Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Estudo do Modelo de Ronald Ross Sobre Prevenção da Malária

Gustavo Jorge Pereira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Departamento de Matemática como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática

Orientadora
Profa. Dra. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato

2010

517.38 Pereira, Gustavo Jorge
P436e Estudo do Modelo de Ronald Ross Sobre Prevenção da Malária / Gustavo Jorge Pereira. - Rio Claro : [s.n.], 2010
43 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Suzinei Aparecida Siqueira Marconato

1. Equações diferenciais. 2. Estudo do modelo de uma epidemia. 3. Estabilidade. 4. Linearização. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Gustavo Jorge Pereira
Estudo do Modelo de Ronald Ross Sobre Prevenção da Malária

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato
Orientadora

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti
Departamento de Matemática - IGCE - Unesp - Rio Claro - SP

Profa. Dra. Sandra Maria Semensato De Godoy
Departamento de Matemática - ICMC - USP - São Carlos - SP

Rio Claro, 01 de Julho de 2010

Aos meus pais: Angelina e José Jorge.

Agradecimentos

Muitas pessoas contribuiram de forma direta e indireta para a concretização deste trabalho. Em especial agradeço:

À minha orientadora, Professora Dra. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato pela confiança em mim depositada, pela dedicação, conselhos e incentivos.

Aos meus professores de Pós-Graduação do Departamento de Matemática da Unesp-IGCE e de Graduação do Departamento de Matemática da Unesp-Feis pela formação.

Ao Professor de Gradução Dr. Luís Antônio Fernandes de Oliveira pelas conversas e orientações.

Aos meus pais Angelina e José Jorge, meus primeiros professores; agradeço pela formação pessoal e profissional.

Aos meus irmãos Juliano e Fabiana.

À minha noiva Simone de Souza Almeida pelo apoio, força e motivação.

Ao meu avô João Francisco Lopes, aos amigos Luzia e José Pedro e aos tios Aparecida, Alice, Célia, Josefa, João Luís, Maria, Nadir e Sérgio, pelo apoio e orações.

À Maysa, pela ajuda no inglês.

Aos meus amigos de Pós-Graduação pelos momentos em que passamos juntos nos cursos e confraternizações. Em especial, José Ribamar, Juracélio, Henrique e Nilton pela convivência harmoniosa na república e boas horas de estudos e conversas.

À Deus pela oportunidade de vida.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo qualitativo do modelo feito por Ronald Ross sobre a propagação da malária em uma comunidade. O modelo encontra-se no artigo "Contribution to the Analysis of Malaria Epidemiology" de Alfred J. Lotka [1] e é dado por um sistema não linear de duas equações diferenciais ordinárias.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias, Estabilidade, Linearização.

Abstract

In this work we present a qualitative study of the model developed by Ronald Ross about the propagation of malaria in a community. The model is presented by the article "Contribution to the Analysis of Malaria Epidemiology" of Alfred J. Lotka [1] and it is given by a nonlinear system of two ordinary differential equations.

Keywords: Ordinary Differential Equations, Stability, Linearization.

Sumário

1 Introdução

Este trabalho trata da propagação da malária em uma comunidade e é dado por um sistema não linear de duas equações diferenciais ordinárias que será analisado através do estudo de estabilidade dos seus pontos de equilíbrio, indicando condições para a extinção da epidemia.

Como o modelo pode ser visto como um problema matricial, no capítulo 2 será feito um estudo de algumas propriedades de matrizes, sequências e séries de matrizes, como também de noções básicas de equação diferencial ordinária e o conceito de estabilidade.

Será visto no capítulo 3 que o tipo de estabilidade de um ponto de equilíbrio da equação autônoma $\dot{x} = f(x)$ é determinado pela aproximação linear do campo vetorial f em uma vizinhança suficientemente pequena do ponto de equílibrio.

Por último, no capítulo 4 será feito um estudo do modelo de Ross, analisando seus pontos de equilíbrio com a demonstração de um resultado indicando condições para a extinção da epidemia.

2 Preliminares

2.1 Equação Diferencial Ordinária

Sejam t um número real, D um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua e denotemos $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$. Uma equação diferencial é uma relação da forma

$$\dot{x} = f(t, x). \tag{2.1}$$

Dizemos que x é uma solução de (2.1) sobre um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, se x for uma função continuamente diferenciável no intervalo I, $(t, x(t)) \in D$ para todo $t \in I$ e x satisfaz $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ em I.

Suponha que $(t_0, x_0) \in D$. Resolver um problema de valor inicial para a equação, (2.1) consiste em encontrar um intervalo I contendo t_0 e uma solução x de (2.1) em I satisfazendo $x(t_0) = x_0$. Escrevemos este problema como

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \text{ em } I, \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in I. \tag{2.2}$$

Dizemos que uma função $f(t, x)$ definida em $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é *localmente Lipschitziana relativamente a* x se para todo conjunto fechado e limitado $U \subset D$, existir $K = K_U > 0$ tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y|$$

para $(t, x),\ (t, y)$ em U.

Observemos que se $f(t, x)$ for de classe C^1 na segunda variável em D, então $f(t, x)$ é localmente Lipschitziana relativamente a x.

Vamos enunciar os resultados que garantem a existência e unicidade de solução de (2.1) cujas demonstrações podem ser encontradas em Hale [2].

Teorema 2.1. Se f for contínua em D, então para todo $(t_0, x_0) \in D$, existe pelo menos uma solução de (2.1) passando por (t_0, x_0).

Teorema 2.2. Se $f(t, x)$ for contínua em D e localmente Lipschitziana relativamente a x, então para todo $(t_0, x_0) \in D$, existe uma única solução $x(t, t_0, x_0)$ de (2.1) passando por (t_0, x_0).

2.2 Sequências e Séries de Matrizes

Sistemas lineares de equações diferenciais com coeficientes constantes podem ser vistos como sistemas matriciais dados por

$$\dot{x} = Ax. \tag{2.3}$$

Por analogia à solução $x(t) = e^{at}x_0$ para o problema de valor inicial escalar $\dot{x} = ax$, $a \in \mathbb{R}$, $x(0) = x_0$, denotemos a solução de (2.3) com condição inicial $x(0) = x_0$ por $x(t) = e^{At}x_0$ e vamos descobrir quem é a matriz e^{At}.

Para isto temos que rever algumas propriedades de matrizes e demonstrar o Critério de Cauchy para sequências e séries de matrizes.

Sendo $A = (a_{ij})_{mxm}$ uma matriz genérica, vamos adotar a seguinte norma:

$$||A|| = \sum_{i,j=1}^{m} |a_{ij}|.$$

Sabemos que, para matrizes A e B valem :

1) $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$;

2) $||AB|| \leq ||A||\ ||B||$.

No intuito de definir convergência de séries de matrizes definimos, em primeiro lugar, convergência de sequências de matrizes.

Definição 2.1. Dizemos que uma matriz A de ordem m é limite da sequência (A_n) de matrizes de ordem m quando, para todo número real $\epsilon > 0$, pode-se obter um número natural n_0 tal que, todos os termos A_n com índice $n > n_0$ cumprem a condição $||A_n - A|| < \epsilon$.

