UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Denis Fernandes da Silva

Equações Diferenciais Abstratas do tipo Neutro com Retardo Dependendo do Estado

São José do Rio Preto

2017

Denis Fernandes da Silva

Equações Diferenciais Abstratas do tipo Neutro com Retardo Dependendo do Estado

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES.

Orientadora: Prof$^{\text{a}}$. Dr$^{\text{a}}$. Andréa Cristina Prokopczyk Arita
Coorientadora: Prof$^{\text{a}}$. Dr$^{\text{a}}$. Michelle Fernanda Pierri Hernández

São José do Rio Preto
2017

Silva, Denis Fernandes da.
Equações diferenciais abstratas do tipo neutro com retardo dependendo do estado / Denis Fernandes da Silva. -- São José do Rio Preto, 2017
131 f. : il.

Orientador: Andréa Cristina Prokopczyk Arita
Coorientador: Michelle Fernanda Pierri Hernández
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Equações diferenciais - Equações com retardamento. 3. Semigrupos. 4. Cauchy, Problemas de. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 517.91

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Denis Fernandes da Silva

Equações Diferenciais Abstratas do tipo Neutro com Retardo Dependendo do Estado

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES.

Comissão Examinadora

Profª. Drª. Andréa Cristina Prokopczyk Arita
UNESP - São José do Rio Preto
Orientadora

Profª. Drª. Katia Andreia Gonçalves de Azevedo
USP - Ribeirão Preto

Prof. Dr. Sérgio Leandro Nascimento Neves
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
22 de Fevereiro de 2017

Resumo

Neste trabalho estudamos inicialmente algumas generalidades da teoria de semigrupos de operadores lineares limitados, especialmente dos semigrupos fortemente contínuos e dos semigrupos analíticos. Em seguida, com base no estudo da teoria de semigupos, estudamos a existência e unicidade de soluções fracas e estritas para equações diferenciais abstratas do tipo neutro com retardo dependendo do estado da forma

$$\frac{d}{dt}(u(t) + G(t, u_{\sigma_1(t,u_t)})) = Au(t) + F(t, u_{\sigma_2(t,u_t)}), \qquad t \in [0, a], \tag{1}$$

$$u_0 = \varphi \in C([-p, 0]; X), \tag{2}$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico de operadores lineares limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ em um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$ e $F(\cdot)$, $G(\cdot)$ e $\sigma_i(\cdot)$, i=1,2, são funções apropriadas. Finalizamos com algumas aplicações dos resultados obtidos para o problema (1)-(2).

É importante observar que os resultados deste trabalho envolvendo o estudo do problema (1)-(2) são inéditos e serão submetidos para publicação brevemente.

Palavras-chave: Equações Diferenciais do tipo Neutro. Equações Diferenciais com Retardo. Retardo Dependendo do Estado.

Abstract

In this work we initially study some generalities of the semigroups theory, especially of the strongly continuous semigroups and of the analytic semigroups. Next, we study the existence and uniqueness of mild and strict solutions for abstract neutral differential equations with state dependent delay of the form

$$\frac{d}{dt}(u(t) + G(t, u_{\sigma 1(t,u_t)})) = Au(t) + F(t, u_{\sigma 2(t,u_t)}), \quad t \in [0, a], \tag{3}$$

$$u_0 = \varphi \in \mathcal{B}_X = C([-p, 0]; X), \tag{4}$$

where $A : D(A) \subset X \to X$ is the generator of an analytic semigroup of bounded linear operators $(T(t))_{t\geq 0}$ on a Banach space $(X, \| \cdot \|)$ and $F(\cdot)$, $G(\cdot), \sigma_i(\cdot)$, $i = 1, 2$, are suitable functions. We finish with some applications of the results for the problem (3)-(4).

It is important to note that the results of this work involving the study of the problem (3)-(4) are unpublished and will be submitted to publication soon.

Keywords: Neutral Differential Equations. Delay Differential Equations. State Dependent Delay.

Agradecimentos

À minha família e à minha namorada Cláudia pelo amparo, carinho e companheirismo em todos os momentos.

Aos professores Profª. Drª Katia Andreia Gonçalves de Azevedo e Prof. Dr. Sérgio Leandro Nascimento Neves pela pronta disponibilidade para fazerem parte da Comissão Examinadora.

Às minhas orientadoras, Profª. Drª. Andréa Cristina Prokopczyk Arita e Profª. Drª. Michelle Fernanda Pierri Hernández, por todo apoio, dedicação, ensinamentos, incentivos e paciência.

Ao Prof. Dr. Eduardo Alex Hernández Morales pela disponibilidade e colaboração que foram fundamentais para a realização deste trabalho.

Todos os docentes dos departamentos de matemática do IBILCE/UNESP e da FFCLRP/USP que foram essenciais para eu chegar até aqui.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

Enfim, agradeço a todos que contribuíram de alguma forma para a elaboração desta dissertação.

Sumário

Introdução **1**

1 Teoria de Semigrupos **7**

1.1 Semigrupos Fortememente Contínuos de Operadores Lineares Limitados 7

1.2 Semigrupos Compactos 15

1.3 Semigrupos Diferenciáveis 18

1.4 Semigrupos Analíticos 18

1.5 Operador Espectral de Riesz 36

1.6 Espaços Intermediários 44

1.6.1 Potências Fracionárias de Operadores Lineares Fechados 45

1.6.2 O Espaço Intermediário $D_A(\theta, \infty)$ 58

2 O Problema de Cauchy Abstrato **65**

2.1 O Problema de Valor Inicial Homogêneo 65

2.2 O Problema de Valor Inicial não Homogêneo 73

2.3 O Problema Semilinear 80

2.4 O Problema Semilinear para Semigrupos Analíticos 90

3 Existência e Unicidade de Soluções para Equações Diferenciais Abstratas do tipo Neutro com Retardo Dependendo do Estado **95**

3.1 Preliminares 98

3.2 Existência e Unicidade de soluções fracas e estritas 103

3.3 Exemplos 119

Introdução

Neste trabalho de dissertação de mestrado temos um interesse especial no estudo da existência e unicidade de soluções fracas e estritas para equações diferenciais abstratas do tipo neutro com retardo dependendo do estado da forma

$$\frac{d}{dt}(u(t) + G(t, u_{\sigma_1(t,u_t)})) = Au(t) + F(t, u_{\sigma_2(t,u_t)}), \quad t \in [0, a], \tag{5}$$

$$u_0 = \varphi \in \mathcal{B}_X = C([-p, 0]; X), \tag{6}$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico de operadores lineares limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ sobre um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$, $u_t : [-p, 0] \to X$ é a história do estado no tempo t ($u_t(\theta) = u(t + \theta)$ para $\theta \in [-p, 0]$) e $F(\cdot)$, $G(\cdot), \sigma_i(\cdot)$, $i = 1, 2$, são funções apropriadas.

A literatura sobre equações diferenciais abstratas do tipo neutro é extensa e considera diferentes problemas sobre existência e propriedades qualitativas de soluções. Em particualar, muitos dos modelos diferenciais do tipo neutro considerados podem ser representados na forma abstrata

$$\frac{d}{dt}(u(t) + f(t, u_t)) = Au(t) + g(t, u_t, (u_t)'), \quad t \in [0, a], \tag{7}$$

$$u_0 = \varphi \in \Omega \subset \mathcal{B}, \tag{8}$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador linear não limitado (usualmente, um operador quase setorial), $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach, $\mathcal{B}$ é o espaço das histórias, $\Omega \subset \mathcal{B}$ é aberto, $u_t : J \subset (-\infty, 0] \to X$ denota a história do estado no tempo t, $(u_t)'$ representa a derivada da função $t \mapsto u_t$ e $f : [0, a] \times \Omega \to X$, $g : [0, a] \times \Omega \times \mathcal{B} \to X$ são funções apropriadas.

Além disso, com relação a este tipo de equação, os trabalhos presentes na literatura matemática são bem variados. Para o caso em que $f \equiv 0$, dentre alguns trabalhos relevantes citamos os livros por Hale & Lunel [14], Wu [47] e Hino, Murakami & Naito [27], o clássico artigo por Travis & Webb

[42] e as referências nesses trabalhos. Para equações abstratas do tipo neutro citamos os trabalhos pioneiros de Hale [15] e de Hernández e seus colaboradores [22, 24, 26].

É importante ressaltar que o sistema (7)-(8) não é apenas um problema abstrato. Equações diferenciais abstratas do tipo neutro da forma (7)-(8) aparecem, por exemplo, em teorias desenvolvidas pelos pesquisadores Gurtin & Pipkin [13] e Nunziato [34] para a descrição da condução de calor em materiais com memória amortecida. Na teoria de condução de calor se supõe, de uma maneira geral, que a energia e o fluxo de calor dependem linearmente da temperatura $u(\cdot)$ e do gradiente $\nabla u(\cdot)$. Nessas condições, a clássica equação do calor descreve de maneira satisfatória a evolução da temperatura em diferentes tipos de materiais. No entanto, a situação é diferente em materiais com memória amortecida. Nesse tipo de material, a energia interna do material e o fluxo de calor são funcionais de $u(\cdot)$ o do gradiente de $u(\cdot)$, respectivamente. Um modelo amplamente aceito para descrever o fluxo de calor em materiais com memória amortecida é o sistema diferencial

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[c_0 u(t,x) + \int_{-\infty}^{t} K_1(t-s)u(s,x)ds\right] & \\ = \; & c_1 \triangle u(t,x) + \int_{-\infty}^{t} K_2(t-s)\triangle u(s,x)ds, \quad (9) \\ u(t,y) \; = \; & 0, \qquad t \geq 0, \; y \in \partial\Omega, \quad (10) \end{aligned}$$

onde $(t,x) \in (-\infty, a] \times \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado e com fronteira regular, $u(t,x)$ representa a temperatura em x no tempo t, $K_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1,2$, são funções apropriadas e c_0, c_1 são constantes positivas com significado físico. Note que se supomos que a solução seja conhecida em $(-\infty, 0]$, podemos transformar o sistema acima numa equação diferencial neutra do tipo (7)-(8).

Equações abstratas do tipo neutro da forma (7)-(8) também podem ser obtidas a partir de algumas equações diferenciais ordinárias do tipo neutro que surgem na teoria de dinâmica de populações, veja por exemplo [9, 10]. Se em [9, 10] considerarmos a tendência natural de grupos biológicos migrarem de regiões de alta densidade populacional à áreas de menor densidade, podemos obter equações neutras da forma

$$u'(t,\xi) = \Delta u(t,\xi) + g(t, u(t,\xi), u'(t-r,\xi)),$$

as quais podem ser representadas na forma abstrata (7)-(8).

O estudo de sistemas do tipo neutro da forma (7)-(8) é recente e envolve dificuldades técnicas importantes (especialmente nos casos em que o termo u_t' aparece explicitamente). Por exemplo, no caso em que A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de operadores lineares $(T(t))_{t\geq 0}$ é natural estudar o problema via técnicas de ponto fixo e introduzindo um conceito de solução fraca apropriado. Para esse tipo de problema a solução fraca é a solução da equação integral

$$\begin{aligned} u(t) &= T(t)[\varphi(0) + f(0,\varphi)] - f(s,u_s) - \int_0^t AT(t-s)f(s,u_s)ds \\ &+ \int_0^t T(t-s)g(s,u_s,u_s')ds. \end{aligned} \tag{11}$$

Note que para o estudo da existência de soluções fracas via teoria de ponto fixo é necessário trabalhar em espaços de funções continuamente diferenciáveis, o que é um problema difícil no contexto da teoria de semigrupos lineares. Além disso, segue da teoria de C_0-semigrupos que, em geral, a função $t \mapsto AT(t-s)$ não está bem definida. Mais ainda, é interessante notar que $t \mapsto AT(t-s)$ é integrável em $[0,t)$ na topologia de operadores se, e somente se, A é um operador limitado. Assim, a presença do termo $\int_0^t AT(t-s)f(s,u_s)ds$ na fórmula (11) cria uma grande dificuldade, a qual está relacionada com a integrabilidade da função $s \mapsto AT(t-s)f(s,u_s)$ em $[0,t]$.

Por outro lado, equações diferenciais funcionais com retardo dependendo do estado têm sido estudadas intensamente nas últimas décadas e a literatura relacionada a esse tipo de equações está concentrada em problemas que podem ser descritos na forma

$$u'(t) = Au(t) + F(t,u(t),u_{\sigma(t,u_t)}), \quad t \in [0,a], \tag{12}$$

$$u_0 = \varphi \in \Omega \subset \mathcal{B} = C([-r,0];X), \tag{13}$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de operadores lineares, $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach, $F(t,u(t),u_{\sigma(t,u_t)})$ é uma expressão envolvendo a condição inicial e o estado, $u_t : [-r,0] \to X$ denota a história de $u(\cdot)$ no tempo $t \in [0,a]$ e $\sigma(\cdot)$ é uma função definida em $[0,a] \times \mathcal{B}$ e com valores em $[0,a]$.

Equações diferenciais com retardo dependendo do estado aparecem em diversos problemas aplicados e existe uma extensa lista de artigos publicados em revistas altamente conceituadas.

A literatura sobre equações diferenciais ordinárias com valores em espaços de dimensão finita e com retardo dependendo do estado é extensa e bastante completa, veja [2, 7, 16, 17, 19] dentre outros . No entanto, são poucos os trabalhos (relevantes) sobre equações diferenciais parciais com retardo dependendo do estado e sobre equações diferenciais abstratas (equações onde A é não limitado) com retardo dependendo do estado. Dentre as dificuldades técnicas que têm limitado o desenvolvimento dessa parte da teoria está o fato que, em geral, a função $u \mapsto F(\cdot, u(\cdot), u_{\sigma(\cdot,u.)})$, onde $F(\cdot, u(\cdot), u_{\sigma(\cdot,u.)})(t) = F(t, u(t), u_{\sigma(t,u_t)})$, não é do tipo Lipschitz em espaços usuais, como o espaço de funções contínuas $C([-r, b]; X)$, o que implica, em muitos casos, que o problema (12)-(13) não é bem posto. Em relação a isto, observe que mesmo no caso em que as funções $F : [0, a] \times X \times \mathcal{B} \to X$ e $\sigma : [0, a] \times \mathcal{B} \to [0, a]$ sejam do tipo Lipschitz, uma estimativa usual do termo $\| F(t, v(t), v_{\sigma(t,v_t)}) - F(t, u(t), u_{\sigma(t,u_t)}) \|$ depende necessariamente de estimativas da forma

$$\sup_{\theta \in [-r,0]} \| u(\sigma(t, u_t) + \theta) - v(\sigma(t, v_t) + \theta) \|,$$

onde os termos $\sigma(t, u_t)$ e $\sigma(t, v_t)$ podem não ter nenhuma relação entre si.

No caso de equações diferenciais com retardo depedendo do estado onde A é limitado e X é um espaço de dimensão finita, o problema descrito acima pode ser contornado estudando o problema em espaços de funções continuamente diferenciáveis, veja Walther [46]. Porém, a mesma estratégia se torna difícil quando estudamos equações diferenciais parciais ou no caso em que A não é limitado. Essa dificuldade faz com que a literatura relacionada ao caso em que A é um operador não limitado seja, em grande parte, limitada a alguns modelos diferenciais onde $F(\cdot)$ é uma função muito “particular”.

Para o estudo sobre equações diferenciais abstratas com retardo depedendo do estado e $G = 0$ em (5)-(6) nós citamos [23, 28, 37, 38, 39]. Mais ainda, é importante citar os recentes artigos por Hernández, Pierri & Wu [25], Krisztin & Rezounenko [30] e Yunfei, Yuan & Pei [33], os quais apresentam importantes avanços no bom desenvolvimento deste tipo de problema.

Neste trabalho de dissertação nós damos continuidade ao estudo desenvolvido em [25] sobre existência e unicidade de soluções para equações diferenciais abstratas com retardo dependendo do estado. Em [25] os autores estudam o problema abstrato $u'(t) = Au(t) + F(t, u_{\sigma(t,u_t)})$, $u_0 = \varphi$. Como já foi observado, este tipo de problema não é bem posto no espaço usual $C([-p, 0]; X)$, pois aplicações como $u \to F(t, u_{\sigma(t,u_t)})$ não são Lipschitz de $C([-p, b]; X)$ em $C([0, b]; X)$. No entanto, quando as funções envolvidas são Lispchitz, estimativas da forma

$$\begin{aligned} & \| F(t, u_{\sigma(t,u_t)}) - F(t, v_{\sigma(t,v_t)}) \| \\ & \quad \leq \; L_F(1 + [v]_{C_{Lip}([-p,b];X)}[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_X;\mathbb{R})}) \| u - v \|_{C([-p,b];X)}, \end{aligned} \tag{14}$$

(onde L_F é a constante de Lipschitz de $F(\cdot)$) são possíveis. Usando estimativas deste tipo e o princípio de contração, em [25] os autores provam alguns resultados sobre existência e unicidade para o problema (5)-(6) com $G = 0$, bem como resultados para que este problema seja bem posto. Os resultados em [25] são provados trabalhando sobre espaços de funções Lipschitz e de classe C^1, o que é uma abordagem não trivial na teoria de equações diferenciais abstratas. No nosso estudo usamos algumas das ideias em [25] para abordar o problema diferencial abstrato do tipo neutro com retardo dependendo do estado (5)-(6), obtendo nossos resultados ao trabalhar em espaços de funções Lipschitz. Além desta dificuldade, tivemos que lidar com o fato que funções da forma $s \mapsto AT(t-s)G(s, u_{\sigma_1(s,u_s)})$ não são, em geral, integráveis se A é um operador não limitado.

É claro que, para o estudo descrito acima é necessário um conhecimento razoável da teoria de semigrupos de operadres lineares limitados, especialmente dos semigrupos fortemente contínuos e analíticos, bem como suas aplicações em equações diferenciais abstratas. Dessa forma, este trabalho foi iniciado com o estudo da teoria de semigrupos e posteriormente abordamos o estudo sobre a existência e unicidade de soluções para o problema abstrato (5)-(6).

Para expor o desenvolvimento do nosso estudo dividimos este trabalho em 3 capítulos. A seguir descrevemos, brevemente, esses capítulos.

No Capítulo 1 apresentamos parte do estudo realizado sobre a teoria de semigrupos. Nesse capítulo introduzimos o conceito de semigrupos de operadores lineares limitados em espaços de Banach e estudamos algumas generalidades dos semigrupos fortemente contínuos (C_0-semigrupos) e dos semigrupos analíticos. Em particular, estudamos o conceito e algumas propriedades dos C_0-semigrupos compactos, os quais são importantes em muitas aplicações e também para os nossos estudos sobre equações diferenciais neutras. Além disso, incluímos brevemente a definição e alguns resultados importantes dos C_0-semigrupos diferenciáveis e apresentamos uma classe de operadores lineares que são geradores infinitesimais de C_0-semigrupos. Dentre os principais resultados sobre os semigrupos analíticos, destacamos os conceitos de extensão de C_0-semigrupos a semigrupos analíticos e geração de semigrupos analíticos por operadores lineares setoriais. Além disso, considerando um operador A tal que $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico, definimos as potências fracionárias de A e estudamos algumas de suas propriedades. Finalizamos esse capítulo definindo e estudando os espaços $D_A(\alpha, \infty)$, $0 < \alpha < 1$, chamados de espaços intermediários entre $D(A)$ e X, onde A é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico.

No Capítulo 2 aplicamos, inicialmente, a teoria de C_0-semigrupos no estudo dos problemas de Cauchy abstrato: homogêneo $\frac{du(t)}{dt} = Au(t)$; não homogêneo $\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t)$ e semilinear

$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t, u(t))$. Especificamente, para o problema homogêneo, definimos o conceito de solução e vimos que A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ se, e somente se, o problema é bem posto num sentido apropriado. Para os problemas não homogêneo e semilinear, definimos os conceitos de soluções fracas e clássicas, vimos que toda solução clássica é uma solução fraca e estudamos um resultado em que impomos condições sobre f e sobre a condição inicial para que uma solução fraca seja uma solução clássica. Finalizamos o capítulo com um breve estudo sobre existência de solução clássica para o problema semilinear para o caso onde $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico e f é localmente Hölder-contínua num sentido apropriado.

No Capítulo 3 desenvolvemos o estudo sobre a existência e unicidade de solução para a equação diferencial abstrata do tipo neutro (5)-(6). Especificamente, iniciamos nosso estudo definindo os conceitos de soluções fraca e estrita para (5)-(6). Em seguida, supondo a existência de espaços de Banach $(W_1, \|\cdot\|_{W_1}) \hookrightarrow (Z, \|\cdot\|_Z) \hookrightarrow (W_2, \|\cdot\|_{W_2}) \hookrightarrow (X, \|\cdot\|)$ tais que $T(\cdot) \in L^1([0,a]; \mathcal{L}(W_2, Z))$ e $AT(\cdot) \in L^1([0,a]; \mathcal{L}(W_1, Z))$ e certas condições de Lipschitz sobre as funções F, G, φ e σ (onde, por simplicidade, supomos $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$), mostramos, através do princípio de contração de Banach, o nosso primeiro resultado de existência e unicidade de solução fraca para o problema (5)-(6) (Teorema 3.11). Assumindo agora que $0 \in \rho(A)$; que $(-A)^\beta : D(-A)^\beta \subset X \to X$ $(0 \leq \beta \leq 1)$ é a potência β-fracionária de A; que $X_\beta := D(-A)^\beta$ (munido com a norma do gráfico $\| x \|_\beta = \| (-A)^\beta x \|$) e certas condições de Lipschitz sobre as funções F, G, φ e σ em espaços da forma X_β, mostramos mais alguns resultados sobre existência de soluções fracas e estritas para (5)-(6). Outro resultado importante desse capítulo é a Proposição 3.16 em que consideramos o caso $\sigma_1(t, \psi) = t$, para toda $\psi \in \mathcal{B}_Z$. Supondo, resumidamente, que $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo compacto, $F \in C([0,a] \times U_{X_{\beta_2}}; X_{\beta_3})$, $\varphi \in C^{\gamma_1}([-p, 0]; X_{\beta_2})$ e $T(\cdot)(\varphi(0) + G(0, \varphi)) \in C^{\gamma_2}([0, b]; X_{\beta_2})$ para $1 \geq \beta_1 > \beta_2 \geq \beta_3 \geq 0$, $\gamma_1, \gamma_2 \in (0,1)$, e usando um resultado de ponto fixo para operadores condensantes, provamos nesta proposição a existência de uma solução fraca $u \in C^\alpha([-p, b]; X_{\beta_2})$, onde $\alpha = \min\{\gamma_1, \gamma_2, 1 + \beta_3 - \beta_2, \beta_2 - \beta_1\}$, para o problema (5)-(6). Neste capítulo apresentamos também alguns resultados de existência e unicidade de soluções Lipschitz para (5)-(6) e finalizamos apresentando alguns exemplos em que aplicamos nossos resultados de exitência e unicidade de soluções. É importante observar que os resultados desse capítulo são inéditos e serão submetidos para publicação brevemente.

Capítulo 1

Teoria de Semigrupos

1.1 Semigrupos Fortememente Contínuos de Operadores Lineares Limitados

Nesta seção estudamos algumas propriedades dos semigrupos fortemente contínuos. Esta classe de semigrupos nos fornece diversas aplicações às equações diferenciais parciais e será essencial para nosso estudo envolvendo equações diferenciais com retardo dependendo do estado. No que segue desta seção, $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach e $(\mathcal{L}(X), \|\cdot\|)$ denotará o espaço de operadores lineares contínuos de X em X munido da norma de operadores $\|\cdot\|$.

Definição 1.1. *Dizemos que $f \in C([a,b];X)$ se $f : [a,b] \to X$ é contínua em todo $t \in [a,b]$.*

Inicialmente, apresentamos, brevemente, o conceito de semigrupos de operadores lineares limitados e estudamos algumas generalidades dos semigrupos uniformemente contínuos.

Definição 1.2. *Uma família $(T(t))_{t\geq 0}$ de operadores lineares limitados em X é chamada semigrupo de operadores lineares em X se:*

(i) *$T(0) = I$, onde $I : X \to X$ é o operador identidade;*

(ii) *$T(t+s) = T(t)T(s)$ para todos $t, s \geq 0$ (propriedade de semigrupo).*

Definição 1.3. *Dado o conjunto*

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \ \textit{existe} \right\},$$

o operador $A : D(A) \subset X \to X$ *definido por*

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+T(t)x}{dt}\Big|_{t=0}, \text{ para } x \in D(A),$$

é chamado de gerador infinitesimal do semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$.

Definição 1.4. *Um semigrupo de operadores lineares limitados* $(T(t))_{t\geq 0}$ *é uniformemente contínuo se* $\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - I\| = 0$.

Da definição de semigrupo uniformemente contínuo segue claramente que a aplicação $t \mapsto T(t)$ é contínua pela direita em $t = 0$. O próximo Lema nos mostra que esta propriedade é bem mais geral.

Lema 1.5. *Se* $(T(t))_{t\geq 0}$ *é um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados, então para todo* $t \in (0, \infty)$, $\lim_{s\to t} \|T(s) - T(t)\| = 0$. *Em outras palavras, a aplicação* $t \mapsto T(t)$ *é contínua de* $(0, \infty)$ *em* $\mathcal{L}(X)$.

Demonstração: Para mais detalhes veja [Silva [40], 2015, pág. 6].

Fazendo uso do lema acima, podemos mostrar que todo operador linear limitado A em X é o gerador infinitesimal de um único semigrupo uniformemente contínuo.

Teorema 1.6. *[Pazy [35], 1983, Teo. 1.2, pág. 2] Um operador linear* $A : D(A) \subset X \to X$ *é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se,* A *é um operador linear limitado em* X.

O próximo teorema nos garante a unicidade desse semigrupo.

Teorema 1.7. *[Pazy [35], 1983, Teo. 1.3, pág. 3] Sejam* $(T(t))_{t\geq 0}$ *e* $(S(t))_{t\geq 0}$ *semigrupos uniformemente contínuos de operadores lineares limitados. Se*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{T(h) - I}{h} = A = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h) - I}{h},$$

então $T(t) = S(t)$ *para todo* $t \geq 0$.

O próximo Corolário inclui algumas propriedades importantes dos semigrupos uniformemente contínuos.

Corolário 1.8. *[Pazy [35], 1983, Teo. 1.4, pág. 3] Seja* $(T(t))_{t\geq 0}$ *um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados. Então, valem as seguintes propriedades.*

(a) *Existe um único operador linear limitado A tal que $T(t) = e^{tA}$.*

(b) *O operador A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t\geq 0}$.*

(c) *A aplicação $t \mapsto T(t)$ é diferenciável em norma e $\dfrac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A$, para todo $t \geq 0$.*

(d) *Existe uma constante $\omega \geq 0$ tal que $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$.*

Estudamos agora os semigrupos fortemente contínuos, principal interesse desta seção.

Definição 1.9. *Um semigrupo de operadores lineares limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ em X é um semigrupo fortememente contínuo se para todo $x \in X$, $\lim\limits_{t\to 0^+} T(t)x = x$.*

Observação 1.10. Um semigrupo fortememente contínuo de operadores lineares limitados em X é chamado semigrupo de classe C_0 ou, simplesmente, C_0-semigrupo.

O próximo Teorema nos fornece uma limitação exponencial para um C_0-semigrupo.

Teorema 1.11. *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo. Então, existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ para todo $t \geq 0$.*

Demonstração. Inicialmente vamos mostrar que existe uma constante $\eta > 0$ tal que $\|T(t)\|$ é uniformemente limitado no intervalo $[0, \eta]$. De fato, se isto fosse falso, existiria uma sequência (t_n), com $t_n \geq 0$, satisfazendo $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$ e $\|T(t_n)\| \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, teríamos $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T(t_n)\| = \infty$. Logo, pelo Príncipio da Limitação Uniforme, existiria algum $x \in X$ tal que $\|T(t_n)x\|$ seria ilimitada. Isto contraria a Definição 1.9. Assim, existe uma constante M tal que $\|T(t)\| \leq M$ para $0 \leq t \leq \eta$. Como $\|T(0)\| = 1$ temos ainda que $M \geq 1$.

Agora, seja $\omega = \eta^{-1}\log(M) \geq 0$. Dado $t \geq \eta$ temos que $t = n\eta + \delta$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq \delta < \eta$. Logo, pela propriedade de semigrupo, temos

$$\|T(t)\| = \|T(n\eta + \delta)\| = \|T(\delta)T^n(\eta)\| \leq M.M^n \leq M.M^{\frac{t}{\eta}} = Me^{\omega t},$$

o que conclui nossa prova. ∎

Definição 1.12. *Um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ tal que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$, é chamado um C_0-semigrupo de contração se $\omega = 0$ e $M = 1$.*

Como consequência do Teorema 1.11, temos o seguinte resultado.

Corolário 1.13. *Se* $(T(t))_{t\geq 0}$ *é um* C_0*-semigrupo, então a função* $t \mapsto T(t)x$ *é contínua de* $(0, \infty)$ *em* X *para todo* $x \in X$.

Demonstração. Pelo Teorema 1.11 sabemos que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ para todo $t \geq 0$. Logo, para $t \in (0, \infty)$, $x \in X$ e $h \geq 0$, segue que

$$\|T(t+h)x - T(t)x\| = \|T(t)[T(h)x - x]\| \leq Me^{\omega t}\|T(h)x - x\|. \tag{1.1}$$

Por outro lado, para $0 \leq h \leq t$, temos que

$$\begin{aligned} \|T(t)x - T(t-h)x\| &= \|T(t-h)[T(h)x - x]\| \leq Me^{\omega(t-h)}\|T(h)x - x\| \\ &\leq Me^{\omega t}\|T(h)x - x\|. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Dessa forma, quando $h \to 0$, (1.1) e (1.2) convergem a zero, garantindo a continuidade da aplicação $t \mapsto T(t)x$ em $t > 0$ e para todo $x \in X$. ■

O próximo Lema será muito importante e frequentemente usado nos nossos estudos.

Lema 1.14. *Sejam* $a > 0$, $R : [0, a) \to \mathcal{L}(X)$, $f \in C([0, a); X)$ *e suponha que* $R(\cdot)x \in C([0, a); X)$ *para todo* $x \in X$. *Então,*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} R(s)f(s)ds = R(t)f(t),\ t \in [0, a).$$

Demonstração. Sejam $t \in [0, a)$ e $\delta_1 > 0$ tal que $t + \delta_1 < a$. Como a função $s \mapsto R(s)x$ é contínua em $[0, t+\delta_1]$ para todo $x \in X$, temos que $\{R(s)x : s \in [0, t+\delta_1]\}$ é limitado para todo $x \in X$. Logo, pelo Princípio da Limitação Uniforme, existe $M \geq 0$ tal que $\|R(s)\| \leq M$ para todo $s \in [0, t + \delta_1]$. Além disso, para $\varepsilon > 0$, fixemos δ com $0 < \delta < \delta_1$ tal que quando $|t - s| < \delta$, temos

$$\|f(s) - f(t)\| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

e

$$\|R(s)f(t) - R(t)f(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então, para $0 < h < \delta$ obtemos que

$$\begin{aligned} \left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} R(s)f(s)ds - R(t)f(t)\right\| &= \left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} [R(s)(f(s) - f(t)) + R(s)f(t) - R(t)f(t)]ds\right\| \\ &\leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|R(s)\|\|f(s) - f(t)\| + \|R(s)f(t) - R(t)f(t)\|ds \\ &< M\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue a conclusão do lema. ■

Teorema 1.15. *Sejam $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Então, valem as seguintes propriedades:*

(a) *Para todo $x \in X$ e $t \geq 0$, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\, ds = T(t)x$.*

(b) *Para todo $x \in X$ e $0 \leq \tau < t$, $\displaystyle\int_\tau^t T(s)x\, ds \in D(A)$ e $\displaystyle A\left(\int_\tau^t T(s)x\, ds\right) = T(t)x - T(\tau)x$.*

(c) *Se $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ e $\displaystyle\frac{dT(t)}{dt}x = AT(t)x = T(t)Ax$.*

(d) *Para todo $x \in D(A)$ e $0 \leq s \leq t$, $\displaystyle T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax\, d\tau = \int_s^t AT(\tau)x\, d\tau$.*

Demonstração. O item **(a)** segue da continuidade de $t \mapsto T(t)x$ e do Lema 1.14. Provemos o item **(b)**. Se $x \in X$, $0 \leq \tau < t$ e $h > 0$, então

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}\left(\int_\tau^t T(s)x\, ds\right) &= \frac{1}{h}\int_\tau^t [T(s+h)x - T(s)x]ds \\
&= \frac{1}{h}\int_{\tau+h}^{t+h} T(s)x\, ds - \frac{1}{h}\int_\tau^t T(s)x\, ds \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\, ds - \frac{1}{h}\int_\tau^{\tau+h} T(s)x\, ds.
\end{aligned}$$

Fazendo $h \to 0^+$ em ambos os lados da igualdade acima, obtemos que $\displaystyle\int_\tau^t T(s)x\, ds \in D(A)$ e que $\displaystyle A\left(\int_\tau^t T(s)x\, ds\right) = T(t)x - T(\tau)x$.

Agora mostraremos **(c)**. Se $x \in D(A)$ e $h > 0$, então

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}T(t)x &= \frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h} \\
&= \frac{T(t)T(h)x - T(t)x}{h} \\
&= T(t)\frac{T(h)x - x}{h}.
\end{aligned}$$

Logo, como $x \in D(A)$ e $T(t)$ é contínuo em X, fazendo $h \to 0^+$ em ambos os lados da igualdade acima, concluímos que $T(t)x \in D(A)$ e $AT(t)x = T(t)Ax$. Disso segue que

$$\frac{d^+T(t)}{dt}x = \lim_{h\to 0^+}\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = AT(t)x = T(t)Ax.$$

Por outro lado, para $0 < h \leq t$ vemos que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax \right\| &= \left\| T(t-h) \left(\frac{T(h)x - x}{h} - T(h)Ax \right) \right\| \\ &\leq \|T(t-h)\| \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax + Ax - T(h)Ax \right\| \\ &\leq Me^{\omega(t-h)} \left(\left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| + \|Ax - T(h)Ax\| \right) \\ &\leq Me^{\omega t} \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| + Me^{\omega t} \|Ax - T(h)Ax\|. \end{aligned}$$

Dessa forma, fazendo $h \to 0$ em ambos os lados da desigualdade acima, concluímos que $\dfrac{d^{-}T(t)}{dt}x = T(t)Ax$. Portanto, $\dfrac{dT(t)}{dt}x = AT(t)x = T(t)Ax$.

Finalmente, provemos o item **(d)**. Por **(c)**, temos que

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t \frac{dT(\tau)}{d\tau}x \, d\tau = \int_s^t AT(t)x d\tau = \int_s^t T(t)Ax d\tau.$$

Assim, a prova está completa. ∎

Corolário 1.16. *Se $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, então o domínio de A é denso em X e A é um operador linear fechado.*

Demonstração. Dados $x \in X$ e $t > 0$, defina

$$x_t = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)x \, ds.$$

Pelo item **(b)** do Teorema 1.15, $x_t \in D(A)$ para todo $t > 0$. Além disso, pelo item **(a)** do Teorema 1.15, $x_t \to x$ quando $t \to 0^+$, o que implica que $x \in \overline{D(A)}$. Isto implica que $\overline{D(A)} = X$.

Mostremos agora que A é um operador linar fechado. Por sua própria definição segue que A é um operador linear. Então, resta mostrarmos que A é um operador fechado. Sejam $t > 0$, $x, y \in X$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ com $x_n \to x$ e $Ax_n \to y$ quando $n \to \infty$. Do item **(d)** do Teorema 1.15, para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos que

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n \, ds. \tag{1.3}$$

Agora, dado $\varepsilon > 0$, tome $n_0 > 0$ tal que $\|Ax_n - y\| < \varepsilon$ para $n \geq n_0$. Logo, se $n \geq n_0$ e $0 \leq s \leq t$, temos que

$$\begin{aligned} \|T(s)Ax_n - T(s)y\| &= \|T(s)(Ax_n - y)\| \\ &\leq \|T(s)\| \|Ax_n - y\| \\ &\leq Me^{\omega t}\varepsilon, \end{aligned}$$

de onde concluímos que $T(s)Ax_n$ converge para $T(s)y$, uniformemente em $[0,t]$, quando $n \to \infty$. Logo, fazendo $n \to \infty$ em (1.3), concluímos que

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y\ ds.$$

Isto, juntamente com o item **(a)** do Teorema 1.15, implica que

$$\lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)y\ ds = y.$$

Portanto, $x \in D(A)$ e $Ax = y$, o que mostra que A é um operador fechado. ■

Vimos que se A é um operador linear limitado, então A é o gerador infinitesimal de um único semigrupo uniformemente contínuo. Veremos a seguir que vale um resultado parecido para C_0-semigrupos.

Teorema 1.17. *Sejam $(T(t))_{t\geq 0}$ e $(S(t))_{t\geq 0}$ C_0-semigrupos com geradores infinitesimais A e B, respectivamente. Se $A = B$, então $T(t) = S(t)$ para $t \geq 0$.*

Demonstração. Seja $x \in D(A) = D(B)$ e seja $t \geq 0$. Pelo item **(c)** do Teorema 1.15, temos que as aplicações $s \mapsto T(t-s)x$ e $s \mapsto S(s)x$ são diferenciáveis. Logo, aplicação $s \mapsto T(t-s)S(s)x$ também é diferenciável e

$$\begin{aligned}
& h^{-1}[T(t-(s+h))S(s+h)x - T(t-s)S(s)x] \\
= \ & h^{-1}[T(t-(s+h))S(s+h)x - T(t-(s+h))S(s)x + T(t-(s+h))S(s)x - T(t-s)S(s)x] \\
= \ & T(t-(s+h))[h^{-1}(S(s+h)x - S(s)x)] + [h^{-1}(T(t-(s+h)) - T(t-s))]S(s)x \\
= \ & T(t-(s+h))[h^{-1}(S(s+h)x - S(s)x)] + T(t-(s+h))[h^{-1}(I - T(h))]S(s)x.
\end{aligned}$$

Desse modo, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}T(t-s)S(s)x &= \lim_{h\to 0} \frac{T(t-(s+h))S(s+h)x - T(t-s)S(s)x}{h} \\
&= T(t-s)BS(s)x - T(t-s)AS(s)x = 0,
\end{aligned}$$

para todo $s \in [0,t]$, ou seja, a aplicação $s \mapsto T(t-s)S(s)x$ é constante para $s \in [0,t]$. Em particular, tomando $s = 0$ e $s = t$ obtemos que $T(t)x = S(t)x$. Agora, dado $x \in X$, como $D(A)$ é denso em X, segue que existe $(x_n) \subset D(A)$ tal que $x_n \to x$, quando $n \to \infty$. Logo, usando que $T(t)$ e $S(t)$ são contínuas e $T(t)x_n = S(t)x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ concluímos que $T(t)x = S(t)x$. Como $x \in X$ é arbitrário, isto completa a prova. ■

Na sequência, apresentamos, sem demonstração, o Teorema de Hille-Yosida. Este teorema caracteriza quando um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. Para apresentar este resultado, primeiramente introduzimos algumas definições.

Definição 1.18. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear.*

(i) *O conjunto resolvente de A é definido por*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \textit{existe e é contínuo sobre } X\}.$$

(ii) *O operador resolvente de A é o operador $R : \rho(A) \to \mathcal{L}(X)$ definido por $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$.*

Observação 1.19. *Sabe-se, da teoria de operadores lineares, que $\rho(A)$ é um conjunto aberto e que $R(\lambda : A)$ é analítico sobre $\rho(A)$.*

O próximo teorema é o principal resultado desta seção.

Teorema 1.20. (Hille-Yosida) *[Pazy [35], 1983, Teo. 3.1, pág. 8] Um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$, se, e somente se,*

(a) *A é fechado e $\overline{D(A)} = X$;*

(b) *$\rho(A) \supset (\omega, \infty)$ e $\|R(\lambda : A)^n\| \leq \dfrac{M}{(\lambda - \omega)^n}$, para todo $\lambda > \omega$ e todo $n \geq 1$.*

Do teorema anterior segue o seguinte resultado imediato.

Corolário 1.21. *Se $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$, então $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda) > \omega\}$ e*

$$\|R(\lambda : A)^n\| \leq \frac{M}{(Re(\lambda) - \omega)^n},$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ com $Re(\lambda) > \omega$ e todo $n \geq 1$.

Nas próximas seções apresentamos algumas classes especiais de semigrupos, os quais serão utilizados em nossos resultados sobre existência e unicidade de soluções para equações abstratas com retardo dependendo do estado no Capítulo 3.

1.2 Semigrupos Compactos

Nesta seção vamos ver o conceito e algumas propriedades de C_0-semigrupos compactos.

Definição 1.22. *Um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é compacto para $t > t_0$, se $T(t)$ é um operador compacto para todo $t > t_0$. O C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é chamado compacto se é compacto para $t > 0$.*

Observação 1.23. Se um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é compacto para $t \geq 0$, então a identidade é compacta e, portanto, X tem dimensão finita. Reciprocamente, se X é um espaço de dimensão finita, então todo C_0-semigrupo em X é compacto. Observe também que se $T(t_0)$ é compacto para algum $t_0 > 0$, então $T(t)$ é compacto para $t \geq t_0$, pois $T(t) = T(t_0)T(t-t_0)$ e $T(t-t_0)$ é um operador limitado.

Teorema 1.24. *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo. Se $(T(t))_{t\geq 0}$ é compacto para $t > t_0$, então a função $t \mapsto T(t)$ definida de (t_0, ∞) em $\mathcal{L}(X)$ é contínua.*

Demonstração. Sejam $\varepsilon > 0$ e $T \in (0, \infty)$. Para $0 \leq s \leq T$, temos que $\|T(s)\| \leq Me^{\omega T} = M_T$. Por outro lado, dado $t > t_0$, o conjunto $U_t = \{T(t)x : \|x\| \leq 1\}$ é relativamente compacto e, portanto, para $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{4(M_T+1)} > 0$, existem pontos $x_1, x_2, ..., x_N$ em X tais que a reunião das bolas abertas $B(T(t)x_j, \varepsilon_1)$, $1 \leq j \leq N$, cobrem U_t. Agora, como $(T(t))_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo, existe $0 < \delta \leq 1$ tal que

$$\|T(t+h)x_j - T(t)x_j\| < \frac{\varepsilon}{4},$$

para todo $j = 1, 2, ..., N$, quando $0 \leq h \leq \delta$. Além disso, se $x \in X$ é tal que $\|x\| \leq 1$, então existe $j(x) \in \{1, 2, ..., N\}$ tal que $T(t)x \in B(T(t)x_{j(x)}, \varepsilon_1)$, o que implica que

$$\|T(t)x - T(t)x_{j(x)}\| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{4(M_T+1)}.$$

Logo, para $0 \leq h \leq \delta$ e $x \in X$ com $\|x\| \leq 1$, temos que

$$\begin{aligned}
\|T(t+h)x - T(t)x\| &= \|T(t+h)x - T(t+h)x_j + T(t+h)x_j - T(t)x_j + T(t)x_j - T(t)x\| \\
&\leq \|T(t+h)x - T(t+h)x_j\| + \|T(t+h)x_j - T(t)x_j\| + \|T(t)x_j - T(t)x\| \\
&\leq \|T(h)\|\|T(t)x - T(t)x_j\| + \|T(t+h)x_j - T(t)x_j\| + \|T(t)x_j - T(t)x\| \\
&\leq M_T \frac{\varepsilon}{4(M_T+1)} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4(M_T+1)} = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\|T(t+h)-T(t)\| \;=\; \sup_{\|x\|=1}\|T(t+h)x-T(t)x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

para $t > t_0$ e $0 \leq h \leq \delta$. Isto prova a continuidade pela direita de $t \mapsto T(t)$ de (t_0, ∞) em $\mathcal{L}(X)$. A continuidade pela esquerda segue de maneira similar. Assim, a demonstração está completa. ■

O seguinte resultado carateriza quando um C_0-semigrupo é compacto.

Teorema 1.25. *Sejam $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Então, $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo compacto se, e somente se, $t \mapsto T(t)$ é contínua para todo $t > 0$ na topologia uniforme de operadores e $R(\lambda : A)$ é compacto para todo $\lambda \in \rho(A)$.*

Demonstração. Como $(T(t))_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo sabemos que existem $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$ tais que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$. Logo, se $(T(t))_{t\geq 0}$ é compacto para $t > 0$, usando o Teorema 1.24, temos que $t \mapsto T(t)$ é contínua para todo $t > 0$ na topologia uniforme dos operadores. Assim, só resta provarmos a compacidade de $R(\lambda : A)$, para todo $\lambda \in \rho(A)$. Da demonstração do Teorema 1.20 pode-se verificar que para $\lambda \in \mathbb{C}$, com $Re(\lambda) > \omega$,

$$R(\lambda : A) = \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)ds = \lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-\lambda s}T(s)ds,$$

de onde concluimos que $R(\lambda : A)$ é compacto, pois cada operador $\displaystyle\int_0^n e^{-\lambda s}T(s)ds$, $n \in \mathbb{N}$, é o limite de operadores compactos e, portanto, compacto (veja o Teorema 3.29).

Por outro lado, para $\lambda, \mu \in \rho(A)$ temos que

$$\begin{aligned} R(\lambda : A) - R(\mu : A) &= R(\mu : A)(\mu I - A)R(\lambda : A) - R(\mu : A)(\lambda I - A)R(\lambda : A) \\ &= R(\mu : A)[(\mu I - A) - (\lambda I - A)]R(\lambda : A) \\ &= R(\mu : A)[(\mu - \lambda)I]R(\lambda : A) \\ &= (\mu - \lambda)R(\mu : A)R(\lambda : A). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Logo, dado $\mu \in \rho(A)$ tal que $Re(\mu) > \omega$, obtemos de (1.4) que $R(\lambda : A) = R(\mu : A)[I + (\mu - \lambda)R(\lambda : A)]$. Finalmente, usando o fato de que $R(\lambda : A)$ é limitado, concluímos que $R(\lambda : A)$ é um operador compacto para todo $\lambda \in \rho(A)$.

Suponhamos agora que a função $t \mapsto T(t)$ é contínua para todo $t > 0$, na topologia uniforme de operadores e que $R(\lambda : A)$ é compacto para todo $\lambda \in \rho(A)$. Então, para $\lambda \in (\omega, \infty)$ e $t > 0$ temos que $R(\lambda : A) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) ds$ e

$$\lambda R(\lambda : A)T(t) - T(t) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s}(T(s+t) - T(t))ds.$$

Logo, para $\delta > 0$ temos que

$$\begin{aligned}
&\|\lambda R(\lambda : A)T(t) - T(t)\| \\
&\quad = \left\| \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s}(T(s+t) - T(t))ds \right\| \\
&\quad \leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} \|T(s+t) - T(t)\| ds \\
&\quad \leq \int_0^\delta \lambda e^{-\lambda s} \|T(s+t) - T(t)\| ds + \int_\delta^\infty \lambda e^{-\lambda s} \|T(s+t) - T(t)\| ds \\
&\quad \leq \int_0^\delta \lambda e^{-\lambda s} ds \sup_{0 \leq s \leq \delta} \|T(s+t) - T(t)\| + \int_\delta^\infty \lambda e^{-\lambda s} (\|T(s+t)\| + \|T(t)\|) ds \\
&\quad \leq (1 - e^{-\lambda\delta}) \sup_{0 \leq s \leq \delta} \|T(s+t) - T(t)\| + \int_\delta^\infty \lambda e^{-\lambda s} (M e^{\omega(s+t)} + M e^{\omega t}) ds \\
&\quad \leq \sup_{0 \leq s \leq \delta} \|T(s+t) - T(t)\| + \int_\delta^\infty 2\lambda M e^{\omega t} e^{(\omega - \lambda)s} ds \\
&\quad \leq \sup_{0 \leq s \leq \delta} \|T(s+t) - T(t)\| + \frac{2\lambda M e^{(\omega-\lambda)\delta} e^{\omega t}}{\lambda - \omega},
\end{aligned}$$

e assim,

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|\lambda R(\lambda : A)T(t) - T(t)\| \leq \sup_{0 \leq s \leq \delta} \|T(s+t) - T(t)\|.$$

Como $\delta > 0$ é arbitrário e $s \mapsto T(s)$ é contínua em $s > 0$, concluímos que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|\lambda R(\lambda : A)T(t) - T(t)\| = 0,$$

o que prova que $T(t)$ é compacto para $t > 0$, pois $T(t)$ é o limite de operadores compactos (veja Teorema 3.29). Isto finaliza a prova. ∎

Os próximos dois Corolários são provados usando as mesmas ideias do Teorema 1.25. Dessa forma, omitimos suas demonstrações.

Corolário 1.26. *Sejam $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Se $t \mapsto T(t)$ é contínua para $t > t_0$ na topologia uniforme de operadores e $R(\lambda : A)$ é compacto para algum $\lambda \in \rho(A)$, então $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo compacto para $t > t_0$.*

Corolário 1.27. *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um semigrupo uniformemente contínuo em X e A seu gerador infinitesimal. O semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é compacto se, e somente se, $R(\lambda : A)$ é compacto para todo $\lambda \in \rho(A)$.*

1.3 Semigrupos Diferenciáveis

Nesta seção introduzimos o conceito de semigrupo diferenciável e apenas enunciamos alguns resultados que serão importante no estudo de semigrupos analíticos. Para mais detalhes veja [Pazy [35], Seção 2.4, pág. 51-60].

Definição 1.28. *Um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é diferenciável para $t > t_0$ se para cada $x \in X$, $t \mapsto T(t)x$ é diferenciável em (t_0, ∞). O C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é chamado diferenciável se é diferenciável para $t > 0$.*

Teorema 1.29. *[Pazy [35], 1983, Lema 4.2, pág. 52]. Sejam $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo diferenciável para $t > t_0$ e A seu gerador infinitesimal. Então, valem as seguintes propriedades.*

(a) *Para $t > nt_0,\ n \in \mathbb{N}$, temos que $T(t)(X) \subset D(A^n)$, $T^{(n)}(t) = A^n T(t)$ e $T^{(n)}(t)$ é um operador linear limitado.*

(b) *Para $t > nt_0,\ n \in \mathbb{N}$, a função $t \mapsto T^{(n-1)}(t)$ é contínua na topologia uniforme de operadores.*

Corolário 1.30. *Sejam $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo diferenciável para $t > t_0$ e A seu gerador infinitesimal. Se $t > (n+1)t_0,\ n \in \mathbb{N}$, então $T(t)$ é n-vezes diferenciável na topologia uniforme de operadores.*

Corolário 1.31. *Sejam $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo diferenciável e A seu gerador infinitesimal. Então, valem as seguintes propriedades:*

(i) *Para todo $t > 0,\ T(t)$ é de classe C^∞ na topologia uniforme de operadores.*

(ii) *Para $t > 0$ e $n \geq 1$, $T^{(n)}(t) = \left(AT\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(T'\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$.*

1.4 Semigrupos Analíticos

Outra classe de semigrupos que será essencial para o nosso estudo sobre equações diferenciais com retardo dependendo do estado é a classe dos semigrupos analíticos.

