos}_{x=0}}{\text{Total_de_eventos}}. \quad (5.6)$$

Foi demonstrado (Mantega e Stanley, 1995) que a variação do valor de uma ação em limite de alta frequência (variação por minuto) é dada através de uma lei de potência. Em nosso trabalho vamos verificar a existência de lei de potência na variação dos preços das ações abaixo, também no regime de alta frequência, ou seja, variação do preço por minuto:

- Banco do Brasil (bbas3);
- Vale (vale5);
- Votorantin Celulose e Papel (vcpa4).

5.2. Aplicação do modelo as ações do Banco do Brasil

Foi fundado em 12 de outubro de 1808, antes mesmo do Brasil tornar-se independente. E desde então, seu pioneirismo e liderança marcaram presença em todos os momentos decisivos da nossa história.

Em 1822, na Independência, foi o principal parceiro para custear as escolas e hospitais do país que nascia. No fim da década de 1880, destacou-se como indutor do fomento econômico, destinando as primeiras linhas de crédito para a agricultura, em especial a do café. Com a Proclamação da República, em 1889, atuou decisivamente para equilibrar os impactos financeiros causados pelo fim da Monarquia.

O compromisso com o desenvolvimento do país continuou ao longo dos anos, sempre pautado pelos princípios de ética, responsabilidade socioambiental e valorização cultural, intrínsecos ao Banco do Brasil.

O Banco do Brasil é hoje a maior instituição financeira do País, atendendo a todos os segmentos do mercado financeiro. Em 200 anos de existência, o primeiro banco a operar no país, coleciona histórias de pioneirismo e liderança. Foi o primeiro a entrar para a bolsa de valores; a lançar cartão de múltiplas funções; a lançar o serviço de mobile banking, a se comprometer com uma Agenda 21 Empresarial e a aderir aos Princípios do Equador. Hoje é líder em ativos, depósitos totais, câmbio exportação, carteira de crédito, base de correntistas, rede própria de atendimento no país, entre outros.

Decidimos então estudar as variações dos preços das ações do Banco do Brasil e o período usado no trabalho foi a partir de 1 de Julho de 2004 até 30 de Junho de 2007, no total de 329.489 observações, monitorado e cedido pela IBOVESPA - São Paulo. Quando o valor de uma ação num determinado minuto for o mesmo que o do minuto anterior, sua variação é nula, neste caso esses dados são excluídos.

Ao ajustarmos a curva para a variação positiva dos preços das ações, pelo método do erro quadrático médio (também conhecido como resíduo), temos o seguinte conjunto de parâmetros:

- $x_m = 0,5$
- $N_0 = 11.400$
- $\lambda = 0,605$
- $\alpha = 1,8$
- $\theta = 1$
- $i = 0$

Utilizamos o mesmo método de ajuste (resíduo) para a variação negativa e encontramos o seguinte conjunto de parâmetros:

- $x_m = -0,5$
- $N_0 = 15.500$
- $\lambda = 0,53$
- $\alpha = 2$
- $\theta = 1$
- $i = 0$

Não houve a necessidade de usarmos o modelo proposto por Gupta e Campanha (Gupta e Campanha, 2008) devido ao fato do θ assumir o valor 1 e o i ser nulo.

Na Figura 7, nós mostramos o gráfico do logaritmo do número de vezes (frequência) que a ação teve uma determinada variação pela variação percentual

(retorno clássico, ver equação 1.3) multiplicado por 10^3 . Observamos um ajuste satisfatório dos dados.