Notação: $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$.
Simbolicamente escreve-se:

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n \ .\equiv. \ \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ /\ n > n_0 \ \Rightarrow\ ||A_n - A|| < \epsilon.$$

Proposição 2.1. Sejam $A_n = (a_{n_{ij}})_{mxm}$ e $A = (a_{ij})_{mxm}$ matrizes reais. Uma condição necessária e suficiente para que $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ é que $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_{ij}} = a_{ij}$, para cada par (i, j), $i, j = 1, \cdots, m$.

Prova:

($\Rightarrow$) Por hipótese, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, isto é, para todo $\epsilon > 0$, existe um número natural n_0 tal que, todos os termos A_n com índice $n > n_0$ cumprem a condição $||A_n - A|| = \sum\limits_{i,j=1}^{m} |a_{n_{ij}} - a_{ij}| < \epsilon$. Como para cada $n > n_0$ e para cada par $(i, j),\ i, j = 1, \ldots, m$ vale que

$$|a_{n_{ij}} - a_{ij}| \leq \sum_{i,j=1}^{m} |a_{n_{ij}} - a_{ij}| < \epsilon,$$

então temos que, para todo $\epsilon > 0$, existe um número natural n_0 tal que, todos os termos $a_{n_{ij}}$ com índice $n > n_0$ cumprem a condição $|a_{n_{ij}} - a_{ij}| < \epsilon$ para $i, j = 1, \ldots, m$, isto é, $\lim_{n\to\infty} a_{n_{ij}} = a_{ij}$ para cada par $(i, j),\ i, j = 1, \ldots, m$.
($\Leftarrow$) Por hipótese, $\lim_{n\to\infty} a_{n_{ij}} = a_{ij}$ para cada par $(i, j),\ i, j = 1, \ldots, m$, isto é, para todo $\epsilon > 0$ existe um número natural $n_{0_{ij}}$, tal que para todos os termos $a_{n_{ij}}$ com índice $n_{ij} > n_{0_{ij}}$ cumprem a condição

$$|a_{n_{ij}} - a_{ij}| < \frac{\epsilon}{m^2}, \tag{2.4}$$

sendo m a ordem da matriz. Assim, para cada $n > n_0 = max\{n_{0_{ij}}, i, j = 1, \ldots, m\}$, usando a desigualdade (2.4) temos:

$$||A_n - A|| = \sum_{i,j=1}^{m} |a_{n_{ij}} - a_{ij}| < \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\epsilon}{m^2} = \epsilon,$$

implicando que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$. ■

Vejamos agora o Critério de Cauchy que nos dá uma condição necessária e suficiente para que uma sequência de matrizes reais de ordem m seja convergente.

Dizemos que (A_n) é uma sequência de Cauchy quando cumpre a condição: dado um número real $\epsilon > 0$, pode se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ e $r > n_0$ implicam $|A_n - A_r| < \epsilon$

Teorema 2.3. Seja (A_n) uma sequência de matrizes reais de ordem m. Para que exista $\lim_{n\to\infty} A_n$, é necessário e suficiente que, dado um número real $\epsilon > 0$, exista um número natural n_0 tal que $||A_n - A_r|| < \epsilon$, quaisquer que sejam $n > n_0$ e $r > n_0$.

Prova:
($\Rightarrow$) Por hipótese, existe uma matriz real A de ordem m tal que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$; isto é, para todo $\epsilon > 0$ existe um número natural n_0 tal que, todos os termos A_n e A_r com índices $n,\ r > n_0$ cumprem a condição

$$||A_n - A|| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad ||A_r - A|| < \frac{\epsilon}{2},$$

e como $||A_n - A_r|| \leq ||A_n - A|| + ||A_r - A|| < \epsilon$, segue o resultado.
($\Leftarrow$) Por hipótese temos:

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ /\ n,\ r > n_0 \Rightarrow ||A_n - A_r|| = \sum_{i,j=1}^{m} |a_{n_{ij}} - a_{r_{ij}}| < \epsilon$$

implicando que $|a_{n_{ij}} - a_{r_{ij}}| < \epsilon$ para cada par $(i, j),\ i, j = 1, \ldots, m$, e pelo Critério de Cauchy para convergência de sequências numéricas, temos que para cada par (i, j) existe um número real a_{ij} tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_{n_{ij}} = a_{ij}.$$

Define-se a matriz $A = (a_{ij})_{mxm}$ e pela proposição 2.1, segue o resultado. ■

Vamos agora rever alguns resultados sobre série de matrizes.

Seja (A_n) uma sequência de matrizes reais de ordem m. A partir dela formamos uma nova sequência (S_n) de matrizes dada por

$$S_1 = A_1,\ S_2 = A_1 + A_2,\ S_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n.$$

As matrizes S_n são chamadas de reduzidas ou somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$. A parcela A_n é chamada de termo geral da série.

Se existir o limite

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

diremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ é convergente e o limite S será chamado de soma da série.

Notação: $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = S.$

Agora vamos enunciar o Critério de Cauchy para convergência de séries de matrizes.

Teorema 2.4. Seja (A_n) uma sequência de matrizes reais de ordem m. A fim de que a série $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ seja convergente, é necessário e suficiente que, para cada $\epsilon > 0$ exista um número natural n_0 tal que $\left|\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} A_k\right|\right| < \epsilon$, quaisquer que sejam $n > n_0$ e $p \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.2. Seja (A_n) uma sequência de matrizes reais de ordem m. Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} ||A_n||$ for convergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ também será convergente.

Prova: Para todo $p,\ n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} A_k\right|\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} ||A_k||. \tag{2.5}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} ||A_n||$ converge, e usando o resultado análogo para séries numéricas, temos:

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;/\; n > n_0,\ p \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} ||A_k|| < \epsilon$$

e por (2.5), temos

$$\left|\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} A_k\right|\right| < \epsilon, \quad n > n_0, \quad p \in \mathbb{N}.$$

e pelo teorema 2.4, segue que a série $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ é convergente. ∎

Com estes resultados demonstraremos que a série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ é convergente.

Teorema 2.5. A série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ é convergente, qualquer que seja a matriz A real de ordem m.

Prova: A partir das propriedades de matrizes prova-se, por indução, que

$$||A^k|| \leq ||A||^k, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Assim,

$$\left|\left|\frac{A^k}{k!}\right|\right| \leq \frac{||A||^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Sabemos que a série numérica $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{||A||^k}{k!}$ é convergente pois é a expansão em série da função exponencial então, por (2.6) e o critério de comparação para séries temos que $\sum_{k=0}^{\infty} \left|\left|\frac{A^k}{k!}\right|\right|$ é convergente e pela proposição 2.2 segue que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ é convergente. ∎

Considerando que a série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ é convergente, usaremos a notação abaixo, por analogia à série numérica $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = e^A.$$

Proposição 2.3. Sejam C, P matrizes reais de ordem m. Então a igualdade $Pe^C P^{-1} = e^{PCP^{-1}}$ é satisfeita se P for uma matriz não singular.

