

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer inicialmente ao Prof. Abraham H. Zimerman pela orientação e o incentivo durante a realização deste trabalho que transcorreu de maneira informal e sincera.

Em especial agradeço a Profa. Maria C.B. Abdalla pelo apoio específico nesta tese, pela amizade e confiança.

De um modo geral gostaria de agradecer a todos os estudantes, funcionários e professores do I.F.T. cuja convivência foi de fundamental importância na realização deste trabalho, em particular ao colega Marcelo Guzzo com o qual realizei parte dos estudos sobre teoria de cordas e formalismo B.R.S.T.

Por último agradeço ao importante apoio financeiro da FAPESP.

ESTUDO CRÍTICO DO CÁLCULO DA ANOMALIA DE WEYL NA CORDA PELO MÉ-
TODO DE FUJIKAWA

Denis Dalmazi

Orientador: Abraham H. Zimerman

Í N D I C E

Página

INTRODUÇÃO.....	1
1 - INTRODUÇÃO A CORDA	
I - INTRODUÇÃO.....	10
II - A AÇÃO DE NAMBU-GOTO	12
III - UMA AÇÃO ALTERNATIVA PARA O CORDA LIVRE.....	28
IV - REPARAMETRIZAÇÕES INFINITESIMAIS.....	37
2 - SIMETRIA DE B.R.S.T. E FIXAÇÃO DE GAUGE	
I - INTRODUÇÃO.....	49
II - TRANSFORMAÇÕES DE B.R.S.T.....	50
III - TRANSFORMAÇÕES DE B.R.S.T. NA CORDA BO- SÔNICA.....	63
3 - O MÉTODO DE FUJIKAWA	
I - INTRODUÇÃO.....	78
II - ANOMALIA QUIRAL NA Q.E.D.....	79

III - ANOMALIA DE WEYL NA CORDA BOSÔNICA FE- CHADA.....	97
IV - ANOMALIA NA CORRENTE DOS FANTASMAS.....	155
V - CONCLUSÃO.....	158

APÊNDICES

A - CÁLCULOS ALGÉBRICOS.....	161
B - EQUIVALÊNCIA ENTRE O MÉTODO DO "HEAT KERNEL" E O DA FUNÇÃO ZETA (NO CÁLCULO DA ANOMALIA QUIRAL).....	181
C - COVARIÂNCIA NO GAUGE CONFORME.....	185
D - SOBRE A QUANTIZAÇÃO CANÔNICA DA CORDA BOSÔNICA ABERTA.....	217
REFERÊNCIAS.....	237

R E S U M O

Nesta tese analisa-se cuidadosamente o cálculo de Fujikawa da anomalia de Weyl na corda bosônica fechada, enfatizando-se a covariância desse cálculo sob transformações conformes bem como a escolha dos operadores usados na determinação da variação da medida da integral de trajetória sob transformações de Weyl.

A B S T R A C T

The Fujikawa's evaluation of Weyl's anomaly in the bosonic string is carefully analyzed, paying special attention to the covariance under conformal transformation. The choice of operators used to calculate the variation of path integral measure under Weyl's transformation is discussed in detail.

INTRODUÇÃO

Hoje em dia conhecemos quatro interações na natureza: eletromagnética, gravitacional, fraca e a forte. Embora tenhamos maior familiaridade com as duas primeiras estamos cercados também de fenômenos relacionados com a interação fraca, como a radioatividade de alguns elementos, e com a interação forte que desempenha um papel fundamental na coesão da matéria.

Para a interação eletromagnética desde o século passado tem-se uma teoria que descreve muito bem e que deu conta dos fenômenos observados até o começo deste século. Essa teoria, eletrodinâmica de Maxwell, trata de maneira unificada a interação magnética e a elétrica que até então eram estudadas separadamente. Outra característica importante da eletrodinâmica é que agora o sistema em estudo é descrito por um número infinito de graus de liberdade representado pelo campo eletromagnético que assume valores em cada ponto do espaço tempo.

Analogamente, para a interação gravitacional tem-se a teoria da relatividade geral construída por Einstein e que descreve muito bem os fenômenos gravitacionais observados até hoje. Nessa teoria o sistema é também descrito por um número infinito de graus de liberdade, a própria métrica do espaço tempo é o campo da teoria.

Os campos usados tanto na eletrodinâmica de Maxwell como na gravitação de Einstein assumem valores numéricos reais em cada ponto do espaço tempo. Esse tipo de descrição da natureza é chamada de Teoria Clássica de Campos.

Certos fenômenos eletromagnéticos, como a emissão

espontânea de radiação, efeito fotoelétrico, etc, que não podem ser explicados adequadamente pela eletrodinâmica de Maxwell indicam que o conceito de campo deve ser reformulado. A reformulação é feita introduzindo-se o formalismo da quantização canônica, onde os campos passam a ser expandidos em modos normais de vibração com os coeficientes dessa expansão representando operadores criação e destruição de partículas. Essas partículas são chamadas de quanta associados ao campo em questão e esse novo formalismo é conhecido como Teoria Quântica de Campos.

Analogamente, os sistemas físicos de número de graus de liberdade finito que eram descritos classicamente através de um conjunto de coordenadas $\tilde{q}$ e de momentos canonicamente conjugados $\tilde{p}$, na teoria quântica, passam a ser caracterizados por uma função de onda ψ que é uma função contínua das coordenadas $\tilde{q}$:

$$\psi = \psi(\tilde{q})$$

Nesse formalismo, chamado de 1ª quantização, as coordenadas $\tilde{q}$ acima são identificadas com os autovalores dos operadores $\tilde{q}$ da mesma maneira que $\tilde{p}$ são os autovalores de $\tilde{p}$. Esses operadores satisfazem a relação de comutação não trivial:

$$[\tilde{q}, \tilde{p}] = i\hbar \quad (1)$$

onde $\hbar$ = cte de Planck.

A partir da teoria quântica de campos, usando-se o princípio de simetria de gauge constroem-se as teorias quânti-

cas de gauge. Nessas teorias a ação total do sistema é invariante por um grupo (grupo de gauge) de transformações locais nos campos de matéria e nos próprios campos de gauge. Os quanta associados aos campos de gauge são chamados de bosons de gauge e são os mediadores das interações entre as partículas.

O exemplo mais simples de uma teoria de gauge é a eletrodinâmica quântica (Q.E.D.) que consegue explicar adequadamente todos os fenômenos eletromagnéticos observados até hoje. Nessa teoria o campo eletromagnético desempenha o papel de campo de gauge e o boson de gauge, mediador da interação eletromagnética, é o fóton.

Desde que Maxwell unificou a interação magnética e a elétrica, os físicos têm buscado a unificação das quatro interações básicas já citadas.

O processo de unificação se dá através de uma teoria de gauge inicialmente baseada num certo grupo de gauge G , com os bosons de gauge, que seriam os mediadores das quatro interações, a princípio não massivos. Entretanto a medida que caminhamos para uma escala de energia mais baixa ocorre a chamada quebra espontânea da simetria de gauge, ou seja, o estado de menor energia (vácuo) da teoria não é mais invariante pela ação de G , mas sim pela ação de um outro grupo H que em geral é menor que G , nesse processo alguns bósons de gauge tornam-se massivos. É claro que a própria simetria pelo grupo H ainda pode ser quebrada numa escala de energia mais baixa, gerando massa para outros bosons de gauge e assim por diante.

Baseando-se nesse processo, na década de 60 foi obtido um modelo unificado da interação eletromagnética com a interação fraca conhecido como Modelo Padrão, esse modelo previu

a existência dos bosons W^+ , W^- e Z^0 mediadores da interação fraca e que foram observados recentemente, o que aumentou o interesse dos físicos sobre teorias unificadas. Entretanto uma teoria unificada das 4 interações da natureza ainda não foi obtida e esse talvez seja o objetivo mais nobre da teoria de cordas. A conexão entre a teoria de cordas e os campos que descrevem as partículas observadas na natureza pode ser vista a seguir.

A corda é um objeto extenso unidimensional e de comprimento ℓ , portanto para sua descrição clássica é necessário um conjunto infinito de coordenadas, ou seja, para especificarmos a posição da corda no espaço tempo, num dado instante, é preciso indicar a posição de cada um dos infinitos pontos da corda naquele instante. Isso equivale a dizer que o vetor posição da corda no espaço tempo X^μ pode ser escrito em função de dois parâmetros:

$$X^\mu = X^\mu(\tau, \sigma) \quad \mu = 1 \dots D$$

onde: D é dimensão do espaço tempo

τ é uma espécie de tempo próprio

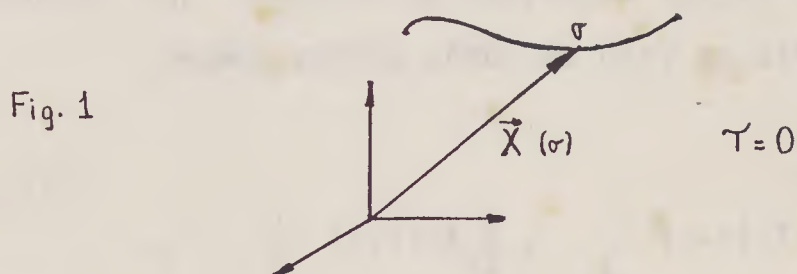
σ é um parâmetro cuja especificação determina o ponto da corda em que estamos interessados.

Num determinado instante, por exemplo $\tau = 0$, temos:

$$X^\mu = X^\mu(0, \sigma) = X^\mu(\sigma).$$

Nesse instante a posição do ponto σ da corda é da

da pelas D-coordenadas $X^\mu(\sigma)$;



Variando-se o parâmetro σ continuamente entre um extremo e outro da corda temos um conjunto infinito de coordenadas $X^\mu(\sigma)$.

Como vimos anteriormente, no formalismo de primeira quantização, os sistemas físicos que eram descritos classicamente por um conjunto de coordenadas $\tilde{q}$ passam a ser caracterizados por uma função de onda $\psi(\tilde{q})$, para a corda, que é descrita classicamente pelas coordenadas $X^\mu(\sigma)$, temos a função de onda:

$$\Phi = \Phi[X^\mu(\sigma)]$$

Analogamente à relação de comutação (1) temos para a corda:

$$[X^\mu(\tau, \sigma'), \Pi_{X^\nu}(\tau, \sigma)] = i\delta^\mu_\nu \delta(\sigma' - \sigma),$$

onde $\Pi_{X^\nu}(\tau, \sigma)$ é o momento canonicamente conjugado a coordenada $X^\nu(\sigma)$ no instante τ .

A partir da ação da corda temos as equações de movimento para $X^\mu(\tau, \sigma)$, além dessas equações de movimento, $X^\mu(\tau, \sigma)$ deve satisfazer certas condições de contorno nos extremos da corda por exemplo no caso da corda aberta temos:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \sigma} X^\mu(\tau, \sigma) \right|_{\sigma=0} = \left. \frac{\partial}{\partial \sigma} X^\mu(\tau, \sigma) \right|_{\sigma=\pi} = 0$$

Usando-se todas essas relações temos no caso da corda aberta a seguinte expansão para as coordenadas $X^\mu(\sigma)$ em termos dos modos normais de vibração da corda^(1,2):

$$X^\mu(\sigma) = x^\mu + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n} (\alpha_n^\mu - \alpha_{-n}^\mu) \cos n\sigma, \quad \tau = 0$$

onde x^μ seria o vetor posição do centro de massa da corda e os α_n^μ (α_{-n}^μ) são operadores criação (destruição) de modos de vibração da corda.

Analizando o movimento clássico da corda como uma perturbação em torno do movimento retilíneo uniforme de seu centro de massa, usando-se a expansão acima na função de onda da corda e expandindo-a em série de Taylor em torno da posição do centro de massa $X^\mu(\sigma) = x^\mu$ temos:

$$\Phi | X^\mu(\sigma) | \cong \Phi | x^\mu | + \partial_\mu \Phi(x^\mu) \epsilon^\mu + \frac{1}{2!} (\partial_\mu \partial_\nu \Phi(x^\mu)) \epsilon^\mu \epsilon^\nu + \dots$$

$$\text{onde } \epsilon^\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n} (\alpha_n^\mu - \alpha_{-n}^\mu) \cos n\sigma$$

Aplicando-se essa expansão sobre o modo de vibração de menor energia Φ^0 definido a partir de:

$$\alpha_n^\mu \Phi^0 = 0 ,$$

obtem-se⁽²⁾:

$$\Phi[X^\mu(\sigma)] = \Phi(x^\mu) + i\alpha_{-1}^\mu \partial_\mu \Phi(x^\mu) - \frac{1}{2} \alpha_{-1}^\mu \alpha_{-1}^\nu \partial_\mu \partial_\nu \Phi(x^\mu) + \dots \text{etc} ,$$

onde a expansão acima é implicitamente calculada sobre o modo Φ^0 .

Dessa forma se admitirmos que a função de onda da corda $\Phi[X^\mu(\sigma)]$ é um escalar por transformações de Lorentz podemos identificar $\Phi(x^\mu)$ com um campo escalar, $\partial_\mu \Phi$ com um campo vetorial e assim por diante. Esses campos que aparecem como coeficientes da expansão acima representariam, em princípio, as funções de onda das partículas observadas na natureza.

Portanto cada partícula seria identificada com um modo de vibração⁽³⁾ da corda, e a teoria de cordas seria uma teoria unificada da natureza.

Dentro da teoria de cordas o estudo das anomalias é de fundamental importância, pois é natural que uma teoria unificada da natureza seja livre de anomalias. Além disso nas recentes teorias de supercordas, que são atualmente as maiores candidatas a uma teoria unificada, o cancelamento das anomalias determina os possíveis grupos de gauge (unificação) da teoria de partículas^(4,5).

Por essas razões, e com o objetivo de se adquirir

familiaridade no cálculo de anomalias, analisaremos de maneira crítica e cuidadosa o método de Fujikawa e seu uso no cálculo da anomalia de Weyl da corda bosônica fechada.

No capítulo 1 estudamos a teoria clássica da corda bosônica, dando atenção especial as propriedades de simetria da teoria.

No capítulo 2, através do exemplo das teorias de gauge usuais, introduzimos as transformações de B.R.S.T. e o princípio de invariância por B.R.S.T. e a relação desse princípio com o processo de fixação de gauge. Em seguida definimos as transformações de B.R.S.T. dos campos da corda e usamos o princípio de simetria por B.R.S.T. no processo de fixação do gauge conforme, obtendo-se uma ação para a corda invariante por tais transformações.

No capítulo 3 através do exemplo da anomalia quiral na Q.E.D. apresentamos o método de Fujikawa, observando a relação entre a anomalia quiral e o teorema de Índices de Atiyah-Singer bem como a equivalência entre o método de regularização via função zeta e o método via cálculo de "heat Kernel" (apêndice B). Na sequência usamos o método de Fujikawa no cálculo da anomalia de Weyl da corda bosônica fechada, dando atenção especial ao processo de regularização que é baseado no cálculo de "heat Kernel" de certos operadores diferenciais bem como aos critérios que nos levaram a escolher esses operadores.

No apêndice C a covariância do método de Fujikawa sob reparametrizações é discutida em detalhe com base no trabalho de Orlando Alvarez sobre tensores em variedades bidimensionais riemannianas⁽⁶⁾.

No cálculo da anomalia de Weyl (capítulo 3) usando-se integrais de trajetória obtem-se a dimensão crítica $D=26$, paralelamente no apêndice D usando-se o formalismo da quantização canônica obtem-se o mesmo resultado.

C A P Í T U L O 1

INTRODUÇÃO A CORDA

I - INTRODUÇÃO

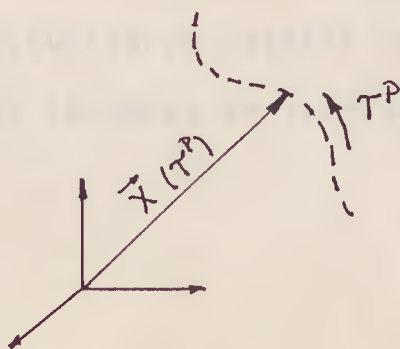
De uma maneira simples podemos dizer que a corda é um objeto extenso unidimensional com um comprimento finito, um dos objetos mais simples que podemos imaginar depois da partícula puntiforme.

O estudo da propagação da corda no espaço-tempo pode ser visto como uma generalização do estudo da propagação da partícula puntiforme, ou seja, a corda pode ser vista como um conjunto contínuo de partículas puntiformes sujeitas a um vínculo tal que esse conjunto tenha um certo comprimento finito.

Assim da mesma maneira que a ação relativística para uma partícula puntiforme livre é proporcional ao comprimento de arco percorrido pela partícula no espaço-tempo, veremos que a ação para a corda livre é proporcional a área varrida pela corda durante a sua evolução no espaço-tempo.

No caso da partícula puntiforme a figura descrita pelo seu movimento no espaço-tempo é uma curva (geodésica) e portanto a posição da partícula pode ser parametrizada por um único parâmetro como por exemplo o tempo próprio: τ^P

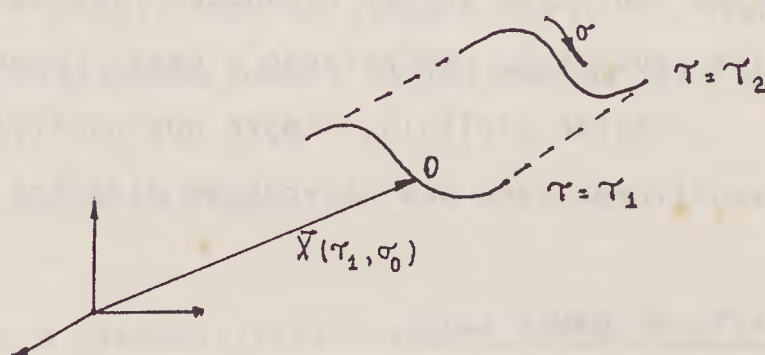
Fig. 2



A ação correspondente, proporcional ao comprimento de arco percorrido pela partícula, é naturalmente independente do parâmetro τ^P .

Analogamente, no caso da corda que varre uma superfície bidimensional (de área mínima) durante seu movimento no espaço-tempo, sua posição pode ser parametrizada em termos de 2 parâmetros: σ e τ :

Fig. 3



Na figura 3 temos a posição da corda em 2 instantes diferentes, e vemos que para se especificar completamente sua posição num determinado instante é preciso especificar o instante em que estamos interessados (τ) e dar a posição de cada ponto '0' da corda nesse instante, para isso é preciso usar o parâmetro σ que determina o ponto da corda em que estamos interessados. Ou seja, τ é uma espécie de tempo próprio enquanto que σ percorre a corda internamente.

A ação para a corda, que é proporcional a área varrida pela mesma no espaço-tempo, é naturalmente independente da parametrização usada (τ, σ). Portanto vemos que tanto a teoria relativística da partícula puntiforme livre como a teoria relativística da corda livre apresentam simetria por reparametrizações. Entretanto o estudo das reparametrizações da corda se mostrará especialmente mais rico que o caso da partícula puntiforme.

me, a razão disso é que no caso da partícula puntiforme poderemos trabalhar com uma parametrização na qual τ é reduzido a uma constante enquanto que no caso da corda veremos que isso não poderá ser feito pois teremos sempre pelo menos um grau de liberdade restante (fator conforme), seja qual for a parametrização utilizada. Esse grau de liberdade restante indica que ainda temos simetria na teoria por um conjunto de reparametrizações e isso implicará que as grandezas físicas sejam definidas de maneira covariante com relação a essas reparametrizações.

Neste capítulo, sempre que possível usaremos a partícula puntiforme como uma introdução didática a corda.

II - A AÇÃO DE NAMBU-GOTO

Na obtenção da ação de Nambu-Goto⁽⁷⁾ para a corda livre, utilizaremos o conceito de métrica induzida⁽⁸⁾. Esse conceito pode ser introduzido de maneira simples ao estudarmos a ação para a partícula puntiforme livre.

Da mecânica clássica relativística sabemos que a ação para a partícula puntiforme livre é proporcional ao comprimento de arco percorrido pela partícula no espaço-tempo e no caso de trabalharmos com o espaço-tempo euclidiano de D-dimensões ($\mathbb{R}^D$):

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad \nu, \mu = 1, 2, \dots, D,$$

Se a partícula possui massa 'm' com $m \neq 0$ a constante de proporcionalidade é '+m' e assim temos a ação:

$$A_1 = \int_a^b dS \quad dS^2 = dX^\mu dX_\mu = dX^\mu dX^\mu$$

Sempre podemos escolher o sistema de referência movendo-se com a própria partícula e nesse caso o elemento de comprimento de arco é proporcional ao tempo próprio τ^P , trabalhando-se no sistema de unidades onde a velocidade da luz é um ($c=1$):

$$dS = d\tau^P = \sqrt{dX^\mu dX^\mu}.$$

Temos a parametrização natural: $X^\mu = X^\mu(\tau^P)$

Entretanto poderíamos usar um outro parâmetro qual quer τ' , diferente do tempo próprio, na parametrização da posição da partícula no espaço-tempo:

$$\tau' = \tau'(\tau^P)$$

Nesse caso admitindo-se que o vetor posição $X^\mu(\tau)$ é um escalar por reparametrizações: $X^\mu(\tau') = X^\mu(\tau)$; $\tau \rightarrow \tau'(\tau)$. Consequentemente a medida de integração usada na ação $A_1(dS)$ é também um escalar:

$$dS(\tau) = (dX^\mu(\tau)dX^\mu(\tau))^{1/2} = (dX'^\mu(\tau')dX'^\mu(\tau'))^{1/2} = dS'(\tau').$$

Portanto com a nova parametrização τ' temos uma nova ação A'_1 .

$$A_1' = m \int_{\tau_i'(\tau_i)}^{\tau_f'(\tau_f)} dS'(\tau') = m \int_{\tau_i'(\tau_i)}^{\tau_f'(\tau_f)} dS(\tau) ,$$

onde τ_i e τ_f são os extremos de integração da ação A_1 na antiga

$$A_1 = m \int_{\tau_i}^{\tau_f} dS(\tau) \quad (\text{II-1})$$

Assim se a reparametrização de τ para τ' é tal que os extremos de integração permaneçam inalterados:

$$\tau_f'(\tau_f) = \tau_f ; \quad \tau_i'(\tau_i) = \tau_i ,$$

a nova ação A_1' será exatamente igual a anterior A_1 :

$$A_1' = A_1 .$$

Isso significa que a posição da partícula puntiforme no espaço-tempo X^μ pode ser parametrizada através de um parâmetro τ qualquer, que em geral é diferente do tempo próprio (τ^P).

Equações de Movimento da Partícula Puntiforme

Se estamos pensando em obter as equações de movimento para a partícula puntiforme a partir da ação A_1 dada acima em (II-1) é interessante reescrevermos a medida dS em função

do tempo τ :

$$dS = \sqrt{dX^\mu dX^\mu} = \left(\frac{dX^\mu}{d\tau} \frac{dX^\mu}{d\tau} \right)^{1/2} d\tau = |\dot{X}| d\tau, \quad \dot{X}^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}.$$

Agora temos a ação A_1 como um funcional de $\dot{X}$.

$$A_1 = A_1[\dot{X}] = m \int_{\tau_i}^{\tau_f} |\dot{X}| d\tau, \quad (\text{II-2})$$

e a lagrangeana $L = m|\dot{X}| = m \sqrt{\dot{X}^\mu \dot{X}^\mu}$.

Usando-se a notação δf para a variação da forma funcional de f com relação a seu argumento, que é mantido fixo, minimizando-se a ação A_1 e integrando por partes temos:

$$\delta A_1 = m \int_{\tau_i}^{\tau_f} \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} \right) \delta \dot{X}^\mu \right\} d\tau = 0, \text{ conseqüentemente:}$$

$$\left. \frac{(\delta X^\mu) \dot{X}^\mu}{|\dot{X}|} \right|_{\tau_i}^{\tau_f} - \int_{\tau_i}^{\tau_f} \left(\frac{\dot{X}^\mu}{|\dot{X}|} \right) \cdot \delta X^\mu d\tau = 0.$$

Como a variação do campo nos extremos é fixa: $\delta X^\mu(\tau_i) = \delta X^\mu(\tau_f) = 0$, e entre eles é arbitrária, da igualdade acima temos a equação de movimento:

$$\left(\frac{\dot{X}^\mu}{|\dot{X}|} \right) \cdot = 0$$

Essa equação determina a dependência funcional do vetor posição X^μ em relação ao parâmetro τ . Entretanto já vimos que τ é um parâmetro arbitrário e que a ação é invariante por reparametrizações $\tau \rightarrow \tau'(\tau)$ consequentemente a equação de movimento acima é válida também para uma certa parametrização τ' . Se escolhermos $\tau' = \tau^P$ (tempo próprio) a equação se simplificará, pois:

$$|\dot{X}| = \left(\frac{dX^\mu}{d\tau} \frac{dX^\mu}{d\tau} \right)^{1/2} = \left| \frac{dS}{d\tau} \right| = 1 ,$$

e temos a equação de movimento usual para uma partícula livre:

$$\ddot{X} = 0 \quad (\text{II-3})$$

Se observarmos as reparametrizações como transformações de gauge então a escolha $\tau' = \tau^P$ corresponde a uma fixação de gauge, o chamado gauge do tempo próprio.

A métrica Induzida

Podemos obter a ação A_1 , dada em (II-1), de uma maneira bastante elegante que faz uso do conceito de métrica induzida.

Não temos a pretensão de dar uma definição matemática precisa de métrica induzida, pois apenas uma idéia intuitiva é suficiente para os nossos propósitos.

Para isso notemos que o elemento infinitesimal de

comprimento dS que corresponde a diferença entre os vetores $X^\mu + dX^\mu$ e X^μ é dado por:

$$dS^2 = dX^\mu dX^\mu .$$

Se admitirmos que o parâmetro τ toma valores numa certa variedade V , o fato de parametrizarmos o vetor posição usando-se τ :

$$X^\mu = X^\mu(\tau) ,$$

do ponto de vista matemático é resultado do mergulho ("embedding") da variedade unidimensional V no espaço-tempo $\mathbb{R}^D$.

De um modo geral, se uma variedade V de dimensão N é mergulhada no espaço tempo o elemento de arco dS pode ser escrito em função de uma métrica induzida por esse mergulho:

$$X^\mu = X^\mu(V^1, \dots, V^N) ; \quad V = (V^1, \dots, V^N) \in V$$

$$dX^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial V^a} dV^a$$

e

$$dS^2 = dX^\mu(V) dX^\mu(V) = \frac{\partial X^\mu}{\partial V^a} \frac{\partial X^\mu}{\partial V^b} dV^a dV^b, \quad dS^2 = \gamma_{ab} dV^a dV^b,$$

$$a, b, = 1, 2, \dots, N \quad (II-4)$$

onde $\gamma_{ab} = \frac{\partial X^\mu}{\partial V^a} \frac{\partial X^\mu}{\partial V^b}$ é a métrica induzida.

No caso da partícula puntiforme a variedade que es
tã sendo mergulhada no espaço tempo $\bar{e}$ unidimensional ($N=1$) isso
significa que os $\bar{I}$ ndices $a, b, \dots$ etc assumem apenas o valor 1 ,
temos então:

$$dS^2 = \gamma_{11} (dV^1)^2, \quad V^1 \in V$$

comparando com:

$$dS^2 = dX^\mu(\tau) dX^\mu(\tau) = \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \right)^2 (d\tau)^2,$$

temos a identificação:

$$V^1 = \tau \tag{II-5}$$

$$\gamma_{11} = \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \right)^2 = (\dot{X})^2$$

Voltando ao caso geral $\bar{e}$ interessante notar que se
a variedade V de N dimensões $\bar{e}$ localmente euclideana nã $\bar{e}$ difí
cil mostrar (apêndice A, seção A2) que o elemento de volume es-
calar sob reparametrizações de V , também chamadas de difeomor-
fismos em V , $\bar{e}$ dado por:

$$d\Omega = \sqrt{\det g_{ab}} \prod_{a=1}^N dV^a, \tag{II-6}$$

onde g_{ab} $\bar{e}$ o tensor métrico de V .

Para a métrica induzida temos: $d\Omega = \sqrt{\det \gamma_{ab}} \prod_{a=1}^N dV^a$.

Dessa forma, no caso da partícula puntiforme, usando-se a identificação (II-5) temos o elemento de volume escalar:

$$d\Omega = \sqrt{\det \gamma_{11}} dV^1 = \sqrt{\gamma_{11}} dV^1 = |\dot{X}| d\tau$$

Como estamos trabalhando no sistema de unidades em que $\hbar = c = 1$ o comprimento tem dimensão de inverso de massa, consequentemente a dimensão de massa de $d\Omega$ é -1 :

$$[d\Omega] = -1$$

Portanto se multiplicarmos $d\Omega$ por uma constante com dimensão de massa obteremos uma grandeza adimensional e evidentemente escalar por reparametrizações, se identificarmos essa constante com a própria massa m de uma certa partícula, com $m \neq 0$, a grandeza assim obtida é a própria ação A_1 (ver II-2):

$$A = m \int d\Omega = m \int |\dot{X}| d\tau = A_1$$

Vemos então que foi possível escrever a ação para a partícula puntiforme livre, partindo-se do elemento de volume escalar na variedade V dos parâmetros τ , $d\Omega$, que poderia ser chamado de elemento de comprimento já que a variedade V é unidimensional.

De maneira totalmente análoga, no caso da corda, que como já foi dito pode ser parametrizada no espaço-tempo $\mathbb{R}^d$ através de 2 parâmetros τ e σ .

$$X^\mu = X^\mu(\tau, \sigma) \quad \tau_i < \tau < \tau_f; \quad \sigma_i < \sigma < \sigma_f$$

onde

τ é o análogo do tempo-próprio

σ percorre a corda internamente de um extremo a outro.

Podemos também obter uma ação invariante por reparametrizações de σ e τ usando o conceito de elemento de volume escalar.

Para isso notemos que o par (τ, σ) pertence a uma variedade M bidimensional que será admitida localmente euclídea. Chamaremos as coordenadas em M de ζ^1 e ζ^2 com: $\zeta^1 = \tau$; $\zeta^2 = \sigma$.

Ao mergulharmos a variedade M em $\mathbb{R}^D$, temos a métrica induzida γ_{ab} :

$$dS^2 = dX^\mu(\zeta) dX^\mu(\zeta) = \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \zeta^a} \frac{\partial X^\mu}{\partial \zeta^b} \right) d\zeta^a d\zeta^b, \quad a, b = 1, 2,$$

$$dS^2 = \gamma_{ab} d\zeta^a d\zeta^b; \quad \gamma_{ab} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \zeta^a} \frac{\partial X^\mu}{\partial \zeta^b} \quad (\text{II-7})$$

A partir dessa métrica induzida podemos escrever o elemento de volume escalar em M : $d\Omega$, que pode ser chamado de elemento de área d^2A já que M é bidimensional, usando-se a definição geral dada em (II-6) com a métrica induzida γ_{ab} dada acima temos:

$$d^2A = d\Omega = \sqrt{\gamma} d\zeta^1 d\zeta^2; \quad \gamma = \det \gamma_{ab},$$

$$d^2A = (\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21})^{1/2} d\zeta^1 d\zeta^2,$$

reescrevendo em termo das variáveis τ, σ e usando (II-7) temos:

$$d^2A = \{(\dot{X})^2 (X')^2 - (\dot{X} \cdot X')^2\}^{1/2} d\tau d\sigma; \quad \begin{aligned} \dot{X}^\mu &= \partial X^\mu / \partial \tau \\ X^{\mu'} &= \partial X^\mu / \partial \sigma \end{aligned}$$

Generalizando-se a ação para a partícula puntiforme livre a ação para a corda livre deve ser proporcional a área da superfície varrida pela corda durante seu movimento no espaço-tempo assim:

$$S \propto \int_M d^2A$$

Como d^2A tem dimensão de área já que τ e σ são adimensionais então a constante de proporcionalidade deve ter dimensão de massa ao quadrado para que S seja adimensional, assim obtemos a conhecida ação de Nambu-Goto⁽⁷⁾ para a corda bosônica livre:

$$S_{NG} = \mu_0 \int_M d^2A = \mu_0 \int_M \sqrt{\gamma} d\sigma d\tau = \mu_0 \int_M \{(\dot{X})^2 (X')^2 - (\dot{X} \cdot X')^2\}^{1/2} d\tau d\sigma, \quad (\text{II-8})$$

com $[\mu_0] = 2$.

Por construção o elemento de área d^2A é escalar por reparametrizações de τ e σ e portanto, analogamente ao caso da partícula pontual, a ação de Nambu-Goto é invariante apenas por reparametrizações que mantenham fixos os limites de in

tegração:

$$(\zeta^1, \zeta^2) \rightarrow (\zeta^{1'}, \zeta^{2'})$$

tal que:

$$\begin{aligned} \zeta^{1'}(\tau_f) &= \tau_f ; \quad \zeta^{1'}(\tau_i) = \tau_i \\ \zeta^{2'}(\sigma_f) &= \sigma_f ; \quad \zeta^{2'}(\sigma_i) = \sigma_i \end{aligned} ; \quad \zeta^1 = \tau ; \quad \zeta^2 = \sigma.$$

Equações de Movimento da Corda

Agora que temos uma ação para a corda livre, podemos obter as equações de movimento para os D-campos $X^\mu(\tau, \sigma)$ que determinam a posição da corda no $\mathbb{R}^D$. Para isto basta impor que a variação funcional (δ) da ação seja nula:

$$\delta S_{NG} = 0$$

Para que as equações de movimento possam ser escritas numa forma bastante simples trabalharemos com a ação de Nambu-Goto escrita em função da métrica induzida γ_{ab} (ver II-8)

$$S_{NG} = \mu_0 \int_M \sqrt{\gamma} d^2\zeta = \int_M d^2\zeta L_{NG}, \quad d^2\zeta = d\zeta^1 d\zeta^2 = d\tau d\sigma$$

onde temos a densidade de lagrangeana: $L_{NG} = \mu_0 \sqrt{\gamma}$.

Com $\gamma = \det \gamma_{ab}$ e $\gamma_{ab} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \zeta^a} \frac{\partial X^\mu}{\partial \zeta^b} = \partial_a X^\mu \partial_b X^\mu$, temos:

$$\bar{\delta} S_{NG} = 0 = \int_M d^2 \zeta \left\{ \frac{\partial L_{NG}}{\partial (\partial_1 X^\mu)} \bar{\delta} (\partial_1 X^\mu) + \frac{\partial L_{NG}}{\partial (\partial_2 X^\mu)} \bar{\delta} (\partial_2 X^\mu) \right\}$$

Permutando $\bar{\delta}$ com ∂_f , integrando por partes e lembrando que a variação na forma funcional dos campos: $\bar{\delta} X^\mu$ é nula no instante inicial e no final:

$$\bar{\delta} X^\mu(\zeta^1 = \tau_i) = \bar{\delta} X^\mu(\zeta^1 = \tau_f) = 0$$

obtemos

$$\delta S_{NG} = \int_{\tau_i}^{\tau_f} \left\{ \frac{\partial L_{NG}}{\partial (\partial_2 X^\mu)} \bar{\delta} X^\mu \right\} \Big|_{\sigma_i}^{\sigma_f} d\zeta^1 - \int_M d^2 \zeta \left\{ \partial_f \left(\frac{\partial L_{NG}}{\partial (\partial_f X^\mu)} \right) \bar{\delta} X^\mu \right\} = 0$$

Como $\bar{\delta} X^\mu$ é arbitrário para $\zeta^1 \neq \tau_i$ ou τ_f , temos a equação de movimento:

$$\partial_f \left(\frac{\partial L_{NG}}{\partial (\partial_f X^\mu)} \right) = 0, \quad (II-9)$$

e a condição de contorno:

$$\left. \frac{\partial L_{NG}}{\partial (\partial_2 X^\mu)} \right|_{\sigma_i}^{\sigma_f} = 0 \quad (II-10)$$

Introduzindo-se a métrica induzida contravariante γ^{cd} através de:

$$\gamma^{cd} \gamma_{db} = \delta_b^c \quad (\text{II-11})$$

Podemos reescrever as equações II-9 e II-10 respectivamente (seção A1 - Apêndice A):

$$\partial_f (\sqrt{\gamma} \gamma^{if} \partial_i X^\mu) = 0 \quad (\text{II-12})$$

$$\sqrt{\gamma} \gamma^{i2} \partial_i X^\mu \Big|_{\sigma_i}^{\sigma_f} = \sqrt{\gamma} \gamma^{i2} \partial_i X^\mu \Big|_{\sigma_f}^{\sigma_i} - \sqrt{\gamma} \gamma^{i2} \partial_i X^\mu \Big|_{\sigma_i}^{\sigma_f} = 0 \quad (\text{II-13})$$

Comentários

1) Existem duas maneiras de satisfazer a condição de contorno (II-13), uma delas é impor condições sobre $\partial_i X^\mu$ tais que:

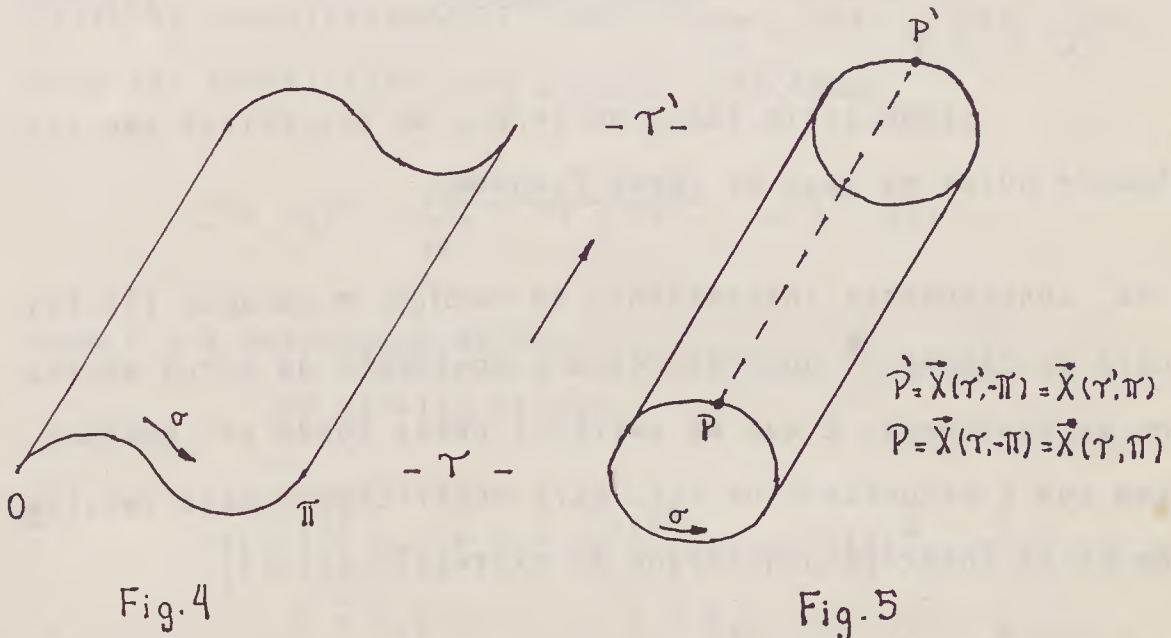
$$\sqrt{\gamma} \gamma^{i2} \partial_i X^\mu \Big|_{\sigma_f}^{\sigma_i} = \sqrt{\gamma} \gamma^{i2} \partial_i X^\mu \Big|_{\sigma_i}^{\sigma_f} = 0 \quad (\text{II-14})$$

Quando fazemos essa escolha, tomando-se $\sigma_i = 0$ e $\sigma_f = \pi$, estamos definindo a chamada corda aberta.

A 2ª maneira de satisfazer (II-13) é simplesmente impor que X^μ obedeça condições periódicas de contorno na variável σ e de período igual a $(\sigma_f - \sigma_i)$, quando impomos esse tipo de condição sobre X^μ e tomamos $\sigma_i = -\pi$ e $\sigma_f = \pi$ definimos a chamada corda fechada:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi) \quad (\text{II-15})$$

Impor condições de contorno periódicas equivale a unir os extremos da superfície bidimensional varrida pela corda no espaço-tempo:



Na figura 4 temos a superfície M varrida pela corda no espaço-tempo entre os instantes τ e τ' no caso em que X^μ não satisfaz condições periódicas de contorno (corda aberta).

Na figura 5 a superfície varrida pela corda tem a forma aproximada de uma casca cilíndrica e corresponde ao caso em que o campo $X^\mu(\tau, \sigma)$ obedece condições periódicas de contorno na variável σ (corda fechada).

Em geral, para a corda aberta e para a corda fechada estaremos supondo que o instante inicial do movimento da corda é $\tau_i = -\infty$ e o instante final é $\tau_f = +\infty$. Assim no caso da corda aberta (Fig. 3) a borda da superfície M é formada pelos pontos $X^\mu(\tau, 0)$ e $X^\mu(\tau, \pi)$ para $-\infty < \tau < +\infty$.

No caso da corda fechada (fig. 5) a superfície varrida pela corda entre $\tau = -\infty$ e $\tau = +\infty$ é parecida com uma casca cilíndrica que se estende de $X^\mu(\tau = -\infty, \sigma)$ a $X^\mu(\tau = +\infty, \sigma)$ e portanto não possui borda:

$$\partial M = \{\emptyset\} \quad (\text{corda fechada}) \quad (\text{II-16})$$

Sendo assim todos os termos de superfície são trivialmente nulos no caso da corda fechada.

2) Uma consequência interessante da condição de contorno (II-14) para os campos X^μ que descrevem o movimento da corda aberta no espaço-tempo, é que os extremos dessa corda se movimentam com a velocidade da luz, para verificarmos esse resultado basta tomar-se o quadrado da expressão (II-14):

$$(\sqrt{\gamma} \gamma^{i2} \partial_i X^\mu)(\sqrt{\gamma} \gamma^{j2} \partial_j X^\mu) \Big|_{\sigma_i, \sigma_f} = 0$$

A expressão acima pode ser reescrita usando-se :

$$\gamma^{cd} \gamma_{db} = \delta_b^c \text{ e } \gamma_{ij} = \partial_i X^\mu \partial_j X_\mu \text{ temos:}$$

$$\gamma \gamma^{22} \Big|_{\sigma_i, \sigma_f} = 0 ,$$

mas de (II-11) é fácil ver que:

$$\gamma^{22} = \frac{\gamma_{11}}{\gamma} .$$

Portanto temos:

$$\gamma_{\sigma_i, \sigma_f} \gamma^{22} \Big|_{\sigma_i, \sigma_f} = \gamma_{11} \Big|_{\sigma_i, \sigma_f} = (\partial_1 X^\mu)^2 \Big|_{\sigma_i, \sigma_f} = 0 \quad (\text{II-17})$$

Assim se identificarmos ζ^1 com o tempo próprio τ_p então $\partial_1 X^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \zeta^1}$ deve ser identificado com o vetor velocidade:

$$v^\mu = \partial_1 X^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau_p}, \quad v = (v^1 \dots v^{D-1}, ic) ,$$

onde c é a velocidade da luz.