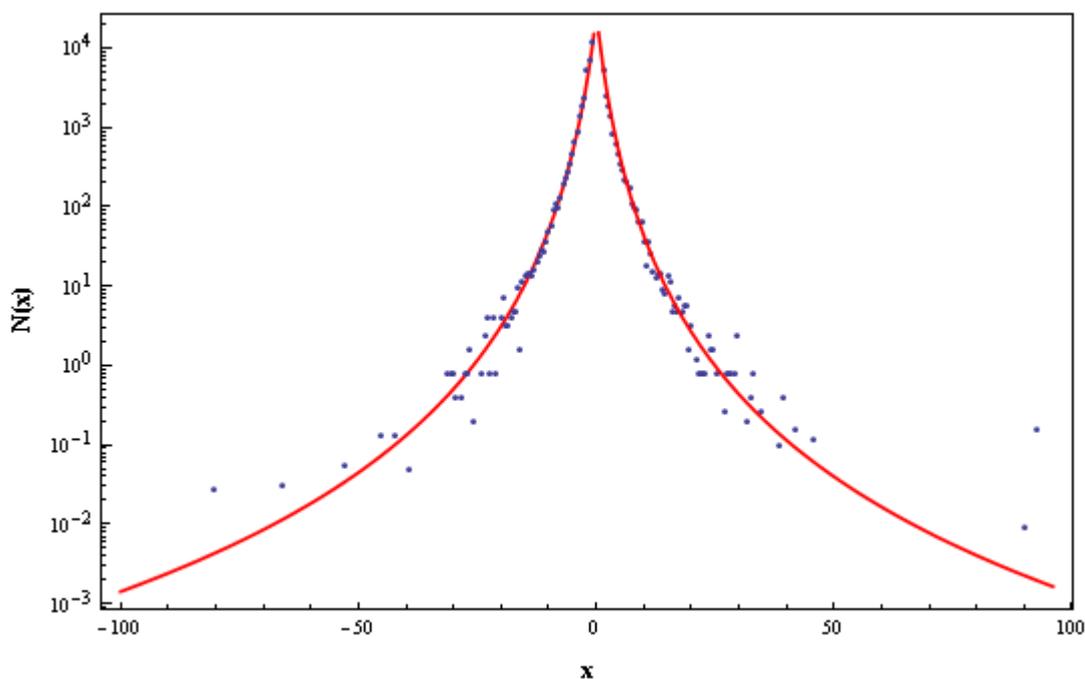


Figura 7: Logaritmo do número de vezes (frequência) que a ação teve uma determinada variação pela variação percentual multiplicado por 10^3 (bbas3).

5.3. Aplicação do modelo as ações da Vale

A empresa que conhecemos como Vale nasceu em 1942, criada pelo governo brasileiro como Companhia Vale do Rio Doce. Em 1997, tornou-se uma empresa privada. Hoje é uma empresa global, atuando nos cinco continentes, e conta com a força e o valor de mais de 100 mil empregados, entre próprios e terceirizados, que trabalham a transformar recursos minerais em riqueza e desenvolvimento sustentável.

A Vale produz e comercializa minério de ferro, pelotas, níquel, concentrado de cobre, carvão, bauxita, alumina, alumínio, potássio, caulim, manganês e ferroligas. Sempre com foco no crescimento e diversificação de suas atividades em mineração, investe também em pesquisa mineral e tecnologias voltadas para a melhoria contínua de suas atividades nos cinco continentes.

Para dar suporte ao desenvolvimento e escoamento da produção, atua como uma operadora logística e prioriza projetos de geração de energia voltados para o autoconsumo, de forma a garantir competitividade.

Em novembro de 2007, passou a ter um só nome: Vale. A nova marca surgiu para celebrar todas as suas conquistas e transformações, expressando a personalidade da organização em âmbito global.

Decidimos então estudar as variações dos preços das ações da Vale e o período usado é a partir de 1 de Julho de 2004 a 30 de Junho de 2007, o mesmo período do Banco do Brasil, no total de 1.486.214 observações, monitorado e cedido pela IBOVESPA - São Paulo. Quando o valor de uma ação num determinado minuto for o mesmo que o do minuto anterior, sua variação é nula, neste caso esses dados são excluídos.

Ao ajustarmos a curva para a variação positiva dos preços das ações, pelo método do erro quadrático médio (também conhecido como resíduo), temos o seguinte conjunto de parâmetros:

- $x_m = 0,5$
- $N_0 = 21.800$
- $\lambda = 3,95$
- $\alpha = 1,05$
- $\theta = 1$
- $i = 0$

Utilizamos o mesmo método de ajuste (resíduo) para a variação negativa e encontramos o seguinte conjunto de parâmetros:

- $x_m = -0,5$
- $N_0 = 6.500$
- $\lambda = 0,785$
- $\alpha = 1,7$
- $\theta = 1$
- $i = 0$

Não houve a necessidade de usarmos o modelo proposto por Gupta e Campanha (Gupta e Campanha, 2008) devido ao fato do θ assumir o valor 1 e o i ser nulo.