Prova: Por definição segue que

$$e^{PCP^{-1}} = Id + PCP^{-1} + \frac{(PCP^{-1})^2}{2!} + \frac{(PCP^{-1})^3}{3!} + \cdots .$$

Note que

$$Id = PIdP^{-1},$$

$$(PCP^{-1})^2 = PCP^{-1}PCP^{-1} = PC^2P^{-1},$$

$$\vdots$$

$$(PCP^{-1})^n = PC^nP^{-1},$$
$$\vdots$$

logo

$$e^{PCP^{-1}} = PIdP^{-1} + PCP^{-1} + \frac{PC^2P^{-1}}{2!} + \frac{PC^3P^{-1}}{3!} + \cdots =$$

$$= P(Id + C + \frac{C^2}{2!} + \frac{C^3}{3!} + \cdots)P^{-1} = Pe^CP^{-1}. \blacksquare$$

Como o nosso interesse é utilizar esta teoria para resolver sistemas de equações diferenciais ordinárias, torna-se necessário avaliar a existência da derivada da matriz e^{At}.

Proposição 2.4. Se A é uma matriz real de ordem m e $t \in \mathbb{R}$, então $\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At}$.

Prova: Temos que $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$, para todo t real. Então, os elementos desta série são matrizes que, somados, formam séries de potências em t com coeficientes reais. Como cada série de potências converge para todo t, vale a derivação termo a termo para todo t real. Mas, se vale a derivação termo a termo para todos os elementos da série que define e^{At}, resulta que vale a derivação termo a termo para a série dada. Então,

$$\frac{d}{dt}(e^{At}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{A^k t^k}{k!}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} = A\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} = A\sum_{r=0}^{\infty} \frac{A^r t^r}{r!} = Ae^{At}. \blacksquare$$

2.3 Forma Canônica de Jordan

A seguir, para demonstrar os principais resultados deste trabalho, será necessário a teoria que relaciona uma matriz a outra matriz similar de formação mais simples chamada de Forma Canônica de Jordan.

Definição 2.2. Seja A uma matriz real de ordem m. As soluções $x^1(t), x^2(t), \ldots, x^m(t)$ da equação $\dot{x} = Ax$ são linearmente independentes em $I \subset \mathbb{R}$ se a relação $c_1x^1(t) + c_2x^2(t) + \ldots + c_mx^m(t) = 0$, para $t \in I$ e constantes $c_1, c_2, \ldots, c_m$, só admite a solução $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$.

Definição 2.3. Seja A uma matriz real de ordem m. Se $x^1(t),\ x^2(t),\ \ldots,\ x^m(t)$ são soluções da equação $\dot{x} = Ax$ em I, então a matriz $X(t) = (x^1(t)\ \ x^2(t)\ \ \ldots\ \ x^m(t))$, cujas colunas são as m soluções dadas, é chamada de matriz solução de $\dot{x} = Ax$. Se $det\ X(t) \neq 0$ para todo t em I, então $X(t)$ é chamada de matriz fundamental.

O caso especial de matriz fundamental satisfazendo a condição inicial $X(0) = Id$ é chamado de matriz principal, sendo Id a notação para a matriz identidade.

Observemos que se $X(t)$ é uma matriz fundamental de $\dot{x} = Ax$, então a solução da equação satisfazendo a condição inicial $x(0) = x_0$ é dada por

$$\varphi(t, x_0) = X(t)[X(0)]^{-1}x_0. \tag{2.7}$$

De fato: Considere a solução geral da equação $\dot{x} = Ax$ dada por

$$\varphi(t, x_0) = c_1x^1(t) + c_2x^2(t) + \ldots + c_mx^m(t) \quad \text{ou} \quad \varphi(t, x_0) = X(t)C$$

sendo $X(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) & x^2(t) & \ldots & x^m(t) \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$.

Temos que $x_0 = \varphi(0, x_0) = X(0)C$ e como $X(0)$ é invertível, segue que

$$C = [X(0)]^{-1}x_0.$$

Portanto, $\varphi(t, x_0) = X(t)[X(0)]^{-1}x_0$.

Lema 2.1. Sejam $X(t)$ e $Y(t)$ matrizes fundamentais de $\dot{x} = Ax$. Então, existe uma matriz constante C tal que $Y(t) = X(t)C$.

Assim, $e^{At} = X(t)C$ para qualquer matriz fundamental $X(t)$ da equação $\dot{x} = Ax$. E se $X(0) = Id$ e considerando $e^{A.0} = Id$, temos $Id = X(0).C$ que determina $C = [X(0)]^{-1}$. Logo, $e^{At} = X(t)X(0)^{-1}$.

Lema 2.2. Seja $X(t)$ matriz solução de $\dot{x} = Ax$ em I. Se $detX(t_0) \neq 0$ para algum t_0 em I, então $detX(t) \neq 0$ para todo t em I.

Teorema 2.6. A matriz $X(t) = e^{At}$ é uma matriz principal da equação $\dot{x} = Ax$.
Prova: Se $X(t) = e^{At}$, então pela proposição 2.4 segue que $\dot{X}(t) = Ae^{At}$, isto é, $\dot{X} = AX$. Portanto, a matriz $X(t)$ é matriz solução de $\dot{x} = Ax$ e para $t = 0$, $X(0) = e^0 = Id$. Assim, desde que $detX(0) \neq 0$ então, pelo Lema 2.2, $detX(t) \neq 0$ para todo t em I. Logo, X(t) é uma matriz principal. ■

Mostraremos alguns exemplos de e^{At}. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

para $n \geq 2$ temos que $A^n = B^n = 0$, logo

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^nt^n = Id + At = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{Bt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}B^nt^n = Id + Bt = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$e^{At}e^{Bt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t^2 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}.$$

Agora, considere $C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, então

$$e^{Ct} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-t^2}{2!} & 0 \\ 0 & -\frac{t^2}{2!} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{t^3}{3!} \\ \frac{t^3}{3!} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{t^4}{4!} & 0 \\ 0 & \frac{t^4}{4!} \end{pmatrix} + \cdots$$

$$e^{Ct} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots & t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots \\ -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \cdots & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix},$$

pois sabemos que

$$\operatorname{sen} t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \frac{t^9}{9!} - \frac{t^{11}}{11!} + \cdots$$

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \frac{t^8}{8!} - \frac{t^{10}}{10!} + \cdots$$

Portanto, concluímos que $e^{(A+B)t} \neq e^{At}e^{Bt}$. Para que $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$ seja satisfeita, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.7. Se as matrizes A e B comutam, então para todo $t \in \mathbb{R}$, valem:
(i) $Be^{At} = e^{At}B$.
(ii) $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$

Prova: (i) Como por hipótese as matrizes A e B comutam, temos que

$$A^k B = BA^k, \ \forall\ k \in \mathbb{N}. \tag{2.8}$$

Logo,

$$Be^{At} = B\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{BA^k t^k}{k!} \overset{(2.8)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k B t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} B = e^{At}B,\ t \in \mathbb{R}.$$