De (II-17) temos:

$$(\partial_1 X^\mu)^2 \Big|_{\sigma = 0, \pi} = 0 = (v^\mu)^2 \Big|_{\sigma = 0, \pi} = (|\vec{v}|^2 - c^2) \Big|_{\sigma = 0, \pi} = 0$$

$$|\vec{v}| \Big|_{\sigma = 0, \pi} = c$$

onde $\vec{v} = (v^1 \dots v^{D-1})$

3) Como uma consequência de trabalharmos com uma variedade bi-dimensional (M), o fator $\sqrt{\gamma} \gamma^{ab}$ é invariante pela chamada transformação de Weyl, que deixa os pontos da variedade inalterados mas que muda por um fator escalar a métrica de M:

$$\gamma_{ab}(\zeta) \rightarrow f(\zeta) \gamma_{ab}(\zeta); \quad \gamma^{ab}(\zeta) \rightarrow f(\zeta)^{-1} \gamma^{ab}(\zeta); \quad \zeta^a \rightarrow \zeta^a$$

Sob essas transformações temos:

$$\sqrt{\gamma} \gamma^{ab} = (\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21})^{1/2} \gamma^{ab} \rightarrow f(\zeta)\sqrt{\gamma} \frac{1}{f(\zeta)} \gamma^{ab} = \sqrt{\gamma} \gamma^{ab}$$

Consequentemente a condição de contorno (II-12) e a equação de movimento (II-13) são invariantes pela transformação de Weyl, embora a ação de Nambu-Goto não o seja:

$$S_{NG} = \mu_0 \int \sqrt{\gamma} d^2\zeta \xrightarrow{\text{Weyl}} \mu_0 \int f(\zeta)\sqrt{\gamma} d^2\zeta \neq S_{NG}$$

III - UMA AÇÃO ALTERNATIVA PARA A CORDA LIVRE

Embora a ação de Nambu-Goto seja uma ação adequada para a corda livre, sua dependência nos campos físicos X^μ não é muito simples devido a presença da raiz quadrada

$$S_{NG} = \mu_0 \int d^2\zeta \{ (\dot{X})^2 (X')^2 - (\dot{X} \cdot X') \}^{1/2}$$

Assim a quantização da ação acima, tanto no formalismo de integrais de trajetória como no formalismo da quantização canônica, torna-se muito complicada. Até agora temos trabalhado com a métrica induzida γ_{ab} :

$$\gamma_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X^\mu$$

Essa métrica induzida pelo mergulho de M no espaço-tempo ($\mathbb{R}^D$) é explicitamente dependente dos campos X^μ . Entretanto através da introdução de uma métrica intrínseca a variedade M : g_{ab} , que é independente dos campos X^μ , podemos obter uma ação para a corda livre que é equivalente a ação de Nambu-Goto na concha de massa e que é quadrática nos campos X^μ o que facilita o processo de quantização.

Essa ação foi primeiramente obtida na década de 70^(9,10):

$$S = S[\partial_f X^\mu, g^{ab}] = \mu_0 \int_M d^2 \zeta \frac{1}{2} \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\mu; \quad g = \det g_{ab}$$

$$f, a, b = 1, 2 \quad (\text{III-1})$$

Na ação acima os campos $g^{ab}(\zeta)$ e $X^\mu(\zeta)$ são tratados como variáveis independentes e como está indicado a ação é um funcional dos campos $\partial_f X^\mu$ e da métrica intrínseca $g^{ab}(\zeta)$ que é a responsável agora pela definição de distância entre os pontos de M :

$$dS^2 = g_{ab}(\zeta) d\zeta^a d\zeta^b; \quad (\text{III-2})$$

$$g^{cd} g_{da} = \delta_a^c \quad (\text{III-3})$$

Analogamente a métrica induzida γ_{ab} , g_{ab} também é um tensor covariante de 2ª ordem sob reparametrizações em M e portanto se transforma da seguinte maneira:

$$(\zeta^1, \zeta^2) \rightarrow (\zeta^{1'}, \zeta^{2'}); \quad g'_{ab}(\zeta^{1'}, \zeta^{2'}) = \frac{\partial \zeta^c}{\partial \zeta^a} \frac{\partial \zeta^d}{\partial \zeta^b} g_{cd}(\zeta^1, \zeta^2)$$

Da mesma maneira que a ação de Nambu-Goto é invariante por reparametrizações de M que mantêm os extremos de integração em M fixos:

$$(\zeta^1, \zeta^2) \rightarrow (\zeta^{1'}, \zeta^{2'})$$

tal que:

$$\zeta^{1'}(\tau_f) = \tau_f; \quad \zeta^{1'}(\tau_i) = \tau_i,$$

$$\zeta^{2'}(\sigma_f) = \sigma_f; \quad \zeta^{2'}(\sigma_i) = \sigma_i$$

o que equivale a invariância da borda de M : $\partial M' = \partial M$

A ação (III-1) também é invariante por tais transformações. Para verificarmos isso de uma maneira simples basta notar que para M localmente euclideana o elemento infinitesimal de volume ou de área, já que M é bidimensional, escalar por reparametrizações pode ser obtido da definição geral (II-6) para $N = 2$:

$$d\Omega = \sqrt{g} d\zeta^1 d\zeta^2, \quad g = \det g_{ab}$$

O carácter escalar de $d\Omega$ é dado por: $d\Omega'(\zeta') = d\Omega(\zeta)$.

Consequentemente como $g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\mu$ é também um escalar por reparametrizações, a ação S em (III-1) pode ser escrita a partir de uma medida escalar dU :

$$S = \int_M dU = \int_{\tau_i}^{\tau_f} \int_{\sigma_i}^{\sigma_f} dU ,$$

com

$$dU = \frac{\mu_0}{2} g^{ab}(\zeta) \partial_a X^\mu(\zeta) \partial_b X^\mu(\zeta) d\Omega(\zeta)$$

onde $\tau_i < \zeta^1 < \tau_f$; $\sigma_i < \zeta^2 < \sigma_f$.

Assim, num novo sistema de coordenadas $(\zeta^{1'}, \zeta^{2'})$:

$$\zeta^{1'} = \zeta^1 (\zeta^1, \zeta^2)$$

$$\zeta^{2'} = \zeta^2 (\zeta^1, \zeta^2)$$

temos:

$$S' = \int_{\tau_i'(\tau_i)}^{\tau_f'(\tau_f)} \int_{\sigma_i'(\sigma_i)}^{\sigma_f'(\sigma_f)} dU'(\zeta^{1'}, \zeta^{2'}) ,$$

Usando o carácter escalar de dU :

$$dU'(\zeta^{1'}, \zeta^{2'}) = dU(\zeta^1, \zeta^2) ,$$

admitindo-se que a reparametrização acima preserve a borda de M :

$$\left. \begin{aligned} \tau_f'(\tau_f) &= \tau_f ; \tau_i'(\tau_i) = \tau_i \\ \sigma_f'(\sigma_f) &= \sigma_f ; \sigma_i'(\sigma_i) = \sigma_i \end{aligned} \right\} \text{equivalente a: } \partial M' = \partial M$$

teremos:

$$S' = \int_{\tau_i}^{\tau_f} \int_{\sigma_i}^{\sigma_f} dU(\zeta^1, \zeta^2) = S$$

Assim a ação S introduzida em (III-1) é invariante por reparametrizações que preservem a borda da variedade M da mesma maneira que a ação de Nambu-Goto.

Entretanto a característica que confere realmente importância a ação S de (III-1) é sua equivalência com a ação de Nambu-Goto na concha de massa, para verificarmos essa equivalência basta usar o princípio variacional e obter-se as equações de movimento para os campos g_{ab} e X^μ lembrando que esses campos são a princípio variáveis independentes:

$$S = S[\partial_f X^\mu, g^{ab}] = \int_M d^2 \zeta L; L = \frac{\mu_0}{2} \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\mu \quad (\text{III-4})$$

Minimizando-se S temos:

$$\bar{\delta} S = \int_M d^2 \zeta \left\{ \frac{\partial L}{\partial (\partial_f X^\mu)} \bar{\delta} (\partial_f X^\mu) + \frac{\partial L}{\partial (g^{ab})} \bar{\delta} g^{ab} \right\} = 0 \quad (\text{III-5})$$

Neste ponto é interessante notar que a lagrangea-

na III-4 pode ser vista como a lagrangeana de interação de certos campos de "matéria" (X^μ) com o campo gravitacional em duas dimensões, representado pela métrica $g_{ab}(\tau)$. Isso significa⁽¹¹⁾ que a variação da lagrangeana acima com relação a métrica g^{ab} está ligada com o tensor energia-momento T_{ab} , através da seguinte equação:

$$\frac{1}{2} \sqrt{g} \cdot T_{ab} = \frac{\partial L}{\partial g^{ab}} \quad (\text{III-6})$$

Usando III-4 temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial (\partial_f X^\mu)} \bar{\delta}(\partial_f X^\mu) &= \mu_0 \sqrt{g} g^{fa} (\partial_a X^\mu) \partial_f (\bar{\delta} X^\mu) \\ &= \mu_0 \partial_f \{ \sqrt{g} g^{fa} \partial_a X^\mu \bar{\delta} X^\mu \} + \mu_0 (\partial_f \sqrt{g} g^{fa} \partial_a X^\mu) \bar{\delta} X^\mu \end{aligned}$$

Usando (III-6) e a expressão acima em (III-5), lembrando que $\delta X^\mu(\tau^1, \tau^2)$ é nulo nos instantes iniciais e finais e arbitrário para qualquer outro instante, da mesma maneira que g^{ab} . Temos as equações de movimento:

$$T_{ab} = 0, \quad (\text{III-7})$$

$$\partial_a (\sqrt{g} g^{ab} \partial_b X^\mu) = 0, \quad (\text{III-8})$$

e a condição de contorno:

$$\sqrt{g} g^{a2} \partial_a X^\mu \Big|_{\sigma_i}^{\sigma_f} = 0 \quad (\text{III-9})$$

A equação de movimento (III-7) que requer um tensor de energia-momento nulo pode ser reescrita usando-se (III-4) e (III-6) em termos dos campos da teoria (ver seção A1 - Apêndice A):

$$\gamma_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X^\mu ; \quad \gamma_{ab} - \frac{1}{2} g^{cd} g_{ab} \gamma_{cd} = 0 \quad (\text{III-10})$$

Como essa equação não envolve derivadas nos campos g_{ab} podemos dizer que esses campos são triviais do ponto de vista dinâmico, e assim observamos a equação acima como um vínculo para os campos g_{ab} (e g^{cd}) indicando que na concha de massa esses campos não são independentes dos campos de "matéria" X^μ . Como uma solução de (III-10) obtemos uma relação entre a métrica intrínseca g_{ab} e a métrica induzida γ_{ab} :

$$g_{ab} = f \gamma_{ab} ; \quad g^{ab} = \frac{1}{f} \gamma^{ab} \quad (\text{III-11})$$

onde $f(\zeta)$ é uma função qualquer escalar por reparametrizações. A presença desse fator f é uma indicação que o produto $g^{cd} g_{ab}$ é invariante por transformações de Weyl:

$$\zeta^a \rightarrow \zeta^a ; \quad g^{cd} \rightarrow \frac{1}{f} g^{cd} ; \quad g_{ab} \rightarrow f g_{ab}.$$

Na verdade a relação (III-11) é a responsável pela equivalência entre a ação de Nambu-Goto e ação S , que pode ser obtida diretamente da equivalência entre a lagrangeana L e a lagrangeana de Nambu-Goto L_{NG} na concha de massa:

$$L = \frac{\mu_0 \sqrt{g}}{2} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\mu ; \quad L_{NG} = \mu_0 \sqrt{\gamma}.$$

Usando $g_{ab} = f \gamma_{ab}$ na lagrangeana L temos:

$$\begin{aligned} L &= \frac{\mu_0}{2} \{(f)^2 (\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21})\}^{1/2} \frac{1}{f} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\mu = \\ &= \frac{\mu_0}{2} \sqrt{\gamma} \gamma^{ab} \gamma_{ab} = \mu_0 \sqrt{\gamma} = L_{NG}. \end{aligned}$$

A equivalência de 'S' com a ação de Nambu-Goto na concha de massa, verificada acima, e a dependência quadrática nos campos X^μ são as principais razões para utilizarmos daqui para frente a ação S dada em (III-1) como a ação adequada para a corda livre. Poderíamos ainda dizer que essa ação nos permitirá traçar um paralelo entre a teoria de cordas e uma teoria de gauge usual com os campos g_{ab} desempenhando o papel, num certo sentido, de campos de gauge da teoria já que, como veremos posteriormente, esse campo (g_{ab}) possui graus de liberdade espúrios que serão separados a partir de um processo do tipo fixação de gauge analogamente ao que se faz com um campo de gauge usual como por exemplo o campo eletromagnético.

É importante salientar que embora as duas ações (S e S_{NG}) sejam equivalentes na concha de massa, pouco podemos dizer sobre essa equivalência fora da concha de massa e como no processo de quantização não trabalhamos somente na concha de massa é de se esperar que as duas ações S e S_{NG} levem a teorias diferentes, do ponto de vista quântico.

Uma diferença evidente entre as ações S e S_{NG} fora da concha de massa está na maneira pela qual essas ações se comportam sob transformação de Weyl.

Já vimos que sob transformações de Weyl da métrica induzida γ_{ab} :

$$\gamma_{ab} \rightarrow f \gamma_{ab} \quad ; \quad \gamma^{ab} \rightarrow 1/f \gamma^{ab} \quad ; \quad \zeta^a \rightarrow \zeta^a ,$$

onde $f(\zeta)$ é uma função escalar, a ação de Nambu-Goto não era invariante:

$$S_{NG} = \mu_0 \int \sqrt{\gamma} d^2\zeta \rightarrow \mu_0 \int f \sqrt{\gamma} d^2\zeta$$

Entretanto facilmente se verifica que a ação S :

$$S = \frac{\mu_0}{2} \int d^2\zeta \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\mu$$

é invariante sob transformações de Weyl da métrica intrínseca:

$$g_{ab} \rightarrow f g_{ab} \quad ; \quad g^{ab} \rightarrow 1/f g^{ab} \quad ; \quad \zeta^a \rightarrow \zeta^a$$

Uma consequência interessante da invariância de S sob as transformações de Weyl acima é que o traço do tensor energia-momento é nulo mesmo fora da concha de massa (ver seção A2 - apêndice A):

$$T^a_a = 0 \quad (III-12)$$

O mesmo não pode ser dito sobre o traço do tensor energia-momento associado com a métrica induzida γ_{ab} , no caso da ação de Nambu-Goto:

$$\frac{\sqrt{\gamma}}{2} T_{cd}^{(NG)} = \frac{\partial L_{NG}}{\partial \gamma^{cd}} \quad L_{NG} = \mu_0 \sqrt{\gamma}$$

É interessante notar que a anulação do traço do tensor energia-momento (III-12) é um resultado clássico. Ao quantizarmos a teoria obteremos $T_a^a \neq 0$, ou seja, a simetria de Weyl clássica é quebrada pelo processo de quantização e está caracterizada a existência da anomalia de Weyl. Como a ação de Nambu-Goto não tem tal simetria, fora da concha de massa, $(T_a^{(NG)})^a \neq 0$ não tem sentido falarmos numa anomalia de Weyl.

Portanto como previsto anteriormente o fato das duas ações S e S_{NG} possuírem certas características não equivalentes fora da concha de massa, por exemplo a anulação do traço do tensor energia-momento, leva a características quânticas diferentes para as duas ações S e S_{NG} , por exemplo a anomalia de Weyl.

IV - REPARAMETRIZAÇÕES INFINITESIMAIS

De agora em diante esqueceremos por completo a ação de Nambu-Goto e trabalharemos apenas com a ação S introduzida na seção anterior, pelas razões que já foram apresentadas.

Talvez a característica mais interessante da teoria de cordas é a sua invariância por quaisquer reparametrizações dos parâmetros σ (ou ζ^2) e τ (ou ζ^1) que preservem a borda

da variedade bidimensional M. Como vimos na seção anterior a ação S é invariante por tais reparametrizações:

$$S = \frac{\mu_0}{2} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau^1 \int_{\sigma_i}^{\sigma_f} d\tau^2 \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\mu ;$$

$$\tau^1 = \tau; \quad \tau^2 = \sigma. \quad (\text{IV-1})$$

com:

$$\tau^1 \rightarrow \tau^{1'} = \tau^{1'}(\tau^1, \tau^2)$$

$$\tau^2 \rightarrow \tau^{2'} = \tau^{2'}(\tau^1, \tau^2) \quad (\text{IV-2})$$

tais que:

$$\tau_f^1(\tau_f) = \tau_f ; \quad \tau_i^1(\tau_i) = \tau_i$$

$$(\text{IV-3})$$

$$\sigma_f^1(\sigma_f) = \sigma_f ; \quad \sigma_i^1(\sigma_i) = \sigma_i$$

e

$$X^{\mu'}(\tau^{1'}, \tau^{2'}) = X^\mu(\tau^1, \tau^2) \quad (\text{tensor de ordem 0, escalar})$$

$$(\text{IV-4})$$

$$g'_{ab}(\tau^{1'}, \tau^{2'}) = \frac{\partial \tau^c}{\partial \tau^{a'}} \frac{\partial \tau^d}{\partial \tau^{b'}} g_{cd}(\tau^1, \tau^2) \quad (\text{tensor covariante de } 2^{\text{a}} \text{ ordem})$$

$$(\text{IV-5})$$

tinhamos:

$$S' = S$$

É evidente que se a ação S é invariante pelas reparametrizações gerais (IV-2) sujeitas a condição (IV-3) então S também será invariante por um subconjunto dessas reparametrizações sujeitas a mesma condição de invariância de borda (IV-3). O subconjunto que estamos interessados é o das reparametrizações infinitesimais:

$$\zeta^a \rightarrow \zeta^{a'}(\zeta^1, \zeta^2) = \zeta^a + \epsilon^a(\zeta^1, \zeta^2) \quad a = 1, 2 \quad (\text{IV-6})$$

Onde os ϵ^a são os parâmetros que determinam unicamente a reparametrização infinitesimal das coordenadas ζ^a para as novas $\zeta^{a'}$, esses parâmetros assumem valores diferentes em cada ponto da variedade M , por isso chamamos as transformações (IV-6) de reparametrizações infinitesimais locais. Estudando-se essas reparametrizações nas bordas da variedade M obtemos certas condições de borda para os parâmetros ϵ^a de tal maneira que essas reparametrizações deixem a borda de M (∂M) invariante, IV-6 em ∂M fica:

$$\tau_i'(f) = \tau_i(f) + \epsilon^1(\tau_i(f), \sigma) \quad \sigma_i < \zeta^2 < \sigma_f$$

$$\sigma_i'(f) = \sigma_i(f) + \epsilon^2(\tau, \sigma_i(f)) \quad \tau_i < \zeta^1 < \tau_f$$

Em geral estaremos interessados em $\tau_i = -\infty$ e $\tau_f = +\infty$ assim da expressão acima, lembrando que ϵ^1 é finito, obtemos:

$$\tau_i' = -\infty \text{ e } \tau_f' = +\infty, \text{ ou seja, } \tau_i'(f) = \tau_i(f)$$

Portanto para que ∂M seja preservada pelas reparametrizações (IV-6) é preciso apenas que $\sigma'_i(f) = \sigma_i(f)$ (ver IV-3) isso significa que devemos ter a condição:

$$\epsilon^2(\tau, \sigma_i(f)) = 0 \quad (\text{IV-7})$$

Assim a ação S em IV-1 deve ser invariante pelas reparametrizações (IV-6) sujeitas a condição de borda acima.

As reparametrizações infinitesimais tem um papel muito importante na teoria de cordas. A razão é que um estudo desse tipo de transformação, vizinha e conexa a transformação identidade (ver IV-6), nos dará com certeza informações sobre os geradores infinitesimais das reparametrizações, chamados de operadores de Virasoro, esses operadores são elementos de uma certa álgebra e são usados na teoria quântica de cordas no processo de escolha dos estados físicos da teoria⁽¹⁾. Nesta tese, em particular, não usaremos os operadores de Virasoro explicitamente no processo de escolha do sub-espço de estados físicos da teoria, pois para esse fim usaremos o operador de B.R.S.T. a ser introduzido no capítulo 2 e que é o gerador das transformações de B.R.S.T., que estão diretamente relacionadas com as reparametrizações infinitesimais, assim vemos que de qualquer maneira essas reparametrizações são fundamentais no estudo da Teoria Quântica de cordas. Na verdade não é difícil ver que os operadores de Virasoro estão embutidos no Operador de B.R.S.T. (12,13).

Por esta razão dedicarei o restante deste capítulo a um estudo detalhado das transformações sob as reparametrizações.

trizações infinitesimais IV-6, de várias quantidades importantes na teoria de cordas.

A partir da lei de transformação dos campos X^μ e g_{ab} dadas em IV-4 e IV-5 podemos obter, trabalhando até 1.^a ordem nos parâmetros ϵ^a (ver seção A3 - apêndice A), as seguintes leis de transformação sob reparametrizações (IV-6):

$$g'_{ab}(\zeta') - g_{ab}(\zeta) = \delta g_{ab} = - \{ (\partial_a \epsilon^c) g_{cb} + (\partial_b \epsilon^c) g_{ac} \} \quad (\text{IV-8})$$

$$X'^\mu(\zeta') - X^\mu(\zeta) = \delta X^\mu = 0 \quad (\text{IV-9})$$

Como já está indicado, as fórmulas acima dão conta da variação total dos campos g_{ab} e X^μ perante reparametrizações infinitesimais em M. Essa variação total $\bar{\delta}$ é composta de duas partes, uma parte $\bar{\delta}$ é devida a variação da forma funcional dos campos ($\bar{\delta}$) com o argumento mantido fixo, a outra parte vem da variação do argumento (δ^A) com a forma funcional dos campos fixa:

$$\delta = \bar{\delta} + \delta^A \quad (\text{IV-10})$$

A variação dos campos devido a variação no argumento (δ^A) é a mesma para todos os campos não importando o carácter tensorial destes e pode ser calculada de maneira bastante simples por exemplo, seja $\phi(\zeta)$ um campo qualquer:

Com $\zeta^{a'} = \zeta^a + \epsilon^a$, até a 1.^a ordem em ϵ^a temos:

$$\delta^A \phi = \phi(\zeta') - \phi(\zeta) = \phi(\zeta) + \varepsilon^a \partial_a \phi - \phi(\zeta)$$

$$\delta^A \phi = \varepsilon^a \partial_a \phi \quad (\text{IV-11})$$

Com relação a variação dos campos devido a mudança na dependência funcional destes em relação ao correspondente argumento, que é mantido fixo ($\bar{\delta}$), seu cálculo depende do carácter tensorial do campo em questão, como pode ser visto de (IV-10) de onde deduzimos que a variação funcional ($\bar{\delta}$) corresponde a diferença entre a variação total (δ) e a variação no argumento (δ^A):

$$\bar{\delta} = \delta - \delta^A \quad (\text{IV-12})$$

Assim, embora $\delta^A \phi$ não dependa do carácter tensorial de ϕ , não podemos dizer o mesmo da variação total $\delta \phi$, basta olhar as fórmulas IV-8 e IV-9 para ver que a variação total de um escalar (tensor de ordem 0) como X^μ é bem diferente da variação total de um tensor de 2ª ordem como g_{ab} .

Em analogia com as teorias de gauge usuais (Q.E.D, Q.C.D, etc) onde a transformação de gauge muda somente a forma funcional dos campos, mantendo inalterados seus argumentos, podemos definir uma espécie de transformação de gauge para os campos da corda (X^μ e g_{ab}) usando-se a variação $\bar{\delta}$:

$$\delta^{\text{Gauge}} X^\mu = \bar{\delta} X^\mu$$

$$\delta^{\text{Gauge}} g_{ab} = \bar{\delta} g_{ab}$$

Embora essa definição não seja imprescindível, ela será utilizada no capítulo 2 ao introduzirmos a transformação de B.R.S.T. para os campos da corda.

A partir da variação total (δ) dos campos X^μ e g_{ab} (ver IV-8 e IV-9) e a variação devido a mudança no argumento (δ^A), dada em (IV-11), podemos obter explicitamente a variação funcional $\bar{\delta}$ usando IV-12.

No caso de X^μ :

$$\bar{\delta}X^\mu = \delta X^\mu - \delta^A X^\mu = 0 - \epsilon^a \partial_a X^\mu,$$

assim:

$$\bar{\delta}X^\mu = - \epsilon^a \partial_a X^\mu \quad (\text{IV-13})$$

Analogamente para g_{ab} (ver seção A3 - apêndice A) após alguma álgebra obtém-se:

$$\bar{\delta}g_{ab} = - (\nabla_a \epsilon_b + \nabla_b \epsilon_a) \quad (\text{IV-14})$$

∇_a representando a derivada covariante :

$$\nabla_c U_d = \partial_c U_d - \Gamma_{cd}^a U_a \quad (\text{IV-15})$$

$$\nabla_c U^d = \partial_c U^d + \Gamma_{ca}^d U^a, \quad (\text{IV-16})$$

com Γ_{ab}^d sendo os símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{ab}^d = \frac{1}{2} g^{dc} (\partial_a g_{cb} + \partial_b g_{ac} - \partial_c g_{ab}) \quad (\text{IV-17})$$

Ao trabalharmos com a teoria de cordas como uma teoria de gauge, veremos que o campo g_{ab} desempenhará o papel de campo de gauge da teoria, no sentido que g_{ab} possui graus de liberdade espúrios e que serão eliminados através de equações de vínculo como acontece com os campos de gauge usuais : como por exemplo o campo eletromagnético $A_\mu(x)$ que possui dois graus de liberdade não físicos que são eliminados no processo de fixação de Gauge.

No nosso caso como g_{ab} é um tensor simétrico temos inicialmente três graus de liberdade: g_{11} , g_{21} , g_{22} , mas como vimos em IV-14, através de uma reparametrização caracterizada por dois parâmetros independentes ϵ^1 e ϵ^2 obtemos uma nova forma funcional para o tensor métrico g_{ab} :

$$g'_{ab}(\zeta) = g_{ab}(\zeta) + \delta g_{ab}(\zeta)$$

$$g'_{ab}(\zeta) = g_{ab}(\zeta) - (\nabla_a \epsilon_b + \nabla_b \epsilon_a) \quad (\text{IV-18})$$

Embora a demonstração seja não trivial⁽¹⁴⁾ é natural esperar que sempre seja possível determinar os parâmetros ϵ^1 e ϵ^2 de tal maneira que a reparametrização acima elimine dois graus de liberdade do tensor g_{ab} . Mostra-se ainda que a escolha de ϵ^1 e ϵ^2 pode ser tal que g_{ab} possa ser escrito na forma:

$$g_{ab} = \rho \delta_{ab} \quad , \quad (\text{IV-19})$$

onde ρ é o chamado fator conforme, e representa o único grau de liberdade restante em g_{ab} após a reparametrização IV-18

Um espaço com uma métrica que tem a forma IV-19 é chamado de conformalmente chato.

Do ponto de vista de Teoria de Gauge veremos que a obtenção da forma (IV-19) para o tensor g_{ab} corresponderá a uma fixação de gauge (gauge conforme).

Tranformações Conformes

É interessante notar que a escolha dos parâmetros ϵ^1 e ϵ^2 que nos possibilitou escrever g_{ab} na forma conformalmente chata (IV-19) não é unívoca, ou seja, após a fixação do gauge conforme temos uma simetria residual. Isto significa que existe ainda um conjunto de reparametrizações capaz de manter o tensor métrico g_{ab} com a forma dada em IV-19. Para conhecermos esse conjunto de reparametrizações residuais é interessante estudarmos a variação da forma funcional da métrica g_{ab} em torno do gauge conforme (IV-19), antes disso é conveniente reescrevermos o gauge conforme (IV-19):

$$\text{Com } \rho = e^\phi, \text{ temos } g_{ab} = e^\phi \delta_{ab}$$

onde ϕ é uma função qualquer, escalar por reparametrizações.

Usando (IV-14) temos a variação infinitesimal total na forma de g_{ab} em torno do gauge acima:

$$\delta g_{ab} = \delta(e^\phi \delta_{ab}) - (\nabla_a \epsilon_b + \nabla_b \epsilon_a)$$

$$\bar{\delta} g_{ab} = \bar{\delta} \phi g_{ab} - (\nabla_a \epsilon_b + \nabla_b \epsilon_a)$$

O novo tensor métrico g'_{ab} é dado então por:

$$g'_{ab} = g_{ab} + \bar{\delta} g_{ab}$$

$$g'_{ab} = (1 + \bar{\delta} \phi) g_{ab} - (\nabla_a \epsilon_b + \nabla_b \epsilon_a).$$

Portanto para que o novo tensor g'_{ab} tenha a mesma forma conformalmente chata de g_{ab} :

$$g'_{ab} = \rho' \delta_{ab},$$

onde ρ' é um escalar, é suficiente que os parâmetros ϵ^a satisfaçam a seguinte equação⁽¹⁵⁾:

$$-(\nabla_a \epsilon_b + \nabla_b \epsilon_a) = f g_{ab}, \quad (\text{IV-20})$$

onde f é uma função escalar qualquer.

Assim o conjunto de reparametrizações que mantem a forma do gauge conforme é determinado pelas soluções $\epsilon_a(\zeta^1, \zeta^2)$ da equação IV-20.

Lembrando que $g^{ab} g_{ab} = 2$ a equação IV-20 contraída com g^{ab} determina f em função de ϵ^a :

$$g^{ab} \{-(\nabla_a \epsilon_b + \nabla_b \epsilon_a)\} = g^{ab} g_{ab} f$$

e assim:

$$f = - \nabla^c \epsilon_c .$$

Substituindo f de volta em IV-20 temos a equação diferencial para ϵ^a :

$$\nabla_a \epsilon_b + \nabla_b \epsilon_a - (\nabla^c \epsilon_c) g_{ab} = 0$$

É fácil ver que essa equação (seção A4 - Apêndice A) é equivalente as condições de Cauchy-Riemann de analiticidade:

$$\partial_2 \epsilon^1 = - \partial_1 \epsilon^2 ; \quad \partial_1 \epsilon^1 = \partial_2 \epsilon^2 .$$

Ou introduzindo-se as variáveis complexas (seção A4 - Apêndice A) z e $\bar{z}$:

$$z = \zeta^1 + i \zeta^2 ; \quad \bar{z} = \zeta^1 - i \zeta^2$$

as condições de Cauchy-Riemann podem ser reescritas:

$$\partial_{\bar{z}} \epsilon^z(z, z) = 0 , \quad (IV-21)$$

$$\text{onde } \epsilon^z(z, \bar{z}) = \epsilon^1(z, \bar{z}) + i \epsilon^2(z, \bar{z})$$

A condição IV-21 indica que ϵ^z é uma função analítica de z , portanto o conjunto de reparametrizações que mantém a forma do gauge conforme, também chamadas de transformações conformes, é formado por todas as reparametrizações analíticas da variedade bidimensional M dos parâmetros da corda.

Isso quer dizer que as transformações conformes são geradas por um conjunto infinito de geradores (operadores de Virasoro), pois o fato de ϵ^z ser uma função analítica de z indica que ϵ^z pode ser expandido numa série de potências com infinitos termos onde cada coeficiente dessa série corresponde a um parâmetro da transformação conforme que naturalmente deve ter o gerador correspondente, pois o número de parâmetros de um grupo, no caso o grupo conforme, é igual ao número de geradores do grupo.

É importante notar que muitas características importantes da Teoria de Cordas são consequências do fato que o grupo de simetria da teoria (Grupo Conforme) tem um número infinito de geradores que aliás é decorrência de trabalharmos com uma teoria bidimensional já que o grupo conforme em 4 (quatro) dimensões, por exemplo, possui apenas 15 (quinze) geradores.

Por último é interessante notar que em consequência da invariância da ação S da corda, sob reparametrizações infinitesimais que preservem a borda de M , a variação funcional de S , δS , também será nula por tais reparametrizações (ver Apêndice A - seção A5):

$$\delta S = 0 \quad (\text{IV-22})$$

Encarando-se então a variação funcional (δ) como sendo a variação por transformações de gauge (δ^G), vemos que a ação S é invariante de gauge e essa é uma das razões pelas quais achamos conveniente identificar δ com δ^G , essa identificação será usada no capítulo seguinte.

C A P Í T U L O 2

SIMETRIA DE B.R.S.T. E FIXAÇÃO DE GAUGE

I - INTRODUÇÃO

No processo de quantização de teorias de gauge é necessária a fixação de gauge para separarmos os graus de liberdade que são espúrios e obtermos um espaço de estados físicos com norma definida positiva. Para que esse processo de fixação de gauge seja implementado de uma maneira covariante, em geral precisamos introduzir novos campos na teoria chamados fantasmas e anti-fantasmas, que não são campos observados na natureza.

Na quantização via integrais de trajetória o aparecimento desses novos campos é bastante claro através do método de Faddeev-Popov (ref (16) - sec. 9.2) que é baseado exclusivamente na simetria de gauge da teoria.

O processo de fixação de gauge, em geral, adiciona dois novos termos a lagrangeana inicial (L_0) e passamos a trabalhar com uma lagrangeana total (L):

$$L = L_0 + L_{F.P.} + L_{G.F.}$$

$L_{F.P.}$ = termo de Faddeev-Popov que contém os novos campos chamados fantasmas e anti-fantasmas de Faddeev-Popov.

$L_{G.F.}$ = termo de fixação de gauge.

Foi notado por Becchi, Rouet e Stora em 1976⁽¹⁷⁾ que a lagrangeana total L é invariante por uma transformação nilpotente nos campos conhecida hoje em dia como transformação de B.R.S.T. (Becchi, Rouet, Stora e Tyutin). Posteriormente (1979) Kugo e Ojima⁽¹⁸⁾ provaram que a imposição do princípio de simetria de B.R.S.T. leva a uma boa definição dos estados físicos da teoria, ou seja, a norma desses estados é não negativa, o que equivale a dizer que a teoria é livre de fantasmas ("No ghost theorem").

Hoje em dia propõe-se⁽¹⁹⁾, veremos a seguir, que a simetria de B.R.S.T. seja usada como um princípio guia no processo covariante de fixação de gauge.

II - TRANSFORMAÇÕES DE B.R.S.T.

Inicialmente para apresentarmos as transformações de B.R.S.T. é interessante estudarmos o caso das teorias de gauge usuais que é o exemplo mais simples onde aparecem tais transformações. Além disso o resultado obtido aqui após a fixação de gauge, poderá ser comparado com o resultado obtido pelo método de Faddeev-Popov na ref. (16) - sec. 9.2.

No caso das teorias de gauge usuais (Q.E.D., Q.C.D., etc) baseando-se no princípio de simetria de gauge construímos uma lagrangeana (L_0) invariante por transformações de gauge (δ^G) e função dos campos de gauge (A_μ^a) e dos campos de matéria ($\psi, \phi, \dots$ etc):

$$L_0 = L_0(A_\mu^a, \psi, \phi, \dots) ; \quad a = 1, 2, \dots, N \quad \delta^G L_0 = 0 \quad , \quad (\text{II-1})$$

onde N é o número de geradores, $\{T_a\}$, do grupo de gauge da teoria. Esses geradores satisfazem as relações de comutação:

$$[T_a, T_b] = if_{ab}^c T_c \quad a, b, c = 1 \dots N$$

f_{ab}^c são as constantes de estrutura do grupo de gauge (G).

A cada gerador T_a associamos um parâmetro ϵ^a que em geral assume valores diferentes em diferentes pontos do espaço-tempo: $\epsilon^a = \epsilon^a(x)$. Esses parâmetros são números reais ($\epsilon^+ = \epsilon$) e bosônicos (comutantes).

Em geral, um elemento do grupo de gauge G é escrito na forma:

$$U_\epsilon(x) = \exp\{-i\epsilon^a(x)T_a\} \quad a = 1, 2, \dots, N.$$

Os campos de matéria normalmente estão na representação direta do grupo de gauge, assim sob uma transformação de gauge (U_ϵ) eles variam da seguinte maneira:

$$\psi'(x) = U_\epsilon \psi = \exp\{-i\epsilon^a(x)T_a\} \psi(x)$$

ou infinitesimalmente:

$$\psi' - \psi = \delta_\epsilon^G \psi = -i\epsilon^a(x)T_a \psi(x) \quad (\text{II-2})$$

Os campos de gauge (A_μ^a) estão na representação adjunta do grupo de gauge:

$$A'_\mu = U_\epsilon A_\mu U_\epsilon^{-1} - iU_\epsilon \partial_\mu U_\epsilon^{-1},$$

onde $A_\mu = A_\mu^a T_a$.

Infinitesimalmente temos a variação do campo de gauge proporcional a derivada covariante:

$$\delta^G A_\mu^a = (D_\mu \epsilon)^a = \partial_\mu \epsilon^a + f_{bc}^a A_\mu^b \epsilon^c \quad (\text{II-3})$$

Isso é tudo que precisamos saber sobre teorias de gauge usuais.

As transformações de B.R.S.T. (δ^B) podem ser definidas a partir das transformações de gauge (δ^G) de maneira direta, simplesmente escrevendo cada um dos parâmetros $\epsilon^a(x)$, como o produto de duas grandezas grassmannianas (λ e $c^a(x)$), por exemplo no caso de um campo de matéria ψ cuja transformação de gauge é dada em (II-2):

$$\delta^G \psi = -i \epsilon^a(x) T_a \psi$$

com

$$\epsilon^a(x) = \lambda c^a(x), \quad (\text{II-4})$$

temos a transformação de B.R.S.T.:

$$\delta^B \psi = -i \lambda c^a(x) T_a \psi.$$

Toda dependência local de $\epsilon^a(x)$ está nos campos $c^a(x)$ pois λ é uma constante. O carácter grassmanniano dos $c^a(x)$ e de λ é dado pelas relações:

$$\{c^a, c^b\} = c^a c^b + c^b c^a = 0, \{c^a, \lambda\} = 0, \{\lambda, \theta\} = 0, \dots \text{etc.}$$

onde θ é uma outra cte grassmanniana como λ .

Os campos $c^a(x)$ são definidos como hermiteanos :
 $(c^a)^+ = c^a$. Consequentemente para que os parâmetros $\epsilon^a(x)$ sejam hermiteanos é preciso que as constantes grassmannianas como λ sejam anti-hermiteanas: $\lambda^+ = -\lambda$

prova: $(\epsilon^a)^+ = (\lambda c^a)^+ = (c^a)^+ \lambda^+ = -\lambda^+ (c^a)^+ = -\lambda^+ c^a,$

apenas com $\lambda^+ = -\lambda$ temos:

$$(\epsilon^a)^+ = \lambda c^a = \epsilon^a$$

É importante notar que a lagrangeana L_0 , como resultado da sua invariância de gauge, $\delta_\epsilon^G L = 0$, é invariante por B.R.S.T.:

$$\delta_\epsilon^B L = \delta_{\epsilon=\lambda c}^G L = 0, \quad (\text{II-5})$$

A transformação de B.R.S.T. dos campos $c^a(x)$ é definida de tal modo que a transformação de qualquer campo (inclusive os $c^a(x)$) seja nilpotente*:

$$(\delta^B)^2 = 0$$

* Deve-se tomar o cuidado de a cada vez que aplicarmos uma transformação de B.R.S.T. usarmos uma cte. grassmanniana diferente: $\lambda, \theta, \beta, \dots$ etc.

Agora, através de suas transformações introduziremos mais $2N$ campos hermiteanos $\bar{c}^a$, B^a que serão úteis posteriormente no processo de fixação de gauge:

$$\delta^B \bar{c}^a(x) = i\lambda B^a(x) \quad (\text{II-6})$$

e como resultado da nilpotência: $\delta^B(\delta^B \bar{c}^a) = 0$, temos:

$$\delta^B B^a(x) = 0 \quad (\text{II-7})$$

os $\bar{c}^a(x)$ são grassmannianos:

$$\{\bar{c}^a, \lambda\} = \{\bar{c}^a, \bar{c}^b\} = \{\bar{c}^a, c^b\} = 0$$

Como a transformação de B.R.S.T. não muda o caráter bosônico (ou fermiônico) do campo transformado, o caráter dos campos $B^a(x)$ deve ser bosônico.

Agora então todos os campos que serão importantes no processo de fixação de gauge já têm a sua lei de transformação de B.R.S.T. bem definida, com exceção dos campos $c^a(x)$ cuja lei de transformação ($\delta^B c^a$) determina a nilpotência das transformações de B.R.S.T.. Na verdade no exemplo de fixação de gauge em que estamos interessados não é necessário conhecermos $\delta^B c^a$ e por essa razão é que essas transformações não serão dadas aqui.

Posteriormente verificaremos que a ação total obtida após a fixação de gauge possui simetria por B.R.S.T. como já havia sido notado por Becchi, Rouet e Stora. Portanto poderemos associar à transformação de B.R.S.T. uma carga conservada (Q_B) através do teorema de Noether. Essa carga conservada desempenha o papel de gerador da transformação. Isso nos permite definir de uma maneira compacta a transformação de B.R.S.T. dos vários campos que aparecem na teoria:

$$\delta^B \phi = \phi' - \phi = [i\lambda Q_B, \phi] = i(\lambda Q_B \phi - \phi \lambda Q_B), \quad (\text{II-8})$$

onde ϕ pode ser qualquer campo da teoria, inclusive os novos campos c^a , $\bar{c}^a$ e B^a introduzidos aqui.