Na Figura 8, nós mostramos o gráfico do logaritmo do número de vezes (frequência) que a ação teve uma determinada variação pela variação percentual (retorno clássico, ver equação 1.3) multiplicado por 10^3 . Observamos um ajuste satisfatório dos dados.

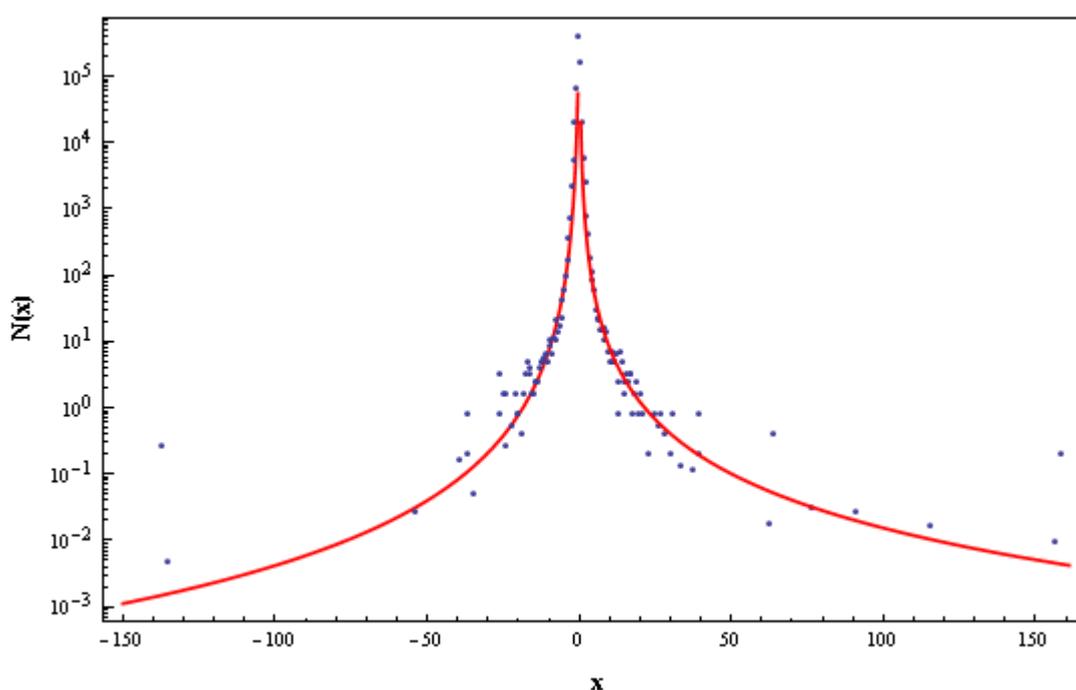


Figura 8: Logaritmo do número de vezes (frequência) que a ação teve uma determinada variação pela variação percentual multiplicado por 10^3 (vale5)

5.4. Aplicação do modelo as ações Votorantin Celulose e Papel

A origem da VCP remonta ao início da década de 50, quando o empresário e senador Antônio Ermírio de Moraes (co-fundador do Grupo Votorantim ao lado do sogro Antônio Pereira Ignácio), inicia uma plantação de 80 milhões de pés de eucalipto na região de Capão Bonito, interior do Estado de São Paulo, alimentando o desejo de atuar no setor de Celulose e Papel.

A partir de então, a Votorantim faz diversos investimentos no setor, mas apenas em 1988 o sonho de uma fábrica própria vira realidade: junto com o BNDES, a Votorantim adquire o projeto Celpav (Celulose e Papel Votorantim), da antiga Cia. Guatapar de Papel e Celulose, para implanta de uma fábrica integrada de papel e celulose em Luiz Antnio, cidade próxima a Ribeirão Preto (SP).