(ii) Vamos mostrar que $e^{At}e^{Bt}$ e $e^{(A+B)t}$ são matrizes soluções da equação $X' = (A+B)X$, com a condição inicial $X(0) = Id$. Sabemos que $e^{(A+B)t}$ denota matriz solução da equação $X' = (A+B)X$, satisfazendo $X(0) = Id$. Provemos que o mesmo resultado vale para a matriz $X(t) = e^{At}e^{Bt}$. De fato:

$$X'(t) = (e^{At}e^{Bt})' = Ae^{At}e^{Bt} + e^{At}Be^{Bt} \overset{(i)}{=} Ae^{At}e^{Bt} + Be^{At}e^{Bt}$$

$$X'(t) = (A+B)e^{At}e^{Bt} = (A+B)X(t),\ X(0) = Id.$$

Como as duas matrizes soluções são idênticas em $t = 0$, então $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. ∎

Definição 2.4. Duas matrizes complexas A e B de ordem m são ditas similares se existir uma matriz complexa não singular P de ordem m, tal que $B = PAP^{-1}$.

Observemos que, neste caso, $det\ B = det\ A$. O próximo resultado encontra-se em Coddington e Levison [3].

Teorema 2.8. Toda matriz complexa A de ordem m é semelhante a uma matriz da forma

$$J = \begin{pmatrix} J_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_s \end{pmatrix}$$

em que J_0 é uma matriz diagonal com diagonal $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots\ \lambda_q$, e

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_{q+i} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{q+i} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{q+i} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{q+i} \end{pmatrix},\ i = 1, \ldots, s$$

em que λ_j são autovalores de A, $j = 1, \cdots, q+s$ e não precisam ser todos distintos.

Observemos que se λ_j for uma raiz simples, ela aparecerá em J_0 e portanto, se todas as raízes forem distintas, A será similar à matriz diagonal

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix}.$$

Do teorema 2.8 segue que $det\ A = \displaystyle\prod_{i=1}^{m} \lambda_i$ e $tr\ A = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i$.

Os blocos J_i são da forma $J_i = \lambda_{q+i} Id_{(r_i)} + Z_i$, sendo que (r_i) é a multiplicidade algébrica do autovalor λ_{q+i}, J_i tem (r_i) linhas e (r_i) colunas e

$$Z_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz Z_i^2 tem sua diagonal de 1's movido um elemento para a direita da matriz Z_i e todos os outros elementos são iguais a zero. Segue daqui que $Z_i^{r_i - 1}$ é uma matriz que contém todos os elementos zero exceto o elemento da primeira linha, última coluna, que é 1. Logo, $Z_i^{r_i}$ é uma matriz nula.

Vamos agora retornar ao problema $\dot{x} = Ax$ e transformá-lo em um sistema equivalente usando a Forma de Jordan da matriz A.

Sejam A uma matriz de ordem m e P uma matriz invertível de ordem m. Para o sistema $\dot{x} = Ax$ vamos considerar uma nova variável y dada por $x = Py$ e, derivando esta igualdade vamos obter um novo sistema dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P\dot{y} \\ Ax = APy &= P\dot{y} \\ \dot{y} &= P^{-1}APy. \end{aligned}$$

Escolhendo P tal que $P^{-1}AP = J$, nosso sistema passa a

$$\dot{y} = Jy. \tag{2.9}$$

Sabemos que uma matriz fundamental para o sistema (2.9) é $Y(t) = e^{Jt}$. Se conhecemos e^{Jt} teremos as soluções do sistema, pois

$$X(t) = PY(t) = Pe^{Jt}$$

é a matriz fundamental de $\dot{x} = Ax$. Seja J a forma canônica de A, como dada no teorema 2.8 e suponhamos P uma matriz constante não singular tal que $AP = PJ$, isto é, $A = PJP^{-1}$. Então, $e^{At} = e^{(PJP^{-1})t}$. Da proposição 2.3 temos $e^{PJtP^{-1}} = Pe^{Jt}P^{-1}$, logo $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$.

Sabemos que:

$$e^{Jt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k t^k}{k!} = Id + Jt + \frac{J^2t^2}{2} + \cdots + \frac{J^k t^k}{k!} + \cdots$$

e, considerando a matriz J dada pelo teorema 2.8, segue que

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_0 t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_1 t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_s t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{J_0^2 t^2}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{J_1^2 t^2}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{J_s^2 t^2}{2} \end{pmatrix} + \cdots$$

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} Id + J_0 t + \frac{J_0^2 t^2}{2} + \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Id + J_1 t + \frac{J_1^2 t^2}{2} + \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Id + J_s t + \frac{J_s^2 t^2}{2} + \cdots \end{pmatrix}$$

e, portanto,

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{J_0 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{J_s t} \end{pmatrix}.$$

A matriz J_0 é uma matriz diagonal com diagonal $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots\ \lambda_q$, logo a matriz $e^{J_0 t}$ é da forma

$$e^{J_0 t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_q t} \end{pmatrix}.$$

Para as matrizes $e^{J_i t}$, $i = 1,\ \cdots, s$ considere que $J_i = \lambda_{q+i} Id_{(r_i)} + Z_i$, assim podemos escrever

$$e^{J_i t} = e^{(\lambda_{q+i} Id_{(r_i)} + Z_i)t} = e^{(\lambda_{q+i})t} Id_{(r_i)} e^{Z_i t} = e^{(\lambda_{q+i})t} e^{Z_i t}.$$

Como $e^{Z_i t} = Id_{(r_i)} + Z_i t + \frac{Z_i^2 t^2}{2} + \cdots + \frac{Z_i^{(r_i-1)} t^{(r_i-1)}}{(r_i - 1)!}$, temos

$$e^{Z_i t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{t^2}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{t^2}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \frac{t^{(r_i-1)}}{(r_i-1)!} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{(r_i-1)}}{(r_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{(r_i-2)}}{(r_i-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

e, portanto,

$$e^{J_i t} = e^{(\lambda_{q+i})t}.\begin{pmatrix} 1 & t & \dfrac{t^2}{2} & \cdots & \dfrac{t^{(r_i-1)}}{(r_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \dfrac{t^{(r_i-2)}}{(r_i-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

sendo que J_i é uma matriz de ordem r_i e $m = q + r_1 + r_2 + \cdots + r_s$. Assim, se a forma canônica J de A é conhecida, uma matriz fundamental e^{At} de $\dot{x} = Ax$ é dada explicitamente por $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$ em que e^{Jt} pode ser calculada pelas expressões de $e^{J_i t}$, $i = 0, \cdots, s$.

2.4 Estabilidade de Ponto de Equilíbrio

Nesta seção apresentamos conceitos da teoria de estabilidade que consiste em analisar o comportamento da solução de uma equação diferencial não linear $\dot{x} = f(x)$ sem explicitá-la, isto é, a análise é feita apenas considerando as hipóteses impostas sobre a função f.