Como já vimos, a transformação de B.R.S.T. não muda o caráter dos campos, portanto devido ao caráter grassmanniano de λ para que (II-8) seja uma legítima transformação de B.R.S.T. é preciso que Q_B tenha caráter fermiônico:

$$Q_B^2 = 0; \quad \{Q_B, \lambda\} = 0; \quad \{Q_B^+, \lambda^+\} = 0; \dots \text{etc.} \quad (\text{II-9})$$

É importante notar que as transformações físicas são aquelas que preservam a norma dos estados físicos, ou seja, o operador que representa uma transformação física (U) deve ser unitário:

$$U^+ = U^{-1} \quad (\text{II-10})$$

Para que a transformação definida em (II-8) seja

unitária é preciso que a carga de B.R.S.T. seja hermiteana:

$$Q_B^+ = Q_B$$

Verificamos esse resultado escrevendo a transformação infinitesimal (II-8) na forma de uma transformação finita. Notemos que devido a nilpotência da carga Q_B a transformação (II-8) é exatamente igual a seguinte transformação finita:

$$\phi' = \exp(i\lambda Q_B)\phi \exp(-i\lambda Q_B), \quad (\text{II-11})$$

ou

$$\phi' = U\phi U^{-1} \text{ com } U = \exp(i\lambda Q_B), U^{-1} = \exp(-i\lambda Q_B).$$

Impondo a unitariedade (II-10) e lembrando que λ^+ e Q_B^+ são números anti-comutantes e que λ é anti-hermiteana ($\lambda^+ = -\lambda$) obtemos a condição de hermiticidade (II-11):

$$U^+ = \exp(+i\lambda Q_B)^+ = \exp(-iQ_B^+\lambda^+) = \exp(-i\lambda Q_B^+) = U^{-1} \text{ se } Q_B^+ = Q_B.$$

Como esperado, as transformações definidas em (II-8) são nilpotentes:

$$\delta^B(\delta^B\phi) = [i\lambda'Q_B, [i\lambda Q_B, \phi]]$$

$$= - \underbrace{\lambda'Q_B\lambda Q_B\phi}_{(1)} + \underbrace{\lambda'Q_B\phi\lambda Q_B}_{(2)} + \underbrace{\lambda Q_B\phi\lambda'Q_B}_{(3)} - \underbrace{\lambda Q_B\lambda'Q_B\phi}_{(4)}$$

Embora não seja necessário podemos admitir por simplicidade que ϕ é bosônico:

$$[\phi, \lambda] = [\phi, \lambda'] = 0 ,$$

assim usando-se o carácter fermiônico de Q_B, λ e λ' é fácil ver que (1) e (4) são nulos e (2) cancela (3), obtendo-se a nilpotência:

$$(\delta^B)^2 = 0$$

Princípio de Simetria por B.R.S.T.

Definimos agora os estados físicos da teoria como sendo aqueles que são invariantes por transformações de B.R.S.T.:

$$U|fis\rangle = |fis\rangle = \exp(i\lambda Q_B)|fis\rangle$$

usando a nilpotência $Q_B^2 = 0$ temos:

$$U|fis\rangle = |fis\rangle = (1 + i\lambda Q_B)|fis\rangle.$$

Consequentemente devemos ter:

$$Q_B|fis\rangle = 0 \tag{II-12}$$

Esse é o chamado princípio de simetria por B.R.S.T.

suficientes para determinarmos a função G . Mas através do "an-satz" (II-14) se tivermos o conhecimento antecipado de um dos dois termos (L_{GF} ou L_{FP}) teremos uma idéia mais precisa sobre a função G .

Pensando dessa forma tentaremos obter G e consequentemente o termo de Faddeev-Popov (L_{FP}) a partir do conhecimento do termo de fixação de gauge (L_{GF}) que em geral é escrito como o produto de campos auxiliares (R^a) pelas funções que fixam o gauge (f^a):

$$L_{GF} = R^a f^a \quad a = 1, \dots, N,$$

onde N é o número de geradores do grupo de gauge.

As equações de movimento para os campos auxiliares R^a dão origem as condições de gauge.

$$\frac{\partial L_{GF}}{\partial R^a} = 0 \quad \text{implica em } f^a = 0$$

Portanto se identificarmos os campos R^a acima com os campos B^a obtidos da transformação de B.R.S.T. dos campos $\bar{c}^a$ (ver II-6) poderemos escrever o termo de fixação de gauge na seguinte forma:

$$\lambda L_{GF} = - i (\delta \bar{c}_a^B) f^a \quad (\text{II-15})$$

assim em (II-14) :

$$\lambda (L_{GF} + L_{FP}) = - i \delta B_G$$

$$\{-i(\delta^B \bar{c}^a) f^a + \lambda L_{FP}\} = -i\delta^B G$$

Comparando os dois lados somos levados a escrever:

$$G = \bar{c}^a f^a \quad (\text{II-16})$$

e

$$\lambda L_{FP} = -i\bar{c}^a (\delta^B f^a) \quad (\text{II-17})$$

A solução geral G dada acima pode ser aplicada para qualquer condição de gauge (f^a) que seja bosônica (comutante) e real (hermiteana), pois G deve ser grassmanniana e hermiteana como vimos em a) e c). Aplicando-se uma transformação de B.R.S.T. na expressão (II-14), devido a nilpotência, $(\delta^B)^2 = 0$, obtemos:

$$\delta^B L' = \delta^B (L_{GF} + L_{FP}) = 0$$

dessa forma, como a lagrangeana inicial L_0 é invariante por B.R.S.T. (ver II-5), a invariância da lagrangeana total L está assegurada:

$$\delta^B L = \delta^B (L_0 + L') = 0.$$

Essa é a simetria que Becchi, Rouet e Stora haviam notado em 1976⁽¹⁷⁾.

Exemplo de aplicação do "ansatz" (II-14)

Para compararmos com o resultado da refer. (16) usaremos as condições de gauge:

$$f^a = \partial^\mu A_\mu^a + \frac{1}{2} \alpha B^a = 0 \quad a = 1 \dots N ,$$

de II-15 e II-6 temos o termo de fixação de gauge:

$$\lambda L_{GF} = - i (\delta^{B\bar{C}^a}) f^a = \lambda B^a f^a$$

$$L_{GF} = B^a f^a ,$$

de II-17 e II-7 temos o termo de Faddeev-Popov:

$$\lambda L_{FP} = - i \bar{C}^a \delta^{B^a} f^a = - i \bar{C}^a \left(\partial^\mu \delta^{B^a} A_\mu^a + \frac{\alpha}{2} \delta^{B^a} B^a \right)$$

mas de II-3 e II-4 $\rightarrow \delta^{B^a} A_\mu^a = \lambda D_\mu c^a$, como $\lambda \bar{C}^a = - \bar{C}_a \lambda$

$$L_{FP} = i \bar{C}^a \partial^\mu (D_\mu c^a)$$

Consequentemente tem-se a lagrangeana total:

$$L = L_0 + i \bar{C}^a \partial^\mu (D_\mu c^a) + B^a \left(\partial^\mu A_\mu^a + \frac{\alpha}{2} B^a \right)$$

Usando a equação de movimento para B^a :

$$\frac{\partial L}{\partial B^a} = 0 \rightarrow B^a = - \frac{\partial^\mu A_\mu^a}{\alpha} ,$$

substituindo de volta na lagrangeana total obtemos:

$$L = L_0 + i\bar{c}^a \partial^\mu (D_\mu c^a) - \frac{1}{\alpha^2} (\partial^\mu A_\mu^a)^2$$

Esse é exatamente o mesmo resultado obtido na literatura (ver (16) - sect. 9.2) usando-se o método de Faddeev-Popov, basta fazer a identificação:

$i\bar{c}^a \longleftrightarrow$ anti-fantasma de Faddeev-Popov.

$c^a \longleftrightarrow$ fantasma de Faddeev-Popov.

Assim baseando-se no princípio de simetria de B. R.S.T. (que pressupõe a simetria de gauge) obtem-se o mesmo resultado do método de Faddeev-Popov que é baseado exclusivamente na simetria de gauge.

III - SIMETRIA DE B.R.S.T. NA CORDA BOSÔNICA

Introdução

Agora tentaremos aplicar o método descrito na seção II, na fixação do gauge conforme na corda bosônica livre. Para isso notemos que o procedimento básico na seção II foi o seguinte:

- a) Definimos as transformações de B.R.S.T. para os campos que aparecem na lagrangeana inicial L_0 como sendo as transformações de gauge desses campos, mas escrevendo o

parâmetro da transformação de gauge na forma:

$$\epsilon^a(x) = \lambda c^a(x)$$

onde os $c^a(x)$ são os fantasmas de Faddeev-Popov.

Enquanto que a lei de transformação dos $c^a(x)$ foi definida tal que se tenha a nilpotência:

$$(\delta^B)^2 = 0$$

Por último introduzimos novos campos $\bar{c}^a(x)$ e $B^a(x)$, que desempenharam papel de anti-fantasmas de Faddeev-Popov e campos auxiliares respectivamente.

b) Como a ação total era invariante por B.R.S.T.:

$$\delta^B S = \int d\Omega \delta^B L = 0 ,$$

introduziu-se uma carga conservada Q^B que foi usada na definição dos estados físicos da teoria a partir do princípio de simetria por B.R.S.T.

$$Q_B |fis\rangle = 0.$$

c) finalmente escrevemos:

$$\lambda L_{GF} = - i(\delta^B \bar{c}^a) f^a$$

$$\lambda L_{FP} = - i \bar{c}_a (\delta^B f^a)$$

onde $f^a = 0$ são as condições de gauge da teoria.

E assim o termo de fixação de gauge mais o de Faddeev-Popov ($L_{GF} + L_{FP}$) foi escrito a partir da transformação de B.R.S.T. de uma certa função G e adicionado a lagrangeana inicial L_0 sem alterar a física:

$$\langle \text{fis} | \delta^B G | \text{fis} \rangle = 0$$

Transformações de B.R.S.T. na Corda Bosônica

Seguindo então o procedimento do item anterior, a primeira coisa a fazer é definir-se a transformação de B.R.S.T. para os campos da corda (X^μ e g_{ab}) a partir das suas respectivas transformações de gauge. No caso da corda, como vimos no capítulo 1, a transformação de gauge (δ^G) pode ser identificada com a variação na forma funcional dos campos ($\bar{\delta}$) devido as reparametrizações de τ e σ . Assim temos (ver IV-13 e IV-14, capítulo 1):

$$\delta^G X^\mu = - \epsilon^a \partial_a X^\mu ; \quad \delta^G g_{ab} = - (\nabla_a \epsilon_b + \nabla_b \epsilon_a); \quad a, b = 1, 2$$

Por definição, escrevendo-se os parâmetros ϵ^a como o produto de duas grandezas grassmannianas:

$$\epsilon^a(\zeta) = \theta \eta^a(\zeta) \quad (\text{III-1})$$

tem-se as transformações de B.R.S.T. (δ^B) dos campos da corda:

$$\delta^B \chi^\mu = - \theta \eta^a \partial_a \chi^\mu \quad (\text{III-2})$$

$$\delta^B g_{ab} = - \theta (\nabla_a \eta_b + \nabla_b \eta_a) \quad (\text{III-3})$$

onde

θ é uma constante grassmanniana anti-hermiteana, como a constante λ do item anterior.

$\eta^a(\zeta)$ são campos grassmannianos hermiteanos análogos dos campos $c^a(x)$.

A transformação dos campos $\eta^a(\zeta)$ é determinada de tal maneira que a transformação de B.R.S.T. de qualquer campo seja nilpotente, $(\delta^B)^2 = 0$, com essa condição obtem-se:

$$\delta^B \eta^a = - \theta \eta^c \partial_c \eta^a \quad (\text{III-4})$$

Podemos verificar por exemplo que a transformação acima leva a nilpotência da transformação do campo χ^μ :

$$\delta^B \chi^\mu = - \theta \eta^a \partial_a \chi^\mu$$

$$\delta^B (\delta^B \chi^\mu) = - \theta (-\theta' \eta^c \partial_c \eta^a \partial_a \chi^\mu) - \theta \eta^a \partial_a (-\theta' \eta^b \partial_b \chi^\mu)$$

$$\text{com } \eta^a \theta' = - \theta' \eta^a$$

$$\delta^B (\delta^B \chi^\mu) = \theta \theta' \{ \eta^c (\partial_c \eta^a) \partial_a \chi^\mu - \eta^a (\partial_a \eta^b) \partial_b \chi^\mu \} - \theta \theta' \eta^a \eta^b \partial_a \partial_b \chi^\mu$$

lembrando que $\eta^a \eta^b = - \eta^b \eta^a$ temos:

$$\delta^B (\delta^B \chi^\mu) = 0$$

Analogamente mostra-se:

$$\delta^B(\delta^B \eta^a) = 0 \quad ; \quad \delta^B(\delta^B g_{ab}) = 0 .$$

A variação dos campos η^a (III-4) pode ser escrita numa forma explicitamente covariante:

$$\delta^B \eta^a = - \theta \eta^c (\partial_c \eta^a + r_{cd}^a \eta^d) = - \theta \eta^c \nabla_c \eta^a \quad (\text{III-5})$$

já que $r_{cd}^a = r_{dc}^a$ (vide (IV-17) - capítulo 1)

As relações (III-1), (III-2) e (III-5) mostram que o carácter tensorial dos campos X^μ , g_{ab} e η^a perante reparametrizações é preservado pelas transformações de B.R.S.T.

Como estamos interessados na fixação do gauge conforme:

$$g_{ab} = \rho \delta_{ab} ,$$

devemos ter duas condições de gauge:

$$\begin{aligned} g_{12} = g_{23} = f^1 = 0 \\ \frac{g_{11} - g_{22}}{2} = f^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{III-6})$$

Assim necessitaremos de dois campos auxiliares $B_1(\zeta)$, $B_2(\zeta)$ obtidos a partir da transformação de B.R.S.T. dos campos ξ_1 e ξ_2 que são os análogos para a corda dos campos $\bar{c}^a$ do item anterior, analogamente a (II-6) e (II-7) temos:

$$\delta^B \xi_a = i\theta B_a \quad * \quad (\text{III-7})$$

$$\delta^B B_a = 0 \quad (\text{III-8})$$

Agora que as transformações de B.R.S.T. dos vários campos da teoria já estão definidas, seguindo o procedimento do item anterior o próximo passo no processo de fixação de gauge é introduzirmos o gerador das transformações de B.R.S.T., Q_B , e definirmos os estados físicos da corda a partir do princípio de simetria por B.R.S.T.:

$$Q_B | \text{fis} \rangle = 0$$

Essa definição nos leva a escrever os termos de Faddeev-Popov (L_{FP}) e o de fixação de gauge (L_{GP}) a partir da transformação de B.R.S.T. de uma certa função G ("ansatz" II-14) de tal maneira que $L_{FP} + L_{GF}$ possa ser adicionado a lagrangeana inicial da corda sem que a física da teoria seja alterada ($\langle \text{fis} | \delta^B G | \text{fis} \rangle = 0$). Em analogia às equações II-16, II-15 e II-17, para a fixação do gauge conforme temos:

$$G = \xi_a f^a$$

* Apesar de ξ_a e B_a possuírem um índice inferior eles não se comportam como vetores covariantes sob reparametrizações, como veremos no apêndice C esses índices servem apenas para enumerar os graus de liberdade retirados na fixação do gauge conforme.

onde

$$f^1 = g_{12} = g_{21} \quad \text{e} \quad f^2 = \frac{g_{11} - g_{22}}{2}$$

com:

$$\theta L_{GF} = - i(\delta^B \xi_a) f^a \quad (\text{III-9})$$

$$\theta L_{FP} = - i\xi_a (\delta^B f^a) \quad (\text{III-10})$$

No capítulo 1 vimos que a ação para a corda bosônica:

$$S = \int_M d^2\zeta L \quad ; \quad L = \frac{\mu_0}{2} \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\mu$$

Além de ser invariante por reparametrizações da variedade M , era invariante pelas transformações funcionais $(\bar{\delta})$ nos campos X^μ e g_{ab} , $\bar{\delta}S = 0$, e ao associarmos a transformação $\bar{\delta}$ com a transformação de gauge (δ^G) vemos que S é invariante de gauge e como as transformações de B.R.S.T. são definidas a partir das transformações de gauge apenas reescrevendo o parâmetro de gauge: $\epsilon^a = \theta \eta^a$, S deve ser invariante por B.R.S.T.: $\delta^B S = 0$. Usando o "ansatz" (II-14) e a nilpotência $(\delta^B)^2 = 0$ temos $\delta^B(L_{GF} + L_{FP}) = 0$ e conseqüentemente a ação total (S_T) para a corda é invariante por B.R.S.T.*:

$$\delta^B S_T = \delta^B \left\{ S + \int d^2\zeta (L_{GF} + L_{FP}) \right\} = 0.$$

* Na verdade S_T é invariante apenas por transformações de B.R.S.T. que satisfazem certas condições de contorno. (Ver A5, A pêndice A).

Isso significa que o gerador Q_B dessas transformações é uma carga conservada.

A lei de transformação dos campos ξ_a está dada em III-7 e a dos vínculos f^a pode ser obtida a partir da lei de transformação do campo g_{ab} (III-3), assim já estaríamos em condição de escrever explicitamente os termos de Faddeev-Popov (L_{FP}) e o de fixação de gauge (L_{GF}) usando-se as prescrições III-10 e III-9 respectivamente. Tem-se então a ação total para a corda bosônica livre no gauge conforme:

$$S_T = \int d^2\zeta \left(\frac{\mu_0}{2} \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\mu + L_{FP} + L_{GF} \right)$$

Entretanto será mais conveniente ao estudo da anomalia de Weyl na corda bosônica, realizado no capítulo 3, trabalharmos com os seguintes campos:

$$\tilde{\chi}^\mu = g^{1/4} \chi^\mu \quad (\text{III-11})$$

$$\tilde{g}_{ab} = g^{-1/4} g_{ab} \quad (\text{III-12})$$

$$\tilde{g}^{ab} = g^{1/4} g^{ab}$$

$$\tilde{\eta}^c = \sqrt{g} \eta^c \quad (\text{III-13})$$

E os vínculos f^a (ver III-6) são reescritos:

$$\tilde{f}^1 = \tilde{g}_{12} = 0 \quad (\text{III-14})$$

$$\tilde{f}^2 = \frac{\tilde{g}_{11} - \tilde{g}_{22}}{2} = 0$$

Assim os termos de Faddeev-Popov e fixação de gauge (III-9 e III-10) ficam:

$$\theta L_{GF} = -i(\delta^B_{\xi_a})\tilde{f}^a \quad (III-15)$$

$$\theta L_{FP} = -i \xi_a (\delta^B \tilde{f}^a)$$

Usando a transformação dos campos g_{ab} , X^μ e n^c dadas em III-3, III-2 e III-4 respectivamente, obtemos (seção A3, Apêndice A):

$$\delta^B \tilde{X}^\mu = -\theta \{n^a \partial_a + \frac{(\partial_c n^c)}{2}\} \tilde{X}^\mu \quad (III-16)$$

$$\delta^B \tilde{n}^c = -\theta \{n^a \partial_a + \partial_a n^a\} \tilde{n}^c \quad (III-17)$$

$$\delta^B \tilde{g}_{ab} = -\theta \{ (n^c \partial_c - \frac{1}{2}(\partial_c n^c)) \tilde{g}_{ab} + (\partial_a n^c) \tilde{g}_{cb} + (\partial_b n^c) \tilde{g}_{ca} \} \quad (III-18)$$

A partir de (III-18) e (III-14) obtemos:

$$\delta^B \tilde{f}^1 = -\theta \{ (n^c \partial_c + \frac{1}{2}(\partial_c n^c)) \tilde{f}^1 + (\partial_2 n^1 - \partial_1 n^2) \tilde{f}^2 + (\partial_1 n^2 + \partial_2 n^1) V \} \quad (III-19)$$

$$\delta^B \tilde{f}^2 = -\theta \{ (n^c \partial_c + \frac{1}{2}(\partial_c n^c)) \tilde{f}^2 + (\partial_1 n^2 - \partial_2 n^1) \tilde{f}^1 + (\partial_1 n^1 - \partial_2 n^2) V \} \quad (III-20)$$

onde

$$\tilde{f}^1 = \tilde{g}_{12}; \quad \tilde{f}^2 = \frac{\tilde{g}_{11} - \tilde{g}_{22}}{2} \quad \text{e} \quad V = \frac{1}{2}(\tilde{g}_{11} + \tilde{g}_{22}) \quad (III-21)$$

Usando-se então essas expressões para $\delta^B \tilde{f}^a$ e a relação (III-7) para $\delta^B \xi_a$ podemos construir a ação total para a corda bosônica livre no gauge conforme a partir das prescrições (III-15) para L_{FP} e L_{GF} :

$$S_T = \int_M d^2\zeta (L + L_{GF} + L_{FP}) ,$$

como $\sqrt{g} g^{ab} = \sqrt{\tilde{g}} \tilde{g}^{ab}$ temos:

$$\begin{aligned} S_T = \int_M d^2\zeta \{ & \frac{\mu_0}{2} \sqrt{\tilde{g}} \tilde{g}^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\mu + B_a \tilde{f}^a + \\ & - i\xi_1 \{ (n^c \partial_c + \frac{1}{2}(\partial_c n^c)) \tilde{f}^1 + (\partial_2 n^1 - \partial_1 n^2) \tilde{f}^2 + (\partial_1 n^2 - \partial_2 n^1) V \} \\ & - i\xi_2 \{ (n^c \partial_c + \frac{1}{2}(\partial_c n^c)) \tilde{f}^2 + (\partial_1 n^2 - \partial_2 n^1) \tilde{f}^1 + (\partial_1 n^1 - \partial_2 n^2) V \} \end{aligned}$$

(III-22)

Essa ação corresponde exatamente a ação obtida por Fujikawa⁽²⁰⁾ fazendo-se a correspondência: $B_a = iB_a^{Fuj}$; $\xi_a = i\xi_a^{Fuj}$; $\theta = -i\theta^{Fuj}$.

Formalismo de Supercampos

Até aqui temos trabalhado com campos ϕ do tipo:

$$\phi = \phi(\zeta) = \phi(\zeta^1, \zeta^2) ; (\zeta^1, \zeta^2) \in M ,$$

onde M é a variedade bidimensional varrida pela corda no espaço tempo.

E temos tratado a transformação de B.R.S.T. como uma transformação interna, ou seja, que atua somente nos campos, deixando a variedade M inalterada. Entretanto de modo análogo ao que se faz em supersimetria⁽²¹⁾ pode-se estender a variedade M de tal maneira que a transformação de B.R.S.T. possa ser implementada na própria variedade⁽²²⁾.

Seja o produto de duas transformações de B.R.S.T.:

$$U(\lambda)U(\alpha) = e^{i\lambda Q_B} e^{i\alpha Q_B} = e^{i(\alpha+\lambda)Q_B} + \frac{[\lambda Q_B, \alpha Q_B]}{2} + \dots$$

Devido a nilpotência de Q_B só o 1º termo da série acima é não nulo e temos:

$$U(\lambda)U(\alpha) = U(\alpha+\lambda) \quad (\text{III-23})$$

onde λ e α são constantes grassmannianas anti-hermiteanas.

A expressão acima nos sugere estender a variedade M através da introdução de uma variável grassmanniana θ de maneira que a transformação de B.R.S.T. corresponda a uma translação em θ . Os campos da teoria passam a ser funções de ζ^1, ζ^2 e θ , aqueles que satisfazem a seguinte lei de transformação são chamados de supercampos:

$$e^{+i\lambda Q} \Phi(\zeta, \theta) e^{-i\lambda Q} = \Phi(\zeta, \theta + \lambda) = \Phi'(\zeta, \theta), \quad (\text{III-24})$$

ou seja, os supercampos são escalares por B.R.S.T. Essa lei de transformação é derivada de (II-11).

Como $\theta^2 = 0$, sem perda de generalidade temos a

$$\tilde{f}^1(\zeta, \theta) = \tilde{f}^1(\zeta) - \theta \left\{ (n^c \partial_c + \frac{1}{2}(\partial_c n^c)) \tilde{f}^1 + (\partial_2 n^1 - \partial_1 n^2) \tilde{f}^2 + (\partial_1 n^2 + \partial_2 n^1) V(\zeta) \right\}$$

$$\tilde{f}^2(\zeta, \theta) = \tilde{f}^2(\zeta) - \theta \left\{ (n^c \partial_c + \frac{1}{2}(\partial_c n^c)) \tilde{f}^2 + (\partial_1 n^2 - \partial_2 n^1) \tilde{f}^1 + (\partial_1 n^1 - \partial_2 n^2) V(\zeta) \right\}$$

(III-30)

$$\xi_a(\zeta, \theta) = \xi_a(\zeta) + i\theta B_a$$

$$\text{onde } V = \frac{1}{2}(\tilde{g}_{11} + \tilde{g}_{22}) \text{ , } \tilde{f}^1 = \tilde{g}_{12} \text{ ; } \tilde{f}^2 = \frac{\tilde{g}_{11} - \tilde{g}_{22}}{2}$$

É fácil ver que o produto de dois supercampos é um supercampo:

$$\text{seja } \Phi_3(\zeta, \theta) = \Phi_1(\zeta, \theta) \Phi_2(\zeta, \theta), \text{ como } e^{-i\lambda Q} e^{i\lambda Q} = 1$$

$$e^{i\lambda Q} \Phi_3(\zeta, \theta) e^{-i\lambda Q} = e^{i\lambda Q} \Phi_1(\zeta, \theta) e^{-i\lambda Q} e^{i\lambda Q} \Phi_2(\zeta, \theta) e^{-i\lambda Q}$$

usando a definição (III-26)

$$\Phi_3'(\zeta, \theta) = \Phi_1(\zeta, \theta + \lambda) \Phi_2(\zeta, \theta + \lambda) = \Phi_1'(\zeta, \theta) \Phi_2'(\zeta, \theta)$$

$$\Phi_3'(\zeta, \theta) = \Phi_3(\zeta, \theta + \lambda)$$

Agora que estamos trabalhando no superespaço $(\zeta^1, \zeta^2, \theta)$ para obtermos a ação a partir da densidade de lagrangeana, além de integrarmos em ζ^1 e ζ^2 devemos integrar em θ . Usando a integral de Berezin:

$$\int d\theta \theta = 1 \text{ ; } \int d\theta = 0$$

Da expansão (III-25) temos:

$$\int d\theta \Phi(\zeta, \theta) = \int d\theta \cancel{\Phi(\zeta, 0)}^0 + \int d\theta \theta \psi(\zeta) = \psi(\zeta) ,$$

assim de (III-27) tem-se:

$$\theta \int d\theta \Phi(\zeta, \theta) = \theta \psi = \delta^B \Phi(\zeta, 0)$$

Comparando-se essa expressão com (ver III-15):

$$\theta(L_{GF} + L_{FP}) = -i\delta^B(\xi_a(\zeta)\tilde{f}^a(\zeta)),$$

podemos escrever:

$$L_{GF} + L_{FP} = -i \int d\theta \xi_a(\zeta, \theta) \tilde{f}^a(\zeta, \theta) \quad (\text{III-31})$$

Com essa prescrição, a partir dos supercampos dados em (III-30) obtem-se⁽²⁰⁾ exatamente os mesmos resultados para L_{FP} e L_{GF} obtidos anteriormente sem o uso de supercampos.

A ação invariante por B.R.S.T, III - 22, será usada no próximo capítulo no cálculo da anomalia de Weyl na corda.

C A P Í T U L O 3

O MÉTODO DE FUJIKAWA

I - INTRODUÇÃO

Em geral uma teoria classicamente possui várias simetrias e a cada uma dessas simetrias associamos uma corrente de Noether que é conservada:

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = 0 \quad (I-1)$$

Entretanto ao quantizarmos a Teoria, em geral, verificamos que nem todas as simetrias clássicas podem conviver simultaneamente na teoria quântica. Somos obrigados a escolher aquelas simetrias que devem sobreviver em detrimento de outras.

Para as correntes de Noether associadas com aquelas simetrias que são quebradas no processo de quantização ou mais especificamente no processo de regularização da teoria quântica, temos agora uma equação um pouco diferente de (I-1):

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = A \quad (I-2)$$

A quantidade 'A' passa a ser denominada de anomalia associada com a simetria que foi quebrada.

As anomalias podem ser observadas nos gráficos de Feynmann da teoria, ordem a ordem. Nesse caso estamos fazendo uso explícito da teoria de perturbações na constante de acopla-

mento em questão. Entretanto esse não é o único método, as anomalias podem ser obtidas diretamente da integral de trajetória e o procedimento é o seguinte:

Inicialmente escolhemos as simetrias que devem ser mantidas na teoria quântica e definimos a medida da integral de trajetória de tal maneira que o funcional gerador obedeça essas simetrias. Feito isso calculamos a variação dessa medida devido a transformação da qual deseja-se obter a anomalia. Obtem-se então um fator Jacobiano, que em geral é infinito, no processo de regularização desse fator teremos a anomalia procurada.

O método de Fujikawa consiste basicamente em escrever-se o jacobiano mencionado acima na forma de uma exponencial de um fator infinito cuja regularização leva a anomalia.

Como uma introdução ao método de Fujikawa mostraremos seu uso no cálculo da anomalia quiral na Q.E.D. cujo resultado é bem conhecido. E depois de adquirida certa familiaridade o método será aplicado na obtenção da anomalia conforme, ou anomalia de Weyl, na corda bosônica fechada.

II - ANOMALIA QUIRAL NA Q.E.D.

Baseando-se na simetria do grupo de gauge $U(1)$ pode-se construir a lagrangeana da eletrodinâmica quântica (Q.E.D.):

$$L_{QED} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} ; \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (II-1)$$

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0, \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu.$$

$$\not{D} = D_\mu \gamma^\mu = \not{\partial} - iq\not{A} = \partial_\mu \gamma^\mu - iqA_\mu \gamma^\mu \quad (\text{II-2})$$

onde q é a carga do elétron que está representado pelo campo ψ , e A_μ é o campo eletromagnético, γ^μ são as matrizes de Dirac:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}; \quad g^{\mu\nu} = (+1, -1, -1, -1)$$

Com o produto escalar no espaço de Hilbert definido por: $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int d^4x \bar{\psi}_1 \psi_2$, temos a hermiticidade:

$$(i\not{D})^+ = (i\not{D}) \quad , \quad (\text{II-3})$$

Trabalharemos na representação em que $(\gamma^0)^+ = \gamma^0$ e $(\gamma^j)^+ = -\gamma^j$, $j = 1, 2, 3$, e temos ainda os resultados abaixo:

$$(\gamma_5)^+ = \gamma_5; \quad \gamma_5 = i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$$

$$\text{Tr} \gamma_5 = \text{Tr} \gamma_5 \not{A} \not{B} = 0 \quad (\text{II-4})$$

$$\text{Tr}(\gamma_5 \not{A} \not{B} \not{C} \not{D}) = 4i\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \quad (\text{II-5})$$

A integral de trajetória correspondente é dada por:

$$W = \int \mathcal{D}_\mu^F \prod_x \prod_{\alpha=0}^3 \mathcal{D}A_\alpha(x) \exp iS[A_\mu, \psi, \bar{\psi}]$$

onde

$$S = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{QED}}; \quad \mathcal{D}_\mu^F(x) = \prod_n \mathcal{D}\bar{\psi}(x) \mathcal{D}\psi(x)$$

Sejam as transformações quirais:

$$\begin{aligned}\psi' &= e^{i\alpha(x)\gamma_5} \psi \\ \bar{\psi}' &= \bar{\psi}(x) e^{i\alpha(x)\gamma_5}\end{aligned}\quad (\text{II-6})$$

infinitesimalmente:

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= \psi(x) + i\alpha(x)\gamma_5 \psi(x) \\ \bar{\psi}'(x) &= \bar{\psi}(x) + i\alpha(x) \bar{\psi}(x)\gamma_5\end{aligned}\quad (\text{II-7})$$

É fácil ver que no caso de massa nula, a ação S da Q.E.D além de ser invariante de Lorentz é também invariante por transformações quirais globais, ou seja, com $\alpha(x) = \text{cte.}$ em (II-6). Temos a corrente conservada associada a essa simetria:

$$j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi; \quad \partial_\mu j_5^\mu = 0 \quad (\text{II-8})$$

j_5^μ é a chamada corrente axial.

Mas para estudarmos as transformações quirais no formalismo de integrais de trajetória e obtermos a anomalia quiral, devemos trabalhar com transformações locais $\alpha = \alpha(x)$ como em (II-6), usando então (II-7) e (II-2) é fácil ver que a ação varia da seguinte maneira sob transformações quirais locais:

$$\begin{aligned}\delta L_{\text{Q.E.D}} &= -(\partial_\mu \alpha) \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi - \alpha 2im \bar{\psi}\gamma_5\psi \\ &= -\partial_\mu(\alpha(x)j_5^\mu) + \alpha(x)(\partial_\mu j_5^\mu - 2im \bar{\psi}\gamma_5\psi)\end{aligned}$$

Desprezando o termo de superfície temos:

$$\delta S = S' - S = \int d^4x \alpha(x) (\partial_\mu j_5^\mu - 2im \bar{\psi} \gamma_5 \psi) \quad (\text{II-9})$$

Usando o método de Fujikawa⁽²³⁾ mostra-se que sob essas transformações quirais locais a medida da integral de trajetória sofre a seguinte variação:

$$\mathcal{D}'_\mu = \mathcal{D}_\mu \prod_x \prod_{\alpha=0}^3 \mathcal{D}A'_\alpha(x) = \mathcal{D}_\mu \exp\{-i \int \alpha(x) 2A(x) d^4x\} \quad (\text{II-10})$$

onde $2A(x)$ é a chamada anomalia quiral:

$$2A(x) = - \frac{q^2 \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} F^{\alpha\beta} F^{\gamma\delta}}{16\pi^2} \quad (\text{II-11})$$

A integral de trajetória como um todo deve ser invariante por tais transformações quirais locais:

$$W = \int \mathcal{D}_\mu e^{iS} = \int \mathcal{D}'_\mu e^{iS'} = W'$$

usando (II-9) e (II-10) temos:

$$\begin{aligned} W' &= \int \mathcal{D}_\mu e^{iS} \exp i \int d^4x \alpha(x) (\partial_\mu j_5^\mu - 2im \bar{\psi} \gamma_5 \psi - iA(x)) \\ &= \int \mathcal{D}_\mu e^{iS} e^U \end{aligned} \quad (\text{II-12})$$

U é um funcional de $\alpha(x)$:

$$U|\alpha(x)| = i \int d^4x \alpha(x) (\partial_\mu j_5^\mu - 2im \bar{\psi} \gamma_5 \psi - 2A)$$

Podemos expandir $e^{U|\alpha|}$ numa série funcional em torno de $\alpha = 0$ e até 1ª ordem obtemos:

$$e^{U|\alpha|} = 1 + \alpha \frac{\delta U}{\delta \alpha} = 1 + i\alpha (\partial_\mu j_5^\mu - 2im \bar{\psi} \gamma_5 \psi - 2A)$$

Usando esse resultado em (II-12), da condição de invariancia: $W'/W = 1$, obtem-se a identidade de Ward-Takahashi:

$$\langle \partial_\mu j_5^\mu \rangle_W - 2im \langle \bar{\psi} \gamma_5 \psi \rangle_W = \langle 2A \rangle_W,$$

onde:

$$\langle O \rangle_W = \frac{\int \mathcal{D}\mu \ e^{iS_O}}{\int \mathcal{D}\mu \ e^{iS}}$$

Seguindo o procedimento descrito na introdução deste capítulo, a partir da variação da medida funcional*:

$$\mathcal{D}\mu = \prod_x \mathcal{D}\bar{\psi}(x) \mathcal{D}\psi(x) \prod_{\alpha=0}^3 \mathcal{D}A_\alpha(x),$$

sob transformações quirais locais, calcularemos $2A$ e mostraremos que o resultado corresponde realmente a expressão (II-11).

* A escolha de $\mathcal{D}\mu$ é feita com base na simetria de Lorentz.

Para efetuarmos esse cálculo é mais conveniente decompor os campos ψ e $\bar{\psi}$ em autofunções de um determinado operador e trabalharmos com os coeficientes dessa expansão em vez dos próprios campos ψ e $\bar{\psi}$. O operador escolhido é $i\cancel{D}$, pois como já vimos, (II-3), ele é hermiteano e assim possui um conjunto completo de autofunções. Além disso trabalhando-se com $\cancel{D}$ mantemos a covariância de gauge da teoria. Outra razão para trabalharmos com autofunções desse operador é que nesse caso a parte fermiônica de L_{QED} , (II-1), fica totalmente diagonalizada, assim usaremos as expansões:

$$\psi(x) = \sum_n a_n \phi_n(x)$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_m \bar{b}_m \bar{\phi}_m(x)$$

com

$$i\cancel{D} \phi_n(x) = \lambda_n \phi_n(x) \quad ; \quad \lambda_n \in \mathbb{R}$$

Podemos dizer que estamos passando do vetor coluna 'a' cujas linhas são numeradas com o índice n , para o vetor coluna ψ cujas linhas são numeradas pelo índice x através da matriz $\langle x|n \rangle = \phi_n(x)$. Sendo assim o jacobiano da transformação é: $\det \langle x|n \rangle$.

Analogamente como $\bar{\phi}_m(x) = \langle m|x \rangle$ o jacobiano da transformação do vetor linha $\bar{b}$ para $\bar{\psi}$ é: $\det \langle m|x \rangle$.

Dessa forma teríamos "a princípio":

$$\mathcal{D}_u^F = \prod_x \mathcal{D}\bar{\psi}(x) \mathcal{D}\psi(x) = \det\langle m|x\rangle \det\langle x|n\rangle \prod_n da_n d\bar{b}_n$$

Entretanto lembrando que para fêrmions temos a integral de Berezin:

$$\int d\psi(x) \psi(x) = 1 = \int da_n a_n ,$$

analogamente para $\bar{\psi}$ e $\bar{b}$, então se $\psi(x) = k.a$ devemos ter $d\psi(x) = da/k$ análogo para $d\bar{\psi}(x)$.

Portanto devemos escrever na realidade:

$$\mathcal{D}_u^F = (\det\langle m|x\rangle \det\langle x|n\rangle)^{-1} \prod_n da_n d\bar{b}_n \quad (\text{II-14})$$

Os $\phi_n(x)$ formam um conjunto ortonormal completo:

$$\int \bar{\phi}_m(x) \phi_n(x) d^4x = \delta_{nm} = \langle m|n\rangle \quad (\text{II-15})$$

Usando essa ortonormalidade é fácil ver que:

$$\det\langle m|x\rangle \det\langle x|m\rangle = 1 ,$$

consequentemente:

$$\mathcal{D}_u^F = \prod_n da_n d\bar{b}_n$$

Assim, para sabermos como $\mathcal{D}_u^F$ varia sob as transformações chirais (II-6) basta saber como variam os coeficientes das expansões (II-13). De (II-6) temos:

$$\psi'(x) = \sum_n a'_n \phi_n(x) = e^{i\alpha(x)\gamma_5} \psi(x) = \sum_m e^{i\alpha(x)\gamma_5} a_m \phi_m(x)$$

usando a ortonormalidade dos $\{\phi_m\}$:

$$a'_m = \sum_n \left(\int \bar{\phi}_m(x) e^{i\alpha(x)\gamma_5} \phi_n(x) d^4x \right) a_n$$

$$a'_m = C_{mn} a_n ; C_{mn} = \int \bar{\phi}_m(x) e^{i\alpha(x)\gamma_5} \phi_n(x) d^4x.$$

Lembrando do carácter fermiônico dos a_n (integral de Berezin) tem-se:

$$\prod_m da'_m = (\det C)^{-1} \prod_n da_n ,$$

analogamente:

$$\prod_m d\bar{b}'_m = (\det C)^{-1} \prod_m d\bar{b}_m ,$$

portanto:

$$\mathcal{D}_H^{F'} = \prod_m da'_m d\bar{b}'_m = (\det C)^{-2} \prod_m da_m d\bar{b}_m \quad (\text{II-16})$$

Trabalhando-se com transformações quirais infinitesimais (II-7) até a 1ª ordem em $\alpha(x)$:

$$e^{i\alpha(x)\gamma_5} \cong 1 + i\alpha(x)\gamma_5$$

e usando (II-15) temos:

$$C_{mn} \cong \delta_{mn} + i \int \bar{\phi}_m(x) \alpha(x) \gamma_5 \phi_n(x) d^4x$$

Como todos elementos fora da diagonal principal são integrais em $\alpha(x)$ temos:

$$\begin{aligned}\det C &\cong 1 + i \sum_m \left(\int \bar{\phi}_m(x) \alpha(x) \gamma_5 \phi_m(x) d^4x \right) \\ (\det C)^{-2} &\cong 1 - 2i \sum_m \left(\int \bar{\phi}_m(x) \alpha(x) \gamma_5 \phi_m(x) d^4x \right) \\ &\cong \exp(-2i \sum_m \int d^4x \alpha(x) \bar{\phi}_m(x) \gamma_5 \phi_m(x))\end{aligned}$$

Usando em (II-16):

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\mu^{F'} &= \mathcal{D}_\mu^F \exp\{-2i \int d^4x \alpha(x) \sum_m \bar{\phi}_m(x) \gamma_5 \phi_m(x)\} \\ &= \mathcal{D}_\mu^F \exp\{-i2 \int d^4x \alpha(x) A(x)\} \quad (\text{ver II-8})\end{aligned}$$

com

$$A(x) = \sum_m \bar{\phi}_m(x) \gamma_5 \phi_m(x) \quad (\text{II-17})$$

Como os $\phi_m(x)$ formam um conjunto completo vale:

$$\sum_m \bar{\phi}_{m\alpha}(x) \phi_{m\beta}(y) = \delta_{\alpha\beta} \delta(x-y) \quad (\text{II-18})$$

onde: $\alpha, \beta = 1 \dots 4$ são índices que numeram as linhas dos espinores ϕ e ϕ^+ .

Consequentemente a quantidade $A(x)$ não é bem definida:

$$A(x) = \sum_m \phi_m^+(x) \gamma_5 \phi_m(x) = \sum_{m, \alpha, \beta} \phi_{m\beta}^+(x) (\gamma_5)_{\beta\alpha} \phi_{m\alpha}(x) \sim \lim_{y \rightarrow x} \delta(x-y) \text{Tr} \gamma_5$$

Portanto precisamos regularizar $A(x)$.