Inicialmente, observamos que até este momento lidamos com semigrupos cujo os parâmetros pertenciam ao eixo real não negativo. Agora, vamos considerar a possibilidade de estender o domínio dos parâmetros para uma região no plano complexo que contenha o eixo real não negativo.

Sejam X um espaço de Banach e $0 < \alpha \leq \pi$ e considere o seguinte setor do plano complexo

$$\triangle(\alpha) = \{z \in \mathbb{C};\ z \neq 0,\ |arg(z)| < \alpha\}.$$

Definição 1.32. *Uma família de operadores lineares limitados* $(T(z))_{z\in\triangle(\alpha)\cup\{0\}}$, $0 < \alpha \leq \pi/2$, *é um semigrupo analítico se satistaz as seguintes propriedades.*

(i) $T(0) = I$;

(ii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$, *para todo* $z_1, z_2 \in \triangle(\alpha)$;

(iii) $\lim_{z\to 0} T(z)x = x$ *para todo* $x \in X$, $z \in \triangle(\alpha)$;

(iv) $z \mapsto T(z)$ *é analítica em* $\triangle(\alpha)$.

Note que a restrição de um semigrupo analítico ao intervalo $[0, +\infty)$ é um C_0-semigrupo diferenciável. A questão agora é quando vale a recíproca, isto é, quando um C_0-semigrupo pode ser estendido a um semigrupo analítico em algum setor do plano complexo.

Para responder esta pergunta, começamos apresentando um resultado de limitação para um semigrupo analítico, cuja demonstração é similar à do Teorema 1.11.

Proposição 1.33. *Se* $(T(z))_{z\in\triangle(\alpha)\cup\{0\}}$ *é um semigrupo analítico em* $\triangle(\alpha)$, *com* $0 < \alpha \leq \pi/2$, *então existem constantes* $M \geq 1$ *e* $\omega \geq 0$ *tais que* $\|T(z)\| \leq Me^{\omega Re(z)}$, $\forall z \in \triangle(\alpha) \cup \{0\}$.

Utilizando a Proposição acima podemos provar o seguinte resultado.

Teorema 1.34. *Sejam* $(T(t))_{t\geq 0}$ *um* C_0*-semigrupo e* A *seu gerador infinitesimal. Então,* $(T(t))_{t\geq 0}$ *admite uma extensão a um semigrupo analítico num setor* $\triangle(\alpha)$, *para algum* $0 < \alpha \leq \pi/2$, *se, e somente se,* $(T(t))_{t\geq 0}$ *é diferenciável e existe* $N \geq 1$ *tal que* $\|tAT(t)\| \leq N$, $0 < t \leq 1$.

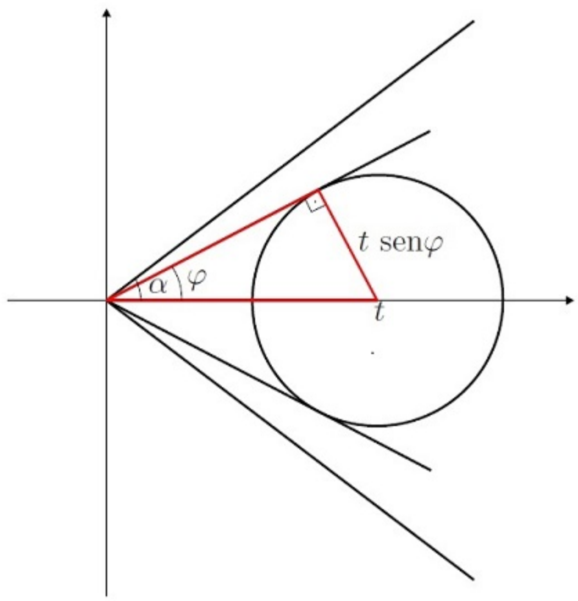
Demonstração. Suponhamos que $(T(t))_{t\geq 0}$ admita uma extensão a um semigrupo analítico $(T(z))_{z\in\triangle(\alpha)\cup\{0\}}$, para algum $0 < \alpha \leq \pi/2$, e seja A seu gerador infinitesimal.

Então, dado $t > 0$ temos que o círculo de centro em t e raio $r = t\ \sin(\phi)$, $0 < \phi < \alpha \leq \pi/2$, está contido na região $\triangle(\alpha)$ em que $(T(z))_{z\in\triangle(\alpha)\cup\{0\}}$ é analítico, como mostra a Figura 1.1.

Portanto, pela Fórmula integral de Calchy, temos

$$AT(t) = \frac{d}{dt}T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-t|=t\sin(\phi)} \frac{T(z)}{(z-t)^2}dz. \tag{1.5}$$

Figura 1.1: Região onde o operador é analítico.



Fonte: Andrade [3] (2014, pág. 23)

Por outro lado, pela Proposição 1.33, existem constantes $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$ tais que $\|T(z)\| \leq Me^{\omega Re(z)}$, para todo $z \in \triangle(\alpha) \cup \{0\}$. Assim, se $0 < t \leq 1$, de (1.5), segue que

$$\begin{aligned}
\|AT(t)\| &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-t|=t\sin(\phi)} \frac{T(z)}{(z-t)^2} dz \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{T(t+t\sin(\phi)e^{i\theta})}{(t\sin(\phi)e^{i\theta})^2} t\sin(\phi) i e^{i\theta} d\theta \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{T(t+t\sin(\phi)e^{i\theta})}{t\sin(\phi)e^{i\theta}} d\theta \right\| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\|T(t+t\sin(\phi)e^{i\theta})\|}{t\sin(\phi)} d\theta \\
&\leq \frac{M}{2\pi t\sin(\phi)} \int_0^{2\pi} e^{wt(1+\sin(\phi)\cos(\theta))} d\theta \\
&\leq \frac{Me^{2\omega t}}{2\pi t\sin(\phi)} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{Me^{2\omega t}}{t\sin(\phi)},
\end{aligned}$$

ou seja, $\|tAT(t)\| \leq \frac{Me^{2\omega t}}{\sin(\phi)}$, para todo $0 < t \leq 1$. Logo, tomando $N = \dfrac{Me^{2\omega}}{\sin(\phi)} \geq 1$ temos que $\|tAT(t)\| \leq N$, para todo $0 < t \leq 1$.

Agora, suponhamos que $(T(t))_{t\geq 0}$ seja diferenciável e exista $N \geq 1$ tal que $\|tAT(t)\| \leq N$ para $0 < t \leq 1$. Assim, pelos Teorema 1.29, Corolário 1.30 e 1.31, temos que $t \mapsto T(t)$ é de classe C^∞, $T^{(n)}(t) = A^n T(t) \in \mathcal{L}(X),\ t > 0$, e $T^{(n)}(t) = [AT(t/n)]^n = [T'(t/n)]^n$, para todo $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$. Mais ainda, para $0 < t \leq n$, segue que $\|t/nAT(t/n)\| \leq N$. Então, $\|AT(t/n)\| \leq Nn/t$ e

$$\|A^n T(t)\| = \|T^{(n)}(t)\| = \|[AT(t/n)]^n\| \leq \|AT(t/n)\|^n \leq (Nn/t)^n.$$

Desta forma, para $n \in \mathbb{N}$ e $0 < t \leq n$,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{(z-t)^n}{n!} A^n T(t) \right\| &\leq \frac{|z-t|^n}{n!} N^n \frac{n^n}{t^n} \\ &= \frac{|z-t|^n}{t^n} N^n \frac{n^n}{n!} \\ &\leq \frac{|z-t|^n}{t^n} N^n e^n \\ &= \left(\frac{|z-t|}{t/Ne} \right)^n . \end{aligned} \tag{1.6}$$

Logo, se $|z-t| < t/Ne$, temos que $\dfrac{|z-t|}{t/Ne} < 1$ e, consequentemente, a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z-t|}{t/Ne} \right)^n$ converge. Assim, dados $t > 0$ e $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z-t| < t/Ne$, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ o primeiro natural tal que $t \leq n_0$. Portanto, para $0 < t \leq n$ e todo $n \geq n_0$, obtemos que

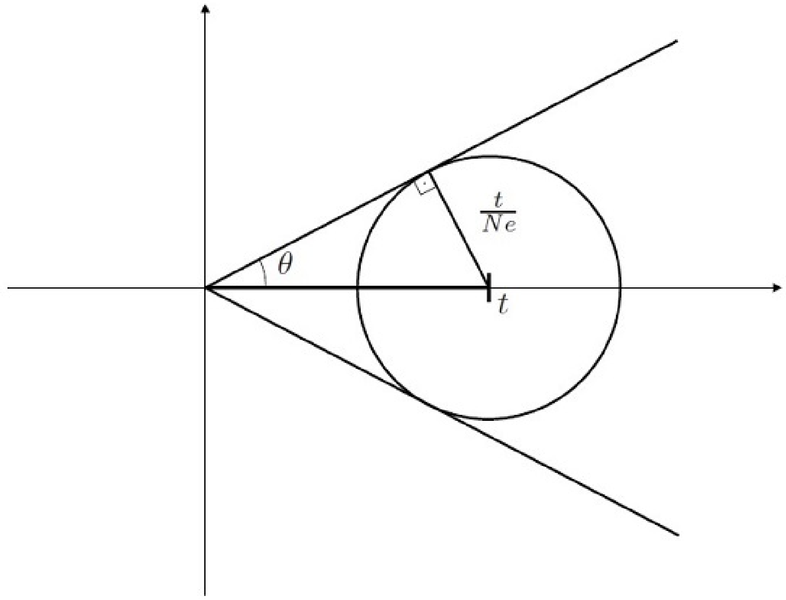
$$\left\| \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{(z-t)^n}{n!} A^n T(t) \right\| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{|z-t|}{t/Ne} \right)^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z-t|}{t/Ne} \right)^n < \infty.$$

Ou seja, a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-t)^n}{n!} A^n T(t)$ converge para todo $t > 0$ e $z \in \mathbb{C}$ no círculo de centro em t e raio t/Ne.

Assim, se θ é o ângulo formado pela reta que passa pela origem e é tangente ao círculo dado, figura (1.2), temos que se, $z \in \triangle(\theta)$, então $\sin(|arg(z)|) < \sin(\theta) = 1/Ne$, ou seja, $|arg(z)| < \arcsin(1/Ne)$. Então, tomando $\alpha = \arcsin(1/Ne)$ e $\triangle(\alpha) = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0 \text{ e } |arg(z)| < \alpha\}$, para $z \in \triangle(\alpha)$, considere a reta r passando por z e a origem, e a reta s perpendicular a r passando por z. Denotando por t o ponto de interseção de s com o eixo real, temos $t > 0$ e podemos definir o operador $\widetilde{T}(z) : X \to X$ por $\widetilde{T}(z)x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-t)^n}{n!} A^n T(t)x,\ x \in X$.

Claramente, da forma como foram tomados t e z, temos que $|arg(z)| < \arcsin(1/Ne)$ e $|z-t| = t\sin(|arg(z)|) < t/Ne$ e, assim, a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-t)^n}{n!} A^n T(t)$ é convergente.

Figura 1.2: Círculo de convergência.



Fonte: Andrade [3] (2014, pág. 25)

Mais ainda, se $z \in (0, +\infty)$, então $z = t$ e $\widetilde{T}(z) = T(z) + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-z)^n}{n!} A^n T(z) = T(z)$, ou seja, $(\widetilde{T}(z))_{z\in\triangle(\alpha)}$ é uma extensão de $(T(t))_{t\geq 0}$.

Agora, definindo $\widetilde{T}(0) = I$, vamos mostrar que $(\widetilde{T}(z))_{z\in\triangle(\alpha)\cup\{0\}}$ é um semigrupo analítico. Inicialmente, observe que, pela Teorema 1.29, $T^{(n)}(t) = A^n T(t) \in \mathcal{L}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e cada $t > 0$. Desta forma, temos que $\widetilde{T}(z)$ é o limite uniforme de sequência de elementos de $\mathcal{L}(X)$ e, portanto, $\widetilde{T}(z) \in \mathcal{L}(X)$ para todo $z \in \triangle(\alpha)$, pois $\mathcal{L}(X)$ é espaço de Banach. Consequentemente, $(T(z))_{z\in\triangle(\alpha)\cup\{0\}}$ é uma família de operadores lineares limitados em X.

Também, pela definição de $\widetilde{T}(z)$, o item (i) da Definição 1.32 está satisfeito e a aplicação $z \mapsto \widetilde{T}(z)$ é analítica em $\triangle(\alpha)$ (pois $\widetilde{T}(z)$ é uma série de potências). Desse modo, concluímos que o item (iv) da Definição 1.32 também está satisfeito.

Para mostrar o item (ii) da Definição 1.32, sejam $t_1, t_2 > 0$ e $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tais que $|z_1 - t_1| \leq t_1/Ne$ e $|z_2 - t_2| \leq t_2/Ne$, ou seja, z_1 e z_2 pertencem os círculos de convergência de $\widetilde{T}(\cdot)$ de centro em t_1

e t_2 respectivamente. Então,

$$|(z_1+z_2)-(t_1+t_2)| \leq |z_1-t_1|+|z_2-t_2| \leq \frac{t_1}{Ne}+\frac{t_2}{Ne}=\frac{t_1+t_2}{Ne},$$

ou seja, z_1+z_2 pertence ao círculo de convergência de $\widetilde{T}(\cdot)$ de centro t_1+t_2. Mais ainda, como

$$\frac{(z_1+z_2-t_1-t_2)^p}{p!}=\sum_{n=0}^{p}\frac{(z_1-t_1)^n}{n!}\frac{(z_2-t_1)^{p-n}}{(p-n)!},$$

então,

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}(z_1+z_2) &= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{[z_1+z_2-t_1-t_2]^p}{p!}A^pT(t_1+t_2)\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{p}\frac{(z_1-t_1)^n}{n!}\frac{(z_2-t_2)^{p-n}}{(p-n)!}A^{n+(p-n)}T(t_1)T(t_2)\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{p}\frac{(z_1-t_1)^n}{n!}A^nT(t_1)\frac{(z_2-t_2)^{p-n}}{(p-n)!}A^{p-n}T(t_2)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1-t_1)^n}{n!}A^nT(t_1)\sum_{p=n}^{\infty}\frac{(z_2-t_2)^{p-n}}{(p-n)!}A^{p-n}T(t_2)\\
&= \widetilde{T}(z_1)\widetilde{T}(z_2),
\end{aligned}$$

o que implica que o item (ii) da Definição 1.32 está satisfeito.

Além disso, como a aplicação $z \mapsto \widetilde{T}(z)$ é analítica em $\triangle(\alpha)$, segue que, dado $z_0 \in \triangle(\alpha)$,

$$\lim_{z\to z_0}\widetilde{T}(z)=\widetilde{T}(z_0). \tag{1.7}$$

Desta forma, dado $t>0$ temos que $\lim_{z\to 0}\widetilde{T}(z+t)=\widetilde{T}(t)=T(t)$ e assim,

$$\lim_{z\to 0}\widetilde{T}(z)T(t)=\lim_{z\to 0}\widetilde{T}(z+t)=T(t), \text{ para todo } t>0, \tag{1.8}$$

onde os limites em (1.7) e (1.8) são tomados no sentido da topologia uniforme de $\mathcal{L}(X)$.

Desse modo, podemos concluir que $\lim_{z\to 0}\widetilde{T}(z)T(t)x=T(t)x$, para todo $x\in X$ e $t>0$.

Logo, em particular, $\lim_{z\to 0}\widetilde{T}(z)y=y$, para todo $y\in X_0=\cup_{0<t\leq 1}T(t)X$. Assim, para concluirmos a demonstração precisamos do item (iii) da Definição 1.32 estender o limite anterior para todo X. Para isto, mostraremos que X_0 é denso em X e a aplicação $z\mapsto\widetilde{T}(z)$ é limitada em uma região $\Sigma(\beta)\subset\triangle(\alpha)$.

Para mostrarmos a densidade de X_0, observe que dado $x\in X$, temos $\lim_{t\to 0^+}T(t)x=x$, pois $(T(t))_{t\geq 0}$ é um C_0 semigrupo. Ou seja, x é limite de sequência elementos de X_0 e, consequentemente, $X\subset\overline{X_0}$. Como a inclusão contrária é direta, concluímos que $\overline{X_0}=X$.

Agora, definindo

$$\Sigma(\beta) = \left\{ z \in \mathbb{C};\ 0 < Re(z) < \frac{(Ne)^2 - \beta^2}{(Ne)^2},\ |arg(z)| < \arcsin(\frac{\beta}{Ne}) \right\},\ 0 < \beta < 1,$$

vamos mostrar que a apicação $z \mapsto \widetilde{T}(z)$ é limitada sobre $\Sigma(\beta)$. Dessa forma, dado $z \in \triangle(\alpha)$, da construção usada pra definir $\widetilde{T}(z)$, obtemos que $t = \frac{|z|}{\cos(arg(z))}$ e $\frac{|z-t|}{t} = \sin(arg(z))$. Em particular, se $z \in \Sigma(\beta)$, então $|arg(z)| < \arcsin(\frac{\beta}{Ne})$ e, consequentemente, $\frac{|z-t|}{t} < \frac{\beta}{Ne}$, ou ainda, $\frac{|z-t|}{t} Ne < \beta$.

Por outro lado, $\sin(arg(z)) < \frac{\beta}{Ne}$ também implica que $\sin^2(arg(z)) < \frac{\beta^2}{(Ne)^2}$, ou equivalentemente, $1 - \cos^2(arg(z)) < \frac{\beta^2}{(Ne)^2}$. Dessa forma, segue que $\cos^2(arg(z)) > \frac{(Ne)^2-\beta^2}{(Ne)^2}$.

Agora, visto que $Re(z) = |z| \cos(arg(z)) = t \cos^2(arg(z))$, temos que

$$t = \frac{Re(z)}{\cos^2(arg(z))} \leq \frac{Re(z)}{\frac{(Ne)^2-\beta^2}{(Ne)^2}} \leq 1. \tag{1.9}$$

Assim, utilizando (1.6) concluímos que

$$\left\| \frac{(z-t)^n}{n!} A^n T(t) \right\| \leq \left(\frac{(|z-t|)}{t} Ne \right)^n \leq \beta^n,\ n = 1, 2, ... \tag{1.10}$$

Então, se $L = \sup\limits_{0 \leq t \leq 1} \|T(t)\|$, obtemos que

$$\begin{aligned} \|\widetilde{T}(z)\| &\leq \|T(t)\| + \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{(z-t)^n}{n!} A^n T(t) \right\| \\ &\leq L + \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n \\ &= L + \frac{\beta}{1-\beta} = M(\beta). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Voltando ao fato de $\overline{X_0} = X$, dado $x \in X$ existe uma sequência $(x_n) \subset X_0$ tal que $x_n \to x$, quando $n \to +\infty$, isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \dfrac{\varepsilon}{M(\beta)+2}$, para todo $n \geq n_0$. Dessa forma, como $x_0 \in X_0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < |z| < \delta$, então $\|T(z)x_{n_0} - x_{n_0}\| < \dfrac{\varepsilon}{M(\beta)+2}$ e, assim,

$$\begin{aligned} \|\widetilde{T}(z)x - x\| &\leq \|\widetilde{T}(z)x - \widetilde{T}(z)x_{n_0}\| + \|\widetilde{T}(z)x_{n_0} - x_{n_0}\| + \|x_{n_0} - x\| \\ &\leq \|\widetilde{T}(z)\|\ \|x - x_{n_0}\| + \|\widetilde{T}(z)x_{n_0} - x_{n_0}\| + \|x_{n_0} - x\| \\ &\leq M(\beta)\frac{\varepsilon}{M(\beta)+2} + \frac{\varepsilon}{M(\beta)+2} + \frac{\varepsilon}{M(\beta)+2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

garantindo que $\lim\limits_{z \to 0} \widetilde{T}(z)x = x$ para todo $x \in X$, o que completa a prova. ■

Definição 1.35. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear. Dizemos que A é de classe (θ, M), onde $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ e $M > 0$, e escrevemos $A \in (\theta, M)$, se:*

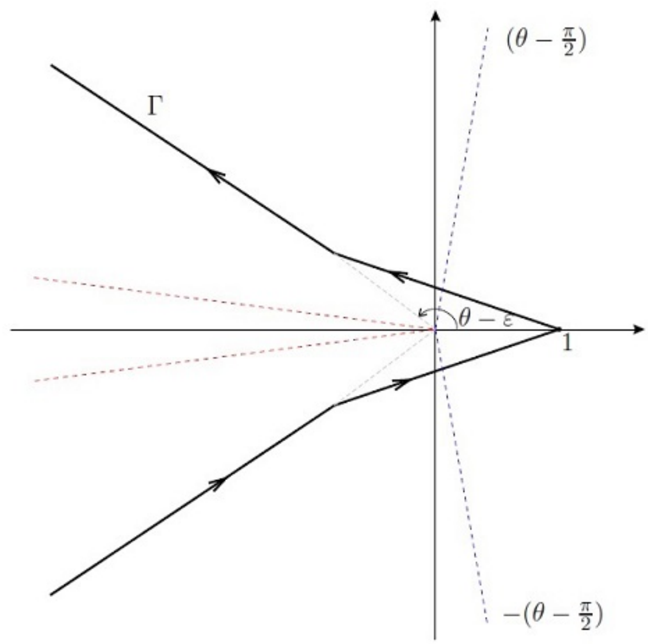
(i) *A é um operador fechado densamente definido;*

(ii) $\triangle(\theta) = \{z \in \mathbb{C};\ |arg(z)| < \theta\} \subset \rho(A)$;

(iii) $\|R(\lambda : A)\| \leq \dfrac{M}{|\lambda|}$, *para todo $\lambda \in \triangle(\theta)$.*

Agora nosso objetivo é mostrar que um operador satisfazendo a definição anterior gera um semigrupo analítico. Para isto, dado $A \in (\theta, M)$, tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $0 < 2\varepsilon < \theta - \frac{\pi}{2}$ e seja Γ uma curva no plano complexo composta pelos arcos $re^{i(\theta-\varepsilon)}$ e $re^{-i(\theta-\varepsilon)}$, $1 \leq r < +\infty$, e pelos segmentos que ligam os pontos $e^{i(\theta-\varepsilon)}$ e $e^{-i(\theta-\varepsilon)}$ ao ponto $z = 1$, orientada de $-\infty e^{-i(\theta-\varepsilon)}$ para $+\infty e^{i(\theta-\varepsilon)}$, como na figura (1.3).

Figura 1.3: Curva Γ.



Fonte: Andrade [3] (2014, pág. 29)

Consideramos ainda $\alpha = \theta - \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, e $\triangle(\alpha) = \{z \in \mathbb{C} :\ |arg(z)| < \alpha\}$. Logo, $\triangle(\alpha) \subset \triangle(\theta)$ e, pelo item (ii) da Definição 1.35, $\triangle(\alpha) \subset \rho(A)$. Mais ainda, definindo

$\Gamma_r = \{\lambda \in \Gamma : \ |\lambda| < r, \ r \geq 1\}$, $\Gamma_r \subset \triangle(\theta) \subset \rho(A)$ e as aplicação $\lambda \mapsto e^{\lambda z}, \ z \in \triangle(\alpha)$, e $\lambda \mapsto R(\lambda : A)$ são contínuas para $\lambda \in \Gamma_r$, pois dados $\lambda, \mu \in \Gamma_r$ temos, por (1.4), que

$$R(\lambda : A) - R(\mu : A) \ = \ (\mu - \lambda)R(\lambda : A)R(\mu : A), \tag{1.12}$$

garantindo que

$$\|R(\lambda : A) - R(\mu : A)\| \ \leq \ |\mu - \lambda| \ \|R(\lambda : A)\| \ \|R(\mu : A)\| \leq |\mu - \lambda| \frac{M}{|\lambda|}\frac{M}{|\mu|}. \tag{1.13}$$

Dessa forma, tomando o limite em (1.13) quando $\lambda \to \mu$, segue a continuidade da aplicação. Logo, para cada r podemos definir uma família de operadores $T_r(z), \ z \in \triangle(\alpha)$, pela integral

$$T_r(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda, \ z \in \triangle(\alpha). \tag{1.14}$$

Assim, para cada $z \in \triangle(\alpha)$ fixo, a aplicação $T_r(z) : X \to X$, dada por

$$T_r(z)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x \ d\lambda, \ x \in X, \tag{1.15}$$

é um operador linear.

A seguir, mostramos que o operador $T_r(z)$ é limitado. Antes porém, observe que:

(i) $\|e^{\lambda z} R(\lambda : A)x\| \leq |e^{\lambda z}| \ \|R(\lambda : A)\| \ \|x\| \leq \dfrac{e^{Re(\lambda z)} M\|x\|}{|\lambda|}, \ \forall x \in X, \ \forall \lambda \in \triangle(\theta);$

(ii) $\lambda z = (|\lambda| e^{i \ arg(\lambda)})(|z| e^{i \ arg(z)}) = |\lambda| \ |z| e^{i(arg(\lambda) + arg(z))}$,

e então

$$Re(\lambda z) = |\lambda| \ |z| \cos(arg(\lambda) + arg(z)) \leq |\lambda| \ |z|, \ \forall \lambda, z \in \mathbb{C}.$$

Analisemos agora $\|T_r(z)x\|$ sobre Γ_r. Para isto, vamos dividir Γ_r em 4 partes, que denotaremos por $\gamma_1, \ \gamma_2, \ \gamma_3$ e γ_4, de forma que

$$\begin{aligned} T_r(z)x \ &= \ \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_1} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x \ d\lambda + \int_{\gamma_2} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x \ d\lambda + \int_{\gamma_3} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x \ d\lambda \right. \\ &+ \left. \int_{\gamma_4} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x \ d\lambda \right). \end{aligned}$$

(1) Se $\overline{\gamma_1} : [1, r] \to \Gamma_r$ é definida por $\overline{\gamma_1}(t) = te^{-i(\theta-\varepsilon)}$, consideremos γ_1 como sendo $\overline{\gamma_1}$ percorrida no sentido contrário. Logo,

$$
\begin{aligned}
\left\| \int_{\gamma_1} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x d\lambda \right\| &= \left\| - \int_{\overline{\gamma_1}} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x d\lambda \right\| \\
&= \left\| \int_1^r e^{te^{-i(\theta-\varepsilon)}z} R(te^{-i(\theta-\varepsilon)} : A)xe^{-i(\theta-\varepsilon)} dt \right\| \\
&\leq \int_1^r |e^{te^{-i(\theta-\varepsilon)}z}| \; \|R(te^{-i(\theta-\varepsilon)} : A)x\| \; \|e^{-i(\theta-\varepsilon)}\| dt \\
&\leq \int_1^r \frac{e^{Re(te^{-i(\theta-\varepsilon)}z)} M\|x\|}{|te^{-i(\theta-\varepsilon)}|} dt \\
&\leq \int_1^r \frac{e^{|t| \; |z|} M\|x\|}{|t|} dt \\
&\leq M\|x\| \int_1^r e^{t|z|} dt \\
&= M\|x\| \left(\frac{e^{r|z|} - e^{|z|}}{|z|} \right) \\
&= C_1\|x\|,
\end{aligned}
$$

onde $C_1 = \dfrac{M(e^{r|z|} - e^{|z|})}{|z|}$.

(2) Seja γ_2 é a reta que liga os pontos $e^{-i(\theta-\varepsilon)}$ e $z = 1$, como na Figura 1.4.

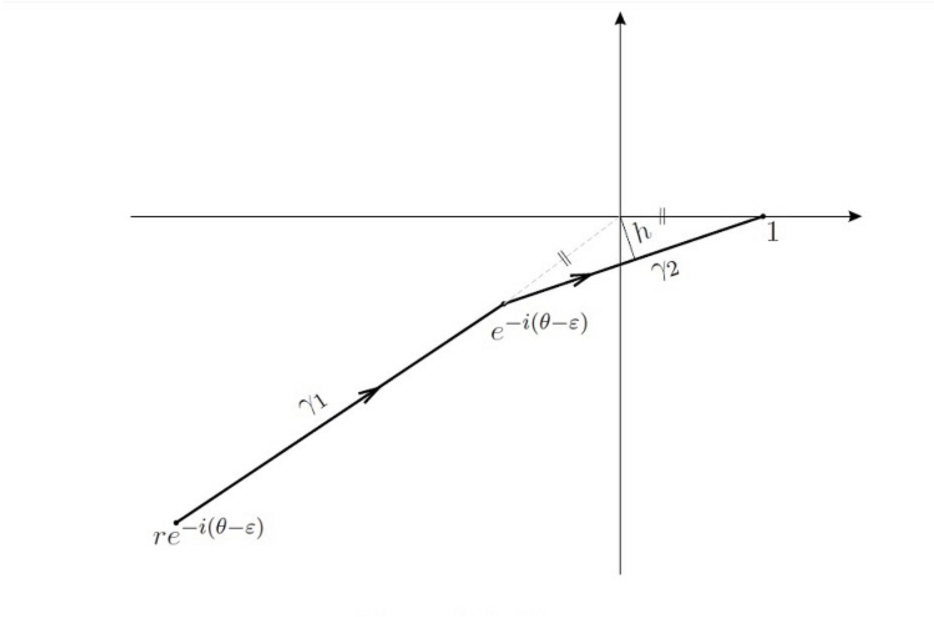
Então, dado λ sobre γ_2 temos que $\lambda = |\lambda| e^{i \; arg(\lambda)}$. Observe que h, como aparece na Figura 1.4, tem a seguinte propriedade: $h \leq |\lambda| \leq 1$, pois h é a altura do triângulo isóseles de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $e^{-i(\theta-\varepsilon)}$. Logo,

$$
\begin{aligned}
\left\| \int_{\gamma_2} e^{\lambda z} R(\lambda : A)x d\lambda \right\| &\leq \int_{\gamma_2} \|e^{\lambda z}\| \; \|R(\lambda : A)\| \; \|x\| d|\lambda| \\
&\leq \int_{\gamma_2} \frac{e^{Re(\lambda z)} M\|x\|}{|\lambda|} d|\lambda| \\
&\leq M\|x\| \int_{\gamma_2} \frac{e^{|\lambda| \; |z|}}{|\lambda|} d|\lambda| \\
&\leq \frac{e^{|z|} M\|x\|}{h} \int_{\gamma_2} d|\lambda| = C_2\|x\|,
\end{aligned}
$$

onde $C_2 = \dfrac{e^{|z|} M|\gamma_2|}{h}$ e $|\gamma_2|$ denota o comprimento da curva γ_2.

(3) De modo análogo a γ_2, seja γ_3 a curva que liga os pontos $z = 1$ e $e^{i(\theta-\varepsilon)}$. Para λ sobre γ_3, $\lambda = |\lambda| e^{i \; arg(\lambda)}$, com $h \leq |\lambda| \leq 1$, onde h é a altura do triângulo isóseles de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e

Figura 1.4: Curvas γ_1 e γ_2.



Fonte: Andrade [3] (2014, pág.31)

$e^{i(\theta-\varepsilon)}$. Logo,

$$\begin{aligned}\left\|\int_{\gamma_3} e^{\lambda z}R(\lambda : A)x d\lambda\right\| &\leq \int_{\gamma_3} \|e^{\lambda z}\| \, \|R(\lambda : A)\| \, \|x\| d|\lambda| \\ &\leq \int_{\gamma_3} \frac{e^{Re(\lambda z)}M\|x\|}{|\lambda|} d|\lambda| \\ &\leq \frac{e^{|z|}M\|x\|}{h}\int_{\gamma_3} d|\lambda| = C_3\|x\|,\end{aligned}$$

onde $C_3 = \dfrac{e^{|z|}M|\gamma_3|}{h}$ e $|\gamma_3|$ denota o comprimento da curva γ_3.

(4) A curva $\gamma_4 : [1, r] \to \Gamma_r$ é dada por $\gamma_4(t) = te^{i(\theta-\varepsilon)}$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\gamma_4} e^{\lambda z} R(\lambda : A) x d\lambda \right\| &\leq \int_1^r \|e^{te^{i(\theta-\varepsilon)}z}\| \, \|R(te^{i(\theta-\varepsilon)} : A)x\| \, \|e^{i(\theta-\varepsilon)}\| dt \\
&\leq \int_1^r \frac{e^{Re(te^{i(\theta-\varepsilon)}z)} M\|x\|}{|te^{i(\theta-\varepsilon)}|} dt \\
&\leq \int_1^r \frac{e^{|t| \ |z|} M\|x\|}{|t|} dt \\
&\leq M\|x\| \int_1^r e^{t|z|} dt \\
&= M\|x\| \left(\frac{e^{r|z|} - e^{|z|}}{|z|} \right) = C_4\|x\|,
\end{aligned}$$

onde $C_4 = \dfrac{M(e^{r|z|} - e^{|z|})}{|z|}$.

Portanto, de (1)-(4), tomando $C = \max\limits_{i=1,2,3,4.} \{C_i/2\pi\}$, obtemos que $\|T_r(z)x\| \leq C\|x\|, \ \forall x \in X$, ou seja, $T_r(z) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $z \in \triangle(\alpha)$.

Para finalizar, considere a família de operadores $(T(z))_{z \in \triangle(\alpha) \cup \{0\}}$ definida por $T(0) = I$ e

$$T(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda, \ z \in \triangle(\alpha).$$

Observe que $T(z) = \lim\limits_{r \to \infty} T_r(z)$, para todo $z \in \triangle(\alpha)$. Então, como $T_r(z) \in \mathcal{L}(X)$ para todo $r \geq 1$ e a convergência é uniforme, concluímos que $T(z) \in \mathcal{L}(X)$ para todo $z \in \triangle(\alpha)$.

Agora devemos mostrar que a família $(T(z))_{z \in \triangle(\alpha) \cup \{0\}}$ é um semigrupo analítico. Para isto precisamos de alguns resultados premilinares. Para não prolongar este trabalho, apenas enunciamos estes resultados.

Lema 1.36. *Sejam $z \in \triangle(\alpha)$, $A \in (\theta, M)$ e Γ como definida anteriormente. Então:*

(i) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^{\lambda z}}{\lambda' - \lambda} \, d\lambda = 0$, *para todo λ' situado a direita de Γ;*

(ii) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} \, d\lambda = 2\pi i$;

(iii) $\displaystyle\int_\Gamma e^{\lambda z} \, d\lambda = 0$;

(iv) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{R(\lambda : A)}{\lambda} \, d\lambda = 0$;

(v) $\displaystyle\int_{|z|\Gamma} \frac{e^{\lambda\eta}}{|z|} R\left(\frac{\lambda}{|z|} : A\right) d\lambda = \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda\eta}}{|z|} R\left(\frac{\lambda}{|z|} : A\right) d\lambda$, *onde* $\eta = \frac{z}{|z|}$.

Demonstração: Para mais detalhes veja [Silva [40], Lema 3.5, pág. 88].

Lema 1.37. *Dado* $\delta > 0$*, seja* Γ' *a curva no plano complexo definida por* $\Gamma' = \{\lambda' \in \mathbb{C};\ \lambda' = \lambda + \delta,\ \lambda \in \Gamma\}$ *com orientação induzida por* Γ*. Então, para todo* $z \in \triangle(\alpha)$*, temos:*

(i) $\displaystyle\int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda = \int_{\Gamma'} e^{\lambda z} R(\lambda : A) d\lambda$;

(ii) $\displaystyle\int_{\Gamma'} \frac{e^{\lambda' z}}{\lambda' - \lambda}\, d\lambda' = 2\pi i e^{\lambda z}$ *para todo* λ *situado à esquerda de* Γ'.

Demonstração: Para mais detalhes veja [Silva [40], Lema 3.6, pág. 94].

Teorema 1.38. *A família de operadores* $(T(z))_{z\in\triangle(\alpha)\cup\{0\}}$, $\alpha = \theta - \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon$, *definida por*

$$\begin{cases} T(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A)\ d\lambda,\ z \in \triangle(\alpha); \\ T(0) = I. \end{cases} \tag{1.16}$$

é um semigrupo analítico.

Demonstração. Como já foi visto, $T(z) \in \mathcal{L}(X)$ para todo $z \in \triangle(\alpha)$. A seguir, mostraremos que $(T(z))_{z\in\triangle(\alpha)\cup\{0\}}$ satisfaz a definição de semigrupo analítico.

Pela definição, temos que $T(0) = I$. Assim, o item (i) da Definição 1.32 está satisfeito.

Agora, dado $\rho \in \triangle(\alpha)$, do item (i) do Lema 1.37, temos que

$$T(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda\rho} R(\lambda : A)\ d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} e^{\lambda'\rho} R(\lambda' : A)\ d\lambda'.$$

Assim, dados $z, \eta \in \triangle(\alpha)$ e $x \in X$, segue que

$$\begin{aligned} T(z)T(\eta)x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} e^{\lambda'\eta} R(\lambda' : A)x\ d\lambda' \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} e^{\lambda z} e^{\lambda'\eta} \left(\frac{R(\lambda : A) - R(\lambda' : A)}{(\lambda' - \lambda)} \right) x\ d\lambda'\ d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R(\lambda : A) \int_{\Gamma'} \frac{e^{\lambda'\eta}}{(\lambda' - \lambda)}\ x\ d\lambda'\ d\lambda \\ &- \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma'} e^{\lambda'\eta} R(\lambda' : A) \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{(\lambda' - \lambda)}\ x\ d\lambda\ d\lambda'. \end{aligned}$$

Além disso, pelo item (i) do Lema 1.36 e pelo item (ii) do Lema 1.37, obtemos que

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z}}{(\lambda' - \lambda)}\ d\lambda = 0 \qquad \text{e} \qquad \int_{\Gamma'} \frac{e^{\lambda'\eta}}{(\lambda' - \lambda)}\ d\lambda' = 2\pi i e^{\lambda\eta},$$

o que implica que

$$T(z)T(\eta)x \;=\; \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma e^{\lambda(z+\eta)}R(\lambda:A)2\pi i\ x\ d\lambda = T(z+\eta)x,$$

para todo $x \in X$. Ou seja, $T(z)T(\eta) = T(z+\eta)$ para todo $z, \eta \in \triangle(\alpha)$, de onde concluímos que o item (ii) da Definição 1.32 também está satisfeito.

Agora, façamos em (1.16) a mudança de variável $\mu = |z|\lambda$, com $\lambda \in \triangle(\alpha)$. Esta mudança de variável leva a curva Γ na curva $|z|\Gamma$ e, pelo item (v) do Lema 1.36, temos que

$$T(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|\Gamma}\frac{e^{\mu\eta}}{|z|}R\left(\frac{\mu}{|z|}:A\right)d\mu = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{e^{\mu\eta}}{|z|}R\left(\frac{\mu}{|z|}:A\right)d\mu,$$

onde $\eta = \frac{z}{|z|} = e^{i\ arg(z)}$.

Por outro lado, como $A \in (\theta, M)$, temos $\left\|R\left(\frac{\mu}{|z|}:A\right)\right\| \leq \frac{M|z|}{|\mu|}$. Assim,

$$\|T(z)\| \;\leq\; \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{e^{Re(\mu\eta)}}{|z|}\frac{M|z|}{|\mu|}d|\mu| = \frac{M}{2\pi}\int_{\Gamma_1}\frac{e^{Re(\mu\eta)}}{|\mu|}d|\mu| + \frac{M}{2\pi}\int_{\Gamma\setminus\Gamma_1}\frac{e^{Re(\mu\eta)}}{|\mu|}d|\mu|, \tag{1.17}$$

onde Γ_1 é a curva Γ_r descrita anteriormente para $r = 1$.

Logo, dado $\mu \in \Gamma_1$, $|\mu| \leq 1$ e então, $Re(\mu\eta) = |\mu||\eta|\cos(\mu\eta) \leq 1$. Dessa forma, tomando $m_0 = \inf\{|\lambda|;\ \lambda \in \Gamma_1\}$, temos

$$\frac{M}{2\pi}\int_{\Gamma_1}\frac{e^{Re(\mu\eta)}}{|\mu|}d|\mu| \;\leq\; \frac{M}{2\pi}\int_{\Gamma_1}\frac{e^1}{m_0}d|\mu| = \frac{Me}{2\pi m_0}|\Gamma_1|, \tag{1.18}$$

onde $|\Gamma_1| = \int_{\Gamma_1} d|\mu|$ é o comprimento da curva Γ_1.

Por outro lado, observe que a curva $\Gamma \setminus \Gamma_1$ é formada pelas semi-retas $\overline{\gamma}_1$, dada por $\overline{\gamma}_1(r) = re^{i(\theta-\varepsilon)}$, $1 \leq r < +\infty$, e γ_2, dada por $\overline{\gamma}_2(r) = re^{-i(\theta-\varepsilon)}$, $1 \leq r < +\infty$, percorrida no sentido contrário. Então,

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma\setminus\Gamma_1}\frac{e^{Re(\mu\eta)}}{|\mu|}d|\mu| \;&=\; \int_{\overline{\gamma}_1}\frac{e^{Re(\mu\eta)}}{|\mu|}d|\mu| - \int_{\overline{\gamma}_2}\frac{e^{Re(\mu\eta)}}{|\mu|}d|\mu| \\
&= \int_1^\infty \frac{e^{Re(re^{i(\theta-\varepsilon)}\eta)}}{r}\ |e^{i(\theta-\varepsilon)}|\ dr - \int_1^\infty \frac{e^{Re(re^{-i(\theta-\varepsilon)}\eta)}}{r}\ |e^{-i(\theta-\varepsilon)}|\ dr \\
&= \int_1^\infty \frac{e^{Re(re^{i(\theta-\varepsilon)}\eta)}}{r}\ dr - \int_1^\infty \frac{e^{Re(re^{-i(\theta-\varepsilon)}\eta)}}{r}\ dr.
\end{aligned}$$

Observe que na primeira integral, temos

$$\begin{aligned}
Re(re^{i(\theta-\varepsilon)}\eta) \;&=\; |re^{i(\theta-\varepsilon)}|\ |\eta|\cos((\theta-\varepsilon)+arg(\eta)) \\
&= r\cos((\theta-\varepsilon)+arg(z)),
\end{aligned}$$

e mais, como $-\alpha \leq arg(z) \leq \alpha,\ \alpha = \theta - \pi/2 - 2\varepsilon$ e $\pi/2 < \theta < \pi$, temos que $\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq \theta - \varepsilon + arg(z) \leq \frac{3\pi}{2} - 3\varepsilon \leq \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$, de onde segue que $Re(re^{i(\theta-\varepsilon)}\eta) \leq r\cos(\frac{\pi}{2} + \varepsilon) < 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{e^{Re(re^{i(\theta-\varepsilon)}\eta)}}{r}\, dr &\leq \int_1^\infty e^{r\cos(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)} dr \\ &= -\frac{e^{\cos(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)}}{\cos(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Analogamente, na segunda integral temos que $Re(re^{-i(\theta-\varepsilon)}\eta) = r\cos((-\theta+\varepsilon) + arg(z))$, onde $-\frac{3\pi}{2} + \varepsilon \leq -\frac{3\pi}{2} + 3\varepsilon \leq -\theta + \varepsilon + arg(z) \leq -\frac{\pi}{2} - \varepsilon$. Logo, observando que $-\dfrac{1}{r} \leq 0 < 1$ e que $\cos(-\pi/2 - \varepsilon) = \cos(\pi/2 + \varepsilon) < 0$, obtemos

$$-\int_1^\infty \frac{e^{Re(re^{-i(\theta-\varepsilon)}\eta)}}{r}\, dr \leq \int_1^\infty e^{r\cos(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)} dr = -\frac{e^{\cos(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)}}{\cos(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)},$$

de onde segue que,

$$\int_{\Gamma\setminus\Gamma_1} \frac{e^{Re(\mu\eta)}}{|\mu|} d|\mu| \leq -\frac{2e^{\cos(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)}}{\cos(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)}. \tag{1.19}$$

Portanto, por (1.17), (1.18) e (1.19), temos

$$\|T(z)\| \leq \frac{Me}{2\pi m_0}|\Gamma_1| + -\frac{Me^{\cos(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)}}{\pi\cos(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)} = M_0,\ \forall z \in \triangle(\alpha),$$

ou seja, $T(z)$ é uniformemente limitado para todo $z \in \triangle(\alpha)$.

Mostramos agora que $(T(z))_{z\in\triangle(\alpha)\cup\{0\}}$ é fortemente contínuo. Para isto, observe primeiro que

$$R(\lambda : A)(\lambda I - A) = I \quad \Leftrightarrow \quad R(\lambda : A) - \lambda^{-1} I = \frac{R(\lambda : A)A}{\lambda}. \tag{1.20}$$

Assim, dado $z \in \triangle(\alpha)$, com $|z| < 1$, e $x \in D(A)$, pela igualdade (1.20) e pelo item (ii) do Lema 1.36, temos que

$$\begin{aligned} T(z)x - x &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda z} R(\lambda : A)\ x\ d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{\lambda z}}{\lambda}\ x\ d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{\lambda z}}{\lambda}\ R(\lambda : A)Ax\ d\lambda. \end{aligned}$$

Observando que, para $\lambda \in \Gamma$,

$$\left\| \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} R(\lambda : A)A\ x \right\| \leq \frac{e^{Re(\lambda z)}}{|\lambda|}\ \frac{M}{|\lambda|}\ \|Ax\| \leq \frac{eM}{|\lambda|^2}\ \|Ax\|,$$

onde a aplicação $\lambda \mapsto \dfrac{eM}{|\lambda|^2}\,\|Ax\|$ é integrável sobre a curva Γ. Desse modo, pelo Teorema da Convergência Dominada e pelo item (iv) do Lema 1.36, segue que, para $z \in \triangle(\alpha)$ e $x \in D(A)$,

$$\lim_{z\to 0}(T(z)x - x) \;=\; \lim_{z\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{\lambda z}R(\lambda : A)}{\lambda}Ax\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{R(\lambda : A)}{\lambda}Ax\,d\lambda = 0,$$

ou seja, $\lim_{z\to 0} T(z)x = x$, para todo $x \in D(A)$.

Agora, como $\overline{D(A)} = X$, dado $y \in X$ temos que existe $(y_n) \subset D(A)$ tal que $y_n \to y$, quando $n \to \infty$, em X, isto é, dado $\eta > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|y_n - y\| < \dfrac{\eta}{2(M_0+1)}$, $\forall n \leq n_0$. Mais ainda, como $y_{n_0} \in D(A)$, $\lim_{z\to 0} T(z)y_{n_0} - y_{n_0} = 0$. Logo, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < |z| < \delta$, então $\|T(z)y_{n_0} - y_{n_0}\| < \eta/2$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\|T(z)y - y\| &\leq \|T(z)\|\,\|y - y_{n_0}\| + \|T(z)y_{n_0} - y_{n_0}\| + \|y_{n_0} - y_{n_0}\| \\
&\leq M_0\frac{\eta}{2(M_0+1)} + \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2(M_0+1)} = \eta,
\end{aligned}$$

de onde concluímos $\lim_{z\to 0} T(z)y = y$, para todo $x \in X$. O que prova o item (iii) da Definição 1.32.

Finalmente, mostramos que a aplicação $z \mapsto T(z)$ é analítica em $\triangle(\alpha)$.

Fazendo novamente a mudança de variável $\mu = |z|\lambda$ em (1.16), com $z \in \triangle(\alpha)$, $\eta = \dfrac{z}{|z|}$ e $r \geq 1$, temos

$$\begin{aligned}
T(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|\Gamma} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|}R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right)d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|}R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right)d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|}R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right)d\mu + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\setminus\Gamma_r} \frac{e^{\mu\eta}}{|z|}R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right)d\mu.
\end{aligned}$$

Assim, escrevendo $\Gamma \setminus \Gamma_r = \gamma_1 \cup \gamma_2$, onde $\gamma_1(t) = te^{i(\theta-\varepsilon)}$, $r \leq t < +\infty$, e γ_2 é a curva $\overline{\gamma}_2(t) = te^{-i(\theta-\varepsilon)}$, $r \leq t < +\infty$ percorrida no sentido contrário, e notando que $\cos(-\pi/2-\varepsilon) = \cos(\pi/2+\varepsilon)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\left\|T(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\frac{e^{\mu\eta}}{|z|}R\left(\frac{\mu}{|z|}:A\right)d\mu\right\| \\
&\qquad = \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\setminus\Gamma_r}\frac{e^{\mu\eta}}{|z|}R\left(\frac{\mu}{|z|}:A\right)d\mu\right\| \\
&\qquad \leq \frac{1}{2\pi}\left(\left\|\int_{\gamma_1}\frac{e^{\mu\eta}}{|z|}R\left(\frac{\mu}{|z|}:A\right)d\mu\right\|+\left\|\int_{\gamma_2}\frac{e^{\mu\eta}}{|z|}R\left(\frac{\mu}{|z|}:A\right)d\mu\right\|\right) \\
&\qquad \leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_r^\infty\frac{e^{Re(te^{i(\theta-\varepsilon)}\eta)}}{|z|}\frac{M|z|}{t}dt+\int_r^\infty\frac{e^{Re(te^{-i(\theta-\varepsilon)}\eta)}}{|z|}\frac{M|z|}{t}dt\right) \\
&\qquad \leq \frac{M}{2\pi}\left(\int_r^\infty e^{t\cos(\theta-\varepsilon+arg(z))}dt+\int_r^\infty e^{t\cos(-\theta+\varepsilon+arg(z))}dt\right) \\
&\qquad \leq \frac{M}{2\pi}\left(\int_r^\infty e^{t\cos(\pi/2+\varepsilon)}dt+\int_r^\infty e^{t\cos(-\pi/2-\varepsilon)}dt\right) \\
&\qquad = \frac{M}{\pi}\frac{e^{r\cos(\pi/2+\varepsilon)}}{(-\cos(\pi/2+\varepsilon))}=\frac{M}{\pi}\frac{e^{-r\sin(\varepsilon)}}{\sin(\varepsilon)},
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

de onde segue que

$$\lim_{r\to\infty}\left\|T(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\frac{e^{\mu\eta}}{|z|}R\left(\frac{\mu}{|z|}:A\right)d\mu\right\|=\lim_{r\to\infty}\frac{M}{\pi}\frac{e^{-r\sin(\varepsilon)}}{\sin(\varepsilon)}=0.$$

Consequentemente,

$$T(z)=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}e^{\lambda z}R(\lambda:A)d\mu=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}e^{\lambda z}R(\lambda:A)d\mu$$

para todo $z\in\triangle(\alpha)$.

Agora, observando que Γ_r é de classe C^1 e a função $\lambda\mapsto e^{\lambda z}R(\lambda:A)$ é analítica em $\triangle(\theta)$, temos que a função $\lambda\mapsto\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}e^{\lambda z}R(\lambda:A)d\mu$ é analítica em $\triangle(\alpha)$ para todo $r\geq 1$.