Neste estudo, as soluções constantes da equação desempenham um papel importante pois, estando garantida a condição de unicidade de solução para o problema com condição inicial dada, as demais soluções devem se aproximar ou se afastar das soluções constantes, ou até mesmo oscilar, mas sem pontos em comum com as soluções constantes.

Neste trabalho vamos considerar equações autônomas, ou seja, da forma

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{ou} \quad \dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{2.10}$$

em que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua, Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e f depende somente de x e não depende explicitamente da variável independente t.

Uma propriedade importante desta equação é que, se $x(t)$ for uma solução de (2.10) sobre um intervalo (a, b), então para algum número real c, a solução $y(t) = x(t - c)$ é uma solução de (2.10) sobre o intervalo $(a + c, b + c)$, isto é,

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t - c) = f(x(t - c)) = f(y(t)).$$

Consequentemente, supondo que temos existência e unicidade de solução para o problema

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{2.11}$$

podemos afirmar que $x(t)$ é solução de (2.11) se, e somente se, $y(t) = x(t + t_0)$ for solução de

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0.$$

Portanto, para equações autônomas, podemos considerar condições iniciais começando no tempo zero.

Uma caracterização das soluções constantes $x(t) = \bar{x}$ é que $f(\bar{x}) = 0$ e equivalentemente, se $f(\bar{x}) = 0$ então $x(t) = \bar{x}$ será uma solução da equação. Neste sentido, temos a seguinte definição:

Definição 2.5. Um ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ é chamado ponto de equilíbrio da equação $\dot{x} = f(x)$ se $f(\bar{x}) = 0$.

A partir dos pontos de equilíbrio da equação, vamos apresentar a definição de estabilidade.

Definição 2.6. Um ponto de equilíbrio $\bar{x}$ da equação $\dot{x} = f(x)$ é estável se, para todo $\epsilon > 0$, existir um $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que, para todo x_0 para o qual $||x_0 - \bar{x}|| < \delta$, a solução $\varphi(t, x_0)$ de $\dot{x} = f(x)$ através de x_0 em $t = 0$ satisfaz a desigualdade $||\varphi(t, x_0) - \bar{x}|| < \epsilon$, para todo $t \geq 0$.

Podemos dizer que um ponto de equilíbrio $\bar{x}$ é estável, se toda solução começando perto do ponto de equilíbrio permanece em uma vizinhança de $\bar{x}$ no decorrer do tempo.

Dizemos que um ponto de equilíbrio $\bar{x}$ é instável se não for estável, ou seja:

Definição 2.7. Um ponto de equilíbrio $\bar{x}$ da equação $\dot{x} = f(x)$ é instável se existir $\epsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$ existem x_0 com $||x_0 - \bar{x}|| < \delta$ e $t_{x_0} > 0$ tal que $||\varphi(t_{x_0}, x_0) - \bar{x}|| \geq \epsilon$.

A próxima definição diz que uma solução, começando próxima de $\bar{x}$, não apenas pode permanecer próxima, como também pode tender ao ponto de equilíbrio, à medida que o tempo passa.

Definição 2.8. Um ponto de equilíbrio $\bar{x}$ da equação $\dot{x} = f(x)$ é assintoticamente estável se for estável e, além disso, existir um $r > 0$ tal que $\lim\limits_{t \to \infty} \varphi(t, x_0) = \bar{x}$ para todo x_0 satisfazendo a desigualdade $||x_0 - \bar{x}|| < r$.

2.5 Fórmula da Variação das Constantes

O modelo a ser estudado apresenta um sistema da forma

$$\dot{x} = Ax + g(t), \tag{2.12}$$

que é uma equação diferencial não autônoma sendo g uma função de classe C^1 e A uma matriz real de ordem m. Sendo $x(t)$ uma solução da equação (2.12), consideremos uma nova variável $y(t)$ dada por

$$y(t) = e^{-At}x(t), \tag{2.13}$$

em que e^{At} é matriz fundamental da equação linear $\dot{x} = Ax$. Derivando a equação (2.13) em função de t, temos

$$\dot{y} = -Ae^{-At}x + e^{-At}\dot{x}. \tag{2.14}$$

Substituindo a equação (2.12) em (2.14), obtemos

$$\dot{y} = e^{-At}g(t). \tag{2.15}$$

Supondo a condição inicial $x(t_0) = x_0$ para a equação (2.12), temos:

$$y(t_0) = e^{-At_0}x_0.$$

Integrando a equação (2.15) em ambos os lados no intervalo $[t_0,\ t]$, temos

$$y(t) = e^{-At_0}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-As}g(s)ds \tag{2.16}$$

e utilizando (2.13), obtemos

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-As}g(s)ds. \tag{2.17}$$

A expressão dada por (2.17) é chamada de Fórmula da Variação das Constantes.

2.6 Desigualdade de Gronwall:

Lema 2.3. Sejam f, g funções contínuas, não negativas, definidas em $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e uma constante real $\alpha > 0$ tal que

$$f(t) \leq \alpha + \int_a^t g(s)f(s)ds, \quad t \in [a, b].$$

Então, $f(t) \leq \alpha e^{\int_a^t g(s)ds}$, $t \in [a, b]$.

Prova: Definimos $h(t) = \alpha + \int_a^t g(s)f(s)ds$ em que $h(a) = \alpha$ e desse modo, $h(t) \geq \alpha > 0$ para todo $t \in [a, b]$, portanto $\ln h(t)$ está bem definida para $t \in [a, b]$. Como, por hipótese $f(t) \leq h(t)$ para $t \in [a, b]$ e $h^{'}(t) = g(t)f(t)$, segue que $h^{'}(t) \leq g(t)h(t)$, isto é,

$$\frac{d}{dt}\ln h(t) = \frac{h^{'}(t)}{h(t)} \leq g(t). \tag{2.18}$$

Integrando (2.18) entre a e t, obtemos

$$\int_a^t \frac{d}{ds}\ln h(s)ds \leq \int_a^t g(s)ds \Longrightarrow$$

$$\ln h(t) - \ln h(a) \leq \int_a^t g(s)ds \Longrightarrow$$

$$\ln \frac{h(t)}{\alpha} \leq \int_a^t g(s)ds \Longrightarrow$$

$$\frac{h(t)}{\alpha} \leq e^{\displaystyle\int_a^t g(s)ds} \Longrightarrow$$

$$h(t) \leq \alpha . e^{\displaystyle\int_a^t g(s)ds}.$$

Portanto, $f(t) \leq h(t) \leq \alpha . e^{\displaystyle\int_a^t g(s)ds}$, para $t \in [a, b]$. ■

3 Linearização de Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias

Vamos mostrar que, sob certas condições, o tipo de estabilidade de um ponto de equilíbrio de uma equação diferencial planar não linear é determinado pela aproximação linear do campo vetorial f em uma vizinhança suficientemente pequena do ponto de equilíbrio. Encontraremos um sistema linear que, ao fazer um estudo dos autovalores da matriz desse sistema, diremos qual é o tipo de estabilidade do ponto de equilíbrio para a equação não linear.