Em 1992, a aquisi de da empresa Papel Simão S.A. adiciona ao Grupo Votorantim uma capacidade de 220 mil toneladas por ano (ton/ano) de celulose e 250 mil ton/ano de papel em quatro unidades produtoras, além de uma distribuidora, a KSR.

Com sua capacidade crescente de produ de, a Votorantim consolida, em 1995, a Celpav e as fábricas adquiridas do Grupo Simão em um único holding – a VCP (Votorantim Celulose e Papel), que já nasce como a terceira maior empresa do setor no País. Hoje, segundo os rankings dos jornais Gazeta Mercantil, Valor Econmico e da revista Exame,  a maior empresa do setor de Celulose e Papel do Brasil.

Decidimos então estudar as varia de dos preços das a de da Votorantim Celulose e Papel e o período usado  o mesmo do Banco do Brasil a partir de 1 de Julho de 2004 a 30 de Junho de 2007, no total de 224.488 observa de, monitorado e cedido pela IBOVESPA - São Paulo. Quando o valor de uma a de num determinado minuto for o mesmo que o do minuto anterior, sua varia de  nula, neste caso esses dados são excluídos.

Ao ajustarmos a curva para a varia de positiva dos preços das a de, pelo método do erro quadrático médio (também conhecido como resíduo), temos o seguinte conjunto de parâmetros:

- $x_m = 0,5$
- $N_0 = 21.600$
- $\lambda = 1,05$
- $\alpha = 1,45$
- $\theta = 1,33$
- $i = 0,02$

Utilizamos o mesmo método de ajuste (resíduo) para a variação negativa e encontramos o seguinte conjunto de parâmetros:

- $x_m = -0,5$
- $N_0 = 12.000$
- $\lambda = 0,445$
- $\alpha = 1,95$
- $\theta = 1$
- $i = 0,01$

Observamos que no caso da ação Votorantim Celulose e Papel houve a necessidade de usarmos os parâmetros do modelo estendido.

Na Figura 9, mostramos o gráfico do logaritmo do número de vezes (freqüência) que a ação teve uma determinada variação pela variação percentual (retorno clássico, ver equação 1.3) multiplicado por 10^3 . Observamos um ajuste satisfatório dos dados.