Assim, concluímos que $T(z)$ é limite uniforme de funções analíticas e, portanto, $z\mapsto T(z)$ é analítica em $\triangle(\alpha)$. Dessa forma, o item (iv) da Definição 1.32 está satisteita e, consequentemente, $(T(z))_{z\in\triangle(\alpha)\cup\{0\}}$ é um semigrupo analítico. ■

Teorema 1.39. *Seja $A\in(\theta,M)$. Então, para cada $\varepsilon>0$ tal que $2\varepsilon<\theta-\frac{\pi}{2}$, A é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico no setor $\triangle(\theta-\frac{\pi}{2}-2\varepsilon)$.*

Demonstração. Seja $(T(z))_{z\in\triangle(\alpha)\cup\{0\}}$ o semigrupo analítico obtido no teorema anterior. Dado $x\in D(A)$, utilizando a igualdade (1.20), o item (iii) do Lema 1.36 e o Teorema da Convergência

Domindada, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}T(z)x &= \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda z}R(\lambda:A)x\ d\lambda\right]\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda z}\lambda R(\lambda:A)x\ d\lambda\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda z}R(\lambda:A)Ax\ d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda z}x\ d\lambda\\
&= T(z)Ax + 0 = T(z)Ax,
\end{aligned}$$

isto é, $\frac{d}{dz}T(z)x = T(z)Ax$, para todo $x \in D(A)$. Então,

$$\frac{1}{h}\int_0^h T(s)Axds = \frac{1}{h}T(s)x\Big|_0^h = \frac{T(h)x - x}{h}. \tag{1.22}$$

Agora, supondo que $B : D(B) \subset X \to X$ seja o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo obtido pela restrição de $(T(z))_{z\in\triangle(\alpha)\cup\{0\}}$ ao eixo $[0,\infty)$, vamos mostrar que $B = A$. Para issso, tomemos $x \in D(A)$ e façamos $h \to 0^+$ na igualdade (1.22), de onde obtemos que

$$Ax = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^h T(s)Axds = \lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)x - x}{h} = Bx,$$

ou seja, $D(A) \subset D(B)$ e $A = B|_{D(A)}$.

Para mostrarmos a inclusão contrária note que, do Teorema de Hille-Yosida, temos $(0,\infty) \in \rho(B)$, e então, $\rho(A)\cap\rho(B) \neq 0$. Assim, se $\lambda \in \rho(A)\cap\rho(B),\ x \in D(B)$ e $y = (\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - B)x \in D(A)$, então

$$(\lambda I - A)y = (\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - B)x = (\lambda I - B)x,$$

o que implica que $(\lambda I - B)(y - x) = 0$, e, como $(\lambda I - B)$ é injetor, segue $x = y$. Logo, $D(B) \subset D(A)$ e, portanto, $A = B$, o que finaliza nossa prova. ■

Corolário 1.40. *Seja $A \in (\theta, M)$ e $(T(z))_{z\in\triangle(\alpha)\cup\{0\}}$, $\alpha = \theta - \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon$, o semigrupo analítico dado em (1.16). Então, as seguintes condições são válidas:*

(i) *Para todo $n \geq 1$, $T(z)x \in D(A^n)$, para todo $x \in X$ e todo $z \in \triangle(\alpha)$;*

(ii) *Para todo $n \geq 1$, existe uma constante $M_n(\varepsilon)$ tal que $\|A^nT(z)\| \leq \frac{M_n(\varepsilon)}{|z|^n}$, $\forall z \in \triangle(\alpha)$.*

Demonstração. **(i)** Inicialmente, observe que para $x \in X,\ z \in \triangle(\alpha)$ e $h \in (0,\infty)$,

$$\frac{T(h) - I}{h}\ T(z)x = \frac{T(h+z)x - T(z)x}{h}.$$

Assim, fazendo $v = h + z$ temos que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{T(h) - I}{h} \, T(z)x = \lim_{v \to z^+} \frac{T(v)x - T(z)x}{v - z}, \tag{1.23}$$

e então, como $z \mapsto T(z)$ é analítica em $\triangle(\alpha)$, o limite em (1.23) existe. Portanto, $T(z)x \in D(A)$ para todo $x \in X$ e todo $z \in \triangle(\alpha)$. Mais ainda, observando que

$$A^n T(z) \;\; = \;\; A^n [T(z/n)]^n = [AT(z/n)]^n, \; \forall n \geq 1,$$

vemos que $T(z)x \in D(A^n)$, para todo $x \in X, \; z \in \triangle(\alpha)$ e $n \geq 1$.

(ii) Da demonstração do Teorema 1.38, sabemos que para $z \in \triangle(\alpha)$

$$T(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu,$$

onde $\eta = \frac{z}{|z|}$. Dessa forma, utilizando a igualdade (1.20) e o Lema 3.24, temos

$$\begin{aligned} AT(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} AR\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{\mu\eta}}{|z|} \left(\frac{\mu}{|z|} R\left(\frac{\mu}{|z|} : A\right) - I\right) d\mu, \end{aligned}$$

para todo $z \in \triangle(\alpha)$. Logo, utilizando desigualdades análogas à (1.18) e à (1.19), obtemos

$$\begin{aligned} \|AT(z)\| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{e^{Re(\mu\eta)}}{|z|} \left[\frac{|\mu|}{|z|} \frac{M|z|}{|\mu|} + 1\right] d|\mu| \\ &= \frac{(M+1)}{2\pi|z|} \left[\int_{\Gamma_1} e^{Re(\mu\eta)} d|\mu| + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_1} e^{Re(\mu\eta)} d|\mu|\right] \\ &\leq \frac{(M+1)}{2\pi|z|} \left[e|\Gamma_1| + \frac{2e^{-\sin(\varepsilon)}}{\sin(\varepsilon)}\right] = \frac{M_1(\varepsilon)}{|z|}, \forall z \in \triangle(\alpha), \end{aligned} \tag{1.24}$$

onde $M_1 = \frac{(M+1)}{2\pi} \left[e|\Gamma_1| + \frac{2e^{-\sin(\varepsilon)}}{\sin(\varepsilon)}\right]$. Assim, utilizando o item (**i**), para $n \geq 1$ temos

$$\|A^n T(z)\| \;\; \leq \;\; \|AT(z/n)\|^n \leq \left(\frac{M_1(\varepsilon) n}{|z|}\right)^n \leq \frac{M_n(\varepsilon)}{|z|^n}, \; \forall z \in \triangle(\alpha),$$

onde $M_n(\varepsilon) = [nM_1(\varepsilon)]^n$, o que finaliza a demonstração do item (**ii**). ■

1.5 Operador Espectral de Riesz

O objetivo de seção é apresentar uma classe de operadores lineares que são geradores infinitesimais de um C_0-semigrupo. No que segue desta seção, $(Z, ||.||)$ será um espaço de Hilbert munido do produto interno $<, >$. Inicialmente, incluimos alguns conceitos e resultados necessários.

Definição 1.41. *Uma família de vetores* $\{\phi_n : n \geq 1\}$ *em* Z *é uma base de Riesz para* Z *se as seguintes condições são verificadas:*

(a) $\overline{\langle\{\phi_n : n \geq 1\}\rangle} = Z$*;*

(b) *Existem constantes* $m > 0$ *e* $M > 0$ *tais que para* $N \in \mathbb{N}$ *arbitrário e escalares* α_n*,* $n = 1, ..., N$ *arbitrários,*

$$m \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^2 \leq \left\| \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \phi_n \right\|^2 \leq M \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^2. \tag{1.25}$$

Da definição acima segue que uma base ortonormal de Z é uma base de Riesz para Z.

Definição 1.42. *Dizemos que duas sequências* (ϕ_n) *e* (ψ_n) *em* Z *são biortogonais se para todo* $n, m \in \mathbb{N}$*,*

$$\langle \phi_n, \psi_m \rangle = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \tag{1.26}$$

O próximo resultado diz que se $\{\xi_n : n \geq 1\}$ é uma base de Riesz para Z, podemos representar os elementos de Z, de forma única, como uma combinação linear de ξ_n através de uma sequência biortogonal correspondente à $\{\xi_n : n \geq 1\}$.

Lema 1.43. *Seja* A *um operador linear fechado em* Z*. Suponha que os autovalores* $\{\lambda_n : n \geq 1\}$ *de* A *sejam simples e que os autovetores correspondentes* $\{\phi_n : n \geq 1\}$ *formem uma base de Riesz para* Z*.*

(a) *Se* $\{\psi_n : n \geq 1\}$ *são os autovetores do operador adjunto* A^* *de* A*, correspondendo aos autovalores* $\{\overline{\lambda}_n : n \geq 1\}$*, então* (ψ_n) *pode ser reordenado de modo que* (ϕ_n) *e* (ψ_n) *sejam biortogonais.*

(b) *Se* $\overline{\langle\{\psi_n : n \geq 1\}\rangle} = Z$*, então todo* $z \in Z$ *pode ser representado de forma única por*

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n, \tag{1.27}$$

e existem constantes $m > 0$ *e* $M > 0$ *tais que*

$$m \sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, \psi_n \rangle|^2 \leq \|z\|^2 \leq M \sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, \psi_n \rangle|^2. \tag{1.28}$$

(c) *Se* $\overline{\langle\{\psi_n : n \geq 1\}\rangle} = Z$*, então* $\{\psi_n : n \geq 1\}$ *também é uma base de Riesz para* Z*. Além disso, todo* $z \in Z$ *pode ser representado de maneira única por*

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, \phi_n \rangle \psi_n \tag{1.29}$$

e

$$\frac{1}{M} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, \phi_n \rangle|^2 \leq \|z\|^2 \leq \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, \phi_n \rangle|^2. \tag{1.30}$$

Demonstração: Para mais detalhes veja [Silva [40], Lema 1.42, pág. 33].

Definição 1.44. *Seja* A *um operador linear fechado em* Z*, com autovalores simples* $\{\lambda_n : n \geq 1\}$ *e suponha que os autovetores correspondentes* $\{\phi_n : n \geq 1\}$ *formem uma base de Riesz para Z. Se o fecho de* $\{\lambda_n : n \geq 1\}$ *é totalmente desconexo, então* A *é chamado um operador espectral de Riesz.*

Observação 1.45. Dizer que $\{\lambda_n : n \geq 1\}$ é totalmente desconexo significa que os únicos subconjuntos conexos de $\overline{\{\lambda_n : n \geq 1\}}$ são $\emptyset$ e seus pontos. Isto equivale a dizer que suas componentes conexas são pontos.

O próximo Teorema fornece condições sobre um operador linear A, para garantir que A seja o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. Além disso, conseguimos a representação deste semigrupo. Antes porém, faz-se necessário definir $\sigma(A) = \rho(A)^c$ o espectro de A.

Teorema 1.46. *Seja* A *um operador espectral de Riesz com autovalores simples* $\{\lambda_n : n \geq 1\}$ *e autovetores correspondentes* $\{\phi_n : n \geq 1\}$*. Sejam* $\{\psi_n : n \geq 1\}$ *os autovetores de* A^* *e suponha que* $\langle \phi_n, \psi_m \rangle = \delta_{mn}$ *para todo* $n, m \in \mathbb{N}$ *e que* $\overline{\langle\{\psi_n : n \geq 1\}\rangle} = Z$*. Então,* A *satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) *O conjunto resolvente e o espectro de* A *são dados por* $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \inf_{n \geq 1} |\lambda - \lambda_n| > 0\}$ *e* $\sigma(A) = \overline{\{\lambda_n : n \geq 1\}}$*, respectivamente. Mais ainda, para* $\lambda \in \rho(A)$ *e* $z \in Z$*,*

$$R(\lambda : A)z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n. \tag{1.31}$$

(b) *Para cada* $z \in D(A)$*,*

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle\, z, \psi_n \rangle \phi_n, \tag{1.32}$$

e $D(A) = \{z \in Z : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle\, z, \psi_n \rangle|^2 < \infty\}$*.*

(c) *O operador A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ se, e somente se, $\sup_{n\geq 1} Re\,\lambda_n < \infty$. Mais ainda, para $t > 0$ e $z \in Z$,*

$$T(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t}\langle z, \psi_n\rangle \phi_n. \tag{1.33}$$

Demonstração. **(a)** Dado $\lambda_k \in \{\lambda_n : \ n \geq 1\}$ um autovalor de A e ϕ_k seu autovetor associado, temos $A\phi_k = \lambda_k \phi_k$. Então, $(\lambda_k I - A)\phi_k = 0$, com $\phi_k \neq 0$, o que implica que $(\lambda_k I - A)$ não é invertível e, consequentemente, $\{\lambda_n : \ n \geq 1\} \subset \sigma(A)$. Assim, utilizando que o espectro de um operador fechado também é fechado, temos $\overline{\{\lambda_n : \ n \geq 1\}} \subset \overline{\sigma(A)} = \sigma(A) = \rho(A)^c$.

Tomemos agora $\lambda \in \left(\overline{\{\lambda_n : \ n \geq 1\}}\right)^c$. Então, $\inf_{n\geq 1} |\lambda - \lambda_n| \geq \alpha > 0$, para algum $\alpha > 0$. Mostremos que $(\lambda I - A)^{-1} = A_\lambda$, onde A_λ é o operador dado por $A_\lambda z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_n}\langle z, \psi_n\rangle \phi_n$, $z \in Z$. Note primeiro que A_λ é limitado, pois de (1.25) e (1.28) segue que

$$\|A_\lambda z\|^2 \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda - \lambda_n|^2} |\langle z, \psi_n\rangle|^2 \leq \frac{M}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, \psi_n\rangle|^2 \leq \frac{M}{m\alpha^2}\|z\|^2.$$

Definindo $y_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\lambda - \lambda_n}\langle z, \psi_n\rangle \phi_n$ é fácil ver que $y_N \to A_\lambda z$ quando $N \to \infty$. Além disso, como ϕ_n é autovetor associado a λ_n, temos que

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)y_N &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\lambda - \lambda_n}\langle z, \psi_n\rangle (\lambda I - A)\phi_n \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\lambda - \lambda_n}\langle z, \psi_n\rangle (\lambda - \lambda_n)\phi_n \\ &= \sum_{n=1}^{N} \langle z, \psi_n\rangle \phi_n,\end{aligned}$$

o que implica, do Lema 1.43, que $(\lambda I - A)y_N \to z$ quando $N \to \infty$. Como A é fechado, segue que $A_\lambda z \in D(A)$ e que

$$(\lambda I - A)A_\lambda z = z, \quad \text{para todo } \ z \in Z. \tag{1.34}$$

Agora, dado $y \in D(A)$, defina $x = (\lambda I - A)y$. De (1.34) temos que

$$x = (\lambda I - A)A_\lambda x = (\lambda I - A)A_\lambda(\lambda I - A)y.$$

Logo,

$$0 = x - x = (\lambda I - A)[y - A_\lambda(\lambda I - A)y],$$

o que implica que $A_\lambda(\lambda I - A)y = y$, pois λ não é autovalor de A. Isto, junto com (1.34) mostra que $\lambda \in \rho(A)$ e que $A_\lambda = (\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda : A)$, isto é, $\left(\overline{\{\lambda_n : \ n \geq 1\}}\right)^c \subset \rho(A)$, $\sigma(A) = \overline{\{\lambda_n : \ n \geq 1\}}$ e $R(\lambda : A)z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n$, o que completa a prova de **(a)**.

(b) Inicialmente, mostramos que $S = \{z \in Z : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle \ z, \psi_n \rangle|^2 < \infty\} \subset D(A)$ e que (1.32) vale para todo $z \in S$. Dado $z \in S$, defina $z_N = \sum_{n=1}^{N} \langle \ z, \psi_n \rangle \phi_n$. Então,

$$Az_N = \sum_{n=1}^{N} \langle \ z, \psi_n \rangle A\phi_n = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle \ z, \psi_n \rangle \phi_n.$$

Do Lema 1.43 segue que $z_N \to z$ quando $N \to \infty$ e de (1.25) segue que $Az_N \to \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \ z, \psi_n \rangle \phi_n$ em Z, pois $z \in S$. Dessa forma, como A é fechado, concluímos que $z \in D(A)$ e $Az = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \ z, \psi_n \rangle \phi_n$. Portanto, $S \subset D(A)$ e (1.32) vale para $z \in S$.

Agora resta mostrarmos a inclusão $D(A) \subset S$. Seja $\lambda \in \rho(A)$ e fixemos $x \in D(A)$ e $y \in Z$ tais que $x = (\lambda I - A)^{-1} y$. Pelo item **(a)** e por (1.27) sabemos, respectivamente, que

$$x = (\lambda I - A)^{-1} y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle y, \psi_n \rangle \phi_n \text{ e } x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \psi_n \rangle \phi_n,$$

o que nos permite concluir (da unicidade da representação de Riesz) que $\dfrac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle y, \psi_n \rangle = \langle x, \psi_n \rangle$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\mu = \inf_{n \geq 1} |\lambda - \lambda_n| > 0$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle \ x, \psi_n \rangle|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \right|^2 |\langle \ y, \psi_n \rangle|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_n} - 1 \right|^2 |\langle \ y, \psi_n \rangle|^2 \\
&\leq \left[\frac{|\lambda|}{\mu} + 1 \right]^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \ y, \psi_n \rangle|^2 \\
&\leq \frac{1}{m} \left[\frac{|\lambda|}{\mu} + 1 \right]^2 \|y\|^2 < \infty,
\end{aligned}$$

o que prova que $x \in S$ e, portanto, $D(A) \subset S$. Assim, $D(A) = S$ o que completa o item **(b)**.

(c) Suponhamos que A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ tal que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, para algum $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$. Nestas condições, do Teorema de Hille-Yosida sabemos que $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\, \lambda > \omega\}$ e, como consequência, $\sup\limits_{n \geq 1} Re\, \lambda_n < \omega + 1 < \infty$.

Suponhamos agora que $\sup_{n \geq 1} Re\, \lambda_n < \infty$ e definamos $\omega := \sup\limits_{n \geq 1} Re\, \lambda_n < \infty$. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $Re\, \lambda > \omega$. Nestas condições, $\lambda \in \sigma(A)^c = \rho(A)$ e do item **(a)** segue que $(\lambda I - A)^{-1} z =$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda-\lambda_n}\langle z, \psi_n\rangle \phi_n,\ z \in Z$. Além disso, é fácil ver que

$$\begin{aligned}
(\lambda I-A)^{-2} z &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda-\lambda_n}\langle(\lambda I-A)^{-1} z, \psi_n\rangle \phi_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda-\lambda_n}\left\langle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda-\lambda_m}\langle z, \psi_m\rangle \phi_m, \psi_n\right\rangle \phi_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda-\lambda_n)^2}\langle z, \psi_n\rangle \phi_n,
\end{aligned}$$

e podemos verificar, por um processo indutivo, que

$$(\lambda I-A)^{-r} z=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda-\lambda_n)^r}\langle z, \psi_n\rangle \phi_n, \quad \text{para todo } \ r \in \mathbb{N}.$$

Logo, usando a igualdade acima, (1.25) e (1.28) obtemos que

$$\|(\lambda I-A)^{-r} z\|^2 \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda-\lambda_n|^{2r}}|\langle z, \psi_n\rangle|^2 \leq \frac{M}{m} \frac{\|z\|^2}{(Re\,\lambda-\omega)^{2r}},$$

o que mostra que $\|R(\lambda: A)^r\| \leq \sqrt{\dfrac{M}{m}} \dfrac{1}{(Re\,\lambda-\omega)^r}$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $Re\,\lambda>\omega$ e todo $r \in \mathbb{N}$. Dessa forma, do Teorema Hille-Yosida, segue que A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ tal que $\|T(t)\| \leq \sqrt{\frac{M}{m}} e^{\omega t}$ para todo $t>0$.

Para mostrarmos (1.33) defina o operador e^{tA} em Z por $e^{tA} z=\sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t}\langle z, \psi_n\rangle \phi_n$. Veja que e^{tA} é um operador limitado para todo $t>0$, pois

$$\|e^{tA} z\|^2 \leq M \sum_{n=1}^{\infty} e^{2t Re\,\lambda_n}|\langle z, \psi_n\rangle|^2 \leq \frac{M e^{2\omega t}}{m}\|z\|^2, \text{ para todo } z \in Z.$$

Além disso, para $\lambda \in \mathbb{C}$ com $Re\,\lambda>\omega$ temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} e^{tA} z dt &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t}\langle z, \psi_n\rangle \phi_n\right) dt \\
&= \int_0^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{(\lambda_n-\lambda) t}\langle z, \psi_n\rangle \phi_n\right) dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\langle z, \psi_n\rangle \phi_n \int_0^{\infty} e^{(\lambda_n-\lambda) t} dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda-\lambda_n}\langle z, \psi_n\rangle \phi_n=R(\lambda: A) z.
\end{aligned}$$

Da demonstração do Teorema de Hille-Yosida sabe-se que $R(\lambda : A)z = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)z\ dt$, o que implica que

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}[e^{tA}z - T(t)z]\ dt = 0,$$

para todo $Re\,\lambda > \omega$. Logo, da unicidade da Transformada de Laplace, segue que

$$T(t)z = e^{tA}z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t}\langle z, \psi_n\rangle \phi_n,$$

para todo $z \in Z$, o que completa a prova. ■

A seguir apresentamos uma aplicação dos resultados acima.

Exemplo 1.47. Consideremos em $Z = (L^2[0,\pi], \|\cdot\|_2)$ o operador $A : D(A) \subset Z \longrightarrow Z$, dado por $Af = f''$, com domínio $D(A) = \{f \in Z : f'' \in Z,\ f(0) = f(\pi) = 0\}$.

Como uma aplicação do Teorema 1.46, veremos que A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo compacto em Z.

Observe, primeiramente, que A não é invertível pois, por exemplo, para $c \neq 0$ temos que $f = c \in L^2[0,\pi]$ e $Af = 0$.

Assim, usamos o Lema 3.30 (Apêndice) para mostrar que $(I - A)$ é fechado e, como consequência, obter que A é fechado. Para provarmos que $(I - A)^{-1}$ existe, precisamos garantir que dado $f \in Z$ com $(I - A)f = 0$, então $f = 0$. Note que $(I - A)f = 0$ é equivalente a

$$\begin{cases} f''(x) - f(x) &= 0, \quad 0 < x < \pi, \\ f(0) = f(\pi) &= 0. \end{cases}$$

A solução geral da EDO acima é dada por $f(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$. Logo, aplicando a solução nas condições iniciais encontramos $c_1 = c_2 = 0$ e, consequentemente, $f(x) = 0$ para todo $x \in [0,\pi]$, de onde concluímos que $(I - A)$ é injetor.

Além disso, precisamos garantir que $(I - A)$ é sobrejetor, isto é, dado $g \in Z$, devemos encontrar $f_g \in D(A)$ de modo que $(I - A)f_g = g$, o que equivale a solucionar seguinte PVI

$$\begin{cases} f_g''(x) - f_g(x) &= -g(x), \quad 0 < x < \pi, \\ f_g(0) = f_g(\pi) &= 0. \end{cases} \tag{1.35}$$

Da teoria de equações diferenciais, obtem-se que (1.35) tem uma única solução dada por

$$\begin{aligned} f_g(x) &= \frac{1}{2(e^\pi - e^{-\pi})}\int_0^\pi [e^{(\pi-|x-y|)} + e^{-(\pi-|x-y|)} - e^{(\pi-x-y)} - e^{-(\pi-x-y)}]g(y)\ dy \\ &= \frac{1}{2(e^\pi - e^{-\pi})}\int_0^\pi h(x,y)g(y)\ dy, \end{aligned}$$

garantindo que $(I - A)$ é invertível.

Mais ainda, temos que existe $C > 0$ tal que $| \, h(x,y) \, | \leq C$ para $x, y \in [0, \pi]$. Desse modo, usando a Desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned}
\| \, (I-A)^{-1} g \, \|_2^2 = \|f_g\|_2^2 &= \int_0^\pi |f_g(x)|^2 \, dx = \int_0^\pi \left| \frac{1}{2(e^\pi - e^{-\pi})} \int_0^\pi h(x,y) g(y) \, dy \right|^2 \, dx \\
&\leq \frac{C^2}{4(e^\pi - e^{-\pi})^2} \int_0^\pi \left(\int_0^\pi |g(y)| \, dy \right)^2 \, dx \\
&\leq \frac{C^2}{4(e^\pi - e^{-\pi})^2} \int_0^\pi \left(\int_0^\pi 1^2 \, dy \int_0^\pi |g(y)|^2 \, dy \right) \, dx \\
&= \frac{C^2 \pi^2}{4(e^\pi - e^{-\pi})^2} \|g\|_2^2,
\end{aligned}$$

o que implica que $(I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(Z)$. Assim, do Lema 3.30 concluímos que $(I - A)$ é fechado e, portanto, que A é também fechado.

Agora, mostramos que A é um operador espectral de Riesz. Para isso, considere a seguinte equação diferencial

$$\begin{cases} z''(x) - \lambda z(x) &= 0, \quad 0 < x < \pi, \\ z(0) = z(\pi) &= 0. \end{cases} \tag{1.36}$$

A equação característica para a EDO acima é dada por $r^2 - \lambda = 0$ e então, temos $r = \sqrt{\lambda}$ ou $r = -\sqrt{\lambda}$. Se $\lambda > 0$, a solução geral da EDO (1.36) é dada por $z(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} x}$. Além disso, aplicando z nas condições iniciais obtemos $c_1 = c_2 = 0$. Se $\lambda < 0$, então as raízes são $\sqrt{-\lambda}\, i$ ou $-\sqrt{-\lambda}\, i$ e a solução geral da EDO é dada por $z(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda} x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda} x)$, para todo $x \in [0, \pi]$. Logo, aplicando z nas condições iniciais obtemos $c_1 = 0$ e $c_2 \sin(\sqrt{-\lambda} \pi) = 0$. Sendo $c_2 \neq 0$, concluímos que os autovalores de A são dados por $\lambda_n = -n^2, \;\; n \in \mathbb{N}$. Encontramos também os autovetores unitários associados a seus autovalores. Para isso, precisamos encontrar c_2 de forma que $\|c_2 \sin(nx)\|_2 = 1$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^\pi |c_2 \sin(nx)|^2 dx \right)^{1/2} &= |c_2| \left(\int_0^\pi \sin^2(nx) dx \right)^{1/2} \\
&= |c_2| \left[\int_0^\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2nx)}{2} \right) dx \right]^{1/2} \\
&= |c_2| \left(\int_0^\pi \frac{1}{2} dx - \int_0^\pi \frac{\cos(2nx)}{2} dx \right)^{1/2} \\
&= |c_2| \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} = 1.
\end{aligned}$$

A igualdade acima mostra que devemos tomar $c_2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}$, de onde obtemos que os autovalores unitários são dados por $z_n(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}$. Da teoria clássica de análise funcional, sabemos que $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base Hilbertiana para Z o que, em particular, mostra que $D(A)$ é denso em X. Como o conjunto $\rho = \{-n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ é totalmente desconexo, do que fizemos previamente, podemos concluir que A é um operador espectral de Riesz.

Para finalizar, precisamos encontrar os autovetores do operador adjunto $A^* : D(A^*) \subset X \longrightarrow X$, associados aos autovalores $\overline{\lambda}_n = -n^2$, $n \in \mathbb{N}$ de A^*. Com esse intuito, dados $f, g \in D(A)$, aplicando integração por partes obtemos

$$\begin{aligned}
\langle Af, g\rangle = \langle f'', g\rangle &= \int_0^\pi f''(x)\overline{g(x)}\, dx \\
&= \overline{g(x)}f'(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)\overline{g'(x)}\, dx \\
&= -\int_0^\pi f'(x)\overline{g'(x)}\, dx \\
&= -\overline{g'(x)}f(x)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi f(x)\overline{g''(x)}\, dx \\
&= \int_0^\pi f(x)\overline{g''(x)}\, dx = \langle f, Ag\rangle.
\end{aligned}$$

Dessa forma, visto que f e g são arbitrários, concluímos que $A^*g = Ag$ para todo $g \in D(A)$. Em particular, obtemos que cada z_n, $n \in \mathbb{N}$, é também autovetor de A^*.

Das conclusões acima, vemos que A verifica as hipóteses do Teorema 1.46. Portanto, A é o gerador de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ em Z. Mais ainda, as seguintes propriedades são verificadas:

(i) A possui espectro discreto, os autovalores são da forma $-n^2$, $n \in \mathbb{N}$, com correspondentes autovetores $z_n(x) = (2/\pi)^{1/2}\sin(nx)$. Além disso, o conjunto $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base ortonormal de Z.

(ii) Se $f \in D(A)$, então $Af = -\sum_{n=1}^\infty n^2\langle f, z_n\rangle z_n$.

(iii) Para cada $f \in X$, $T(t)f = \sum_{n=1}^\infty e^{-n^2 t}\langle f, z_n\rangle z_n$. Mais ainda, pode-se verificar a partir desta expressão que $\|T(t)\| \leq e^{-t} \leq 1$ para todo $t \geq 0$.

1.6 Espaços Intermediários

Nesta seção estudamos os espaços chamados espaços intermediários entre $D(A)$ e X. Inicialmente, definimos e estudamos as chamadas potências fracionárias e, em seguida, estudamos algumas propriedades dos espaços $D_A(\alpha, \infty)$ para $0 < \alpha < 1$.

1.6.1 Potências Fracionárias de Operadores Lineares Fechados

A seguir vamos definir as potências fracionárias de certos operadores lineares ilimitados e estudar algumas de suas propriedades. Nos concentramos principalmente em potências fracionárias de operadores A para o qual $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico.

Para a teoria que desenvolveremos, vamos fixar a seguinte condição.

Condição 1.48. *Seja A um operador linear fechado densamente definido para o qual $\rho(A) \supset \Sigma_\omega^+ \cup V$, onde $\Sigma_\omega^+ = \{\lambda \in \mathbb{C};\ 0 < \omega < |arg(z)| \leq \pi\}$ e V é uma vizinhança do zero, e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{1+|\lambda|}$, para $\lambda \in \Sigma_\omega^+$.*

Proposição 1.49. *Se A satisfaz a Condição 1.48 com $M = 1$ e $\omega = \pi/2$ então $-A$ é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo.*

Demonstração. Se $M = 1$ e $\omega = \pi/2$ então, dado $\lambda \in \Sigma_{\pi/2}^+ = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ \pi/2 < |arg(z)| \leq \pi\}$ temos que $(\lambda I - A)^{-1}$ existe e pertence a $\mathcal{L}(X)$. Mais ainda, $(\lambda I - A)^{-1} = [-1(A - \lambda I)]^{-1} = -(\mu I + A)^{-1}$, onde $\mu = -\lambda$. Logo, se $\lambda \in \rho(A)$, então $\mu \in \rho(-A)$ e $R(\mu : -A) = -R(\lambda : A)$. Mais ainda, para $\mu > 0$, $\|R(\mu : -A)\| = \|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{|\lambda|} = \frac{1}{\mu}$.

Portanto, como $D(A) = D(-A)$ e $-A$ também é fechado, segue pelo Teorema de Hille-Yosida que $-A$ é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo. ■

Proposição 1.50. *Se A satisfaz a Condição 1.48 para $\omega < \pi/2$ então $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico.*

Demonstração. Se $\omega < \pi/2$, tomando $\theta = \pi - \omega$ considere $\triangle(\theta) = \{z \in \mathbb{C} :\ 0 < |\arg(z)| < \theta\}$. Então, dado $\lambda \in \Sigma_\omega^+$ temos $\omega < |arg(\lambda)| \leq \pi$ e assim $0 < |arg(-\lambda)| < \pi - \omega$. Ou seja, $-\lambda \in \triangle(\theta)$.

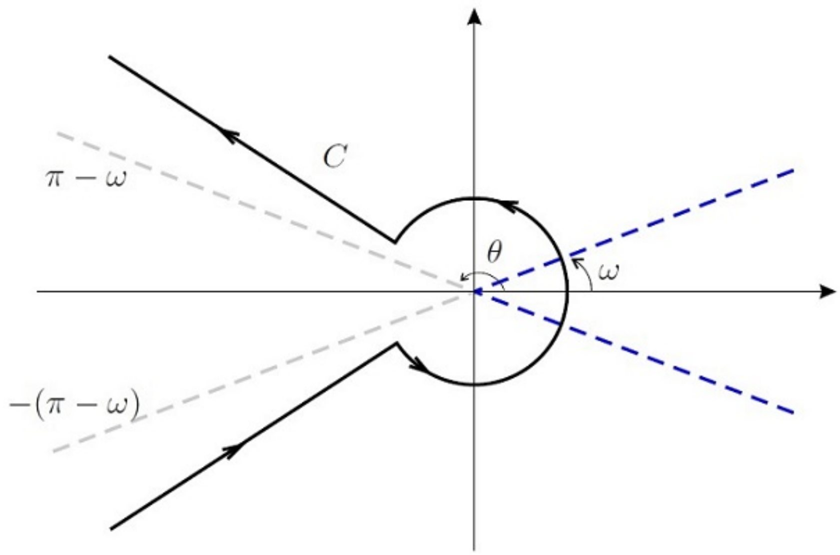
Como $\lambda \in \rho(A)$ implica $-\lambda \in \rho(-A)$, concluímos que $\triangle(\theta) \subset \rho(-A)$ e que, para $\mu = -\lambda \in \triangle(\theta)$, $\|R(\mu : A)\| = \|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|} = \frac{M}{|\mu|}$. Logo, $-A \in (\theta, M)$ e, pelo Teorema 1.39, para cada $\varepsilon > 0$ satisfazendo $2\varepsilon < \theta - \pi/2$, temos que $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico no setor $\triangle(\theta - \pi/2 - 2\varepsilon) = \triangle(\pi/2 - \omega - 2\varepsilon)$. ■

Definição 1.51. *Para um operador A satisfazendo a Condição 1.48 e $\alpha > 0$ definimos o operador*

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \lambda^{-\alpha}(A - \lambda I)^{-1}\ d\lambda, \tag{1.37}$$

onde C é a curva contida no conjunto resolvente de A dada por $C = \overline{\gamma}_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, onde $\overline{\gamma}_1$ é a curva $\gamma_1(t) = te^{-i\psi}$, $\eta \leq t < +\infty$, percorrida no sentido contrário, $\gamma_2(\phi) = \eta e^{i\phi}$, $-\psi \leq \phi \leq \psi$, e $\gamma_3(t) = te^{i\psi}$, $\eta \leq t < +\infty$, com $\omega < \psi < \pi$ e $\eta > 0$ tal que $B_\eta(0) \subset V$, como na Figura 1.5.

Figura 1.5: Curva C.



Fonte: Andrade [3] (2014, pág. 50)

Proposição 1.52. *Seja A satisfazendo a Condição 1.48, então a integral da Definição 1.51 converge uniformemente e, consequentemente, $A^{-\alpha}$ é um operador linear limitado.*

Demonstração. Inicialmente, fixemos $r > \max\{1, \eta\}$ e seja C_r a parte da curva C sobre a circunferência de centro na origem e raio r, isto é, a parte da curva C que vai de $re^{-i\psi}$ até $re^{i\psi}$. Então, para $\alpha > 0$ temos que

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \lambda^{-\alpha}(A - \lambda I)^{-1}\, d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{C \setminus C_r} \lambda^{-\alpha}(A - \lambda I)^{-1}\, d\lambda.$$

Usando a representação anterior, vemos que

$$\begin{aligned}
\left\| A^{-\alpha} - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \lambda^{-\alpha}(A-\lambda I)^{-1}\, d\lambda \right\| &= \left\| \frac{1}{2\pi i}\int_{C\setminus C_r} \lambda^{-\alpha}(A-\lambda I)^{-1}\, d\lambda \right\| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_r^\infty \|t^{-\alpha}e^{i\alpha\psi}\|\ \|(A-te^{-i\psi}I)^{-1}\|\ dt \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_r^\infty \|t^{-\alpha}e^{-i\alpha\psi}\|\ \|(A-te^{i\psi}I)^{-1}\|\ dt \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_r^\infty t^{-\alpha}e^{Re(i\alpha\psi)}\ \frac{M}{1+t}\ dt \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_r^\infty t^{-\alpha}e^{Re(-i\alpha\psi)}\ \frac{M}{1+t}\ dt \\
&= \frac{M}{2\pi}\int_r^\infty t^{-\alpha-1}e^0\frac{t}{1+t}dt + \frac{M}{2\pi}\int_r^\infty t^{-\alpha-1}e^0\frac{t}{1+t}dt \\
&\leq \frac{M}{\pi}\int_r^\infty t^{-\alpha-1}dt \\
&= \frac{M}{\pi\alpha r^\alpha},
\end{aligned}$$

o que implica que

$$\left\| A^{-\alpha} - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \lambda^{-\alpha}(A-\lambda I)^{-1}\, d\lambda \right\| \to 0 \text{ quando } r \to \infty.$$

Logo, como, para cada $r > \max\{1,\eta\}$, $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \lambda^{-\alpha}(A-\lambda I)^{-1}\, d\lambda$ é um operador linear limitado e a convergência anterior é uniforme, segue que $A^{-\alpha}$ é um operador linear limitado. ■

Proposição 1.53. *Seja A satisfazendo a Condição 1.48. Se $\alpha = n \in \mathbb{N}$ então A^{-n} é a n-ésima iterada de A^{-1}, isto é, $A^{-n} = (A^{-1})^n$.*

Demonstração. Como A satisfaz a Condição 1.48, existe um $r > 0$ tal que a função $\lambda \to (A-\lambda I)^{-1}$ é analítica em $B_r(0) = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| \leq r\} \subset V$. Mais ainda, como observado em (1.12), $R(\lambda : A) - R(\mu : A) = (\mu - \lambda)R(\lambda : A)R(\mu : A)$, para todos $\mu, \lambda \in \rho(A)$. Então

$$\frac{d}{d\lambda}R(\lambda : A) = \lim_{\mu\to\lambda} \frac{R(\lambda : A) - R(\mu : A)}{\lambda - \mu} = -\lim_{\mu\to\lambda} R(\lambda : A)R(\mu : A) = (-1)R(\lambda : A)^2 \quad (1.38)$$

Assim, por um processo indutivo segue que $\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda : A) = (-1)^n n! R(\lambda : A)^{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo, como $(A-\lambda I)^{-1} = R(-\lambda : -A)$, a série de Taylor da função $\lambda \mapsto (A-\lambda I)^{-1}$ em torno de $-\lambda = 0$ é dada por

$$(A-\lambda I)^{-1} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k k! R(0 : -A)^{k+1}}{k!}(-\lambda - 0)^k = \sum_{k=0}^\infty (A^{-1})^{k+1}\lambda^k. \quad (1.39)$$

Dessa forma, $\lambda^{-n}(A-\lambda I)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(A^{-1})^{k+1}\lambda^{k-n} = \sum_{k=-n}^{\infty}(A^{-1})^{k+n+1}\lambda^{k}$ é a série de Laurent da função $\lambda \mapsto \lambda^{-n}(A-\lambda I)^{-1}$, cujo coeficiente do índice -1 é $(A^{-1})^n$. Agora, a função $\lambda \mapsto \lambda^{-n}(A-\lambda I)^{-1}$ é analítica em $B_r(0)-\{0\} = \{z \in \mathbb{C} : \; 0 < |z| \leq r\}$ e sobre sua fronteira, sendo $\lambda = 0$ a única singularidade da função neste conjunto. Então, aplicando o Teorema dos Resíduos para a curva fechada $C_r \cup D_r$, onde C_r é a curva definida na Proposição 1.52 e $D_r(\phi) = re^{i\phi}$, $\psi \leq \phi \leq 2\pi - \psi$, é arco sobre a circuferência de raio r do ponto $re^{i\psi}$ ao ponto $re^{-i\psi}$, temos

$$\int_{C_r \cup D_r} \lambda^{-n}(A-\lambda I)^{-1} d\lambda = 2\pi i \; res(\lambda^{-n}(A-\lambda I)^{-1}) = 2\pi i (A^{-1})^n.$$

Por outro lado, observando que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{D_r} \lambda^{-n}(A-\lambda I)^{-1} d\lambda \right\| &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\psi}^{2\pi-\psi} (re^{i\phi})^{-n}(A - re^{i\phi} I)^{-1} \; rie^{i\phi} d\phi \right\| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\psi}^{2\pi-\psi} r^{-n} e^{Re(-i\phi n)} \; \|(A - re^{i\phi}I)^{-1}\| \; r d\phi \\ &\leq \frac{M}{2\pi r^n} \int_{\psi}^{2\pi-\psi} d\phi \leq \frac{M(\pi-\psi)}{\pi r^n} \to 0 \text{ quando } r \to \infty, \end{aligned}$$

concluímos que $A^{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \lambda^{-n}(A-\lambda I)^{-1} d\lambda = (A^{-1})^n$, o que finaliza a demonstração. ■

Proposição 1.54. *Suponha que A satizfaz a Condição 1.48 e seja $A^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, o operador da Definição 1.51. Então,*

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^{\infty} t^{-\alpha}(A + tI)^{-1} dt.$$

Demonstração. Da Definição 1.51 temos

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\overline{\gamma}_1} \lambda^{-\alpha}(A-\lambda I)^{-1} d\lambda + \int_{\gamma_2} \lambda^{-\alpha}(A-\lambda I)^{-1} d\lambda + \int_{\gamma_3} \lambda^{-\alpha}(A-\lambda I)^{-1} d\lambda \right). \tag{1.40}$$

Vamos analisar cada uma das três integrais separadamente. Para a primeira integral temos que

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\gamma}_1} \lambda^{-\alpha}(A-\lambda I)^{-1} d\lambda &= -\int_{\eta}^{\infty} (te^{-i\psi})^{-\alpha}(A - te^{-i\psi} I)^{-1} e^{-i\psi} dt \\ &= -\int_{\eta}^{\infty} t^{-\alpha} e^{i\psi\alpha}(A - te^{-i\psi} I)^{-1} e^{-i\psi} dt. \end{aligned}$$

Como $\omega < \psi < \pi$, fazendo $\psi \to \pi$ obtemos

$$t^{-\alpha} e^{i\psi\alpha}(A - te^{-i\psi} I)^{-1} e^{-i\psi} \to t^{-\alpha} e^{i\pi\alpha}(A - te^{-i\pi} I)^{-1} e^{-i\pi} = -t^{-\alpha} e^{i\pi\alpha}(A + tI)^{-1}.$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned}\left\|t^{-\alpha}e^{i\psi\alpha}(A-te^{-i\psi}I)^{-1}e^{-i\psi}\right\| &\leq t^{-\alpha}|e^{i\psi\alpha}|\;\|(A-te^{-i\psi}I)^{-1}\||e^{-i\psi}| \\ &\leq t^{-\alpha}e^{0}\frac{M}{1+t} \\ &\leq \frac{M}{t^{\alpha+1}}=g(t),\end{aligned}$$

onde $g(t)$ é integrável em (η,∞). Então, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\lim_{\psi\to\pi}\int_{\eta}^{\infty}t^{-\alpha}e^{i\psi\alpha}(A-te^{-i\psi}I)^{-1}e^{-i\psi}dt=\int_{\eta}^{\infty}-t^{-\alpha}e^{i\pi\alpha}(A+tI)^{-1}dt.$$

Analogamente, para o terceiro termo, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{\psi\to\pi}\int_{\gamma_3}\lambda^{-\alpha}(A-\lambda I)^{-1}d\lambda &= \lim_{\psi\to\pi}\int_{\eta}^{\infty}t^{-\alpha}e^{-i\psi\alpha}(A-te^{i\psi}I)^{-1}e^{i\psi}dt \\ &= \int_{\eta}^{\infty}-t^{-\alpha}e^{-i\pi\alpha}(A+tI)^{-1}dt.\end{aligned}$$

Para o segundo termo, notamos que

$$\begin{aligned}\lim_{\psi\to\pi}\int_{\gamma_2}\lambda^{-\alpha}(A-\lambda I)^{-1}d\lambda &= \lim_{\psi\to\pi}\int_{-\phi}^{\phi}(\eta e^{i\phi})^{-\alpha}(A-\eta e^{i\phi}I)^{-1}\eta i e^{i\phi}d\phi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}(\eta e^{i\phi})^{-\alpha}(A-\eta e^{i\phi}I)^{-1}\eta i e^{i\phi}d\phi.\end{aligned}$$

Logo, fazendo $\psi\to\pi$ em (1.40) obtemos que

$$\begin{aligned}A^{-\alpha} &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\eta}^{\infty}-t^{-\alpha}e^{i\pi\alpha}(A+tI)^{-1}dt+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}(\eta e^{i\phi})^{-\alpha}(A-\eta e^{i\phi}I)^{-1}\eta i e^{i\phi}d\phi \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\eta}^{\infty}-t^{-\alpha}e^{-i\pi\alpha}(A+tI)^{-1}dt. \qquad (1.41)\end{aligned}$$

Agora, observando que

$$\left\|(\eta e^{i\phi})^{-\alpha}(A-\eta e^{i\phi}I)^{-1}\eta i e^{i\phi}\right\|\leq\eta^{-\alpha}e^{0}\frac{M}{1+\eta}\eta=M\eta^{1-\alpha}\to 0,$$

quando $\eta\to 0$, do Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}(\eta e^{i\phi})^{-\alpha}(A-\eta e^{i\phi}I)^{-1}\eta i e^{i\phi}d\phi=0.$$

Assim, fazendo $\eta\to 0$ em (1.41), temos que

$$\begin{aligned}A^{-\alpha} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\infty}t^{-\alpha}e^{i\pi\alpha}(A+tI)^{-1}dt-\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\infty}t^{-\alpha}e^{-i\pi\alpha}(A+tI)^{-1}dt \\ &= \frac{e^{i\pi\alpha}-e^{-i\pi\alpha}}{2\pi i}\int_{0}^{\infty}t^{-\alpha}(A+tI)^{-1}dt \\ &= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int_{0}^{\infty}t^{-\alpha}(A+tI)^{-1}dt, \qquad (1.42)\end{aligned}$$

o que completa a prova. ■

Agora, nosso objetivo é o obter uma definição para $A^{-\alpha}, \alpha > 0$, para o caso em que $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico. Para isso assumimos que A satisfaz a Condição 1.48 para $\omega < \pi/2$ e, assim, $-A$ gera um semigrupo analítico $(T(z))_{z\in\triangle(\alpha)\cup\{0\}}$. Mais ainda, como $0 \in \rho(A)$, existe $\delta > 0$ tal que $-A + \delta I$ ainda é o gerador infinitesimal do semigrupo analítico $S(t) = e^{\delta t}T(t), t \geq 0$. Assim, pelo Teorema 1.38, temos que $\|T(t)\| \leq Me^{-\delta t}$. Agora, utilizando o Corolário 1.40 para $S(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} \|AT(t)\| &\leq \|A(A-\delta I)^{-1}\| \; \|(A-\delta I)T(t)\| \\ &= \|(A-\delta I+\delta I)(A-\delta I)^{-1}\| \; e^{-\delta t}\|(A-\delta I)S(t)\| \\ &\leq \left[1+\frac{\delta}{1+\delta}\right] e^{-\delta t}\widetilde{M_1}t^{-1} \\ &\leq 2e^{-\delta t}\widetilde{M_1}t^{-1} \\ &= M_1 e^{-\delta t}t^{-1}, \end{aligned} \tag{1.43}$$

e

$$\|A^nT(t)\| \leq \left\|AT(\frac{t}{n})\right\|^n \leq \left\|M_1e^{-\delta t/n}\left(\frac{t}{n}^{-1}\right)\right\|^n = M_ne^{-\delta t}t^{-n}. \tag{1.44}$$

Desta forma, segue que

$$R(t:-A) = (tI+A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-ts}T(s)ds, \tag{1.45}$$

onde

$$\begin{aligned} \left\|\int_0^\infty e^{-ts}T(s)ds\right\| &\leq M\int_0^\infty e^{(-t-\delta)s}ds \\ &= M\left.\frac{e^{(-t-\delta)s}}{(-t-\delta)}\right|_0^\infty = \frac{M}{t+\delta}, \end{aligned} \tag{1.46}$$

isto é, $R(t:-A)$ converge uniformemente na topologia uniforme para $t \geq 0$.

Assim, tomando $0 < \alpha < 1$, substituindo (1.45) em (1.42) e utilizando o Teorema de Fubini, obtemos

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int_0^\infty T(s)\int_0^\infty t^{-\alpha}e^{-ts}dt\; ds. \tag{1.47}$$

Logo, fazendo a mudança de variável $u = ts$ em (1.47), temos

$$\begin{aligned}
A^{-\alpha} &= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int_0^\infty s^{\alpha-1}T(s)\left(\int_0^\infty u^{-\alpha}e^{-u}du\right)\,ds \\
&= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\left(\int_0^\infty u^{-\alpha}e^{-u}du\right)\left(\int_0^\infty s^{\alpha-1}T(s)ds\right).
\end{aligned}$$

Agora, da definição da função gama $\Gamma(\cdot)$ e da Fórmula de Reflexão de Euler $\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$, segue que

$$\begin{aligned}
A^{-\alpha} &= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\left(\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(\int_0^\infty s^{\alpha-1}T(s)ds\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty s^{\alpha-1}T(s)ds,\ 0<\alpha<1. \qquad (1.48)
\end{aligned}$$

Mais ainda, como

$$\left\|\int_0^\infty s^{\alpha-1}T(s)ds\right\| \le \int_0^\infty s^{\alpha-1}\|T(s)\|\,ds \le M\int_0^\infty \left(\frac{u}{\delta}\right)^{\alpha-1} e^{-u}\delta^{-1}\,du = M\delta^{-\alpha}\Gamma(\alpha),$$

temos que a integral em (1.48) converge uniformemente para todo $\alpha > 0$, o que nos leva a seguinte definição.

Definição 1.55. *Seja A um operador linear tal que $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico. Definimos o operador $A^{-\alpha}$ por*

$$A^{-\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^\infty s^{\alpha-1}T(s)ds, & \alpha>0, \\ I, & \alpha = 0, \end{cases} \qquad (1.49)$$

onde $(T(t))_{t\ge0}$ é o C_0-semigrupo que resulta da restrição do semigrupo analítico ao intervalo $[0,\infty)$.

No que segue mostramos algumas propriedades dos operadores $A^{-\alpha}$ e introduzimos as potências fracionarias A^α.