Considere a equação $\dot{x} = f(x)$, com $f = (f_1, f_2)$ de classe C^1 e

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}$$

a matriz Jacobiana de f no ponto x.

Definição 3.1. Se $\bar{x}$ for um ponto de equilíbrio para a equação $\dot{x} = f(x)$, então a equação diferencial linear

$$\dot{x} = Df(\bar{x})x$$

é chamada de equação linear variacional ou a linearização do campo vetorial f no ponto de equilíbrio $\bar{x}$.

Neste capítulo também demonstraremos o principal resultado a ser utilizado para provar a estabilidade das soluções constantes do modelo de Ronald Ross. De acordo com Hale/Koçak [4], para que um ponto de equilíbrio $\bar{x}$ seja assintoticamente estável para a equação não linear $\dot{x} = f(x)$, basta os autovalores da matriz Jacobina $Df(\bar{x})$ da equação $\dot{x} = Df(\bar{x})x$ terem parte real negativa. Antes de enunciar este resultado, vamos demonstrar o seguinte resultado:

Lema 3.1. Seja A uma matriz real de ordem m tal que a parte real do autovalor λ_j de A, denotada por $R(\lambda_j)$, é negativa para todo autovalor λ_j. Seja α um número real positivo tal que $\alpha < -R(\lambda_j)$, para todo λ_j. Então, existe $K > 0$ tal que $||e^{At}|| \leq Ke^{-\alpha t}$, para todo $t \geq 0$.

Prova: Seja P uma matriz não singular tal que $P^{-1}AP = J$, conforme a teoria vista no capítulo anterior. Sabemos que

$$P^{-1}e^{At}P = e^{(P^{-1}AP)t} = e^{Jt}$$

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$$

$$||e^{At}|| \leq ||P||\ ||P^{-1}||\ ||e^{Jt}||$$

$$||e^{At}|| \leq \sum_{j=1}^{m} ||e^{\lambda_j t}||\ |p_j(t)| = \sum_{j=1}^{m} e^{R(\lambda_j)t}|p_j(t)|,$$

em que $p_j(t)$ são polinômios. Seja β tal que $0 < \alpha < \beta < -R(\lambda_j)$ para todo λ_j, logo $R(\lambda_j) < -\beta < -\alpha$. Assim,

$$||e^{At}|| \leq \sum_{j=1}^{m} e^{R(\lambda_j)t}|p_j(t)| \leq \sum_{j=1}^{m} e^{-\beta t}|p_j(t)| = e^{-\beta t}q(t) = e^{-\alpha t}e^{-(\beta-\alpha)t}q(t).$$

Como $\beta - \alpha > 0$, existe $K > 0$ tal que $e^{-(\beta-\alpha)t}q(t) \leq K$, para todo $t \geq 0$. Portanto, $||e^{At}|| \leq Ke^{-\alpha t}$. ■

Pelo lema concluímos que, se $R(\lambda_j) < 0$ para todo autovalor λ_j de A, então toda solução de $\dot{x} = Ax$ é limitada no futuro.

Enunciaremos agora o principal resultado a ser utilizado no modelo de Ronald Ross.

Teorema 3.1. Seja f uma função de classe C^1. Se todos os autovalores da matriz Jacobiana $Df(\bar{x})$ tiverem parte real negativa, então o ponto de equilíbrio $\bar{x}$ da equação diferencial $\dot{x} = f(x)$ será assintoticamente estável.

Prova: Para estudar a estabilidade do ponto de equilíbrio $\bar{x}$, é conveniente introduzir uma nova variável:

$$y(t) = x(t) - \bar{x}$$

tal que o ponto de equilíbrio $\bar{x}$ de $\dot{x} = f(x)$ corresponda ao ponto de equilíbrio $y = 0$ da equação diferencial

$$\dot{y} = f(y + \bar{x}). \tag{3.1}$$

Usando a Fórmula de Taylor, podemos expandir a função $f(y+\bar{x})$ na variável y, obtendo

$$f(y + \bar{x}) = f(\bar{x}) + Df(\bar{x})y + g(y) \tag{3.2}$$

em que $\lim_{y \to 0} \dfrac{g(y)}{||y||} = 0$, e como

$$g(y) = f(y + \bar{x}) - Df(\bar{x})y,$$

segue que $g(0) = 0$ e utilizando as equações (3.1) e (3.2) temos

$$\dot{y} = Df(\bar{x})y + g(y). \tag{3.3}$$

Observamos que $y(t) = 0$ é solução de (3.3) e, portanto, $y = 0$ é um ponto de equilíbrio de (3.3), que equivale ao ponto de equilíbrio $\bar{x}$ de $\dot{x} = f(x)$. Portanto, vamos provar que o ponto de equilíbrio $y = 0$ de (3.3) é assintoticamente estável.
Como $g(0) = 0$ e utilizando o Teorema do Valor Médio para a função g, temos que, para todo $m > 0$, existe um $\epsilon > 0$ tal que

$$||g(y) - g(0)|| \leq m||y|| \quad \text{se} \quad ||y|| \leq \epsilon. \tag{3.4}$$

Retornando à equação diferencial (3.3), seja $y(t)$ solução de (3.3) satisfazendo a condição inicial $y(0) = y_0$ que, pela Fórmula da Variação das Constantes é dada por

$$y(t) = e^{Df(\bar{x})t}y_0 + \int_0^t e^{Df(\bar{x})(t-s)}g(y(s))ds.$$

Considerando as constantes K e α dadas pelo lema 3.1, sejam $m > 0$ tal que $mK < \alpha$ e $\epsilon > 0$ escolhido tal que (3.4) seja satisfeita. Como $g(0) = 0$, então

$$||y(t)|| \leq Ke^{-\alpha t}||y_0|| + \int_0^t Ke^{-\alpha(t-s)}m||y(s)||ds \tag{3.5}$$

com $||y(s)|| \leq \epsilon$ para $0 \leq s \leq t$. Multiplicando ambos os lados da desigualdade (3.5) por $e^{\alpha t}$, temos:

$$e^{\alpha t}||y(t)|| \leq K||y_0|| + \int_0^t Kme^{\alpha s}||y(s)||ds. \tag{3.6}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall em (3.6), obtemos

$$e^{\alpha t}||y(t)|| \leq K||y_0||e^{Kmt}. \tag{3.7}$$

Finalmente, multiplicando ambos os lados de (3.7) por $e^{-\alpha t}$, obtemos a estimativa procurada:

$$||y(t)|| \leq K||y_0||e^{-(\alpha-Km)t} \;\text{ para }\; ||y(t)|| \leq \epsilon. \tag{3.8}$$

Para terminar a prova, escolha $\delta > 0$ tal que $K\delta < \epsilon$. Se $||y_0|| < \delta$, então a desigualdade (3.8) garante que $||y(t)|| < \epsilon$ desde que $\alpha - Km > 0$. Portanto, a solução $y(t)$ existe para todo $t \geq 0$ e a solução de equilíbrio $y = 0$ de (3.3) é estável. Também pela desigualdade (3.8), temos que $y(t) \to 0$ quando $t \to +\infty$ se $||y_0|| < \delta$. Consequentemente, $y = 0$ é assintoticamente estável. ■

4 Modelo de Ronald Ross

O objetivo deste trabalho é fazer uma análise qualitativa do modelo proposto por Ronald Ross no artigo “Contribution to the Analysis of Malaria Epidemiology"de Alfred J. Lotka, publicado na revista *The American Journal of Hygiene* da John Hopkins University, em 1923, [1].