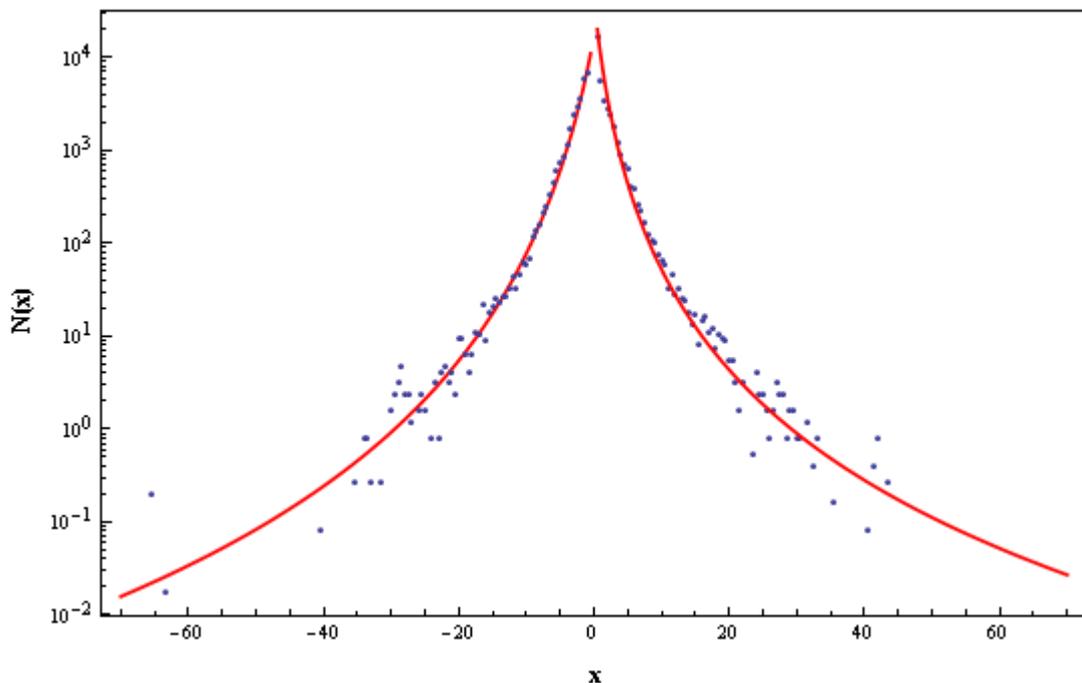


Figura 9: Logaritmo do número de vezes (freqüência) que a ação teve uma determinada variação pela variação percentual multiplicado por 10^3 (vcpa4)

5.5. Outras aplicações

Gupta e Campanha (Gupta e Campanha, 2008) aplicaram esse mesmo modelo a vários modelos geofísicos, no nível (altura) e vazão de água do rio Paraná, no caso de precipitação pluviométrica na região de Campinas e no número de manchas solares.

Nos exemplos citados acima o modelo estendido mostrou um melhor ajuste que o modelo de Tsallis. Abaixo vamos mostrar alguns exemplos dos modelos citados.

No caso da vazão de água do rio Paraná (5.428 observações de outubro de 1969 a agosto de 1984) foi obtido o seguinte conjunto de parâmetros:

- $x_m = 155$
- $N_0 = 24,4$
- $\lambda = 0,013$
- $\alpha = 0,84$
- $\theta = 0,00177$
- $i = 3$

Na figura 10 mostramos a distribuição com os dados acima.

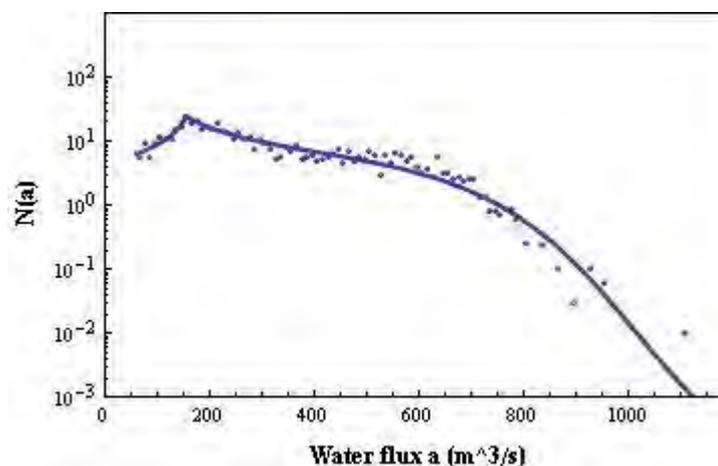


Figura 10: Densidade de freqüência vs. vazão de água

No caso de precipitação pluviométrica (Biondini, 1976), na região de Campinas com 21.549 observações, foi obtido o seguinte conjunto de parâmetros:

- $x_m = 1$
- $N_0 = 598$
- $\lambda = 0,074$
- $\alpha = 1,7$
- $\theta = 0,08$
- $i = 0,12$

Na figura 11 mostramos a distribuição com os dados acima.