Lema 1.56. *Para $\alpha,\beta \ge 0$, $A^{-(\alpha+\beta)} = A^{-\alpha}A^{-\beta}$.*

Demonstração. Dados $\alpha, \beta > 0$, temos

$$\begin{aligned}
A^{-\alpha}A^{-\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}T(t)\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty s^{\beta-1}T(s)ds\right)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}\int_0^\infty s^{\beta-1}T(t+s)dsdt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}\int_t^\infty (u-t)^{\beta-1}T(u)dudt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^\infty \left(\int_0^u t^{\alpha-1}(u-t)^{\beta-1}dt\right)T(u)du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^\infty \left(\int_0^1 u^{\alpha-1}v^{\alpha-1}u^{\beta-1}(1-v)^{\beta-1}udv\right)T(u)du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left(\int_0^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}dv\right)\int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1}T(u)du.
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Assim, utilizando que $\displaystyle\int_0^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}dv = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$, concluímos que

$$A^{-\alpha}A^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1}T(u)du = A^{-(\alpha+\beta)}.$$

■

Lema 1.57. *Existe $C > 0$ tal que $\|A^{-\alpha}\| \leq C$, para $0 \leq \alpha \leq 1$.*

Demonstração. Como $0 \in \rho(A)$, para $\alpha = 1$, temos $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Então existe uma constante $C_1 > 0$ tal que $\|A^{-1}\| \leq C_1$. Para $\alpha = 0$ temos que $A^{-\alpha} = I$ e assim, $\|A^{-\alpha}\| = 1$. Por outro lado, para $0 < \alpha < 1$, da Proposição 1.54, temos

$$\begin{aligned}
\|A^{-\alpha}\| &\leq \left|\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\right|\int_0^1 t^{-\alpha}\|(tI+A)^{-1}\|dt + \left|\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\right|\int_1^\infty t^{-\alpha}\|(tI+A)^{-1}\|dt \\
&\leq \left|\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\right|\int_0^1 t^{-\alpha}\frac{M}{1+t}\,dt + \left|\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\right|\int_1^\infty t^{-\alpha}\frac{M}{1+t}\,dt \\
&\leq \left|\frac{M\sin(\pi\alpha)}{\pi}\right|\int_0^1 t^{-\alpha}\,dt + \left|\frac{M\sin(\pi\alpha)}{\pi}\right|\int_1^\infty t^{-\alpha-1}\,dt \\
&\leq M\left[\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi(1-\alpha)} + \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}\right]. \\
&= M\left[\frac{\sin(\pi(1-\alpha))}{\pi(1-\alpha)} + \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}\right] \leq 2M, \quad 0 < \alpha < 1.
\end{aligned}$$

Logo, tomando $C = \max\{1, C_1, 2M\}$, obtemos que $\|A^{-\alpha}\| \leq C,$ para todo $0 \leq \alpha \leq 1$. ■

Lema 1.58. *Para todo $x \in D(A)$, $\lim\limits_{\alpha\to 0} A^{-\alpha}x = x$.*

Demonstração. Seja $x \in X$. Como $0 \in \rho(A)$ segue que $x = A^{-1}y$ para algum $y \in X$. Logo, tomando α numa vizinhança de zero, temos

$$\begin{aligned} A^{-\alpha}x - x &= A^{-\alpha-1}y - A^{-1}y \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - 1 \right) T(t)y\ dt \\ &= \int_0^k \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - 1 \right) T(t)y\ dt + \int_k^\infty \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - 1 \right) T(t)y\ dt, \end{aligned}$$

para todo $k > 0$.

Agora, de [Vrabie [45], Lemma 7.6.4, pág. 174], para $0 \leq \alpha \leq 1$ e $t \geq 1$, existe $C > 0$ tal que $\left| \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - 1 \right| \leq Ct$ e além disso, de (1.44), temos que $\|T(t)\| \leq Me^{-0\delta t}$, para todo $t \geq 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \|A^{-\alpha}x - x\| &\leq \int_0^k \left| \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - 1 \right| \|T(t)\|\ \|y\|\ dt + \int_k^\infty \left| \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - 1 \right| \|T(t)\|\ \|y\|\ dt \\ &\leq M\|y\| \int_0^k \left| \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - 1 \right| e^{-\delta t}\ dt + MC\|y\| \int_k^\infty te^{-\delta t}\ dt, \end{aligned}$$

para todo $k > 1$ e $0 \leq \alpha \leq 1$.

Assim, usando a integração por partes no segundo termo, da desigualdade acima, obtemos

$$\int_k^\infty te^{-\delta t}\ dt = -\frac{te^{-\delta t}}{\delta}\Bigg|_k^\infty + \int_k^\infty \frac{e^{-\delta t}}{\delta} dt = \frac{(k\delta+1)e^{-\delta k}}{\delta^2} \to 0 \text{ quando } k \to \infty.$$

Desse modo, dado $\varepsilon > 0$, existe $k > 1$ tal que $\displaystyle\int_k^\infty te^{-\delta t}\ dt < \varepsilon/2$. Também, utilizando que $\lim_{\alpha\to 0} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{1}{\Gamma(1)} = 1$ e o Teorema da Convergência Dominada, para α suficientemente pequeno, temos $\displaystyle\int_0^k \left| \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - 1 \right| e^{-\delta t}\ dt < \varepsilon/2$.

Logo, $\lim\limits_{\alpha\to 0} A^{-\alpha}x = x$ para todo $x \in D(A)$.

Por outro lado, como $\overline{D(A)} = X$, dado $x \in X$, existe uma sequência $(x_n) \subset D(A)$ tal que $x_n \to x$ quando $n \to \infty$. Então, utilizando o Lema 1.57, temos

$$\begin{aligned} \|A^{-\alpha}x - x\| &\leq \|A^{-\alpha}x - A^{-\alpha}x_n\| + \|A^{-\alpha}x_n - x_n\| + \|x_n - x\| \\ &\leq C\|x - x_n\| + \|A^{-\alpha}x_n - x_n\| + \|x_n - x\|, \end{aligned}$$

o que mostra que $\lim\limits_{\alpha\to 0} A^{-\alpha}x = x$, para todo $x \in X$. ■

O seguinte lema é fundamental para definir as potências fracionarias A^α com $\alpha > 0$.

Lema 1.59. *O operador $A^{-\alpha}$ é injetor para todo $\alpha \geq 0$.*

Demonstração. Pela Condição 1.48, como $0 \in \rho(A)$ e então A^{-1} existe e, consequentemente, é injetor. Dessa forma, como $A^{-n} = (A^{-1})^n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que A^{-n} também é injetor.

Seja $\alpha > 0$ qualquer. Dados $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $A^{-\alpha}x = 0$ e $n \geq \alpha$, segue que

$$A^{-n}x = A^{-n+\alpha-\alpha}x = A^{-n+\alpha}A^{-\alpha}x = A^{-n+\alpha}0 = 0,$$

o que implica que $x = 0$, pois A^{-n} é injetor. Portanto, $A^{-\alpha}$ é injetor para todo $\alpha \geq 0$.

Definição 1.60. *Suponha que A é um operador linear que satisfaz a Condição 1.48 com $\omega < \pi/2$. Para $\alpha > 0$ definimos o operador $A^\alpha : D(A^\alpha) \subset X \to X$ por*

$$A^\alpha = \begin{cases} (A^{-\alpha})^{-1}, & \alpha > 0, \\ I, & \alpha = 0, \end{cases} \tag{1.51}$$

com $D(A^\alpha) = R(A^{-\alpha})$, onde $R(A^{-\alpha})$ é a imagem do operador $A^{-\alpha}$.

Nosso objetivo agora é estudar algumas propriedades de A^α. Para isso, inicialmente, vamos enunciar um teorema que será utilizado posteriormente.

Teorema 1.61. *[Pazy [35], 1983, Teorema 2.7, pág. 6] Suponha que $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ e $D(A^n)$ é o domínio de A^n, então $\cap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ é denso em X.*

Teorema 1.62. *Seja A^α dado pela Definição 1.60. Então, os seguintes resultados são válidos:*

(a) *A^α é um operador linear fechado;*

(b) *Se $0 < \beta \leq \alpha$, então $D(A^\alpha) \subseteq D(A^\beta)$;*

(c) *$\overline{D(A^\alpha)} = X$ para todo $\alpha \geq 0$;*

(d) *Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $A^{\alpha+\beta}x = A^\alpha A^\beta x$, para todo $x \in D(A^\gamma)$, onde $\gamma = \max\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$.*

Demonstração. **(a)** Se $\alpha \leq 0$ então $A^\alpha \in \mathcal{L}(X)$. Logo, pelo Teorema do Gráfico fechado, A^α é um operador linear fechado.

Suponha agora $\alpha > 0$. Pela Definição 1.60, A^α é invertível e $(A^\alpha)^{-1} = A^{-\alpha} \in \mathcal{L}(X)$. Assim, sejam (u_n) uma sequência em $D(A^\alpha)$ e $u, v \in X$ tais que $u_n \to u$ e $A^\alpha u_n \to v$, quando $n \to \infty$.

Vamos mostar que $u \in D(A^\alpha)$ e $A^\alpha u = v$. Denotando $A^\alpha u_n = \omega_n$, então $u_n = A^{-\alpha}\omega_n$ e, como $A^{-\alpha}$ é contínuo, segue que

$$u = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} A^{-\alpha}\omega_n = A^{-\alpha} \lim_{n\to\infty} \omega_n = A^{-\alpha} v,$$

o que implica que $u \in R(A^{-\alpha}) = D(A^\alpha)$. Dessa forma, $A^\alpha u = A^\alpha A^{-\alpha} v = v$, o que prova que A^α é um operador linear fechado.

(b) Pelo Lema 1.56, $A^{-\alpha} = A^{-\alpha+\beta-\beta} = A^{-\beta}A^{-(\alpha-\beta)}$. Consequentemente, $R(A^{-\alpha}) \subseteq R(A^{-\beta})$, isto é, $D(A^\alpha) \subseteq D(A^\beta)$.

(c) Pelo Terorema 1.61, temos que $\overline{\cap_{n=1}^{\infty} D(A^n)} = X$. Dessa forma, como $\cap_{n=1}^{\infty} D(A^n) \subset D(A^n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, concluímos que $\overline{D(A^n)} = X$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Assim, dado $\alpha > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq \alpha$. Logo, pelo item (b), $D(A^n) \subseteq D(A^\alpha)$ e, consequentemente, $\overline{D(A^\alpha)} = X$, para todo $\alpha \geq 0$.

(d) Dividiremos a prova deste item nos seguintes casos: **(i)** $\alpha < 0$ e $\beta < 0$; **(ii)** $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ e **(iii)** $\alpha < 0$ e $\beta > 0$.

(i) Como $\alpha < 0$ e $\beta < 0$, pelo Lema 1.56 temos que $A^{\alpha+\beta} = A^\alpha A^\beta$, $\forall x \in X$.

(ii) Dado $x \in D(A^\alpha A^\beta)$, com $\alpha, \beta > 0$, então $x \in D(A^\beta)$ e $A^\beta x \in D(A^\alpha)$. Dessa forma, $y \in X$ tal que $y = A^\alpha A^\beta x$, obtemos que $x = A^{-(\alpha+\beta)} y$, ou seja, $x \in R(A^{-(\alpha+\beta)}) = D(A^{\alpha+\beta})$ e $A^{\alpha+\beta} x = y$. Portanto, $D(A^\alpha A^\beta) \subset D(A^{\alpha+\beta})$.

Por outro lado, tomando $x \in D(A^{\alpha+\beta})$ e $y = A^{\alpha+\beta} x$, temos que

$$x = A^{-(\alpha+\beta)} y = A^{-\beta} A^{-\alpha} y \Rightarrow A^\beta x = A^{-\alpha} y \Rightarrow A^\alpha A^\beta x = y,$$

isto é, $x \in D(A^\alpha A^\beta)$. Logo, $D(A^{\alpha+\beta}) \subset D(A^\alpha A^\beta)$. Portanto, $D(A^{\alpha+\beta}) = D(A^\alpha A^\beta)$ e $A^{\alpha+\beta} x = A^\alpha A^\beta x$, $\forall x \in D(A^{\alpha+\beta})$.

(iii) Como $\alpha < 0$ e $\beta > 0$ podemos ter $\alpha + \beta \geq 0$ ou $\alpha + \beta < 0$.

- Se $\alpha + \beta \geq 0$, como $-\alpha > 0$, pelo item (ii) segue que $A^{-\alpha} A^{\alpha+\beta} x = A^{-\alpha+\alpha+\beta} x = A^\beta x$, para todo $x \in D(A^{\alpha+\beta}) = D(A^\beta)$. Se $y = A^{\alpha+\beta} x$ com $x \in D(A^\beta)$, então temos que $A^{-\alpha} y = A^\beta x$, ou ainda, $A^\beta x \in R(A^{-\alpha}) = D(A^\alpha)$. Logo, $A^\alpha A^\beta x = A^\alpha A^{-\alpha} y = y = A^{\alpha+\beta} x$, $\forall x \in D(A^\beta)$.

- Se $\alpha + \beta < 0$, como $-\beta < 0$, pelo item (i) segue que $A^{-\beta} A^{\alpha+\beta} x = A^{-\beta+\alpha+\beta} x = A^\alpha x$, $\forall x \in D(A^\alpha)$. Se $y = A^{\alpha+\beta} x$, então $A^{-\beta} y = A^\alpha x$, o que implica que $A^\alpha x \in R(A^{-\beta}) = D(A^\beta)$ e $A^\beta A^\alpha x = A^\beta A^{-\beta} y = y = A^{\alpha+\beta} x$, $\forall x \in D(A^\alpha)$.

Para finalizar, observe que para $\gamma = \max\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$, pelo item (b) temos que $D(A^\gamma)$ está contido em $D(A^\alpha)$, $D(A^\beta)$ e $D(A^{\alpha+\beta})$ e as igualdades em (i), (ii) e (iii) são satisfeitas para todo $x \in D(A^\gamma)$. ■

No próximo resultado é estabelecida uma representação útil dos operadores A^α.

Teorema 1.63. *Para* $0 < \alpha < 1$ *e* $x \in D(A)$,

$$A^\alpha x = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty t^{\alpha-1} A(tI + A)^{-1} x \; dt.$$

Demonstração. Como $0 < \alpha < 1$, então $0 < 1 - \alpha < 1$. Logo, para $x \in D(A)$, da Proposição 1.54, segue que

$$A^{\alpha-1} x = \frac{\sin(\pi(1-\alpha))}{\pi} \int_0^\infty t^{\alpha-1} (tI + A)^{-1} x \; dt = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty t^{\alpha-1} (tI + A)^{-1} x \; dt. \tag{1.52}$$

Mais ainda, como

$$\begin{aligned} \|t^{\alpha-1} A(tI + A)^{-1} x\| &= \|t^{\alpha-1} AR(t : -A)x\| \\ &= \left\| t^{\alpha-1} A \int_0^\infty e^{-st} T(s)x \; ds \right\| \\ &= \left\| t^{\alpha-1} \int_0^\infty e^{-st} AT(s)x \; ds \right\| \\ &\leq t^{\alpha-1} M \|Ax\| \int_0^\infty e^{-st} e^{-\delta s} \; ds \leq t^{\alpha-1} M \|Ax\| \frac{1}{t+\delta}, \end{aligned}$$

segue que a função $t \mapsto t^{\alpha-1} A(tI + A)^{-1} x$ é integrável em $[0, +\infty)$, com

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\infty t^{\alpha-1} A(tI + A)^{-1} x \; dt \right\| &\leq \int_0^\infty t^{\alpha-1} M \|Ax\| \frac{1}{t+\delta} \; dt \\ &\leq M \|Ax\| \left[\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{t+\delta} \; dt + \int_1^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{t+\delta} \; dt \right] \\ &\leq M \|Ax\| \left[\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{\delta} \; dt + \int_1^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{t} \; dt \right] \\ &= M \|Ax\| \left[\frac{1}{\alpha\delta} + \frac{1}{(1-\alpha)} \right] < \infty. \end{aligned}$$

Então, pelo o item (d) do Teorema 1.62 (com $\gamma = 1 = \max\{1, \alpha - 1, \alpha\}$) e pelo Lema 3.24, segue que para todo $x \in D(A)$

$$A^\alpha x = A \left(\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty t^{\alpha-1} (tI + A)^{-1} x \; dt \right) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty t^{\alpha-1} A(tI + A)^{-1} x \; dt.$$

Teorema 1.64. *Seja $-A$ o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $(T(z))_{z\in\triangle(\theta)\cup\{0\}}$, para algum $0<\theta\leq\pi/2$. Se $0\in\rho(A)$, então:*

(a) *$T(t):X\to D(A^\alpha)$ para todo $t>0$ e $\alpha\geq 0$;*

(b) *Para $\alpha>0$ e todo $x\in D(A^\alpha)$, $T(t)A^\alpha x=A^\alpha T(t)x$;*

(c) *Para todo $\alpha>0$ e $t>0$, o operador $A^\alpha T(t)$ é limitado e $\|A^\alpha T(t)\|\leq M_\alpha t^{-\alpha}e^{-\delta t}$;*

(d) *Dados $0<\alpha\leq 1$ e $x\in D(A^\alpha)$, então $\|T(t)x-x\|\leq C_\alpha t^\alpha\|A^\alpha x\|, \forall t\geq 0$.*

Demonstração. **(a)** Inicialmente, notamos que a função $t\mapsto T(t)$ é diferenciável para todo $t>0$. Logo, utilizando o Teorema 1.29, segue que $T(t):X\to D(A^n)$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Assim, dado $\alpha\geq 0$ existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $n\geq\alpha$ e então, pelo item (b) do Teorema 1.62, segue que $D(A^n)\subset D(A^\alpha)$, isto é, $T(t):X\to D(A^\alpha)$, $\alpha\geq 0$.

(b) Sejam $\alpha>0$ e $x\in D(A^\alpha)$. Como $D(A^\alpha)=R(A^{-\alpha})$, então $x=A^{-\alpha}y$ para algum $y\in X$. Logo,

$$\begin{aligned}
T(t)x &= T(t)A^{-\alpha}y\\
&= T(t)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty s^{\alpha-1}T(s)y\ ds\right)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty s^{\alpha-1}T(s)T(t)y\ ds\\
&= A^{-\alpha}T(t)y\\
&= A^{-\alpha}T(t)A^\alpha x,
\end{aligned}$$

ou seja, $A^\alpha T(t)x=T(t)A^\alpha x$, para todo $x\in D(A^\alpha)$, $\alpha>0$. Mais ainda, a igualdade $T(t)A^{-\alpha}y=A^{-\alpha}T(t)y$ vale para todo $y\in X$. Então, segue que $T(t)A^{-\alpha}=A^{-\alpha}T(t)$, $\forall\alpha\geq 0$.

(c) Como A^α é fechado e $T(t)\in\mathcal{L}(X)$ para todo $t\geq 0$, temos que $A^\alpha T(t)$ é fechado. Logo, pelo item (a), $A^\alpha T(t)$ está bem definido em X e pelo Teorema do Gráfico Fechado, $A^\alpha T(t)$ é limitado.

Assim, dados $\alpha > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $n-1 < \alpha < n$, de (1.44), temos que

$$\begin{aligned}
\|A^{\alpha}T(t)\| &= \|A^{\alpha-n}A^{n}T(t)\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^{\infty} s^{n-\alpha-1}\|A^{n}T(t+s)\|\ ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^{\infty} s^{n-\alpha-1}M_n(t+s)^{-n}e^{-\delta(t+s)}\ ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^{\infty} (tu)^{n-\alpha-1}M_n t^{-n}(1+u)^{-n}e^{-\delta t(1+u)}t\ du \\
&= \frac{t^{-\alpha}e^{-\delta t}M_n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^{\infty} u^{n-\alpha-1}(1+u)^{-n}e^{-\delta t u}\ du \qquad (1.53)\\
&\leq \frac{t^{-\alpha}e^{-\delta t}M_n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^{\infty} u^{n-\alpha-1}(1+u)^{-n}\ du = t^{-\alpha}e^{-\delta t}M_{\alpha},
\end{aligned}$$

sendo M_{α} uma constante que não depende de t. Portanto, $\|A^{\alpha}T(t)\| \leq M_{\alpha}t^{-\alpha}e^{-\delta t}$, para todo $t > 0$.

(d) Dados $0 < \alpha \leq 1$ e $x \in D(A^{\alpha})$, pelo item (b) do Teorema 1.15, pelo item (d) do Teorema 1.62 e pelo item (b) deste teorema, temos que

$$T(t)x - x = \int_0^t AT(s)x\ ds = \int_0^t A^{1-\alpha}A^{\alpha}T(s)x\ ds = \int_0^t A^{1-\alpha}T(s)A^{\alpha}x\ ds.$$

Portanto, utilizando o item (c), obtemos que

$$\begin{aligned}
\|T(t)x - x\| &\leq \int_0^t \|A^{1-\alpha}T(s)\|\ \|A^{\alpha}x\|\ ds \\
&\leq M_{1-\alpha}\|A^{\alpha}x\|\int_0^t s^{\alpha-1}e^{-\delta s}ds \\
&\leq M_{1-\alpha}\|A^{\alpha}x\|\int_0^t s^{\alpha-1}ds \\
&= M_{1-\alpha}\|A^{\alpha}x\|\frac{t^{\alpha}}{\alpha} = C_{\alpha}t^{\alpha}\|A^{\alpha}x\|,\ \forall t \geq 0.
\end{aligned}$$

■

1.6.2 O Espaço Intermediário $D_A(\theta,\infty)$

Seja $A : D(A) \subset X \to X$ o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $(T(t))_{t\geq 0}$ no espaço de Banach X. Nesta seção vamos definir e estudar o espaço intermediário $D(A) \subset D_A(\theta,\infty) \subset X$.

Definição 1. *Para $\theta \in (0,1)$ definimos o espaço*

$$D_A(\theta,\infty) = \{x \in X : \|x\|_{\theta} = \sup_{t>0}\|t^{1-\theta}AT(t)x\| < \infty\}$$

com a norma $\|x\|_{D_A(\theta,\infty)} = \|x\| + \|x\|_{\theta}$.

Dado $i \in \mathbb{N}$, seja $M_i > 0$ tal que $\|t^i A^i T(t)\| \leq M_i,\ t \geq 0$. Então, para $x \in X$ temos que

$$\|t^{1-\theta} AT(t)x\| \leq \frac{M_1\|x\|}{t^\theta}. \tag{1.54}$$

o que implica que a função $t \mapsto t^{1-\theta}AT(t)x$ é limitada em $[c,\infty)$, para cada $c > 0$. Mais ainda, pode-se mostrar que $D_A(\theta,\infty)$ munido da norma $\|x\|_{D_A(\theta,\infty)}$ é um espaço de Banach. A seguir provamos a mais importante propriedade de $D_A(\theta,\infty)$.

Proposição 1.65. *Para cada $\theta \in (0,1)$ temos $D(A) \subset D_A(\theta,\infty) \subset \overline{D(A)}$.*

Prova: Se $x \in D(A)$ então $\lim_{t\to 0} t^{1-\theta}AT(t)x = \lim_{t\to 0} t^{1-\theta}T(t)Ax = 0$, o que implica que $x \in D_A(\theta,\infty)$. Agora, dado $x \in D_A(\theta,\infty)$ e $t > 0$, temos que $T(t)x \in D(A)$ e

$$\|T(t)x - x\| = \left\|\int_0^t AT(s)xds\right\| \leq \|x\|_\theta \int_0^t s^{\theta-1}ds = \|x\|_\theta \frac{t^\theta}{\theta}. \tag{1.55}$$

Disto segue, fazendo $t \to 0$, que $x \in \overline{D(A)}$. ■

Proposição 1.66. *Se $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$, então $D_A(\theta_2,\infty) \hookrightarrow D_A(\theta_1,\infty)$ e*

$$\|x\|_{D_A(\theta_1,\infty)} \leq (1+M_1)\|x\|_{D_A(\theta_2,\infty)},\ x \in D_A(\theta_2,\infty). \tag{1.56}$$

Mais ainda, para $\theta \in (0,1)$, $D(A) \hookrightarrow D_A(\theta,\infty) \hookrightarrow X$ e

$$\|x\|_{D_A(\theta,\infty)} \leq (M_0+M_1)\|x\|_{D(A)},\ x \in D(A). \tag{1.57}$$

Prova: Dado $x \in D_A(\theta_2,\infty)$, então

$$\lim_{t\to 0} t^{1-\theta_1}AT(t)x = \lim_{t\to 0} t^{\theta_2-\theta_1}t^{1-\theta_2}AT(t)x = 0.$$

Assim, por (1.54) com $\theta = \theta_1$, segue que $D_A(\theta_2,\infty) \subset D_A(\theta_1,\infty)$. Mais ainda, dados $x \in D_A(\theta_2,\infty)$ e $s > 0$, temos

$$\begin{aligned}
\sup_{s>0} \|s^{1-\theta_1}AT(s)x\| &= \max\{\sup_{0<s<1} \|s^{1-\theta_1}AT(s)x\|, \sup_{s\geq 1} \|s^{1-\theta_1}AT(s)x\|\} \\
&\leq \max\{\sup_{0<s<1} \|s^{1-\theta_2}AT(s)x\|, \sup_{s\geq 1} s^{-\theta_1}M_1\|x\|\} \\
&\leq \max\{\|x\|_{\theta_2}, M_1\|x\|\}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|x\|_{D_A(\theta_1,\infty)} \leq \|x\| + \max\{\|x\|_{\theta_2}, M_1\|x\|\} \leq (1+M_1)(\|x\| + \|x\|_{\theta_2}) = (1+M_1)\|x\|_{D_A(\theta_2,\infty)},$$

de onde segue (1.56).

Para mostrar que $D_A(\theta,\infty) \hookrightarrow X$, basta observar que $\|x\| \leq \|x\| + \|x\|_\theta = \|x\|_{D_A(\theta,\infty)}$. Além disso, se $x \in D(A)$ temos que, para cada $\theta \in (0,1)$,

$$\begin{aligned}
\|x\|_{D_A(\theta,\infty)} &= \|x\| + \sup_{s>0} \|s^{1-\theta} AT(s)x\| \\
&\leq \|x\| + \max\{\sup_{0<s<1} \|s^{1-\theta} T(s)Ax\|, \sup_{s\geq 1} s^{-\theta} M_1 \|x\|\} \\
&\leq \|x\| + \max\{M_0\|Ax\|, M_1\|x\|\} \\
&\leq (M_0 + M_1)(\|x\| + \|Ax\|) = (M_0+M_1)\|x\|_{D(A)},
\end{aligned}$$

o que implica (1.57). ■

O resultado a seguir é uma consequência direta da definição de $D_A(\theta,\infty)$.

Proposição 1.67. *Dado $\theta \in (0,1)$, $D_A(\theta,\infty)$ é invariante por $A^nT(t)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $t > 0$, além disso, $\|A^nT(t)\|_{\mathcal{L}(D_A(\theta,\infty))} \leq \|A^nT(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$.*

Prova: Dado $x \in D_A(\theta,\infty)$, para $n \in \mathbb{N}$ e $t > 0$, temos que

$$\|s^{1-\theta} AT(s) A^n T(t) x\| \leq \|A^n T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \|s^{1-\theta} AT(s)x\|,$$

o que implica que $\|A^nT(t)x\|_\theta \leq \|A^nT(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|x\|_\theta$ e $A^nT(t)x \in D_A(\theta,\infty)$.

Além disso, observando que

$$\begin{aligned}
\|A^nT(t)x\|_{D_A(\theta,\infty)} &= \|A^nT(t)x\| + \|A^nT(t)x\|_\theta \\
&\leq \|A^nT(t)\|_{\mathcal{L}(X)}(\|x\| + \|x\|_\theta) = \|A^nT(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|x\|_{D_A(\theta,\infty)},
\end{aligned}$$

segue que $\|A^nT(t)\|_{\mathcal{L}(D_A(\theta,\infty))} \leq \|A^nT(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$, o que finaliza a demonstração. ■

Proposição 1.68. *Para $x \in D_A(\theta,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, e $t > 0$, temos $\|t^{n-\theta}A^nT(t)x\| \leq M_{n,\theta}\|x\|_\theta$, onde*

$$M_{n,\theta} = \begin{cases} 1, \ \text{se } n = 1, \\ n^{n-\theta}(n-1)^{1-n} M_{n-1}, \ \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Consequentemente, $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(D_A(\theta,\infty);X)} < M_0$ e $\|A^nT(t)\|_{\mathcal{L}(D_A(\theta,\infty);X)} < \frac{M_{n,\theta}}{t^{n-\theta}}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Prova: Dados $x \in D_A(\theta, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ e $t > 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\|t^{n-\theta}A^nT(t)x\| &= \left\| t^{n-\theta}A^{n-1}T\left(\frac{(n-1)t}{n}\right)AT\left(\frac{t}{n}\right)x\right\| \\
&\leq \left\| t^{n-1}A^{n-1}T\left(\frac{(n-1)t}{n}\right)\right\|_{\mathcal{L}(X)} \|t^{1-\theta}AT(t/n)x\| \\
&= \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}\left\|\left[\frac{(n-1)t}{n}\right]^{n-1}A^{n-1}T\left(\frac{(n-1)t}{n}\right)\right\| n^{1-\theta}\|(t/n)^{1-\theta}AT(t/n)x\| \\
&\leq n^{n-\theta}(n-1)^{1-n}M_{n-1}\|x\|_\theta.
\end{aligned}$$

Por outro lado, pela Proposição 1.67, segue que

$$\begin{aligned}
\|T(t)x\| &\leq \|T(t)x\|_{D_A(\theta,\infty)} \leq \|T(t)\|_{\mathcal{L}(D_A(\theta,\infty))}\|x\|_{D_A(\theta,\infty)} \leq \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|x\|_{D_A(\theta,\infty)} \\
&\leq M_0\|x\|_{D_A(\theta,\infty)},
\end{aligned}$$

o que finaliza a demonstração. ■

Proposição 1.69. *Se $x \in X$, então*

$$x \in D_A(\theta,\infty) \Leftrightarrow \|x\|_\theta^* := \sup_{t>0}\frac{\|T(t)x - x\|}{t^\theta} < \infty, \tag{1.58}$$

$$x \in D_A(\theta,\infty) \Leftrightarrow \|x\|_\theta^{**} := \sup_{t>0}\|t^{2-\theta}A^2T(t)x\| < \infty. \tag{1.59}$$

Prova: Se $x \in D_A(\theta,\infty)$, de (1.55), temos que $\|x\|_\theta^* \leq \frac{\|x\|_\theta}{\theta}$. Além disso, pela Proposição 1.68, obtemos que $\|x\|_\theta^{**} \leq 2^{2-\theta}M_1\|x\|_\theta$.

Por outro lado, suponhamos que $\|x\|_\theta^* < \infty$. Para $t > 0$, segue que

$$\begin{aligned}
\|t^{1-\theta}AT(t)x\| &= \left\| t^{1-\theta}AT(t)\left(\frac{1}{t}\int_0^t (x - T(s)x)ds + \frac{1}{t}\int_0^t T(s)xds\right)\right\| \\
&= \left\| t^{-\theta}AT(t)\int_0^t (x - T(s)x)ds + t^{-\theta}T(t)(T(t)x - x)\right\| \\
&\leq t^{-(1+\theta)}M_1\|x\|_\theta^*\int_0^t s^\theta ds + M_0\|x\|_\theta^* = \left(\frac{M_1}{1+\theta} + M_0\right)\|x\|_\theta^*,
\end{aligned}$$

de onde inferimos que $\|x\|_\theta \leq \left(\frac{M_1}{1+\theta} + M_0\right)\|x\|_\theta^*$, e então, $x \in D_A(\theta,\infty)$.

Já se $\|x\|_\theta^{**} < \infty$, temos

$$\begin{aligned}
\|AT(t)x\| &= \left\|AT(1)x + \int_1^t A^2T(s)xds\right\| \\
&\leq M_1\|x\| + \|x\|_\theta^{**}\left|\int_1^t s^{\theta-2}ds\right| \\
&= M_1\|x\| + \frac{|1 - t^{\theta-1}|}{1-\theta}\|x\|_\theta^{**},
\end{aligned}$$

garantindo que $\sup_{0<t<1} \|t^{1-\theta} AT(t)x\| \leq M_1\|x\| + \frac{1}{1-\theta}\|x\|_\theta^{**}$.

Mais ainda, como $\sup_{t\geq 1} \|t^{1-\theta} AT(t)x\| \leq \sup_{t\geq 1} \frac{M_1\|x\|}{t^\theta} \leq M_1\|x\|$, concluímos que $\|x\|_\theta \leq 2M_1\|x\| + \frac{1}{1-\theta}\|x\|_\theta^{**}$.

Isto completa a prova. ■

Lema 1.70. *Dados $t > 0$ e $\gamma, \varepsilon \geq 0$, temos que* $\displaystyle\sup_{s>0} \frac{s^\gamma}{(s+t)^{\gamma+\varepsilon}} \leq \frac{1}{t^\varepsilon}$.

Prova: Inicialmente observe que para $\alpha > 0$, a função $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^\alpha$ é crescente. Assim, dados $t > 0$ e $\gamma, \varepsilon > 0$, para todo $s > 0$ obtemos que

$$s < (s+t) \Rightarrow s^\gamma < (s+t)^\gamma \Rightarrow \frac{s^\gamma}{(s+t)^\gamma} < 1,$$

e

$$t < (s+t) \Rightarrow t^\varepsilon < (s+t)^\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{(s+t)^\varepsilon} < \frac{1}{t^\varepsilon}.$$

Logo, $\frac{s^\gamma}{(s+t)^{\gamma+\varepsilon}} = \frac{s^\gamma}{(s+t)^\gamma}\frac{1}{(s+t)^\varepsilon} < \frac{1}{(s+t)^\varepsilon} < \frac{1}{t^\varepsilon}$.

O que mostra o resultado. ■

Proposição 1.71. *Para $0 < \alpha < \theta < 1$ e $t > 0$, temos*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X;D_A(\theta,\infty))} \leq M_0 + \frac{M_1}{t^\theta}, \tag{1.60}$$

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(D_A(\alpha,\infty);D_A(\theta,\infty))} \leq \max\left\{M_0, \frac{1}{t^{\theta-\alpha}}\right\}. \tag{1.61}$$

Mais ainda, para $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$,

$$\|A^nT(t)\|_{\mathcal{L}(X;D_A(\theta,\infty))} \leq \frac{M_n}{t^n} + \frac{M_{n+1}}{t^{n+\theta}}, \tag{1.62}$$

$$\|A^nT(t)\|_{\mathcal{L}(D_A(\alpha,\infty);D_A(\theta,\infty))} \leq M_{n+1,\alpha} \max\left\{\frac{1}{t^n}, \frac{1}{t^{n+\theta-\alpha}}\right\}. \tag{1.63}$$

Prova: Dado $x \in X$, $t > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, pelo Lema 1.70 temos que

$$\begin{aligned}
\|A^nT(t)x\|_{D_A(\theta,\infty)} &= \|A^nT(t)x\| + \sup_{s>0} \|s^{1-\theta}A^{n+1}T(t+s)x\| \\
&\leq \frac{M_n}{t^n}\|x\| + \sup_{s>0} \frac{s^{1-\theta}}{(t+s)^{n+1}} M_{n+1}\|x\| \\
&\leq \left(\frac{M_n}{t^n} + \frac{M_{n+1}}{t^{n+\theta}}\right)\|x\|.
\end{aligned}$$

Disto segue (1.62) e, em particular para $n = 0$, (1.60).

Agora, dado $x \in D_A(\alpha, \infty)$ pelas Proposições 1.68 e 1.69 obtemos que

$$\begin{aligned}\|A^n T(t)x\|_{D_A(\theta,\infty)} &\leq \frac{M_n}{t^n}\|x\| + \sup_{s>0} \frac{s^{1-\theta}}{(t+s)^{n+1-\alpha}} M_{n+1,\alpha}\|x\|_\alpha \\ &\leq \frac{M_n}{t^n}\|x\| + \frac{M_{n+1,\alpha}}{t^{n+\theta-\alpha}}\|x\|_\alpha.\end{aligned}$$

Logo, como $M_{n+1,\alpha} \geq M_n$ e $\theta - \alpha > 0$ para todo $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$, segue o resultado. ∎

Proposição 1.72. *Para* $0 < \theta < \alpha < 1$, $t > 0$ *e para* $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$, *temos*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(D_A(\alpha,\infty);D_A(\theta,\infty))} \leq M_0(1 + M_1) \tag{1.64}$$

$$\|A^n T(t)\|_{\mathcal{L}(D_A(\alpha,\infty);D_A(\theta,\infty))} \leq \frac{M_n(1 + M_1)}{t^n}, \tag{1.65}$$

$$\|A^n T(t)\|_{\mathcal{L}(D_A(\alpha,\infty);D_A(\theta,\infty))} \leq \frac{M'_{n,\alpha}}{t^{n-\alpha}} + \frac{M''_{n,\alpha,\theta}}{t^{n-\alpha+\theta}}, \tag{1.66}$$

onde $M'_{n,\alpha} = 2^{n-\alpha} M_0 M_{n,\alpha}$, *e* $M''_{n,\alpha,\theta} = 2^{n+\theta-\alpha} M_1 M_{n,\alpha}$.

Prova: Sejam $x \in D_A(\alpha, \infty)$ e $n \in \mathbb{N}$. Utilizando (1.56) e a Proposição 1.67, temos que

$$\begin{aligned}\|A^n T(t)x\|_{D_A(\theta,\infty)} &\leq (1 + M_1)\|A^n T(t)\|_{\mathcal{L}(D_A(\alpha,\infty))}\|x\|_{D_A(\alpha,\infty)} \\ &\leq (1 + M_1)\|A^n T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|x\|_{D_A(\alpha,\infty)} \\ &\leq (1 + M_1)\frac{M_n}{t^n}\|x\|_{D_A(\alpha,\infty)}.\end{aligned}$$

Agora, de (1.60) obtemos que

$$\begin{aligned}\|A^n T(t)x\|_{\mathcal{L}(D_A(\alpha,\infty),D_A(\theta,\infty))} &\leq \|A^n T(t/2)x\|_{\mathcal{L}(D_A(\alpha,\infty),X)}\|T(t/2)x\|_{\mathcal{L}(X,D_A(\theta,\infty))} \\ &\leq \frac{2^{n-\alpha}M_{n,\alpha}}{t^{n-\alpha}}\left(M_0 + \frac{2^\theta M_1}{t^\theta}\right),\end{aligned}$$

o que permite completar a prova. ∎

Finalizamos esta seção com um resultado que relaciona os espaços intermediários $D_A(\theta, \infty)$ e o domínio da potência fracionária $D((-A)^\theta)$.

Proposição 1.73. *Se* $\theta \in (0, 1)$, *então* $D((-A)^\theta) \hookrightarrow D_A(\theta, \infty)$.

Prova: Dado $x \in D((-A)^\theta)$, considere $y = (-A)^\theta x$. Assim, para $s > 0$ temos

$$
\begin{aligned}
\|s^{1-\theta} AT(s)x\| &= \|s^{1-\theta} AT(s)(-A)^{-\theta} y\| \\
&= \left\| s^{1-\theta} AT(s) \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_0^\infty t^{\theta-1} T(t) y \, dt \right\| \\
&\leq \frac{M_1 s^{1-\theta}}{\Gamma(\theta)} \int_0^\infty \frac{t^{\theta-1}}{t+s} \, dt \|y\| \\
&\leq \frac{M_1}{\Gamma(\theta)} \int_0^\infty \left(\frac{t}{s}\right)^{\theta-1} \frac{s}{t+s} \frac{dt}{s} \|y\| \\
&\leq \frac{M_1}{\Gamma(\theta)} \int_0^\infty \frac{w^{\theta-1}}{1+w} \, dw \|(-A)^\theta x\|,
\end{aligned}
$$

onde a última igualdade segue fazendo $w = t/s$.

Considere agora a função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(w) = \dfrac{e^{\theta w}}{1+w}$. Como $f'(w) = \dfrac{e^{\theta w}}{(1+w)^2}[\theta(1+w) - 1]$, temos que f é decrescente para $0 \leq w \leq \frac{1-\theta}{\theta}$. Assim,

$$
0 \leq w \leq \frac{1-\theta}{\theta} \Rightarrow \frac{e^{\theta w}}{1+w} \leq \frac{e^{\theta 0}}{1+0} = 1 \Rightarrow \frac{1}{1+w} \leq e^{-\theta w}.
$$

Do anterior, vemos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{w^{\theta-1}}{1+w} \, dw &\leq \int_0^{(1-\theta)/\theta} \frac{w^{\theta-1}}{1+w} \, dw + \int_{(1-\theta)/\theta}^\infty \frac{w^{\theta-1}}{1+w} \, dw \\
&\leq \int_0^{(1-\theta)/\theta} e^{-\theta w} w^{\theta-1} \, dw + \int_{(1-\theta)/\theta}^\infty \frac{w^{\theta-1}}{w} \, dw \\
&\leq \int_0^\infty e^{-\theta w} w^{\theta-1} \, dw + \left[\frac{w^{\theta-1}}{\theta-1}\right]_{(1-\theta)/\theta}^\infty \\
&= \frac{\Gamma(\theta)}{\theta^\theta} + \frac{[(1-\theta)/\theta]^{1-\theta}}{1-\theta} = \frac{\Gamma(\theta)}{\theta^\theta} + \frac{\theta^{\theta-1}}{(1-\theta)^\theta}.
\end{aligned}
$$

Portanto, para todo $s > 0$, $\|s^{1-\theta} AT(s)x\| \leq K(\theta)\|x\|_{D((-A)^\theta)}$, onde $K(\theta) = \frac{M_1}{\Gamma(\theta)} \left[\frac{\Gamma(\theta)}{\theta^\theta} + \frac{\theta^{\theta-1}}{(1-\theta)^\theta}\right]$, o que nos permite concluir o reultado. ■

Capítulo 2

O Problema de Cauchy Abstrato

Neste capítulo aplicamos a teoria de semigrupos lineares no estudo de equações diferenciais em espaços de Banach. Especificamente, estudamos a existência de soluções fracas, fortes e clássicas para o problema $\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t),\ t > 0$. No que segue deste capítulo $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach.

2.1 O Problema de Valor Inicial Homogêneo

Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear. Dado $x_0 \in X$, o problema de Cauchy abstrato para A, com valor inicial x_0 consiste em encontrar uma solução $u(\cdot)$ para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad t > 0, \\ u(0) = x_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Começamos definindo o conceito de solução para (2.1).

Definição 2.1. *Uma função $u : [0, \infty) \to X$ é uma solução do problema de valor inicial (2.1) se $u(\cdot)$ é contínua em $[0, \infty)$, continuamente diferenciável em $(0, \infty)$, $u(t) \in D(A)$ para todo $t \in (0, \infty)$ e (2.1) é satisfeita.*

Observe que se $u(\cdot)$ é uma solução de (2.1), então $u(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$. Além disso, como u é contínua em $t = 0$, segue que $u(0) = x_0 \in \overline{D(A)}$. Em outras palavras, se A não é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo então (2.1) pode não ter solução se $x_0 \notin \overline{D(A)}$.

Contudo, dos resultados do Capítulo 1, é claro que se A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$, o problema (2.1) tem uma solução, dada por $u(t) = T(t)x_0$, para todo $x_0 \in D(A)$.

Mais ainda, para $x_0 \in D(A)$, $u(t) = T(t)x$ é a única solução de (2.1). De fato, se $v(t)$ é outra solução de (2.1), temos que para $t > 0$ e $0 < s < t$, $T(t-s)v(s)$ é diferenciável e

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}T(t-s)v(s) &= -T(t-s)Av(s) + T(t-s)\frac{dv(s)}{ds} \\ &= -T(t-s)Av(s) + T(t-s)Av(s) = 0. \end{aligned}$$

Assim, $s \mapsto T(t-s)v(s)$ é constante, ou seja, $u(t) = T(t)x_0 = T(t-0)v(0) = T(t-t)v(t) = v(t)$ para todo $t \geq 0$, de onde segue a unicidade.

Na realidade, a unicidade de solução do problema (2.1) segue de suposições mais fracas como vamos ver no próximo teorema. Para isso provamos inicialmente o seguinte lema.

Lema 2.2. *Sejam $T > 0$ e $u : [0, T] \to X$ uma função contínua. Se*

$$\left\| \int_0^T e^{ns} u(s) ds \right\| \leq M, \quad para \quad n = 1,\ 2,\ ...,$$

então $u \equiv 0$ em $[0, T]$.

Demonstração. Sejam $f \in X^*$ e $\varphi(t) = < f, u(t) >$. Então, é claro que φ é contínua em $[0, T]$ e

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T e^{ns}\varphi(s)ds \right| &= \left| \int_0^T e^{ns} < f, u(s) > ds \right| \\ &= \left| \int_0^T < f, e^{ns}u(s) > ds \right| \\ &= \left| < f, \int_0^T e^{ns}u(s) > ds \right| \\ &\leq \|f\| \left\| \int_0^T e^{ns}u(s)ds \right\| \\ &\leq \|f\|M = M_1, \end{aligned} \tag{2.2}$$

para $n = 1,\ 2, ...$ Nosso próximo passo é mostrar que (2.2) implica que $\varphi \equiv 0$ em $[0, T]$. Assim, como $f \in X^*$ é arbitrária, poderemos concluir que $u \equiv 0$ em $[0, T]$.

Para começar, notamos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kn\tau} = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-e^{n\tau})^k}{k!} = 1 - exp\{-e^{n\tau}\}.$$

É fácil ver que esta série converge uniformemente para τ em intervalos limitados. Mais ainda, para t em intervalos limitados,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kn(t-T+s)} \varphi(s) ds\right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{kn(t-T)} \left|\int_0^T e^{kns} \varphi(s) ds\right| \\ &\leq M_1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{n(t-T)})^k}{k!} - 1\right) \\ &= M_1 (exp\{e^{n(t-T)}\} - 1). \qquad (2.3)\end{aligned}$$

Se $t < T$, o lado direito de (2.3) converge para zero quando $n \to \infty$. Para o lado esquerdo temos

$$\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kn(t-T+s)} \varphi(s) ds = \int_0^T (1 - exp\{-e^{(t-T+s)}\}) \varphi(s) ds.$$

Logo, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, para $0 \leq t < T$, temos

$$\begin{aligned}&\int_0^T (1 - exp\{-e^{n(t-T+s)}\}) \varphi(s) ds \\ = &\int_0^{T-t} (1 - exp\{-e^{n(t-T+s)}\}) \varphi(s) ds + \int_{T-t}^T (1 - exp\{-e^{n(t-T+s)}\}) \varphi(s) ds,\end{aligned}$$

onde

$$\int_0^{T-t} (1 - exp\{-e^{n(t-T+s)}\}) \varphi(s) ds \longrightarrow 0,$$

e

$$\int_{T-t}^T (1 - exp\{-e^{n(t-T+s)}\}) \varphi(s) ds \longrightarrow \int_{T-t}^T \varphi(s) ds$$

quando $n \to \infty$. Assim, fazendo $n \to \infty$ em (2.3) para $0 \leq t < T$, segue que $\int_{T-t}^T \varphi(s) ds = 0$. Isto implica que $\varphi \equiv 0$ em $[0, T]$, o que permite concluir a prova. ■

Teorema 2.3. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear densamente definido. Se $R(\lambda : A)$ existe para todo número real $\lambda \geq \lambda_0$ e $\limsup_{\lambda \to \infty} \lambda^{-1} \log \|R(\lambda : A)\| \leq 0$, então (2.1) tem, no máximo, uma solução para todo $x_0 \in X$.*

Demonstração. Inicialmente observamos que $u(\cdot)$ é solução de (2.1) se, e somente se, $v(t) = e^{zt} u(t)$ é solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dv(t)}{dt} = (A + zI) v(t) = A_1 v(t), \quad t > 0 \\ v(0) = x_0, \end{cases}$$

onde $R(\lambda : A_1) = (\lambda I - A_1)^{-1} = (\lambda I - (A + zI))^{-1} = ((\lambda - z)I - A)^{-1}$. Assim, podemos transladar A pela identidade multiplicada por uma constante e assumir que $R(\lambda : A)$ existe para todo real $\lambda \geq 0$ e que $\limsup_{\lambda\to\infty} \lambda^{-1} \log \|R(\lambda : A)\| \leq 0$.

Seja $u(\cdot)$ uma solução de (2.1) satisfazendo $u(0) = 0$. Provaremos que $u \equiv 0$. Para isso considere a função $t \mapsto R(\lambda : A)u(t)$, $\lambda > 0$. Como $u(\cdot)$ é solução de (2.1) temos que

$$\frac{d}{dt}R(\lambda : A)u(t) = R(\lambda : A)Au(t) = \lambda R(\lambda : A)u(t) - u(t),$$

o que resulta no seguinte PVI

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}R(\lambda : A)u(t) = \lambda R(\lambda : A)u(t) - u(t), \quad t > 0, \\ R(\lambda : A)u(0) = 0. \end{cases}$$

Sabemos que a solução deste PVI é dada por

$$R(\lambda : A)u(t) = -\int_0^t e^{\lambda(t-s)}u(s)ds. \tag{2.4}$$

Por outro lado, por hipótese segue que para $\sigma > 0$

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \log\left(e^{-\sigma\lambda}\|R(\lambda : A)\|\right) = \limsup_{\lambda\to\infty} \lambda\left(-\sigma + \lambda^{-1}\log\|R(\lambda : A)\|\right) = -\infty.$$

Assim, dado $M > 0$, existe $N > 0$ tal que para $\lambda > N$, obtemos que

$$\begin{aligned} & \sup_{\lambda > N} \left\{\lambda\left(-\sigma + \lambda^{-1}\log\|R(\lambda : A)\|\right)\right\} < -M \\ \Rightarrow\ & \lambda\left(-\sigma + \lambda^{-1}\log\|R(\lambda : A)\|\right) < -M, \text{ para todo } \lambda > N, \\ \Rightarrow\ & e^{(-\lambda\sigma + \log\|R(\lambda:A)\|)} = e^{-\lambda\sigma}\|R(\lambda : A)\| < e^{-M} \text{ para todo } \lambda > N. \end{aligned}$$

Logo, $e^{-\lambda\sigma}\|R(\lambda : A)\| \to 0$ quando $\lambda \to \infty$. Isto, juntamente com (2.4), implicam que

$$0 \;=\; \lim_{\lambda\to\infty} e^{-\lambda\sigma}\|R(\lambda : A)\| = \lim_{\lambda\to\infty} e^{-\lambda\sigma}\left\|-\int_0^t e^{\lambda(t-s)}u(s)ds\right\| = \left\|\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t e^{\lambda(t-\sigma-s)}u(s)ds\right\|,$$

o que mostra que $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t e^{\lambda(t-\sigma-s)}u(s)ds = 0$.

Sejam $0 < \sigma \leq t$. Como a função $u(\cdot)$ é limitada em $[t-\sigma, t]$, do Teorema da Convergência Dominada é fácil ver que $\lim_{\lambda\to\infty}\int_{t-\sigma}^t e^{\lambda(t-\sigma-s)}u(s)ds = 0$. Usando isso e o fato que

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t e^{\lambda(t-\sigma-s)}u(s)ds = \lim_{\lambda\to\infty}\left[\int_0^{t-\sigma} e^{\lambda(t-\sigma-s)}u(s)ds + \int_{t-\sigma}^t e^{\lambda(t-\sigma-s)}u(s)ds\right] = 0,$$

segue que $\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{t-\sigma} e^{\lambda(t-\sigma-s)}u(s)ds = 0$. Como consequência, temos que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\| \int_0^{t-\sigma} e^{\lambda(t-\sigma-s)}u(s)ds \|\leq 1$ para todo $\lambda \geq N_1$, o que implica que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\|\int_0^{t-\sigma} e^{n(t-\sigma-s)}u(s)ds\right\| \leq 1 + \max_{i=1,\ldots,N_1}\left\|\int_0^{t-\sigma} e^{i(t-\sigma-s)}u(s)ds\right\|.$$

Do anterior e do Lema 2.2, concluímos que $u(s) = 0$ para $0 \leq s \leq t-\sigma$, o que mostra que $u \equiv 0$ em $[0,\infty)$ pois t e σ são arbitrários. Logo, se $u_1(\cdot)$ e $u_2(\cdot)$ são duas soluções de (2.1) como valor inicial $x \in X$, então $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$ é solução de (2.1) com $u(0) = 0$. Assim, do que foi feito acima, segue que $u(t) = 0,\ t \geq 0$. Portanto $u_1(t) = u_2(t)$ para todo $t \geq 0$, o que concluí a prova. ∎

Do teorema anterior segue que para obter a unicidade de solução em X para o problema de valor inicial (2.1), não é necessário supor que A seja o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo ou, equivalentemente, assumindo que para algum $\omega \in \mathbb{R},\ \rho(A) \supset (\omega,\infty)$ e $\|(\lambda-\omega)^n R(\lambda : A)^n\| \leq M$ para $\lambda > \omega$. Muito menos do que isso é suficiente para a unicidade. No entanto, para obter a existência e unicidade para todo $x \in D(A)$, bem como diferenciabilidade da solução em $[0,\infty)$ precisamos que A seja o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. Isto é o que diz o próximo teorema.