O modelo de Ross trata da propagação da malária em uma comunidade e o artigo de Lotka tornou-se célebre por ser uma das primeiras tentativas de modelagem matemática de uma epidemia e também porque foi muito usado pela Organização Mundial de Saúde para fazer avaliações durante as tentativas de erradicação da malária em várias partes do mundo.

De acordo com [5], “A malária, mundialmente um dos mais sérios problemas de saúde pública, é uma doença infecciosa causada por protozoários do gênero Plasmodium e transmitida ao homem por fêmeas de mosquitos do gênero Anopheles, produzindo febre, além de outros sintomas. Quatro espécies de plasmódio podem causar a doença: P. falciparum, P. vivax, P. malariae e P. ovale (essa, de transmissão natural apenas na África)”.

O modelo é dado por um sistema não linear de duas equações diferenciais ordinárias que será analisado através do estudo de estabilidade dos seus pontos de equilíbrio, indicando condições para a extinção da epidemia. Para o modelo são necessários os seguintes parâmetros:
p - população humana,
z - população humana afetada com malária,
$f.z$ - parcela dos humanos afetados (pela picada),
r - taxa de cura dos humanos,
b - número de picadas que o homem recebe por unidade de tempo,
N - taxa de natalidade,
M - taxa de mortalidade,
t - tempo.
As quantidades referentes à população de mosquitos são dadas por $p^{'}, z^{'}, b^{'}, f^{'}.z^{'}, r^{'}, M^{'}, N^{'}$ e desprezando emigração e imigração na comunidade, temos que:

A taxa de crescimento de indivíduos afetados se dá pelo número de novas infecções por unidade de tempo, subtraindo do número de mortes por unidade de tempo e também *do número de curas por unidade de tempo.*

Observemos que, se o mosquito picar um humano, em média, $b^{'}$ vezes por unidade de tempo, então $f^{'}.z^{'}$ mosquitos infectados terão $b^{'}(f^{'}.z^{'})$ picadas infectadas (sobre os humanos) por unidade de tempo e $\frac{p-z}{p}$ dessas picadas cairão sobre pessoas sadias.

Assumindo que toda pessoa picada torna-se afetada, então o número de novas infecções por unidade de tempo, na população humana, será $b^{'}.f^{'}.z^{'}.\frac{p-z}{p}$.

Similarmente, se um humano for picado b vezes por unidade de tempo, o número de novas infecções entre os mosquitos será $b.f.z.\frac{p^{'}-z^{'}}{p^{'}}$.

Com estas considerações, o modelo de Ross é dado por:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{b^{'}f^{'}z^{'}}{p}(p-z) - Mz - rz$$

$$\frac{dz^{'}}{dt} = \frac{bfz}{p^{'}}(p^{'}-z^{'}) - M^{'}z^{'} - r^{'}z^{'}. \tag{4.1}$$

Considerando que o número de picadas tomadas pela população humana é igual ao número de picadas dadas pelos mosquitos, temos que $b.p = b^{'}.p^{'}$, isto é, $b = \frac{b^{'}.p^{'}}{p}$ e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{b^{'}f^{'}z^{'}}{p}(p-z) - Mz - rz$$

$$\frac{dz^{'}}{dt} = \frac{b^{'}fz}{p}(p^{'}-z^{'}) - M^{'}z^{'} - r^{'}z^{'}. \tag{4.2}$$

Desprezando os valores M e $r^{'}$ e considerando $p = 1$, $x = \frac{z}{p}$ e $y = \frac{z^{'}}{p}$ no sistema (4.2), obtemos

$$\frac{dx}{dt} = b^{'}f^{'}y - b^{'}f^{'}xy - rx$$

$$\frac{dy}{dt} = b^{'}f\frac{p^{'}}{p}x - b^{'}fxy - M^{'}y$$

e utilizando $A = \frac{p^{'}}{p}$, $B = \frac{M^{'}}{b^{'}f}$, $C = \frac{r}{b^{'}f^{'}}$ segue que

$$\frac{dx}{dt} = -Cb^{'}f^{'}x + b^{'}f^{'}y - b^{'}f^{'}xy$$

$$\frac{dy}{dt} = Ab^{'}fx - Bb^{'}fy - b^{'}fxy. \tag{4.3}$$

O sistema não linear (4.3) pode ser escrito na forma geral

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x,y) = a_{11}x + a_{12}y + a_{112}xy$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(x,y) = a_{21}x + a_{22}y + a_{212}xy \tag{4.4}$$

sendo $a_{11} = -Cb'f'$, $a_{12} = b'f'$, $a_{112} = -b'f'$, $a_{21} = Ab'f$, $a_{22} = -Bb'f$ e $a_{212} = -b'f$.

A origem $(0,0)$ é um ponto de equilíbrio para o sistema não linear (4.4). Seja (p,q) um outro ponto de equiliíbrio de (4.4), isto é,

$$a_{11}\frac{1}{q} + a_{12}\frac{1}{p} = -a_{112}$$

$$a_{21}\frac{1}{q} + a_{22}\frac{1}{p} = -a_{212}$$

ou seja,

$$p = \frac{a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}}{a_{11}a_{212} - a_{21}a_{112}}$$

$$q = \frac{a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11}}{a_{22}a_{112} - a_{12}a_{212}}.$$

Como f_1 e f_2 são de classe C^1 e seja $(\bar{x},\bar{y})$ um ponto de equilíbrio de (4.4), então pelo estudo feito no capítulo 3 segue que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{112}\bar{y} & a_{12} + a_{112}\bar{x} \\ a_{21} + a_{212}\bar{y} & a_{22} + a_{212}\bar{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

é a linearização de (4.4) no ponto de equilíbrio $(\bar{x},\bar{y})$.

A análise dos autovalores da matriz Jacobiana associada a (4.5) nos remete ao seguinte resultado:

Teorema 4.1. Se $M'r > b'^2 ff'p'$, isto é, se a mortalidade vezes a taxa de cura for maior que o produto (número de picadas ao quadrado)x(taxa de infecção humana)x(taxa de infecção do mosquito)x(população de mosquito), então a origem para o sistema (4.1) será assintoticamente estável (extinção da epidemia).
Se $N'r < b'^2 ff'p'$, isto é, se a origem for instável, então (p,q) será assintoticamente estável.
E se a origem for estável, os valores estimados para p e q serão menores que zero (sem significado biológico).