Regularização

Para regularizarmos $A(x)$ notemos que:

$$\psi(x) = \sum_n a_n \phi_n(x) \quad (i\partial)\phi_n = \lambda_n \phi_n \quad \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

Usando a expansão acima na lagrangeana (II-1) nota-se que λ_n deve possuir dimensão de massa. Além disso como $\lambda_n \in \mathbb{R}$ temos sem dúvida:

$$\lambda_n^2 > 0$$

Nesse caso a exponencial $e^{-\alpha \lambda_n^2}$ com $\alpha > 0$ está limitada entre 0 e 1 e podemos regularizar $A(x)$ da seguinte maneira:

$$A(x) = \lim_{M^2 \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow x} \sum \bar{\phi}_n(y) \gamma_5 e^{-\lambda_n^2/M^2} \phi_n(x)$$

$$(i\partial)\phi_n = \lambda_n \phi_n \rightarrow \partial^2 \phi_n = -\lambda_n^2 \phi_n$$

$$\rightarrow A(x) = \lim_{M^2 \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow x} \sum \bar{\phi}_n(y) \gamma_5 e^{+\partial^2(x)/M^2} \phi_n(x)$$

Nas fórmulas seguintes estão implícitos os limites acima.

$$A(x) = \sum_{n, \alpha, \beta} \bar{\phi}_{n\alpha}(y) (\gamma_5 e^{+\partial^2(x)/M^2})_{\alpha\beta} \phi_{n\beta}(x)$$

$$A(x) = (\gamma_5 e^{+\not{D}^2(x)/M^2})_{\alpha\beta} \sum_n \bar{\phi}_{n\alpha}(y) \phi_{n\beta}(x), \text{ usando (II-18):}$$

$$A(x) = \text{Tr}(\gamma_5 e^{\not{D}^2/M^2}) \delta(x-y) \quad (\text{II-19})$$

com

$$\not{D}^2 = D^2 - \frac{iq}{4} |\gamma_\mu, \gamma_\nu| F^{\mu\nu} \quad (\text{II-20})$$

$$A(x) = \text{Tr}(\gamma_5 \exp e^{(\frac{H}{M^2} + \frac{B}{M^2})}) \delta(x-y) \quad (\text{II-21})$$

onde:

$$H = D^2$$

$$B = - \frac{iq}{2} |\gamma_\mu, \gamma_\nu| F^{\mu\nu}$$

Como o operador D^2 possui derivadas, então:

$$[H, B] \neq 0$$

e assim devemos usar a fórmula de Hausdorf se quisermos escrever a exponencial da soma como produto de exponenciais e consequentemente isolarmos o termo em $F^{\mu\nu}$ do termo em D^2 .

Fórmula de Hausdorf:

$$e^{\frac{B}{M^2}} e^{\frac{H}{M^2}} = e^{\frac{H}{M^2} + \frac{B}{M^2} - \frac{1}{2M^4} [H, B] + \dots} \quad (\text{II-22})$$

Os outros termos da série em (II-22) são proporcionais a M^{-c} com $c > 6$ e como estamos trabalhando no limite $M^2 \rightarrow \infty$ veremos que é suficiente mantermos os termos até a ordem de M^{-4} , assim

$$e^{\frac{B}{M^2}} e^{\frac{H}{M^2}} \cong e^{\frac{H+B}{M^2} - \frac{1}{2M^4} [H, B]}$$

Multiplicando-se essa fórmula a esquerda por $e^{(1/2M^4)|H,B|}$ e usando novamente a fórmula de Hausdorff no lado direito da expressão resultante mantendo-se sempre os termos até M^{-4} tem-se:

$$e^{\frac{1}{2M^4}|H,B|} e^{\frac{B}{M^2}} e^{\frac{H}{M^2}} \approx e^{\frac{H+B}{M^2}}$$

$$H = D^2$$

$$B = -\frac{iq}{4} |\gamma_\mu, \gamma_\nu| F^{\mu\nu}$$

Usando essa relação em (II-21):

$$A(x) = \text{Tr}(\gamma_5 e^{\frac{|H,B|}{2M^4}} e^{\frac{B}{M^2}} e^{\frac{H}{M^2}}) \delta(x-y)$$

Expandindo até $1/M^4$ as duas primeiras exponenciais acima e retirando do símbolo do traço a última exponencial e^{H/M^2} :

$$\begin{aligned} A(x) &\approx \text{Tr}\{\gamma_5 (1 + \frac{|H,B|}{2M^4} + \dots)(1 + \frac{B}{M^2} + \frac{B^2}{2!M^4} + \dots)\} e^{\frac{H}{M^2}} \delta(x-y) \\ &\approx \text{Tr}\{\gamma_5 (1 + \frac{|H,B|}{2M^4} + \frac{B}{M^2} + \frac{B^2}{2M^4})\} e^{\frac{H}{M^2}} \delta(x-y) \end{aligned}$$

Os três primeiros termos acima não contribuem por possuírem traço nulo, pois $|H,B| \sim |\gamma_\mu, \gamma_\nu|$ da mesma forma que $B \sim |\gamma_\mu, \gamma_\nu|$ e como $\text{Tr} \gamma_5 = \text{Tr} \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu = 0$ temos:

$$A(x) = \text{Tr}(\frac{\gamma_5 B^2}{2M^4}) e^{\frac{H}{M^2}} \delta(x-y) = \text{Tr}(-\frac{q^2 \gamma_5 |\gamma_\mu, \gamma_\nu| |\gamma_\alpha, \gamma_\beta| F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta}}{32M^4}) e^{D^2/M^2} \delta(x-y)$$

(II-23)

escrevendo:

$$\delta(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik(x-y)}$$

como:

$$\begin{aligned} \frac{D^2(x)}{M^2} e^{-ik(x-y)} &= (\partial^2 - iq \partial^\mu A_\mu - 2iq A^\mu \partial_\mu - q^2 A^\mu A_\mu) \frac{e^{-ik(x-y)}}{M^2} \\ &= \frac{e^{-ik(x-y)}}{M^2} (-k^2 - iq \partial^\mu A_\mu - 2q A^\mu k_\mu - q^2 A^\mu A_\mu) \\ &= -e^{-ik(x-y)} \left\{ \frac{(k^\mu + q A^\mu)^2 + iq \partial^\mu A_\mu}{M^2} \right\} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} e^{D^2/M^2} \delta(x-y) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{D^2/M^2} e^{-ik(x-y)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \exp\left(-\frac{iq \partial^\mu A_\mu}{M^2}\right) \int d^4k e^{-\frac{(k^\mu + q A^\mu)^2}{M^2}} e^{-ik(x-y)} \end{aligned}$$

$$e^{D^2/M^2} \delta(x-y) = -\frac{iM^4}{16\pi^2} \exp\left(-\frac{iq \partial^\mu A_\mu}{M^2}\right)$$

Usando ainda: $\text{Tr}(\gamma_5 \not{a} \not{b} \not{c} \not{d}) = 4i \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$ em (II-23),
temos no limite $M^2 \rightarrow \infty$ o resultado obtido por Fujikawa⁽²³⁾,
(II-11):

$$2A(x) = \frac{q^2 \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta}}{16\pi^2} \quad (\text{II-24})$$

Comentários

- 1) O procedimento é generalizável para teorias de gauge não abelianas como a QCD, basta tomar-se o traço sobre os índices de sabores além dos índices espinoriais^(24,25).
- 2) Pode-se dizer que o método de Fujikawa é não perturbativo já que em nenhum estágio do cálculo foi necessário fazer expansões na constante de acoplamento da teoria, q .
- 3) O resultado obtido por Fujikawa pode ser escrito da seguinte maneira (ver II-24):

$$A(x) = \sum_n \bar{\phi}_n(x) \gamma_5 \phi_n(x) = - \frac{q^2}{16\pi^2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \text{ com } F_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\mu\nu}/2$$

integrando temos:

$$\int d^4x \sum_n \bar{\phi}_n(x) \gamma_5 \phi_n(x) = \int d^4x \left(- \frac{q^2}{16\pi^2} \right) F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (\text{II-25})$$

$$(i\cancel{D})\phi_n = \lambda_n \phi_n$$

O resultado (II-25) possui uma ligação direta com um teorema chamado teorema de índices de Atiyah-Singer que afirma que o índice analítico de um operador P , $I(P)$, definido abaixo:

$$I(P) = \dim \text{Ker } P - \dim \text{Ker } P^+, \quad (\text{II-26})$$

é um invariante topológico.

onde: $\dim \text{Ker } P$ é a dimensão do espaço das soluções ϕ da seguinte equação: $P\phi = 0$. Analogamente para P^+ .

É sabido que a grandeza:

$$\int d^4x \left(- \frac{q^2}{16\pi^2} \right) F_{\nu\beta} F^{\alpha\beta}$$

é um número inteiro, um invariante topológico. Decompondo-se as autofunções ϕ_n em estados de quiralidade positiva e negativa mostra-se que o lado esquerdo de (II-25) é o índice analítico de um determinado operador P e portanto (II-25) é o exato resultado do teorema de Atiyah-Singer.

Para mostrar-se que o lado esquerdo de (II-25) corresponde ao índice analítico de um certo operador o primeiro passo é escrever-se essa expressão na forma de um número inteiro. Para isso notemos que a seguinte decomposição dos espinores ϕ é sempre possível:

$$\phi_n = \frac{(1-\gamma_5)}{2} \phi_n + \frac{(1+\gamma_5)}{2} \phi_n \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

$$\phi_n = \phi_n(-) + \phi_n(+); \quad \gamma_5^2 = 1$$

$\phi_n(-)$ possui quiralidade negativa e $\phi_n(+)$ quiralidade positiva:

$$\gamma_5 \phi_n(-) = - \phi_n(-); \quad \gamma_5 \phi_n(+) = + \phi_n(+)$$

$$\text{Com } \bar{\phi}_n(\pm) = \bar{\phi}_n \left(\frac{1 \pm \gamma_5}{2} \right) \text{ temos:}$$

$$\bar{\phi}_n \gamma_5 \phi_n = \bar{\phi}_{n(+)} \phi_{n(+)} - \bar{\phi}_{n(-)} \phi_{n(-)}$$

assim:

$$\int d^4x \sum_n \bar{\phi}_n \gamma_5 \phi_n = \int d^4x \sum_n \{ \bar{\phi}_{n(+)} \phi_{n(+)} - \bar{\phi}_{n(-)} \phi_{n(-)} \}$$

Normalizando:

$$\int d^4x \bar{\phi}_{n(\pm)} \phi_{n(\pm)} = 1$$

temos:

$$\int d^4x \sum_n \bar{\phi}_n \gamma_5 \phi_n = N_{(+)} - N_{(-)}$$

onde: $N_{(+)}$ ($N_{(-)}$) é o número de estados com quiralidade positiva (negativa) construídos a partir dos $\{\phi_n\}$

Portanto temos realmente um número inteiro no lado esquerdo de (II-25), como esperado. Precisamos apenas escrever a diferença $N_{(+)} - N_{(-)}$ na forma (II-26). Para isso notemos que a cada estado de quiralidade positiva $\phi_{n(+)}$ construído a partir de ϕ_n :

$$\phi_{n(+)} = \frac{(1+\gamma_5)}{2} \phi_n$$

com

$$(i\cancel{0})\phi_n = \lambda_n \phi_n \quad \text{e} \quad \lambda_n \neq 0,$$

o operador $(i\cancel{0})$ faz corresponder um estado de quiralidade negativa como $(i\cancel{0})\gamma_5 = -\gamma_5(i\cancel{0})$, pois $\gamma_5\gamma_\mu = -\gamma_\mu\gamma_5$

$$(i\cancel{0})\phi_{n(+)} = (i\cancel{0}) \frac{(1+\gamma_5)}{2} \phi_n = \frac{(1-\gamma_5)}{2} i\cancel{0}\phi_n = \lambda_n \phi_{n(-)}$$

Assim a cada estado de quiralidade positiva construído a partir de um estado com energia bem definida e diferente de zero (auto-estado de $i\cancel{0}$ com $\lambda_n \neq 0$) corresponderá um estado de quiralidade negativa e podemos escrever:

$$N_{(+)} - N_{(-)} = N_{(+)}^0 - N_{(-)}^0$$

onde $N_{+}^0(N_{-}^0)$ é o número de estados fundamentais, $\lambda_n = 0$ e quiralidade positiva (negativa).

Para escrevermos a diferença $N_{(+)}^0 - N_{(-)}^0$ na forma (II-26) notemos:

$$\gamma_5(i\cancel{0}) = - (i\cancel{0})\gamma_5 \quad \text{e} \quad (i\cancel{0})^+ = i\cancel{0}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A partir dessas expressões temos a forma geral do operador $i\cancel{0}$:

$$i\cancel{0} = \begin{pmatrix} 0 & P^+ \\ P & 0 \end{pmatrix}$$

definindo $\phi_n = \begin{pmatrix} \chi_n \\ \psi_n \end{pmatrix}$ tem-se:

$$\phi_{n(-)} = \frac{(1-\gamma_5)}{2} \phi_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_n \end{pmatrix} ; \quad \phi_{n(+)} = \frac{(1+\gamma_5)}{2} \phi_n = \begin{pmatrix} \chi_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

e obtemos:

$$(i\cancel{0})\phi_{n(+)} = 0 \rightarrow P\chi_n = 0$$

$$(i\cancel{0})\phi_{n(-)} = 0 \rightarrow P^+\psi_n = 0$$

Portanto o número de estados fundamentais com quiralidade positiva é dado pela dimensão do espaço das soluções da equação:

$$P\chi_n = 0$$

Ou seja,

$$N_{(+)}^0 = \dim \text{Ker } P$$

analogamente

$$N_{(-)}^0 = \dim \text{Ker } P^+$$

e assim usando II-26:

$$\int d^4x \sum_n \bar{\phi}_n \gamma_5 \phi_n = N_{(+)}^0 - N_{(-)}^0 = \dim \text{Ker } P - \dim \text{Ker } P^+ = I(P)$$

$I(p)$ = índice analítico do operador P .

A ligação direta com o teorema de Atiyah-Singer e a simplicidade são os pontos destacáveis do método de Fujikawa.

- 4) É importante notar que o método de regularização usado aqui (método do "Heat-Kernel") é equivalente ao método da função zeta (ζ) no qual a infinidade $A(x)$ é regularizada a partir da expressão:

$$A(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \sum_n \frac{\bar{\psi}_n(x) \gamma_5 \psi_n(x)}{(\lambda_n^2)^s}$$

onde os λ_n são exatamente os autovalores do operador $(i\cancel{D})$, usados também no método do "Heat-Kernel": $(i\cancel{D})\phi_n = \lambda_n \phi_n$.

No apêndice B temos uma demonstração simples da

equivalência dos dois métodos.

III - ANOMALIA DE WEYL NA CORDA BOSÔNICA FECHADA

Agora aplicaremos o método de Fujikawa para a obtenção da anomalia de Weyl na corda bosônica fechada⁽²⁰⁾.

O primeiro passo no método de Fujikawa é escolhermos as simetrias clássicas que devem ser mantidas após a quantização da teoria e construirmos uma medida de integração funcional que respeite essas simetrias.

No capítulo 2 conseguimos fixar o gauge conforme baseando-se no princípio de simetria por B.R.S.T. e obtivemos uma ação total invariante por transformações de B.R.S.T. ; no apêndice C vemos que esse processo de fixação de gauge não quebrou nenhuma simetria da ação original da corda bosônica.

Portanto temos razões suficientes para acreditar que a simetria de B.R.S.T. seja mantida após a quantização da teoria e de acordo com Fujikawa usaremos essa simetria para construir a medida de integração funcional.

No capítulo 2 introduzimos os campos⁽²⁰⁾:

$$\tilde{\chi}^\mu = g^{1/4} \chi^\mu ; \quad (\text{III-1})$$

$$\tilde{\eta}^c = \sqrt{g} \eta^c ; \quad (\text{III-2})$$

$$\tilde{g}_{ab} = \tilde{g}^{1/4} g_{ab} ; \quad (\text{III-3})$$

$$\xi_a, B_a \quad (\text{III-4})$$

cujas transformações por B.R.S.T. são (ver apêndice A - seção A3):

$$\delta^B \chi^\mu = - \theta \left(\eta^a \partial_a + \frac{\partial_a \eta^a}{2} \right) \chi^\mu \quad (\text{III-5})$$

$$\delta^B \tilde{g}_{ab} = - \theta \left\{ (\eta^c \partial_c - \frac{\partial_c \eta^c}{2}) \tilde{g}_{ab} + (\partial_a \eta^c) \tilde{g}_{cb} + (\partial_b \eta^c) \tilde{g}_{ca} \right\} \quad (\text{III-6})$$

$$\delta^B \tilde{\eta}^c = - \theta \left(\eta^a \partial_a + \partial_a \eta^a \right) \tilde{\eta}^c \quad (\text{III-7})$$

$$\delta^B \xi_a = i \theta B_a \quad (\text{III-8})$$

$$\delta^B B_a = 0 \quad (\text{III-9})$$

E assim, trabalhando-se com a variedade bidimensional varrida pela corda no espaço tempo, M , localmente euclídeana fixamos o gauge conforme:

$$g_{ab} = \rho \delta_{ab}$$

e obtivemos a ação S_T dada em III-22 (capítulo 2), que é invariante por B.R.S.T.:

$$\delta^B S_T = 0 ; \quad S'_T = S_T$$

Seja o funcional gerador:

$$W = \int \mathcal{D}\mu e^{S_T}$$

Para que W seja invariante por B.R.S.T. é preciso então que a medida $\mathcal{D}\mu$ por si só seja invariante. Essa é

justamente a razão pela qual introduz-se as variáveis X^μ , $\bar{g}_{ab}$ e $\tilde{\eta}^c$, verificaremos em seguida que a medida formada por esses campos é invariante por B.R.S.T.:

$$\mathcal{D}\mu = \prod_{\zeta} \mathcal{D}\bar{g}_{ab}(\zeta) \mathcal{D}B(\zeta) \mathcal{D}\xi(\zeta) \mathcal{D}\tilde{\eta}(\zeta) \prod_{\mu=1}^D \mathcal{D}X^\mu(\zeta); \quad (\text{III-10})$$

$$\zeta = (\zeta^1, \zeta^2) = (\tau, \sigma)$$

a) Analisaremos primeiramente o produto $\mathcal{D}B(\zeta) \mathcal{D}\xi(\zeta)$, de (III-8) e (III-9) temos:

$$\xi'_a = \xi_a - i\theta B_a$$

$$B'_a = B_a$$

$$\rightarrow \text{Jacobiano} = \begin{vmatrix} 1 & -i\theta \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

assim:

$$\prod_{\zeta} \mathcal{D}B'(\zeta) \mathcal{D}\xi'(\zeta) = \prod_{\zeta} \mathcal{D}B(\zeta) \mathcal{D}\xi(\zeta)$$

Agora para calcularmos o jacobiano da transformação por B.R.S.T. dos outros campos é interessante trabalharmos com o mesmo método usado no cálculo do jacobiano da transformação quiral na seção anterior, ou seja, expandimos os campos em autofunções de um determinado operador hermiteano e passamos a trabalhar com a medida escrita em termos dos coeficientes dessa expansão.

b) Vejamos agora o caso do termo: $\prod_{\zeta} \prod_{\mu=1}^D \mathcal{D}X^\mu(\zeta)$

Fixemos um valor do índice de espaço-tempo μ : $\mu = \alpha$ (fixo) e temos a expansão:

$$\chi^\alpha = \sum_n k_n \tilde{\phi}_n^\alpha(\zeta) \quad (\text{III-11})$$

onde os $\tilde{\phi}_n^\alpha(\zeta)$ formam um conjunto completo ortonormal de autofunções de um determinado operador hermiteano e são normalizadas da seguinte maneira (vide Apêndice C)*:

$$\int_M d^2\zeta \tilde{\phi}_n^\alpha(\zeta) \tilde{\phi}_m^\alpha(\zeta) = \delta_{nm} \quad (\text{III-12})$$

Analogamente ao caso da anomalia quiral, de (III-11) temos:

$$\prod_\zeta \mathcal{D}\chi^\alpha(\zeta) = \det\langle\zeta|n\rangle \cdot \prod_n dk_n ; \quad \langle\zeta|n\rangle = \tilde{\phi}_n^\alpha(\zeta)$$

como $\det\langle\zeta|n\rangle$ é uma constante que não depende funcionalmente de nenhum campo da teoria e como a medida do funcional gerador está sempre definida a menos de uma constante desse tipo podemos escrever:

$$\prod_\zeta \mathcal{D}\chi^\alpha(\zeta) = \prod_n dk_n$$

* Apesar dos índices α aparecerem repetidos em (III-12) não estão sendo somados, além disso como χ^α é real temos:

$$(\tilde{\phi}_n^\alpha)^+ = \tilde{\phi}_m^\alpha$$

Para verificarmos então como essa medida varia sob a transformação de B.R.S.T. (III-5) basta calcular a variação dos coeficientes k_n sob tal transformação, de (III-5) temos:

$$\begin{aligned}\chi^{\alpha'} &= \sum_n k'_r \tilde{\phi}_r^\alpha = \chi^\alpha - \theta \left\{ \eta^a \partial_a + \frac{\partial_a \eta^a}{2} \right\} \chi^\alpha \\ &= \sum_n k_n \tilde{\phi}_n^\alpha - \sum_n \theta \left\{ \eta^a \partial_a + \frac{\partial_a \eta^a}{2} \right\} k_n \tilde{\phi}_n^\alpha\end{aligned}$$

usando (III-12) obtemos:

$$dk'_r = \sum_n C_{rn} dk_n ; \quad C_{rn} = \delta_{rn} - \theta \int_M d^2 \zeta \tilde{\phi}_r^\alpha \left\{ \eta^a \partial_a + \frac{\partial_a \eta^a}{2} \right\} \tilde{\phi}_n^\alpha$$

analogamente ao caso da anomalia quiral:

$$\prod_r dk'_r = \prod_n dk_n \cdot \text{jacobiano} = \prod_n dk_n (\det C)$$

e escreveremos o jacobiano na forma de uma exponencial, como $\theta^2 = 0$ temos a identidade:

$$\begin{aligned}\det C &= 1 - \theta \sum_n \int_M d^2 \zeta \tilde{\phi}_n^\alpha \left\{ \eta^a \partial_a + \frac{\partial_a \eta^a}{2} \right\} \tilde{\phi}_n^\alpha \\ &= \exp \left\{ - \theta \left(\sum_n \int_M d^2 \zeta \tilde{\phi}_n^\alpha \left(\eta^a \partial_a + \frac{\partial_a \eta^a}{2} \right) \tilde{\phi}_n^\alpha \right) \right\},\end{aligned}$$

mas

$$\tilde{\phi}_n^\alpha \left(\eta^a \partial_a + \frac{\partial_a \eta^a}{2} \right) \tilde{\phi}_n^\alpha = \frac{1}{2} \partial_a (\tilde{\phi}_n^\alpha \eta^a \tilde{\phi}_n^\alpha) .$$

Portanto:

$$\prod_r dk_r' = \prod_{\zeta} \mathcal{D}X'^{\alpha}(\zeta) = \prod_n dk_n \exp\left\{-\frac{\theta}{2} \sum_n \int_M d^2\zeta \partial_a(\tilde{\phi}_n \eta^a \tilde{\phi}_n^{\alpha})\right\}$$

$$\prod_{\zeta} \mathcal{D}X'^{\alpha}(\zeta) = \prod_{\zeta} \mathcal{D}X^{\alpha}(\zeta) \exp\left\{-\frac{\theta}{2} \sum_n \int_M d^2\zeta \partial_a(\tilde{\phi}_n^{\alpha} \eta^a \tilde{\phi}_n^{\alpha})\right\}$$

No apêndice A (seção A5) vimos que a ação S , e consequentemente S_T , era invariante apenas por transformações de B.R.S.T. tais que:

$$\int_M d^2\zeta \partial_a(\eta^a L) = 0$$

Essa igualdade implicava em certas condições de contorno sobre os fantasmas η^a . Portanto é consistente com a simetria por B.R.S.T. assumirmos que:

$$\int d^2\zeta \partial_a(\tilde{\phi}_n^{\alpha} \eta^a \tilde{\phi}_n^{\alpha}) = 0 \quad (\text{III-13})$$

e temos:

$$\prod_{\zeta} \mathcal{D}X'^{\alpha}(\zeta) = \prod_{\zeta} \mathcal{D}X^{\alpha}(\zeta)$$

assim:

$$\prod_{\mu=1}^D \prod_{\zeta} \mathcal{D}X^{\mu'}(\zeta) = \prod_{\mu=1}^D \prod_{\zeta} \mathcal{D}X^{\mu}(\zeta)$$

Ou seja, esse termo da medida $\mathcal{D}_{\mu}$ é invariante por B.R.S.T.

c) Analogamente para $\prod_{\zeta} \tilde{g}_{ab}(\zeta)$:

$$\tilde{g}_{ab} = \sum_n a_n \tilde{\phi}_{ab(n)}(\zeta)$$

Os $\tilde{\phi}_{ab(n)}(\zeta)$ formam um conjunto completo de auto-funções satisfazendo:

$$\int_M d^2 \zeta \tilde{\phi}_{ab(n)} \tilde{\phi}_{cd(m)} = \delta_{ac} \delta_{bd} \delta_{nm} \quad (\text{III-14})$$

$$\sum_n \tilde{\phi}_{ab(n)}(\zeta') \tilde{\phi}_{cd(n)}(\zeta) = \delta^2(\zeta' - \zeta); \quad \int_M d^2 \zeta \delta^2(\zeta - \zeta') = 1 \quad (\text{III-15})$$

analogamente ao caso anterior podemos escrever:

$$\prod_{\zeta} \tilde{g}_{ab}(\zeta) = \prod_n da_n.$$

A partir da lei de transformação de $\tilde{g}_{ab}$ em (III-6) e a expansão acima, usando-se a ortonormalidade (III-14) temos:

$$da'_r = C_{rn} da_n$$

$$C_{rn} = \delta_{rn} - \frac{\theta}{4} \int d^2 \zeta \left\{ \phi_{ab(r)} (\eta^c_{\partial_c} - \frac{\partial_c \eta^c}{2}) \phi_{ab(n)} + \phi_{ab(r)} (\partial_a \eta^c) \phi_{cb(n)} + \right. \\ \left. + \phi_{ab(r)} (\partial_b \eta^c) \phi_{ca(n)} \right\}.$$

Novamente usando a nilpotência de θ conseguimos escrever o jacobiano $(\det C)$ numa forma exponencial e obtemos:

$$\prod_n da'_n = \prod_n da_n \exp \left\{ -\frac{\theta}{4} \sum_r \int d^2\zeta \left\{ \phi_{ab}(r)(\zeta) (\eta^c \partial_c - \frac{\partial_c \eta^c}{2}) \phi_{ab}(r)(\zeta) + \right. \right. \\ \left. \left. + \phi_{ab}(r)(\zeta) (\partial_a \eta^c) \phi_{cb}(r)(\zeta) + \phi_{ab}(r)(\zeta) (\partial_b \eta^c) \phi_{ca}(r)(\zeta) \right\} \right\}$$

Esses três termos podem ser reescritos, por exemplo:

$$\sum_r \phi_{ab}(r)(\zeta) (\partial_a \eta^c) \phi_{cb}(r)(\zeta) = \int d^2\zeta' \sum_r \phi_{ab}(r)(\zeta) \phi_{cb}(r)(\zeta') (\partial_a \eta^c) \delta^2(\zeta - \zeta')$$

mas pela relação de completeza (III-15), como o índice b acima está sendo somado, temos:

$$\sum_r \phi_{ab}(r)(\zeta) (\partial_a \eta^c) \phi_{cb}(r)(\zeta) = 2 \int d^2\zeta' \delta^2(\zeta - \zeta') (\partial_a \eta^a) \delta^2(\zeta - \zeta'),$$

fazendo o mesmo para os demais termos temos:

$$\prod_n da'_n = \prod_n da_n \exp \left\{ -\theta \int d^2\zeta \int d^2\zeta' \delta^2(\zeta - \zeta') \left(\eta^a \partial_a + \frac{\partial_a \eta^a}{2} \right) \delta^2(\zeta - \zeta') \right\}$$

o delta a direita da expressão acima pode ser reescrito usando-se (III-15):

$$\delta^2(\zeta - \zeta') = \frac{1}{4} \sum_r \phi_{ab}(r)(\zeta) \phi_{ab}(r)(\zeta')$$

e assim integrando em $d^2\zeta'$ fazendo desaparecer o delta do lado esquerdo obtemos:

$$\prod_n da'_n = \prod_n da_n \exp \left\{ -\frac{\theta}{2} \sum_r \int d^2\zeta \partial_a (\phi_{ab}(r) \eta^a \phi_{ab}(r)) \right\}$$

Analogamente para (III-13) espera-se que:

$$\int d^2 \zeta \partial_a (\phi_{ab}(r) \eta^a \phi_{ab}(r)) = 0$$

e consequentemente:

$$\prod_n da'_n = \prod_n da_n \rightarrow \prod_{\zeta} D\tilde{g}'_{ab}(\zeta) = \prod_{\zeta} D\tilde{g}_{ab}(\zeta)$$

Para que $D\mu$ seja invariante por B.R.S.T. basta ver
rificar se:

$$\prod_{\zeta} D\tilde{\eta}'(\zeta) = \prod_{\zeta} D\tilde{\eta}(\zeta)$$

d) No caso de $\prod_{\zeta} D\tilde{\eta}(\zeta)$, $\tilde{\eta}^a = \sqrt{g} \eta^a$, deve-se tomar mais cuidado, pois $\tilde{\eta}^a$ é um campo especial já que ele sofre a transformação de B.R.S.T. (III-7) ao mesmo tempo em que ele é o próprio parâmetro da transformação: $\epsilon^a = \theta \eta^a$.

Isso confere um carácter singular a sua transformação por B.R.S.T. já que nós temos trabalhado com reparametrizações infinitesimais até a 1ª ordem em ϵ^a ou em η^a , como pode ser visto nas transformações dos campos $\tilde{X}^\mu$ e $\tilde{g}_{ab}$ que são explicitamente lineares nos parâmetros da transformação (η^a). Entretanto a transformação de $\tilde{\eta}^c$ em (III-7) não é linear em η^a já que $\tilde{\eta}^a$ é proporcional a η^a , podemos dizer que (III-7) é de 2ª ordem, em 1ª ordem deveríamos ter $\delta^B_{\eta^c} = 0$ e $\delta^B_{\tilde{\eta}^c} = 0$.

No entanto devemos notar que embora as transformações de B.R.S.T. tenham sido inspiradas nas reparametrizações infinitesimais de 1ª ordem não é necessário assumirmos que η^c seja pequeno, a lei de transformação de η^c é definida de tal

modo que exista a nilpotência que $\tilde{\epsilon}$ a característica que realmente define as transformações de B.R.S.T, além disso o fato das transformações de $\tilde{X}^\mu$ e $\tilde{g}_{ab}$ serem lineares em $\tilde{\eta}^C$ é uma consequência da nilpotência da transformação e não de estarmos trabalhando em 1ª ordem. Em resumo podemos dizer que a transformação de B.R.S.T. de $\tilde{\eta}^C$ é realmente (III-7), mas devido a sua não linearidade se trabalharmos diretamente com $\tilde{\eta}^C$ da mesma maneira que temos trabalhado com os outros campos, ou seja, expandindo $\tilde{\eta}^C$ em certas autofunções e mudando de variável passando a trabalhar com os coeficientes dessa expansão teríamos um cálculo muito mais complicado, pois o jacobiano da transformação de B.R.S.T. não seria independente dos coeficientes da expansão de $\tilde{\eta}^C$.

Para evitarmos esse problema, em vez de trabalhar mos diretamente com $\tilde{\eta}^C$ passamos a trabalhar com a 1-forma:

$$d\tilde{\eta}^C = \sqrt{g} d\eta^C$$

O que corresponde, como veremos abaixo, a uma linearização ⁽²⁶⁾ da transformação (III-7), pois:

$$\delta^B(d\tilde{\eta}^C) = (\delta^B \sqrt{g}) d\eta^C + \sqrt{g} \delta^B(d\eta^C).$$

No apêndice A (seção A3) obtemos:

$$\delta^B \sqrt{g} = - \theta \sqrt{g} (\partial_a \eta^a) - \theta \eta^a (\partial_a \sqrt{g}),$$

além disso:

$$\begin{aligned}
 \delta^B(d\eta^C) &= \delta^B(\partial_a \eta^C d\zeta^a) = \partial_a(\delta^B \eta^C) d\zeta^a \\
 &= -\theta \partial_a(\eta^b \partial_b \eta^C) d\zeta^a \\
 &= -\theta(\partial_a \eta^b)(\partial_b \eta^C) d\zeta^a - \theta \eta^b(\partial_a \partial_b \eta^C) d\zeta^a
 \end{aligned}$$

como os η^C anticomutam entre si:

$$\delta^B(d\eta^C) = +\theta(\partial_b \eta^C) d\eta^b - \theta \eta^b d(\partial_b \eta^C)$$

assim temos:

$$\begin{aligned}
 \delta^B(d\tilde{\eta}^C) &= -\theta\{\eta^a(\partial_a \sqrt{g}) d\eta^C + \sqrt{g} \eta^b d(\partial_b \eta^C) + \sqrt{g}(\partial_a \eta^a) d\eta^C + \\
 &\quad - \sqrt{g}(\partial_b \eta^C) d\eta^b
 \end{aligned}$$

$$\delta^B(d\tilde{\eta}^C) = -\theta\{\eta^b \partial_b(d\tilde{\eta}^C) - (\partial_b \eta^C) d\tilde{\eta}^b + (\partial_a \eta^a) d\tilde{\eta}^C\} \quad (\text{III-16})$$

A transformação acima é linear nas 1-formas $d\tilde{\eta}^C$.

Agora podemos seguir o procedimento usual:

$$d\tilde{\eta}^C = \sum_n b_n \phi_n^C$$

onde:

b_n possui caráter fermiônico já que η^C e consequentemente $d\tilde{\eta}^C$ são fêrmions.

Os ϕ_n^C formam um conjunto completo e devem obedecer a normalização:

$$\int d^2\zeta \phi_n^c \phi_m^a = \frac{\delta_{nm} \delta^{ca}}{2} \quad * \quad (\text{III-17})$$

$$\sum_j \phi_j^c(\zeta) \phi_j^a(\zeta') = \frac{\delta^{ca} \delta^2(\zeta - \zeta')}{2} \quad (\text{III-18})$$

Da lei de transformação (III-16) usando-se as relações acima e a expansão para $d\bar{\eta}^C$, assumindo soma nos índices repetidos temos:

$$b_n' = C_{nm} b_m ; \quad C_{nm} = \delta_{nm} - \theta \int d^2\zeta \{ \phi_n^c \eta^b \partial_b \phi_m^c - \phi_n^c (\partial_b \eta^c) \phi_m^b + \phi_n^c (\partial_a \eta^a) \phi_m^c \}$$

Como os b_n são fermiônicos, lembrando da integral de Berezin temos:

$$\prod_n db_n' = \prod_m db_m (\det C)^{-1}$$

$$\prod_n db_n' = \prod_m db_m \exp \{ + \theta \{ \sum_n \int d^2\zeta (\phi_n^c \eta^b \partial_b \phi_n^c - \phi_n^c (\partial_b \eta^c) \phi_n^b + \phi_n^c (\partial_a \eta^a) \phi_n^c) \} \}$$

Usando (III-18) nos três termos acima temos, por exemplo:

$$\sum_n \phi_n^c (\partial_b \eta^c) \phi_n^b = \int d^2\zeta' \sum_n \phi_n^c(\zeta) \phi_n^b(\zeta') (\partial_b \eta^c) \delta^2(\zeta - \zeta')$$

* Como $\eta^{a+} = \eta^a$ temos $(\phi_n^a)^+ = \phi_n^a$, e o fator 2 é colocado por conveniência.

$$\sum_n \phi_n (\partial_b n^c) \phi_n^b = \int d^2 \zeta' \delta^2(\zeta - \zeta') (\partial_c n^c) \delta^2(\zeta - \zeta') ,$$

assim analogamente ao caso de $\tilde{g}_{ab}$ obtem-se:

$$\prod_n db_n' = \prod_m db_m \exp \left\{ + \theta \int d^2 \zeta d^2 \zeta' \delta(\zeta - \zeta') (n^a \partial_a + \frac{1}{2} \partial_a n^a) \delta(\zeta - \zeta') \right\}$$

$$= \prod_m db_m \exp \left\{ + \theta \sum_n \int d^2 \zeta \partial_a (\phi_n^c n^a \phi_n^c) \right\}$$

$$= \prod_m db_m, \text{ pois } n^a \text{ é tal que } \int d^2 \zeta \partial_a (\phi_n^c n^a \phi_n^c) = 0$$

portanto:

$$\prod_{\zeta} \mathcal{D} \tilde{\eta}'(\zeta) = \prod_{\zeta} \mathcal{D} \tilde{\eta}(\zeta)$$

Finalmente temos $\mathcal{D}\mu = \mathcal{D}\mu$ (ver III-10) como esperado e o funcional gerador abaixo é invariante por B.R.S.T.:

$$W = \int_{\zeta} \prod \mathcal{D} \tilde{g}_{ab}(\zeta) \mathcal{D} B(\zeta) \mathcal{D} \xi(\zeta) \mathcal{D} \tilde{\eta}(\zeta) \prod_{\mu=1}^D \mathcal{D} X^{\mu}(\zeta) \exp(S_T) \quad (\text{III-19})$$

Reescrevendo a ação total S_T dada pela equação (III-22) em função das novas variáveis X^{μ} , $\tilde{g}_{ab}$ e $\tilde{\eta}^c$:*

$$S_T = \int_M d^2 \zeta \left\{ \frac{\mu_0}{2} \sqrt{\tilde{g}} \tilde{g}^{ab} \partial_a \left(\frac{X^{\mu}}{g^{1/4}} \right) \partial_b \left(\frac{X^{\mu}}{g^{1/4}} \right) + B_1 \tilde{r}^1 + B_2 \tilde{r}^2 + \right.$$

* Na expressão para S_T assume-se $n^c = n^c(\tilde{\eta}^a)$ e $g = g(\tilde{g})$.

$$- i\varepsilon_1 \{ (n^c \partial_c + \frac{1}{2} \partial_c n^c) \tilde{f}^1 + (\partial_2 n^1 - \partial_1 n^2) \tilde{f}^2 + (\partial_1 n^2 - \partial_2 n^1) V \}$$

$$- i\varepsilon_2 \{ (n^c \partial_c + \frac{1}{2} \partial_c n^c) \tilde{f}^2 + (\partial_1 n^2 - \partial_2 n^1) \tilde{f}^1 + (\partial_1 n^1 - \partial_2 n^2) V \}$$

onde:

$$\tilde{f}^1 = \tilde{g}_{12} ; \tilde{f}^2 = \frac{\tilde{g}_{11} - \tilde{g}_{22}}{2} ; V = \frac{\tilde{g}_{11} + \tilde{g}_{22}}{2}$$

Para simplificarmos o funcional gerador (III-19) e ficarmos somente com os campos importantes da teoria, podemos integrar nos campos auxiliares $B_a(x)$. Separando a dependência do funcional gerador nesses campos temos:

$$W \propto \int_{\zeta} \prod_{a=1}^2 \mathcal{D} B_a(x) \exp \left(\int_M d^2 \zeta B_a(\zeta) \tilde{f}^a(\zeta) \right).$$

Portanto a integração nos campos auxiliares resultará num delta funcional, com :

$$B_a = i B'_a$$

temos:

$$W \propto \int_{\zeta} \prod \mathcal{D} B'_a(\zeta) e^{i \int_M d^2 \zeta B'_a(\zeta) \tilde{f}^a(\zeta)} = \delta^F | \tilde{f}^a(\zeta) |$$

onde $\delta^F | \tilde{f}^a(\zeta) |$ é um delta funcional:

$$\int_{\zeta} \prod \mathcal{D} \tilde{f}^a(\zeta) G | \tilde{f}^a | \delta^F | \tilde{f}^a | = G | 0 | \quad (\text{III-20})$$

Além disso como $\tilde{g}_{ab}$ possui três graus de liberdade e sua relação com as variáveis $\tilde{f}^a$ e V é linear sempre podemos escrever:

$$\prod_{\zeta} \mathcal{D} \tilde{g}_{ab}(\zeta) = \prod_{\zeta} \prod_{a=1}^2 \mathcal{D} \tilde{f}^a(\zeta) \mathcal{D} V(\zeta)$$

após a integração em $\prod_{\zeta} \mathcal{D} B_a^i(\zeta)$ temos:

$$W = \int \prod_{\zeta} \mathcal{D} V(\zeta) \mathcal{D} \xi(\zeta) \cdot \prod_{\mu=1}^D \mathcal{D} X^{\mu}(\zeta) \cdot \prod_{a=1}^2 \mathcal{D} \tilde{f}^a(\zeta) \delta^F[\tilde{f}^a] e^{S_T[\tilde{f}^a, \dots]}$$

Usando (III-20) e lembrando que $\tilde{f}^a = 0$ significa que estamos no gauge conforme, $g_{ab} = \rho \delta_{ab}$, e nesse caso:

$$\tilde{g}_{ab} = (g^{-1/4}) g_{ab} = \sqrt{\rho} \delta_{ab}$$

e

$$V = \frac{\tilde{g}_{11} + \tilde{g}_{22}}{2} = \sqrt{\rho} ; \quad \sqrt{\tilde{g}} \tilde{g}^{ab} = \delta^{ab}$$

obtem-se:

$$W = \int \prod_{\zeta} \mathcal{D} V \mathcal{D} \xi \mathcal{D} n \prod_{\mu=1}^D \mathcal{D} X^{\mu} \exp \left(\int_M \left\{ \frac{\mu_0}{2} \partial_a \left(\frac{X^{\mu}}{\sqrt{\rho}} \right) \partial_a \left(\frac{X^{\mu}}{\sqrt{\rho}} \right) - i \sqrt{\rho} \xi \gamma n \right\} d^2 \zeta \right)$$

onde

$$\xi = (\xi_1 \quad \xi_2); \quad n = \begin{pmatrix} n^1 \\ n^2 \end{pmatrix}; \quad \not{A} = \begin{pmatrix} \partial_2 & \partial_1 \\ \partial_1 & -\partial_2 \end{pmatrix} = \sigma_1 \partial_1 + \sigma_3 \partial_2 \quad (\text{III-21})$$

Daqui para frente trabalharemos no caso específico da corda fechada, que como vimos no capítulo 1 é equivalen-

te a trabalhar-se com a variedade M sem borda: $\partial M = \emptyset$, consequentemente pode-se esquecer completamente dos termos de superfície, portanto integrando por partes o termo quadrático em X^μ e usando; $\tilde{\eta}^C = \sqrt{g} \eta^C = \rho \eta^C$ temos:

$$W = \int_{\zeta} \prod D V D \xi D \tilde{\eta} \prod_{\mu=1}^D D X^\mu \exp(S)$$

com

$$S = \int d^2 \zeta \left\{ - \frac{\mu_0}{2} \frac{X^\mu}{\sqrt{\rho}} \partial_a \partial_a \frac{X^\mu}{\sqrt{\rho}} - i \xi \sqrt{\rho} \not{\partial} \left(\frac{\tilde{\eta}}{\rho} \right) \right\} \quad (\text{III-22})$$

ou

$$S = \int d^2 \zeta \left\{ \frac{\mu_0}{2} X^\mu \Delta X^\mu - i \xi \sqrt{\rho} \not{\partial} \left(\frac{\tilde{\eta}}{\rho} \right) \right\} ; \quad (\text{III-23})$$

$$\Delta = - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \partial_a^2 \frac{1}{\sqrt{\rho}} \quad (\text{III-24})$$

No capítulo 1 havíamos notado que a ação clássica para a corda bosônica fechada era invariante por transformações de Weyl:

$$g_{ab} \rightarrow (\exp \alpha(\zeta)) g_{ab}$$

No caso do gauge conforme $g_{ab} = \rho \delta_{ab}$, a transformação acima corresponde a:

$$\rho \rightarrow (\exp \alpha(\zeta)) \rho \quad (\text{III-25})$$

É fácil ver (vide apêndice C) que a transformação acima induz as transformações de Weyl dos campos $\tilde{\eta}$, X^μ , e

ξ abaixo:

$$X^\mu \rightarrow (\exp(\alpha(\zeta)/2))X^\mu ; \tilde{\eta} \rightarrow (\exp \alpha(\zeta))\tilde{\eta} ; \xi \rightarrow (\exp - \frac{\alpha(\zeta)}{2})\xi$$

(III-26)

Vemos que a ação (III-22) é invariante pelas transformações (III-25) e (III-26) feitas simultaneamente. Trabalhando-se infinitesimalmente, ou seja, com $\alpha(\zeta)$ pequeno temos:

$$\delta S = S' - S = \delta\rho \frac{\delta S}{\delta\rho} + \delta\tilde{\eta} \frac{\delta S}{\delta\tilde{\eta}} + \delta\xi \frac{\delta S}{\delta\xi} + \delta X^\mu \frac{\delta S}{\delta X^\mu} = 0$$

de (III-25) temos: $\delta\rho = \alpha(\zeta)\rho$ e assim:

$$\delta\tilde{\eta} \frac{\delta S}{\delta\tilde{\eta}} + \delta\xi \frac{\delta S}{\delta\xi} + \delta X^\mu \frac{\delta S}{\delta X^\mu} = - \alpha(\zeta)\rho \frac{\delta S}{\delta\rho} = \delta'S ,$$

$\delta'S$ corresponde a variação de S ao efetuarmos (III-26) infinitesimalmente.