Teorema 2.4. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear densamente definido com $\rho(A) \neq \emptyset$. O problema (2.1) tem uma única solução $u(\cdot)$ continuamente diferenciável em $[0,\infty)$, para todo valor inicial $x_0 \in D(A)$ se, e somente se, A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$.*

Demonstração. Suponhamos que A seja o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$. Como como já foi visto, para todo $x_0 \in D(A)$, $T(\cdot)x_0$ é a única solução de (2.1) com valor inicial $x_0 \in D(A)$. Mais ainda, sabemos que $T(\cdot)x_0$ é continuamente diferenciável para $0 \leq t < \infty$.

Suponhamos agora que (2.1) tem uma única solução continuamente diferenciável em $[0,\infty)$ para cada valor inicial $x_0 \in D(A)$. Além disso, dado $x_0 \in D(A)$ denote por $u(\cdot, x_0)$ a única solução de (2.1) e por $|x|_G = \|x\| + \|Ax\|$ a norma do gráfico. Como $\rho(A) \neq \emptyset$, pelo Lema 3.30 obtemos que A é fechado e $D(A)$ munido da norma do gráfico é um espaço de Banach que denotaremos por $[D(A)]$.

Seja X_{t_0} o espaço de Banach das funções contínuas de $[0,t_0]$ em $[D(A)]$ com a norma do supremo. Consideremos ainda a aplicação $S : [D(A)] \to X_{t_0}$ definida por $Sx(t) = u(t,x)$ para $0 \leq t \leq t_0$. Então, $Sx = u(\cdot,x)$ e $Sy = u(\cdot,y)$ são soluções de (2.1) com condições iniciais $u(0,x) = x$ e $u(0,y) = y$, respectivamente. Dessa forma, tomando $u(t) = \alpha Sx(t) + Sy(t) = \alpha u(t,x) + u(t,y)$, onde $0 \leq t \leq t_0$ e α é um escalar, temos que

$$u'(t) \;=\; \frac{d}{dt}[\alpha u(t,x) + u(t,y)] = \alpha Au(t,x) + Au(t,y) \text{ e } u(0) = \alpha x + y,$$

de onde concluímos que $u(t)$ é solução de (2.1) com valor inicial $u(0) = \alpha x + y$. Assim, pela unicidade de solução de (2.1), concluímos que $u(t) = u(t, \alpha x + y)$. Portanto, S é um operador linear. Mostramos agora que S é fechado. De fato, como $Sx(\cdot)$ é solução de (2.1), temos que

$$\int_0^t \frac{du}{ds}(s,x)ds = \int_0^t Au(s,x)ds \Rightarrow Sx(\cdot) = u(t,x) = x + \int_0^t Au(s,x)ds.$$

Logo, se $x_n \to x$ em $[D(A)]$ e $Sx_n \to v$ em X_{t_0}, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N_0$

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,t_0]} |Sx_n(\cdot) - v(\cdot)|_G = \sup_{t\in[0,t_0]} |u(t,x_n) - v(t)|_G < \varepsilon \\
\Rightarrow\;& |u(t,x_n) - v(t)|_G < \varepsilon, \quad \forall t \in [0,t_0] \\
\Rightarrow\;& \|u(t,x_n) - v(t)\|_X + \|Au(t,x_n) - Av(t)\|_X < \varepsilon, \quad \forall t \in [0,t_0] \\
\Rightarrow\;& \|u(t,x_n) - v(t)\|_X < \varepsilon, \quad \forall t \in [0,t_0].
\end{aligned}$$

Assim, $u(t,x_n) \to v(t)$ em X, quando $n \to \infty$, para todo $t \in [0,t_0]$, e, pelo Teorema da Convergência Donimada, obtemos que $\displaystyle\int_0^t u(s,x_n)ds \to \int_0^t v(s)ds$, quando $n \to \infty$, para todo $t \in [0,t_0]$. Desta forma, utilizando o Lema 3.24, segue que

$$A\left(\int_0^t u(s,x_n)ds\right) \;=\; \int_0^t Au(s,x_n)ds = u(t,x_n) - x_n \to v(t) - x.$$

Do anterior, concluímos que $\displaystyle\int_0^t v(s)ds \in D(A)$ e $A\left(\int_0^t v(s)ds\right) = \int_0^t Av(s)ds = v(t) - x$, o que implica que $v(t) = x + \int_0^t Av(s)ds$. Desse modo, segue que $v(0) = x$ e

$$\begin{aligned}
\frac{dv(t)}{dt} &= \lim_{h\to 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h} Av(s)ds - \int_0^t Av(s)ds\right] \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} Av(s)ds = Av(t).
\end{aligned}$$

Logo, v é solução de (2.1) com valor inicial $x \in X$ e, além disso, da unicidade de solução, obtemos que $v(t) = u(t,x)$ para todo $t \in [0,t_0]$ o que garante que S é fechado. Mais ainda, pelo Teorema do Gráfico Fechado, S é limitado e

$$\|Sx\|_{X_{t_0}} = \sup_{t\in[0,t_0]} |u(t,x_n)|_G \leq C|x|_G, \text{ para todo } x \in [D(A)] \text{ e algum } C > 0. \tag{2.5}$$

Agora, dado $t \geq 0$ definimos a aplicação $T(t) : [D(A)] \to [D(A)]$ por $T(t)x = u(t,x)$. Mostraremos que $(T(t))_{t\geq 0}$ é um C_0-semigupo. Para começar, provamos que $T(t+s) = T(t)T(s)$ para $t,\ s > 0$.

Dado $x \in D(A)$ e $s > 0$, definamos $w(t,x) = T(t+s)x = u(t+s,x)$, para $t > 0$. Da definição de $T(\cdot)$, é fácil ver que

$$\begin{cases} \dfrac{dw(t,x)}{dt} = \dfrac{du(t+s,x)}{dt} = Au(t+s,x) = Aw(t,x), \quad t > 0, \\ \qquad\qquad w(0,x) = u(s,x), \end{cases}$$

o que implica que $w(t,x)$ é solução de (2.1) com valor inicial $u(s,x)$. Logo, da unicidade de solução de (2.1), temos que $w(t,x) = T(t+s)x = u(t,u(s,x)) = T(t)T(s)x$, ou seja, $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todos $t,\, s > 0$.

De (2.5) segue que para $0 \leq t \leq t_0$, $T(t)$ é uniformemente limitado. Assim, dado $t > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ de forma que $nt_0 \leq t < (n+1)t_0$. Então podemos escrever $T(t)x = T(t - nt_0 + nt_0)x = T(t-nt_0)T^n(t_0)x$, onde $0 \leq t - nt_0 \leq t_0$, o que implica que $T(t)$ pode ser estendido para um semigrupo em $[D(A)]$ satisfazendo $|T(t)x|_G \leq Me^{\omega t}|x|_G$ para todo $t \geq 0$.

A seguir, vamos mostrar que $T(t)Ay = AT(t)y$ para $y \in D(A^2)$. De fato, dado $y \in D(A^2)$ defina $v(t) = y + \int_0^t u(s,Ay)ds$. Desse modo, $v(0) = y$ e

$$\begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} &= u(t,Ay) = Ay + \int_0^t Au(s,Ay)ds \\ &= A\left(y + \int_0^t u(s,Ay)ds\right) \\ &= Av(t). \end{aligned}$$

Do anterior e da unicidade de solução para (2.1), temos que $v(t) = u(t,y)$ e $Au(t,y) = \dfrac{dv(t)}{dt} = u(t,Ay)$, o que mostra que $T(t)Ay = AT(t)y$.

Agora, como $D(A)$ é denso em X e $\rho(A) \neq \emptyset$, pode-se mostrar que $D(A^2)$ é denso em X. De fato, se $\lambda \in \rho(A)$, vemos que $D(A) = R(\lambda : A)X \subset R(\lambda : A)\overline{D(A)} \subset \overline{R(\lambda : A)D(A)} \subset \overline{D(A^2)}$, o que prova nossa afirmação. Sejam $\lambda_0 \in \rho(A)$, $\lambda_0 \neq 0$ fixo e $y \in D(A^2)$. Se $x = (\lambda_0 I - A)y$, $T(t)x = (\lambda_0 I - A)T(t)y$. Assim,

$$\|T(t)x\| = \|(\lambda_0 I - A)T(t)y\| \leq |\lambda_0|\|T(t)y\| + \|AT(t)y\| \leq K|T(t)y|_G \leq M_1 e^{\omega t}|y|_G,$$

onde $K = \max\{|\lambda_0|, 1\}$ e $M_1 = KM$.

Além disso, usando que $y = (\lambda_0 I - A)^{-1}x$ e $Ay = \lambda_0(\lambda_0 I - A)^{-1}x - x$, vemos que $|y|_G = \|y\| + \|Ay\| \leq K_1\|x\|$, isso que $\|T(t)x\| \leq M_2 e^{\omega t}\|x\|$, $M_2 = M_1K_1$. Logo, cada $T(t)$ pode ser ser estendido para todo X pela continuidade $T(t)$ em $D(A)$ e pelo fato de $\overline{D(A)} = X$. Assim, concluímos que $(T(t))_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo em X.

Para completar a prova mostramos que A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t\geq 0}$. Denote por A_1 o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t\geq 0}$. Se $x \in D(A)$, da definição de $(T(t))_{t\geq 0}$ temos $T(t)x = u(t, x)$. Além disso, por hipótese, $\frac{dT(t)x}{dt} = AT(t)x$ para $t \geq 0$ o que implica que $\left.\frac{dT(t)x}{dt}\right|_{t=0} = Ax$. Assim, $D(A) \subset D(A_1)$ e $A = A_1$ em $D(A)$. Agora, sejam $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $Re(\lambda) > \omega$ e $y \in D(A^2)$. Da inclusão $D(A) \subset D(A_1)$ segue que

$$e^{-\lambda t}AT(t)y = e^{-\lambda t}T(t)Ay = e^{-\lambda t}T(t)A_1y.$$

Integrando a igualdade acima de 0 a ∞, do Lema 3.24 temos que

$$AR(\lambda : A_1)y = R(\lambda : A_1)A_1y = A_1R(\lambda : A_1)y, \quad y \in D(A^2).$$

Logo, $R(\lambda : A_1)y \in D(A)$ para todo $y \in D(A^2)$. Por outro lado, dado $x \in X$, como $D(A^2)$ é denso em X, existe uma sequência $x_n \subset D(A^2)$ tal que $x_n \to x$, quando $n \to \infty$. Então, usando que $R(\lambda : A_1)$ é contínuo e $A_1R(\lambda : A_1)x_n = \lambda R(\lambda : A_1)x_n - x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $A_1R(\lambda : A_1)x_n \to \lambda R(\lambda : A_1)x - x$. Assim, visto que A_1 é fechado, obtemos que

$$R(\lambda : A)x \in D(A_1) \text{ e } A_1R(\lambda : A_1)x = \lambda R(\lambda : A_1)x - x. \tag{2.6}$$

Além disso, como $AR(\lambda : A_1)x_n = A_1R(\lambda : A_1)x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e A é fechado, também concluímos que

$$R(\lambda : A_1)x \in D(A) \text{ e } AR(\lambda : A_1)x = \lambda R(\lambda : A_1)x - x. \tag{2.7}$$

Logo, de (2.6) e (2.7) segue que $AR(\lambda : A_1)x = A_1R(\lambda : A_1)x$, para todo $x \in X$. Portanto, $D(A) \supset Im(R(\lambda : A_1)) = D(A_1)$, o que nos permite concluir que $A = A_1$, completando a prova. ■

2.2 O Problema de Valor Inicial não Homogêneo

Nesta seção supomos que $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ em X e estudamos o problema de valor inicial não-homogêneo

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t), \quad t > 0, \\ u(0) = x_0 \in X, \end{cases} \tag{2.8}$$

onde $f : [0, T] \to X$ é uma função apropriada.

Definição 2.5. *Dizemos que $f \in L^1([0, T]; X)$ se $f : [0, T] \to X$ é tal que $\int_0^T \|f(t)\| dt < \infty$.*

Definição 2.6. *Dizemos que $f \in C^1([0, T]; X)$ se $f : [0, T] \to X$ é tal que $f'(t) = \frac{d}{dt} f(t)$ existe para todo $t \in [0, T]$ e $f, f' \in C([0, T]; X)$.*

A seguir definimos o conceito de solução clássica para (2.8).

Definição 2.7. *Uma função $u : [0, T] \to X$ é chamada de solução clássica de (2.8) em $[0, T]$ se $u(\cdot)$ é contínua em $[0, T]$, continuamente diferenciável em $(0, T)$, $u(t) \in D(A)$ para todo $t \in (0, T]$ e (2.8) é satisfeita em $[0, T]$.*

Note que se $(T(t))_{t\geq 0}$ é o C_0-semigrupo gerado por A e $u(\cdot)$ é uma solução de (2.8) em $[0, T]$, então a função $g : [0, T] \to X$ definida por $g(s) = T(t - s)u(s)$ é diferenciável para $0 < s < t$ e

$$\begin{aligned} \frac{dg(s)}{ds} &= -AT(t - s)u(s) + T(t - s)\frac{du(s)}{ds} \\ &= -AT(t - s)u(s) + T(t - s)[Au(s) + f(s)] \\ &= T(t - s)f(s). \end{aligned}$$

Logo, se $f \in L^1([0, T]; X)$, a função $s \mapsto T(t - s)f(s)$ é integrável e, da última igualdade, segue que

$$u(t) - T(t)u(0) = \int_0^t T(t - s)f(s)ds,$$

isto é,

$$u(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t - s)f(s)ds, \;\; t \in [0, T].$$

Mais ainda, note que se $v(\cdot)$ é outra solução de (2.8), procedendo como acima concluímos que

$$v(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t - s)f(s)ds, \;\; t \in [0, T],$$

o que implica que $v \equiv u$. Assim, acabamos de provar a seguinte proposição.

Proposição 2.8. *Se $f \in L^1([0,T];X)$, o problema (2.8) tem no máximo uma solução. Além disso, se $u(\cdot)$ é uma solução de (2.8) em $[0,T]$, então*

$$u(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \ \ t \in [0,T]. \tag{2.9}$$

Note que se $f \in L^1([0,T];X)$, o lado direito de (2.9) é uma função contínua em $[0,T]$. Assim, é natural considerar (2.9) como uma solução de (2.8) num sentido mais fraco, isto é, mesmo se esta não seja diferenciável e não satisfaça estritamente a equação (2.8) no sentido da Definição 2.7. Isto motiva a seguinte definição.

Definição 2.9. *Seja $x \in X$ e $f \in L^1([0,T];X)$. A função $u \in C([0,T];X)$ dada por*

$$u(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

é chamada de solução fraca de (2.8) em $[0,T]$.

Para $f \in L^1([0,T];X)$ o problema de valor inicial (2.8) tem uma única solução fraca. Agora, estamos interessados em impor condições sobre f tais que, para $x_0 \in D(A)$, a solução fraca de (2.8) seja uma solução clássica de (2.8).

Inicialmente, observamos que a continuidade de f, em geral, não é condição suficiente para assegurar a existência de solução de (2.8) para $x_0 \in D(A)$. De fato, seja $x \in X$ tal que $T(t)x \notin D(A)$ para algum $t > 0$. Então, se $f(s) = T(s)x$, para $s \geq 0$, então f é contínua. Considere agora o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t) + T(t)x, \quad t > 0, \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Este problema não tem solução clássica, mesmo que $u(0) = 0$. De fato, a solução fraca de (2.10) é

$$u(t) = \int_0^t T(t-s)T(s)xds = \int_0^t T(t-s+s)xds = T(t)x\int_0^t ds = tT(t)x.$$

Como $tT(t)x$ não é diferenciável para $t > 0$ segue que $u(\cdot)$ não é solução de (2.10).

Do anterior, para provar a existência de solução clássica de (2.8) temos que exigir mais do que a continuidade de f. Este é o objetivo do nosso próximo teorema. Porém, antes de enunciarmos este resultado, vamos introduzir alguns lemas preliminares.

Lema 2.10. *Seja $\omega \in C([\alpha,\beta);\mathbb{R})$ diferenciável pela direita em $[\alpha,\beta)$. Se $\omega(\alpha)=0$ e $D^+\omega \leq 0$ em $[\alpha,\beta)$, onde $D^+\omega$ representa a derivada à direita de ω. Então $\omega \leq 0$ em $[\alpha,\beta)$.*

Demonstração. Suponha primeiro que $D^+\omega(t) < 0$ para todo $t \in [\alpha,\beta)$. Se o resultado é falso, existe $t_1 \in (\alpha,\beta)$ tal que $\omega(t_1) > 0$. Defina $t_0 = \inf\{t \in (\alpha,\beta) : \omega(t) > 0\}$. Pela continuidade de ω, temos que $t_0 > \alpha$ e $\omega(t_0) = 0$. Além disso, pela definição de t_0, existe uma sequência (t_n) tal que $t_n \downarrow t_0$, isto é, $t_n \to t_0$ quando $n \to \infty$ e $t_n \geq t_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\omega(t_n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, da expressão

$$D^+\omega(t_0) = \lim_{t_n \downarrow t_0} \frac{\omega(t_n) - \omega(t_0)}{t_n - t_0} = \lim_{t_n \downarrow t_0} \frac{\omega(t_n)}{t_n - t_0},$$

segue que $D^+\omega(t_0) \geq 0$, o que é absurdo. Logo, $\omega \leq 0$ em $[\alpha,\beta)$ quando $D^+\omega < 0$ em $[\alpha,\beta)$.

Suponha agora que $D^+\omega(t) \leq 0$ para todo $t \in [\alpha,\beta)$. Para $\varepsilon > 0$, defina

$$\omega_\varepsilon(t) = \omega(t) - \varepsilon(t-\alpha).$$

Como $\omega_\varepsilon(\alpha) = 0$ e $D^+\omega_\varepsilon(t) \leq -\varepsilon < 0$, segue pela primeira parte da prova que $\omega_\varepsilon \leq 0$ em $[\alpha,\beta)$ e, portanto, $\omega(t) \leq \varepsilon(t-\alpha)$ para todo $t \in [\alpha,\beta)$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, $\omega \leq 0$ em $[\alpha,\beta)$, o que completa a prova. ∎

Corolário 2.11. *Seja $\varphi \in C([\alpha,\beta);\mathbb{R})$ diferenciável pela direita em $[\alpha,\beta)$. Se $D^+\varphi$ é contínua em $[\alpha,\beta)$, então φ é continuamente diferenciável em $[\alpha,\beta)$ e $\varphi' = D^+\varphi$.*

Demonstração. Defina $\chi(t) = \varphi(\alpha) + \int_\alpha^t D^+\varphi(s)ds$. É claro que $\chi(\cdot)$ é contínua. Além disso, temos que

$$\chi'(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_\alpha^t D^+\varphi(s)ds\right) = D^+\varphi(t),$$

o que nos permite concluir que χ é continuamente diferenciável em $[\alpha,\beta)$. Definindo $\omega = \chi - \varphi$, é fácil verificar que $\omega(\alpha) = 0$ e que $D^+\omega = 0$ em $[\alpha,\beta)$. Assim, do Lema 2.10 segue que $\omega(t) \leq 0$ para todo $t \in [\alpha,\beta)$. De maneira similar, pode-se mostrar que $-\omega$ satisfaz as hipóteses do Lema 2.10 e assim, obtemos que $\omega(t) \geq 0$ para todo $t \in [\alpha,\beta)$. Com isso, concluímos que $\omega = 0$ em $[\alpha,\beta)$ e, portanto, que $\varphi(t) = \chi(t)$ para todo $t \in [\alpha,\beta)$. Assim, a prova está completa. ∎

Corolário 2.12. *Seja $v \in C([\alpha,\beta);X)$ diferenciável pela direita em $[\alpha,\beta)$. Se D^+v é contínua em $[\alpha,\beta)$, então v é continuamente diferenciável em $[\alpha,\beta)$ e $v'(t) = D^+v(t)$ para todo $t \in [\alpha,\beta)$.*

Demonstração. Seja $f \in X' = \{g : X \to \mathbb{R} : g$ é linear e contínua$\}$. É fácil ver que $f \circ v \in C([\alpha,\beta) : \mathbb{R})$ e $D^+(f \circ v) = f \circ D^+ v$ é contínua em $[\alpha,\beta)$. Logo, do Corolário 2.11 segue que $f \circ v$ é continuamente diferenciável em $[\alpha,\beta)$ e que

$$\frac{d}{dt} f(v(t)) = D^+(f(v(t))) = f(D^+ v(t)). \tag{2.11}$$

Sejam $t \in (\alpha,\beta)$ e $h < 0$ tais que $t+h \in (\alpha,\beta)$. Integrando (2.11) em $[t+h,t]$ obtemos que

$$f(v(t)) - f(v(t+h)) \quad = \quad \int_{t+h}^{t} f(D^+ v(s))ds, = f\left(\int_{t+h}^{t} D^+ v(s)ds\right),$$

o que nos permite afirmar que

$$v(t) - v(t+h) = \int_{t+h}^{t} D^+ v(s)ds, \text{ para todo } t \in (\alpha,\beta),$$

pois f é arbitrária. Logo, dividindo ambos os termos da igualdade acima por h e tomando o limite quando $h \to 0$, obtemos

$$D^- v(t) = \lim_{h\to 0^-} \frac{v(t) - v(t+h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h} \int_{t+h}^{t} D^+ v(s)ds = D^+ v(t),$$

garantindo que v é diferenciável em $[\alpha,\beta)$ e que $v'(t) = D^+ v(t)$ para todo $t \in [\alpha,\beta)$. Isto completa a prova. ∎

O próximo resultado estabelece condições para que uma solução fraca seja uma solução clássica.

Teorema 2.13. *Sejam $x \in D(A)$, $f \in L^1([0,T];X) \cap C((0,T];X)$ e $v \in C([0,T];X)$ a função definida por*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{2.12}$$

A solução fraca de (2.8) em $[0,T]$ é uma solução clássica se vale uma das seguintes condições:

(i) *$v(\cdot)$ é continuamente diferenciável em $(0,T)$.*

(ii) *$v(t) \in D(A)$ para todo $0 < t < T$ e $Av(\cdot)$ é contínua em $(0,T)$.*

Além disso, se (2.8) tem uma solução clássica em $[0,T]$, então $v(\cdot)$ satisfaz **(i)** *e* **(ii)**.

Demonstração. Suponhamos primeiro que (2.8) tem uma solução clássica $u(\cdot)$. Então, sabemos que esta solução é dada por (2.9) e, consequentemente, $v(t) = u(t) - T(t)x$. É claro que $v(\cdot)$ é diferenciável para $t \in (0,T)$ e que $v'(t) = u'(t) - T(t)Ax$ é contínua em $(0,T)$. Portanto, a condição **(i)** é satisfeita. Além disso, como $x \in D(A)$, então $T(t)x \in D(A)$ para $t \geq 0$, o que implica que $v(t) = u(t) - T(t)x \in D(A)$ para todo $t \in (0,T)$. Mais ainda, $Av(t) = Au(t) - AT(t)x = u'(t) - f(t) - T(t)Ax$ é contínua em $(0,T)$, o que mostra que a condição **(ii)** também é satisfeita.

Provamos agora que a solução fraca de (2.8) em $[0,T]$ é uma solução clássica se uma das condições **(i)** ou **(ii)** é satisfeita. Inicialmente, observe que, para $t \in (0,T)$ e $h > 0$ tal que $t + h \in (0,T)$,

$$
\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}v(t) &= \frac{1}{h}\left[\int_0^t T(h)T(t-s)f(s)ds - \int_0^t T(t-s)f(s)ds\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_0^t T(t+h-s)f(s)ds - \int_0^t T(t-s)f(s)ds\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \int_0^t T(t-s)f(s)ds\right] \\
&= \frac{v(t+h)-v(t)}{h} - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\frac{T(h)-I}{h}v(t) = \frac{v(t+h)-v(t)}{h} - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds. \tag{2.13}
$$

Da continuidade de f e do Lema 1.14, vemos que o segundo termo de (2.13) tem limite $f(t)$ quando $h \to 0$. Além disso, se a condição **(i)** é satisfeita, então segue de (2.13) que $v(t) \in D(A)$ e $Av(t) = v'(t) - f(t)$ para $0 < t < T$. Mais ainda, visto que $v(0) = 0$, temos que $u(t) = T(t)x + v(t)$ é tal que $u(0) = T(0)x + v(0) = x$ e

$$
\begin{aligned}
\frac{du(t)}{dt} &= T(t)Ax + \frac{dv(t)}{dt} \\
&= AT(t)x + Av(t) + f(t) \\
&= A[T(t)x + v(t)] + f(t) \\
&= Au(t) + f(t),
\end{aligned}
$$

isto é, $u(t) = T(t)x + v(t)$ é solução clássica de (2.8).

Suponha agora que a condição **(ii)** é satisfeita. Neste caso, $v(t) \in D(A)$ para todo $t \in (0,T)$, o que implica de (2.13) que $v(\cdot)$ é diferenciável pela direita em $(0,T)$, $D^+v(t) = Av(t) + f(t)$ para $t \in (0,T)$. Assim, como $f(\cdot)$ e $Av(\cdot)$ são contínuas em $(0,T)$, segue que $D^+v(\cdot)$ é contínua em $(0,T)$, e então, do Corolário 2.12 concluímos que $v(\cdot)$ é continuamente diferenciável em $(0,T)$ e

$v'(t) = Av(t) + f(t)$ para todo $t \in (0, T)$. Como no caso anterior, visto que $v(0) = 0$, verificamos que $u(t) = T(t)x + v(t)$ também é solução clássica de (2.8). A prova está completa. ■

Do teorema anterior seguem os seguintes corolários.

Corolário 2.14. *Se* $f \in C^1([0, T]; X)$ *e* $x \in D(A)$*, então o problema de valor inicial* (2.8) *tem uma única solução clássica.*

Demonstração. Seja $v(\cdot)$ a função definida em (2.12). Se $t \in (0, T)$ e $h > 0$ são tais que $t + h \in (0, T)$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{v(t+h) - v(t)}{h} &= \frac{1}{h}\int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)ds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{h} T(t+h-s)f(s)ds + \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds \\
&\quad -\frac{1}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)ds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{h} T(t+h-s)f(s)ds + \frac{1}{h}\int_0^{t} T(t-s)f(s+h)ds \\
&\quad -\frac{1}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)ds \\
&= T(t)\frac{1}{h}\int_0^{h} T(h-s)f(s)ds + \int_0^{t} T(t-s)\frac{f(s+h)-f(s)}{h}ds.
\end{aligned}$$

Usando agora o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e o fato que f é continuamente diferenciável em $[0, T]$, concluímos que D^+v existe em $[0, T)$ e que

$$D^+v(t) = T(t)f(0) + \int_0^t T(t-s)f'(s)ds, \quad t \in [0, T).$$

Assim, D^+v é contínua em $[0, T)$ e então, segue do Corolário 2.12, que v é continuamente diferenciável em $[0, T)$,

$$v'(t) = T(t)f(0) + \int_0^t T(t-s)f'(s)ds, \quad t \in [0, T).$$

Portanto, v satisfaz a condição **(i)** do Teorema 2.13 o que mostra que o sistema (2.8) tem uma solução clássica. ■

Corolário 2.15. *Sejam* $x \in D(A)$ *e* $f \in L^1([0, T]; X) \cap C((0, T); X)$*. Se* $f(s) \in D(A)$ *para todo* $s \in (0, T)$ *e* $Af \in L^1([0, T]; X)$*, então o problema* (2.8) *tem uma única solução clássica.*

Demonstração. Seja v a função definida em (2.12). Das nossas hipóteses concluímos que $T(t-s)f(s) \in D(A)$, para todo $0 < t < T$, e que $AT(t-s)f(s) = T(t-s)Af(s)$ é integrável. Além disso, como A é fechado, segue do Lema 3.24 que $v(t) \in D(A)$, para todo $0 < t < T$, e que

$$Av(t) = A\int_0^t T(t-s)f(s)ds = \int_0^t T(t-s)Af(s)ds.$$

Da desigualdade acima segue ainda que Av é contínua em $(0, T)$. Portanto, v verifica a condição **(ii)** do Teorema 2.13 e assim, o sistema (2.8) tem uma solução clássica. ∎

Concluímos esta seção estudando os conceitos de solução forte e estrita para (2.8).

Definição 2.16. *Uma função $u \in C([0,T]; X)$ tal que u é diferenciável quase sempre sobre $[0,T]$ e $u' \in L^1([0,T]; X)$ é chamada de solução forte de (2.8) em $[0,T]$ se $u(0) = x$ e $u'(t) = Au(t) + f(t)$ quase sempre sobre $[0,T]$.*

É claro que uma solução clássica de (2.8) é uma solução forte. Também é fácil mostrar que uma solução forte de (2.8) é uma solução fraca. Assim, um problema natural é determinar quando uma solução fraca é uma solução forte.

Teorema 2.17. *Sejam $x \in D(A)$, $f \in L^1([0,T]; X)$ e $v \in C([0,T]; X)$ a função definida por*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{2.14}$$

A solução fraca de (2.8) em $[0,T]$ é uma solução forte se vale uma das seguintes condições:

(i) *$v(t)$ é diferenciável q.t.p. sobre $[0,T]$ e $v'(t) \in L^1([0,T] : X)$.*

(ii) *$v(t) \in D(A)$ q.t.p. sobre $[0,T]$ e $Av(t) \in L^1([0,T] : X)$.*

Mais ainda, se (2.8) tem uma solução forte, então $v(\cdot)$ satisfaz as condições **(i)** *e* **(ii)**.

Demonstração. A prova é essencialmente a mesma do Teorema 2.13. Observamos apenas que

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds \to f(t)$$

q.t.p. sobre $[0,T]$, quando $f \in L^1([0,T] : X)$. ∎

Procedendo como na prova dos Corolários 2.14 e 2.15, temos os seguintes corolários.

Corolário 2.18. *Se $x \in D(A)$, f é diferenciável q.t.p. sobre $[0,T]$ e $f' \in L^1([0,T];X)$, então o problema de valor inicial* (2.8) *tem uma única solução forte.*

Corolário 2.19. *Sejam $x \in D(A)$ e $f \in L^1([0,T];X)$. Se $f(s) \in D(A)$ para todo $s \in (0,T)$ e $Af \in L^1([0,T];X)$, então o problema de valor inicial* (2.8) *tem uma única solução forte.*

Definição 2.20. *Uma função $u \in C^1([0,T];X) \cap C([0,T];D(A))$ é chamada solução estrita de (2.8) em $[0,T]$ se $u'(t) = Au(t) + f(t)$ para cada $t \in [0,T]$ e $u(0) = x_0$.*

Teorema 2.21. *Sejam $x \in D(A)$, $f \in C([0,T];X)$ e $v \in C([0,T];X)$ a função definida por*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{2.15}$$

A solução fraca de (2.8) *em $[0,T]$ é uma solução estrita se vale uma das seguintes condições:*

(i) *v é continuamente diferenciável em $[0,T]$.*

(ii) *$v(t) \in D(A)$ para $t \in [0,T]$ e $Av(t) \in C([0,T]:X)$.*

Mais ainda, se (2.8) *tem uma solução estrita em $[0,T]$, então v satisfaz as condições* **(i)** *e* **(ii)**.

Demonstração. A prova segue procedendo como na demonstração do Teorema 2.13. ■

Observação 2.22. É importante notar que todos os conceitos e resultados associados ao sistema (2.8) podem ser generalizados para problemas da forma

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} & = Au(t) + f(t), \quad t_0 < t < T, \\ u(t_0) & = x_0, \end{cases}$$

sendo que neste caso, a solução fraca é dada por

$$u(t) = T(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^t T(t-s)f(s)ds, \quad t \in [t_0, T].$$

2.3 O Problema Semilinear

Nesta seção estudamos o seguinte problema de valor inicial semilinear

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t,u(t)), \quad t_0 < t \leq T, \\ u(t_0) = x_0 \in X, \end{cases} \tag{2.16}$$

onde A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ em um espaço de Banach X e $f : [t_0, T] \times X \to X$ é contínua em t e satisfaz uma condição de Lipschitz na segunda variável.

Definição 2.23. *Uma função* $u : [t_0, T] \to X$ *é uma solução clássica do problema* (2.16) *se* $u \in C([t_0,T];X) \cap C^1((t_0,T);X)$*;* $u(t) \in D(A)$ *para todo* $t \in (t_0, T)$ *e* (2.16) *é satisfeita em* $[t_0, T]$*.*

O problema de valor inicial (2.16) pode não ter uma solução clássica. Entretanto, se possuir uma solução clássica $u(\cdot)$ então, assim como vimos na Seção 2.2, podemos mostrar que esta solução satisfaz a equação integral

$$u(t) = T(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s,u(s))ds, \ \ t \in [t_0,T]. \tag{2.17}$$

Desta equação segue a seguinte definição.

Definição 2.24. *Uma função* $u \in C([t_0,T];X)$ *que é solução da equação integral (2.17) será chamada solução fraca do problema de valor inicial (2.16).*

Vamos iniciar com o seguinte resultado clássico que garante a existência e unicidade de soluções fracas para (2.16) quando f é uma função Lipschitz contínua.

Teorema 2.25. *Seja* $f : [t_0,T] \times X \to X$ *contínua na variável* t *em* $[t_0,T]$ *e uniformemente Lipschitz contínua (com constante* L*) em* X*. Se* A *é o gerador infinitesimal de um* C_0*-semigrupo* $(T(t))_{t \geq 0}$ *em* X*, então para todo* $x_0 \in X$ *o problema (2.16) tem uma única solução fraca* $u \in C([t_0,T];X)$*. Mais ainda, a aplicação* $x_0 \mapsto u(.,x_0)$ *é Lipschitz contínua de* X *em* $C([t_0,T];X)$*.*

Demonstração. Dado $x_0 \in X$ definimos a aplicação $F : C([t_0,T];X) \to C([t_0,T];X)$ por

$$Fu(t) = T(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s,u(s))ds, \quad t \in [t_0,T]. \tag{2.18}$$

Denotando por $||u||_\infty$ a norma de u como elemento de $C([t_0,T] : X)$, temos que

$$\begin{aligned} ||Fu(t) - Fv(t)|| &\leq \int_{t_0}^{t} ||T(t-s)||.||f(s,u(s)) - f(s,v(s))||ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} ML||u(s) - v(s)||ds \\ &\leq ML\int_{t_0}^{t} ||u-v||_\infty ds = ML(t-t_0)||u-v||_\infty, \end{aligned}$$

onde M é o limitante de $\|T(t-t_0)\|$ em $[t_0,T]$. Do anterior, e usando indução matemática, é facil obter que

$$\|F^n u(t) - F^n v(t)\| \leq \frac{[ML(t-t_0)]^n}{n!}\|u-v\|_\infty, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$\|F^n u(t) - F^n v(t)\| \leq \frac{(MLT)^n}{n!}\|u-v\|_\infty,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

o que implica que

$$\|F^n u - F^n v\|_\infty \leq \frac{(MLT)^n}{n!}\|u-v\|_\infty,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para n_0 suficientemente grande, temos que $(MLT)^{n_0}/n_0! < 1$, o que implica que F^{n_0} é uma contração e possui um único ponto fixo u em $C([t_0,T];X)$. Como, $F^{n_0}(Fu) = F^{n_0+1}(u) = F(F^{n_0}u) = Fu$, da unicidade do ponto fixo obtemos que $Fu = u$ o que implica que $u(\cdot)$ também é um ponto fixo (único) de F. Obviamente, $u(\cdot)$ é a única solução da equação integral (2.17).

A unicidade de $u(\cdot)$ e o fato da aplicação $x_0 \mapsto u(.,x_0)$ ser Lipschitz contínua são consequências do seguinte argumento: seja v uma solução fraca de (2.16) em $[t_0,T]$ com valor inicial y_0. Então,

$$\begin{aligned} \|u(t)-v(t)\| &\leq \|T(t-t_0)x_0 - T(t-t_0)y_0\| + \int_{t_0}^t ||T(t-s)||.||f(s,u(s)) - f(s,v(s))||ds \\ &\leq M\|x_0-y_0\| + ML\int_{t_0}^t ||u(s)-v(s)||ds, \end{aligned}$$

o que implica, pela Desigualdade de Gronwall, que $\|u(t)-v(t)\| \leq Me^{ML(T-t_0)}\|x_0-y_0\|$. Dessa forma, temos que $\|u-v\|_\infty \leq Me^{ML(T-t_0)}\|x_0-y_0\|$, de onde segue a unicidade de u e o fato da aplicação $x_0 \mapsto u(.,x_0)$ ser Lipschitz contínua. ■

Corolário 2.26. *Assuma que as condições do Teorema* 2.25 *são válidas. Se $g \in C([t_0,T];X)$, então a equação integral*

$$\omega(t) = g(t) + \int_{t_0}^t T(t-s)f(s,\omega(s))\ ds \tag{2.19}$$

tem uma única solução $\omega \in C([t_0,T];X)$.

Demonstração. A prova segue como na demonstração do Teorema 2.25 ao difinir F, dada em (2.18), por $Fu(t) = g(t) + \int_{t_0}^t T(t-s)f(s,u(s))ds$. ■

A condição Lipschitz uniforme da função f no Teorema 2.25 garante a existência de uma única solução fraca em todo o intervalo $[t_0,T]$. Assumindo que f satisfaz apenas uma condição Lipschitz local em X, uniformemente para t em intervalos limitados, é possível obter a existência local de soluções. Antes de enunciar o próximo resultado, lembramos que f é localmente Lipschitz em X, uniformemente para t em intervalos limitados, se para todo $t' > 0$ e todo $c > 0$ existe uma constante

$L(c,t') > 0$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L(c,t')\ \|x-y\|, \tag{2.20}$$

quando $x, y \in B_c(0,X) = \{z \in X : \|z\| < c\}$ e $t \in [0,t']$.

Teorema 2.27. *Seja $f : [0,\infty) \times X \to X$ contínua e localmente Lipschitz em X, uniformemente para t em intervalos limitados. Então, para todo $x_0 \in X$, existe $t_{max} \leq \infty$ tal que o problema*

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} &= Au(t) + f(t,u(t)), \quad t > 0, \\ u(0) &= x_0, \end{cases} \tag{2.21}$$

possui uma única solução fraca $u \in C([0,t_{max}); X)$. Mais ainda, $\lim\limits_{t \uparrow t_{max}} \|u(t)\| = \infty$ se $t_{max} < \infty$.

Demonstração. Mostramos inicialmente que existe $t_1 > 0$ tal que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} &= Au(t) + f(t,u(t)), \quad 0 < t < t_1, \\ u(0) &= x_0, \end{cases} \tag{2.22}$$

possui uma única solução fraca. Suponha que $\|T(t)\| \leq M$ para todo $t \in [0,1]$ e defina $C = C(\|u(0)\|) = M\|x_0\| + 1$. Das propriedades de f, temos que existe $L(C) > 0$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L(C)\ \|x-y\|, \quad x,y \in B_C(0,X), \quad t \in [0,1].$$

Logo, para $(t,x) \in [0,1] \times B_C(0,X)$ obtemos que

$$\begin{aligned} \|f(t,x)\| &\leq \|f(t,x) - f(t,0)\| + \|f(t,0)\| \\ &\leq L(C)C + \sup_{t \in [0,1]} \|f(t,0)\| \ = \ C_f. \end{aligned}$$

Agora, fixemos $0 < b_1 < 1$ tal que $MC_f b_1 < 1$ e $ML(C)b_1 < 1$. Note que b_1 depende de C e portanto de $\|u(0)\|$. Sobre o espaço $\Lambda = \{u \in C([0,b_1]; X) : \|u(t)\| \leq C,\ t \in [0,b_1]\}$, munido da norma da convergência uniforme, que denotamos por $\|\cdot\|_\infty$, definimos o operador $\Gamma : \Lambda \to C([0,b_1]; X)$ por

$$\Gamma u(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s) f(s,u(s))\ ds, \quad t \in [0,b_1].$$

Afirmamos que Γ é uma contração de Λ em Λ. De fato, vejamos inicialmente que $\Gamma(\Lambda) \subset \Lambda$. Se $u \in \Lambda$ e $0 \leq t \leq b_1$, então

$$\begin{aligned} \|\Gamma u(t)\| &\leq \|T(t)x_0\| + \int_0^t \|T(t-s)\| \|f(s,u(s))\| ds \\ &\leq M\|x_0\| + M\int_0^t C_f ds \\ &\leq M\|x_0\| + MC_f\ b_1 \ \leq\ M\|x_0\| + 1 \ = \ C, \end{aligned}$$

o que prova que $\|\Gamma u\|_\infty \leq C$ e assim $\Gamma u \in \Lambda$. Portanto, $\Gamma(\Lambda) \subset \Lambda$. Além disso, se $u, v \in \Lambda$ e $t \in [0, b_1]$,

$$\begin{aligned} \|\Gamma u(t) - \Gamma v(t)\| &\leq \int_0^t \|T(t-s)\| \, \|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\| ds \\ &\leq M \int_0^t L(C) \, \|u(s) - v(s)\| ds \leq ML(C) b_1 \, \|u - v\|. \end{aligned}$$

Consequentemente, $\|\Gamma u - \Gamma v\|_\infty \leq ML(C)b_1 \, \|u - v\|_\infty$, o que prova que Γ é uma contração sobre Λ, pois $ML(C)b_1 < 1$. Desse forma, segue a existência de um único ponto fixo para Γ em Λ e, portanto, temos a existência de uma única solução fraca (2.22), onde $t_1 = b_1$.

Seja agora $u_1(\cdot)$ a solução fraca de (2.22) em $[0, t_1]$. Usando o mesmo argumento inicial, podemos mostrar a existência de $t_2 > t_1$ tal que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} &= Au(t) + f(t, u(t)), \quad t_1 < t < t_2, \\ u(t_1) &= u_1(t_1), \end{cases} \tag{2.23}$$

possui uma única solução fraca $u_2 \in C([t_1, t_2]; X)$, onde $t_2 = t_1 + b_2$, com $0 < b_2 < 1$ dependendo de $\|u(t_1)\|$.

Do anterior segue a existência de uma única solução fraca $u(\cdot)$ do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} &= Au(t) + f(t, u(t)), \quad 0 < t < t_2, \\ u(0) &= x_0. \end{cases} \tag{2.24}$$

De fato, defina $u \in C([0, t_2]; X)$ por

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & t \in [0, t_1], \\ u_2(t), & t \in [t_1, t_2]. \end{cases}$$

É claro que

$$u(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s) f(s, u(s)) ds, \quad t \in [0, t_1].$$

Mais ainda, se $t \in [t_1, t_2]$, então

$$\begin{aligned} u(t) &= T(t - t_1) u_1(t_1) + \int_{t_1}^t T(t-s) f(s, u_2(s)) ds \\ &= T(t - t_1) \left(T(t_1) x_0 + \int_0^{t_1} T(t_1 - s) f(s, u_1(s)) ds \right) + \int_{t_1}^t T(t-s) f(s, u_2(s)) ds \\ &= T(t) x_0 + \int_0^{t_1} T(t-s) f(s, u_1(s)) ds + \int_{t_1}^t T(t-s) f(s, u_2(s)) ds \\ &= T(t) x_0 + \int_0^t T(t-s) f(s, u(s)) \, ds, \end{aligned}$$

o que mostra que u é solução fraca de (2.24).

Argumentando de maneira usual, deduzimos a existência de $t_{max} > 0$ tal que $[0, t_{max})$ é o intervalo máximo de existência de uma solução fraca para (2.21). Além disso, a solução é única.

Seja $u \in C([0, t_{max}); X)$ a solução fraca máximal de (2.21). Suponha agora que $t_{max} < \infty$ e que $\lim\limits_{t \uparrow t_{max}} \|u(t)\| < \infty$. Então, existe $\alpha > 0$ e uma sequência (t_n) com $t_n \uparrow t_{max}$ tal que $\|u(t_n)\| \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assuma que $\widetilde{M} > 0$ é tal que $\|T(t)\| \leq \widetilde{M}$ para todo $t \in [0, t_{max}+1]$. Seja $\widetilde{C} = \widetilde{M}\alpha + 1$ e fixemos $L(\widetilde{C}) > 0$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L(\widetilde{C})\ \|x - y\|, \quad x, y \in B_{\widetilde{C}}(0, X), \quad t \in [0, t_{max} + 1].$$

Logo, para $(t,x) \in [0, t_{max} + 1] \times B_{\widetilde{C}}(0, X)$ temos que

$$\begin{aligned} \|f(t,x)\| &\leq \|f(t,x) - f(t,0)\| + \|f(t,0)\| \\ &\leq L(\widetilde{C})\|x\| + \sup_{t \in [0, t_{max}+1]} \|f(t,0)\| \\ &\leq L(\widetilde{C})\widetilde{C} + \sup_{t \in [0, t_{max}+1]} \|f(t,0)\| \ = \widetilde{C}_f. \end{aligned}$$

Fixemos agora $0 < \widetilde{b} < 1$ tal que $\widetilde{M}\widetilde{C}_f\widetilde{b} < 1$ e que $\widetilde{M}L(\widetilde{C})\widetilde{b} < 1$. Usando o mesmo argumento do início da prova, pela escolha de $\widetilde{b}$ deduzimos que cada sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dw(t)}{dt} &= Aw(t) + f(t, w(t)), \quad t \in (t_n, t_n + \widetilde{b}), \\ w(t_n) &= u(t_n), \end{cases} \tag{2.25}$$

com $n \in \mathbb{N}$, possui uma única solução fraca $w_n \in C([t_n, t_n + \widetilde{b}]; X)$. Obviamente, $w_n = u$ em $[t_n, t_n + \widetilde{b}\ ]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas isto é absurdo, pois existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $t_n + \widetilde{b} > t_{max}$, o que implica que existe uma solução fraca de (2.21) em algum intervalo da forma $[t_{max}, t_{max} + \delta]$ com $\delta > 0$. Isto permite concluir que $\lim\limits_{t \uparrow t_{max}} \|u(t)\| = \infty$, quando $t_{max} < \infty$, o que completa a prova. ■

Sabemos que, em geral, uma solução fraca de (2.16) não é uma solução clássica. O próximo teorema estabelece condições para que uma solução fraca de (2.16) seja, na verdade, uma solução clássica. Inicialmente, introduzimos algumas notações e resultados preliminares.

Para uma função diferenciável $p : [t_0, T] \times X \to X$ e $(t,x) \in [t_0, T] \times X$, $(s,y) \in \mathbb{R} \times X$ com $s + t \in [t_0, T]$, usamos a decomposição

$$p(t+s, x+y) - p(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} p(t,x)s + \frac{\partial}{\partial x} p(t,x)y + R(p, (t,x), (s,y)),$$

onde $\dfrac{\|R(p, (t,x), (s,y))\|}{\|(s,y)\|} \to 0$ quando $\|(s,y)\| = |s| + \|y\| \to 0$.

Lema 2.28. *Sejam $g : [t_0, T] \times X \to X$ continuamente diferenciável, $K, S \subset X$ compactos, com $0 \in S$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $(t, x) \in [t_0, T] \times K$ e $(s, y) \in [-1, 1] \times S$, com $t + s \in [t_0, T]$, $\dfrac{\|R(g,(t,x),(s,y))\|}{\|(s,y)\|} < \varepsilon$, se $0 < \|(s, y)\| = |s| + \|y\| < \delta$.*

Demonstração. Para $(t, x) \in [t_0, T] \times K$ e $(s, y) \in [-1, 1] \times S$, com $t + s \in [t_0, T]$, temos que

$$\begin{aligned}
& g(t+s,x+y) - g(t,x) - \frac{\partial}{\partial t}g(t,x)s - \frac{\partial}{\partial x}g(t,x)y \\
= & \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \tau}g(t+\tau s, x+\tau y)d\tau - \frac{\partial}{\partial t}g(t,x)s - \frac{\partial}{\partial x}g(t,x)y \\
= & \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t}g(t+\tau s,x+\tau y)s + \frac{\partial}{\partial x}g(t+\tau s,x+\tau y)y - \frac{\partial}{\partial t}g(t,x)s - \frac{\partial}{\partial x}g(t,x)y\right)d\tau \\
= & \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t}g(t+\tau s,x+\tau y) - \frac{\partial}{\partial t}g(t,x)\right)sd\tau + \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x}g(t+\tau s,x+\tau y) - \frac{\partial}{\partial x}g(t,x)\right)yd\tau.
\end{aligned}$$

Como as funções $\dfrac{\partial g}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ são contínuas e o conjunto $U = ([t_0, T]+\alpha[-1, 1])\times(K+\alpha S)$, $\alpha \in [0, 1]$, é compacto, existe $\delta > 0$ tal que para todo $(\overline{s}, \overline{x}), (s, x) \in U$ com $\overline{s}, s \in [t_0, T]$

$$\|\frac{\partial g}{\partial t}(\overline{s},\overline{x}) - \frac{\partial g}{\partial t}(s,x)\| < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad \|\frac{\partial g}{\partial x}(\overline{s},\overline{x}) - \frac{\partial g}{\partial x}(s,x)\| < \varepsilon,$$

quando $|\overline{s} - s| < \delta$ e $\|\overline{x} - x\| < \delta$. Consequentemente, para todo $(t, x) \in [t_0, T] \times K$ e todo $(s, y) \in [-1, 1] \times S$, com $t + s \in [t_0, T]$ e $0 < \|(s, y)\| = |s| + \|y\| < \delta$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|R(g,(t,x),(s,y))\| &= \|g(t+s,x+y) - g(t,x) - \frac{\partial}{\partial t}g(t,x)s - \frac{\partial}{\partial x}g(t,x)y\| \\
&\le \int_0^1 \|\frac{\partial}{\partial t}g(t+\tau s,x+\tau y) - \frac{\partial}{\partial t}g(t,x)\||s|d\tau \\
&\quad + \int_0^1 \|\frac{\partial}{\partial x}g(t+\tau s,x+\tau y) - \frac{\partial}{\partial x}g(t,x)\|\|y\|d\tau \\
&< \varepsilon|s| + \varepsilon\|y\| = \varepsilon(|s| + \|y\|),
\end{aligned}$$

o que prova o resultado. ■

Lema 2.29. *Suponha que $f \in C^1([t_0, T] \times X; X)$ e que $x_0 \in D(A)$. Se $u(\cdot)$ é uma solução fraca de (2.16), então $u(\cdot)$ é Lipschitz sobre $[t_0, T]$.*

Demonstração. Usando que f é continuamente diferenciável, segue que f é Lipchitz em $[t_0, T]\times K$ para cada $K \subset X$ compacto. Em particular, temos que existe $L_f > 0$ tal que para $t_1, t_2, t, s \in [t_0, T]$,

$$\|f(t_1, u(t)) - f(t_2, u(s))\| \le L_f\left(|t_1 - t_2| + \|u(t) - u(s)\|\right).$$

Sejam M, N constantes positivas tais que $\|T(t)\| \leq M$ e $\|f(t,u(t))\| \leq N$ para todo $t \in [t_0, T]$. Usando o item **(d)** do Teorema 1.15, para $t \in [t_0, T)$ e $h > 0$ tal que $t+h \in [t_0, T]$, vemos que

$$\begin{aligned} u(t+h) - u(t) &= T(t+h-t_0)x_0 - T(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_0+h} T(t+h-s)f(s,u(s))ds \\ &\quad + \int_{t_0+h}^{t+h} T(t+h-s)f(s,u(s))ds - \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s,u(s))ds \\ &= \int_{t-t_0}^{t+h-t_0} T(s)Ax_0 ds + \int_{t_0}^{t_0+h} T(t+h-s)f(s,u(s))ds \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} T(t-s)[f(s+h,u(s+h)) - f(s,u(s))]ds, \end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned} \|u(t+h) - u(t)\| &\leq \int_{t-t_0}^{t+h-t_0} \|T(s)\| \, \|Ax_0\| ds + \int_{t_0}^{t_0+h} \|T(t+h-s)\| \, \|f(s,u(s))\| ds \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} \|T(t-s)\| \, \|f(s+h,u(s+h)) - f(s,u(s))\| ds \\ &\leq hM\|Ax_0\| + hMN + ML_f \int_{t_0}^{t} (h + \|u(s+h) - u(s)\|) ds \\ &\leq hM\|Ax_0\| + hMN + hML_f(a-t_0) + ML_f \int_{t_0}^{t} \|u(s+h) - u(s)\| ds \\ &\leq C_1 h + ML_f \int_{t_0}^{t} \|u(s+h) - u(s)\| ds, \end{aligned}$$

onde C_1 é uma constante que independe de $u(\cdot), t$ e h. Agora, da Desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\|u(t+h) - u(t)\| \leq C_1 h \, e^{ML_f \int_{t_0}^{t} ds} \leq C_2 h,$$

onde, como antes, C_2 independe de $u(\cdot), t$ e h. Isto prova que u é Lipichitz sobre $[t_0, T]$. ∎

O próximo resultado estabelece condições para que uma solução fraca seja uma solução clássica.