Prova: Ao estudar a estabilidade do ponto de equilíbrio $(0,0)$, devemos encontrar os autovalores da matriz Jacobiana $Df(0,0)$ do sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Para isto devemos resolver a equação característica dada por

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

que possui as raízes

$$\lambda = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{\triangle}}{2} = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2}.$$

Note que

$$\triangle = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = a_{11}^2 + 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2 - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}a_{21} =$$

$$= a_{11}^2 - 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2 + 4a_{12}a_{21} = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} > 0,$$

pois a_{12}, a_{21} são positivos, logo os autovalores de $Df(0,0)$ são reais.

Agora consideremos que o determinante da matriz Jacobiana $Df(0,0)$ é positivo, isto é

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) > 0,$$

então teremos autovalores distintos negativos, pois $-4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) < 0$ e portanto,

$$\sqrt{\triangle} < |a_{11} + a_{22}|.$$

Como a_{11} e a_{22} são negativos, temos

$$\lambda_1 = \frac{(a_{11} + a_{22}) + \sqrt{\triangle}}{2} = \frac{-|a_{11} + a_{22}| + \sqrt{\triangle}}{2} < 0$$

e

$$\lambda_2 = \frac{(a_{11} + a_{22}) - \sqrt{\triangle}}{2} = \frac{-|a_{11} + a_{22}| - \sqrt{\triangle}}{2} < 0.$$

Pelo teorema 3.1 o ponto de equilíbrio $(0,0)$ será assintoticamente estável. Como a primeira hipótese $M^{'}r > b^{'^2}ff^{'}p^{'}$ é equivalente à

$$M^{'}r - b^{'^2}ff^{'}\frac{p^{'}}{p} > 0 \Leftrightarrow (-Cb^{'}f^{'})(-Bb^{'}f) - b^{'}f^{'}Ab^{'}f > 0 \Leftrightarrow a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0,$$

concluímos que, com esta condição, $(0,0)$ é assintoticamente estável.

Analisaremos o caso em que o determinante da matriz Jacobiana $Df(0,0)$ é negativo, isto é,

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) < 0$$

teremos autovalores distintos com sinais diferentes (e $(0,0)$ será instável). De fato, se $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) < 0$, então $-4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) > 0$, e como $|a_{11} + a_{22}| = -(a_{11} + a_{22})$, temos

$$\sqrt{\triangle} > |a_{11} + a_{22}| = -(a_{11} + a_{22}),$$

e portanto $(a_{11} + a_{22}) + \sqrt{\triangle} > 0$. Para mostrar que o outro autovalor é negativo observemos que

$$\sqrt{\triangle} > |a_{11} + a_{22}| > a_{11} + a_{22}$$

e portanto $(a_{11} + a_{22}) - \sqrt{\triangle} < 0$.

Considerando o ponto de equilíbrio $(p,q) \neq (0,0)$ é conveniente fazer uma mudança de coordenada

$$u_1 = x - p \qquad u_2 = y - q$$

tornando este ponto de equilíbrio a origem nas novas coordenadas. Agora vamos encontrar os autovalores da matriz Jacobiana $Df(p,q)$ do sistema

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{112}q & a_{12} + a_{112}p \\ a_{21} + a_{212}q & a_{22} + a_{212}p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Antes disso, substituindo os valores de p e q em (4.6) e considerando que

$$\frac{p}{q} = \frac{a_{22}a_{112} - a_{12}a_{212}}{a_{11}a_{212} - a_{21}a_{112}}$$

e

$$\frac{q}{p} = \frac{a_{11}a_{212} - a_{21}a_{112}}{a_{22}a_{112} - a_{12}a_{212}},$$

obtemos um novo sistema equivalente ao (4.6) dado por

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -a_{12}\dfrac{q}{p} & -a_{11}\dfrac{p}{q} \\ & \\ -a_{22}\dfrac{q}{p} & -a_{21}\dfrac{p}{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

cuja equação característica é

$$\lambda'^2 + (a_{12}\frac{q}{p} + a_{21}\frac{p}{q})\lambda' - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

que admite raízes

$$\lambda' = \frac{-(a_{12}\frac{q}{p} + a_{21}\frac{p}{q}) \pm \sqrt{\triangle}}{2} = \frac{-(a_{12}\frac{q}{p} + a_{21}\frac{p}{q}) \pm \sqrt{(a_{12}\frac{q}{p} + a_{21}\frac{p}{q})^2 + 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2}.$$

Observe que

$$\triangle = (a_{12}\frac{q}{p} - a_{21}\frac{p}{q})^2 + 4a_{11}a_{22} > 0,$$

logo, os autovalores de $Df(p,q)$ são reais. Como a segunda hipótese $N'r < b'^2 ff'p'$ é equivalente à

$$(-Cb'f')(-Bb'f) - b'f'Ab'f < 0,$$

que é equivalente à

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) < 0,$$

isto é, o determinante da matriz Jacobiana $Df(0,0)$ é negativo, e como vimos anteriormente, os autovalores são distintos com sinais diferentes. Portanto, a origem é instável.

E temos que

$$\sqrt{\triangle} = \sqrt{(a_{12}\frac{q}{p} + a_{21}\frac{p}{q})^2 + 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} < \left| a_{12}\frac{q}{p} + a_{21}\frac{p}{q} \right|.$$

Como $\frac{q}{p}$, $\frac{p}{q}$, a_{12} e a_{21} são positivos, então $\sqrt{\triangle} < a_{12}\frac{q}{p} + a_{21}\frac{p}{q}$, e assim,

$$\lambda'_1 = \frac{-(a_{12}\frac{q}{p} + a_{21}\frac{p}{q}) + \sqrt{\triangle}}{2} < 0,$$

e também

$$\lambda'_2 = \frac{-(a_{12}\frac{q}{p} + a_{21}\frac{p}{q}) - \sqrt{\triangle}}{2} < 0.$$

Portanto, considerando a segunda hipótese do teorema, os autovalores de $Df(p,q)$ serão negativos, e assim, (p,q) será assintoticamente estável.

Agora, se considerarmos que a origem é estável, ou seja,

$$detDf(0,0) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) > 0$$

e sendo $[a_{11}a_{212} - a_{21}a_{112}]$ e $[a_{22}a_{112} - a_{12}a_{212}]$ ambos positivos, temos que

Referências

[1] LOTKA, A. J. Contribution to the analysis of malaria epidemiology - part 1. *The American Journal of Hygiene - John Hopkins University*, v. 3, p. 1–12, 1923.

[2] HALE, J. K. *Ordinary Differential Equations*. New York: John Wiley & Sons, 1969.

[3] CODDINGTON E; LEVISON, N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. New York: McGraw-Hill, 1955.

[4] HALE J. K; KOÇAK, H. *Dynamics and Bifurcations*. New York: Editora Springer-Verlag, 1991.

[5] BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de Vigilância em Saúde. *Manual de Diagnóstico Laboratorial da Malária*. 2. ed. Brasília, 2009.

[6] FIGUEIREDO D. G; NEVES, A. F. *Equações Diferenciais Aplicadas*. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, IMPA, 2007.

[7] SOTOMAYOR, J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Rio de Janeiro: SBM, IMPA, 1979.