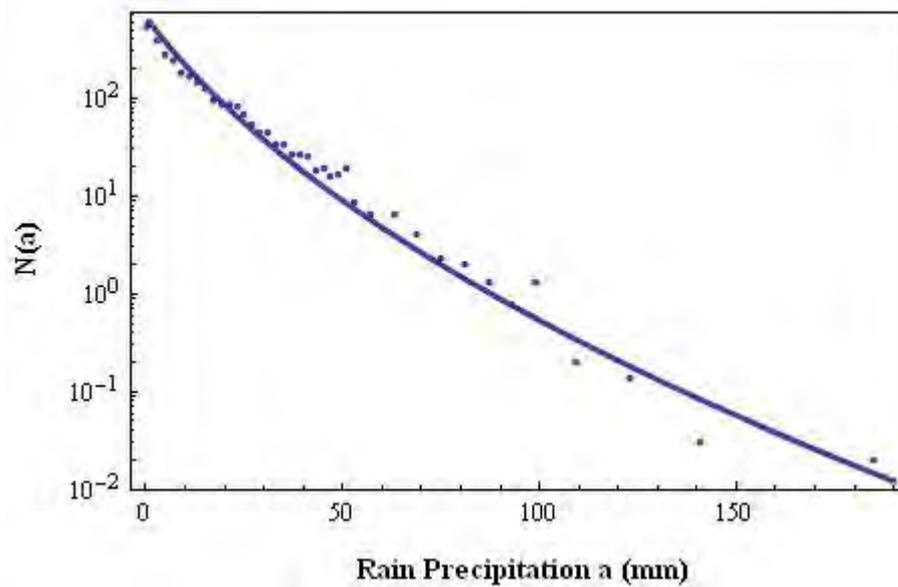


Figura 11: Densidade de freqüência vs. precipitação pluviométrica

No caso do número de manchas solares, com dados mensais do ano de 1749 ao ano de 2007, foi obtido o seguinte conjunto de parâmetros:

- $x_m = 2,5$
- $N_0 = 58,4$
- $\lambda = 0,04$
- $\alpha = 0,8$

- $\theta = 0,075$
- $i = 1,9$

Na figura 12, abaixo, mostramos a distribuição com os dados acima.

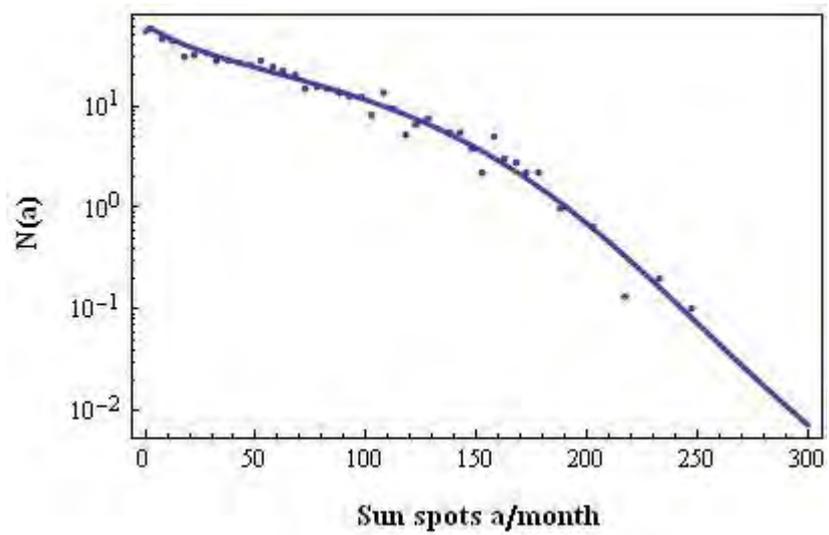


Figura 12: Densidade de freqüência vs. manchas solares por mês

Capítulo 6

Conclusões

No presente trabalho, utilizamos a distribuição do tipo Tsallis que tem se mostrado como uma alternativa melhor para o tratamento de sistemas que possuem memória ou interações de longo alcance. A idéia original do trabalho foi de utilizarmos o modelo de Gupta e Campanha (Gupta e Campanha, 2008) no qual o índice entrópico q ao invés de ser uma constante seria substituído por uma função exponencial decrescente.

Observamos que no caso das ações, Banco do Brasil e Vale, estudadas, não houve a necessidade de estendermos o modelo de Tsallis, já que todos os casos o valor de i foi nulo. No caso da ação, Votorantim Celulose e Papel, houve a necessidade de usarmos os parâmetros do modelo estendido. O modelo estendido foi utilizado com sucesso em outros casos (Gupta e Campanha, 2008) como, por exemplo, o nível do rio Paraná, vazão do rio Paraná, precipitação pluviométrica na região de Campinas e número de manchas solares, onde se obteve um bom ajuste da distribuição dos exemplos citados acima.