Teorema 2.30. *Se $f : [t_0, T] \times X \to X$ é continuamente diferenciável, $x_0 \in D(A)$ e $u(\cdot)$ é uma solução fraca de* (2.16)*, então $u(\cdot)$ é uma solução clássica de* (2.16)*.*

Demonstração. Para mostrarmos que $u(\cdot)$ é uma solução clássica, basta provarmos que $u \in C^1([t_0, T); X)$. De fato, se $u(\cdot)$ é uma solução fraca de (2.16), $u \in C^1([t_0, b]; X)$, $t_0 < b < T$, e $v \in C([t_0, b] : X)$ é a solução fraca de

$$\begin{cases} \dfrac{dv(t)}{dt} &= Av(t) + f(t,u(t)), \quad t_0 \leq t \leq b, \\ v(t_0) &= x_0, \end{cases} \tag{2.26}$$

como $f(\cdot)$ e $u(\cdot)$ são continuamente diferenciáveis em $[t_0, b]$, então $t \mapsto f(t, u(t))$ é continuamente diferenciável em $[t_0, b]$, o que nos permite concluir, do Corolário 2.14, que $v(\cdot)$ é uma solução clássica de (2.26). Mas, a função $u(\cdot)$ também é uma solução fraca de (2.26) e assim, pela unicidade de soluções fracas para (2.16), $u = v$ em $[t_0, b]$. Isto implica que $u(\cdot)$ é uma solução clássica de (2.16).

Vejamos agora que $u \in C^1([t_0, T); X)$. Observe inicialmente que se $u \in C^1([t_0, T); X)$, então

$$\begin{aligned} u'(t) &= AT(t-t_0)x_0 + T(t-t_0)f(t_0, u(t_0)) + \int_{t_0}^{t} T(t-s)\frac{\partial}{\partial s} f(s, u(s))ds \\ &+ \int_{t_0}^{t} T(t-s)\frac{\partial}{\partial x} f(s, u(s))u'(s)ds, \quad t \in [t_0, T). \end{aligned}$$

Considerando isto, introduzimos a seguinte equação auxiliar

$$\begin{aligned} \omega(t) &= AT(t-t_0)x_0 + T(t-t_0)f(t_0, u(t_0)) + \int_{t_0}^{t} T(t-s)\frac{\partial}{\partial s} f(s, u(s))ds \\ &+ \int_{t_0}^{t} T(t-s)\frac{\partial}{\partial x} f(s, u(s))\omega(s)ds, \quad t \in [t_0, T]. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Definindo $g(t) = AT(t-t_0)x_0 + T(t-t_0)f(t_0, u(t_0)) + \int_{t_0}^{t} T(t-s)\frac{\partial}{\partial s} f(s, u(s))ds$ e observando que, para $y, z \in X$,

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x} f(t, u(t))y - \frac{\partial}{\partial x} f(t, u(t))z\right\| \leq \left(\sup_{t\in[t_0,a]} \left\|\frac{\partial}{\partial x} f(t, u(t))\right\|\right)\|y - z\|, \quad y, z \in X,$$

deduzimos, do Corolário 2.26, a existência de uma única solução $\omega \in C([t_0, T]; X)$ de (2.27).

Mostremos agora que $u'(t) = \omega(t)$ para $t \in [t_0, T)$. Se $t \in [t_0, T)$ e $h > 0$ são tais que $t + h \in [t_0, T]$, então

$$\begin{aligned} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} &= \frac{1}{h}(T(t+h-t_0)x_0 - T(t-t_0)x_0) + \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} T(t+h-s)f(s, u(s))ds \\ &+ \frac{1}{h}\int_{t_0+h}^{t+h} T(t+h-s)f(s, u(s))ds - \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s, u(s))ds \\ &= T(t-t_0)\left(\frac{T(h) - I}{h}\right)x_0 + \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} T(t+h-s)f(s, u(s))ds \\ &+ \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t} T(t-s)(f(s+h, u(s+h)) - f(s, u(s)))ds \\ &= T(t-t_0)\left(\frac{T(h) - I}{h}\right)x_0 + \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} T(t+h-s)f(s, u(s))ds \\ &+ \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t} T(t-s)\left(\frac{\partial}{\partial s} f(s, u(s))h + \frac{\partial}{\partial x} f(s, u(s))(u(s+h) - u(s))\right)ds \\ &+ \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t} T(t-s)R(f, (s, u(s)), (h, u(s+h) - u(s))ds. \end{aligned}$$

Logo, da definição de ω obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{u(t+h)-u(t)}{h}-\omega(t) &= T(t-t_0)\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)x_0 - T(t-t_0)Ax_0\\ &+\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} T(t+h-s)f(s,u(s))ds - T(t-t_0)f(t_0,u(t_0))\\ &+\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t} T(t-s)R(f,(s,u(s)),(h,u(s+h)-u(s))\,ds\\ &+\int_{t_0}^{t} T(t-s)\frac{\partial}{\partial x}f(s,u(s))\left(\frac{u(s+h)-u(s)}{h}-\omega(s)\right)ds.\end{aligned}$$

Como $x_0 \in D(A)$, segue das propriedades do Capítulo 1 que $T(t-t_0)\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)x_0 \to T(t-t_0)Ax_0$ quando $h \to 0$. Vejamos que o segundo termo do lado direito da igualdade acima também converge para zero. Seja $M > 0$ tal que $\|T(t-s)\| \leq M$ para todo $t_0 \leq s < t \leq T$. Como $f(\cdot)$ e $u(\cdot)$ são contínuas e $(T(t))_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo, para $\varepsilon > 0$ existe $0 < \delta < T - t_0$ tal que

$$\|f(t_0+\theta,u(t_0+\theta)) - f(t_0,u(t_0))\| < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad \|T(\theta)f(t_0,u(t_0)) - f(t_0,u(t_0))\| < \varepsilon,$$

para todo $0 < \theta < \delta$. Nestas condições, para $0 < h < \delta$ segue que

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} T(t+h-s)f(s,u(s))\,ds - T(t-t_0)f(t_0,u(t_0))\right\|\\ &\qquad = \left\|\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h}[T(t+h-s)f(s,u(s)) - T(t-t_0)f(t_0,u(t_0))]ds\right\|\\ &\qquad \leq \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h}\|T(t+h-s)\|\|f(s,u(s)) - f(t_0,u(t_0))\|ds\\ &\qquad\quad +\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h}\|T(t+h-s)f(t_0,u(t_0)) - T(t-t_0)f(t_0,u(t_0))\|ds\\ &\qquad \leq \frac{M}{h}\int_{t_0}^{t_0+h}\|f(s,u(s)) - f(t_0,u(t_0))\|ds\\ &\qquad\quad +\frac{M}{h}\int_{t_0}^{t_0+h}\|T(t_0+h-s)f(t_0,u(t_0)) - f(t_0,u(t_0))\|ds\\ &\qquad \leq \frac{M}{h}\int_{t_0}^{t_0+h}\varepsilon ds + \frac{M}{h}\int_{t_0}^{t_0+h}\varepsilon ds = 2M\varepsilon,\end{aligned}$$

o que prova a convergência, pois ε é arbitrário. Mais ainda, das estimativas anteriores é claro que a convergência acima é uniforme sobre intervalos da forma $[t_0, b]$ com $t_0 < b < T$.

Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned}\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h}-\omega(t)\right\| &\leq \xi(t,h) + \frac{M}{h}\int_{t_0}^{t}\|R(f,(s,u(s)),(h,u(s+h)-u(s))\|ds\\ &+ M\int_{t_0}^{t}\left\|\frac{\partial}{\partial x}f(s,u(s))\right\|\left\|\frac{u(s+h)-u(s)}{h}-\omega(s)\right\|ds, \end{aligned} \tag{2.28}$$

onde $\xi(t,h) \to 0$ uniformemente para $t \in [t_0, b]$, com $t_0 < b < T$, quando $h \to 0$.

Sejam $\varepsilon > 0$ e $t_0 < b < T$. Como $\xi(t,h) \to 0$ uniformemente para $t \in [t_0, b]$, quando $h \to 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $\xi(t,h) < \varepsilon$ para todo $t \in [t_0, b]$, quando $0 < h < \delta_1$. Mais ainda, dos Lemas 2.28 e 2.29 segue que existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\frac{\|R(f,(s,u(s)),(h,u(s+h)-u(s))\|}{h} \leq \frac{\varepsilon}{M(T-t_0)},$$

para todo $s \in [t_0, b]$, quando $0 < h < \delta_2$. Assim, para $0 < h < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e $t \in [t_0, b]$,

$$\begin{aligned} \|\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - \omega(t)\| &\leq \varepsilon + M\frac{\varepsilon}{M(T-t_0)}(t-t_0) + M\Theta\int_{t_0}^{t}\|\frac{u(s+h)-u(s)}{h} - \omega(s)\|ds \\ &\leq 2\varepsilon + M\Theta\int_{t_0}^{t}\|\frac{u(s+h)-u(s)}{h} - \omega(s)\|ds, \end{aligned}$$

onde $\Theta = \sup_{t\in[t_0,T]} \|\frac{\partial}{\partial x}f(t,u(t))\|$. Agora, da Desigualdade de Gronwall segue que

$$\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - \omega(t)\| \leq 2\varepsilon\ e^{M\theta\int_{t_0}^{t}ds} \leq 2\varepsilon\ e^{M\theta(T-t_0)}, \qquad t \in [t_0, b].$$

Isto prova que $\dfrac{u(t+h)-u(t)}{h} \longrightarrow \omega(t)$ para todo $t \in [t_0, b]$ quando $h \to 0$ e, portanto, temos que $u'(t) = \omega(t)$ para todo $t \in [t_0, T)$, pois b é arbitrário. Isto completa prova. ∎

2.4 O Problema Semilinear para Semigrupos Analíticos

Como na seção 2.3, vamos considerar o problema semilinear

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t,u(t)), & t_0 < t \leq T, \\ \qquad u(t_0) = x_0 \in X \end{cases} \tag{2.29}$$

mas agora assumindo que $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $(T(z))_{z\in\triangle(\alpha)}$ em X. Mais ainda, vamos assumir que $T(t)$ é limitado para $t \geq 0$, ou seja, $\|T(t)\| \leq M$, para $t \geq 0$, e que $0 \in \rho(-A)$, isto é, $-A$ é invertível.

Note que se $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico, então $-A-\delta I$ é invertível e gera um um semigrupo analítico para δ sufientemente grande. Isto permite reduzir o caso geral onde $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico para o caso onde o semigrupo é limitado e $-A$ é invertível.

Além disso, das hipóteses assumidas sobre A e dos resultados da seção anterior segue que A^α pode ser definido para $0 \leq \alpha \leq 1$ e A^α é um operador linear fechado e invertível ,com domínio

$D(A^\alpha)$ denso em X. Mais ainda, do fato de A^α ser fechado segue que $D(A^\alpha)$, munido da norma $|x|_G = \|x\| + \|A^\alpha x\|$, é um espaço de Banach. E, como A^α é inversível, a norma do gráfico é equivalente a norma $\|x\|_\alpha = \|A^\alpha x\|$. Assim, $D(A^\alpha)$ munido com a norma $\|.\|_\alpha$ é um espaço de Banach que denotaremos por X_α. Desta definição é claro $X_\alpha \supset X_\beta$ quando $0 < \alpha < \beta$.

Definição 2.31. *Seja U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^+ \times X_\alpha$. Dizemos que a função $f : U \to X$ é localmente Hölder se para todo $(t, x) \in U$, existe uma vizinhança $V \subset U$ e constantes $L \geq 0$ e $0 < \omega \leq 1$ tais que*

$$\|f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)\| \leq L(|t_1 - t_2|^\omega + \|x_1 - x_2\|_\alpha) \text{ para todo } (t_i, x_i) \in V. \tag{2.30}$$

Definição 2.32. *Dizemos que uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to X$ é Hölder contínua se existem constantes não negativas M e γ tais que*

$$\|f(t) - f(s)\| \leq M|t - s|^\gamma, \ \forall t, s \in D.$$

A seguir, enunciamos um resultado para o problema de valor inicial não homogêneo que utilizamos mais adiante.

Teorema 2.33. *Se $f \in L^1([t_0, T] : X)$ é localmente Hölder contínua $]t_0, T]$, então para todo $x \in X$ o problema*

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t), \quad t_0 < t \leq T, \\ \qquad\qquad u(t_0) = x_0. \end{cases}$$

tem uma única solução.

Vamos agora enunciar e demonstrar o principal resultado de existência desta seção.

Teorema 2.34. *Se $f : U \times X_\alpha \to X$, com $0 < \alpha < 1$ e U aberto, é localmente Hölder, então para todo $(t_0, x_0) \in U$, o problema (2.29) tem uma única solução $u \in C([t_0, t_1); X) \cap C^1((t_0, t_1); X)$ onde $t_1 > t_0$ depende dos dados iniciais.*

Demonstração. Das hipóteses sobre A, do Lema 1.57 e do item (c) Teorema 1.64, segue que

$$\|A^\alpha T(t)\| \quad \leq \quad C_\alpha t^{-\alpha}, \text{ para } t > 0. \tag{2.31}$$

Para o restante, da prova fixamos $(t_0, x_0) \in U$ e $t_1' > t_0, \delta > 0$ tais que a estimativa (2.30) seja válida no conjunto $V = \{(t,x) : t_0 \leq t \leq t_1',\ \|x - x_0\|_\alpha \leq \delta\}$. Seja $B = \max_{t_0 \leq t \leq t_1'} \|f(t, x_0)\|$, e $t_1 > 0$ tal que

$$\|T(t-t_0)A^\alpha x_0 - A^\alpha x_0\| < \delta/2 \text{ para } t_0 \leq t < t_1, \tag{2.32}$$

$$0 < t_1 - t_0 < \min\left\{t_1' - t_0,\ \left[\frac{\delta}{2}(1-\alpha)C_\alpha^{-1}(B+\delta L)^{-1}\right]^{1/1-\alpha}\right\}. \tag{2.33}$$

Seja Y o espaço de Banach $C([t_0, t_1]; X)$, munida da norma da convergência uniforme, que denotaremos por $\|.\|_\infty$. Definamos a aplicação $F : Y \to Y$ por

$$Fy(t) = T(t-t_0)A^\alpha x_0 + \int_{t_0}^t A^\alpha T(t-s) f(s, A^{-\alpha} y(s)) ds,\ t_0 \leq t \leq t_1. \tag{2.34}$$

Seja S o subconjunto de Y definido por

$$S = \{y : y \in Y,\ y(t_0) = A^\alpha x_0,\ \|y(t) - A^\alpha x_0\| \leq \delta\}. \tag{2.35}$$

Para $y \in S$ e $t_0 \leq t \leq t_1$, usando as estimativas (2.31), (2.33) e (2.35), temos que

$$\begin{aligned}
&\|Fy(t) - A^\alpha x_0\| \\
&\leq \|T(t-t_0)A^\alpha x_0 - A^\alpha x_0\| + \int_{t_0}^t \|A^\alpha T(t-s)\|\ \|f(s, A^{-\alpha}y(s)) - f(s, x_0)\| ds \\
&\quad + \int_{t_0}^t \|A^\alpha T(t-s)\|\ \|f(s, x_0)\| ds \\
&\leq \delta/2 + \int_{t_0}^t C_\alpha (t-s)^{-\alpha} L\ \|A^{-\alpha} y(s) - x_0\|_\alpha ds + \int_{t_0}^t C_\alpha (t-s)^{-\alpha} B\ ds \\
&= \delta/2 + C_\alpha L \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha}\ \|A^\alpha (A^{-\alpha} y(s) - x_0)\| ds + C_\alpha B \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha}\ ds \\
&\leq \delta/2 + C_\alpha(\delta L + B) \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha}\ ds \\
&= \delta/2 + C_\alpha(\delta L + B)(1-\alpha)^{-1}(t_1 - t_0)^{1-\alpha} \leq \delta/2 + \delta/2 = \delta,
\end{aligned}$$

Mais ainda, se $y_1, y_2 \in S$ e $t_0 \leq t \leq t_1$, então

$$\begin{aligned}
\|Fy_1(t) - Fy_2(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|A^\alpha T(t-s)\|\ \|f(s, A^{-\alpha} y_1(s)) - f(s, A^{-\alpha} y_2(s))\| ds \\
&\leq \int_{t_0}^t C_\alpha (t-s)^{-\alpha} L\ \|A^{-\alpha} y_1(s) - A^{-\alpha} y_2(s)\|_\alpha ds \\
&= \int_{t_0}^t C_\alpha (t-s)^{-\alpha} L\ \|y_1(s) - y_2(s)\| ds \\
&\leq C_\alpha L (1-\alpha)^{-1} (t_1 - t_0)^{1-\alpha} \|y_1 - y_2\|_\infty \leq \frac{\delta L}{2(B + \delta L)} \|y_1 - y_2\|_\infty
\end{aligned}$$

que implica que $\|Fy_1(t) - Fy_2(t)\| \leq \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|_\infty$ para $y_1, y_2 \in S$ e $t_0 \leq t \leq t_1$.

Logo, pelo Príncipo da Contração, a aplicação F possui um único ponto fixo $y \in S$ que satisfaz a equação integral

$$y(t) = T(t-t_0)A^\alpha x_0 + \int_{t_0}^{t} A^\alpha T(t-s) f(s, A^{-\alpha}y(s))ds, \text{ para } t_0 \leq t \leq t_1. \tag{2.36}$$

Do fato de y ser contínua segue que, dado $t \in [t_0, t_1]$ e $\varepsilon > 0$, existe $\theta_1 > 0$ tal que para todo $t_i \in [t_0, t_1]$ com $|t - t_i| < \theta_1$, temos $\|y(t) - y(t_i)\| < \varepsilon$. Assim, para $0 \leq \theta_2 \leq \min\{\theta_1, \varepsilon^{-\omega}\}$ e $|t - t_i| < \theta_2$ obtemos que

$$\begin{aligned} \|f(t, A^{-\alpha}y(t)) - f(t_i, A^{-\alpha}y(t_i))\| &\leq L(|t-t_i|^\omega + \|A^{-\alpha}y(t) - A^{-\alpha}y(t_i)\|_\alpha) \\ &= L(|t-t_i|^\omega + \|A^{-\alpha}\| \; \|y(t) - y(t_i)\|) \\ &< L(\theta_2^\omega + \varepsilon) < 2L\varepsilon, \end{aligned}$$

de onde segue que a aplicação $t \mapsto f(t, A^{-\alpha}y(t))$ é contínua em $[t_0, t_1]$ e, consequentemente, limitada neste intervalo. Seja $N > 0$ tal que

$$\|f(t, A^{-\alpha}y(t))\| \leq N, \text{ para todo } t_0 \leq t \leq t_1. \tag{2.37}$$

Mostraremos a seguir que a função $t \mapsto f(t, A^{-\alpha}y(t))$ é Hölder contínua em $(t_0, t_1]$. Para isso, inicialmente, vejamos que essa função é localmente Hölder contínua em $(t_0, t_1]$. Para $\beta, h \in \mathbb{R}$ tais que $0 < \beta < 1 - \alpha$ e $0 < h < 1$, do Teorema 1.64, temos que

$$\begin{aligned} \|(T(h) - I)A^\alpha T(t-s)\| &\leq C_\beta h^\beta \|A^{\alpha+\beta}T(t-s)\| \\ &\leq C_\beta h^\beta C_{\alpha+\beta}(t-s)^{-(\alpha+\beta)} = Kh^\beta (t-s)^{-(\alpha+\beta)}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

onde $K = C_\beta C_{\alpha+\beta}$.

Assim, se $t_0 < t < t + h \leq t_1$, então

$$\begin{aligned} \|y(t+h) - y(t)\| &\leq \|(T(h) - I)A^\alpha T(t-t_0)x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|(T(h) - I)A^\alpha T(t-s) f(s, A^{-\alpha}y(s))\| \, ds \\ &+ \int_{t}^{t+h} \|A^\alpha T(t+h-s) f(s, A^{-\alpha}y(s))\| \, ds \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Agora, usando as estimativas (2.37) e (2.38), obtemos que

$$\begin{aligned} I_1 &\leq K(t-t_0)^{-(\alpha+\beta)}h^\beta\|x_0\| = K_1h^\beta; \\ I_2 &\leq KNh^\beta\int_{t_0}^t (t-s)^{-(\alpha+\beta)}ds \leq KNh^\beta\frac{(t_1-t_0)^{1-(\alpha+\beta)}}{1-(\alpha+\beta)} = K_2h^\beta; \\ I_3 &\leq C_\alpha N\int_t^{t+h}(t+h-s)^{-\alpha}ds \leq C_\alpha N\frac{h^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq K_3h^\beta. \end{aligned} \tag{2.40}$$

onde $K_1 = K(t-t_0)^{-(\alpha+\beta)}\|x_0\|$, $K_2 = KN\frac{(t_1-t_0)^{1-(\alpha+\beta)}}{1-(\alpha+\beta)}$ e $K_3 = \frac{C_\alpha N}{1-\alpha}$. Note que K_2 e K_3 são independente de $t \in [t_0, t_1]$ enquanto K_1 depende do ponto t. Mais ainda, $K_1 \to \infty$ quando $t \to t_0^+$. Por fim, usando (2.39) e as estimativas em (2.40), segue que para todo $t_0^{'} > t_0$ existe $K > 0$ tal que $\|y(t) - y(s)\| \leq K|t-s|^\beta,\ t, s \in (t_0^{'}, t_1]$, o que implica que y é localmente Hölder contínua em $(t_0, t_1]$. Logo,

$$\begin{aligned} \|f(s, A^{-\alpha}y(s)) - f(t, A^{-\alpha}y(t))\| &\leq L\left(|t-s|^\omega + \|A^{-\alpha}y(s) - A^{-\alpha}y(t)\|_a l\right) \\ &\leq L\left(|t-s|^\omega + \|y(s)-y(t)\|\right) \\ &\leq L\left(|t-s|^\omega + K|t-s|^\beta\right) \\ &\leq L_1\left(|t-s|^\omega + |t-s|^\beta\right), \end{aligned}$$

onde $L_1 = \max\{L, KL\}$. De onde segue que $t \mapsto f(t, A^{-\alpha}y(t))$ é localmente Hölder contínua em $(t_0, t_1]$.

Agora, seja y a solução de (2.36) e considere o problema de valor inicial não homogêneo

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t, A^{-\alpha}u(t)),\ t_0 < t \leq t_1, \\ \qquad u(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2.41}$$

Pelo Teorema 2.33, este problema tem uma única solução $u \in C^1((t_0, t_1]; X)$. Mais ainda, a solução de (2.41) é dada por

$$u(t) = T(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^t T(t-s)f(s, A^{-\alpha}y(s))\ ds. \tag{2.42}$$

Desse modo, para cada $t > t_0$, temos que $u(t)$ pertence a $D(A)$ para todo $t \in (t_0, t_1]$ e, portanto, a $u(t) \in D(A^\alpha)$, para todo $t \in (t_0, t_1]$. Assim,

$$A^\alpha u(t) = T(t-t_0)A^\alpha x_0 + \int_{t_0}^t A^\alpha T(t-s)f(s, A^{-\alpha}y(s))\ ds. \tag{2.43}$$

Então, por (2.36) concluímos que $A^\alpha u(t) = y(t)$, para todo $t \in (t_0, t_1]$, ou seja, $u(t) = A^{-\alpha}y(t)$ e, por (2.42), $u \in C^1((t_0, t_1]; X)$ é solução de (2.29). A unicidade de u segue da unicidade de solução de (2.36) e (2.41). ∎

Capítulo 3

Existência e Unicidade de Soluções para Equações Diferenciais Abstratas do tipo Neutro com Retardo Dependendo do Estado

Neste capítulo estabelecemos alguns resultados inéditos sobre a existência e unicidade de soluções fracas e estritas para equações diferenciais abstratas do tipo neutro com retardo dependendo do estado da forma

$$\frac{d}{dt}(u(t) + G(t, u_{\sigma_1(t,u_t)})) = Au(t) + F(t, u_{\sigma_2(t,u_t)}), \quad t \in [0, a], \tag{3.1}$$

$$u_0 = \varphi \in \mathcal{B}_X = C([-p, 0]; X), \tag{3.2}$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador de um semigrupo analítico de operadores lineares limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ no espaço de Banach $(X, \| \cdot \|)$, $u_t : [-p, 0] \to X$ é a história do estado no tempo t ($u_t(\theta) = u(t + \theta)$, para $\theta \in [-p, 0]$) e $F(\cdot)$, $G(\cdot), \sigma_i(\cdot)$, $i = 1, 2$, são funções apropriadas.

Equações diferenciais com retardo dependendo do estado têm sido estudadas intensamente nas últimas décadas. Elas aparecem em diversos problemas aplicados e existe uma extensa lista de artigos publicados em revistas altamente conceituadas sobre este assunto. No geral, a literatura relacionada a esse tipo de equações está concentrada em problemas que podem ser descritos na forma

$$u'(t) = Au(t) + F(t, u(t), u_{\sigma(t,u_t)}), \quad t \in [0, a], \tag{3.3}$$

$$u_0 = \varphi \in \Omega \subset \mathcal{B} = C([-p, 0]; X), \tag{3.4}$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de operadores lineares limitados, $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach, $F(t, u(t), u_{\sigma(t,u_t)})$ é uma expressão envolvendo a condição inicial e o estado, $u_t : [-p, 0] \to X$ denota a história de $u(\cdot)$ no tempo $t \in [0, a]$ e $\sigma(\cdot)$ é uma função definida em $[0, a] \times \mathcal{B}$ e com valores em $[0, a]$.

Em particular, com relação a literatura sobre equações diferenciais ordinárias com valores em espaços de dimensão finita e com retardo dependendo do estado, a literatura existente é extensa e bastante completa, veja [2, 7, 16, 17, 19] dentre outros. No entanto, são poucos os trabalhos (relevantes) sobre equações diferenciais parciais com retardo dependendo do estado e sobre equações diferenciais abstratas (equações onde A é um operador linear não limitado) com retardo dependendo do estado. Dentre as dificuldades técnicas que têm limitado o desenvolvimento dessa parte da teoria está o fato que, em geral, a função $u \mapsto F(\cdot, u(\cdot), u_{\sigma(\cdot,u.)})$, onde $F(\cdot, u(\cdot), u_{\sigma(\cdot,u.)})(t) = F(t, u(t), u_{\sigma(t,u_t)})$, não é do tipo Lipschitz em espaços usuais, como o espaço de funções contínuas $C([-p, b]; X)$, o que implica, em muitos casos, que o problema (3.3)-(3.4) não é bem posto. No caso de equações diferenciais com retardo depedendo do estado onde A é limitado e X é de dimensão finita, este problema pode ser contornado estudando o problema em espaços de funções continuamente diferenciáveis, veja Walther [46]. Porém, a mesma estratégia se torna difícil quando estudamos equações diferenciais parciais ou o caso em que A não é limitado. Essa dificuldade faz com que a literatura relacionada ao caso em que A é um operador não limitado seja, em grande parte, restrita a alguns modelos diferenciais onde $F(\cdot)$ é uma função muito “particular”.

Sobre equações diferenciais abstratas com retardo depedendo do estado e $G = 0$ em (3.1)-(3.2) nós citamos [23, 28, 37, 38, 39]. Além disso, destacamos os recentes artigos de Hernández, Pierri & Wu [25], Krisztin & Rezounenko [30] e Yunfei, Yuan & Pei [33], os quais apresentam importantes avanços no que diz respeito ao problema de existência e unicidade de soluções que permitem mostrar que o problema é bem posto em determinados subespaços.

Embora alguns dos trabalhos iniciais sobre equações diferenciais com retardo depedendo do estado sejam voltados para equações diferenciais do tipo neutro (veja os trabalhos pioneiros de Driver [6, 7]), a literatura sobre este tipo de equações é bastante limitada. Para caso de equações diferenciais ordinárias citamos Hartung [16, 18] e os artigos citados acima por Driver. Para o caso de equações diferenciais parciais citamos o recente trabalho de Barbarossa, Hadeler & Kuttler [4], que, ao nosso ver, é o único trabalho relevante sobre equações diferenciais parciais neutras com retardo dependendo do estado. Assim, dada a impotância da teoria de equações diferenciais neutras e com o objetivo de dar continuidade ao estudo desenvolvido em [25], neste capítulo usamos algumas das ideias de [25] para desenvolver nosso estudo sobre o problema de existência e unicidade de soluções para problemas do tipo neutro da forma (3.1)-(3.2). Em particuar, em [25] os autores estudam o problema abstrato $u'(t) = Au(t) + F(t, u_{\sigma(t,u_t)})$, $u_0 = \varphi$. Como já foi observado, este tipo de problema não é bem posto no espaço usual $C([-p, 0]; X)$, pois aplicações como $u \mapsto F(t, u_{\sigma(t,u_t)})$ não são Lipschitz. No entanto, se as funções envolvidas são Lispchitz, estimativas da forma

$$\begin{aligned} &\| F(t, u_{\sigma(t,u_t)}) - F(t, v_{\sigma(t,v_t)}) \| \\ &\quad \leq \; L_F(1 + [v]_{C_{Lip}([-p,b];X)}[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_X;\mathbb{R})}) \| u - v \|_{C([-p,b];X)}, \end{aligned}$$

(onde L_F é a constante de Lipschitz de $F(\cdot)$) são válidas. Usando estimativas deste tipo e o princípio de contração, em [25] são estabelecidos vários resultados sobre existência e unicidade para o problema (3.1)-(3.2) com $G = 0$ e é caracterizado um subespaço onde este tipo de problema é bem posto. Os resultados em [25] são provados sobre espaços de funções Lipschitz e de classe C^1, o que é uma abordagem complexa na teoria de equações diferenciais abstratas e no contexto geral de equações diferenciais parciais.

Além das dificuldades da teoria de equações diferenciais abstratas com retardo dependendo do estado, em nossos resultados tivemos que lidar com as dificuldades próprias da teoria de equações diferenciais abstratas do tipo neutro. Para evidenciar algumas dessas dificuldades e a importância da teoria geral de equações diferenciais abstratas do tipo neutro, finalizamos esta introdução com alguns comentários breves sobre esta teoria.

A teoria de equações diferenciais neutras ocupa um lugar importante na teoria geral de equações diferenciais com retardo. Mais ainda, uma grande parte dos modelos diferenciais abstratos do tipo neutro considerados na literatura podem ser representados na forma

$$\frac{d}{dt}(u(t) + f(t, u_t)) = Au(t) + g(t, u_t, (u_t)'), \qquad t \in [0, a], \tag{3.5}$$

$$u_0 = \varphi \in \Omega \subset \mathcal{B}, \tag{3.6}$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador linear não limitado (usualmente, gerador infinitesimal de um semigrupo analítico), $(X, \| \cdot \|)$ é um espaço de Banach, $\mathcal{B}$ é o espaço das histórias, $\Omega \subset \mathcal{B}$ é aberto, $u_t : J \subset (-\infty, 0] \to X$ denota a história do estado no tempo t, $(u_t)'$ representa a derivada da função $t \mapsto u_t$ e $f : [0, a] \times \Omega \to X$, $g : [0, a] \times \Omega \times \mathcal{B} \to X$ são funções apropriadas.

Para a literatura relacionada com problemas que podem ser modelados na forma (3.5)-(3.6) citamos, por exemplo, os trabalhos pioneiros de Hale [15] e de Hernández e seus colaboradores [22, 24, 26]. Além disso, como descrito na introdução deste trabalho, o sistema (3.5)-(3.6) não é apenas um problema abstrato e aparece em muitos problemas aplicados.

Ressaltamos ainda que o estudo de sistemas do tipo neutro da forma (3.5)-(3.6) é recente e envolve dificuldades técnicas importantes. Por exemplo, se A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$, é natural estudar o problema via técnicas de ponto fixo e introduzindo um conceito de solução fraca apropriado. Para esse tipo de problema a solução fraca é dada por

$$\begin{aligned} u(t) &= T(t)[\varphi(0) + f(0, \varphi)] - f(s, u_s) - \int_0^t AT(t-s) f(s, u_s) ds \\ &\quad + \int_0^t T(t-s) g(s, u_s, u_s') ds. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Note que para o estudo da existência de soluções fracas via teoria de ponto fixo é necessário trabalhar em espaços de funções continuamente diferenciáveis, o que é um problema difícil no contexto da teoria de semigrupos lineares. Além disso, segue da teoria de C_0-semigrupos que, em geral, a função $t \mapsto AT(t-s)$ não está bem definida. Mais ainda, $t \mapsto AT(t-s)$ é integrável em $[0, t)$ na topologia de operadores se, e somente se, A é um operador limitado. Assim, a presença do termo $\int_0^t AT(t-s) f(s, u_s) ds$ na fórmula (3.7) cria uma grande dificuldade, a qual está relacionada com a integrabilidade da função $s \mapsto AT(t-s) f(s, u_s)$ em $[0, t]$.

Este capítulo está dividido em três seções. Na próxima seção incluímos algumas notações, definições e resultados que serão usados ao longo do capítulo. Na Seção 3.2 estudamos a existência e a unicidade de soluções fracas e estritas para (3.1)-(3.2) e na Seção 3.3 apresentamos alguns exemplos em que aplicamos alguns dos resultados obtidos na Seção 3.2.

3.1 Preliminares

No que segue desta seção incluímos algumas notações, definições e resultados que serão usados ao longo deste capítulo.

Seja $(V, \| \cdot \|_V)$ um espaço de Banach. Neste capítulo $B_l(z, V)$ denotará a bola fechada em V com centro em $z \in V$ e raio l. Os espaços $C([b,c];V)$ e $C_{Lip}([b,c];V)$ são os usuais, e suas normas serão denotadas por $\| \cdot \|_{C([b,c];V)}$ e $\| \cdot \|_{C_{Lip}([b,c];V)}$. Notemos que $\| \cdot \|_{C_{Lip}([b,c];V)} = \| \cdot \|_{C([b,c];V)} + [\cdot]_{Lip([b,c];V)}$, onde $[\zeta]_{C_{Lip}([b,c];V)} = \sup_{t,s \in [b,c], t \neq s} \frac{\|\zeta(s)-\zeta(t)\|_V}{|t-s|}$. O espaço $C^\alpha([b,c];V) = \left\{ \xi : [b,c] \to V : \sup_{t,s\in[b,c],t\neq s} \frac{\|\xi(s)-\xi(t)\|_Z}{|t-s|^\alpha} < \infty \right\}$, $\alpha \in (0,1)$, munido da norma $\| \cdot \|_{C^\alpha([b,c];Z)} = \| \cdot \|_{C([b,c];V)} + [\cdot]_{C^\alpha([b,c];V)}$, onde $[\xi]_{C^\alpha([b,c];V)} = \sup_{t,s\in[b,c],t\neq s} \frac{\|\xi(s)-\xi(t)\|_Z}{|t-s|^\alpha}$. Por praticidade, o espaço $C([-p,0];V)$ será denotado por $\mathcal{B}_V$.

Além das notações acima, assumiremos que $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador de um semigrupo analítico de operadores lineares limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ no espaço de Banach $(X, \| \cdot \|)$, com $\|T(t)\| \leq M$, para todo $t \geq 0$, $0 \in \rho(A)$ e $(-A)^\beta$, $\beta > 0$, denota a β-potência fracionária de A como introduzida no seção 1.6.1. Adicionalmente, assumiremos que $C^i_{\beta,\alpha} > 0$, $\alpha, \beta \in (0,1)$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, são constantes tais que $\| (-A)^{i+\alpha} T(t)x \| \leq \frac{C^i_{\beta,\alpha}}{t^{i+\alpha-\beta}} \| (-A)^\beta x \|$ para todo $t > 0$ e $x \in X_\beta$, isto é, $\| (-A)^i T(t) \|_{\mathcal{L}(X_\beta, X_\alpha)} \leq \frac{C^i_{\beta,\alpha}}{t^{i+\alpha-\beta}}$, para todo $t > 0$, onde $X_\beta = D((-A)^\beta)$ munido da norma $\|x\|_\beta = \|(-A)^\beta x\|$, para todo $x \in D((-A)^\beta)$.

Os próximos lemas serão úteis para provar alguns de nossos resultados.

Os lemas a seguir determinam quando uma solução fraca é uma solução estrita do Problema de Cauchy Abstrato

$$u'(t) = Au(t) + f(t),\ t > 0,\ u(0) = x_0, \tag{3.8}$$

para o caso onde $D(A)$ não é necessariamente denso em X.

Lema 3.1. [Lunardi [31], Lema 4.1.6, pág. 126]. *Seja $f \in C([0,b];X)$, $x_0 \in \overline{D(A)}$ e u a solução fraca de 3.8. São equivalentes as seguintes afirmações:*

(a) *$u \in C([0,b]; D(A))$;*

(a) *$u \in C^1([0,b]; X)$;*

(a) *u é uma solução estrita de 3.8.*

Lema 3.2. *Sejam $f \in C^\alpha([0,b];X)$, $0 < \alpha < 1$, e $x_0 \in D(A)$ tais que $Ax_0 + f(0) \in \overline{D(A)}$. Se u é a solução fraca de (3.8) então u é uma solução estrita de (3.8).*

Prova: Utilizando o Lema 3.1, temos que é suficiente mostrar que $u \in C([0,b];D(A))$. Para isso, escrevendo $u = u_1 + u_2$, onde

$$\begin{cases} u_1(t) &= \displaystyle\int_0^t T(t-s)[f(s)-f(t)]ds, \\ u_2(t) &= T(t)x_0 + \displaystyle\int_0^t T(t-s)f(t)ds, \end{cases}$$

para $0 \leq t \leq b$, temos que $u_1(t),\ u_2(t) \in D(A)$, $0 \leq t \leq b$, e

$$\begin{cases} Au_1(t) &= \displaystyle\int_0^t AT(t-s)[f(s)-f(t)]ds, \\ Au_2(t) &= AT(t)x_0 + \displaystyle\int_0^t AT(t-s)f(t)ds. \end{cases}$$

Mostraremos agora que Au_1 é Hölder contínua e Au_2 é contínua em $[0,b]$. Para $0 \leq w \leq t \leq b$, segue que

$$\begin{aligned} Au_1(t) - Au_1(w) &= \int_0^t AT(t-s)[f(s)-f(t)]ds - \int_0^w AT(w-s)[f(s)-f(w)]ds \\ &= \int_0^w AT(t-s)[f(s)-f(w)]ds + \int_0^w AT(t-s)[f(w)-f(t)]ds \\ &+ \int_w^t AT(t-s)[f(s)-f(t)]ds - \int_0^w AT(w-s)[f(s)-f(w)]ds \\ &= \int_0^w A[T(t-s)-T(w-s)][f(s)-f(w)]ds \\ &+ [T(t)-T(t-w)][f(w)-f(t)] + \int_w^t AT(t-s)[f(s)-f(t)]ds \\ &= \int_0^w \int_{w-s}^{t-s} A^2T(\theta)[f(s)-f(w)]d\theta ds \\ &+ [T(t)-T(t-w)][f(w)-f(t)] + \int_w^t AT(t-s)[f(s)-f(t)]ds, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \|Au_1(t) - Au_1(w)\| &\leq \int_0^w \int_{w-s}^{t-s} \|A^2T(\theta)\|\ \|f(s)-f(w)\| d\theta ds \\ &+ 2M\|f(w)-f(t)\| + \int_w^t \|AT(t-s)\|\ \|f(s)-f(t)\|ds \\ &\leq [f]_{C^\alpha([0,b];X)} \left\{ M_2 \int_0^w \int_{w-s}^{t-s} \theta^{-2}(w-s)^\alpha d\theta ds \right. \\ &+ \left. 2M(t-w)^\alpha + M_1 \int_w^t (t-s)^{\alpha-1} ds \right\} \\ &\leq [f]_{C^\alpha([0,b];X)} \left[M_2 \int_0^w \int_{w-s}^{t-s} \theta^{-2+\alpha} d\theta ds + \left[2M + \frac{M_1}{\alpha} \right] (t-w)^\alpha \right] \\ &\leq [f]_{C^\alpha([0,b];X)} \left[\frac{M_2}{\alpha(1-\alpha)} + 2M + \frac{M_1}{\alpha} \right] (t-w)^\alpha. \end{aligned}$$

Isso mostra que $Au_1 \in C^{\alpha}([0,b];X)$. Agora, como $x_0 \in D(A)$ e $Ax_0 + f(0) \in \overline{D(A)}$ temos

$$Au_2(t) = T(t)[Ax_0 + f(0)] + T(t)[f(t) - f(0)] - f(t), \quad 0 \leq t \leq b,$$

o que implica que $Au_2 \in C([0,b];X)$. ■

Lema 3.3. *Se $u \in C_{Lip}([b,c];X)$, então $u \in C^{\alpha}([b,c];X)$ e $[u]_{C^{\alpha}([b,c];X)} \leq [u]_{C_{Lip}([b,c];X)}|c-b|^{1-\alpha}$ para todo $0 < \alpha < 1$.*

Prova: De fato, como $u \in C_{Lip}([b,c];X)$, para $t, s \in [b,c]$ e $0 < \alpha < 1$ temos que

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(s)\| &\leq [u]_{C_{Lip}([b,c];X)}|t-s|^{1-\alpha}|t-s|^{\alpha} \\ &\leq [u]_{C_{Lip}([b,c];X)}|c-b|^{1-\alpha}|t-s|^{\alpha}, \end{aligned}$$

o que permite finalizar a prova. ■

Lema 3.4. *Assuma $0 \leq \gamma < \beta < \alpha \leq 1$, $\xi \in L^{\infty}([0,b];X_{\alpha})$, $\zeta \in L^{\infty}([0,b];X_{\gamma})$ e sejam $v : [0,b] \to X$, $w : [0,b] \to X$ definidas por $v(t) = \int_0^t AT(t-s)\xi(s)ds$ e $w(t) = \int_0^t T(t-s)\zeta(s)ds$. Então $v \in C^{\alpha-\beta}([0,b];X_{\beta})$, $w \in C^{1+\gamma-\beta}([0,b];X_{\beta})$ e*

$$[v]_{C^{\alpha-\beta}([0,b];X_{\beta})} \leq \| \xi \|_{L^{\infty}([0,b];X_{\alpha})} \frac{1}{\alpha-\beta}\left[C^1_{\alpha,\beta} + \frac{C^2_{\alpha,\beta}}{1-\alpha+\beta}\right], \tag{3.9}$$

$$[w]_{C^{1+\gamma-\beta}([0,b];X_{\beta})} \leq \| \zeta \|_{L^{\infty}([0,b];X_{\gamma})} \frac{1}{1+\gamma-\beta}\left[C^0_{\gamma,\beta} + \frac{C^1_{\gamma,\beta}}{\beta-\gamma}\right]. \tag{3.10}$$

Prova: Sejam $h > 0$ e $t \in [0,b]$ tais que $t+h \in [0,b]$. Para v temos que

$$
\begin{aligned}
&\|v(t+h)-v(t)\|_{X_\beta}\\
&=\left\|\int_0^{t+h}(-A)^{1+\beta}T(t+h-s)\xi(s)ds-\int_0^t(-A)^{1+\beta}T(t-s)\xi(s)ds\right\|\\
&=\left\|\int_0^{t}(-A)^{1+\beta}[T(t+h-s)-T(t-s)]\xi(s)ds-\int_t^{t+h}(-A)^{1+\beta}T(t+h-s)\xi(s)ds\right\|\\
&\le\int_0^{t}\|(-A)^{1+\beta}[T(t+h-s)-T(t-s)]\xi(s)\|ds+\int_t^{t+h}\|(-A)^{1+\beta}T(t+h-s)\xi(s)\|ds\\
&\le\int_0^{t}\left\|(-A)^{1+\beta}\int_{t-s}^{t+h-s}AT(\tau)\xi(s)d\tau\right\|ds+\int_t^{t+h}\frac{C^1_{\alpha,\beta}}{(t+h-s)^{1+\beta-\alpha}}\|\xi(s)\|_{X_\alpha}ds\\
&\le\int_0^{t}\int_{t-s}^{t+h-s}\|(-A)^{2+\beta}T(\tau)\xi(s)\|d\tau ds+\parallel\xi\parallel_{L^\infty([0,b];X_\alpha)}C^1_{\alpha,\beta}\int_0^h s^{\alpha-\beta-1}ds\\
&\le\int_0^{t}\int_{t-s}^{t+h-s}\frac{C^2_{\alpha,\beta}}{\tau^{2+\beta-\alpha}}\|\xi(s)\|_{X_\alpha}d\tau ds+\parallel\xi\parallel_{L^\infty([0,b];X_\alpha)}C^1_{\alpha,\beta}\frac{h^{\alpha-\beta}}{\alpha-\beta}\\
&\le\parallel\xi\parallel_{L^\infty([0,b];X_\alpha)}\left[C^2_{\alpha,\beta}\int_0^t\int_{t-s}^{t+h-s}\tau^{\alpha-\beta-2}d\tau ds+C^1_{\alpha,\beta}\frac{h^{\alpha-\beta}}{\alpha-\beta}\right]\\
&=\parallel\xi\parallel_{L^\infty([0,b];X_\alpha)}\left[C^2_{\alpha,\beta}\int_0^t\frac{[(t+h-s)^{\alpha-\beta-1}-(t-s)^{\alpha-\beta-1}]}{\alpha-\beta-1}ds+C^1_{\alpha,\beta}\frac{h^{\alpha-\beta}}{\alpha-\beta}\right]\\
&=\parallel\xi\parallel_{L^\infty([0,b];X_\alpha)}\left[\frac{C^2_{\alpha,\beta}}{1+\beta-\alpha}\left[\int_0^t(t-s)^{\alpha-\beta-1}ds-\int_0^t(t+h-s)^{\alpha-\beta-1}ds\right]+C^1_{\alpha,\beta}\frac{h^{\alpha-\beta}}{\alpha-\beta}\right]\\
&=\parallel\xi\parallel_{L^\infty([0,b];X_\alpha)}\left[\frac{C^2_{\alpha,\beta}}{1+\beta-\alpha}\cdot\frac{h^{\alpha-\beta}+t^{\alpha-\beta}-(t+h)^{\alpha-\beta}}{\alpha-\beta}+C^1_{\alpha,\beta}\frac{h^{\alpha-\beta}}{\alpha-\beta}\right]\\
&\le\parallel\xi\parallel_{L^\infty([0,b];X_\alpha)}\left[\frac{C^2_{\alpha,\beta}}{1+\beta-\alpha}\cdot\frac{h^{\alpha-\beta}}{\alpha-\beta}+C^1_{\alpha,\beta}\frac{h^{\alpha-\beta}}{\alpha-\beta}\right],
\end{aligned}
$$

onde a última desigualdade segue do fato função $t\mapsto t^{\alpha-\beta}$ ser crescente em $[0,\infty)$. Do anterior obtemos a desigualdade (3.9). Analogamente, para w temos que

$$
\begin{aligned}
\|w(t+h)-w(t)\|_{X_\beta}&=\left\|\int_0^{t+h}(-A)^{\beta}T(t+h-s)\zeta(s)ds-\int_0^t(-A)^{\beta}T(t-s)\zeta(s)ds\right\|\\
&\le\int_0^t\int_{t-s}^{t+h-s}\|(-A)^{1+\beta}T(\tau)\zeta(s)\|d\tau ds+\int_t^{t+h}\|(-A)^{\beta}T(t+h-s)\zeta(s)\|ds\\
&\le\int_0^t\int_{t-s}^{t+h-s}\frac{C^1_{\gamma,\beta}}{\tau^{1+\beta-\gamma}}\|\zeta(s)\|_{X_\gamma}d\tau ds+\int_t^{t+h}\frac{C^0_{\gamma,\beta}}{(t+h-s)^{\beta-\gamma}}\|\zeta(s)\|_{X_\gamma}ds\\
&\le\parallel\zeta\parallel_{L^\infty([0,b];X_\gamma)}\frac{1}{1+\gamma-\beta}\left[\frac{C^1_{\gamma,\beta}}{\beta-\gamma}+C^0_{\gamma,\beta}\right]h^{1+\gamma-\beta},
\end{aligned}
$$

o que mostra a desigualdade (3.10) e finaliza a prova. ■

3.2 Existência e Unicidade de soluções fracas e estritas

Nesta seção estudamos a existência de soluções fracas e estritas para o problema (3.1)-(3.2). Da literatura existente sobre equações neutras, adotamos os seguintes conceitos de soluções.