Portanto se realizarmos apenas a transformação (III-26) sem alterarmos o campo ρ o funcional gerador mudará da seguinte maneira:

$$W = \int \mathcal{D}\beta e^S \rightarrow \int \mathcal{D}\beta' e^{S'} = W' \quad \mathcal{D}\beta = \prod_{\zeta} \mathcal{D}V \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\tilde{\eta} \prod_{\mu=1}^D \mathcal{D}X^\mu$$

(III-27)

como $S' = S + \delta'S = S - \alpha(\zeta)\rho \frac{\delta S}{\delta\rho}$, temos:

$$W' = \int \mathcal{D}\beta' e^{S - \alpha(\zeta)\rho \frac{\delta S}{\delta\rho}}$$

Será mostrado que as transformações (III-26) dão origem a um fator Jacobiano não nulo que pode ser escrito na forma de uma exponencial:

$$\mathcal{D}\beta' = \mathcal{D}\beta \exp\left(\int d^2\zeta \alpha(\zeta) A(\rho)\right) \quad (\text{III-28})$$

e assim

$$W' = \int \mathcal{D}\beta e^S \exp\left\{\int d^2\zeta \alpha(\zeta) \left(-\rho \frac{\delta S}{\delta \rho} + A(\zeta)\right)\right\}, \quad (\text{III-29})$$

com

$$U|\alpha| = \int d^2\zeta \alpha(\zeta) \left(-\rho \frac{\delta S}{\delta \rho} + A(\rho)\right),$$

analogamente ao caso da anomalia quiral temos a expansão:

$$\begin{aligned} W' &\cong \int \mathcal{D}\beta e^S \left\{1 + \frac{\delta U}{\delta \alpha} \alpha(\zeta)\right\} \\ &= \int \mathcal{D}\beta e^S \alpha(\zeta) \left(-\rho \frac{\delta S}{\delta \rho} + A(\rho)\right) + W \end{aligned}$$

Portanto impondo-se a invariancia do funcional gerador sob

(III-25) obteremos uma equação diferencial em derivadas funcionais na forma de uma identidade de Ward-Takahashi:

$$\text{De } \frac{1}{W} \frac{\delta W}{\delta \alpha} = 0 \quad \text{temos:}$$

$$\left\langle \rho \frac{\delta S}{\delta \rho} \right\rangle = \langle A \rangle \quad (\text{III-30})$$

Onde 'A' é a chamada anomalia de Weyl, 'A' depende apenas do fator conforme ρ e portanto quando $A = 0$ tem-se

novamente a simetria de Weyl explícita. Vemos então que o papel principal das transformações (III-26) é o de isolar a dependência de S (III-22) com relação ao fator conforme ρ . Além disso, como foi visto no capítulo 1, a invariância de Weyl implicava na anulação do traço do tensor energia-momento:

$$T^{ab} = \frac{\delta S}{\delta g_{ab}} \quad ; \quad T^a_a = 0$$

No gauge conforme, $g_{ab} = \rho \delta_{ab}$, temos:

$$\frac{\delta S}{\delta \rho} \rho = \frac{\delta S}{\delta g_{ab}} \frac{\delta g_{ab}}{\delta \rho} \rho = \frac{\delta S}{\delta g_{ab}} \frac{\delta g_{ab}}{\delta \rho} \rho = T^{ab} g_{ab} = T^a_a$$

substituindo em (III-30) acima temos: $\langle T^a_a \rangle = \langle A \rangle$.

Por essa razão se costuma chamar a anomalia de Weyl de anomalia do traço do tensor energia-momento.

Para obter-se a anomalia de Weyl ' A ' deve-se calcular a variação da medida de W (III-27) devido as transformações (III-26). Para esse cálculo usa-se a mesma tática usada nos casos da anomalia quiral e da verificação da invariância de $\mathcal{D}_\mu$ por B.R.S.T., ou seja, expande-se os campos $\tilde{\eta}$, ξ e χ^μ em autofunções de certos operadores convenientes e então passa-se a trabalhar com os coeficientes dessa expansão, em seguida escreve-se o jacobiano de (III-26) na forma de uma exponencial que finalmente é regularizada.

Escolha dos Operadores Convenientes

No caso da anomalia quiral expande-se o espinor ψ em autofunções de $(i\not{D})$ principalmente por três razões:

- 1) $(i\not{D})^+ = (i\not{D})$, essa hermiticidade garante que $i\not{D}$ possua um conjunto completo de autofunções e consequentemente é possível trabalhar-se com o operador $(i\not{D})^2$ na regularização do fator infinito obtido no jacobiano, pois $(i\not{D})^2$ possui autovalores positivos ($\lambda_n^2 > 0$), o que equivale a dizer tecnicamente que $(i\not{D})^2$ é um operador definido semi-positivo.
- 2) O operador $(i\not{D})$ é covariante de gauge e isso garante que todo processo de regularização seja covariante de gauge, o que é muito importante, pois a teoria (no caso a Q.E.D.) foi construída baseando-se na simetria de gauge.
- 3) Ao expandirmos ψ , e consequentemente $\bar{\psi}$, em autofunções de $(i\not{D})$ a parte fermiônica da ação da Q.E.D. ficou completamente diagonalizada com:

$$\psi(x) = \sum_n a_n \phi_n(x), \quad \bar{\psi}(x) = \sum_m \bar{b}_m \bar{\phi}_m(x), \quad (i\not{D})\phi_m = \lambda_m \phi_m$$

usando a ortonormalidade das autofunções ϕ_m obtem-se:

$$\int d^4x \bar{\psi}(i\not{D}-m)\psi = \sum_n \bar{b}_n a_n (\lambda_n - m)$$

Analogamente exigiremos que as expressões para $\tilde{\eta}$, ξ e $\tilde{X}^\mu$ sejam tais que a ação da corda (III-23) seja diagonal e ainda satisfaça condições análogas a 1) e 2).

Observando-se então a ação (III-23), para que o seu 1º termo seja diagonal devemos expandir $\tilde{X}^\mu$ em autofunções de Δ :

$$\tilde{X}^\mu = \sum_n k_n \tilde{\Omega}_n^\mu ; \quad \Delta \tilde{\Omega}_n^\mu = \alpha_n \tilde{\Omega}_n^\mu$$

com* $(\partial_a)^+ = -\partial_a$ temos:

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{\rho}} \partial_a \partial_a \frac{1}{\sqrt{\rho}} = U^+ U, \quad U = \partial_a \frac{1}{\sqrt{\rho}}$$

Portanto Δ é explicitamente hermiteano, é fácil ver que Δ é também definido semi-positivo:

$$\langle \tilde{\Omega}_n^\mu | \Delta | \tilde{\Omega}_n^\mu \rangle = \alpha_n \langle \tilde{\Omega}_n^\mu | \tilde{\Omega}_n^\mu \rangle = \langle \tilde{\Omega}_n^\mu | U^+ U | \tilde{\Omega}_n^\mu \rangle$$

$$\alpha_n = \frac{\langle U \tilde{\Omega}_n^\mu | U \tilde{\Omega}_n^\mu \rangle}{\langle \tilde{\Omega}_n^\mu | \tilde{\Omega}_n^\mu \rangle} = \frac{\text{norma de } |U \tilde{\Omega}_n^\mu\rangle}{\text{norma de } |\tilde{\Omega}_n^\mu\rangle}$$

* A operação de conjugação hermiteana sempre pressupõe a definição de um produto escalar e neste capítulo o produto escalar é definido como se a variedade 'M' fosse totalmente chata, por isso os resultados são os usuais da mecânica quântica com espaço-tempo chato (para maiores detalhes ver apêndice C).

Como a norma de um estado $\bar{e}$ sempre positiva temos:

$$\alpha_n > 0 \quad (\text{III-31})$$

Vemos então que o operador Δ satisfaz condições a nálogas às condições 1) e 3) satisfeitas pelo operador $(i\partial)^2$.

Com relação a covariância do processo de regularização, condições 2), podemos dizer que, no caso da Q.E.D. a si metria de gauge fez com que fosse escolhido para o processo de regularização um operador covariante de gauge, $(i\partial)^2$. Analogamente, no caso da corda $\bar{e}$ preciso que os operadores usados no cálculo da anomalia de Weyl sejam covariantes perante as trans formações de simetria da teoria.

Em princípio a teoria de cordas possui simetria por quaisquer reparametrizações, mas como estamos trabalhando no gauge conforme restam apenas as simetrias por reparametrizações analíticas que são equivalentes as transformações conformes (ver capítulo 1), portanto $\bar{e}$ preciso que os operadores usa dos no cálculo da anomalia de Weyl possam ser escritos em termos de derivadas covariantes sob transformações conformes, como veremos adiante isso não acontece com o operador Δ e por es ta razão não trabalharemos com esse operador no processo de re gularização dos infinitos que aparecerão no cálculo da anomalia de Weyl. Embora seja interessante usarmos esse operador no início do cálculo com o objetivo de descobrir o operador covariante que será realmente utilizado no cálculo da anomalia de Weyl.

Analogamente a X^μ , expandiremos $\tilde{\eta}$ e ξ em autofunções

de certos operadores tal que o 2º termo da ação da corda (III-23):

$$\int d^2\zeta \xi(\zeta) \left(\sqrt{\rho} \not{\partial} \frac{1}{\rho} \right) \tilde{\eta}(\zeta) \quad (\text{III-32})$$

seja diagonal.

Para diagonalizar esse termo é interessante fazer-se uma analogia com o caso da diagonalização geral de matrizes finitas⁽²⁰⁾.

Seja o produto de três matrizes finitas:

$$\alpha = \xi M \tilde{\eta}$$

onde ξ = matriz linha $1 \times N$

M = matriz quadrada $N \times N$

$\tilde{\eta}$ = matriz coluna $N \times 1$

α = um número

Sempre podemos diagonalizar M da seguinte maneira:

$$M = V \Lambda U^+ \quad (\text{III-33})$$

onde V e U são unitárias: $V^+V = VV^+ = 1 = U^+U = UU^+$ e Λ é uma matriz diagonal.

Portanto se escrevermos:

$$\xi = CV^+ \quad \text{e} \quad \tilde{\eta} = UB, \quad (\text{III-34})$$

onde C é uma matriz linha e B é uma matriz coluna, usando (III-33) tem-se:

$$\alpha = \xi M \tilde{\eta} = CV^+ M UB = CV^+ V \Lambda U^+ UB = C \Lambda B = \sum_{ij} c_i \Lambda_{ij} b_j$$

mas $\Lambda_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ e obtem-se a forma diagonal:

$$\alpha = \sum_i c_i b_i \lambda_i$$

que é exatamente o que queremos fazer com (III-32).

Sejam as expansões:

$$\tilde{\eta}(\zeta) = \sum_n b_n \tilde{\psi}_n(\zeta) = \sum_n b_n \langle \zeta | \tilde{\psi}_n \rangle, \quad \tilde{\eta} = \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_1 \\ \tilde{\eta}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{III-35})$$

$$\xi(\zeta) = \sum_m c_m \phi_m(\zeta) = \sum_m c_m \langle \zeta | \phi_m \rangle, \quad (\text{III-36})$$

onde os $\phi_m(\zeta)$ são matrizes 1×2 : $(\phi_m^1 \phi_m^2)$.

Podemos supor que $\langle \zeta | \phi_m \rangle$, por exemplo, é o elemento de uma matriz cujas linhas são numeradas pelo índice discreto 'm' e as colunas numeradas pelo índice contínuo ζ e vice-versa no caso de $\langle \zeta | \tilde{\psi}_n \rangle$, assim escrevemos analogamente a (III-34):

$$\tilde{\eta} = U \cdot B \quad ; \quad \xi = C V^+$$

com

$$U = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1(\zeta) & \tilde{\psi}_2(\zeta) \dots \\ \tilde{\psi}_1(\zeta+d\zeta) & \tilde{\psi}_2(\zeta+d\zeta) \dots \\ | & | \dots \end{pmatrix}; \quad V = \begin{pmatrix} \phi_1^T(\zeta) & \phi_2^T(\zeta) \dots \\ \phi_1^T(\zeta+d\zeta) & \phi_2^T(\zeta+d\zeta) \dots \\ | & | \dots \end{pmatrix}$$

com

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = (c_1 c_2 \dots)$$

OBS.: as linhas cheias indicam que ζ é um índice contínuo.

ϕ_m^T significa que temos agora matrizes 2×1 (coluna).

V e U são unitárias se admitirmos que $\{\phi_n\}$ e $\{\tilde{\psi}_n\}$ são conjuntos completos ortonormais de autofunções, pois no produto V^+V teremos por exemplo:

$$\int d^2\zeta \langle \phi_n | \zeta \rangle \langle \zeta | \phi_m^T \rangle = \delta_{nm} ,$$

analogamente para U^+U .

Portanto se os argumentos válidos para as matrizes finitas forem válidos também para as matrizes infinitas a cima então dizemos que as expansões (III-35) e (III-36) diagonalizam o termo (III-32). Agora é necessário saber quais os operadores cujas $\phi_n(\zeta)$ e $\tilde{\psi}_m(\zeta)$ são autofunções, para isso notemos de (III-33) que:

$$M^+M U = (U\Lambda^+V^+V\Lambda U^+)U = U(\Lambda^+\Lambda)$$

e analogamente $MM^+V = V\Lambda^+\Lambda$

Comparando-se as colunas das matrizes MM^+V e $V\Lambda^+\Lambda$ com:

$$\Lambda^+\Lambda = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_N|^2 \end{pmatrix},$$

temos:

$$MM^+ v_n = |\lambda_n|^2 v_n$$

onde v_n é a n -ésima coluna de V , analogamente $M^+M u_n = \lambda_n^2 u_n$, e u_n é a n -ésima coluna de U .

Portanto fazendo-se a analogia entre as matrizes finitas e as infinitas comparando $\alpha = \xi M \tilde{\eta}$ com (III-32) temos a identificação:

$$M = \sqrt{\rho} \not{x} \frac{1}{\rho} \rightarrow M^+ = - \frac{1}{\rho} \not{x} \sqrt{\rho}$$

e olhando para as colunas de U e V na página 120 devemos ter:

$$MM^+ \phi_n^T = |\lambda_n|^2 \phi_n^T \quad \text{e} \quad M^+M \tilde{\psi}_n = |\lambda_n|^2 \tilde{\psi}_n$$

ou explicitamente:

$$(- \sqrt{\rho} \not{x} \frac{1}{\rho} \not{x} \sqrt{\rho}) \phi_n^T = |\lambda_n|^2 \phi_n^T ; (- \frac{1}{\rho} \not{x} \rho \not{x} \frac{1}{\rho}) \tilde{\psi}_n = |\lambda_n|^2 \tilde{\psi}_n$$

Os operadores MM^+ e M^+M são explicitamente hermitianos e definidos semi-positivos e embora, analogamente a Δ , não sejam covariantes sob transformações conformes serão usados inicialmente no cálculo da anomalia de Weyl com o objetivo de se descobrir os operadores verdadeiramente covariantes a serem utilizados efetivamente.

Assim temos a tabela abaixo:

Campos	Autofunções	Operadores
$\tilde{\eta}$	$\tilde{\psi}_n$	$M^+M = (- \frac{1}{\rho} \not{x} \rho \not{x} \frac{1}{\rho})$
ξ	ϕ_n	$MM^+ = (- \sqrt{\rho} \not{x} \frac{1}{\rho} \not{x} \sqrt{\rho})$
χ^μ	$\tilde{\Omega}_n^\mu$	$\Delta = - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \partial_a \partial_a \frac{1}{\sqrt{\rho}}$

Tabela 1 - Autofunções dos correspondentes operadores usados nas expansões dos correspondentes campos.

Estamos então em condições de avaliar a variação da medida do funcional gerador W :

$$\mathcal{D}\beta = \prod_{\zeta} \mathcal{D}V(\zeta) \mathcal{D}\xi(\zeta) \mathcal{D}\tilde{\eta}(\zeta) \prod_{\mu=1}^D \mathcal{D}X^{\mu}(\zeta)$$

sob as transformações (III-26).

A avaliação é feita separadamente para cada campo e o cálculo é totalmente análogo ao cálculo feito na demonstração da invariança da medida da integral de Trajetória, $\mathcal{D}\mu$, sob B.R.S.T.

a) $\prod_{\zeta} \prod_{\mu=1}^D \mathcal{D}X^{\mu}(\zeta)$: de acordo com a tabela 1 e (III-31) tem-se:

$$X^{\mu} = \sum_n k_n \tilde{\Omega}_n^{\mu} ; \quad \Delta \tilde{\Omega}_n^{\mu} = \left(-\frac{1}{\sqrt{\rho}} \partial^2 \frac{1}{\sqrt{\rho}} \right) \tilde{\Omega}_n^{\mu} = \alpha_n \tilde{\Omega}_n^{\mu}$$

com:

$$\alpha_n > 0 \text{ e } \partial^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$$

Os $\tilde{\Omega}_n^{\mu}$ formam um conjunto completo ortonormal:

$$\int d^2\zeta \tilde{\Omega}_n^{\mu} \tilde{\Omega}_m^{\mu} = \delta_{nm} \quad (\text{III-37})$$

onde μ não está sendo somado, e

$$\sum_n \tilde{\Omega}_n^{\mu}(\zeta) \tilde{\Omega}_n^{\mu}(\zeta') = \delta^2(\zeta - \zeta') \quad (\text{III-38})$$

de (III-26) temos:

$$X^{\mu'} = \{ \exp \alpha(\zeta)/2 \} X^{\mu} \cong \left(1 + \frac{\alpha(\zeta)}{2} \right) X^{\mu}$$

e assim

$$\sum_n k'_n \tilde{\Omega}_n^\mu = (1 + \frac{\alpha(\zeta)}{2}) \sum_m k_m \tilde{\Omega}_m^\mu ,$$

usando (III-37) obtemos:

$$dk'_n = C_{nm} dk_m$$

onde

$$C_{nm} = \delta_{nm} + \int d^2\zeta \tilde{\Omega}_n^\mu \frac{\alpha(\zeta)}{2} \tilde{\Omega}_m^\mu ,$$

analogamente aos casos anteriores obtemos:

$$\det C \equiv \exp\{\frac{1}{2} \sum_n (\int d^2\zeta \tilde{\Omega}_n^\mu \alpha(\zeta) \tilde{\Omega}_n^\mu)\}$$

e

$$\prod_n dk'_n = \prod_m dk_m \det C = \prod_m dk_m \exp\{\frac{1}{2} \sum_n (\int d^2\zeta \tilde{\Omega}_n^\mu \alpha \tilde{\Omega}_n^\mu)\} ,$$

a menos de constantes tem-se:

$$\prod_\zeta \mathcal{D}X^\mu(\zeta) = \prod_n dk_n$$

logo:

$$\prod_\zeta \mathcal{D}X^{\mu'}(\zeta) = \prod_\zeta \mathcal{D}X^\mu(\zeta) \exp\{\frac{1}{2} \sum_n \int d^2\zeta \tilde{\Omega}_n^\mu(\zeta) \alpha(\zeta) \tilde{\Omega}_n^\mu(\zeta)\} \quad (\text{III-39})$$

de (III-38) temos

$$\lim_{\zeta' \rightarrow \zeta} \sum_n \tilde{\Omega}_n^\mu(\zeta) \tilde{\Omega}_n^\mu(\zeta') = \infty$$

Dessa forma é necessário regularizar a quantidade:

$$\sum_n \tilde{\Omega}_n^\mu(\zeta) \tilde{\Omega}_n^\mu(\zeta) .$$

Como havia sido observado antes, o operador Δ não é covariante sob transformações conformes e consequentemente não podemos usar as autofunções $\tilde{\Omega}_n^\mu$ num processo de regularização que seja covariante. Entretanto a partir da equação de autovalores de Δ é fácil obter um operador que além de ser hermiteano e definido semi-positivo e covariante sob transformações conformes:

$$\Delta \tilde{\Omega}_n^\mu = \left(-\frac{1}{\sqrt{\rho}} \partial^2 \frac{1}{\sqrt{\rho}} \right) \tilde{\Omega}_n^\mu = \alpha_n \tilde{\Omega}_n^\mu ; \quad X^\mu = \sum_n k_n \tilde{\Omega}_n^\mu$$

e como havíamos visto (III-31): $\alpha_n > 0$, definindo:

$$\tilde{\Omega}_n^\mu = \sqrt{\rho} \Omega_n^\mu \quad (\text{III-41})$$

podemos reescrever a equação de autovalores acima:

$$\left(-\frac{1}{\rho} \partial^2 \right) \Omega_n = \alpha_n \Omega_n \quad \text{ou} \quad (-D) \Omega_n = \alpha_n \Omega_n ; \quad D = \frac{1}{\rho} \partial^2$$

É evidente que $-D$ é um operador definido semi-positivo.

Reescrevendo (III-37) e (III-38) a partir de III-41 temos:

$$\int d^2\zeta \rho(\zeta) \Omega_n^\mu(\zeta) \Omega_m^\mu(\zeta) = \delta_{nm} \quad (\text{III-42})$$

$$\sum_n \Omega_n^\mu(\zeta) \Omega_n^\mu(\zeta') = \delta^c(\zeta - \zeta') = \frac{\delta^2(\zeta - \zeta')}{\sqrt{\rho(\zeta)} \sqrt{\rho(\zeta')}} \quad (\text{III-43})$$

onde δ^c é o delta de Dirac no espaço conformalmente chato ,
 $g_{ab} = \rho \delta_{ab}$:

$$\int d^2 \zeta \sqrt{g} \cdot \delta^c(\zeta - \zeta') = \int d^2 \zeta \rho(\zeta) \frac{\delta^2(\zeta - \zeta')}{\sqrt{\rho(\zeta)} \sqrt{\rho(\zeta')}} = 1$$

a partir da definição de $\tilde{X}^\mu$: $\tilde{X}^\mu = g^{1/4} X^\mu$, usando III-41 e a expansão de $\tilde{X}^\mu$ em $\tilde{\Omega}_n^\mu$ temos:

$$X^\mu(\zeta) = \sum_n k_n \Omega_n^\mu(\zeta)$$

Portanto as autofunções Ω_n^μ são escalares por reparametrizações da mesma maneira que os campos da corda X^μ e vemos que o produto escalar no espaço de Hilbert III-42, pode ser escrito na forma explicitamente invariante sob transformações conformes:

$$\int d^2 \zeta \rho(\zeta) \Omega_n^\mu \Omega_m^\mu = \int d^2 \zeta \sqrt{g} \times \text{escalar}$$

A definição acima corresponde a definição natural do produto escalar no espaço de Hilbert no caso de variedades que não são planas ($g \neq 1$), ver apêndice C.

Com o produto escalar (III-42) não é difícil ver que o operador $-D$ além de ser definido semi-positivo é hermiteano e explicitamente covariante sob transformações conformes (ver apêndice C). Consequentemente podemos usá-lo no processo de regularização, basta reescrever III-39, a partir de $\tilde{\Omega}_n^\mu = \sqrt{\rho} \Omega_n^\mu$ obtemos:

$$\Pi \mathcal{D} X^\mu(\zeta) = \Pi \mathcal{D} X^\mu(\zeta) \exp \left\{ \frac{1}{2} \cdot \int d^2 \zeta \rho(\zeta) \sum_n \Omega_n^\mu(\zeta) \Omega_n^\mu(\zeta) \right\} \quad (\text{III-44})$$

de III-43 temos:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta} \sum_n \Omega_n^\mu(\zeta) \Omega_n^\mu(\zeta') = \infty,$$

Lembrando que:

$$(-D) \Omega_n^\mu = \alpha_n \Omega_n^\mu$$

com

$$\alpha_n > 0,$$

analogamente ao que foi feito no caso da anomalia quiral podemos regularizar a quantidade $\sum_n \Omega_n^\mu(\zeta) \Omega_n^\mu(\zeta)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \sum_n \Omega_n^\mu(\zeta) \Omega_n^\mu(\zeta) &= \lim_{t \rightarrow 0} \lim_{\zeta' \rightarrow \zeta} \sum_n \Omega_n^\mu(\zeta') e^{-\alpha_n t} \Omega_n(\zeta); \quad t > 0 * \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \lim_{\zeta' \rightarrow \zeta} \sum_n \Omega_n^\mu(\zeta') e^{D(\zeta)t} \Omega_n(\zeta), \quad D = \frac{1}{\rho} \partial^2 \end{aligned}$$

$$\sum_n \Omega_n^\mu(\zeta) \Omega_n^\mu(\zeta) = \lim_{t \rightarrow 0} \lim_{\zeta' \rightarrow \zeta} h_D(\zeta', \zeta, t) \quad (\text{III-45})$$

$$h_D(\zeta', \zeta, t) = \sum_n \Omega_n^\mu(\zeta') e^{D(\zeta)t} \Omega_n(\zeta).$$

* Aqui t é o "cut-off" análogo de $1/M^2$ no caso da anomalia quiral.

Derivando com relação a t vemos que h_D satisfaz a equação diferencial:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D\right) h_D(\zeta', \zeta, t) = 0 \quad (\text{III-46})$$

e de (III-39) temos:

$$\lim_{t \rightarrow 0} h_D(\zeta', \zeta, t) = \delta^C(\zeta - \zeta') \quad (\text{III-47})$$

Uma função de dois pontos (ζ e ζ') que obedeça as duas equações acima é chamada de "heat Kernel" do operador D , ou operador de difusão associado ao operador D .

De (III-44) e (III-45) temos:

$$\prod_{\zeta} D X^{\mu'}(\zeta) = \prod_{\zeta} D X^{\mu}(\zeta) \exp\left\{\frac{1}{2} \int d^2 \zeta \alpha(\zeta) \rho(\zeta) \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ \zeta' - \zeta}} h_D(\zeta', \zeta, t)\right\}$$

Notando que esse resultado foi obtido para um valor fixo do índice μ , tem-se:

$$\prod_{\mu=1}^D \prod_{\zeta} D X^{\mu'}(\zeta) = \prod_{\mu=1}^D \prod_{\zeta} D X^{\mu}(\zeta) \exp\left\{\frac{D}{2} \int d^2 \zeta \alpha(\zeta) \rho(\zeta) \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ \zeta' - \zeta}} h_D(\zeta', \zeta, t)\right\} \quad (\text{III-48})$$

Antes de calcularmos especificamente h_D é interessante obtermos as expressões análogas para as novas medidas $\prod_{\zeta} D \tilde{\eta}'(\zeta)$ e $\prod_{\zeta} D \xi'(\zeta)$ advindas da transformação de Weyl (III-26):

b) $\prod_{\zeta} D \tilde{\eta}(\zeta)$; Da tabela 1: $\tilde{\eta}(\zeta) = \sum_n a_n \tilde{\psi}_n(\zeta)$, os $\tilde{\psi}_n(\zeta)$ são matrizes colunas de 2 componentes como o próprio $\tilde{\eta}$ (ver III-35)

e formam um conjunto completo ortonormal de autofunções de M^+M :

$$M^+M \tilde{\psi}_n = \left(-\frac{1}{\rho} \not{\partial} \rho \not{\partial} \frac{1}{\rho}\right) \tilde{\psi}_n = \beta_n \tilde{\psi}_n; \not{\partial} = \sigma_1 \partial_1 + \sigma_3 \partial_2$$

E como já vimos:

$$\beta_n = |\lambda_n|^2 > 0$$

$$\int d^2\zeta \tilde{\psi}_n^T \tilde{\psi}_m = \int d^2\zeta \tilde{\psi}_n^a(\zeta) \tilde{\psi}_m^a(\zeta) = \delta_{nm} \quad (\text{III-49})$$

$$\sum_n \tilde{\psi}_n^a(\zeta) \tilde{\psi}_n^a(\zeta') = \delta^2(\zeta - \zeta') \quad (\text{III-50})$$

Da transformação de Weyl para $\tilde{\eta}$: $\tilde{\eta}' = (\exp \alpha(\zeta)) \tilde{\eta}$ e usando (III-49) além da expansão acima para $\tilde{\eta}$, com $\alpha(\zeta)$ pequeno temos:

$$a'_n = C_{nm} a_m \quad C_{nm} = \delta_{nm} + \int d^2\zeta \tilde{\psi}_n^a \alpha(\zeta) \tilde{\psi}_m^a \quad (\text{III-51})$$

como $\tilde{\eta}$ tem carácter fermiônico devemos lembrar da integral de Berezin e temos:

$$\prod_n da'_n = \prod_m da_m (\det C)^{-1},$$

consequentemente:

$$(\det C)^{-1} \cong 1 - \sum_n \int d^2\zeta \tilde{\psi}_n^a \alpha \tilde{\psi}_n^a$$

e

$$\prod_n da'_n = \prod_m da_m \exp\left\{- \int \left(\sum_n \tilde{\psi}_n^a(\zeta) \tilde{\psi}_n^a(\zeta)\right) \alpha(\zeta) d^2\zeta\right\}$$

e a menos de constantes:

$$\prod_{\zeta} \mathcal{D}\tilde{\eta}(\zeta) = \prod_m da_m ,$$

assim obtem-se:

$$\prod_{\zeta} \mathcal{D}\tilde{\eta}(\zeta)' = \prod_{\zeta} \mathcal{D}\tilde{\eta}(\zeta) \exp\left\{- \int \left(\sum_n \tilde{\psi}_n^a(\zeta) \tilde{\psi}_n^a(\zeta)\right) \alpha(\zeta) d^2\zeta\right\} \quad (\text{III-52})$$

Da mesma maneira que fizemos no caso de X^μ , faremos agora, ou seja, voltaremos a trabalhar com o produto escalar no espaço de Hilbert levando em conta que M é uma variedade curva: $g_{ab} = \rho \delta_{ab}$, como:

$$\left(-\frac{1}{\rho} \not{\partial} \rho \not{\partial} \frac{1}{\rho}\right) \tilde{\psi}_n = \beta_n \tilde{\psi}_n \quad \beta_n > 0$$

$$\text{definindo: } \tilde{\psi}_n(\zeta) = \rho(\zeta) \psi_n(\zeta) \quad (\text{III-52})$$

obtemos:

$$\left(-\frac{\not{\partial} \rho \not{\partial}}{\rho^2}\right) \psi_n(\zeta) = \beta_n \psi_n(\zeta) \text{ ou } (-E)\psi_n = \beta_n \psi_n \text{ com } E = \frac{1}{\rho^2} \not{\partial} \rho \not{\partial}$$

vemos que $(-E)$ é definido semi-positivo.

Usando III-52 em III-49 e III-50 temos:

$$\int d^2\zeta \psi_n^a(\zeta) \psi_m^a(\zeta) \rho^2 = \delta_{nm} \quad (\text{III-54})$$

$$\sum_n \psi_n^a(\zeta') \psi_n^a(\zeta) = \frac{\delta^2(\zeta' - \zeta)}{\rho(\zeta') \rho(\zeta)} = \sum_n \psi_n^T(\zeta') \psi_n(\zeta) \quad (\text{III-55})$$

O produto escalar (III-51) é um escalar por reparametrizações. Seja:

$$\tilde{\eta}^a = \sum_n a_n \tilde{\psi}_n^a ; \quad \eta^a = \sum_n a_n \psi_n^a(\zeta) ; \quad \tilde{\psi}^a = \rho(\zeta) \psi^a(\zeta)$$

Toda dependência local de η^a está em ψ_n^a pois os coeficientes a_n são constantes. Portanto ψ_n^a possui o mesmo carácter tensorial sob reparametrizações que η^a , mas como vemos no apêndice C, η^a se comporta como um vetor sob reparametrizações (como esperado, pois $\epsilon^a = \theta \eta^a$) e assim ψ_n^a também o será, então $\psi_n^a \psi_{na}$ deve ser um escalar e o produto no espaço de Hilbert invariante por transformações conformes deve ser dado por:

$$\langle \psi_n, \psi_m \rangle = \int d^2 \zeta \sqrt{g} \psi_n^a \psi_{ma} = \int d^2 \zeta \sqrt{g} \psi_n^a \psi_m^b g_{ab}$$

mas no gauge conforme $g_{ab} = \rho \delta_{ab}$; $\sqrt{g} = \rho$ assim:

$$\langle \psi_n, \psi_m \rangle = \int d^2 \zeta \rho^2 \psi_n^a \psi_m^a$$

que é precisamente (III-54).

Com esse produto escalar é fácil ver que $-E$ além de ser definido semi-positivo é hermiteano, podendo ser escrito numa forma explicitamente covariante sob transformações conformes. Portanto analogamente ao caso anterior de X^μ devemos reescrever o infinito da exponencial de (III-52) em termos das autofunções de $(-E)$, ou seja, usando:

$$\tilde{\psi}_n^a(\zeta) = \rho(\zeta) \psi_n^a(\zeta)$$

obtem-se:

$$\sum_n \tilde{\psi}_n^a(\zeta) \tilde{\psi}_n^a(\zeta) = \lim_{\zeta' \rightarrow \zeta} \sum_n \tilde{\psi}_n^a(\zeta') \tilde{\psi}_n^a(\zeta) = \lim_{\zeta' \rightarrow \zeta} \sum_n \rho(\zeta) \rho(\zeta') \psi_n^a(\zeta') \psi_n^a(\zeta)$$

A nova medida $\Pi_{\zeta} \mathcal{D} \tilde{\eta}'(\zeta)$ em (III-52) pode ser escrita:

$$\Pi_{\zeta} \mathcal{D} \tilde{\eta}(\zeta)' = \Pi_{\zeta} \mathcal{D} \tilde{\eta}(\zeta) \exp \left\{ - \int d^2 \zeta \rho(\zeta) \left(\lim_{\zeta' \rightarrow \zeta} \rho(\zeta') \sum_n \psi_n^a(\zeta') \psi_n^a(\zeta) \right) \right\} \quad (\text{III-56})$$

Analogamente ao caso de $\mathcal{D} X^{\mu}$ queremos que apareça na exponencial III-56 o "heat kernel" do operador E, assim temos a regularização:

$$\lim_{\zeta' \rightarrow \zeta} \rho(\zeta') \sum_n \psi_n^a(\zeta') \psi_n^a(\zeta) = \lim_{t \rightarrow 0} \lim_{\zeta' \rightarrow \zeta} \sum_n \psi_n^a(\zeta') e^{-t \beta_n} \psi_n^a(\zeta), \quad \beta_n > 0$$

com

$$(-E) \psi_n^a = \beta_n \psi_n^a = \frac{1}{\rho} \not{\partial} \rho \not{\partial} \quad (\text{III-57})$$

onde $\not{\partial} = \sigma_1 \partial_1 + \sigma_3 \partial_2$, tem-se:

$$\lim_{\zeta' \rightarrow \zeta} \rho(\zeta') \sum_n \psi_n^a(\zeta') \psi_n^a(\zeta) = \lim_{t \rightarrow 0} \lim_{\zeta' \rightarrow \zeta} \text{Tr} \left\{ \sum_n \psi_n^T(\zeta') e^{Et} \psi_n(\zeta) \right\} \rho(\zeta')$$

portanto:

$$\lim_{\zeta' \rightarrow \zeta} \rho(\zeta') \sum_n \psi_n^a(\zeta') \psi_n^a(\zeta) = \lim_{t \rightarrow 0} \lim_{\zeta' \rightarrow \zeta} \text{Trh}_E(\zeta', \zeta, t) \quad (\text{III-58})$$

onde

$$h_E(\zeta', \zeta, t) = \rho(\zeta') \sum_n \psi_n^T(\zeta') e^{E(\zeta)t} \psi_n(\zeta), \quad (\text{III-59})$$

Novamente derivando com relação a $t \rightarrow (\frac{\partial}{\partial t} - E) h_E = 0$

Mas para que h_E seja um "heat kernel" legítimo é preciso que ele satisfaça ainda (ver III-44):

$$\lim_{t \rightarrow 0} h_E(\zeta', \zeta, t) = \delta^C(\zeta - \zeta')$$

como é verificado abaixo:

$$\lim_{t \rightarrow 0} h_E(\zeta', \zeta, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \rho(\zeta') \sum_n \psi_n^T(\zeta') e^{E(\zeta)t} \psi_n(\zeta) \cong \rho(\zeta') \sum_n \psi_n^T(\zeta') \psi_n(\zeta)$$

usando (III-55):

$$\lim_{t \rightarrow 0} h_E(\zeta', \zeta, t) = \frac{\rho(\zeta')}{\rho(\zeta)} \frac{\delta^2(\zeta' - \zeta)}{\rho(\zeta)} = \delta^C(\zeta' - \zeta),$$

como $\sqrt{g} = \rho$ temos:

$$\int d^2\zeta \sqrt{g} \frac{\delta^2(\zeta' - \zeta)}{\rho(\zeta)} = \int d^2\zeta \delta^2(\zeta' - \zeta) = 1 = \int d^2\zeta \sqrt{g} \delta^C(\zeta' - \zeta)$$

Usando (III-56) e (III-58) tem-se:

$$\prod_{\zeta} \tilde{\mathcal{D}}\tilde{\eta}'(\zeta) = \prod_{\zeta} \tilde{\mathcal{D}}\tilde{\eta}(\zeta) \exp\left\{- \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ \zeta' \rightarrow \zeta}} \int d^2\zeta \rho(\zeta) \alpha(\zeta) \text{Tr } h_E(\zeta', \zeta, t)\right\} \quad (\text{III-60})$$

c) Analogamente, para a medida dos anti-fantasma: $\prod_{\zeta} \mathcal{D}\xi(\zeta)$, no cálculo de sua variação por transformações de Weyl (III-26):

$$\xi' = \left(\exp - \frac{\alpha}{2}\right) \xi$$

usaremos a expansão, ver tabela 1:

$$\xi = \sum_n b_n \phi_n(\zeta); \quad \xi = (\xi_1 \ \xi_2); \quad \phi_n = (\phi_{1n} \ \phi_{2n})$$

onde os $\{\phi_n(\zeta)\}$ são um conjunto completo de autofunções do operador MM^+ :

$$MM^+ \phi_n^T = \left(-\sqrt{\rho} \not\partial - \frac{1}{\rho} \not\partial \sqrt{\rho}\right) \phi_n^T = \gamma_n \phi_n^T \quad \gamma_n > 0 \quad (\text{III-61})$$

$$\int d^2\zeta \ \phi_n \phi_m^T = \delta_{nm} = \int d^2\zeta \ \phi_{a(n)} \ \phi_{a(m)} = \delta_{nm} \quad (\text{III-62})$$

$$\phi_n(\zeta') \phi_n^T(\zeta) = \delta^2(\zeta' - \zeta) = \sum_{n,a} \phi_{a(n)}(\zeta') \phi_{a(n)}(\zeta) \quad (\text{III-63})$$

Trabalhando-se com a transformação de Weyl infinitesimal, usando-se III-61 e lembrando que ξ e consequentemente b_n possuem carácter fermiônico obtem-se analogamente ao caso anterior de $\tilde{\eta}$:

$$\prod_{\zeta} \mathcal{D}\xi'(\zeta) = \prod_{\zeta} \mathcal{D}\xi(\zeta) \exp\left\{+\frac{1}{2} \int d^2\zeta \sum_n (\phi_{a(n)} \alpha \phi_{a(n)})\right\} \quad (\text{III-64})$$

Definindo $\phi_n = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \bar{\phi}_n$, a partir da equação de autovalores III-61 obtem-se:

$$\left(-\rho \not\partial - \frac{1}{\rho} \not\partial\right) \bar{\phi}_m^T = (-F) \bar{\phi}_n^T = \gamma_n \bar{\phi}_m^T, \quad \text{com } F = \rho \not\partial - \frac{1}{\rho} \not\partial$$

Vemos então que $-F$ é um operador definido semi-positivo.

com $\phi_n = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \bar{\phi}_n$ em (III-62) e (III-63) temos:

$$\sum_a \int d^2\zeta \frac{1}{\rho} \bar{\phi}_{a(n)} \bar{\phi}_{a(m)} = \delta_{nm} \quad (\text{III-66})$$

$$\sum_{a,n} \bar{\phi}_{a(n)}(\zeta') \bar{\phi}_{a(n)}(\zeta) = \sum_n \bar{\phi}_{(n)}(\zeta') \bar{\phi}_{(n)}^T(\zeta) = \sqrt{\rho(\zeta)} \sqrt{\rho(\zeta')} \delta^2(\zeta' - \zeta) \quad (\text{III-67})$$

Vemos que $(-F)$ definido em (III-65) é hermitiano com o produto escalar (III-63) pois o fator $1/\rho$ cancela o fator ρ de $(-F)$ e temos $\frac{1}{2}$ que é hermiteano no espaço chato. Mostra-se que $(-F)$ pode ser escrito numa forma explicitamente covariante sob transformações conformes (ver apêndice C).