Vimos também que a distribuição do tipo Tsallis deve ser usada em vez de um modelo que utiliza a distribuição normal, pois além de produzir melhores resultados tem também uma sólida base física

Apesar de o número de dados, no caso das ações estudadas, ter sido grande, entendemos que existe a necessidade de usarmos dados de outros setores da economia para podermos ter um melhor entendimento do modelo estendido. Esta é nossa sugestão para trabalhos futuros.

Bibliografia

AITCHISON, J.; BROWN, J.A.C. *The Log-normal Distribution*. Cambridge: Cambridge United Press, 1957.

ARTHUR, W.B. Complexity and the Economy. In: *Science*, Washington, v.284, n.5411, p.107-109,1999.

BACHELIER. L. *Théorie de La Speculation (PhD thésis) Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*. III- 17: 1900.

BIONDINI, R. Cloud motion and rainfall statistics. *Journal of Applied Meteorology*. Charlottesville, v.15, p. 205-224, 1976.

BLACK, F.; SHOLES, M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *J. Polit. Econ.*v.81, p. 637-654, 1973.

BORGES, E. P., Empirical nonextensive laws for the county distribution of total personal income and gross domestic product. *Physica A*. n. 334, p. 255-266, 2004.

CHAVARETTE, F. R. et al. Um breve comentário sobre o vestibular da UNESP: Um exemplo de modelo dinâmico aleatório de sistema complexo. In: Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações da Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 1., 2002, São José do Rio Preto. Anais... São José do Rio Preto: SBMAC, 2002. p. 879-886.

CORTINES, A. A. G, *Dinâmica intradiária do mercado de ações brasileiros*. Rio de Janeiro, 2005. [Dissertação de mestrado].

FELLER, W. Na introduction to probability theory and its applications. *New York: Wiley*, 1971.

GAUSS, C. F. Bestimmung der genauigkeit der beobachtungen. *Zeitschrift fur Astronomie*, Berlin, v.1, p. 185-197, 1816.

GELLER, R. J.; JACKSON, D. D.; KAGAN, Y. Y. and MULARGIA, F., Earthquakes cannot be predicted, *Science* 275, 1616-1617, 1997.

GUPTA, H. M.; CAMPANHA, J. R. The gradually truncated Lévy flight for systems with power-law distributions. *Physica A*, New York, v.268, p. 231-239, 1999.

GUPTA, H. M.; CAMPANHA, J. R. The gradually truncated Lévy flight: stochastic process for complex systems. *Physica A*, New York, v. 275, p.531-543, 2000.

GUPTA, H. M.; CAMPANHA, J. R. Gradually truncated log-normal distribution – size distribution of firms. arXiv.org ePrint archive, v. 1, 30 nov 2001. Disponível em : < <http://arxiv.org/pdf/cond-mat/0111579>>.

GUPTA, H. M.; CAMPANHA, J. R. Tsallis statistics and gradually truncated Lévy flight – distribution of an economical index. *Physica A*, New York, v. 309, p. 381-387, 2002.

GUPTA, H. M.; CAMPANHA, J. R.; CHAVARETTE, F.R. Power Law distribution in Education: Effect of Economical Teaching and Study Conditions in University Entrance Examination. *International Journal of Modern Physics C*, New York, v. 14, p. 449-457, 2003.

GUPTA, H. M.; CAMPANHA, J. R. and PESCE, R.A.G., Power-Law Distributions for the Citation Index os Scientific Publications and Scientists, *Brazilian J. of Physics C*, 35, 981-986 (2005).

GUPTA, H. M.; CAMPANHA, J. R.; Schinaider, S. J., Size limiting in Tsallis Statistics, *Physica A*, v.387, p 6745-6751, 2008.

GUPTA, H. M.; CAMPANHA, J. R., The exponentially truncated q-distribution: A generalized distribution for real complex systems, arXiv 0807-0563 v1, 8 July 2008.

LAPLACE, P. S. Mémoire sur lês probabilités. Histoire de l' Académie Royale de Sciences, Paris, v.9, p.227-332, 1781.

LÉVY, P. Théorie de L'addition dès Variables Aléatoires. Paris: Gauthier- Villars, 1937.