Definição 2. *Uma função $u : [-p, b] \to X$, $0 < b \leq a$, é dita ser uma solução fraca do problema (3.1)-(3.2) em $[-p, b]$ se $u \in C([-p, b]; X)$, $u_0 = \varphi$ e*

$$\begin{aligned} u(t) &= T(t)[\varphi(0) + G(0, u_{\sigma_1(0,\varphi)})] - G(t, u_{\sigma_1(t,u_t)}) - \int_0^t AT(t-s)G(s, u_{\sigma_1(s,u_s)})ds \\ &\quad + \int_0^t T(t-s)F(s, u_{\sigma_2(s,u_s)}))ds, \ \ \forall\, t \in [0, b]. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Definição 3. *Uma função $u : [-p, b] \to X$, $0 < b \leq a$, é chamada uma solução estrita de (3.1)-(3.2) em $[-p, b]$ se $u \in C([0, b]; X_1)$, $u_0 = \varphi$, a função $t \mapsto u(t) + G(t, u_{\sigma_1(t,u_t)})$ pertence a $C^1([0, b]; X)$ e $u(\cdot)$ satisfaz (3.1) em $[0, b]$.*

Observação 3.5. Seja $(V, \| \cdot \|_V)$ um espaço de Banach e $\sigma \in C([0, a] \times \mathcal{B}_V; \mathbb{R}^+)$. A seguir, para uma função $u \in C([-p, b]; V)$, $0 < b \leq a$, usaremos as notações $u_{(\cdot)}$ e $u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})}$ para as funções $u_{(\cdot)}, u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})} : [0, b] \to B_V$ dadas por $u_{(\cdot)}(t) = u_t$ e $u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})}(t) = u_{\sigma(t,u_t)}$.

De [25] incluímos, com adpatações, os seguintes lemas , onde $(V, \| \cdot \|_V)$ é um espaço de Banach.

Lema 3.6. *[25, Lema 1] Assuma que $u, v \in C_{Lip}([-p, b]; V)$, $0 < b \leq a$, $\sigma \in C_{Lip}([0, a] \times \mathcal{B}_V; \mathbb{R}^+)$, $u_0 = v_0 = \psi$, para algum $\psi \in \mathcal{B}_V$ prefixado, e $\sigma(t, w_t) \leq b$ para $w = u$ e $w = v$ e para todo $t \in [0, b]$. Então $u_{(\cdot)}, u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})} \in C_{Lip}([0, b]; \mathcal{B}_V)$ e*

$$[u_{(\cdot)}]_{C_{Lip}([0,b];\mathcal{B}_V)} \leq \max\{[u]_{C_{Lip}([0,b];V)}, [\psi]_{C_{Lip}([-p,0];V)}\}, \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} &[u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})}]_{C_{Lip}([0,b];\mathcal{B}_V)} \\ &\quad \leq [u_{(\cdot)}]_{C_{Lip}([0,b];\mathcal{B}_V)}[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_V;\mathbb{R}^+)}(1 + [u_{(\cdot)}]_{C_{Lip}([0,b];\mathcal{B}_V)}), \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} &\| u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})} - v_{\sigma(\cdot,v_{(\cdot)})} \|_{C([0,b];\mathcal{B}_V)} \\ &\quad \leq (1 + [v_{(\cdot)}]_{C_{Lip}([0,b];\mathcal{B}_V)}[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_V;\mathbb{R}^+)}) \| u - v \|_{C([0,b];V)} . \end{aligned} \tag{3.14}$$

Lema 3.7. *[25, Lema 3] Suponha que $u \in C^\alpha([-p, b]; V)$ para algum $\alpha \in (0, 1)$, $0 < b \leq a$ e $u_0 = \psi$, para algum $\psi \in \mathcal{B}_V$. Então $u_{(\cdot)} \in C^\alpha([0, b]; \mathcal{B}_V)$ e $[u_{(\cdot)}]_{C^\alpha([0,b];\mathcal{B}_V)} \leq \max\{[u]_{C^\alpha([0,b];V)}, [\psi]_{C^\alpha([-p,0];V)}\}$.*

Para provar nossos resultados, introduziremos as seguintes condições. No restante deste capítulo $(V, \|\cdot\|_V)$ é um espaço de Banach continuamente imerso em $(X, \|\cdot\|)$.

$\mathbf{H}_{\sigma,\mathcal{B}_\mathbf{V}}$ Seja $(V, \|\cdot\|_V)$ um espaço de Banach continuamente imerso em $(X, \|\cdot\|)$, $\sigma \in C_{Lip}([0,a] \times \mathcal{B}_V; \mathbb{R}^+)$ e suponha que $\varphi \in \mathcal{B}_V$. Dizemos que $\sigma(\cdot)$ satisfaz a condição $\mathbf{H}_{\sigma,\mathcal{B}_\mathbf{V}}$ se $\sigma(0,\varphi) = 0$ e existe $0 < b^* \leq a$ tal que $0 \leq \sigma(t,\phi) \leq t$ para todo $(t,\phi) \in [0,b^*] \times B_{b^*}(\varphi, \mathcal{B}_V)$.

$\mathbf{H_1}$ Existem espaços de Banach $(W_1, \|\cdot\|_{W_1}) \hookrightarrow (Z, \|\cdot\|_Z) \hookrightarrow (W_2, \|\cdot\|_{W_2}) \hookrightarrow (X, \|\cdot\|)$ tais que $T(\cdot) \in L^1([0,a]; \mathcal{L}(W_2, Z))$ e $AT(\cdot) \in L^1([0,a]; \mathcal{L}(W_1, Z))$.

$\mathbf{H}^{\mathbf{W_1}}_{\mathbf{G},\mathbf{Z}}$ Existem $U_{\mathcal{B}_Z} \subset \mathcal{B}_Z$ aberto e uma função contínua não decrescente $L_G : [0,a] \to \mathbb{R}^+$ tais que $\varphi \in U_{\mathcal{B}_Z}$, $G \in C([0,a] \times U_{\mathcal{B}_Z}; W_1)$ e

$$\| G(t,\psi_1) - G(s,\psi_2) \|_{W_1} \quad \leq \quad L_G(c)(| t-s | + \| \psi_1 - \psi_2 \|_{\mathcal{B}_Z}),$$

para todo $t,\ s \in [0,c]$, $\psi_i \in B_c(\varphi, \mathcal{B}_Z)$, $i = 1,2$, e cada $0 \leq c \leq a$ tal que $B_c(\varphi, \mathcal{B}_Z) \subset U_{\mathcal{B}_Z}$.

$\mathbf{H}^{\mathbf{W_2}}_{\mathbf{F},\mathbf{Z}}$ Existe $U_{\mathcal{B}_Z} \subset \mathcal{B}_Z$ aberto tal que $\varphi \in U_{\mathcal{B}_Z}$ e $F \in C_{Lip}([0,a] \times U_{\mathcal{B}_Z}; W_2)$, com L_F a constante de Lipschitz de F em $[0,a] \times U_{\mathcal{B}_Z}$.

Observação 3.8. As condiçôes $\mathbf{H_1}$ e $\mathbf{H}^{\mathbf{W_1}}_{\mathbf{G},\mathbf{Z}}$ estão relacionadas com a integrabilidade da função $s \mapsto AT(t-s)G(s, u_{\sigma_1(s,u_s)})$ e nossa principal motivação, o estudo das equações diferenciais parciais neutras. Observemos que a função $s \mapsto AT(s)$ é integrável em $\mathcal{L}(X)$ se, e somente se, o operador A é limitado. Para maiores detalhes, veja [26].

Observação 3.9. Por questão de simplicidade, no restante deste capítulo assumiremos que $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ e que $U_{\mathcal{B}_Z}$ é o mesmo conjunto nas condições $\mathbf{H}^{\mathbf{W_2}}_{\mathbf{F},\mathbf{Z}}$ e $\mathbf{H}^{\mathbf{W_1}}_{\mathbf{G},\mathbf{Z}}$. Os outros casos podem ser estudados procedendo de forma análoga aos nossos resultados.

Observação 3.10. Dados $(V_1, \|\cdot\|_{V_1})$ e $(V_2, \|\cdot\|_{V_2})$ dois espaços de Banach tais que $V_1 \hookrightarrow V_2$, denotaremos por i_c a aplicação (contínua) inclusão de V_1 em V_2, isto é, $i_c : V_1 \to V_2$ é definida por $i_c(x) = x$.

Podemos provar agora nosso primeiro teorema.

Teorema 3.11. *Assuma que as condições* $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H}^{\mathbf{W_1}}_{\mathbf{G},\mathbf{Z}}, \mathbf{H}^{\mathbf{W_2}}_{\mathbf{F},\mathbf{Z}}$ *e* $\mathbf{H}_{\sigma,\mathcal{B}_\mathbf{Z}}$ *são satisfeitas,* $\varphi \in C_{Lip}([-p,0]; Z)$, *a função* $T(\cdot)(\varphi(0)+G(0,\varphi))$ *pertence a* $C_{Lip}([0,a]; Z)$, $\{T(\cdot)F(0,\varphi), AT(\cdot)G(0,\varphi)\} \subset$

$L^\infty([0,a];Z)$, $\|i_c\|_{\mathcal{L}(W_1,Z)}L_G(0) < 1$ *e* $\lim_{c\to 0} L_G(c)[\sigma]_{C_{Lip}([0,c]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)} = 0$. *Então existe uma única solução fraca* $u \in C_{Lip}([-p,b];Z)$ *de (3.1)-(3.2) em* $[-p,b]$ *para algum* $b \in (0,a]$.

Prova: Seja b^* o número proveniente da condição $\mathbf{H}_{\sigma,\mathcal{B}_\mathbf{Z}}$. Sejam $0 < b_1 \leq b^*$ tal que $B_{b_1}(\varphi,\mathcal{B}_Z) \subset U_{\mathcal{B}_Z}$ e $R > 0$ grande o suficiente de forma que

$$\begin{aligned} R \quad > \quad & [\varphi]_{C_{Lip}([-p,0];Z)} + [T(\cdot)(\varphi(0)+G(0,\varphi))]_{C_{Lip}([0,b_1];Z)} + \|i_c\|_{\mathcal{L}(W_1,Z)}L_G(a) \\ & + \| T(\cdot)F(0,\varphi) \|_{L^\infty([0,b_1];Z)} + \| AT(\cdot)G(0,\varphi) \|_{L^\infty([0,b_1];Z)} \,. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Usando que $L_G(c)[\sigma]_{C_{Lip}([0,c]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)} \to 0$ quando $c \to 0$, $T(\cdot) \in L^1([0,c];\mathcal{L}(W_2,Z))$ e $AT(\cdot) \in L^1([0,c];\mathcal{L}(W_1,Z))$, podemos selecionar $0 < b < \min\{b_1, 1\}$ tal que $Rb \leq b_1$ e

$$\begin{aligned} & [T(\cdot)(\varphi(0)+G(0,\varphi))]_{C_{Lip}([0,b];Z)} \\ & +\|i_c\|_{\mathcal{L}(W_1,Z)}L_G(b)(1+R[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}(1+R)) \\ & + \| AT(\cdot)G(0,\varphi) \|_{L^\infty([0,b];Z)} + \| T(\cdot)F(0,\varphi) \|_{L^\infty([0,b];Z)} \\ & +2 \| AT(\cdot) \|_{L^1([0,b];\mathcal{L}(W_1,Z))} L_G(b)(1+R[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}(1+R)) \\ & +2 \| T(\cdot) \|_{L^1([0,b];\mathcal{L}(W_2,Z))} L_F(1+R[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}(1+R)) \quad \leq \quad R, \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} \Phi(b) = & \| i_c \|_{\mathcal{L}(W_1,Z)} L_G(b)(1+R[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}) \\ & + \| AT(\cdot) \|_{L^1([0,b];\mathcal{L}(W_1,Z))} L_G(b)(1+R[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}) \\ & + \| T(\cdot) \|_{L^1([0,b];\mathcal{L}(W_2,Z))} L_F(1+R[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}) \quad < \quad 1. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Seja $\mathcal{Y}(b,R)$ o espaço

$$\mathcal{Y}(b,R) = \Big\{ u \in C([-p,b];Z) : u_0 = \varphi, u \in C_{Lip}([-p,b];Z), \;\; [u]_{C_{Lip}([-p,b];Z)} \leq R \; \Big\}$$

munido com a métrica $d(u,v) = \| u - v \|_{C([0,b];Z)}$ e consideramos $\Gamma : \mathcal{Y}(b,R) \to C([-p,b];X)$ a aplicação definida por $\Gamma u(t) = \varphi(t)$ para $t \in [-p,0]$ e

$$\begin{aligned} \Gamma u(t) \quad = \quad & T(t)[\varphi(0)+G(0,\varphi)] - G(t,u_{\sigma(t,u_t)}) - \int_0^t AT(t-s)G(s,u_{\sigma(s,u_s)})ds \\ & + \int_0^t T(t-s)F(s,u_{\sigma(s,u_s)})ds \;\text{ for } t \in [0,b]. \end{aligned} \tag{3.18}$$

A seguir, mostramos que Γ é uma contração em $\mathcal{Y}(b,R)$ e assumimos, daqui para frente, $u, v \in \mathcal{Y}(b,R)$. Antes porém, verificamos que Γ está bem definida.

Da desigualdade (3.12) e da definição de $\mathcal{Y}(b,R)$, temos que $[u_{(\cdot)}]_{C_{Lip}([-p,b];\mathcal{B}_Z)} \leq R$. Então,

$$\| u_t - \varphi \|_{\mathcal{B}_Z} \leq [u_{(\cdot)}]_{C_{Lip}([0,b];\mathcal{B}_Z)} t \leq [u_{(\cdot)}]_{C_{Lip}([0,b];\mathcal{B}_Z)} b \leq Rb \leq b_1 \leq b^*,$$

para todo $t \in [0,b]$, o que implica que $0 \leq \sigma(t,u_t) \leq t$ para $t \in [0,b]$ e a função $t \mapsto u_{\sigma(t,u_t)}$ está bem definida. Mais ainda, como $0 \leq \sigma(t,u_t) \leq t$ para $t \in [0,b]$, segue que

$$\| u_{\sigma(t,u_t)} - \varphi \|_{\mathcal{B}_Z} \leq [u_{(\cdot)}]_{C_{Lip}([0,b];\mathcal{B}_Z)} |\sigma(t,u_t)| \leq [u_{(\cdot)}]_{C_{Lip}([0,b];\mathcal{B}_Z)} t \leq Rb \leq b_1,$$

o que implica que $u_{\sigma(t,u_t)} \in B_{b_1}(\varphi, \mathcal{B}_z) \subset U_{\mathcal{B}_Z}$ para $t \in [0,b]$ e as funções $F(\cdot, u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})})$ e $G(\cdot, u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})})$ estão bem definidas.

Por outro lado, usando que $F(\cdot, u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})}) \in C([0,b];W_2)$ e $G(\cdot, u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})}) \in C([0,b];W_1)$, para $t \in [0,b]$ temos que

$$\begin{aligned}
\| \Gamma u(t) \|_Z \leq\ & \| T(t)(\varphi(0) + G(0,\varphi)) \|_Z + \| G(t, u_{\sigma(t,u_t)}) \|_Z \\
& + \int_0^t \| AT(t-s) \|_{\mathcal{L}(W_1,Z)} \| G(s, u_{\sigma(s,u_s)}) \|_{W_1} \, ds \\
& + \int_0^t \| T(t-s) \|_{\mathcal{L}(W_2,Z)} \| F(s, u_{\sigma(s,u_s)}) \|_{W_2} \, ds \\
\leq\ & \| T(t)(\varphi(0) + G(0,\varphi)) \|_Z + \|i_c\|_{\mathcal{L}(W_1,Z)} \| G(\cdot, u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})}) \|_{C([0,b];W_1)} \\
& + \| G(\cdot, u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})}) \|_{C([0,b];W_1)} \| AT(\cdot) \|_{L^1([0,b];\mathcal{L}(W_1,Z))} \\
& + \| F(\cdot, u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})}) \|_{C([0,b];W_2)} \| T(\cdot) \|_{L^1([0,b];\mathcal{L}(W_2,Z))},
\end{aligned}$$

garantindo que $\| \Gamma u(t) \|_Z < \infty$ para todo $t \in [0,b]$ e $\Gamma u(\cdot) \in C([-p,b];Z)$.

Provamos agora que Γ assuma valores em $\mathcal{Y}(b,R)$. Inicialmente, observe que da desigualdade (3.13) segue que para $t \in [0,b]$ e h tal que $|h| > 0$ e $t+h \in [0,b]$

$$\begin{aligned}
\| F(t+h, u_{\sigma(t+h,u_{t+h})}) - F(t, u_{\sigma(t,u_t)}) \|_{W_2} & \leq L_F(|h| + \| u_{\sigma(t+h,u_{t+h})} - u_{\sigma(t,u_t)} \|_{\mathcal{B}_Z}) \\
& \leq L_F(|h| + [u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})}]_{C_{Lip}([0,b];\mathcal{B}_Z)} h) \\
& \leq L_F(1 + R[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}(1+R))|h|,
\end{aligned}$$

o que mostra que $F(\cdot, u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})}) \in C_{Lip}([0,b];W_2)$ e

$$[F(\cdot, u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})})]_{C_{Lip}([0,b];W_2)} \leq L_F(1 + R[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}(1+R)). \tag{3.19}$$

Procedendo como acima, provamos que $G(\cdot, u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})}) \in C_{Lip}([0,b];W_1)$ e

$$\begin{aligned}
[G(\cdot, u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})})]_{C_{Lip}([0,b];W_1)} & \leq L_G(b)(1 + R[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}(1+R)), \\
[G(\cdot, u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})})]_{C_{Lip}([0,b];Z)} & \leq \| i_c \|_{\mathcal{L}(W_1,Z)} L_G(b)(1 + R[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}(1+R)).
\end{aligned}$$

Agora, usando as estimativas anteriores, para $t \in [0,b]$ e $h > 0$ tal que $t+h \in [0,b]$, temos

$$\begin{aligned}
&\| \Gamma u(t+h) - \Gamma u(t) \|_Z \\
&\leq \; [T(\cdot)(\varphi(0) + G(0,\varphi))]_{C_{Lip}([0,b];Z)} h + \| G(t+h, u_{\sigma(t+h,u_{t+h})}) - G(t, u_{\sigma(t,u_t)}) \|_Z \\
&\quad + \int_0^h \| AT(t+h-s)G(0,\varphi) \|_Z \, ds + \int_0^h \| T(t+h-s)F(0,\varphi) \|_Z \, ds \\
&\quad + \int_0^h \| AT(t+h-s) \|_{\mathcal{L}(W_1,Z)} \| G(s, u_{\sigma(s,u_s)}) - G(0,\varphi) \|_{W_1} \, ds \\
&\quad + \int_0^h \| T(t+h-s) \|_{\mathcal{L}(W_2,Z)} \| F(s, u_{\sigma(s,u_s)}) - F(0,\varphi) \|_{W_2} \, ds \\
&\quad + \int_0^t \| AT(t-s) \|_{\mathcal{L}(W_1,Z)} \| G(s+h, u_{\sigma(s+h,u_{s+h})}) - G(s, u_{\sigma(s,u_s)}) \|_{W_1} \, ds \\
&\quad + \int_0^t \| T(t-s) \|_{\mathcal{L}(W_2,Z)} \| F(s+h, u_{\sigma(s+h,u_{s+h})}) - F(s, u_{\sigma(s,u_s)}) \|_{W_2} \, ds \\
&\leq \; [T(\cdot)(\varphi(0) + G(0,\varphi))]_{C_{Lip}([0,b];Z)} h \\
&\quad + \|i_c\|_{\mathcal{L}(W_1,Z)} L_G(b)(1 + R[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}(1+R))h \\
&\quad + \| AT(\cdot)G(0,\varphi) \|_{L^\infty([0,b];Z)} \, h + \| T(\cdot)F(0,\varphi) \|_{L^\infty([0,b];Z)} \, h \\
&\quad + 2 \| AT(\cdot) \|_{L^1([0,b];\mathcal{L}(W_1,Z))} \, L_G(b)(1 + R[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}(1+R))h \\
&\quad + 2 \| T(\cdot) \|_{L^1([0,b];\mathcal{L}(W_2,Z))} \, L_F(1 + R[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}(1+R))h,
\end{aligned}$$

o que implica de (3.16) que $[\Gamma u]_{C_{Lip}([0,b];Z)} \leq R$. Mais ainda, como $(\Gamma u)_0 = \varphi$ obtemos $[\Gamma u]_{C_{Lip}([-p,0];Z)} \leq R$, o que implica que $[\Gamma u]_{C_{Lip}([-p,b];Z)} \leq R$ e $\Gamma u \in \mathcal{Y}(b,R)$.

Mostraremos agora que Γ é uma contração. Da desigualdade (3.14) é fácil ver que

$$\begin{aligned}
&\| G(s, u_{\sigma(s,u_s)}) - G(s, v_{\sigma(s,v_s)}) \|_{W_1} \\
&\qquad \leq \; L_G(b) \| u_{\sigma(t,u_t)} - v_{\sigma(t,v_t)} \|_{\mathcal{B}_Z} \\
&\qquad \leq \; L_G(b)(1 + [v_{(\cdot)}]_{C_{Lip}([0,b];\mathcal{B}_Z)} [\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}) \| u - v \|_{C([0,b];Z)} \\
&\qquad \leq \; L_G(b)(1 + R[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}) \| u - v \|_{C([0,b];Z)} \, .
\end{aligned}$$

Analogamente, vemos que

$$\| F(s, u_{\sigma(s,u_s)}) - F(s, v_{\sigma(s,v_s)}) \|_{W_2} \;\; \leq \;\; L_F(1 + R[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}) \| u - v \|_{C([0,b];Z)} \, .$$

Assim, usando a desigualdade anterior, para $t \in [0,b]$ obtemos que

$$\begin{aligned}
&\| \Gamma u(t) - \Gamma v(t) \|_Z \\
&\quad \leq \| i_c \|_{\mathcal{L}(W_1,Z)} L_G(b)(1 + R[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}) \| u - v \|_{C([0,b];Z)} \\
&\qquad + \| AT(\cdot) \|_{L^1([0,b];\mathcal{L}(W_1,Z))} L_G(b)(1 + R[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}) \| u - v \|_{C([0,b];Z)} \\
&\qquad + \| T(\cdot) \|_{L^1([0,b];\mathcal{L}(W_2,Z))} L_F(1 + R[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}) \| u - v \|_{C([0,b];Z)} \\
&\quad \leq \Phi(b) \| u - v \|_{C([0,b];Z)},
\end{aligned}$$

o que nos permite concluir que Γ é uma contração em $\mathcal{Y}(b,R)$ e então, que existe uma única solução fraca $u \in C_{Lip}([-p,b];Z)$ do problema (3.1)-(3.2). ∎

No próximo resultado usamos uma hipótese alternativa no lugar da condição $\mathbf{H}_{\sigma,\mathcal{B}_\mathbf{Z}}$. Na seguinte condição, W_1, Z e $L_G(\cdot)$ são os espaços na condição $\mathbf{H_1}$ e a função na condição $\mathbf{H}^{\mathbf{W_1}}_{\mathbf{G,Z}}$, respectivamente. Adicionalmente, $\eta_Z : [0,a] \to \mathbb{R}^+$ é a função dada por

$$\begin{aligned}
\eta_Z(b) \;=\; \max\{&[\varphi]_{C_{Lip}([-p,0];Z)}, ([T(\cdot)(\varphi(0) + G(0,\varphi))]_{C_{Lip}([0,b];Z)} + \| i_c \|_{\mathcal{L}(W_1,Z)} L_G(b) \\
&+ \| T(\cdot)F(0,\varphi) \|_{L^\infty([0,b];Z)} + \| AT(\cdot)G(0,\varphi) \|_{L^\infty([0,b];Z)})\}. \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

A condição alternativa que utilizaremos é a seguinte:

$\mathbf{H}_{\sigma,\eta_\mathbf{Z}}$ $\sigma(\cdot)$ satisfaz a condição $\mathbf{H}_{\sigma,\eta_\mathbf{Z}}$ se $\sigma \in C_{Lip}([0,a]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)$, $\sigma(0,\varphi) = 0$ e existe $b^\diamond > 0$ tal que $[\sigma]_{C_{Lip}([0,b^\diamond]\times B_{b^\diamond}(\varphi,\mathcal{B}_Z);\mathbb{R}^+)}(1 + \eta_Z(b^\diamond)) < 1$.

Podemos provar agora nosso segundo resultado.

Proposição 3.12. *Suponha que as hipóteses no Teorema 3.11 são satisfeitas com a condição* $\mathbf{H}_{\sigma,\eta_\mathbf{Z}}$ *no lugar de* $\mathbf{H}_{\sigma,\mathcal{B}_\mathbf{Z}}$. *Então existe uma única solução fraca* $u \in C_{Lip}([-p,b];Z)$ *do problema (3.1)-(3.2) em* $[-p,b]$ *para algum* $b \in (0,a]$.

Prova: Na prova do Teorema 3.11, a condição $\mathbf{H}_{\sigma,\mathcal{B}_\mathbf{Z}}$ é utilizada para mostrar que $0 \leq \sigma(t,u_t) \leq t$, para todo $t \in [0,b]$ e $u \in \mathcal{Y}(b,R)$, o que implica que as funções $u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})}$, $F(\cdot, u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})})$, $G(\cdot, u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})})$ e $\Gamma u(\cdot)$ estão bem definidas. Logo, a seguir, provaremos somente que $0 \leq \sigma(t,u_t) \leq t$ para todo $t \in [0,b]$, onde b será especificado mais adiante.

Seja $R > \eta_Z(b^\diamond)$ tal que $[\sigma]_{C_{Lip}([0,b^\diamond]\times B_{b^\diamond}(\varphi,\mathcal{B}_Z);\mathbb{R}^+)}(1 + R) < 1$. Usando que $T(\cdot) \in L^1([0,a];\mathcal{L}(W_2,Z))$, $AT(\cdot) \in L^1([0,a];\mathcal{L}(W_1,Z))$ e $L_G(c)[\sigma]_{C_{Lip}([0,c]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)} \to 0$ quando $c \to 0$, podemos selecionar $0 < b \leq \min\{b^\diamond, 1\}$ tal que as desigualdades (3.16)-(3.17) são satisfeitas e $Rb \leq b^\diamond$.

Seja $\mathcal{Y}(b,R)$ definido como na prova do Teorema 3.11. Para $u \in \mathcal{Y}(b,R)$ e $t \in [0,b]$ temos que $\| u_t - \varphi \|_{\mathcal{B}_Z} \leq \max\{[u]_{C_{Lip}([0,b];Z)}, [\varphi]_{C_{Lip}([-p,0];Z)}\}t \leq Rb \leq b^\diamond$. Do anterior, vemos ainda que

$$\begin{aligned} 0 \leq \sigma(t,u_t) = \mid \sigma(t,u_t) - \sigma(0,\varphi) \mid & \leq [\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times B_b(\varphi;\mathcal{B}_Z);\mathbb{R}^+)}(t + \| u_t - \varphi \|_{\mathcal{B}_Z}) \\ & \leq [\sigma]_{C_{Lip}([0,b^\diamond]\times B_{b^\diamond}(\varphi;\mathcal{B}_Z);\mathbb{R}^+)}(1+R)t \leq t, \end{aligned}$$

para todo $0 \leq t \leq b$. O restante da prova segue da prova do Teorema 3.11. ■

Da Proposição 3.12 temos o seguinte corolário.

Corolário 3.13. *Assuma que as condições* $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H^{W_1}_{G,Z}}$ *e* $\mathbf{H^{W_2}_{F,Z}}$ *são satisfeitas,* $\sigma(0,\varphi) = 0$, $\sigma \in C_{Lip}([0,a] \times \mathcal{B}_Z; \mathbb{R}^+)$, $T(\cdot)(\varphi(0) + G(0,\varphi)) \in C_{Lip}([0,a];Z)$, $\varphi \in C_{Lip}([-p,0];Z)$ *e as funções* $T(\cdot)F(0,\varphi), AT(\cdot)G(0,\varphi)$ *pertencem a* $L^\infty([0,a];Z)$. *Se* $\| i_c \|_{\mathcal{L}(W_1,Z)} L_G(0) < 1$ *e* $\lim_{c\to 0}[\sigma]_{C_{Lip}([0,c]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)} = 0$, *então existe uma única solução fraca* $u \in C_{Lip}([-p,b];Z)$ *de (3.1)-(3.2) em* $[-p,b]$ *para algum* $0 < b \leq a$.

Prova: Como $[0,a]$ é compacto e L_G é contínua em $[0,a]$ temos que L_G é limitada em $[0,a]$ e, consequentemente, $\lim_{c\to 0} L_G(c)[\sigma]_{C_{Lip}([0,c]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)} = 0$. Mais ainda, como $\lim_{c\to 0}[\sigma]_{C_{Lip}([0,c]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)} = 0$ segue que existe $0 < \widetilde{b} \leq a$ tal que $[\sigma]_{C_{Lip}([0,\widetilde{b}]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}(1+\eta_Z(a)) < 1$. Assim, como $B_{\widetilde{b}}(\varphi,\mathcal{B}_Z) \subset \mathcal{B}_Z$ e $\eta_Z(\widetilde{b}) \leq \eta_Z(a)$ temos que $[\sigma]_{C_{Lip}([0,\widetilde{b}]\times B_{\widetilde{b}}(\varphi;\mathcal{B}_Z);\mathbb{R}^+)}(1+\eta_Z(\widetilde{b})) < 1$. Agora, a conclusão segue da Proposição 3.12. Isto completa a prova. ■

Combinando o Teorema 3.11 e a Proposição 3.12, obtemos os próximos resultados.

Corolário 3.14. *Assuma que* $1 \geq \beta_1 > \beta_2 \geq \beta_3 \geq 0$, *as condições* $\mathbf{H^{X_{\beta_1}}_{G,X_{\beta_2}}}$, $\mathbf{H^{X_{\beta_3}}_{F,X_{\beta_2}}}$ *são satisfeitas,* $\{\varphi(0), G(0,\varphi)\} \subset D(A^{1+\beta_2})$, $F(0,\varphi) \in X_{\beta_2}$, $\sigma(0,\varphi) = 0$ *e* $\varphi \in C_{Lip}([-p,0];X_{\beta_2})$. *Se qualquer uma das seguintes condições é verificada,*

1. *a condição* $\mathbf{H}_{\sigma,\mathcal{B}_{\mathbf{X}_{\beta_2}}}$ *é válida,* $\|i_c\|_{\mathcal{L}(X_{\beta_1},X_{\beta_2})}L_G(0) < 1$ *e* $L_G(c)[\sigma]_{C_{Lip}([0,c]\times\mathcal{B}_{X_{\beta_2}};\mathbb{R}^+)} \to 0$ *quando* $c \to 0$;

2. *a condição* $\mathbf{H}_{\sigma,\mathcal{B}_{\mathbf{X}_{\beta_2}}}$ *é válida e* $\lim_{c\to 0} L_G(c) = 0$;

3. $\lim_{c\to 0}[\sigma]_{C_{Lip}([0,c]\times B_c(\varphi;\mathcal{B}_{X_{\beta_2}});\mathbb{R}^+)} = 0$ *e* $\| i_c \|_{\mathcal{L}(X_{\beta_1},X_{\beta_2})} L_G(0) < 1$,

então existe uma única solução fraca $u \in C_{Lip}([-p,b]; X_{\beta_2})$ *do problema (3.1)-(3.2) em* $[-p,b]$ *para algum* $0 < b \leq a$.

Prova: Como $\| T(t) \|_{\mathcal{L}(X_{\beta_3}, X_{\beta_2})} \leq \frac{C^0_{\beta_3,\beta_2}}{t^{\beta_2-\beta_3}}$ e $\| AT(t) \|_{\mathcal{L}(X_{\beta_1}, X_{\beta_2})} \leq \frac{C^1_{\beta_1,\beta_2}}{t^{1+\beta_2-\beta_1}}$, é fácil ver que $T(\cdot) \in L^1([0,a]; \mathcal{L}(X_{\beta_3}, X_{\beta_2}))$ e $AT(\cdot) \in L^1([0,a]; \mathcal{L}(X_{\beta_1}, X_{\beta_2}))$. Mais ainda, como

$$\begin{aligned}
\| T(t)F(0,\varphi) \|_{X_{\beta_2}} &= \| (-A)^{\beta_2} T(t) F(0,\varphi) \| \leq C_0 \| (-A)^{\beta_2} F(0,\varphi) \|, \\
\| AT(t)G(0,\varphi) \|_{X_{\beta_2}} &= \| (-A)^{1+\beta_2} T(t) G(0,\varphi) \| \leq C_0 \| (-A)^{1+\beta_2} G(0,\varphi) \|,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\| T(t)(\varphi(0) + G(0,\varphi)) - T(s)(\varphi(0) + G(0,\varphi)) \|_{X_{\beta_2}} \\
&\quad = \| (-A)^{\beta_2} T(t)(\varphi(0) + G(0,\varphi)) - (-A)^{\beta_2} T(s)(\varphi(0) + G(0,\varphi)) \| \\
&\quad = \| \int_s^t T(\tau) A^{1+\beta_2} (\varphi(0) + G(0,\varphi)) d\tau \| \\
&\quad \leq C_0 \| A^{1+\beta_2}(\varphi(0) + G(0,\varphi)) \| | t - s |,
\end{aligned}$$

obtemos que $\{T(\cdot)F(0,\varphi), AT(\cdot)G(0,\varphi)\} \subset L^\infty([0,a]; X_{\beta_2})$ e que $T(\cdot)(\varphi(0) + G(0,\varphi))$ pertence a $C_{Lip}([0,a]; X_{\beta_2})$. O resultado segue agora aplicando o Teorema 3.11 e a Proposição 3.12. ■

O resultado a seguir está relacionado à existência de soluções estritas.

Corolário 3.15. *Suponhamos que as condições no Teorema 3.11 ou na Proposição 3.12 são satisfeitas e seja* $u \in C_{Lip}([-p,b]; Z)$ *a única solução fraca de (3.1)-(3.2) em* $[-p,b]$. *Se* $W_1 = X_1$, $\varphi(0) + G(0,\varphi) \in D(A)$ *e* $A\varphi(0) + F(0,\varphi) \in \overline{D(A)}$, *então* $u(\cdot)$ *é uma solução estrita em* $[-p,b]$.

Prova: Assuma que $A\varphi(0) + F(0,\varphi) \in \overline{D(A)}$. Seja $y \in C([0,b]; X)$ a solução fraca de

$$v'(t) = Av(t) - AG(t, u_{\sigma(t,u_t)}) + F(t, u_{\sigma(t,u_t)}), \quad t \in [0,b], \quad v(0) = \varphi(0) + G(0,\varphi). \tag{3.21}$$

Do Lema 3.3 e da prova do Teorema 3.11 sabemos que as funções $F(\cdot, u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})})$ e $AG(\cdot, u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})})$ pertencem a $C^\alpha([0,b]); X)$, o que implica pelo Lema 3.2 que $y(\cdot)$ é uma solução estrita de (3.21). Mais ainda, da unicidade de solução fraca de (3.1)-(3.2) e observando que $w(\cdot) = y(\cdot) - G(\cdot, u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})})$ também é solução fraca de (3.1)-(3.2), segue que $u(\cdot) + G(\cdot, u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})})) = y(\cdot)$. O que nos permite concluir que $u(\cdot)$ é uma solução estrita de (3.1). ■

Em nosso próximo teorema, para o caso em que $\sigma_1(t,\psi) = t$ para todo $\psi \in \mathcal{B}_Z$, provamos a existência de soluções fracas utilizando um resultado de ponto fixo para operadores condensantes.

Proposição 3.16. *Assuma que* $1 \geq \beta_1 > \beta_2 \geq \beta_3 \geq 0$, $\gamma_1, \gamma_2 \in (0,1)$, *existe* $U_{X_{\beta_2}} \subset \mathcal{B}_{X_{\beta_2}}$ *aberto tal que* $F \in C([0,a] \times U_{X_{\beta_2}}; X_{\beta_3})$, *as condições* $\mathbf{H}^{\mathbf{X}_{\beta_1}}_{\mathbf{G},\mathbf{X}_{\beta_2}}$ *e* $\mathbf{H}_{\sigma,\mathcal{B}_{\mathbf{X}_{\beta_2}}}$ *são satisfeitas e*

$\| i_c \|_{\mathcal{L}(X_{\beta_1},X_{\beta_2})} L_G(0) < 1$. *Suponha também que* $(T(t))_{t\geq 0}$ *é compacto,* $\varphi \in U_{X_{\beta_2}} \cap C^{\gamma_1}([-p,0];X_{\beta_2})$ *e que* $T(\cdot)(\varphi(0)+G(0,\varphi)) \in C^{\gamma_2}([0,b];X_{\beta_2})$. *Então existe uma solução fraca* $u \in C^{\alpha}([-p,b];X_{\beta_2})$, *com* $\alpha = \min\{\gamma_1,\gamma_2,1+\beta_3-\beta_2,\beta_2-\beta_1\}$, *do problema*

$$\frac{d}{dt}(u(t)+G(t,u_t)) = Au(t)+F(t,u_{\sigma(t,u_t)}), \quad t\in[0,a], \quad u_0=\varphi. \tag{3.22}$$

Prova: Sejam $0 < r_1 \leq b^*$ e $R > 0$ tais que $B_{r_1}(\varphi,\mathcal{B}_{X_{\beta_2}}) \subset U_{X_{\beta_2}}$, $\| F(t,\psi) \|_{X_{\beta_3}} \leq R$, $\| G(t,\psi) \|_{X_{\beta_1}} \leq R$ para todo $(t,\psi) \in [0,r_1]\times B_{r_1}(\varphi,\mathcal{B}_{X_{\beta_2}})$ e $L_G(r_1) \| i_c \|_{\mathcal{L}(X_{\beta_1},X_{\beta_2})} < 1$. Seja $L(R,\alpha) > 0$ grande o suficiente tal que

$$\begin{aligned}
&(1-L_G(r_1) \| i_c \|_{\mathcal{L}(X_{\beta_1},X_{\beta_2})})L(R,\alpha) \\
&\qquad > [T(\cdot)(\varphi(0)+G(0,\varphi)]_{C^{\gamma_2}([0,b];X_{\beta_2})}a^{\gamma_2-\alpha} + [\varphi]_{C^{\gamma_1}([-p,0];X_{\beta_2})}a^{\gamma_1-\alpha} \\
&\qquad + \frac{R}{\beta_1-\beta_2}[C^1_{\beta_1,\beta_2} + \frac{C^2_{\beta_1,\beta_2}}{1-\beta_1+\beta_2}]a^{\beta_1-\beta_2-\alpha} \\
&\qquad + \frac{R}{1+\beta_3-\beta_2}[C^0_{\beta_3,\beta_2} + \frac{C^1_{\beta_3,\beta_2}}{\beta_2-\beta_3}]a^{1+\beta_3-\beta_2-\alpha} + L_G(r_1) \| i_c \|_{\mathcal{L}(X_{\beta_1},X_{\beta_2})} a^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Escolhemos agora $0 < b < \min\{r_1,a\}$ tal que $L_G(b)(\| i_c \|_{\mathcal{L}(X_{\beta_1},X_{\beta_2})} + C^1_{\beta_1,\beta_2}\frac{b^{\beta_1-\beta_2}}{\beta_1-\beta_2}) < 1$ e $L(R,\alpha)b^{\alpha} \leq r_1$ e definimos o espaço $\mathcal{S}(b,L(R,\alpha)))$ por

$$\mathcal{S}(b,L(R,\alpha))) = \Big\{u \in C([-p,b];X_{\beta_2}) : u_0=\varphi, [u]_{C^{\alpha}([-p,b];X_{\beta_2})} \leq L(R,\alpha) \ \Big\},$$

munido com a métrica $d(u,v) = \| u-v \|_{C([0,b];X_{\beta_2})}$, e consideramos $\Gamma : \mathcal{S}(b,L(R,\alpha)) \to C([-p,b];X_{\beta_2})$ definida por $\Gamma = \sum_{i=1}^{3}\Gamma_i$, onde $(\Gamma_1 u)_0 = \varphi$, $(\Gamma_2 u)_0 = 0$, $(\Gamma_3 u)_0 = 0$ e

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 u(t) &= T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)F(s,u_{\sigma(s,u_s)})ds, \\
\Gamma_2 u(t) &= -\int_0^t AT(t-s)G(s,u_s)ds, \\
\Gamma_3 u(t) &= T(t)G(0,\varphi) - G(t,u_t),
\end{aligned}$$

para $t \in [0,b]$.

A seguir provamos que $\Gamma_2+\Gamma_3$ é uma contração, Γ_1 é completamentemente contínua e Γ é uma aplicação condensante de $\mathcal{S}(b,L(R,\alpha)))$ em $\mathcal{S}(b,L(R,\alpha)))$. No restante desta prova, assumimos que $u \in \mathcal{S}(b,L(R,\alpha)))$.

Passo 1. Mostramos inicialmente que $u_{\sigma(t,u_t)} \in B_{r_1}(\varphi; \mathcal{B}_{X_{\beta_2}})$, $u_t \in B_{r_1}(\varphi; \mathcal{B}_{X_{\beta_2}})$, $\| F(t, u_{\sigma(t,u_t)}) \|_{X_{\beta_3}} \leq R$ e $\| G(t, u_t) \|_{X_{\beta_1}} \leq R$, para todo $t \in [0, b]$.

Seja $t \in [0, b]$. Do Lema 3.7, é fácil ver que $u_{(\cdot)} \in C^\alpha([0, b]; \mathcal{B}_{X_{\beta_2}})$ e $[u_{(\cdot)}]_{C^\alpha([0,b];\mathcal{B}_{X_{\beta_2}})} \leq L(R, \alpha)$. Usando este fato e observando que $\sigma(t, u_t) \leq t \leq b$ e $\| u_t - \varphi \|_{\mathcal{B}_{X_{\beta_2}}} \leq [u_{(\cdot)}]_{C^\alpha([0,b];\mathcal{B}_{X_{\beta_2}})} b^\alpha \leq r_1 \leq b^*$, vemos que

$$\| u_{\sigma(t,u_t)} - \varphi \|_{\mathcal{B}_{X_{\beta_2}}} \leq [u_{(\cdot)}]_{C^\alpha([0,b];\mathcal{B}_{X_{\beta_2}})} \mid \sigma(t, u_t) \mid^\alpha \leq L(R, \alpha) b^\alpha \leq r_1. \tag{3.23}$$

Logo, $u_{\sigma(t,u_t)} \in B_{r_1}(\varphi; \mathcal{B}_{X_{\beta_2}})$ e $u_t \in B_{r_1}(\varphi; \mathcal{B}_{X_{\beta_2}})$ o que implica que $\| F(t, u_{\sigma(t,u_t)}) \|_{X_{\beta_3}} \leq R$ e $\| G(t, u_t) \|_{X_{\beta_1}} \leq R$, para todo $t \in [0, b]$.

Passo 2. Provaremos neste passo que a aplicação Γ tem valores em $\mathcal{S}(b, L(R, \alpha)))$.

Do Lema 3.4, da definição de Γu e do Passo 1, vemos que

$$\begin{aligned}
[\Gamma u]_{C^\alpha([0,b];X_{\beta_2})} &\leq \sum_{i=1}^{3} [\Gamma_i u]_{C^\alpha([0,b];X_{\beta_2})} \\
&\leq [T(\cdot)(\varphi(0) + G(0, \varphi))]_{C^{\gamma_2}([0,b];X_{\beta_2})} a^{\gamma_2 - \alpha} \\
&\quad + \| G(\cdot, u_{(\cdot)})) \|_{L^\infty([0,b];X_{\beta_1})} \frac{1}{\beta_1 - \beta_2} [C^1_{\beta_1,\beta_2} + \frac{C^2_{\beta_1,\beta_2}}{1 - \beta_1 + \beta_2}] a^{\beta_1 - \beta_2 - \alpha} \\
&\quad + \| F(\cdot, u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})}) \|_{L^\infty([0,b];X_{\beta_3})} \frac{1}{1 + \beta_3 - \beta_2} [C^0_{\beta_3,\beta_2} + \frac{C^1_{\beta_3,\beta_2}}{\beta_2 - \beta_3}] a^{1+\beta_3-\beta_2-\alpha} \\
&\quad + L_G(b) \| i_c \|_{\mathcal{L}(X_{\beta_1}, X_{\beta_2})} (a^{1-\alpha} + [u]_{C^\alpha([-p,b];X_{\beta_2})}) \\
&\leq (1 - L_G(r_1) \| i_c \|_{\mathcal{L}(X_{\beta_1}, X_{\beta_2})}) L(R, \alpha) + L_G(b) \| i_c \|_{\mathcal{L}(X_{\beta_1}, X_{\beta_2})} L(R, \alpha),
\end{aligned}$$

o que implica que $[\Gamma u]_{C^\alpha([0,b];X_{\beta_2})} \leq L(R, \alpha)$. Isto mostra que $[\Gamma u]_{C^\alpha([-p,b];X_{\beta_2})} \leq L(R, \alpha)$, pois $[\varphi]_{C^\alpha([-p,0];X_{\beta_2})} \leq [\varphi]_{C^{\gamma_1}([-p,0];X_{\beta_2})} a^{\gamma_1 - \alpha} \leq L(R, \alpha)$.

Passo 3. Provaremos agora que a aplicação Γ_1 é completamente contínua.

Inicialmente, observamos que $T(\cdot) \in C((0, a]; \mathcal{L}(X_{\eta_1}, X_{\eta_2}))$ e que $T(t) : X_{\eta_1} \to X_{\eta_2}$ é compacto para todo $1 \geq \eta_1, \eta_2 \geq 0$.

Do Passo 2 temos que $\Gamma_1 v \in C^\alpha([-p, b]; X_{\beta_2})$, para toda $v \in \mathcal{S}(b, L(R, \alpha))$. Assim, para $t, s \in [-p, b]$ tal que $|t - s| < \delta$ temos que $\| \Gamma_1 v(t) - \Gamma_1 v(s) \| < L(R, \alpha) \delta^\alpha$ para toda $v \in \mathcal{S}(b, L(R, \alpha))$, o que implica que o conjunto $\Gamma_1(\mathcal{S}(b, L(R, \alpha))) = \{\Gamma_1 v : v \in \mathcal{S}(b, L(R, \alpha))\}$ é equicontínuo. A seguir, mostramos que $\Gamma_1(\mathcal{S}(b, L(R, \alpha))(t) = \{\Gamma_1 v(t) : v \in \mathcal{S}(b, L(R, \alpha))\}$ é relativamente compacto em X_{β_2}, para todo $t \in [0, b]$.

O caso $t = 0$ é trivial. Para $t \in (0, b]$ e $0 < \varepsilon < t$, vemos que

$$\begin{aligned}\Gamma_1 u(t) &= T(t)\varphi(0) + T(\varepsilon)\int_0^{t-\varepsilon} T(t-\varepsilon-s)F(s, u_{\sigma(s,u_s)})ds \\ &\quad + \int_{t-\varepsilon}^{t} T(t-s)F(s, u_{\sigma(s,u_s)})ds,\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\left\| \int_0^{t-\varepsilon} T(t-\varepsilon-s)F(s, u_{\sigma(s,u_s)})ds \right\|_{X_{\beta_2}} &\leq \int_0^{t-\varepsilon} \| T(t-\varepsilon-s)F(s, u_{\sigma(s,u_s)}) \|_{X_{\beta_2}} ds \\ &= \int_0^{t-\varepsilon} \| (-A)^{\beta_2} T(t-\varepsilon-s)F(s, u_{\sigma(s,u_s)}) \| ds \\ &\leq \int_0^{t-\varepsilon} \frac{C^0_{\beta_3,\beta_2}}{(t-\varepsilon-s)^{\beta_2-\beta_3}} \| (-A)^{\beta_3} F(s, u_{\sigma(s,u_s)}) \| ds \\ &\leq RC^0_{\beta_3,\beta_2} \int_0^{t-\varepsilon} \frac{1}{(t-\varepsilon-s)^{\beta_2-\beta_3}} ds \\ &= RC^0_{\beta_3,\beta_2} \frac{(t-\varepsilon)^{1-\beta_2+\beta_3}}{1-\beta_2+\beta_3} = r_1(\varepsilon),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\left\| \int_{t-\varepsilon}^{t} T(t-s)F(s, u_{\sigma(s,u_s)})ds \right\|_{X_{\beta_2}} &\leq \int_{t-\varepsilon}^{t} \|T(t-s)F(s, u_{\sigma(s,u_s)})\|_{X_{\beta_2}} ds \\ &= \int_{t-\varepsilon}^{t} \|(-A)^{\beta_2} T(t-s)F(s, u_{\sigma(s,u_s)})\| ds \\ &\leq \int_{t-\varepsilon}^{t} \frac{C^0_{\beta_3,\beta_2}}{(t-\varepsilon-s)^{\beta_2-\beta_3}} R ds \\ &= \frac{RC^0_{\beta_3,\beta_2}}{1-\beta_2+\beta_3} \varepsilon^{1-\beta_2+\beta_3} = r_2(\varepsilon).\end{aligned}$$

Logo, observado que $K_\varepsilon = T(\varepsilon)B_{r_1(\varepsilon)}(0, X_{\beta_2})$ é compacto, o diâmetro de $B_{r_2(\varepsilon)}(0, X_{\beta_2})$ (na norma de X_{β_2}) converge para zero, quando $\varepsilon \to 0$, e $\Gamma_1(\mathcal{S}(b, L(R,\alpha))(t) = \{\Gamma_1 v(t) : v \in \mathcal{S}(b, L(R,\alpha))\} \subset \{T(t)\varphi(0)\} + K_\varepsilon + B_{r_2(\varepsilon)}(0, X_{\beta_2})$, segue que $\Gamma_1(\mathcal{S}(b, L(R,\alpha))(t)$ é totalmente limitado e, consequentemente, relativamente compacto em X_{β_2}. Do anterior e do Teorema de Arzelá-Ascoli, segue que Γ_1 é completamente contínua.

Passo 4. Finalmente provaremos que a aplicação $\Gamma_2 + \Gamma_3$ é uma contração.