Obsevação

Para verificarmos que o produto escalar no espaço de Hilbert definido em (III-66) acima é invariante por transformações conformes notemos que se α_{ab} é um tensor de segunda ordem por reparametrizações e além disso é simétrico e de traço nulo: $\alpha_{11} = -\alpha_{22}$; $\alpha_{12} = \alpha_{21}$.

Então $\alpha^{ab} \alpha_{ab}$ é um escalar, e o produto no espaço de Hilbert invariante por transformações conformes é dado por*:

* O fator $1/2$ vem do fato que α_{ab} possui apenas 2 graus de liberdade que são contados duplamente ao escrevermos $\alpha^{ab} \alpha_{ab}$.

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = \frac{1}{2} \int d^2 \zeta \sqrt{g} \alpha^{ab} \alpha_{ab} = \frac{1}{2} \int d^2 \zeta \sqrt{g} g^{ac} g^{bd} \alpha_{cd} \alpha_{ab},$$

no gauge conforme $g^{ab} = 1/\rho \delta^{ab}$ e $\sqrt{g} = \rho$,

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \alpha \rangle &= \frac{1}{2} \int d^2 \zeta \frac{1}{\rho} (\alpha_{ab})(\alpha_{ab}) = \frac{1}{2} \int d^2 \zeta \frac{2}{\rho} \{(\alpha_{11})^2 + (\alpha_{12})^2\} = \\ &= \int d^2 \zeta \frac{1}{\rho} \{(\alpha_{11})^2 + (\alpha_{12})^2\} \end{aligned}$$

Definindo $\bar{\xi} = \sum_n b_n \bar{\phi}_n$, como b_n são constantes o carácter tensorial das autofunções $\bar{\phi}_n$ é o mesmo do campo $\bar{\xi}$ e no apêndice C relacionamos as duas componentes $\bar{\xi}_1$ e $\bar{\xi}_2$ com as componentes α_{11} e α_{12} de um tensor α_{ab} antissimétrico de traço nulo. Dessa forma vemos que o produto escalar III-66 é invariante por transformações conformes da mesma maneira que $\langle \alpha | \alpha \rangle$.

Analogamente aos casos anteriores podemos reescrever a nova medida $\prod_{\zeta} \mathcal{D} \xi'(\zeta)$, expressão III-64, a partir das autofunções $\bar{\phi}_n$ e regularizar a infinidade que aparecerá, a partir do "heat kernel" do operador $-F$, com:

$$\phi_{a(n)} = \bar{\phi}_{a(n)} / \sqrt{\rho}$$

tem-se:

$$\sum_n \phi_{a(n)}(\zeta) \phi_{a(n)}(\zeta) = \lim_{\zeta' \rightarrow \zeta} \sum_n \frac{\bar{\phi}_{a(n)}(\zeta') \bar{\phi}_{a(n)}(\zeta)}{\sqrt{\rho(\zeta')} \sqrt{\rho(\zeta)}}$$

Regularizando e usando III-65 tem-se:

$$\begin{aligned}
\sum_n \phi_{a(n)}(\zeta) \phi_{a(n)}(\zeta) &= \lim_{t \rightarrow 0} \lim_{\zeta' \rightarrow \zeta} \frac{(\sum_n \bar{\phi}_{a(n)}(\zeta') e^{-\gamma_n t} \bar{\phi}_{a(n)}(\zeta)) \sqrt{\rho(\zeta')} \sqrt{\rho(\zeta)}}{\rho(\zeta') \rho(\zeta)} \\
&= \rho(\zeta) \lim_{t \rightarrow 0} \lim_{\zeta' \rightarrow \zeta} \text{Tr} \frac{\sum_n \bar{\phi}_n(\zeta') e^{+Ft} \bar{\phi}_n^T(\zeta)}{\rho(\zeta') \rho(\zeta)} \\
&= \rho(\zeta) \lim_{t \rightarrow 0} \lim_{\zeta' \rightarrow \zeta} \text{Tr} h_F(\zeta', \zeta, t) \quad (\text{III-68})
\end{aligned}$$

com

$$h_F(\zeta', \zeta, t) = \frac{\sum_n \bar{\phi}_n(\zeta') e^{F(\zeta)t} \bar{\phi}_n^T(\zeta)}{\rho(\zeta') \rho(\zeta)}$$

Usando (III-67) é fácil ver que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} h_F(\zeta', \zeta, t) = \delta^C(\zeta' - \zeta),$$

e derivando com relação a t :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - F\right) h_F(\zeta', \zeta, t) = 0$$

Portanto h_F é o legítimo "heat kernel" do operador F .

De (III-68) em (III-64) temos:

$$\prod_{\zeta} \mathcal{D}\xi'(\zeta) = \prod_{\zeta} \mathcal{D}\xi(\zeta) \exp\left\{\frac{1}{2} \int d^2\zeta \alpha(\zeta) \rho \text{Tr} \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ \zeta' \rightarrow \zeta}} h_F(\zeta', \zeta, t)\right\} \quad (\text{III-69})$$

Contabilizando a nova medida de integração funcional dos três campos $\tilde{\eta}$, X^μ e ξ (ver III-48, III-60 e III-69) após a transformação de Weyl (III-26) com:

$$\mathcal{D}\beta = \prod_{\zeta} \mathcal{D}\tilde{\eta}(\zeta) \mathcal{D}\xi(\zeta) \mathcal{D}V(\zeta) \prod_{\mu=1}^D \mathcal{D}X^{\mu}$$

temos:

$$\mathcal{D}\beta' = \mathcal{D}\beta \exp\left\{ \int d^2\zeta \alpha(\zeta) \rho(\zeta) \times \right.$$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ \zeta' \rightarrow \zeta}} \left\{ \frac{D}{2} h_D(\zeta', \zeta, t) - \text{Tr } h_E(\zeta', \zeta, t) + \frac{\text{Tr } h_F(\zeta', \zeta, t)}{2} \right\}$$

comparando com:

$$\mathcal{D}\beta' = \mathcal{D}\beta \exp \int d^2\zeta \alpha(\zeta) A(\rho)$$

obtemos

$$A(\rho) = \rho(\zeta) \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ \zeta' \rightarrow \zeta}} \left\{ \frac{D}{2} h_D(\zeta', \zeta, t) - \text{Tr } h_E(\zeta', \zeta, t) + \frac{\text{Tr } h_F(\zeta', \zeta, t)}{2} \right\} \quad (\text{III-70})$$

Portanto para calcularmos a anomalia de Weyl, $A(\rho)$, precisamos apenas obter os elementos diagonais das expressões assintóticas ($t \rightarrow 0$) dos "heat kernel" dos operadores:

$$D = \frac{1}{\rho} \partial^2; \quad E = \frac{1}{\rho} \not\partial \rho \not\partial; \quad F = \rho \not\partial \frac{1}{\rho} \not\partial \quad (\text{III-71})$$

Cálculo de "Heat Kernel"

Sabemos que o "heat kernel" de um operador U satisfaz uma equação diferencial do tipo equação de difusão:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - U\right)h_U = 0, \quad (\text{III-72})$$

com a condição inicial:

$$\lim_{t \rightarrow 0} h_U(\zeta', \zeta, t) = \delta^C(\zeta' - \zeta) \quad (\text{III-73})$$

Se U é o laplaciano no espaço euclidiano bidimensional, $\mathbb{E}^2$, :

$$U = \partial^a \partial_a = g^{ab} \partial_a \partial_b = \partial_1^2 + \partial_2^2 = \partial^2$$

a solução da equação III-72 com a condição inicial acima é⁽⁶⁾:

$$h_U(\zeta, \zeta', t) = h_0(\zeta, \zeta', t) = \frac{1}{4\pi t} \exp - \left\{ \frac{(\zeta_1 - \zeta'_1)^2 + (\zeta_2 - \zeta'_2)^2}{4} \right\} \quad (\text{III-74})$$

com

$$\zeta = (\zeta^1, \zeta^2); \quad \zeta' = (\zeta^{1'}, \zeta^{2'})$$

Mas no nosso caso a variedade bidimensional M é apenas, localmente, conformalmente euclidiana: $g_{ab} = \rho \delta_{ab}$ e quando $\rho \rightarrow 1$; $M \rightarrow \mathbb{E}^2$.

É fácil ver que os operadores D , F e E , quando $\rho \rightarrow 1$, se aproximam do laplaciano em $\mathbb{E}^2$: $\partial^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$, por exemplo:

$$E = \frac{1}{2} \not{\partial} \rho \not{\partial} = \frac{1}{2} (\not{\partial} \rho) \not{\partial} + \frac{1}{\rho} \partial^2 ,$$

pois,

$$\partial^2 = (\sigma_1 \partial_1 + \sigma_3 \partial_2)^2 = \mathbb{1}_{2 \times 2} \partial^2 ,$$

quando

$$\rho \rightarrow 1 , \quad (\not{\partial} \rho) \rightarrow 0 , \quad \text{e} \quad E \rightarrow \partial^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 .$$

Como não sabemos resolver exatamente as equações (III-72) e (III-73) para os operadores D, E e F dados em III-71, a nossa tática será a de trabalharmos perturbativamente em torno do espaço chato $\mathbb{R}^2$. Ou seja, o operador U de (III-72) será escrito na forma:

$$U = \partial^2 + V \quad (\text{III-75})$$

onde V é pequeno comparado com ∂^2 . Nesse caso, como $h_U(\zeta', \zeta, t)$ é no fundo uma função de Green associada ao operador U, podemos reescrever a equação (III-72) com a condição inicial (III-73) na forma de uma equação integral⁽⁶⁾:

$$h_U(\zeta', \zeta, t) = h_0(\zeta, \zeta', t) + \int_M d^2 \alpha \int_0^t dt' h_0(\zeta', \alpha, t-t') V(\alpha, t') h_U(\alpha, \zeta, t') \quad (\text{III-76})$$

onde h_0 é dado em III-74 e $U = \partial^2 + V$, $d^2 \alpha = d\alpha_1 d\alpha_2$ *

* Daqui para frente para evitarmos confusões trabalharemos com as coordenadas de M com índices inferiores embora sejam componentes de vetores contravariantes $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2)$.

A equação integral (III-76) será manipulada de maneira iterativa.

O ponto chave⁽⁶⁾ do cálculo é a escolha de um sistema de coordenadas locais tal que apenas uma iteração seja suficiente para obtermos o resultado exato para h_U no limite assintótico: $t \rightarrow 0$.

Até agora temos trabalhado com coordenadas locais centradas em um determinado ponto $\tilde{\alpha}$ tal que:

$$g_{ab}(\tilde{\alpha}) = \rho(\tilde{\alpha})\delta_{ab} = e^{2\phi(\tilde{\alpha})}\delta_{ab}, \quad \rho = e^{2\phi}.$$

Mas na verdade podemos ir além e trabalharmos com um sistema de coordenadas centrado em $\tilde{\alpha}$ tal que localmente a métrica seja chata, ou seja:

$$\phi(\tilde{\alpha}) = 0 \quad ; \quad \partial_a \phi(\tilde{\alpha}) = 0 \quad (\text{III-77})$$

Nesse sistema de coordenadas, expandindo $\rho = e^{2\phi}$ em série de Taylor ao redor de $\alpha = \tilde{\alpha}$ vemos que a variedade M é euclideana até a ordem de $(\alpha - \tilde{\alpha})^1$.

Como estamos trabalhando com uma variedade M sem borda ($\partial M = \emptyset$) o sistema de coordenadas do tipo acima (III-77) pode ser usado em torno de qualquer ponto $\tilde{\alpha}$ de M . No caso em que $\partial M \neq \emptyset$ (corda aberta por exemplo) o cálculo fica mais trabalhoso, pois usa-se um^(6,27) sistema de coordenadas para pontos próximos da borda e outro sistema para pontos distantes da borda além do fato que o "heat kernel" não perturbado (h_0) usado em (III-76) deve ser tal que satisfaça certas condições de con-

torno na borda (∂M) que no fundo são as condições de contorno que os próprios campos da teoria devem satisfazer.

Como estamos interessados apenas nos elementos diagonais do "heat kernel", fazendo $\zeta' = \zeta$ em (III-76) temos:

$$h_U(\zeta, \zeta, t) = h_0(\zeta, \zeta, t) + \int_M d^2\alpha \int_0^t dt' h_0(\zeta, \alpha, t-t') V(\alpha, t') h_U(\alpha, \zeta, t') \quad (\text{III-78})$$

Em ordem zero: $h_U(\zeta, \zeta, t) = h_0(\zeta, \zeta, t) = \frac{1}{4\pi t}$, ver III-74.

Fazendo a primeira iteração da equação integral, substituindo na integral acima $h_U(\alpha, \zeta, t)$ por $h_0(\alpha, \zeta, t)$ obtemos um resultado não nulo:

$$I = \int_M d^2\alpha \int_0^t dt' h_0(\zeta, \alpha, t-t') V(\alpha, t') h_0(\alpha, \zeta, t)$$

Observando que h_0 possui uma forma gaussiana (ver III-74) vemos que a maior contribuição para a integral acima vem de $\alpha = \zeta$ portanto no cálculo dessa integral é justo expandirmos o potencial $V(\alpha, t')$ em torno de $\alpha = \zeta$. Esse vai ser nosso procedimento padrão no cálculo de $h_U(\zeta, \zeta, t \rightarrow 0)$ com $U = \{E, F, D\}$, ou seja, escrevemos cada um desses operadores na forma:

$$U = \partial^2 + V \quad V \ll \partial^2$$

Em seguida expandimos V em torno do ponto no qual queremos calcular h_U , e centramos o sistema de coordenadas (III-77) nesse ponto para calcularmos a integral I acima, que corresponde a primeira iteração de (III-75). Em seguida

fazendo o limite $t \rightarrow 0$ vemos que a contribuição das iterações seguintes é nula e portanto o cálculo de 'I' é suficiente para obtermos o resultado exato para o "heat kernel" dos operadores E, F e D dados em III-71.

Vamos aplicar esse método inicialmente para o operador $D = \frac{1}{\rho} \partial^2$ (ver apêndice C de (6)) com:

$$\rho = e^{2\phi} \quad D = e^{-2\phi} \partial^2$$

$$D = \partial^2 - \partial^2 + \frac{1}{\rho} \partial^2 = \partial^2 + (e^{-2\phi} - 1) \partial^2 = \partial^2 + V$$

com

$$V(\alpha) = (e^{-2\phi(\alpha)} - 1) \partial^2$$

Expandindo $V(\alpha)$ em torno de $\alpha = \zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ e usando o sistema de coordenadas (III-74) centrado em ζ temos:

$$e^{-2\phi(\alpha)} \cong e^{-2\phi(\zeta)} - 2(\alpha_a - \zeta_a) \left(\partial_a \phi e^{-2\phi} \right) \Big|_{\alpha=\zeta} + \\ - \frac{2(\alpha_a - \zeta_a)(\alpha_b - \zeta_b) \partial_a \partial_b \phi e^{-2\phi}}{2} \Big|_{\alpha=\zeta} + \dots$$

usando (III-77) para $\tilde{\alpha} = \zeta$ temos:

$$e^{-2\phi(\alpha)} \cong 1 - (\alpha_a - \zeta_a)(\alpha_b - \zeta_b) \partial_a \partial_b \phi(\zeta) + \dots$$

e assim

$$V(\alpha) = (e^{-2\phi} - 1) \partial^2 \cong \{- (\alpha_a - \zeta_a)(\alpha_b - \zeta_b) \partial_a \partial_b \phi(\zeta)\} \partial^2 \quad (\text{III-79})$$

Portanto para pontos α próximos de ζ vemos que V é realmente pequeno comparado com ∂^2 .

Substituindo em (III-78):

$$h_0(\zeta, \zeta, t) = \frac{1}{4\pi t} + \int_M d^2\alpha \int_0^t dt' h_0(\alpha, \zeta, t-t') \{-(\alpha_a - \zeta_a)(\alpha_b - \zeta_b) \partial_a \partial_b \phi(\zeta)\} \partial^2 h_0(\zeta, \alpha, t')$$

como

$$h_0(\zeta, \alpha, t') = \frac{1}{4\pi t'} \exp - \left\{ \frac{(\alpha_1 - \zeta_1)^2 + (\alpha_2 - \zeta_2)^2}{4t'} \right\}$$

é interessante passarmos para as variáveis u_1 e u_2 :

$$u_1 = \alpha_1 - \zeta_1 ; \quad u_2 = \alpha_2 - \zeta_2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_a} = \partial_a = \frac{\partial}{\partial u_a}$$

e assim

$$\partial^2 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} = \partial_1^2 + \partial_2^2$$

Os limites de integração de $d^2\alpha$ não se alteram e temos:

$$h_D(\zeta, \zeta, t) = \frac{1}{4\pi t} + I ;$$

$$I = \int_M d^2 \int_0^t dt' h_0(0, u, t-t') \{-u_a u_a \partial_a \partial_b \phi(\zeta)\} \partial^2 h_0(0, u, t')$$

Calculando I:

$$\partial^2 h_0(0, u, t') = (\partial_1^2 + \partial_2^2) \frac{1}{4\pi t'} \exp - \frac{(u_1^2 + u_2^2)}{4t'}, \text{ facilmente temos:}$$

$$\partial^2 h_0 = \frac{1}{16\pi(t')^2} \left\{ \frac{(u_1^2 + u_2^2)}{t'} - 4 \right\} \exp - \frac{(u_1^2 + u_2^2)}{4t'}$$

usando ainda:

$$h_0(0, u, t-t') = \frac{1}{4\pi(t-t')} \exp - \frac{(u_1^2 + u_2^2)}{4(t-t')}$$

temos:

$$I = \int_0^t dt' \frac{1}{4^3 \pi^2 (t')^2 (t-t')} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \int_{-\infty}^{+\infty} du_2 \left\{ -(u_1^2 \partial_1^2 \phi(\zeta) + u_2^2 \partial_2^2 \phi(\zeta) + 2u_1 u_2 \partial_1 \partial_2 \phi(\zeta)) \right\} \times \left\{ \frac{(u_1^2 + u_2^2)}{t'} - 4 \right\} \exp - \left\{ \frac{(u_1^2 + u_2^2)t}{4t'(t-t')} \right\}$$

Como as integrais são calculadas num intervalo par, a integral proporcional a $u_1 u_2$ é nula, usando então o seguinte resultado:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 e^{-\beta x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \beta^{-3/2} ; \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^4 e^{-\beta x^2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \beta^{-5/2} \quad (\text{III-79})$$

para $\beta = t/(4t'(t-t'))$ temos:

$$I = - \frac{\partial^2 \phi(\zeta)}{2(4^3)\pi} \int_0^t \frac{dt'}{(t')^2 (t-t')} \left(\frac{2}{t'\beta^3} - \frac{4}{\beta^2} \right), \text{ integrando:}$$

$$I = - \frac{\partial^2 \phi(\zeta)}{12\pi} ; \quad \partial^2 \phi(\zeta) = (\partial_1^2 + \partial_2^2) \phi(\zeta) \text{ e portanto:}$$

$$h_D(\zeta, \zeta, t) \cong \frac{1}{4\pi t} + I = \frac{1}{4\pi t} - \frac{\partial^2 \phi(\zeta)}{12\pi} \quad (\text{III-80})$$

O resultado da primeira iteração, I, como vemos em III-80 independe de t e foi obtido substituindo-se h_U em (III-78) por h_0 , que por sua vez tende a um valor grande no limite $t \rightarrow 0$, portanto é de esperar que na segunda iteração ao substituirmos h_U por $h_0 + f$ com $\partial_t f = 0$ tenhamos um resultado nulo, e assim por diante nas demais iterações.

Além disso é fácil ver que se mantivessemos os termos proporcionais a $(\alpha_a - \zeta_a)^n$ ($n \geq 3$) na expansão para $V(\alpha)$, não obteríamos nenhuma contribuição no limite assintótico, pois o termo cúbico já leva a um termo em I proporcional a $\sqrt{t}$.

Consequentemente o resultado (III-80) é exato no limite $t \rightarrow 0$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} h_0(\zeta, \zeta, t) = \frac{1}{4\pi t} - \frac{\partial^2 \phi(\zeta)}{12\pi} \quad (\text{III-81})$$

Para o operador $E = \frac{1}{2} \not{\rho}$ usando:

$$\partial^2 = (\sigma_1 \partial_1 + \sigma_3 \partial_2)^2 = \partial^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

temos:

$$E = \frac{1}{\rho} \partial^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (\not{\rho}) \not{\rho} = \partial^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{\rho} - 1\right) \partial^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (\not{\rho}) \cdot \not{\rho}$$

$$E = \partial^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + V'(\alpha), \quad V'(\alpha) = \left(\frac{1}{\rho} - 1\right) \partial^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (\not{\rho}) \not{\rho} \quad (\text{III-82})$$

De maneira compacta reescrevendo III-78:

$$h_E = h'_0 + h'_0 V' h_E, \quad (\text{III-83})$$

onde agora $h'_0 = \begin{pmatrix} h_0 & 0 \\ 0 & h_0 \end{pmatrix}$ é a solução da equação de difusão:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - U'\right)h'_0 = 0 \quad \text{com} \quad U' = \partial^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e $V'(\alpha)$ é dado em III-82.

Como estamos interessados em $T_r h_E$ (ver III-70), tirando o traço de (III-83) e usando $\text{Tr } \mathcal{A} = 2 \text{ a.b}$ temos:

$$T_r h_E = 2 \left\{ h_0 + h_0 \left((1/\rho - 1) \partial^2 + \frac{(\partial_{a\rho}) \partial_a}{\rho^2} \right) h_E \right\}$$

que pode ser reescrito:

$$T_r h_E = 2h_E \quad (\text{III-84})$$

definindo agora:

$$h_E = h_0 + h_0 \underbrace{\left\{ (1/\rho - 1) \partial^2 + \frac{(\partial_{a\rho}) \partial_a}{\rho^2} \right\}}_{V(\alpha)} h_E$$

Fazendo a 1ª iteração dessa expressão temos:

$$h_E = h_0 + h_0 \left\{ (1/\rho - 1) \partial^2 \right\} h_0 + h_0 V_2 h_0, \quad V_2(\alpha) = \frac{(\partial_{a\rho}) \partial_a}{\rho^2(\alpha)}$$

mas o 1º termo da expressão acima é justamente o "heat kernel" do operador D dado em (III-81) assim:

$$h_E = h_D + h_0 V_2 h_0 = \frac{1}{4\pi t} - \frac{\partial^2 \phi(\zeta)}{12\pi} + h_0 V_2 h_0 \quad (\text{III-85})$$

onde

$$h_0 V_2 h_0 = \int_0^t dt' \int d^2 \alpha h_0(\zeta, \alpha, t-t') V_2(\alpha, t') h_0(\alpha, \zeta, t') \quad (\text{III-86})$$

Novamente expandiremos o potencial, no caso V_2 , em torno de $\alpha = \zeta \bar{j}\bar{a}$ que é desse ponto que vem a maior contribuição para a integral em $h_0 V_2 h_0$. Com:

$$V_2 = \frac{(\partial_c \rho)^2}{\rho^2}$$

usando o sistema de coordenadas (III-77), em que $\phi(\zeta) = 0$ e $\partial_a \phi(\zeta) = 0$ temos:

$$\rho^{-2} = e^{-4\phi} \cong 1 - 4(\alpha_a - \zeta_a) \left\{ (\partial_a \phi) e^{-4\phi} \right\} \Big|_{\alpha=\zeta} + \frac{4(\alpha_a - \zeta_a)(\alpha_b - \zeta_b) \{ (\partial_a \partial_b \phi) e^{-4\phi} \}}{2!} \Big|_{\alpha=\zeta} + \dots$$

e

$$\begin{aligned} (\partial_c \rho) &= 2(\partial_c \phi) e^{2\phi} \cong \left\{ 2(\partial_c \phi) e^{2\phi} \right\} \Big|_{\alpha=\zeta} + (\alpha_a - \zeta_a) \partial_a \left\{ (2\partial_c \phi) e^{2\phi} \right\} \Big|_{\alpha=\zeta} + \\ &+ \frac{(\alpha_a - \zeta_a)(\alpha_b - \zeta_b)}{2!} 2 \partial_a \partial_b (e^{2\phi} \partial_c \phi) \Big|_{\alpha=\zeta} + \dots \end{aligned}$$

Usando as variáveis $u_a = \alpha_a - \zeta_a$ tem-se:

$$\rho^{-2} \cong 1 + 2 u_a u_b \partial_a \partial_b \phi(\zeta) + \dots$$

$$(\partial_c \rho) \cong 2u_a \partial_a \partial_c \phi(\zeta) + u_a u_b \partial_a \partial_b \partial_c \phi(\zeta) + \dots$$

e

$$\begin{aligned} V_2 = \frac{(\partial_c \rho)}{\rho^2} \partial_c &\cong \{ 2 u_a \partial_a \partial_c \phi(\zeta) + u_a u_b \partial_a \partial_b \partial_c \phi(\zeta) + \\ &+ 4 u_a u_b u_d (\partial_a \partial_b \phi(\zeta)) (\partial_d \partial_c \phi(\zeta)) + \\ &+ 2 u_a u_b u_d u_e (\partial_a \partial_b \phi(\zeta)) (\partial_d \partial_e \partial_c \phi(\zeta)) + \dots \} \partial_c \end{aligned}$$

$$h_0(0, u, t') = \frac{1}{4\pi t} \exp - \frac{|u_1^2 + u_2^2|}{4t'}$$

implica em:

$$\partial_c h_0 = - \frac{1}{8\pi t t'} u_c \exp - \frac{|u_1^2 + u_2^2|}{4t'}$$

Portanto como as integrais em (III-85) são calculadas num intervalo par, o 2º e o 4º termo do potencial V_2 acima não vão contribuir, pois teremos sempre um número ímpar de variáveis u_a sendo integradas, assim:

$$\begin{aligned} h_0 V_2 h_0 &= - \int_0^t \frac{dt'}{(4\pi)^2 (t')^2 (t-t')} \int d^2 u \{ u_a u_c \partial_a \partial_c \phi(\zeta) + \\ &+ 2 u_a u_b u_d u_c (\partial_a \partial_b \phi)(\partial_d \partial_c \phi) \} \times \exp - \beta(u_1^2 + u_2^2) \end{aligned}$$

onde $\beta = t/(4t'(t-t'))$, usando as integrais (III-79) temos:

$$h_0 V_2 h_0 = - \frac{1}{16\pi^2} \pi \int \frac{dt'}{(t')^2 (t-t')} \left\{ \frac{\partial^2 \phi(\zeta)}{2} \beta^{-2} + () \beta^{-3} \right\}$$

o 2º termo acima não contribui no limite $t \rightarrow 0$ e integrando termos:

$$h_0 V_2 h_0 = - \frac{1}{4\pi} \partial^2 \phi(\zeta) \quad (\text{III-87})$$

Portanto:

$$\lim_{t \rightarrow 0} h_E = \frac{1}{4\pi t} - \frac{\partial^2 \phi}{12\pi} + h_0 V_2 h_0 = \frac{1}{4\pi t} - \frac{\partial^2 \phi}{3\pi}, \text{ usando (III-84)}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \text{Tr } h_E(\zeta, \zeta, t) = \lim_{t \rightarrow 0} 2h_E(\zeta, \zeta, t) = \frac{1}{2\pi t} - \frac{2\partial^2 \phi}{3\pi} \quad (\text{III-88})$$

Também neste caso o resultado acima é exato, ou seja, os termos seguintes na expansão de V_2 em torno de ζ não contribuem no limite $t \rightarrow 0$, da mesma forma que as próximas iterações da equação integral.

No caso do operador F temos:

$$F = \rho \not{x} \frac{1}{2} \not{x} = \frac{1}{\rho} \partial^2 - \frac{2}{\rho} (\not{x} \rho) \not{x}$$

$$F = \partial^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (1/\rho - 1) \partial^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{\rho} (\not{x} \rho) \not{x}$$

e analogamente ao caso anterior: $\text{Tr } h_F = 2h_F$, em 1ª iteração com :

$$h_F = h_0 + h_0 \left\{ (1/\rho - 1) \partial^2 - \frac{2}{\rho} (\partial_c \rho) \partial_c \right\} h_0$$

$$h_F = h_D - 2 h_0 V_2 h_0; \quad V_2 = \frac{1}{\rho} (\partial_c \rho) \partial_c$$

de (III-87): $h_0 V_2 h_0 = -1/4\pi \partial^2 \phi(\zeta)$ e (III-78): $h_D = \frac{1}{4\pi t} - \frac{\partial^2 \phi}{12\pi}$

Temos:

$$\lim_{t \rightarrow 0} T_r h_F = \frac{1}{2\pi t} + \frac{5}{6\pi} \partial^2 \phi(\zeta) \quad (\text{III-89})$$

Anomalia de Weyl e Ação de Liouville

Usando a relação entre a anomalia 'A' e o "heat kernel" dos operadores $\{D, E, F\}$ dada em (III-70) e os resultados para o "heat kernel" dados em (III-81), (III-88) e (III-89) temos:

$$\begin{aligned} A|_{\rho} &= \rho(\zeta) \left\{ \frac{D}{2} \left(\frac{1}{4\pi t} - \frac{\partial^2 \phi}{12\pi} \right) - \left(\frac{1}{2\pi t} - \frac{2\partial^2 \phi}{3\pi} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi t} + \frac{5\partial^2 \phi}{6\pi} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{24\pi} \left\{ \frac{3(D-2)\rho}{t} + (D-26) (-\partial^2 \phi(\zeta)\rho) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{III-90})$$

Devemos notar agora que $(-\partial^2 \phi)$ com $\rho = e^{2\phi}$ tem uma interpretação geométrica direta. No sistema de referência que estamos trabalhando (III-77), seja R a curvatura escalar⁽¹¹⁾:

$$R = g^{ik} R_{ik} \text{ e } R_{ik} = \partial_r \Gamma_{ik}^r - \partial_k \Gamma_{ir}^r + \Gamma_{ik}^r \Gamma_{rs}^s - \Gamma_{ir}^s \Gamma_{ks}^r ,$$

com os símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{ik}^r = \frac{1}{2} g^{rs} (\partial_k g_{is} + \partial_i g_{ks} - \partial_s g_{ik}) ,$$

e no gauge conforme: $g_{ab} = \rho \delta_{ab} = e^{2\phi} \delta_{ab}$ temos:

$$\Gamma_{ik}^r = \{ \delta_i^r \partial_k \phi + \delta_k^r \partial_i \phi - \delta^{rs} \delta_{ik} \partial_s \phi \}$$

assim após um trabalho totalmente algébrico obtemos*:

$$\rho R = \sqrt{g} R = - (\partial_1^2 + \partial_2^2) \ln \rho = - \partial^2 \ln \rho \quad (\text{III-91})$$

no sistema de referência (III-77) $\partial_a \phi = 0 \rightarrow \partial_a \rho = 0$ assim temos:

$$\sqrt{g} R = \rho R = - \partial^2 \ln \rho = - 2 \partial^2 \phi , \text{ pois } \rho = e^{2\phi} , \text{ portanto:}$$

$$R = e^{-2\phi} (-2 \partial^2 \phi) \cong - 2 \partial^2 \phi \quad (\text{III-92})$$

Esse resultado será importante posteriormente.

* É um fato bem conhecido, que o termo $\sqrt{g} R$ em duas dimensões é uma divergência como está indicado em (III-91).

Usando (III-90) e (III-91) temos:

$$A|_{\rho} = \frac{(D-26)}{48\pi} (-\partial^2 \ell_{np} + 2\mu\rho) \quad (\text{III-93})$$

onde

$$\mu = \frac{6(D-2)}{(D-26)} \frac{1}{t} \quad (\text{III-94})$$

Esse é o bem conhecido resultado para a anomalia de Weyl na corda bosônica fechada*, também conhecida por anomalia conforme⁽⁴⁾.

Embora o 2º termo da expressão acima seja infinito, já que $t \rightarrow 0$ e $\mu \rightarrow \infty$, acredita-se que este possa ser renormalizado por um termo cosmológico: $k \sqrt{g} = k\rho$, que como vimos anteriormente não tem sentido classicamente.

Ao estudarmos a variação do funcional gerador da corda sob as transformações III-26 nos campos $\tilde{\eta}^c$, X^μ e ξ_a havíamos obtido a identidade de Ward-Takahashi III-30:

$$\langle \rho \frac{\delta S}{\delta \rho} \rangle = \langle T_a^a \rangle = \langle A \rangle$$

Usando então o resultado acima para a anomalia 'A', obtemos uma equação diferencial funcional para a ação da corda S:

* Embora tenhamos trabalhado aqui apenas com a corda bosônica fechada, no caso da corda aberta, a menos de termos de borda, obtem-se o mesmo resultado⁽²⁸⁾.

$$\langle \rho \frac{\delta S}{\delta \rho} \rangle = \frac{(D-26)}{48\pi} \langle -\partial^2 \ell_{n\rho} + 2\mu\rho \rangle \quad (\text{III-95})$$

Para que a simetria de Weyl seja restaurada na teoria quântica da corda bosônica fechada, com o tensor energia-momento voltando a ter o traço nulo, é preciso que a dimensão do espaço-tempo seja precisamente $D = 26$, só assim a teoria estará livre da anomalia de Weyl.

A equação diferencial para S acima pode ser reescrita em termos de uma lagrangeana L , com:

$$S = \int d^2\zeta L(\rho) \quad \text{e} \quad -\partial^2 \ell_{n\rho} = -\frac{1}{\rho} \partial^2 \rho + \frac{(\partial_a \rho)^2}{\rho^2}$$

temos:

$$\rho \frac{\delta L}{\delta \rho} = \left(\frac{D-26}{48\pi} \right) \left\{ -\frac{1}{\rho} \partial^2 \rho + \frac{1}{\rho^2} (\partial_a \rho)^2 + 2\mu\rho \right\} = \rho \left\{ \frac{\partial L}{\partial \rho} - \partial_a \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_a \rho)} \right) \right\}$$

é fácil verificar que a seguinte lagrangeana satisfaz a equação acima:

$$L = \frac{(D-26)}{12\pi} \left\{ \frac{1}{8} (\partial_a \rho)^2 + \frac{\mu\rho}{2} \right\}$$

usando $\frac{1}{2} (\partial_a \ell_{n\rho})^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial_a \rho}{\sqrt{\rho}} \right)^2 = \frac{1}{8} \frac{(\partial_a \rho)^2}{\rho^2}$ temos a solução da equação diferencial funcional III-95:

$$S = \frac{(D-26)}{12\pi} \int d^2\zeta \left\{ \frac{1}{2} (\partial_a \ell_{n\rho})^2 + \frac{1}{2} \mu\rho \right\}$$

Essa é chamada ação de Liouville, foi obtida primeiramente por Polyakov⁽²⁹⁾.

IV - ANOMALIA NA CORRENTE DOS FANTASMAS

Após a integração nos campos auxiliares (B_a) e nos vínculos que fixam o gauge conforme ($\tilde{f}_a$) obtivemos a seguinte ação (ver III-23):

$$S = \int d^2\zeta \left\{ -\frac{\mu_0}{2} \frac{X^\mu}{\sqrt{\rho}} \partial_a \partial_a \frac{X^\mu}{\sqrt{\rho}} - i \xi \sqrt{\rho} \not{\partial} \left(\frac{\tilde{\eta}}{\rho} \right) \right\} = \int d^2\zeta L$$

e o correspondente funcional gerador:

$$W = \int \mathcal{D}\beta e^S ; \quad \mathcal{D}\beta = \prod_{\zeta} \mathcal{D}V(\zeta) \mathcal{D}\xi(\zeta) \mathcal{D}\tilde{\eta}(\zeta) \prod_{\mu=1}^D \mathcal{D}X^\mu$$

A ação S acima possui simetria pela transformação de fase global:

$$\xi \rightarrow (\exp - \theta) \xi ; \quad \tilde{\eta} \rightarrow (\exp \theta) \tilde{\eta} , \quad \theta = \text{cte} \quad (\text{IV-1})$$

e a essa simetria temos uma corrente de Noether associada:

$$\theta J_{gh}^c = \frac{\partial L}{\partial(\partial_c \tilde{\eta})} \delta \tilde{\eta} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_c \xi)} \delta \xi ; \quad \partial_c J_{gh}^c = 0$$

usando L acima e trabalhando infinitesimalmente: $\delta \tilde{\eta} = \theta \tilde{\eta}$ temos:

$$J_{gh}^c = \frac{\xi \tau^c \tilde{\eta}}{\sqrt{\rho}} , \quad \tau^1 = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tau^2 = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Essa corrente é a análoga de $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ na teoria de Dirac. A componente J_{gh}^1 é a densidade de "ghosts" e integrada em ζ^1 dá o número de ghosts, N_{gh} (12).

Sob as transformações:

$$\tilde{\eta}' = (\exp \theta(\zeta))\tilde{\eta} ; \quad \xi' = (\exp - \theta(\zeta))\xi \quad (IV-2)$$

tanto a ação S como a medida $\mathcal{D}\beta$ variam e assim:

$$W' = \int \mathcal{D}\beta' e^{S'}$$

De III-23 e IV-2 é fácil ver que:

$$S' = S + \int d^2\zeta \left\{ \partial_c \left(\frac{\xi \theta(\zeta)}{\sqrt{\rho}} \tau^c \tilde{\eta} \right) - \partial_c \left(\frac{\xi \tau^c \tilde{\eta}}{\sqrt{\rho}} \right) \theta(\zeta) \right\}$$

desprezando o termo de superfície temos:

$$S' = S - \int d^2\zeta \theta(\zeta) \partial_c J_{gh}^c \quad c = 1, 2$$

Precisamos agora calcular a variação da medida $\mathcal{D}\beta$:

$$\mathcal{D}\beta' = \prod_{\zeta} \mathcal{D}V(\zeta) \mathcal{D}\xi'(\zeta) \mathcal{D}\tilde{\eta}'(\zeta) \prod_{\mu=1}^D \mathcal{D}X^\mu(\zeta)$$

Para isso notemos que sob as transformações de Weyl (III-26):

$$\tilde{\eta}' = (\exp \alpha(\zeta))\tilde{\eta} \quad \xi' = (\exp - \frac{\alpha(\zeta)}{2})\xi$$

usando os resultados (III-60), (III-69), (III-88) e (III-89)

obtivemos:

$$\prod_{\zeta} \mathcal{D} \tilde{\eta}'(\zeta) = \prod_{\zeta} \mathcal{D} \tilde{\eta}(\zeta) \exp\left\{- \int d^2\zeta \alpha(\zeta) \rho(\zeta) \left(\frac{1}{2\pi t} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{3\pi}\right)\right\} \quad (\text{IV-4})$$

$$\prod_{\zeta} \mathcal{D} \xi'(\zeta) = \prod_{\zeta} \mathcal{D} \xi(\zeta) \exp\left\{\frac{1}{2} \int d^2\zeta \alpha(\zeta) \rho(\zeta) \left(\frac{1}{2\pi t} + \frac{5}{6\pi} \partial^2 \phi\right)\right\} \quad (\text{IV-5})$$

assim, fazendo $\alpha(\zeta) = \theta(\zeta)$ em (IV-4) e $\alpha(\zeta) = 2\theta(\zeta)$ em (IV-5) obtemos a nova medida $\mathcal{D}\beta'$ devido as transformações IV-2:

$$\mathcal{D}\beta' = \mathcal{D}\beta \exp\left\{- \int d^2\zeta \theta(\zeta) \rho(\zeta) \left(\frac{3}{2\pi}\right) (-\partial^2 \phi)\right\}$$

Portanto usando a relação $R(\zeta) = -2 \partial^2 \phi(\zeta)$ tem-se;

$$\mathcal{D}\beta' = \mathcal{D}\beta \exp\left\{- \int d^2\zeta \theta(\zeta) \frac{3}{4\pi} \sqrt{g} R\right\} \quad (\text{IV-6})$$

de (IV-3) e (IV-6) obtem-se:

$$W' = \int \mathcal{D}\beta' e^{S'} = \int \mathcal{D}\beta e^S e^{\underbrace{\int d^2\zeta \theta(\zeta) \left\{-\partial_c J_{gh}^c - \frac{3}{4\pi} \sqrt{g} R\right\}}_{U|\theta|}}$$

Como U é um funcional de θ podemos expandir U numa série funcional em torno de $\theta = 0$, analogamente aos cálculos anteriores:

$$U|\theta| \cong U|0| + \theta \frac{\delta U}{\delta \rho} = 1 + \theta \left\{-\partial_c J_{gh}^c - \frac{3}{4\pi} \sqrt{g} R\right\}$$

e para que $W' = W$, obtem-se⁽²⁰⁾ a identidade de Ward-Takahashi:

$$\langle \partial_c J_{hg}^c \rangle = - \langle \frac{3}{4\pi} \sqrt{g} R \rangle$$

Portanto para que o número de ghost (N_{gh}), que é a integral de J_{gh}^1 em ζ^1 , volte a ser conservado na teoria quântica da corda bosônica é preciso que a variedade bidimensional da corda, M , tenha curvatura nula: $R = 0$, que é exatamente o que acontece na teoria de Kato-Ogawa⁽¹²⁾ onde se trabalha com $\tilde{g}_{ab} = \sqrt{g} g_{ab} = \delta_{ab}$.

V - CONCLUSÃO

No cálculo da anomalia quiral através do método de Fujikawa em geral usa-se, como foi apresentado na seção II deste capítulo, o método do "heat kernel" na regularização. Entretanto poderíamos trabalhar também com o método de regularização via função zeta, esses dois métodos são equivalentes quando usamos um formalismo covariante de gauge. No apêndice B mostra-se de uma maneira simples essa equivalência no caso de usarmos o operador derivada covariante, $\mathcal{D}$, no processo de regularização.

Com relação a anomalia de Weyl na corda bosônica fechada, analisando-se cuidadosamente o cálculo de Fujikawa para essa anomalia⁽²⁰⁾, levando-se em conta o trabalho de Orlando Alvarez⁽⁶⁾ sobre operadores diferenciais numa variedade bidimensional riemanniana verificamos que o cálculo feito por Fujikawa pode ser colocado numa forma explicitamente covariante sob transformações conformes, como esperado, pois a simetria por transformações conformes desempenha um papel fundamental na teoria de cordas. Nessa verificação de covariância sob trans

formações conformes relacionamos os operadores usados por Fujikawa:

$$\Delta = - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \partial^2 \frac{1}{\sqrt{\rho}}; \quad MM^+ = - \sqrt{\rho} \not{\partial} \frac{1}{\rho^2} \not{\partial} \sqrt{\rho}; \quad M^+M = - \frac{1}{\rho} \not{\partial} \rho \not{\partial} \frac{1}{\rho}$$

respectivamente com os operadores abaixo:

$$-D = - \frac{1}{\rho} \partial^2; \quad -F = - \rho \not{\partial} \frac{1}{\rho^2} \not{\partial}; \quad -E = \frac{1}{\rho^2} \not{\partial} \rho \not{\partial}$$

Que por sua vez podem ser identificados com operadores laplacianos escritos explicitamente em termos de derivadas covariantes, o que garante a covariância da regularização que fez uso dos operadores $-D$, $-E$ e $-F$. As propriedades de hermiticidade e definição semi-positiva dos operadores $-D$, $-E$ e $-F$, que são propriedades necessárias ao processo de regularização, também foram demonstradas com base na identificação desses operadores com os operadores laplacianos definidos covariantemente.