LIMPERT, E.; STAHEL W. A. and ABBT, M.; Log-normal Distributions across the Sciences: Keys and Clues, *BioScience*, vol 51, nº5, 341-352, 2001

LOURENÇO, A. L. C. *Minsky, câmbio e "finança direta"*: A hipótese de instabilidade financeira no contexto institucional dos anos 90, Unicamp-Campinas, 1999.

MAGALHÃES, M. V.; LIMA, A.C.P. *Noções de probabilidade e estatística*. 3. ed. São Paulo: IME / USP, 2001.

MALAMUD, B. D.; MOREIN, G.; TURCOTTE, D. L., *Forest Fires: An Example of Self-Organized Critical Behavior*, *Science*, vol 281, nº 5384, 1840-1842, 1998.

MANDELBROT, B. The variation of certain speculative prices. *Journal of Business of The University of Chicago*, Chicago, v.36, p.394, 1963.

MANTEGNA, R.; STANLEY, H. E. Stochastic Process with Ultraslow Convergence to a Gaussian: The truncated Lévy Flight. *Physical Review Letters*. N. Y., v.73, n.22, p.2946-2949, 1994.

MANTEGNA, R.; STANLEY, H.E. Scaling behavior in the dynamics of economics index. *Nature*, London, v.376, p.46-49, 1995.

MOYANO, L. G. *Mecânica estatística não-extensiva em sistemas complexos: fundamentos dinâmicos e aplicações*, Rio de Janeiro, 2006. [Tese de Doutorado].

MOIVRE, A. de. *Approximation ad summam terminorum binomii $(a+b)^n$ in seirem expansi*. London: Supplement to Miscellanea Analytica, 1733.

NEWMAN, M. E. J., *Power laws, Pareto distributions and Zipf's law*, University of Michigan, Ann Arbor, MI 48109, U.S.A., 2006.

PARETO, V. *Cours d'Economic Politique*. Reprint as a volume. Ouvres Completes. Droz Geneur, 1687.

PARISI, G., *Complex Systems: A Physicist's Viewpoint*, xxx.lanl.gov, COND-MAT/0205296, 2002

PENG, C. K.; MIETUS, J.; HAAUDORFF, J. M.; HAVLIN, S.; STANLEY, H. E.; GOLDBERGER, A. L., Long-range anticorrelations and non Gaussian behavior of the heartbeat, *Physical Review Letters*, 70, 1343-1346, 1993

REDNER, S., How popular is your paper? An empirical study of citation distribution, European. *Physical Journal B2*, 131-134, 1998.

RONAN, Colin A.. *História Ilustrada da Ciência: Universidade de Cambridge*. 1.ed. São Paulo: Círculo do Livro, 1987. 4 v. v. III - *Da Renascença à Revolução Científica*.

SHOCKLEY, P. E. *Log - Normal Distribution*. Citation index Proceeding of. IRE, USA, v.45, p. 279, 1957.

SOLOMON, T.H.; WEEKS, E.R. and SWINNEY, H.L., Observation of anomalous diffusion and Lévy flights in a two-dimensional rotating flow. *Phys. Rev. Lett.* 71, 3975-3978 (1993).

STANLEY, H. E. Scaling, universality, and renormalization: Three pillars of modern critical phenomena. *Reviews of Modern Physics*, v.71, n.2, p.5358- 5366, 1999.

THALER, R. H. (Ed), *Advances in Behavioral Finance*. Russel Sage Foundation, New York, 1993.

TSALLIS, C. Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics, *Journal of Statistical Physics* 52, 479 (1988)

TSALLIS, C. Nonextensive Statistics: Theoretical, Experimental and Computacional Evidences and Connections. *Brazilian Journal of Physics*, SP, v.29, p.1-45, 1999.

TSALLIS, C. As distribuições de Lévy. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, São Paulo, v.22, p.156-162, 2000.

TUCKER, A.L. *J. of Business & Economic Statistics*. n. 10, v. 73 (1992).

VINES, G., Mass extinctions. *New Scientist Earth Sciences*, 1-4, 1999

WESTFALL Richard S: *A vida de Isaac Newton*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1995.