Para $t \in [0,b]$ e $u, v \in \mathcal{S}(b, L(R,\alpha))$ segue que

$$\begin{aligned}
&\| (\Gamma_2+\Gamma_3)u(t) - (\Gamma_2+\Gamma_3)v(t) \|_{X_{\beta_2}} \\
&\qquad\leq \| i_c \|_{\mathcal{L}(X_{\beta_1}, X_{\beta_2})} \| G(t,u_t) - G(t,v_t) \|_{X_{\beta_1}} \\
&\qquad\quad + \int_0^t \| (-A)^{1+\beta_2-\beta_1} T(t-s)(-A)^{\beta_1} G(t,u_t) - G(t,v_t) \| \, ds \\
&\qquad\leq \| i_c \|_{\mathcal{L}(X_{\beta_1}, X_{\beta_2})} L_G(b) \| u-v \|_{C([0,b];X_{\beta_2})} \\
&\qquad\quad + \int_0^t \| (-A)^{1+\beta_2-\beta_1} T(t-s) \| L_G(b) \| u-v \|_{C([0,b];X_{\beta_2})} \, ds \\
&\qquad\leq L_G(b)(\| i_c \|_{\mathcal{L}(X_{\beta_1}, X_{\beta_2})} + C^1_{\beta_1,\beta_2} \frac{b^{\beta_1-\beta_2}}{\beta_1-\beta_2}) \| u-v \|_{C([0,b];X_{\beta_2})},
\end{aligned}$$

o que prova a afirmação.

Dos passos anteriores e do Teorema do ponto fixo de Sadovskii (Teorema 3.23, Apêndice), concluímos que existe uma solução fraca $u \in C^{\alpha}([-p,b]; X_{\beta_2})$ de (3.22). Isto completa a prova. ■

Para ilustrar nossos próximos resultados, considere $0 \leq \beta_2 < \beta_1 \leq 1$, $\sigma \in C_{Lip}([0,a] \times \mathcal{B}_{X_{\beta_2}}; \mathbb{R}^+)$, $\alpha_i, r_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,...,n$, e a função $G : [0,a] \times \mathcal{B}_{X_{\beta_2}} \to X$ dada por $G(t,\psi) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi(-r_i)$ tal que $0 \leq \sigma(0,\varphi) < r_i \leq p$, $i = 1,...n$. Da definição de $G(\cdot)$, não podemos garantir que $G(\cdot)$ assume valores em X_{β_1}, isto é, não conseguimos garantir que $G(\cdot)$ satisfaz a condição $\mathbf{H}^{\mathbf{X}_{\beta_1}}_{\mathbf{G},\mathbf{X}_{\beta_2}}$, que é a condição que garante a integrabilidade da função $s \mapsto AT(t-s)G(s, u_{\sigma(s,u_s)})$ em $[0,t]$. Entretanto, se $\varphi \in C_{Lip}([-p,0]; X_{\beta_1})$, $u, v \in C([-p,b]; X)$ são tais que $u_0 = v_0 = \varphi$ e b é pequeno o suficiente tal que $\sigma(t,u_t) < r_i$ para todo $i \in \{1,...,n\}$ e $t \in [0,b]$, para $0 \leq s < t \leq b$, temos que

$$(-A)^{1+\beta_2} T(t-s) G(s, u_{\sigma(s,u_s)}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (-A)^{1+\beta_2-\beta_1} T(t-s)(-A)^{\beta_1} \varphi(\sigma(s,u_s) - r_i),$$

e assim,

$$\begin{aligned}
&\| G(s, u_{\sigma(s,u_s)}) - G(s, v_{\sigma(s,v_s)}) \|_{X_{\beta_1}} \\
&\quad\leq \max_{i=1,\dots,n} | \alpha_i | \sum_{i=1}^{n} \| \varphi(\sigma(s,u_s) - r_i) - \varphi(\sigma(s,v_s) - r_i) \|_{X_{\beta_1}} \\
&\quad\leq \max_{i=1,\dots,n} | \alpha_i | \, n [\varphi]_{C_{Lip}([-p,0];X_{\beta_1})} [\sigma]_{C_{Lip}([0,a]\times \mathcal{B}_{X_{\beta_2}};\mathbb{R}^+)} \| u-v \|_{C([0,b];X_{\beta_2})},
\end{aligned}$$

o que é suficiente para estudar a existência local de solução fraca.

Para desenvolver a ideia anterior de uma forma abrangente, introduzimos a seguinte condição geral. Nesta condição, $P(\cdot) = G(\cdot)$ ou $P(\cdot) = F(\cdot)$, W_1, W_2 e Z são os espaços na condição $\mathbf{H_1}$ e W é um dos espaços W_1 ou W_2.

$\mathbf{H^{Z,W}_{P,\varphi}}$ A função $P \in C([0,a] \times U_{Z,P}, W)$, $U_{Z,P} \subset \mathcal{B}_Z$ é aberto, $\varphi \in U_{Z,P}$ e existem $0 < b_P \leq a$, uma função $K_P \in C([0,b_P] \times [0,b_P]; W)$ e $L_{P,\varphi} > 0$ tais que $P(t,u_s) = K_P(t,\varphi,s)$ e

$$\| K_P(t,\varphi,s) - K_P(t',\varphi,s') \|_W \leq L_{P,\varphi}(| t-t' | + | s-s' |),$$

para todo $0 \leq s,s',t,t' \leq b_P$ e todo $u \in C([-p,b_P];Z)$ tal que $u_0 = \varphi$.

Na prova do nosso próximo resultado, $(R(t))_{t\geq 0}$ é a família de operadores lineares em $\mathcal{B}_Z$ dada por $R(t)\psi(\theta) = \psi(t+\theta)$, para $t+\theta < 0$, e $R(t)\psi(\theta) = \psi(0)$, para $t+\theta > 0$.

Proposição 3.17. *Suponha que as condições* $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H_{\sigma,\mathcal{B}_Z}}$, $\mathbf{H^{Z,W_1}_{G,\varphi}}$ *e* $\mathbf{H^{Z,W_2}_{F,\varphi}}$ *são satisfeitas,* $\varphi \in C([-p,0];Z)$, $T(\cdot)(\varphi(0) - G(0,\varphi)) \in C([0,a];Z)$ *e* $L_{G,\varphi} \| i_c \|_{\mathcal{L}(W_1,Z)} [\sigma]_{C_{Lip}([0,c]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)} < 1$ *para algum* $0 < c \leq a$. *Então existe uma única solução fraca* $u \in C([-p,b];Z)$ *do problema (3.1)-(3.2) em* $[-p,b]$ *para algum* $0 < b \leq a$.

Prova: Sejam $U_Z = U_{Z,G} \cap U_{Z,F}$, $0 < b_1 \leq \min\{b_F, b_G, c, b^*, a\}$ tal que $0 \leq \sigma(s,\psi) \leq s$ para todo $(s,\psi) \in [0,b_1] \times B_{b_1}(\varphi,\mathcal{B}_Z)$, $B_{b_1}(\varphi,\mathcal{B}_Z) \subset U_Z$, e $\Theta = L_{G,\varphi} \| i_c \|_{\mathcal{L}(W_1,Z)} [\sigma]_{C_{Lip}([0,b_1]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)} < 1$. Selecionamos agora $0 < b \leq b_1$ tal que

$$\begin{aligned}
&\| T(\cdot)((\varphi(0) + G(0,\varphi)) - (\varphi(0) + G(0,\varphi)) \|_{C([0,b];Z)}\\
&+ \| R(\cdot)\varphi - \varphi \|_{C([0,b];\mathcal{B}_Z)} + \| i_c \|_{\mathcal{L}(W_1,Z)} L_{G,\varphi}(1 + [\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)})b\\
&+ \| AT(\cdot) \|_{L^1([0,b];\mathcal{L}(W_1,Z))} (L_{G,\varphi}(a + 3a[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}) + \| G(0,\varphi) \|_{W_1})\\
&+ \| T(\cdot) \|_{L^1([0,b];\mathcal{L}(W_2,Z))} (L_{F,\varphi}(a + 3a[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}) + \| F(0,\varphi) \|_{W_2}) < (1-\Theta)\frac{b_1}{8},\\
&\Phi = \Theta + \| AT(\cdot) \|_{L^1([0,b];\mathcal{L}(W_1,Z))} L_{G,\varphi}[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}\\
&\qquad + \| T(\cdot) \|_{L^1([0,b];\mathcal{L}(W_2,Z))} [\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)} < 1. \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

Seja $\mathfrak{Y}(b) = \left\{ u \in C([-p,b];Z) : u_0 = \varphi, \| u - \varphi(0) \|_{C([0,b];Z)} \leq \frac{b_1}{2} \right\}$, com a métrica $d(u,v) = \| u - v \|_{C([0,b];Z)}$ e $\Gamma : \mathfrak{Y}(b) \to C([-p,b];X)$ definida como na prova do Teorema 3.11. No restante desta demonstração mostramos que Γ é uma contração em $\mathfrak{Y}(b)$.

Inicialmente, observe que para $u \in \mathfrak{Y}(b)$ e $t \in [0,b]$,

$$\begin{aligned}
\| u_t - \varphi \|_{\mathcal{B}_Z} &\leq \| u_t - R(t)\varphi \|_{\mathcal{B}_Z} + \| R(t)\varphi - \varphi \|_{\mathcal{B}_Z}\\
&\leq \sup_{s\in[0,b]} \| u(s) - \varphi(0) \|_Z + \| R(t)\varphi - \varphi \|_{\mathcal{B}_Z}\\
&\leq \| u(\cdot) - \varphi(0) \|_{C([0,b];Z)} + \| R(\cdot)\varphi - \varphi \|_{C([0,b];Z)}\\
&\leq \frac{b_1}{2} + (1-\Theta)\frac{b_1}{8} \leq b_1, \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

o que implica que $u_t \in B_{b_1}(\varphi, \mathcal{B}_z) \subset U_Z$ e então $\sigma(t, u_t) \leq t \leq b$, para todo $a \leq t \leq b$. Do anterior vemos que a função $t \mapsto u_{\sigma(t,u_t)}$ está bem definida e $u_{\sigma(t,u_t)} \in B_{b_1}(\varphi, \mathcal{B}_Z) \subset U_Z$, para todo $0 \leq t \leq b$. Logo, $G(t, u_{\sigma(t,u_t)}) = K_G(t, \varphi, \sigma(t, u_t)))$, $F(t, u_{\sigma(t,u_t)}) = K_F(t, \varphi, \sigma(t, u_t)))$, a função $s \mapsto AT(t-s)G(s, u_{\sigma(s,u_s)}) = AT(t-s)K_G(s, \varphi, \sigma(s, u_s))$ pertence a $L^1([0,t]; Z)$ e

$$\begin{aligned}\Gamma u(t) &= T(t)[\varphi(0) + G(0,\varphi)] - K_G(t, \varphi, \sigma(t, u_t)) - \int_0^t AT(t-s)K_G(s, \varphi, \sigma(s, u_s))ds \\ &\quad + \int_0^t T(t-s)K_F(s, \varphi, \sigma(s, u_s)))ds, \ \text{ para } t \in [0, b]. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Procedendo como na prova do Teorema 3.11, podemos provar que Γu é uma função de valores em Z. A seguir, mostramos que Γ é uma função que assume valores em $\mathfrak{Y}(b)$. De (3.25), para $u \in \mathfrak{Y}(b)$ e $t \in [0, b]$, segue que

$$\begin{aligned}\| F(t, u_{\sigma(t,u_t)}) - F(0,\varphi) \|_{W_2} &= \| K_F(t, \varphi, \sigma(t, u_t)) - K_F(0, \varphi, \sigma(0, \varphi)) \|_{W_2} \\ &\leq L_{F,\varphi}(b + [\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times \mathcal{B}_Z; \mathbb{R}^+)}(b + \| u_t - \varphi \|_{\mathcal{B}_Z})) \\ &\leq L_{F,\varphi}(b + [\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times \mathcal{B}_Z; \mathbb{R}^+)}(b + \frac{b_1}{2} + (1-\Theta)\frac{b_1}{8}) \\ &\leq L_{F,\varphi}(a + 3a[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times \mathcal{B}_Z; \mathbb{R}^+)}), \\ \| G(t, u_{\sigma(t,u_t)}) - G(0,\varphi) \|_{W_1} &= \| K_G(t, \varphi, \sigma(t, u_t)) - K_G(0, \varphi, \sigma(0, \varphi)) \|_{W_1} \\ &\leq L_{G,\varphi}(a + 3a[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times \mathcal{B}_Z; \mathbb{R}^+)}),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}&\| G(t, u_{\sigma(t,u_t)}) - G(0,\varphi) \|_Z \\ &\quad\leq \| i_c \|_{\mathcal{L}(W_1,Z)} \| K_G(t, \varphi, \sigma(t, u_t)) - K_G(0, \varphi, \sigma(0, \varphi)) \|_{W_1} \\ &\quad\leq \| i_c \|_{\mathcal{L}(W_1,Z)} \, L_{G,\varphi}(b + [\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times \mathcal{B}_Z; \mathbb{R}^+)}(b + \frac{b_1}{2} + (1-\Theta)\frac{b_1}{8}) \\ &\quad= \| i_c \|_{\mathcal{L}(W_1,Z)} \, L_{G,\varphi}(1 + [\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times \mathcal{B}_Z; \mathbb{R}^+)})b \\ &\qquad + \| i_c \|_{\mathcal{L}(W_1,Z)} \, L_{G,\varphi}[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times \mathcal{B}_Z; \mathbb{R}^+)}\frac{b_1}{2} \\ &\qquad + \| i_c \|_{\mathcal{L}(W_1,Z)} \, L_{G,\varphi}[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times \mathcal{B}_Z; \mathbb{R}^+)}(1-\Theta)\frac{b_1}{8} \\ &\quad\leq (1-\Theta)\frac{b_1}{8} + \Theta\frac{b_1}{2} + \Theta(1-\Theta)\frac{b_1}{8}.\end{aligned}$$

Utilizando as desigualdades anteriores, temos que

$$
\begin{aligned}
&\| \Gamma u(t) - \varphi(0) \|_Z \\
&\quad \leq \sup_{s\in[0,b]} \| T(s)((\varphi(0)+G(0,\varphi)) - (\varphi(0)+G(0,\varphi)) \|_Z + \| G(t,u_{\sigma(t,u_t)}) - G(0,\varphi) \|_Z \\
&\qquad + \| AT(\cdot) \|_{L^1([0,b];\mathcal{L}(W_1,Z))} \| G(0,\varphi) \|_{W_1} + \| T(\cdot) \|_{L^1([0,b];\mathcal{L}(W_2,Z))} \| F(0,\varphi) \|_{W_2} \\
&\qquad + \| AT(\cdot) \|_{L^1([0,b];\mathcal{L}(W_1,Z))} \sup_{s\in[0,b]} \| G(s,u_{\sigma(s,u_s)}) - G(0,\varphi) \|_{W_1} \\
&\qquad + \| T(\cdot) \|_{L^1([0,b];\mathcal{L}(W_2,Z))} \sup_{s\in[0,b]} \| F(s,u_{\sigma(s,u_s)}) - F(0,\varphi) \|_{W_2} \\
&\quad \leq (1-\Theta)\frac{b_1}{8} + \Theta\frac{b_1}{2} + \Theta(1-\Theta)\frac{b_1}{8} \\
&\qquad + \| T(\cdot)((\varphi(0)+G(0,\varphi)) - (\varphi(0)+G(0,\varphi)) \|_{C([0,b];Z)} \\
&\qquad + \| AT(\cdot) \|_{L^1([0,b];\mathcal{L}(W_1,Z))} \left(L_{G,\varphi}(a+3a[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}) + \| G(0,\varphi) \|_{W_1}\right) \\
&\qquad + \| T(\cdot) \|_{L^1([0,b];\mathcal{L}(W_2,Z))} \left(L_{F,\varphi}(a+3a[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}) + \| F(0,\varphi) \|_{W_2}\right) \\
&\quad \leq 2(1-\Theta)\frac{b_1}{8} + \Theta\frac{b_1}{2} + \Theta(1-\Theta)\frac{b_1}{8},
\end{aligned}
$$

o que implica que $\| \Gamma u(t) - \varphi(0) \|_Z \leq \frac{b_1}{2}$ e então, que Γ é uma função de valores em $\mathfrak{Y}(b)$.

Por outro lado, para $t \in [0,b]$ é fácil ver que

$$
\begin{aligned}
&\| \Gamma u(t) - \Gamma v(t) \|_Z \\
&\quad \leq \| K_G(t,\varphi,\sigma(t,u_t)) - K_G(t,\varphi,\sigma(t,v_t)) \|_Z \\
&\qquad + \int_0^t \| AT(t-s) \|_{\mathcal{L}(W_1,Z)} \| K_G(s,\varphi,\sigma(s,u_s)) - K_G(s,\varphi,\sigma(s,v_s)) \|_{W_1} \, ds \\
&\qquad + \int_0^t \| T(t-s) \|_{\mathcal{L}(W_2,Z)} \| K_F(s,\varphi,\sigma(s,u_s)) - K_F(s,\varphi,\sigma(s,v_s)) \|_{W_2} \, ds \\
&\quad \leq \Theta \| u - v \|_{C([0,b];Z)} + \| AT(\cdot) \|_{L^1([0,b];\mathcal{L}(W_1,Z))} L_{G,\varphi}[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)} \| u - v \|_{C([0,b];Z)} \\
&\qquad + \| T(\cdot) \|_{L^1([0,b];\mathcal{L}(W_2,Z))} L_{F,\varphi}[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)} \| u - v \|_{C([0,b];Z)} \\
&\quad \leq \Phi \| u - v \|_{C([0,b];Z)},
\end{aligned}
$$

o que implica que Γ é uma contração e que existe uma única solução fraca de (3.1)-(3.2) em $[-p,b]$.

■

A demonstração da Proposição 3.18 abaixo, segue combinando as ideias das provas de nossos resultados precedentes. Por isso, faremos apenas o caso em que tomamos as hipóteses em (b).

Proposição 3.18. *Suponha que as condições* $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H}_{\sigma,\mathcal{B}_\mathbf{Z}}$, $\mathbf{H}^{\mathbf{Z},\mathbf{W_1}}_{\mathbf{G},\varphi}$ *são satisfeitas e que existe* $0 < c \leq a$ *tal que* $L_{G,\varphi} \| i_c \|_{\mathcal{L}(W_1,Z)} [\sigma]_{C_{Lip}([0,c]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)} < 1$.

(**a**) *Se $F(\cdot)$, $\varphi(\cdot)$, $T(\cdot)(\varphi(0)+G(0,\varphi))$ e $(T(t))_{t\geq 0}$ satisfazem as condições na Proposição 3.16 e $\alpha=\min\{\gamma_1,\gamma_2,1+\beta_3-\beta_2,\beta_2-\beta_1\}$, então existe uma solução fraca $u\in C^{\alpha}([-p,b];X_{\beta_2})$ do problema (3.1)-(3.2) em $[-p,b]$, para algum $b\in(0,a]$.*

(**b**) *Se $F(\cdot)$, $\varphi(\cdot), T(\cdot)(\varphi(0)+G(0,\varphi)), T(\cdot)F(0,\varphi)$ e $AT(\cdot)G(0,\varphi)$ satisfazem as condições no Teorema 3.11, então existe uma única solução fraca $u\in C_{Lip}([-p,b];X_{\beta_2})$ de (3.1)-(3.2) em $[-p,b]$, para algum $b\in(0,a]$.*

Prova: A prova de (b) é similar a prova do Teorema 3.11. As diferenças estão relacionadas a escolha de R e as estimativas de $[G(\cdot,u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})})]_{C_{Lip}([0,b];W_1)}$ e $\| G(\cdot,u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})})-G(\cdot,v_{\sigma(\cdot,v_{(\cdot)})})\|_Z$.

Sejam $0<b_1\leq\min\{b^*,b_G\}$ e $R>0$ tais que $B_{b_1}(\varphi,\mathcal{B}_Z)\subset U_{\mathcal{B}_Z}\cap U_{\mathcal{B}_Z,G}$ e

$$\begin{aligned}(1-L_{G,\varphi}\| i_c\|_{\mathcal{L}(W_1,Z)}[\sigma]_{C_{Lip}([0,c]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)})R &> [\varphi]_{C_{Lip}([-p,0];Z)}+[T(\cdot)(\varphi(0)+G(0,\varphi))]_{C_{Lip}([0,b_1];Z)}\\ &+L_{G,\varphi}\| i_c\|_{\mathcal{L}(W_1,Z)}+\| T(\cdot)F(0,\varphi)\|_{L^\infty([0,b_1];Z)}\\ &+\| AT(\cdot)G(0,\varphi)\|_{L^\infty([0,b_1];Z)}\,.\end{aligned}$$

Selecione agora $0<b<\min\{b_1,c,1\}$ tal que $Rb\leq b_1$ e

$$\begin{aligned}[T(\cdot)(\varphi(0)+G(0,\varphi))]_{C_{Lip}([0,b];Z)}+\|i_c\|_{\mathcal{L}(W_1,Z)}L_{G,\varphi}(1+[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}(1+R))&\\ +\| AT(\cdot)G(0,\varphi)\|_{L^\infty([0,b];Z)}+\| T(\cdot)F(0,\varphi)\|_{L^\infty([0,b];Z)}&\\ +2\| AT(\cdot)\|_{L^1([0,b];\mathcal{L}(W_1,Z))}L_{G,\varphi}(1+[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}(1+R))&\\ +2\| T(\cdot)\|_{L^1([0,b];\mathcal{L}(W_2,Z))}L_F(1+R[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}(1+R))&\leq R, \quad (3.27)\\ \Phi(b)=\| i_c\|_{\mathcal{L}(W_1,Z)}L_{G,\varphi}[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)})&\\ +\| AT(\cdot)\|_{L^1([0,b];\mathcal{L}(W_1,Z))}L_{G,\varphi}(1+[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}(1+R))&\\ +\| T(\cdot)\|_{L^1([0,b];\mathcal{L}(W_2,Z))}L_F(1+R[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)})&<1 \quad (3.28)\end{aligned}$$

Sejam $(\mathcal{Y}(b,R),d)$ e Γ definidas como na prova do Teorema 3.11. Assim, como visto anteriormente, para $u\in\mathcal{Y}(b,R)$ temos que Γu é uma função bem definida, assumindo valores em Z e, além disso, obtemos que

$$\begin{aligned}[F(\cdot,u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})})]_{C_{Lip}([0,b];W_2)} &\leq L_F(1+R[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}(1+R)),\\ \| F(s,u_{\sigma(s,u_s)})-F(s,v_{\sigma(s,v_s)})\|_{W_2} &\leq L_F(1+R[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)})\|u-v\|_{C([0,b];Z)}.\end{aligned}$$

Mais ainda, da condição $\mathbf{H}_{\mathbf{G},\varphi}^{\mathbf{Z},\mathbf{W_1}}$ é fácil ver que $G(\cdot, u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})}) \in C_{Lip}([0,b];W_1)$ e

$$\begin{aligned}
[G(\cdot, u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})})]_{C_{Lip}([0,b];W_1)} &\leq L_{G,\varphi}(1 + [\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}(1+R)),\\
[G(\cdot, u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})})]_{C_{Lip}([0,b];Z)} &\leq \| i_c \|_{\mathcal{L}(W_1,Z)} L_{G,\varphi}(1 + [\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}(1+R)),\\
\| G(\cdot, u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})}) - G(\cdot, v_{\sigma(\cdot,v_{(\cdot)})}) \|_{W_1} &\leq L_{G,\varphi}[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}\|u-v\|_{C([0,b];Z)},\\
\| G(\cdot, u_{\sigma(\cdot,u_{(\cdot)})}) - G(\cdot, v_{\sigma(\cdot,v_{(\cdot)})}) \|_{Z} &\leq \|i_c\|_{\mathcal{L}(W_1,Z)}L_{G,\varphi}[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)})\|u-v\|_{C([0,b];Z)}.
\end{aligned}$$

Utilizando as estimativas acima e procedendo como na prova do Teorema 3.11, encontramos que

$$\begin{aligned}
[\Gamma u]_{C_{Lip}([0,b];Z)} \leq\ & [T(\cdot)(\varphi(0) + G(0,\varphi))]_{C_{Lip}([0,b];Z)}\\
& +\|i_c\|_{\mathcal{L}(W_1,Z)}L_{G,\varphi}(1 + [\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}(1+R))\\
& + \| AT(\cdot)G(0,\varphi) \|_{L^\infty([0,b];Z)} + \| T(\cdot)F(0,\varphi) \|_{L^\infty([0,b];Z)}\\
& +2 \| AT(\cdot) \|_{L^1([0,b];\mathcal{L}(W_1,Z))} L_{G,\varphi}(1 + [\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}(1+R))\\
& +2 \| T(\cdot) \|_{L^1([0,b];\mathcal{L}(W_2,Z))} L_F(1 + R[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}(1+R)),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\| \Gamma u - \Gamma v \|_{C([0,b];Z)} \leq\ & \| i_c \|_{\mathcal{L}(W_1,Z)} L_{G,\varphi}[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}\|u-v\|_{C([0,b];Z)}\\
& + \| AT(\cdot) \|_{L^1([0,b];\mathcal{L}(W_1,Z))} L_{G,\varphi}[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)}\|u-v\|_{C([0,b];Z)}\\
& + \| T(\cdot) \|_{L^1([0,b];\mathcal{L}(W_2,Z))} L_F(1 + R[\sigma]_{C_{Lip}([0,b]\times\mathcal{B}_Z;\mathbb{R}^+)})\|u-v\|_{C([0,b];Z)}\\
\leq\ & \Phi(b)\|u-v\|_{C([0,b];Z)},
\end{aligned}$$

o que implica que Γ é uma contração em $\mathcal{Y}(b,R)$ e completa a prova do item (b). ■

3.3 Exemplos

Nos exemplos a seguir, $X = C([0,\pi];\mathbb{R})$, $A : D(A) \subset X \to X$ é o operador $Ax = x''$ com domínio $D(A) = \{x \in X : x'' \in X,\ x(0) = x(\pi) = 0\}$. De Sinestrari [43] sabemos que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $(T(t))_{t\geq 0}$ de operadores lineares limitados em X. Observe que $(T(t))_{t\geq 0}$ não é um C_0- semigrupo uma vez que $D(A)$ não é denso em X.

Adotamos também todas as notações introduzidas nas seções precedentes, em particular, sendo W_i, $i = 1,2$, e Z são os espaços na condição $\mathbf{H_1}$, com $W_1 = X_{\beta_1}$, $W_2 = X_{\beta_3}$, $Z = X_{\beta_2}$ onde $1 \geq \beta_1 > \beta_2 \geq \beta_3 \geq 0$.

Nossos exemplos são motivados pelos modelos introduzidos e estudados em [1, 10, 12, 16, 18]. Inicialmente, estudamos existência de soluções para o problema

$$\frac{d}{dt}(u(t,x)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u(\mu(t,u(t))-r_i,x)) = Au(t,x)+\sum_{i=1}^{n}\beta_i u(\mu(t,u(t))-r_i,x), \quad t\in[0,a], \tag{3.29}$$

$$u_0(x)=\varphi(\cdot,x), \tag{3.30}$$

onde $\varphi\in C_{Lip}([-p,0],X_{\beta_1})$, $0<r_i\le p$, $i=1,...,n$, $\mu:[0,\pi]\times X\to\mathbb{R}$ é uma função Lipschitz, $\mu(0,\varphi(0))=0$ e existe $0<b^*\le a$ tal que $0\le\mu(t,x)\le t$, para todo $(t,x)\in[0,b^*]\times B_{b^*}(\varphi(0),Z)$.

Para estudar este problema usamos a Proposição 3.17. Para isso, definimos as funções F,G : $[0,a]\times\mathcal{B}_{X_{\beta_2}}\to X$ e $\sigma:[0,a]\times\mathcal{B}_{X_{\beta_2}}\to\mathbb{R}$ por $G(t,\psi)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\psi(-r_i)$, $F(t,\psi)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\psi(-r_i)$ e $\sigma(s,\psi)=\mu(s,\psi(0))$. Com estas definições, é fácil ver que o problema (3.29)-(3.30) pode ser descrito na forma abstrata (3.1)-(3.2).

Seja $c=\min_{i=1,\ldots,n} r_i$ e $K_G(\cdot,\varphi,\cdot):[0,c]\times[0,c]\to X$ dadas por $K_G(t,\varphi,s)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi(s-r_i)$. Para $u\in C([-p,c];X)$ tal que $u_0=\varphi$ e $t,s,t',s'\in[0,c]$, vemos que

$$\begin{aligned} G(t,u_s) &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i u(s-r_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi(s-r_i)=K_G(t,\varphi,s),\\ \| K_G(t,\varphi,s)-K_G(t'\varphi,s')\|_{W_1} &= \|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\varphi(s-r_i)-\varphi(s'-r_i)\|_{W_1}\\ &\le \sum_{i=1}^{n}\mid\alpha_i\mid[\varphi]_{C_{Lip}([-p,0],W_1)}|s-s'|, \end{aligned}$$

o que implica que a condição $\mathbf{H}_{\mathbf{G},\varphi}^{\mathbf{X}_{\beta_2},\mathbf{X}_{\beta_1}}$ é satisfeita. Mais ainda, o mesmo argumento prova que $F(\cdot)$ verifica a condição $\mathbf{H}_{\mathbf{F},\varphi}^{\mathbf{X}_{\beta_2},\mathbf{X}_{\beta_3}}$. Da Proposição 3.17, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.19. *Se* $\sum_{i=1}^{n}\mid\alpha_i\mid[\varphi]_{C_{Lip}([-p,0],X_{\beta_1})}\| i_c\|_{\mathcal{L}(X_{\beta_1},X_{\beta_2})}[\mu]_{C_{Lip}([0,c]\times X;\mathbb{R}^+)}<1$, *então existe uma única solução fraca* $u\in C([-p,b];X_{\beta_3})$ *do problema (3.29)-(3.30) em* $[-p,b]$, *para algum* $0<b\le\min\{c,a\}$.

Agora, estudamos a existência de soluções para o problema neutro

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(u(t,x)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u(\mu(t,u(t))-r_i,x))\\ &\qquad = Au(t,x)+\int_{-l_2}^{-l_1}\beta(\theta)u(\mu(t,u(t))+\theta,x)d\theta, && (3.31)\\ u(\theta,x) &= \varphi(\theta,x), \quad \theta\in[-p,0], && (3.32) \end{aligned}$$

para $(t,x) \in [0,a] \times [0,\pi]$, onde $0 < l_1 < l_2 < p$ e $\varphi(\cdot)$, $\mu(\cdot)$, r_i, $i = 1, \dots n$, são como no primeiro exemplo e $\beta \in L^1([-p,a] : \mathbb{R})$.

Sejam $G(\cdot)$ e $\sigma(\cdot)$ definidas como no primeiro exemplo e $F : [0,a] \times \mathcal{B}_{X_{\beta_2}} \to X$ dada por $F(t,\psi) = \int_{-p}^{0} \beta(\theta)\psi(\theta)d\theta$. Do primeiro exemplo sabemos que $G(\cdot)$ satisfaz a condição $\mathbf{H}_{\mathbf{G},\varphi}^{\mathbf{X}_{\beta_2},\mathbf{X}_{\beta_1}}$. Adicionalmente, se $\mu(s,\psi) \le s$ para $s \in [0,a]$, para $0 \le b \le l_1$ e $u \in C([-p,b];X)$ tal que $u_0 = \varphi$, temos que

$$F(t, u_{\sigma(t,u_t)}) = \int_{-l_2}^{-l_1} \beta(\theta)u(\mu(t,u(t)) + \theta)d\theta = \int_{-l_2}^{-l_1} \beta(\theta)\varphi(\mu(t,u(t)) + \theta)d\theta. \tag{3.33}$$

Definindo a função $K_F(\cdot,\varphi,\cdot)$ por $K_F(t,\varphi,s) := \int_{-l_2}^{-l_1} \beta(\theta)\varphi(s+\theta)d\theta$, para $0 \le t, s, s', t' \le l_1$ temos que

$$\begin{aligned} \| K_F(t,\varphi,s) - K_F(t',\varphi,s') \|_{X_{\beta_3}} &\le \int_{-p}^{0} \beta(\theta)[\varphi]_{C_{Lip}([-p,0];X_{\beta_3})} \mid s' - s \mid d\theta \\ &\le \| \beta \|_{L^1([-p,a]:\mathbb{R})} [\varphi]_{C_{Lip}([-p,0];X_{\beta_3})} \mid s' - s \mid, \end{aligned}$$

o que prova que $F(\cdot)$ satisfaz a condição $\mathbf{H}_{\mathbf{F},\varphi}^{\mathbf{X}_{\beta_2},\mathbf{X}_{\beta_3}}$. Da Proposição 3.17 temos que o seguinte resultado.

Proposição 3.20. *Se* $\sum_{i=1}^{n} \mid \alpha_i \mid [\varphi]_{C_{Lip}([-p,0],X_{\beta_1})} \| i_c \|_{\mathcal{L}(X_{\beta_1},X_{\beta_2})} [\mu]_{C_{Lip}([0,c]\times X_{\beta_2};\mathbb{R}^+)} < 1$, *então existe uma única solução fraca* $u \in C([-p,b];X)$ *de (3.31)-(3.32) em* $[-p,b]$, *para algum* $b \le \min_{i=1,\dots,n} r_i$.

Considerando os exemplos acima, a seguir discutimos brevemente a existência de soluções para o problema da forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(t,x) + \int_{-l_2}^{-l_1} \beta(\theta)u(\mu(t,u(t)) + \theta, x)ds + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u(\mu(t,u(t)) - r_i, x)) & \\ = Au(t,x) + F(t, u_{\sigma 2(t,u_t)})(x), & \qquad (3.34) \\ u(\theta,x) = \varphi(\theta,x), \quad \theta \in [-p,0], & \qquad (3.35) \end{aligned}$$

para $(t,x) \in [0,a] \times [0,\pi]$, onde $\varphi(\cdot)$, $\mu(\cdot)$, r_i, l_j são como nos exemplos anteriores e $F(\cdot)$ é uma função genérica em $\mathcal{B}_Z$.

Procedendo como anteriormente, mas utilizando agora a Proposição 3.18 no lugar da Proposição 3.17, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 3.21. *Suponhamos que as condições gerais utilizadas nos exemplos anteriores são verificadas e* $\| i_c \|_{\mathcal{L}(X_{\beta_1},Z)} [\varphi]_{C_{Lip}([-p,0],X_{\beta_1})}[\mu]_{C_{Lip}([0,c]\times X_{\beta_2};\mathbb{R}^+}(\sum_{i=1}^n \mid \alpha_i \mid + \| \beta \|_{L^1([-p,a]:\mathbb{R})}) < 1$. *Se* $F(\cdot)$, $\varphi(\cdot)$ *e* $T(\cdot)(\varphi(0)+G(0,\varphi))$ *verificam as condições do Teorema 3.11, então existe uma única solução fraca* $u \in C_{Lip}([-p,b];X_{\beta_2})$ *de (3.1)-(3.2) em* $[-p,b]$, *para algum* $0 < b \leq a$.

Em nosso próximo exemplo, $(X, \| \cdot \|) = (C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}); \| \cdot \|_{C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})})$, onde $\| \xi \|_{C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \mid \xi(x) \mid$. Adicionalmente, por simplicidade, $A : D(A) \subset X \to X$ é o operador Laplaciano com domínio $D(A) = \{u \in \cap_{p\geq 1} W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^n) : u, Au \in X\}$. De [Lunardi [31], Capítulo 3, pág. 100] sabemos que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $(T(t))_{t\geq 0}$ em X.

Finalizamos esta seção estudando o problema neutro

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(t,x) + \alpha(t) \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}(x-y)u(\mu(t,u(t)),y)dy) & \\ = \; Au(t,x) + \int_{-p}^{0} \beta(\theta)u(\mu(t,u(t))+\theta,x)d\theta, & \qquad (3.36) \\ u(\theta,x) \; = \; \varphi(\theta,x), \quad \theta \in [-p,0], & \qquad (3.37) \end{aligned}$$

para $(t,x) \in [0,a] \times \mathbb{R}^n$, onde assumiremos que $\varphi \in C([-p,0];X)$, $\alpha \in C_{Lip}([0,a];\mathbb{R})$, $\beta \in L^1([-p,0];\mathbb{R})$ e $\mu(\cdot) \in C_{Lip}([0,a]\times X;\mathbb{R})$.

Aqui adotamos todas as notações introduzidas nas seções precedentes, sendo W_i, $i = 1,2$, e Z os espaços na condição $\mathbf{H_1}$.

A seguir, usamos o Teorema 3.11 e, para simplificar, assumimos que $\mathcal{L} \in C^2(\mathbb{R}^n : \mathbb{R}) \cap W^{2,1}(\mathbb{R}^n : \mathbb{R})$. Seja $\sigma(\cdot)$ definida como antes e $F, G : [0,a]\times\mathcal{B}_Z \to X$ dadas por $F(t,\psi)(x) = \int_{-p}^0 \beta(\theta)\psi(\theta,x)d\theta$ e $G(t,\psi)(x) = \alpha(t)\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}(x-y)\psi(0,y)dy$.

Das hipótese sobre $\mathcal{L}(\cdot)$, é fácil ver que $G(\cdot)$ é uma função contínua com valores em X_1 e $AG(t,\psi)(x) = \alpha(t)\int_{\mathbb{R}^n} A\mathcal{L}(x-y)\psi(0,y)dy$. Mais ainda, para $\delta > 0$, $\psi \in B_\delta(\varphi;\mathcal{B}_X)$ e $0 \leq s < t \leq a$ temos que

$$\begin{aligned} \| G(t,\psi) - G(s,\phi) \|_{X_1} & \leq [\alpha]_{C_{Lip}([0,t];\mathbb{R})} \| A\mathcal{L} \|_{L^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})} (\delta + \| \varphi \|_{C([-p,0];X)}) \mid t-s \mid \\ & \quad + \| \alpha \|_{C([0,t];\mathbb{R})} \| A\mathcal{L} \|_{L^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})} \| \psi - \phi \|_{C([-p,0];X)} \\ & \leq \Phi(t)(\mid t-s \mid + \| \psi - \phi \|_{C([-p,0];X_{\beta_2})}) \qquad (3.38) \end{aligned}$$

onde $\Phi(t) = \| \alpha \|_{C_{Lip}([0,t];\mathbb{R})} \| A\mathcal{L} \|_{L^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})} \max\{\delta + \| \varphi \|_{C([-p,0];X)}, \| (-A)^{-\beta_2} \|\}$. Do Teorema 3.11, com $W_1 = X_1$, $Z = X_{\beta_2}$ e $W_2 = X$, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.22. *Suponha que* $T(\cdot)(\varphi(0) + G(0,\varphi)) \in C_{Lip}([0,a]; X_{\beta_2})$, *as funções* $T(\cdot)F(0,\varphi)$ *e* $AT(\cdot)G(0,\varphi)$ *pertencem a* $L^{\infty}([0,a]; X_{\beta_2})$,

$$\| i_c \|_{\mathcal{L}(X_1, X_{\beta_2})} \| \alpha \|_{C_{Lip}([0,c];\mathbb{R})} \| A\mathcal{L} \|_{L^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})} \max\{\| \varphi \|_{C([-p,0];X)}, \| (-A)^{-\beta_2} \|\} < 1,$$

para algum $0 < c \leq a$ *e* $\lim_{s\to 0} \| \alpha \|_{C_{Lip}([0,s];\mathbb{R})} [\sigma]_{C_{Lip}([0,s]\times \mathcal{B}_{X_{\beta_2}};\mathbb{R}^+)} = 0$. *Então existe uma única solução fraca* $u \in C_{Lip}([-p,b]; X_{\beta_2})$ *de (3.36)-(3.37) em* $[-p,b]$, *para algum* $0 < b \leq a$. *Mais ainda, se* $\varphi(0) \in D(A)$ *e* $A\varphi(0) + F(0,\varphi) \in D(A)$, *então* $u(\cdot)$ *é uma solução estrita.*

Prova: Seja $\delta > 0$ tal que

$$\| i_c \|_{\mathcal{L}(X_1, X_{\beta_2})} \| \alpha \|_{C_{Lip}([0,c];\mathbb{R})} \| A\mathcal{L} \|_{L^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})} \max\{\delta + \| \varphi \|_{C([-p,0];X)}, \| (-A)^{-\beta_2} \|\} < 1.$$

Das discussões anteriores, temos que $G(\cdot)$ satisfaz a condição $\mathbf{H}^{\mathbf{X_1}}_{\mathbf{G},\mathbf{Z}}$ com $U_{\mathcal{B}_{X_{\beta_2}}} = B_\delta(\varphi; \mathcal{B}_{X_{\beta_2}})$ e $L_G(\cdot)$ dada por $L_G(s) = \Phi(s)$ para $s > 0$ e $L_G(0) = \lim_{s\downarrow 0} \Phi(s)$. Mais ainda, como $\| i_c \|_{\mathcal{L}(X_1, X_{\beta_2})}$ $L_G(0) < 1$ e $\lim_{s\to 0} L_G(s)[\sigma]_{C_{Lip}([0,s]\times \mathcal{B}_{X_{\beta_2}};\mathbb{R}^+)} = 0$, do Teorema 3.11 concluímos que existe uma única solução fraca $u \in C_{Lip}([-p,b]; X_{\beta_2})$ de (3.36)-(3.37) em $[-p,b]$ para algum $0 < b \leq a$. A última afirmação segue do Corolário 3.15. ■

Apêndice

Teorema 3.23. *(Teorema do ponto fixo de Sadovskii). Sejam $T : X \to X$ um operador condensante e B um subconjunto convexo, fechado e limitado de X. Se $T(B) \subset B$, então existe pelo menos um ponto fixo de T.*

Demonstração. Veja Sadovskii [41].

O próximo lema será importante em alguns resultados dos nossos estudos, além de ser uma alternativa para a prova do Teorema de Hille-Yosida.

Lema 3.24. *Sejam $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado e $a > 0$. Se $f \in L^1([0, a]; X)$ é tal que $Af \in L^1([0, a]; X)$, então*

$$A\left(\int_0^a f(s)ds\right) = \int_0^a Af(s)ds.$$

Demonstração. Veja [Silva [40], 2015, Lema 1.22, pág. 19].

Para a demonstração dos próximos resultados veja Kreyszig [29].

Teorema 3.25. *(Teorema do ponto fixo de Banach). Seja (M, d) um espaço métrico completo e $f : M \to M$. Suponha que exista uma constante $0 < K < 1$ tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq K.d(x, y),$$

para todo x, $y \in M$. Então, f possui um único ponto fixo em M, isto é, existe um único $x \in M$ tal que $f(x) = x$.

Teorema 3.26. *(Teorema da aplicão aberta). Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador linear limitado. Se T é sobrejetivo, então T é uma aplicação aberta. Portanto, se T é bijetor, T^{-1} é contínuo e, consequentemente, limitado.*

Teorema 3.27. *(Princípio da limitação uniforme). Sejam X um espaço de Banach e $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ uma família em $\mathcal{L}(X)$ tal que $\sup\limits_{\alpha\in\Lambda}\|T_\alpha x\| \leq M_x$ para todo $x \in X$. Então existe $M > 0$ tal que $\sup\limits_{\alpha\in\Lambda}\|T_\alpha\| \leq M$.*

Teorema 3.28. *(Teorema do gráfico fechado). Se X e Y são espaços de Banach e $T : D(T) \subset X \to Y$ é um operador linear fechado, então T é limitado se, e somente se, $G(T)$ é fechado.*

Teorema 3.29. *(Sequência de operadores compactos). Seja (T_n) uma sequência de operadores compactos de um espaços normado X em um espaço de Banach Y. Se existe um operador $T : X \to Y$ tal que $\|T_n - T\| \to 0$, quando $n \to \infty$, então T é compacto.*

Lema 3.30. *Sejam X um espaço de Banach e $T : D(T) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear. Se $(I-T)$ é invertível e $(I-T)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, então T é fechado.*

Referências Bibliográficas

[1] Adimy, M., Khalil, E. A class of linear partial neutral functional differential equations with nondense domain. *J. Differential Equations* 147 (1998) 2, 285-332.

[2] Aiello, W. G., Freedman, H. I., Wu, J. Analysis of a model representing stage-structured population growth with state-dependent time delay. *SIAM J. Appl. Math.* 52 (1992), no. 3, 855-869.

[3] Andrade, F. G. Controlabilidade para sistemas de equações diferenciais. Dissertação de Mestrado- IBILCE/UNESP, São José do Rio Preto. 2014.

[4] Barbarossa, M. V., Hadeler, K. P., Kuttler, C. State-dependent neutral delay equations from population dynamics. *J. Math. Biol.* 69 (2014), no. 4, 1027-1056.

[5] Czaja, R. Differential equations with sectorial operator. UŚ, 2002.

[6] Driver, R. D. A functional differential system of neutral type arising in a two-body problem of classical electrodynamics, in: J. LaSalle, S. Lefschtz (Eds.), International Symposium on Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics, Academic Press, New York, 1963, pp. 474-484.

[7] Driver, R. D. A neutral system with state-dependent delay. *J. Differential Equations* 54 (1984) 73-86.

[8] Evans, L. C. Partial differential equations. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[9] Fang, H., Li, J. On the existence of periodic solutions of a neutral delay model of single-species population growth. *J. Math. Anal. Appl.* 259 (2001), no. 1, 8-17.

[10] Freedman, H. I., Kuang, Y. Some global qualitative analyses of a single species neutral delay differential population model. Second Geoffrey J. Butler Memorial Conference in Differential Equations and Mathematical Biology (Edmonton, AB, 1992). *Rocky Mountain J. Math.* 25 (1995), no. 1, 201-215.

[11] Gomes, A. M. Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução. 2ª Ed., Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2012.

[12] Gyori, I. Oscillation and comparison results in neutral differential equations and their applications to the delay logistic equation. *Comput. Math. Appl.* 18 (1989), no. 10-11, 893-906.

[13] Gurtin, M. E. Pipkin, A. C. A general theory of heat conduction with finite wave speed, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 31 (1968), 113-126.

[14] Hale, J. Verduyn Lunel, S. M. *Introduction to functional differential equations.* Applied Mathematical Sciences, 99. Springer-Verlag, New York, 1993.

[15] Hale, J. Partial neutral functional differential equations. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* 39 (1994), no. 4, 339-344.

[16] Hartung, F. On differentiability of solutions with respect to parameters in neutral differential equations with state-dependent delays. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 192 (2013), no. 1, 17-47.

[17] Hartung, F., Turi, Janos. On differentiability of solutions with respect to parameters in state-dependent delay equations. *J. Differential Equations* 135 (1997), no. 2, 192-237.

[18] Hartung, F. Differentiability of solutions with respect to parameters in neutral differential equations with state-dependent delays. *J. Math. Anal. Appl.* 324 (2006), no. 1, 504-524.

[19] Hartung, F., Krisztin, T., Walther, H., Wu, J. *Functional differential equations with state-dependent delays: theory and applications.* Handbook of differential equations: ordinary differential equations. Vol. III, 435-545, Handb. Differ. Equ.,

[20] Hernández, E., O'Regan, D. Global solutions for a new class of abstract neutral differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.* 143 (2015), 3561-3571.

[21] Hernández, E., O'Regan, D. Existence results for abstract partial neutral differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.* 137 (2009), 10, 3309-3318.

[22] Hernández, E., O'Regan, D. On a New Class of Abstract Neutral Differential Equations. *J. Functional Analysis.* 261 (2011), 12, 3457-3481.

[23] Hernández, E., Prokopczyk, A., Ladeira, L. A note on partial functional differential equations with state-dependent delay. *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 7 (2006), no. 4, 510-519.

[24] Hernández, E., Henríquez, H. Existence results for partial neutral functional differential equation with unbounded delay. *J. Math. Anal. Appl.* 221 (1998) 2, 452-475.

[25] Hernández, E., Pierri, M., Wu, J. $\mathbf{C^{1+\alpha}}$-strict solutions and wellposedness of abstract differential equations with state dependent delay. *J. Differential Equations* 261, (2016) 12, 6856-6882.

[26] Hernández, E. Existence results for partial neutral integro-differential equations with unbounded delay. *J. Math. Anal. Appl.* 292, (2004) 1, 194-210.

[27] Hino, Y., Murakami, S., Naito, T. *Functional differential equations with infinite delay,* Lecture Notes in Math, 1473, Springer-Verlag, Berlin (1991).

[28] Kosovalic, N., Magpantay, F. M. G., Chen, Y., Wu, J. Abstract algebraic-delay differential systems and age structured population dynamics. *J. Differential Equations* 255 (2013), no. 3, 593-609.

[29] Kreyszig, E. Introductory functional analysis with applications. John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1978.

[30] Krisztin, T., Rezounenkob, A. Parabolic partial differential equations with discrete state-dependent delay: Classical solutions and solution manifold. *Journal of Differential Equations* Vol. 260, (5) (2016), 4454-4472.

[31] Lunardi, A. *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems*, PNLDE Vol. *16*, Birkhäauser Verlag, Basel, 1995.

[32] Lunardi, A. On the linear heat equation with fading memory. *SIAM J. Math. Anal.* 21 (1990), no. 5, 1213-1224.

[33] Lv, Y., Yuan, R. Pei, Y. Smoothness of semiflows for parabolic partial differential equations with state-dependent delay. *J. Differential Equations* 260 (2016) 6201-6231.

[34] Nunziato, J. W. On heat conduction in materials with memory. *Quart. Appl. Math.* 29 (1971), 187-204.

[35] Pazy, A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Applied Mathematical Sciences, 44. Springer-Verlag, New York, 1983.

[36] Pierri, M. Teoria de semigrupos e controlabilidade de sistemas neutros. Dissertação de Mestrado, (2006).

[37] Pierri, M., Hernández, E., Goncalves, G. Existence results for an impulsive abstract partial differential equation with state-dependent delay. *Comput. Math. Appl.* 52 (2006), no. 3-4, 411-420.

[38] Rezounenko, A. V. Non-linear partial differential equations with discrete state-dependent delays in a metric space. *Nonlinear Anal.* 73 (2010), no. 6, 1707-1714.

[39] Rezounenko, A. V., Wu, J. A non-local PDE model for population dynamics with state-selective delay: local theory and global attractors. *J. Comput. Appl. Math.* 190 (2006), No. 1-2, 99-113.

[40] Silva, D. F. Teoria de Semigrupos e Aplicações à Equações Diferenciais Parciais. Relatório de Iniciação Científica FAPESP- DCM/FFCLRP, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto. 2015.

[41] Sadovskii, B. N. On a fixed point principle. *Funct. Anal. Appl.* **1** (1967), 74-76.

[42] Travis, C. C., Webb, G. F. Existence and stability for partial functional differential equations *Trans. Amer. Math. Soc.* 200 (1974), 395-418

[43] Sinestrari, E. On the abstract Cauchy problem of parabolic type in spaces of continuous functions. *J. Math. Anal. Appl.* 107 (1985), 16-66.

[44] Suganya, S., Baleanu, D., Kalamani, P., Mallika Arjunan, M. On fractional neutral integro-differential systems with state-dependent delay and non-instantaneous impulses. *Adv. Difference Equ.* 2015, 2015;372, 39 pp.

[45] Vrabie, I. I. C_0-semigroups and applications. North-Holland Mathematics Studies 191, 2003.

[46] Walther, H. The solution manifold and C^1-smoothness for differential equations with state-dependent delay. *J. Differential Equations* 195 (2003), no. 1, 46-65.

[47] Wu, J. *Theory and applications of partial functional differential equations.* Applied Mathematical Sciences, 119. Springer-Verlag, New York, 1996.