De um modo geral no método de Fujikawa ao calcularmos a variação da medida da integral de trajetória sob a transformação que dá origem a anomalia, expandimos os campos em autofunções de certos operadores e a escolha desses operadores é um dos pontos mais delicados do método. Entretanto vimos que, pelo menos no cálculo da anomalia quiral da Q.E.D. e no cálculo da anomalia de Weyl da corda bosônica, essa escolha pode ser feita de maneira sistemática baseando-se nos requisitos de hermiticidade, definição semi-positiva e diagonalização da ação da teoria.

Essa sistematização, além da simplicidade e do aspecto não perturbativo do método de Fijikawa nos leva a pensar em aplicar esse método no cálculo de anomalias em outras teorias como as recentes teorias de supercordas onde o cancelamento das anomalias desempenha um papel fundamental.

Por último é importante notar que a partir do trabalho de O. Alvarez⁽⁶⁾ definindo-se um produto escalar no espaço de Hilbert que fosse invariante por transformações conformes, mostramos que os campos de "antighosts" da corda, ξ_a , estão relacionados com componentes de um tensor de 2ª ordem, simétrico e de traço nulo. Essa relação define de maneira precisa o carácter tensorial dos campos ξ_a bem como seu peso de Weyl e a partir dela foi possível escrever o termo de Faddeev-Popov mais o de fixação de gauge, $L' = L_{GF} + L_{FP}$, numa forma explicitamente covariante sob reparametrizações revelando, como esperado, que o mecanismo de fixação de gauge via B.R.S.T. respeita todas as simetrias originais da ação da corda bosônica.

A P Ê N D I C E A

CÁLCULOS ALGÉBRICOS

A1 - Obtenção da equação de movimento II-13 (capítulo 1) e da condição de contorno II-12 (capítulo 1).

A menos da constante μ_0 temos a lagrangeana para a ação de Nambu-Goto:

$$L_{NG} = \sqrt{\gamma} \quad \gamma = \det \gamma_{ab} = \frac{1}{2} \epsilon^{pr} \epsilon^{ik} \gamma_{ip} \gamma_{kr} \quad (1.1)$$

$$p, r, i, k, h, a, b = 1, 2$$

com

$$\epsilon^{ab} = -\epsilon^{ba} \quad \epsilon^{12} = 1 \quad (\text{tensor de Levi-Civita})$$

e

$$\gamma^{cd} \gamma_{da} = \delta_a^c \rightarrow \gamma^{cd} \gamma_{cd} = 2 \quad \text{derivando temos:}$$

$$\frac{\partial(\gamma^{cd} \gamma_{cd})}{\partial(\partial_f X^\mu)} = \frac{\partial(2)}{\partial(\partial_f X^\mu)} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial \gamma^{cd}}{\partial(\partial_f X^\mu)} \cdot \gamma_{cd} = - \gamma^{cd} \frac{\partial \gamma_{cd}}{\partial(\partial_f X^\mu)} \quad \text{como } \gamma_{cd} = \partial_c X^\mu \partial_d X^\mu$$

$$\frac{\partial \gamma^{cd}}{\partial(\partial_f X^\mu)} \cdot \gamma_{cd} = - 2 \gamma^{fd} \partial_d X^\mu$$

Usando novamente que $\gamma^{cd} \gamma_{cd} = 2$ temos a solução dessa equação.

$$\frac{\partial \gamma^{cd}}{\partial (\partial_f X^\mu)} = - \gamma^{if} (\partial_i X^\mu) \gamma^{cd} \quad (1.2)$$

Analogamente, uma solução da equação abaixo:

$$\frac{\partial (\gamma^{ab} \gamma_{ab})}{\partial \gamma^{cd}} = 0 ,$$

$$\bar{e}: \quad \frac{\partial \gamma_{ab}}{\partial \gamma^{cd}} = - \frac{1}{2} \gamma_{cd} \gamma_{ab}$$

Usando essa solução na definição do determinante (1.1) temos:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \gamma^{cd}} = - \gamma_{cd} \gamma \quad (1.3)$$

Portanto:

$$\frac{\partial L_{NG}}{\partial (\partial_f X^\mu)} = \frac{\partial \sqrt{\gamma}}{\partial (\partial_f X^\mu)} = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \gamma}{\partial (\partial_f X^\mu)} = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \gamma}{\partial \gamma^{cd}} \frac{\partial \gamma^{cd}}{\partial (\partial_f X^\mu)}$$

usando-se (1.2) e (1.3):

$$\frac{\partial L_{NG}}{\partial (\partial_f X^\mu)} = \sqrt{\gamma} \gamma^{if} \partial_i X^\mu , \quad (1.4)$$

assim da equação de movimento:

$$\partial_f \frac{\partial L_{NG}}{\partial (\partial_f X^\mu)} = 0 \quad ,$$

obtemos exatamente a equação II-12 (capítulo 1):

$$\partial_f (\sqrt{\gamma} \gamma^{if} \partial_i X^\mu) = 0 \quad ,$$

e da condição de contorno:

$$\frac{\partial L_{NG}}{\partial (\partial_2 X^\mu)} \bigg|_{\sigma_i}^{\sigma_f} = 0$$

obtemos a equação II-13 (capítulo 1) basta fazer $f = 2$ na equação (1.4):

$$\sqrt{\gamma} \gamma^{i2} \partial_i X^\mu \bigg|_{\sigma_i}^{\sigma_f} = 0$$

Obtenção do tensor energia-momento T_{ab} :

Para a métrica intrínseca g_{ab} temos:

$$g^{cd} g_{db} = \delta_b^c$$

A partir dessa expressão, analogamente a (1.3) obtem-se:

$$\frac{\partial g}{\partial g_{cd}} = -g g_{cd} ,$$

onde

$$g = \det g_{ab} .$$

Consequentemente:

$$\frac{\partial \sqrt{g} g^{ab}}{\partial g_{cd}} = \sqrt{g} \delta_c^a \delta_d^b - \frac{g^{ab} g_{cd} \sqrt{g}}{2}$$

Portanto:

$$\frac{\sqrt{g}}{2} T^{cd} = \frac{\partial L}{\partial g_{cd}} = \frac{\partial}{\partial g_{cd}} \left(\frac{\mu_0}{2} \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\mu \right) ,$$

com $\gamma_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X^\mu$

$$\frac{\sqrt{g}}{2} T_{cd} = \frac{\mu_0}{2} \sqrt{g} \left(\gamma_{cd} - \frac{g^{ab} g_{cd}}{2} \gamma_{ab} \right)$$

e assim:

$$T_{cd} = \mu_0 \left(\gamma_{cd} - \frac{g^{ab} g_{cd} \gamma_{ab}}{2} \right)$$

Demonstração da anulação do traço do tensor energia-momento: $T^a_a = 0$

Sob transformações de Weyl:

$$g_{ab} \rightarrow f g_{ab} ; g^{ab} \rightarrow 1/f g^{ab}$$

temos:

$$\delta S = \delta \int d^2 \zeta L = 0 ; L = \frac{\mu_0}{2} \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\mu ,$$

mas:

$$\delta S = \int d^2 \zeta \delta L = \int d^2 \zeta \frac{\partial L}{\partial g^{cd}} \delta g^{cd}$$

Usando a definição do tensor energia-momento:

$$\frac{1}{2} \sqrt{g} T_{ab} = \frac{\partial L}{\partial g^{ab}}$$

temos:

$$\delta S = \frac{1}{2} \int d^2 \zeta \sqrt{g} T_{cd} \delta g^{cd} = 0 \quad (1.5)$$

Como: $g^{cd'} = 1/f g^{cd}$; fazendo $f = \exp h$, $h(\zeta)$ é escalar por reparametrização, infinitesimalmente tem-se:

$$g^{cd'} \approx (1 - h) g^{cd} ,$$

o que implica: $\delta g^{cd} = g^{cd'} - g^{cd} = h(\zeta)g^{cd}$, em (1.5) temos:

$$\delta S = \frac{1}{2} \int d^2 \zeta \sqrt{g} T_{cd} g^{cd} h(\zeta) = \frac{1}{2} \int d^2 \zeta \sqrt{g} T_c^c h(\zeta) = 0$$

como $h(\zeta)$ é pequena mas arbitrária e $\sqrt{g}$ é sempre diferente de zero devemos ter obrigatoriamente:

$$T_c^c = 0$$

A2 - Demonstração do carácter escalar do elemento de volume infinitesimal $d\Omega$.

Seja:

$$d\Omega = \sqrt{\det g_{ab}} \prod_{a=1}^N dV^a \quad \vec{V} = (V^1 \dots V^N) \in V$$

Por hipótese sempre podemos escolher um sistema de coordenadas $\{V^{a'}\}$ onde a métrica torna-se localmente euclidiana $g'_{ab} = \delta_{ab}$ e nesse sistema é natural que o elemento de volume seja:

$$d\Omega'(V') = \prod_{a=1}^N dV^{a'}$$

Como a métrica g_{ab} é um legítimo tensor de 2ª ordem, na passagem do sistema de coordenadas localmente euclidiano $\{V^{a'}\}$ para um outro qualquer $\{V^a\}$ temos⁽⁷⁾:

$$g_{ab}(V) = \frac{\partial V'^c}{\partial V^a} \frac{\partial V'^d}{\partial V^b} g'_{cd}(V') = M_a^c g'_{cd}(V') M_b^d ; M_a^c = \frac{\partial V'^c}{\partial V^a} ,$$

em forma matricial: $g(V) = M g' M^T$

assim:

$$\det g = (\det M)^2 (\det g') ,$$

mas

$$g'_{ab} = \delta_{ab} \rightarrow \det g' = 1$$

consequentemente: $\det M = \pm \sqrt{\det g}$.

A matriz M é justamente a matriz de transformação do sistema de coordenadas $\{V'^a\}$ para o sistema $\{V^a\}$ portanto o jacobiano (J) dessa transformação é dado por:

$$J = |\det M| = \sqrt{\det g}.$$

Assim o elemento de volume no sistema de coordenadas $\{V^a\}$ é;

$$d\Omega = J \prod_a^N dV^a = \sqrt{\det g} \prod_{a=1}^N dV^a .$$

Como o sistema de coordenadas $\{V^a\}$ é qualquer, é claro que $d\Omega$ tem a forma acima em qualquer sistema de coordenadas e assim está provado seu carácter escalar sob transformações gerais de coordenadas.

A3 - Reparametrizações infinitesimais

A partir da lei geral de transformação

$$g'_{ab}(\zeta') = \frac{\partial \zeta^c}{\partial \zeta^{a'}} \frac{\partial \zeta^d}{\partial \zeta^{b'}} g_{cd}(\zeta) \quad (3.1)$$

da reparametrização infinitesimal:

$$\zeta^{c'} = \zeta^c + \epsilon^c(\zeta^1, \zeta^2) \text{ ou } \zeta^c = \zeta^{c'} - \epsilon^c$$

temos:

$$\frac{\partial \zeta^c}{\partial \zeta^{a'}} = \delta_a^c - \frac{\partial \epsilon^c}{\partial \zeta^{a'}} = \delta_a^c - \frac{\partial \zeta^b}{\partial \zeta^{a'}} \frac{\partial \epsilon^c}{\partial \zeta^b}$$

atê 1ª ordem em ϵ :

$$\frac{\partial \zeta^c}{\partial \zeta^{a'}} = \delta_a^c - \frac{\partial \zeta^c}{\partial \zeta^a} = \delta_a^c - \partial_a \epsilon^c,$$

assim:

$$\frac{\partial \zeta^d}{\partial \zeta^{b'}} = \delta_b^d - \partial_b \epsilon^d$$

Substituindo as duas expressões acima em (3.1) e mantendo-se temos até a 1ª ordem em ϵ temos:

$$g'_{ab}(\zeta') = g_{ab}(\zeta) - (\partial_a \epsilon^c) g_{cb} - (\partial_b \epsilon^d) g_{ad}$$

$$g'_{ab}(\zeta') - g_{ab}(\zeta) = \delta g_{ab} = - \{ (\partial_a \epsilon^c) g_{cb} + (\partial_b \epsilon^d) g_{ad} \} \quad (3.2)$$

Lembrando que a variação de g_{ab} devido a variação no argumento desse campo é dada por (IV-11) - capítulo 1:

$$\delta^A g_{ab} = g_{ab}(\zeta') - g_{ab}(\zeta) = \epsilon^c \partial_c g_{ab}$$

Podemos calcular a variação funcional ($\bar{\delta} g_{ab}$) no ponto ζ' :

$$\bar{\delta} g_{ab} = g'_{ab}(\zeta') - g_{ab}(\zeta') = \delta g_{ab} - \delta^A g_{ab}$$

$$\bar{\delta} g_{ab} = - \{ \epsilon^c \partial_c g_{ab} + (\partial_a \epsilon^c) g_{cb} + (\partial_b \epsilon^d) g_{ad} \} \quad (3.3)$$

reescrevendo os dois últimos termos:

$$(\partial_a \epsilon^c) g_{cb} = \partial_a \epsilon_b - \epsilon^c \partial_a g_{cb}$$

$$(\partial_b \epsilon^d) g_{ad} = \partial_b \epsilon_a - \epsilon^d \partial_b g_{ad}$$

obtemos:

$$\bar{\delta} g_{ab} = - (\partial_a \epsilon_b + \partial_b \epsilon_a) + \epsilon^c (\partial_a g_{cb} + \partial_b g_{ac} - \partial_c g_{ab})$$

$$= - (\partial_a \epsilon_b + \partial_b \epsilon_a) + g^{cd} \epsilon_d (\partial_a g_{cb} + \partial_b g_{ac} - \partial_c g_{ab})$$

$$\bar{\delta} g_{ab} = - (\nabla_a \epsilon_b + \nabla_b \epsilon_a)$$

$$\text{onde } \nabla_c U_d = \partial_c U_d - r_{cd}^a U_a \text{ com } r_{ab}^d = \frac{1}{2} g^{dc} (\partial_a g_{cb} + \partial_b g_{ac} - \partial_c g_{ab})$$

Cálculos de $\delta^B \chi^\mu$, $\delta^B \tilde{\eta}^c$, $\delta^B \tilde{g}_{ab}$

Inicialmente temos:

$$\chi^\mu = g^{1/4} \chi^\mu ; \quad \tilde{\eta}^c = g^{1/2} \eta^c ; \quad \tilde{g}_{ab} = g^{-1/4} g_{ab}$$

$$\delta^B \chi^\mu = - \theta \eta^c \partial_c \chi^\mu ; \quad \delta^B \eta^a = - \theta \eta^c \partial_c \eta^a$$

e de (3.3) com $\epsilon^c = \theta \eta^c$ temos:

$$\delta^B g_{ab} = - \theta \{ \eta^c \partial_c g_{ab} + (\partial_a \eta^c) g_{cb} + (\partial_b \eta^c) g_{ac} \}$$

Precisamos apenas calcular $\delta g^{1/n}$ com $n = 2, -4, 4$, e fazendo $\epsilon^c = \theta \eta^c$ obteremos $\delta^B g^{1/n}$. Notemos que:

$$\delta g^{1/n} = \frac{1}{n} g^{\frac{1}{n}-1} \delta g = \frac{1}{n} g^{\frac{1}{n}-1} \left(\frac{\delta g}{\delta g_{ab}} \delta g_{ab} \right)$$

como $\frac{\delta g}{\delta g_{ab}} = g^{ab}$ e usando (3.2):

$$\delta g^{1/n} = - \frac{2}{n} g^{\frac{1}{n}} (\partial_c \epsilon^c)$$

assim como $\delta^A g^{1/n} = \epsilon^c \partial_c g^{1/n}$ temos:

$$\bar{\delta} g^{1/n} = \delta g^{1/n} - \delta^A g^{1/n} = - \left\{ \frac{2}{n} (\partial_c \epsilon^c) + \epsilon^c \partial_c \right\} g^{1/n}$$

fazendo então $\epsilon^c = \theta \eta^c$ tem-se:

$$\delta^B g^{1/n} = - \theta \{ \eta^c \partial_c + \frac{2}{n} (\partial_c \eta^c) \} g^{1/n} \quad (3.3)$$

fazendo

$$n = 4 \rightarrow \delta^B g^{1/4} = -\theta \{ \eta^a \partial_a + \frac{(\partial_a \eta^a)}{2} \} g^{1/4} \quad (3.4)$$

assim usando a lei de transformação de X^μ :

$$\delta^B X^\mu = -\theta \eta^c \partial_c X^\mu$$

tem-se:

$$\begin{aligned} \delta^B X^\mu &= (\delta^B g^{1/4}) X^\mu + g^{1/4} (\delta^B X^\mu) \\ &= -\theta \left\{ \frac{(\partial_a \eta^a)}{2} X^\mu + \eta^a (\partial_a g^{1/4}) + \eta^a (\partial_a X^\mu) \right\} \\ \delta^B X^\mu &= -\theta \left\{ \eta^a \partial_a + \frac{(\partial_a \eta^a)}{2} \right\} X^\mu. \end{aligned}$$

Fazendo $n = 2$ na fórmula (3.3):

$$\delta^B g^{1/2} = -\theta \{ \eta^a \partial_a + (\partial_a \eta^a) \} g^{1/2}, \text{ consequentemente:}$$

$$\text{e } \delta^B \tilde{\eta}^c = \delta^B (g^{1/2} \eta^c) = (\delta^B g^{1/2}) \eta^c + g^{1/2} (\delta^B \eta^c)$$

usando $\delta^B \eta^c = -\theta \eta^a \partial_a \eta^c$ temos:

$$\delta^B \tilde{\eta}^c = -\theta \{ g^{1/2} \eta^a \partial_a \eta^c + (\partial_a \eta^a) \tilde{\eta}^c + \eta^a (\partial_a g^{1/2}) \eta^c \}$$

$$\delta^B \tilde{\eta}^c = -\theta \{ (\partial_a \eta^a) + \eta^a \partial_a \} \tilde{\eta}^c$$

Analogamente a partir de $\delta^B g^{-1/4}$ e $\delta^B g_{ab}$ obtem-se:

$$\delta^B \tilde{g}_{ab} = -\theta \left\{ \eta^c \partial_c - \frac{(\partial_c \eta^c)}{2} \right\} \tilde{g}_{ab} + (\partial_a \eta^c) \tilde{g}_{bc} + (\partial_b \eta^c) \tilde{g}_{ca}$$

Da mesma forma podemos calcular $\delta^B \tilde{g}^{ab}$, por definição temos:

$$g^{ab'}(\zeta') = \frac{\partial \zeta'^a}{\partial \zeta^c} \frac{\partial \zeta'^b}{\partial \zeta^d} g^{cd}(\zeta)$$

com as reparametrizações infinitesimais: $\zeta^{a'} = \zeta^a + \epsilon^a(\zeta^1, \zeta^2)$, mantendo-se termos até 1ª ordem em ϵ :

$$\delta g^{ab} = g^{ab'}(\zeta') - g^{ab}(\zeta) = (\partial_c \epsilon^a) g^{cb} + (\partial_d \epsilon^b) g^{ad}.$$

como:

$$\bar{\delta} g^{ab} = \delta g^{ab} - \delta^A g^{ab} = \delta g^{ab} - \epsilon^c \partial_c g^{ab}$$

temos:

$$\bar{\delta} g^{ab} = (\partial_c \epsilon^a) g^{cb} + (\partial_d \epsilon^b) g^{ad} - \epsilon^c \partial_c g^{ab}$$

para obtermos $\delta^B g^{ab}$ basta fazer $\epsilon^a = \theta \eta^a$:

$$\delta^B g^{ab} = \theta \{ (\partial_c \eta^a) g^{cb} + (\partial_d \eta^b) g^{ad} - \eta^c \partial_c g^{ab} \}$$

usando então (3.4) com g trocado por $-g$ temos:

$$\delta^B \{ (-g)^{1/4} g^{ab} \} = \delta^B \tilde{g}^{ab} = \theta \left\{ -\frac{(\partial_c \eta^c)}{2} - \eta^c \partial_c \right\} \tilde{g}^{ab} + (\partial_c \eta^a) \tilde{g}^{cb} + (\partial_d \eta^b) g^{ad}$$

A4 - Condições de Cauchy-Riemann

A equação:

$$\nabla_a \varepsilon_b + \nabla_b \varepsilon_a - (\nabla^c \varepsilon_c) g_{ab} = 0 \quad (4.1)$$

pode ser reescrita usando-se a definição das derivadas covariantes:

$$\nabla_a \varepsilon_b = \partial_a \varepsilon_b - \Gamma_{ab}^d \varepsilon_d$$

$$\nabla^c \varepsilon_c = g^{cf} \nabla_f \varepsilon_c$$

$$(\partial_a \varepsilon_b - \Gamma_{ab}^d \varepsilon_d) + (\partial_b \varepsilon_a - \Gamma_{ba}^d \varepsilon_d) - g^{cf} (\partial_f \varepsilon_c - \Gamma_{fc}^d \varepsilon_d) g_{ab} = 0, \quad (4.2)$$

lembrando que:

$$\Gamma_{ab}^d = \frac{1}{2} g^{dc} (\partial_a g_{cb} + \partial_b g_{ac} - \partial_c g_{ab}),$$

no gauge conforme: $g_{ab} = \rho \delta_{ab} = e^\phi \delta_{ab}$ temos:

$$\Gamma_{ab}^d = \frac{1}{2} (\delta_a^d \partial_b \phi + \delta_b^d \partial_a \phi - \delta^{ds} \delta_{ab} \partial_s \phi)$$

assim a expressão (4.2) fica:

$$\begin{aligned} \partial_a (g_{bc} \varepsilon^c) + \partial_b (g_{ac} \varepsilon^c) - \frac{2\varepsilon_d}{2} (\delta_a^d \partial_b \phi + \delta_b^d \partial_a \phi - \delta^{ds} \delta_{ab} \partial_s \phi) + \\ - g^{cf} g_{ab} \left\{ \partial_a \varepsilon_b - \frac{1}{2} \varepsilon_e (\delta_f^e \partial_c \phi + \delta_c^e \partial_f \phi - \delta^{es} \delta_{cf} \partial_s \phi) \right\} = 0 \end{aligned}$$

usando nessa expressão:

$$\epsilon_b = g_{db} \epsilon^d$$

$$\epsilon_d = g_{di} \epsilon^i$$

temos:

$$\begin{aligned} & g_{bc} \partial_a \epsilon^c + g_{ac} \partial_b \epsilon^c + \partial_a g_{bc} \epsilon^c + \partial_b g_{ac} \epsilon^c - \epsilon^i (\delta_{ai} \partial_b \phi + \delta_{ib} \partial_a \phi - \delta_{ab} \partial_i \phi) + \\ & - \delta_d^c g_{ab} \partial_c \epsilon^d - g_{ab} g^{cf} \epsilon^d (\partial_f g_{dc}) + \\ & + \frac{1}{2} g^{cf} g_{ab} (\epsilon_c \partial_f \phi + \epsilon_f \partial_c \phi - \delta_{cf} \delta^{es} \epsilon_e \partial_s \phi) = 0 \quad (4.3) \end{aligned}$$

Com $g_{ab} g^{ab} = 2$ e $g_{ab} = e^\phi \delta_{ab}$ teremos $g^{ab} = e^{-\phi} \delta^{ab}$, assim podemos escrever:

$$\delta^{es} \epsilon_e = e^\phi e^{-\phi} \delta^{es} \epsilon_e = e^\phi g^{es} \epsilon_e = e^\phi \epsilon^s$$

e é fácil ver que o último termo da expressão 4.3 é nulo:

$$\frac{1}{2} g^{cf} g_{ab} (\epsilon_c \partial_f \phi + \epsilon_f \partial_c \phi - e^\phi \delta_{cf} \epsilon^s \partial_s \phi) = \frac{1}{2} g_{ab} (2 \epsilon^c \partial_c \phi - g^{cf} g_{cf} \epsilon^s \partial_s \phi) = 0,$$

foi usado que $e^\phi \delta_{cf} = g_{cf}$.

Simplificando o restante de (4.3) temos:

$$\begin{aligned} & g_{bc} \partial_a \epsilon^c + g_{ac} \partial_b \epsilon^c - g_{ab} \partial_c \epsilon^c + \overset{4}{\delta_{bc} (\partial_a \phi) \epsilon^c} + \overset{5}{\delta_{ac} (\partial_b \phi) \epsilon^c} - \overset{6}{\epsilon^i \delta_{ai} \partial_b \phi} + \\ & - \overset{7}{\epsilon^i \delta_{ib} \partial_a \phi} + \overset{8}{\epsilon^i \delta_{ab} (\partial_i \phi)} - g_{ab} \overset{9}{\delta^{cf} \delta_{dc} \epsilon^d (\partial_f \phi)} = 0 \end{aligned}$$

é fácil ver que $5 + 6 = 4 + 7 = 8 + 9 = 0$ lembrando ainda que $g_{ab} = e^{\phi} \delta_{ab}$, multiplicando-se a expressão resultante acima por $e^{-\phi}$ obtemos:

$$\delta_{bc} \partial_a \epsilon^c + \delta_{ac} \partial_b \epsilon^c - \delta_{ab} \partial_c \epsilon^c = 0$$

para $b = 1$ e $a = 2$ temos: $\partial_2 \epsilon^1 = -\partial_1 \epsilon^2$

para $a = b = 1$ temos: $\partial_1 \epsilon^1 = \partial_2 \epsilon^2$.

Essas são exatamente as condições de Cauchy-Riemann.

Definindo :

$$z = \zeta^1 + i\zeta^2, \bar{z} = \zeta^1 - i\zeta^2 \text{ e } \epsilon^z = \epsilon^1 + i\epsilon^2$$

temos:

$$\partial_{\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \zeta^1} + i \frac{\partial}{\partial \zeta^2} = \partial_1 + i\partial_2.$$

assim temos:

$$\partial_{\bar{z}} \epsilon^z = (\partial_1 + i\partial_2) (\epsilon^1 + i\epsilon^2) = (\partial_1 \epsilon^1 - \partial_2 \epsilon^2) + i(\partial_1 \epsilon^2 + \partial_2 \epsilon^1)$$

portanto as condições de Cauchy-Riemann são equivalentes a equação:

$$\partial_{\bar{z}} \epsilon^z = 0$$

A5 - Invariância de Gauge da Ação da Corda: $\delta^G S = 0$

Devido a nossa associação da transformação de gauge (δ^G) com a transformação na forma funcional dos campos obtida a partir das reparametrizações ($\bar{\delta}$) é suficiente mostrar que:

$$\bar{\delta} S = 0 \quad (5.1)$$

onde:

$$S = \int_M d^2 \zeta L ; L = \frac{\mu_0}{2} \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\mu$$

Como $\sqrt{g} \cdot d^2 \zeta = d\Omega$ temos $d^2 \zeta L = d\Omega \frac{\mu_0}{2} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\mu$ assim, como esperado, $d^2 \zeta L$ é um escalar por reparametrizações e por reparametrizações infinitesimais da variedade M:

$$\zeta^a \rightarrow \zeta^{a'} = \zeta^a + \epsilon^a(\zeta^1, \zeta^2), \quad \partial M \rightarrow \partial M'$$

devemos ter:

$$\delta(d^2 \zeta L) = \delta(d^2 \zeta)L + d^2 \zeta(\delta L) = 0 \quad (5.2)$$

Até a 1ª ordem em ϵ tem-se:

$$d\zeta^{a'} = \frac{\partial \zeta^{a'}}{\partial \zeta^b} d\zeta^b = (\delta_b^a + \partial_b \epsilon^a) d\zeta^b,$$

assim:

$$(d^2 \zeta)' = d\zeta^{1'} d\zeta^{2'} = (1 + \partial_a \epsilon^a) d\zeta^1 d\zeta^2 = (1 + \partial_a \epsilon^a) d^2 \zeta$$

$$\delta(d^2\zeta) = (d^2\zeta)' - (d^2\zeta) = (\partial_a \epsilon^a) d^2\zeta, \quad (5.3)$$

além disso sabemos que:

$$\delta L = \bar{\delta} L + \delta^A L = \bar{\delta} L + \epsilon^a \partial_a L \quad (5.4)$$

substituindo (5.4) e (5.3) em (5.2), obtemos a variação funcional da lagrangeana L sob reparametrizações:

$$\bar{\delta} L = - \partial_a (\epsilon^a L),$$

consequentemente para a ação S :

$$\bar{\delta} S = \int_M d^2\zeta (\bar{\delta} L) = - \int_M d^2\zeta \partial_a (\epsilon^a L) \quad (5.5)$$

lembrando que $\zeta^1 = \tau$ e $\zeta^2 = \sigma$ temos:

$$\bar{\delta} S = - \left\{ \int_{\sigma_i}^{\sigma_f} d\zeta^2 (\epsilon^1 L) \right\}_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} + \left\{ d\zeta^1 (\epsilon^2 L) \right\}_{\sigma_i}^{\sigma_f}$$

Estamos interessados apenas em reparametrizações que dexem S invariante e, como vimos no capítulo 1, isso equivale a trabalhar com reparametrizações que preservem a borda de M ($\partial M \rightarrow \partial M$), o que é equivalente a (ver IV-7 - capítulo 1):

$$\epsilon^2(\tau, \sigma_i(f)) = 0.$$

Assim o 2º termo em $\bar{\delta}S$ é nulo. Da mesma forma assume-se em geral que

$$\left. (\epsilon^1 L) \right|_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} = 0 ,$$

e temos o resultado procurado:

$$\bar{\delta}S = 0$$

consequentemente $\delta^G S = 0$.

Ao associarmos a transformação de gauge com a transformação de B.R.S.T. simplesmente tomando-se $\epsilon^a = \theta \eta^a$, como de corrência das discussões acima vemos que a ação S é invariante apenas por transformações de B.R.S.T. que satisfaçam certas condições de contorno:

$$\eta^2(\tau, \sigma_i(f)) = 0 \quad \text{e} \quad \left. (\eta^1 L) \right|_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} = 0$$

No caso da corda fechada onde $\partial M = \emptyset$ e consequentemente: $\int_M \partial_a(f^a) d^2\zeta = 0$ qualquer que seja f^a , os campos η^c não precisam satisfazer nenhuma condição de borda pois os termos de borda são trivialmente nulos.

A6 - Conservação da Corrente de Noether J^C

$$J^C = \frac{\partial L_T}{\partial(\partial_c \phi_i)} (\delta^B \phi_i) + L(\delta^B \zeta^C)$$

onde

$$L = \frac{\mu_0}{2} \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\mu$$

$$L_T = L + L_{GF} + L_{FP}$$

$$\delta^B \zeta^C = \theta \eta^C$$

Derivando-se J^C temos:

$$\partial_C J^C = \partial_C \left(\frac{\partial L_T}{\partial (\partial_C \phi_i)} \delta^B \phi_i \right) + \theta \partial_C (L \eta^C) \quad (6.1)$$

mas

$$\partial_C \left(\frac{\partial L_T}{\partial (\partial_C \phi_i)} \delta^B \phi_i \right) = \partial_C \left(\frac{\partial L_T}{\partial (\partial_C \phi_i)} \right) \delta^B \phi_i + \frac{\partial L_T}{\partial (\partial_C \phi_i)} \delta^B (\partial_C \phi_i) ,$$

usando a equação de movimento: $\partial_C \left(\frac{\partial L_T}{\partial (\partial_C \phi_i)} \right) = \frac{\partial L_T}{\partial \phi_i}$ temos:

$$\partial_C \left(\frac{\partial L_T}{\partial (\partial_C \phi_i)} \delta^B \phi_i \right) = \frac{\partial L_T}{\partial \phi_i} \delta^B \phi_i + \frac{\partial L_T}{\partial (\partial_C \phi_i)} \delta^B (\partial_C \phi_i) = \delta^B L_T$$

como $\delta^B L_T = \delta^B L + \delta^B (L_{GF} + L_{FP}) = \delta^B L$ temos:

$$\partial_C \left(\frac{\partial L_T}{\partial (\partial_C \phi_i)} \delta^B \phi_i \right) = \delta^B L .$$

substituindo em (6.1) temos:

$$\partial_C J^C = \delta^B L + \theta \partial_C (L \eta^C)$$

Na seção A5 vimos que $\bar{\delta} L = - \partial_a (\epsilon^a L)$, com a prescrição $\epsilon^a = \theta \eta^a$ temos então:

$$\delta^B L = - \theta \partial_a (\eta^a L),$$

consequentemente está provada a conservação de J^C :

$$\partial_c J^C = - \theta \partial_a (\eta^a L) + \theta \partial_c (L \eta^c) = 0$$

A P Ê N D I C E B

EQUIVALÊNCIA ENTRE O MÉTODO DO "HEAT KERNEL" E O DA FUNÇÃO ZETA
(NO CÁLCULO DA ANOMALIA QUIRAL)

No caso da anomalia quiral (cap. 3 - seção II) tínhamos a infinidade $A(x) = \sum_n \bar{\phi}_n(x) \gamma_5 \phi_n(x)$ que foi regularizada pelo método do "heat kernel":

$$A(x)_{h.t} = \lim_{M^2 \rightarrow \infty} \sum_n \bar{\phi}_n(x) \gamma_5 e^{-\lambda_n^2/M^2} \phi_n(x) \quad \text{com} \quad (i\partial) \phi_n = \lambda_n \phi_n$$

ou definindo $t = 1/M^2$: $A(x)_{h.t} = \lim_{t \rightarrow 0} \sum_n \bar{\phi}_n(x) \gamma_5 e^{-t\lambda_n^2} \phi_n(x)$

$$A(x)_{h.t} = \lim_{t \rightarrow 0} A(x,t)_{h.t} \quad \text{com} \quad A_{ht}(x) = \sum_n \bar{\phi}_n(x) \gamma_5 e^{-t\lambda_n^2} \phi_n(x) \quad (1.1)$$

Em ordem mais baixa em t obtivemos um resultado independente de t e que deu origem a anomalia propriamente dita, mas não é difícil ver que o termo seguinte seria proporcional a t (inversamente proporcional a M^2) e o próximo proporcional a t^2 e assim por diante, ou seja:

$$A_{ht}(x,t) = A_{ht}(x) + ut + vt^2 + \dots \quad (1.2)$$

A grandeza $A(x,t)$ será utilizada em seguida na ligação com o método da função zeta (ζ), no qual a infinidade $A(x)$ é re

regularizada da seguinte maneira:

$$A_{\zeta}(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \sum_n \frac{\bar{\phi}_n(x) \gamma_5 \phi_n(x)}{(\lambda_n^2)^s} \quad s > 0 \quad (1.3)$$

Seja a definição da função gama:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$$

assim

$$1 = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$$

fazendo $t \rightarrow \lambda_n^2 t$ temos:

$$1 = \frac{(\lambda_n^2)^s}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-\lambda_n^2 t} dt$$

Introduzindo-se essa identidade em (1.3) temos:

$$A_{\xi}(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \sum_n \frac{\bar{\phi}_n(x) \gamma_5 \phi_n(x)}{(\lambda_n^2)^s} \left\{ \frac{(\lambda_n^2)^s}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-\lambda_n^2 t} dt \right\} \phi_n(x)$$

Subdividindo a integral acima em duas partes:

$$\int_0^{\infty} = \int_0^{\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty}$$

onde ϵ é um número pequeno, próximo de zero, temos:

$$A_{\zeta}(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\epsilon} t^{s-1} \left| \sum_n \bar{\phi}_n(x) \gamma_5 e^{-\lambda_n^2 t} \phi_n(x) \right| dt + \right. \\ \left. + \sum_n \frac{\bar{\phi}_n(x) \gamma_5}{\Gamma(s)} \left| \int_{\epsilon}^{\infty} t^{s-1} e^{-\lambda_n^2 t} dt \right| \phi_n(x) \right\}$$

O 1º termo entre colchetes na expressão acima é justamente $A_{h,t}(x,t)$ definido em (1.1). O 2º termo entre colchetes é uma função analítica da variável s , portanto como estamos interessados no limite $s \rightarrow 0$ e nesse limite $\Gamma(s) \rightarrow \infty$ podemos desprezar o 2º termo acima e temos:

$$A_{\zeta}(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\epsilon} t^{s-1} A_{h,t}(x,t) dt$$

substituindo o resultado (1.2) para $A_{h,t}$ e integrando temos:

$$A_{\zeta}(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(s)} \left\{ \frac{\epsilon^s A_{h,t}(x)}{s} + \frac{u \epsilon^{s+1}}{s+1} + \frac{v \epsilon^{s+2}}{2(1+s/2)} + \dots \text{etc} \right\}$$

como $\lim_{s \rightarrow 0} \Gamma(s) s = \lim_{s \rightarrow 0} \Gamma(s+1) = 1$ e $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (\alpha+1)^{-1} \approx 1 - \alpha$ temos:

$$A_{\zeta}(x) = A_{h,t}(x) + \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{u \epsilon^{s+1}}{\Gamma(s)} (1-s + \dots) + \frac{v}{2} \frac{\epsilon^{s+2}}{\Gamma(s)} \left(1 - \frac{s}{2} + \dots\right) \right\} \quad (1.4)$$

como $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(s)} \approx s + \gamma s^2 + \dots \text{etc}$ $\gamma = \text{cte de Euler}$,

então todos os termos de (1.4) entre chaves vão a zero e temos demonstrada a equivalência entre regularização via "heat kernel" (h.t) e a regularização via função zeta (ζ):

$$A_{\zeta}(x) = A_{h.t}(x)$$

A P Ê N D I C E C

COVARIÂNCIA NO GAUGE CONFORME

INTRODUÇÃO

Antes de fixarmos o gauge conforme na corda bosônica, estávamos trabalhando apenas com os campos: $g_{ab}(\zeta), x^\mu(\zeta)$. Esses campos possuem carácter tensorial bem definido sob reparametrizações, o primeiro é um tensor de 2ª ordem:

$$(\zeta^1, \zeta^2) \rightarrow (\zeta^{1'}, \zeta^{2'}), \quad g'_{ab}(\zeta') = \frac{\partial \zeta^c}{\partial \zeta'^a} \frac{\partial \zeta^d}{\partial \zeta'^b} g_{cd}(\zeta)$$

Já o campo x^μ é um tensor de ordem zero, um escalar, sob reparametrizações:

$$x^\mu(\zeta') = x^\mu(\zeta)$$

Entretanto para fixarmos o gauge conforme usamos a simetria de B.R.S.T, e introduzimos os campos fantasmas (η^a), os campos antifantasmas (ξ_a) e os campos auxiliares (B_a). Os campos η_a foram introduzidos a partir dos parâmetros das reparametrizações infinitesimais ϵ^a :

$$\epsilon^a(\zeta) = \theta \eta^a(\zeta)$$

Portanto como toda dependência local de ϵ^a está em η^a , o carácter tensorial de η^a sob reparametrizações é o mesmo de ϵ^a , ou seja, η^a são as componentes de um vetor (tensor de ordem 1) como já é indicado pela presença de um único índice. Mas os campos ξ_a e B_a foram introduzidos na teoria unicamente pelas suas propriedades de transformação sob B.R.S.T. e assim não é claro qual é o carácter tensorial desses campos, neste apêndice estudaremos cuidadosamente os tensores na variedade M e a definição do produto escalar no espaço de Hilbert, para descobrirmos o carácter tensorial desses novos campos e também para que os argumentos usados no capítulo 3 com respeito a definição semi-positiva e hermiticidade dos operadores $(-D)$, $(-E)$ e $(-F)$ tornem-se mais precisos.

Tensores em Variedades Bidimensionais Riemannianas

No capítulo 1 trabalhamos com tensores na variedade bidimensional, M , dos parâmetros da corda. Os tensores foram definidos perante as reparametrizações das coordenadas de M : $(\zeta^1, \zeta^2) \rightarrow (\zeta^{1'}, \zeta^{2'})$. Entretanto como é sempre possível escolher um sistema de coordenadas locais em M tal que a métrica seja conformalmente euclideana (sistema de coordenadas conformes):

$$ds^2 = g_{ab} d\zeta^a d\zeta^b = \rho \delta_{ab} d\zeta^a d\zeta^b = (\exp 2\phi) \{ (d\zeta^1)^2 + (d\zeta^2)^2 \} \quad (1.1)$$

com $\rho = \exp(2\phi)$, $g_{ab} = \rho \delta_{ab}$ (gauge conforme)

É interessante definirmos tensores perante as reparametrizações que mantêm a forma da métrica (1.1), ou seja, tensores perante reparametrizações que levam de um sistema de coordenadas conforme a outro também conforme. Essas reparametrizações, como vimos no capítulo 1, dentre todas as reparametrizações, são aquelas em que as novas coordenadas são funções analíticas das coordenadas anteriores (transformações conformes).

Daqui para frente será mais conveniente trabalharmos com as coordenadas complexas:

$$z = \zeta^1 + i\zeta^2 \quad ; \quad \bar{z} = \zeta^1 - i\zeta^2 \quad (1.2)$$

as equações acima correspondem a uma reparametrização analítica:

$$\zeta^{1'} = \zeta^1 + i\zeta^2 \quad ; \quad \zeta^{2'} = \zeta^1 - i\zeta^2 \quad (1.3)$$

Nesse novo sistema de coordenadas usando o fato que g_{ab} é um tensor sob quaisquer reparametrizações, inclusive as analíticas, temos:

$$g_{ab}'(\zeta') = \frac{\partial \zeta^c}{\partial \zeta'^a} \frac{\partial \zeta^d}{\partial \zeta'^b} g_{cd}(\zeta)$$

com $\zeta^{1'} = z$ e $\zeta^{2'} = \bar{z}$ e usando $g_{ab}(\zeta) = \rho \delta_{ab} = e^{2\phi} \delta_{ab}$ temos:

$$g_{\bar{z}\bar{z}}(z, \bar{z}) = g_{22}'(\zeta') = g_{zz}(z, \bar{z}) = g_{11}'(\zeta') = 0$$

e

$$g_{z\bar{z}}(z, \bar{z}) = g_{\bar{z}z}(z, \bar{z}) = g_{12}'(\zeta') = g_{21}'(\zeta') = \frac{\rho}{2} = \frac{e^{2\phi}}{2}$$

Ou seja, no sistema de coordenadas z e $\bar{z}$ temos:

$$g'_{ab}(z, \bar{z}) = \begin{pmatrix} 0 & e^{2\phi/2} \\ e^{2\phi/2} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

e

$$g^{ab'}(z, \bar{z}) = \begin{pmatrix} 0 & 2e^{-2\phi} \\ 2e^{-2\phi} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

consequentemente:

$$ds^{2'} = ds^2 = g'_{ab}(\zeta') d\zeta^{a'} d\zeta^{b'} = dzd\bar{z} = e^{2\phi} dzd\bar{z}$$

como:

$$dzd\bar{z} = (d\zeta^1 + id\zeta^2)(d\zeta^1 - id\zeta^2) = (d\zeta^1)^2 + (d\zeta^2)^2.$$

vemos que, como esperado, a forma da métrica conforme (1.1) foi mantida pela reparametrização (1.2).

No que segue trabalharemos principalmente no sistema de coordenadas $(z, \bar{z})$ e assim as componentes dos tensores serão rotuladas através de índices z ou $\bar{z}$ e não mais 1 ou 2 como acontecia no sistema de coordenadas (ζ^1, ζ^2) , a relação entre as componentes dos tensores nos dois sistemas de coordenadas é direta, por exemplo:

Se ϵ^a é a componente 'a' de um vetor no sistema (ζ^1, ζ^2) temos no novo sistema $(\zeta^{1'} = z, \zeta^{2'} = \bar{z})$ por definição:

$$\epsilon^{a'}(\zeta') = \frac{\partial \zeta^{a'}}{\partial \zeta^b} \epsilon^b$$

usando (1.3) obtem-se:

$$\epsilon^z = \epsilon^1 + i\epsilon^2 \quad (1.6)$$

$$\epsilon^{\bar{z}} = \epsilon^1 - i\epsilon^2$$

Devido a forma não diagonal da métrica no sistema $(z, \bar{z})$ (ver 1.4) sempre podemos trabalhar apenas com índices z , as componentes $\bar{z}$ são escritas em função das componentes z , exemplo:

$$\epsilon^{\bar{z}} = g^{\bar{z}a} \epsilon_a = g^{\bar{z}z} \epsilon_z \quad a, b = z, \bar{z}$$

$$\epsilon_{\bar{z}} = g_{\bar{z}b} \epsilon^b = g_{\bar{z}z} \epsilon^z$$

De um modo geral um tensor que tenha k índices $\bar{z}$ superiores (inferiores) sempre pode ser escrito em termos de um tensor com k índices z inferiores (superiores), e assim podemos esquecer os índices $\bar{z}$. Seja $T_{zz\ldots}^{zz\ldots}$ um tensor com n_+ índices z superiores e n_- índices z inferiores, ao passarmos de um sistema de coordenadas complexas $(z, \bar{z})$ a outro $(z', \bar{z}')$ temos por definição:

$$\underbrace{T_{zz\ldots z}^{zz\ldots z'}}_{n_-}^{n_+}(z', \bar{z}') = \underbrace{\left(\frac{\partial \zeta^{1'}}{\partial \zeta^a} \frac{\partial \zeta^{1'}}{\partial \zeta^b} \ldots \right)}_{n_+} \underbrace{\left(\frac{\partial \zeta^e}{\partial \zeta^{1'}} \frac{\partial \zeta^d}{\partial \zeta^{1'}} \ldots \right)}_{n_-} T_{de\ldots}^{ab\ldots} \quad (1.7)$$

com $a, b, e, \dots = z, \bar{z}$

$$\zeta^{1'} = \zeta^{z'} = z', \quad \zeta^1 = \zeta^z = z$$

e

$$\zeta^{2'} = \zeta^{\bar{z}'} = \bar{z}', \quad \zeta^2 = \zeta^{\bar{z}} = \bar{z}$$

Entretanto como supõe-se que a reparametrização $(z, \bar{z}) \rightarrow (z', \bar{z}')$ é analítica em z , o que é equivalente* a:

$$\frac{\partial \zeta^{z'}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \zeta^{1'}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial z'}{\partial \bar{z}} = 0$$

então as componentes de $T_{de}^{ab} \dots$ com índices superiores do tipo $\bar{z}$ possuem um coeficiente nulo na expressão (1.7) acima.

Analogamente admitindo-se que a reparametrização inversa $(z', \bar{z}') \rightarrow (z, \bar{z})$ seja também analítica temos:

$$\frac{\partial \zeta^z}{\partial \bar{z}'} = 0$$

e o complexo conjugado dessa expressão:

$$\frac{\partial \zeta^{\bar{z}}}{\partial z'} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial z'} = 0$$

* Análogo ao que vimos no capítulo 1 em que:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\epsilon^1 + i \epsilon^2) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \epsilon^z = 0$$

Assim em (1.7) também as componentes de $T_{de\dots}^{ab\dots}$ com índices inferiores do tipo $\bar{z}$ aparecem com um coeficiente nulo e restam apenas os índices z , reescrevendo (1.7) temos:

$$T_{z\dots z}^{z\dots z'}(z', \bar{z}) = \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)^{n+} \left(\frac{\partial z}{\partial z'}\right)^{n-} T_{z\dots z}^{z\dots z} = \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)^n T_{z\dots z}^{z\dots z}(z, \bar{z})$$

com $n = n_+ - n_-$

Isso nos sugere definir um espaço dos tensores de ordem $n(\mathcal{T}^n)$ como o espaço dos tensores sob transformações conformes cuja diferença entre o número de índices z superiores e inferiores seja igual a n :

$$T \in \mathcal{T}^n / T \rightarrow \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)^n T. \quad (1.8)$$

Como estamos interessados em estudar a covariância dos operadores D, E e F , que são operadores diferenciais, é interessante introduzirmos as derivadas covariantes.

Primeiro definimos a derivada covariante que aumenta em uma unidade a ordem dos tensores de $\mathcal{T}^n$, ou seja, acrescenta um índice z superior:

$$\nabla_n^z : \mathcal{T}^n \rightarrow \mathcal{T}^{n+1}.$$

se $T \in \mathcal{T}^n$:

$$\nabla_n^z T = g^{z\bar{z}} \partial_{\bar{z}} T \quad (1.9)$$

É fácil verificar que $\nabla_n^z T$ realmente pertence a

τ^{n+1} , pois num sistema $z', \bar{z}'$ teríamos:

$$\nabla_n^{z'} T'(z', \bar{z}') = g^{z' \bar{z}'}(z', \bar{z}') \partial_{\bar{z}'} T'(z', \bar{z}'),$$

usando:

$$\frac{\partial z'}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{z}'}{\partial z} = 0$$

como $T \in \tau^n$ temos:

$$T'(z', \bar{z}') = \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)^n T(z, \bar{z}); \quad \partial_{\bar{z}'} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}'} \partial_{\bar{z}}$$

e

$$g^{z \bar{z}'}(z', \bar{z}') = \frac{\partial z'}{\partial z} \frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}} g^{z \bar{z}}(z, \bar{z})$$

substituindo em (1.10) temos:

$$\nabla_n^{z'} T'(z', \bar{z}') = g^{z \bar{z}'} \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}}\right) \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}'}\right) \partial_{\bar{z}} \left\{ \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)^n T(z, \bar{z}) \right\}$$

com $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}}\right) = 0$ temos:

$$\nabla_n^{z'} T'(z', \bar{z}') = \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)^{n+1} g^{z \bar{z}} \partial_{\bar{z}} T(z, \bar{z}) = \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)^{n-1} \nabla_n^z T$$

Analogamente podemos definir a derivada covariante que diminui em uma unidade a ordem do tensor:

$$\nabla_Z^n : \mathcal{T}^n \rightarrow \mathcal{T}^{n-1}$$

se $T \in \mathcal{T}^n$

$$\nabla_Z^n T = (g^{z\bar{z}})^n \partial_Z \{ (g_{z\bar{z}})^n T \} \quad (1.11)$$

É simples provar que $\nabla_Z^n T$ pertence a $\mathcal{T}^{n+1}$.

Como vimos no capítulo 3, os operadores $(-E)$ e $(-F)$, no limite em que o fator conforme tende a 1 e a variedade M tende ao $\mathbb{E}^2$, resultam* no laplaciano do espaço euclidiano numa forma matricial 2×2 :

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} (-E), (-F) = \begin{pmatrix} -\partial^2 & 0 \\ 0 & -\partial^2 \end{pmatrix}, \quad -E = -\frac{\partial \rho \partial}{\rho^2}; \quad -F = -\frac{\rho \partial 1 \partial}{\rho^2} :$$

Da mesma forma o operador $-D = -\frac{1}{\rho} \partial^2$ dá origem ao seguinte operador matricial:

$$-\overline{D} = -\frac{1}{\rho} \partial^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Na verdade como veremos a seguir os três operadores acima são laplacianos que atuam em tensores de ordem bem definida. Para verificarmos a conexão com os tensores definidos neste apêndice devemos introduzir a definição geral e covariante dos dois tipos possíveis de laplacianos sobre $\mathcal{T}^n$.

* Definindo-se o laplaciano no espaço euclidiano como:

$$-\partial^a \partial_a = -g^{ab} \partial_b \partial_a = -\partial^2.$$

$$\Delta_n(+)= -2 \nabla_z^{n+1} \nabla_n^z \quad (1.13)$$

$$\Delta_n(-)= -2 \nabla_{n-1}^z \nabla_z^n \quad (1.14)$$

Lembrando do papel das derivadas covariantes vemos que os laplacianos não alteram a ordem dos tensores:

$$\Delta_n(-): \tau^n \rightarrow \tau^n$$

Usando a definição das derivadas covariantes é fácil ver, por exemplo, que $-D = -\frac{1}{\rho} \partial^2 = \Delta_0(+)$:

De (1.5) temos:

$$\Delta_0(+)= -2 \nabla_z^1 \nabla_0^z = -2 g^{z\bar{z}} \partial_z \{g_{z\bar{z}} g^{z\bar{z}} \partial_{\bar{z}}\}$$

$$g^{z\bar{z}} = \frac{1}{g_{z\bar{z}}} \text{ e assim } \Delta_0(+)= -\frac{4}{\rho} \partial_z \partial_{\bar{z}},$$

Mas $(-D)$ e os demais operadores $(-E)$ e $(-F)$ estão definidos no sistema de coordenadas (ζ^1, ζ^2) cuja relação com o sistema complexo $(z, \bar{z})$ está dada em (1.2) de onde obtemos:

$$\partial_z = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta^1} - i \frac{\partial}{\partial \zeta^2} \right) = \frac{1}{2} (\partial_1 - i \partial_2)$$

e

$$\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2} (\partial_1 + i \partial_2), \quad \partial_z \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{4} (\partial_1^2 + \partial_2^2)$$

$$\text{assim } \Delta_0(+)= -\frac{4}{\rho} \partial_z \partial_{\bar{z}} = -\frac{1}{\rho} (\partial_1^2 + \partial_2^2) = -\frac{1}{\rho} \partial^2 = -D \quad (1.15)$$

Entretanto se tentarmos relacionar os operadores matriciais $-\bar{D}$, $-E$ e $-F$ com os laplacianos definidos em (1.13) e (1.14) não obteremos sucesso. O problema está no fato que os laplacianos $\Delta_n^{(+)}$ e $\Delta_n^{(-)}$ atuam em $\mathcal{T}^n$ e assim não precisam ser escritos em termos de matrizes 2×2 como acontece com os operadores $(-\bar{D})$, $(-E)$ e $(-F)$. Na verdade esses operadores correspondem a laplacianos que atuam no espaço que é a soma direta de $\mathcal{T}^n$ com $\mathcal{T}^{-n}$, que é o chamado espaço vetorial dos tensores simétricos de traço nulo de ordem n , S^n : $S^n = \mathcal{T}^n \oplus \mathcal{T}^{-n}$

um elemento ϕ de S^n é escrito na forma:

$$\phi = \begin{pmatrix} \overbrace{\phi_{z \dots z}^n}^n \\ \underbrace{\phi_{\bar{z} \dots \bar{z}}^n}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{z \dots z}^n \\ (g_{z\bar{z}})^n \phi_{\bar{z} \dots \bar{z}}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ (g_{z\bar{z}})^n \phi^* \end{pmatrix}$$

onde $\phi \in \mathcal{T}^n$ e $(g_{z\bar{z}})^n \phi^* \in \mathcal{T}^{-n}$

Temos então a definição natural para as derivadas covariantes em S^n :

$$\begin{aligned} P_n: S^n &\rightarrow S^{n+1} \\ P_n &= \nabla_n^z \oplus \nabla_n^{-n} \\ P_n &= \begin{pmatrix} \nabla_n^z & 0 \\ 0 & \nabla_n^{-n} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$B_n: S^{n+1} \rightarrow S^n$$

$$B_n = (-\nabla_z^{n+1}) \oplus (-\nabla_{-(n+1)}^2)$$

$$B_n = \begin{pmatrix} -\nabla_z^{n+1} & 0 \\ 0 & \nabla_{-(n+1)}^2 \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

Seguindo (1.13) e (1.14) define-se os laplacianos em S^n :

$$C_n^{(+)}: S^n \rightarrow S^n, \quad C_n^{(+)} = \Delta_n^{(+)} \oplus \Delta_{-n}^{(-)}$$

$$C_n^{(+)} = 2B_n P_n \quad (1.18)$$

$$C_{n+1}^{(-)}: S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}, \quad C_{n+1}^{(-)} = \Delta_{n+1}^{(-1)} \oplus \Delta_{-(n+1)}^{(+)}$$

$$C_{n+1}^{(-)} = 2P_n B_n \quad (1.19)$$

Os laplacianos definidos acima são escritos em termos de matrizes 2×2 da mesma maneira que os operadores $(-D)$, $(-E)$ e $(-F)$.

Esses laplacianos são operadores diferenciais que dependem da ordem do tensor no qual estão atuando. Assim para fazermos a correspondência entre os operadores $(-\bar{D})$, $(-E)$ e $(-F)$ com um laplaciano de uma determinada ordem é importante sabermos a ordem dos tensores sobre os quais esses operadores atuam. Para isso notemos que esses operadores atuam respectivamente em autofunções usadas nas expansões dos campos X^μ , η e $\bar{\xi}$:

$$X^\mu = \sum_n k_n \Omega_n(\zeta) \quad (-D) \Omega_n^\mu = \alpha_n \Omega_n^\mu$$

$$\eta = \sum_m a_m \psi_m(\zeta) \quad (-E) \psi_m = \beta_m \psi_m$$

$$\bar{\xi} = \sum_m b_m \bar{\phi}_m(\zeta) \quad (-F) \bar{\phi}_m^T = \gamma_m \bar{\phi}_m^T$$

$$\text{com } \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}; \quad \psi_m = \begin{pmatrix} \psi_m^1 \\ \psi_m^2 \end{pmatrix}; \quad \bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2); \quad \bar{\phi}_m^T = \begin{pmatrix} \bar{\phi}_{(m)1} \\ \bar{\phi}_{(m)2} \end{pmatrix}$$

Como os coeficientes das expansões acima são constantes, toda dependência local dos campos está nas autofunções e portanto o carácter tensorial sob reparametrizações das autofunções é o mesmo do campo correspondente e assim podemos dizer, por exemplo que $(-D)$ atua em tensores de ordem zero (escalares) já que X^μ é reconhecidamente um escalar sob reparametrizações, exatamente por essa razão é que identificamos $-D = -\frac{1}{\rho} \partial^2$ com $\Delta_0(+)$ em (1.15).

Podemos dizer que o operador matricial $(-\bar{D})$:

$$(-\bar{D}) = -\frac{1}{\rho} \partial^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix},$$

atua em elementos de $S^0 = \mathcal{T}^0 \oplus \mathcal{T}^0$ e identificamos $(-\bar{D})$ com o 1a placiano de ordem zero $C_0^{(+)} = 2B_0 P_0 = \Delta_0^{(+)} \oplus \Delta_0^{(-)}$ notando que:

$$\Delta_0^{(+)} = \Delta_0^{(-)} = -\frac{1}{\rho} \partial^2$$

temos:

$$c_0^{(+)} = \begin{pmatrix} \nabla_0^{(+)} & 0 \\ 0 & \nabla_0^{(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix} = -\bar{D}$$

$$c_0^{(+)} \equiv -\bar{D} \quad (1.20)$$

A identificação acima foi bastante simples porque $(-\bar{D})$ atua em matrizes colunas do tipo: $\begin{pmatrix} \Omega \\ \Omega \end{pmatrix}$ que naturalmente pertencem ao S^0 , pois $\Omega \in \mathcal{T}^0$.

No caso de $(-E)$ a identificação não é tão direta já que o campo η , e consequentemente as autofunções ψ_m , é reconhecidamente um vetor:

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix} \quad \psi_m = \begin{pmatrix} \psi_m^1 \\ \psi_m^2 \end{pmatrix}$$

Os η^a são os componentes do vetor η no sistema de coordenadas (ζ^1, ζ^2) portanto precisamos passar para o sistema de coordenadas $z, \bar{z}$. Para isso usamos (1.6) e obtemos:

$$\eta^z = \eta^1 + i\eta^2; \quad \eta^{\bar{z}} = \eta^1 - i\eta^2, \quad \eta = \begin{pmatrix} \frac{\eta^z + \eta^{\bar{z}}}{2} \\ \frac{i(\eta^{\bar{z}} - \eta^z)}{2} \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

Portanto é patente que η , e consequentemente ψ , não pertencem ao S^1 , pois se $V \in S^1$ por definição:

$$V = \begin{pmatrix} v^z \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^z \\ (g_{z\bar{z}}) v^{\bar{z}} \end{pmatrix}$$

Isso significa que $(-E)$ não deve ser identificado com $C_1^{(+)}$ ou $C_1^{(-)}$ simplesmente escrevendo $(-E)$ no sistema de coordenadas $z, \bar{z}$.

Agora a identificação deve ser feita da seguinte maneira:

Os tensores simétricos de traço nulo possuem duas componentes reais independentes, por isso o vetor η é representado por uma coluna* 2×1 :

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Re } \eta^z \\ \text{Im } \eta^z \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

e nesse caso a representação do laplaciano $(-E)$ é real visto que:

$$-E = -\frac{1}{2} \not{\rho} \not{\rho} \quad , \quad \not{\rho} = \begin{pmatrix} \partial_2 & \partial_1 \\ \partial_1 & -\partial_2 \end{pmatrix}$$

A partir do produto $(-E)\eta$ obteremos uma matriz 2×1 com duas componentes reais:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = (-E)\eta$$

* Não é necessário para efeito de identificação dos operadores trabalharmos com as autofunções ψ_m^a em vez disso podemos trabalhar com os próprios campos η^a .

e analogamente a (1.22):

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{Re} T^2 = T^1 \\ B &= \operatorname{Im} T^2 = T^2 \end{aligned} \quad (1.23)$$

onde T é um certo vetor.

Da mesma forma podemos representar um tensor simétrico de traço nulo através de duas componentes como no caso de S^1 . Se $V \in S^1$:

$$V = \begin{pmatrix} v^z \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^z \\ g_{z\bar{z}} v^{\bar{z}} \end{pmatrix}, \quad (1.24)$$

$$v^z \in 1, \quad v_z \in -1$$

Sobre V atua o laplaciano $C_1^{(+)}: S^1 \rightarrow S^1$; $C_1^{(+)} = \begin{pmatrix} \Delta_1^{(+)} & \\ & \Delta_{-1}^{(-)} \end{pmatrix}$

usando (1.13) e (1.14):

$$C_1^{(+)} = -2 \begin{pmatrix} \nabla_z^2 \nabla_1^z & 0 \\ 0 & \nabla_{-2}^z \nabla_z^{-1} \end{pmatrix}$$

com (1.9), (1.11) e a métrica 1.4 e 1.5 temos:

$$C_1^{(+)} = -4 \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho^2} \partial_z \rho \partial_{\bar{z}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \partial_{\bar{z}} \rho \partial_z \frac{1}{\rho} \end{pmatrix}$$

Quando $C_1^{(+)}$ atua num vetor de S_1 , por exemplo (1.24), o resultado deve ser outro vetor de S^1 : com $g_{z\bar{z}} = \frac{e^{2\phi}}{2} = \rho/2$ temos:

$$\begin{pmatrix} T'^z \\ T'_z \end{pmatrix} = C_1^{(+)} v = \begin{pmatrix} -4 \left\{ \frac{1}{\rho^2} (\partial_z \rho \partial_{\bar{z}}) v^z \right\} \\ -2 \left\{ \frac{1}{\rho} (\partial_{\bar{z}} \rho \partial_z) v^{\bar{z}} \right\} \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

onde T' é um vetor de S^1 .

Portanto lembrando que:

$$T'^z = T'^1 + i T'^2$$

$$T'_z = g_{z\bar{z}} T'^{\bar{z}} = \frac{\rho}{2} (T'^1 - i T'^2)$$

Podemos comparar o resultado obtido acima com o resultado obtido em (1.23) e verificarmos que T e T' na verdade são o mesmo tensor e isso equivale a dizer que o operador $(-E)$ deve ser identificado com o laplaciano $C_1^{(+)}$:

$$-E \equiv C_1^{(+)} \quad (1.26)$$

De maneira análoga poderíamos tentar a identifica

ção do operador $(-F)$, fazendo-o atuar sobre $\bar{\xi}^T$:

$$\bar{\xi}^T = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_1 \\ \bar{\xi}_2 \end{pmatrix}.$$

Mas não sabemos qual é o carácter tensorial dos campos $\bar{\xi}_a$, pois o índice inferior 'a', como veremos a seguir, só serve para contagem de graus de liberdade e não significa que os $\bar{\xi}_a$ (ou os campos ξ_a) sejam componentes covariantes de um vetor.

Para sabermos o carácter tensorial dos "anti-ghosts" ξ_a e dos $\bar{\xi}_a$ usaremos a seguinte tática:

Introduziremos o produto escalar, no espaço de Hilbert para funções de onda que são tensores de τ^n , consequentemente teremos uma definição de produto escalar para funções de onda que são tensores em S^n , assim trabalhando-se no formalismo de 1ª Quantização tentaremos escrever a parte fermiônica de nossa ação S para a corda bosônica, ver III-23:

$$S^F = -i \int d^2 \xi \, \xi \, \sqrt{\rho} \, \not{(\frac{\tilde{\eta}}{\rho})} \quad (1.27)$$

onde:

$$\tilde{\eta} = \rho \, \eta, \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \, \bar{\xi},$$

Na forma de um produto escalar de tensores de S^2 . Como esse produto escalar deve ser um invariante por reparametrizações e como sabemos o carácter tensorial de η , e também saberemos o

de η , então ξ deverá ter um carácter tensorial bem definido para que a ação seja realmente um invariante por reparametrizações.

O Produto Escalar no Espaço de Hilbert

Embora a definição seja generalizável, definiremos o produto escalar no espaço de Hilbert no sistema de coordenadas $(z\bar{z})$, onde:

$$dS^2 = \rho \, dzd\bar{z} = e^{2\phi} \, dzd\bar{z}$$

Assim o elemento de integração escalar $\bar{e}$:

$$d\Omega = \sqrt{g} \, dzd\bar{z} = \sqrt{g} \, d^2z$$

Portanto se ϕ e ψ são duas funções de onda que são tensores de n , definimos abaixo seu produto escalar no espaço de Hilbert de tal maneira que seja um invariante por reparametrizações:

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int_M d^2z \sqrt{g} \, \phi_{zz\dots z} \psi^{zz\dots z} \quad (1.28)$$

e como $g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z} = 0$, podemos reescrever o produto acima:

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int d^2z \sqrt{g} \, (g_{z\bar{z}})^n \phi^{\bar{z}\bar{z}\dots\bar{z}} \psi^{zz\dots z}$$

ou

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int_M d^2 z \sqrt{g} (g_{z\bar{z}})^n \phi^* \psi, \quad (1.29)$$

como $\psi_{zz\dots z} \psi^{\bar{z}\dots\bar{z}}$ pertence ao 0 , ou seja, $\bar{e}$ é um escalar por transformações conformes, é claro que no produto definido em (1.28) temos um escalar sob o símbolo da integral e como estamos trabalhando no caso da corda fechada ($\partial M = \emptyset$), foi visto no capítulo 1 que a integração de um escalar $\bar{e}$ é um invariante sob reparametrizações, portanto (1.28) $\bar{e}$ é um invariante.

Agora que temos um produto escalar bem definido para os tensores de τ^n , temos a definição natural do produto escalar em S^n :

$$S^n = \tau^n + \tau^{-n},$$

se Φ_2 e Φ_1 são tensores de S^n :

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1^{z\dots z} \\ \phi_{1z\dots z} \end{pmatrix}; \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} \phi_2^{z\dots z} \\ \phi_{2z\dots z} \end{pmatrix}$$

segundo (1.28) temos:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_1 | \Phi_2 \rangle &= \int d^2 z \sqrt{g} \{ \phi_{1z\dots z} \phi_2^{z\dots z} + \phi_1^{z\dots z} \phi_{2z\dots z} \} \\ &= \int d^2 z \sqrt{g} (g_{z\bar{z}})^n \{ \phi_1^{\bar{z}\dots\bar{z}} \phi_2^{z\dots z} + \phi_1^{z\dots z} \phi_2^{\bar{z}\dots\bar{z}} \} \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle = \int d^2z \sqrt{g} (g_{z\bar{z}})^n \{ \phi_1^* \phi_2 + \phi_1 \phi_2^* \} \quad (1.31)$$

Com esse produto escalar definido em S^n podemos discutir a hermiticidade e a definição semi-positiva dos operadores que atuam nesse espaço, como por exemplo os laplacianos $C_n^{(+)}$ e $C_n^{(-)}$ definido em (1.18) e (1.19). Esses operadores são formados a partir dos laplacianos que agem sobre $\mathcal{T}^n$ e $\mathcal{T}^{-n}$ que por sua vez são construídos a partir das derivadas covariantes ∇_z^n e $\nabla_{\bar{z}}^z$, ver 1.13 e 1.14, devemos então analisar primeiramente a hermiticidade das derivadas covariantes.

Por exemplo no caso de ∇_{n-1}^z que atua sobre $\mathcal{T}^{n-1}$ aumentando em uma unidade a ordem dos tensores temos:

$$\text{Se: } S \in \mathcal{T}^{n-1} \text{ e } T \in \mathcal{T}^n$$

Por definição do produto escalar (1.29) e da derivada covariante (1.9):

$$\langle T | \nabla_{n-1}^z | S \rangle = \int_M d^2z \sqrt{g} (g_{z\bar{z}})^n T^* g^{z\bar{z}} \partial_{\bar{z}} S$$

com $g_{\bar{z}\bar{z}} = 0 = g_{zz}$ e $g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z}$, $\sqrt{g} = i g_{z\bar{z}}$, $g_{z\bar{z}} = (g_{\bar{z}z})^{-1}$, integrando por partes e desprezando o termo de superfície, já que $\partial M = \emptyset$ temos:

$$\langle T | \nabla_{n-1}^z | S \rangle = - \int_M d^2z i S \partial_{\bar{z}} \{ (g_{z\bar{z}})^n T^* \}$$

mas $(g^{z\bar{z}})^n \sqrt{g} (g_{z\bar{z}})^{n-1} = i$ assim:

$$\langle T | \nabla_{n-1}^z | S \rangle = - \int_M d^2z \sqrt{g} (g_{z\bar{z}})^{n-1} S \{ (g^{z\bar{z}})^n \partial_{\bar{z}} ((g_{z\bar{z}})^n T^*) \}$$

como $(g^{z\bar{z}})^* = g^{z\bar{z}}$; $(g_{z\bar{z}})^* = g_{z\bar{z}}$ e $(\partial_{\bar{z}})^* = \partial_z$

$$\langle T | \nabla_{n-1}^z | S \rangle = - \int_M d^2z \sqrt{g} (g_{z\bar{z}})^{n-1} S \{ (g^{z\bar{z}})^n \partial_z ((g_{z\bar{z}})^n T) \}^*$$

Usando novamente a definição da derivada covariante $\nabla_z^n T$ (ver 1.11), tem se

$$\langle T | \nabla_{n-1}^z | S \rangle = - \int_M d^2z \sqrt{g} (g_{z\bar{z}})^{n-1} S (\nabla_z^n T)^* = \langle -\nabla_z^n T | S \rangle ,$$

dada a definição de conjugação hemiteana: $\langle \psi | U | \phi \rangle = \langle U^\dagger \psi | \phi \rangle^*$,
da expressão acima temos:

$$(\nabla_{n-1}^z)^+ = - \nabla_z^n \text{ e } (\nabla_z^n)^+ = - \nabla_{n-1}^z \quad (1.32)$$

ou tomando-se o conjugado hemiteano: $(\nabla_z^n)^+ = \nabla_{n-1}^z$. (1.33)

Com essa propriedade é fácil ver que:

$$\Delta_n^{(+)} = -2 \nabla_z^{n+1} \nabla_n^z \text{ e } \Delta_n^{(-)} = -2 \nabla_{n-1}^z \nabla_z^n$$

são hemiteanos e portanto os laplacianos em S^n :

$$C_n^{(+)} = \Delta_n^{(+)} \oplus \Delta_{-n}^{(-)} ; \quad C_{n+1}^{(-)} = \Delta_{n+1}^{(-)} \oplus \Delta_{-(n+1)}^{(+)}$$

são naturalmente hermiteanos em S^n e S^{n+1} respectivamente, sendo assim devido às identificações de $(-\bar{D})$ e $(-E)$ com $C_0^{(+)}$ e $C_1^{(+)}$ respectivamente concluímos de uma maneira precisa que esses operadores $(-\bar{D}$ e $-E)$ são hermiteanos.

E fácil ver também que esses operadores são definidos semi-positivos; pois de (1.31) e (1.33) em (1.16) e (1.17) temos:

$$B_n = P_n^+$$

e assim:

$$C_n^{(+)} = 2 P_n^+ P_n; \quad C_{n+1}^{(-)} = 2 P_n P_n^+$$

e como $\partial M = \emptyset$, se $\{\phi_1, \phi_2\} \in S^n$ $\{\psi_1, \psi_2\} \in S^{n+1}$ temos:

$$\begin{aligned} \langle \phi_1 | C_n^{(+)} | \phi_2 \rangle &= 2 \langle P_n \phi_1 | P_n \phi_2 \rangle \\ \langle \psi_1 | C_{n+1}^{(-)} | \psi_2 \rangle &= 2 \langle P_n^+ \psi_1 | P_n^+ \psi_2 \rangle \end{aligned}$$

no caso em que $\phi_1 = \phi_2 = \phi_m$ tal que $C_n^{(+)} \phi_m = \lambda_m \phi_m$ temos:

$$\langle \phi_m | C_n^{(+)} | \phi_m \rangle = \lambda_m \langle \phi_m | \phi_m \rangle = 2 \langle P_n \phi_m | P_n \phi_m \rangle$$

Consequentemente: $\lambda_m \geq 0$

analogamente para $C_n^{(-)}$.

Assim $C_0^{(+)}$ e $C_1^{(+)}$ e consequentemente $(-D)$ e $(-E)$

são definidos semi-positivos.

Devemos ter resultados análogos para o operador $(-F)$ entretanto ainda é preciso descobrir o laplaciano que corresponde a esse operador e para isso temos que saber o caráter tensorial dos campos anti-fantasma $\bar{\xi}_a$

Com esse objetivo tentaremos escrever a parte fermiônica da ação S :

$$S^F = i \int d^2 \xi \, \xi \sqrt{g} \, \not{\partial} \frac{\tilde{\eta}}{\rho}, \text{ com}$$

$$\tilde{\eta} = \rho \eta = \rho = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix}$$

$$\xi = (\xi_1 \quad \xi_2)$$

como um produto escalar de duas funções de onda de S^n , tentaremos $n=2$ (S^2), pois η é um tensor de 1ª ordem e o operador diferencial $\not{\partial}$ deve elevar em uma unidade a ordem de um tensor, e assim esperamos que ξ tenha alguma relação com um tensor de ordem (-2) para que a ação possa ser escrita numa forma explicitamente invariante por transformações conformes, como é o caso dos produtos escalares no espaço de Hilbert definidos neste apêndice.

Notemos que o operador P_1 definido em (1.16):

$$P_1 = \begin{pmatrix} \nabla^z & 0 \\ 1 & \\ 0 & \nabla^{-1}_z \end{pmatrix} \text{ é tal que, } P_1: S^1 \rightarrow S^2;$$

assim se u é um tensor de S^1 : $u = \begin{pmatrix} u^z & \\ g_{z\bar{z}} & u_{\bar{z}} \end{pmatrix}$

$$P_1 u \in S^2 ; \quad P_1 u = \begin{pmatrix} \nabla_1^2 u^z & \\ \nabla_z^{-1} (g_{z\bar{z}} u_{\bar{z}}) & \end{pmatrix}$$

e se $\alpha \in S^2$ por definição: $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha^{zz} & \\ (g_{z\bar{z}})^2 & \alpha_{\bar{z}\bar{z}} \end{pmatrix}$

Então o produto escalar $\langle \alpha | P_1 | u \rangle$, que pela definição (1.30) corresponde a integral de $d^2 \zeta \sqrt{g}$ vezes o produto cruzado abaixo:

$$\begin{array}{cc} \alpha^{zz} & \nabla_1^z u^z \\ (g_{z\bar{z}})^2 \alpha_{\bar{z}\bar{z}} & \nabla_z^{-1} (g_{z\bar{z}} u_{\bar{z}}) \end{array} ,$$

escrito no sistema de coordenadas $z, \bar{z}$:

$$\begin{aligned} \langle \alpha | P_1 | u \rangle &= \int d^2 z \sqrt{g} \{ \alpha^{zz} \nabla_z^{-1} u_z + (g_{z\bar{z}})^2 \alpha_{\bar{z}\bar{z}} \nabla_1^z u^z \} \\ &= \int d^2 z \sqrt{g} \{ \alpha^{zz} \nabla_z^{-1} u_z + \alpha_{\bar{z}\bar{z}} \nabla_z^{-1} u_{\bar{z}} \} \end{aligned} \quad (1.34)$$

Precisamos escrever esse produto escalar no sistema de coordenadas (ζ^1, ζ^2) se quisermos compará-lo com S^F , para isso notemos que da passagem de (ζ^1, ζ^2) para $(\zeta^{1'}, \zeta^{2'}) = (z, \bar{z})$, como α é um tensor:

$$\alpha_b^{a'}(z, \bar{z}) = \frac{\partial \zeta^{a'}}{\partial \zeta^c} \frac{\partial \zeta^d}{\partial \zeta^b} \alpha_d^c$$

usando a relação entre $(\zeta^{1'}, \zeta^{2'})$ e (ζ^1, ζ^2) dado em (1.2) e (1.3) temos:

$$\alpha_z^z = k \{ (\alpha^{11} + \alpha^{22}) - i(\alpha^{12} - \alpha^{21}) \}$$

onde k é independente das componentes de α .

Mas como estamos assumindo que α_{ab} é simétrico e de traço nulo temos: $\alpha_z^z = 0$ e consequentemente:

$$\alpha^{z\bar{z}} = g^{\bar{z}z} \alpha_z^z = 0 = \alpha^{\bar{z}z}$$

Portanto a forma do produto escalar em (1.34) deve ser generalizada para o sistema de coordenadas (ζ^1, ζ^2) da seguinte maneira:

$$\langle \alpha | P_1 | u \rangle = \int d^2 \zeta \sqrt{g} (\alpha^{ab} \nabla_a u_b) = \int d^2 \zeta \sqrt{g} (\alpha_{ab} \nabla^a u^b) \quad (1.35)$$

Onde ∇^a agora é a derivada covariante que estamos acostumados a trabalhar calculada no gauge conforme:

$$g_{ab} = \rho \delta_{ab} = e^{2\phi} \delta_{ab}$$

$$\nabla_a u^b = \partial_a u^b + g^{cf} \Gamma_{fd}^b u^d; \quad \Gamma_{ik}^r = (\delta_i^r \partial_k \phi + \delta_k^r \partial_i \phi - \delta^{rs} \delta_{ik} \partial_s \phi)$$

é fácil ver que:

$$\nabla^1 u^1 - \nabla^2 u^2 = \partial^1 u^1 - \partial^2 u^2$$

$$\nabla^1 u^2 + \nabla^2 u^1 = \partial^1 u^2 + \partial^2 u^1$$

Usando que: $\alpha_{11} = -\alpha_{22}$; $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ e $\sqrt{g} = \rho$, obtem-se de (1.35):

$$\begin{aligned} \langle \alpha | P_1 | u \rangle &= \int d^2 \zeta \sqrt{g} (\alpha_{ab} \nabla^a u^b) = \\ &= \int d^2 \zeta \rho \{ \alpha_{11} (\partial^1 u^1 - \partial^2 u^2) + \alpha_{12} (\partial^1 u^2 + \partial^2 u^1) \} \end{aligned}$$

como $\partial_1 = g_{1a} \partial^a = \rho \delta_{1a} \partial^a = \rho \partial^1$ e $\partial_2 = \rho \partial^2$:

$$\langle \alpha | P_1 | u \rangle = \int d^2 \zeta \{ \alpha_{11} (\partial_1 u^1 - \partial_2 u^2) + \alpha_{12} (\partial_1 u^2 + \partial_2 u^1) \}$$

Para compararmos esse produto escalar de tensores do S^2 com S^F dada em (1.27) é interessante reescrever (1.27):

$$S^F = -i \int d^2 \zeta \xi \sqrt{\rho} \not{\partial} \frac{\tilde{\eta}}{\rho} = -i \int d^2 \zeta \bar{\xi} \not{\partial} \eta, \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \bar{\xi}, \quad \tilde{\eta} = \rho \eta$$

$$S^F = -i \int d^2 \zeta (\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2) \begin{pmatrix} \partial_2 & \partial_1 & \eta^1 \\ \partial_1 & -\partial_2 & \eta^2 \end{pmatrix}$$

$$S^F = \int d^2\zeta \{ (-i\bar{\xi}_1) (\partial_2 n^1 + \partial_1 n^2) + (-i\bar{\xi}_2) (\partial_1 n^1 - \partial_2 n^2) \}$$

Comparando com $\langle \alpha | p_1 | u \rangle$ temos a identificação:

$$\eta^a \equiv u^a ; \quad \bar{\xi}_1 \equiv \alpha_{12}; \quad \bar{\xi}_2 \equiv \alpha_{11}$$

Sendo assim vemos que os "anti-ghosts" $\xi_a = \bar{\xi}_a / \sqrt{g}$ estão relacionadas com tensores covariantes de 2ª ordem (α_{ab}) de traço nulo e simétricos, enquanto que os "ghosts" η^c são, como esperado, vetores sob reparametrizações. Das relações acima temos:

$$\xi_1 \equiv \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{\rho}}, \quad \xi_2 \equiv \frac{\alpha_{11}}{\sqrt{\rho}}; \quad \tilde{\eta}^c \equiv \rho \eta^c,$$

consequentemente as transformações de weyl de ξ e $\tilde{\eta}$ quando $\rho \rightarrow (\exp \alpha(\zeta)) \rho$ são:

$$\xi_a \rightarrow \left\{ \exp \left(-\frac{\alpha(\zeta)}{2} \right) \right\} \xi_a ; \quad \tilde{\eta}^c \rightarrow (\exp \alpha(\zeta)) \eta^c$$

Agora que sabemos que $\bar{\xi}$ é diretamente proporcional a tensores de ordem -2, já que α_{11} e α_{12} são combinações lineares de α_{zz} e $\alpha_{\bar{z}\bar{z}}$. Somos levados a identificar o operador $(-F)$, que atua em $\bar{\xi}$, com o laplaciano $C_{-2}^{(+)}$ que atua em S^{-2} , tomando-se os mesmos cuidados tomados na identificação de $(-E)$

com $C_1^{(+)}$ podemos escrever:

$$-F \equiv C_{-2}^{(+)}$$

Assim sendo como já havíamos demonstrado que os operadores $C_n^{(+)}$ e $C_{n+1}^{(-)}$ são covariantes, hermiteanos e definidos semi-positivos, o mesmo vale para os operadores $(-E)$, $(-F)$ e $(-\bar{D})$ usados no cálculo da anomalia de Weyl

Nota sobre a covariância do mecanismo de fixação de gauge

Inicialmente tínhamos a ação para a corda bosônica fechada:

$$\dot{S} = \mu_0 \int_M d^2 \zeta \frac{\sqrt{g} g_{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\mu}{2} = \int_M d^2 \zeta L$$

invariante sob as transformações de B.R.S.T.:

$$\delta^B X^\mu = -\theta \eta_a X^\mu ; \quad \delta^B g_{ab} = -\theta (\nabla_a \eta_b + \nabla_b \eta_a)$$

Entretanto para fixarmos o gauge conforme:

$$g_{ab} = \rho \delta_{ab},$$

sem que a simetria de B.R.S.T. fosse quebrada introduzimos os campos ξ_a e B_a :

$$\delta^B \xi_a = i\theta B_a ; \quad \delta^B B_a = 0$$

E assim somamos à lagrangeana L uma transformação de B.R.S.T. usando o "ansatz":

$$\Theta(L_{FP} + L_{GF}) = -i \delta^B(\xi_a \tilde{f}^a) \quad (1.35)$$

com

$$\tilde{f}^1 = \tilde{g}_{12} = g^{-1/4} g_{12}$$

$$\tilde{f}^2 = \frac{\tilde{g}_{11} - \tilde{g}_{22}}{2} = \frac{g^{-1/4}}{2} (g_{11} - g_{22})$$

e

$$S_T = S + \int d^2\zeta (L_{FP} + L_{GF}) \quad ,$$

e devido a nilpotência da transformação de B.R.S.T. tínhamos:

$$\delta^B(L_{FP} + L_{GF}) = 0$$

e consequentemente $\delta^B S_T = 0$

Portanto realmente a simetria de B.R.S.T. não foi quebrada. Mas, a princípio, nada podíamos dizer sobre a covariância da ação total por reparametrizações, pois apesar da transformação de B.R.S.T. manter o carácter tensorial das quantidades transformadas não sabíamos qual era o carácter tensorial dos anti-fantasma e portanto não podíamos garantir que o novo termo, $L_{FP} + L_{GF}$, adicionado a ação inicial S tivesse o

mesmo caráter tensorial da lagrangeana inicial L , ou seja, não sabemos se podíamos escrever esse novo termo na forma:

$$L' = L_{FP} + L_{GF} = \sqrt{g} \times (\text{escalar}),$$

que é a única forma permitida para lagrangeanas de ações que sejam invariantes por reparametrizações.

Agora que conhecemos exatamente o caráter tensorial dos "anti-ghosts" ξ_a podemos escrever L' na forma acima e verificarmos então que o método de fixação de gauge baseado na simetria de B.R.S.T. é realmente um método covariante e que nenhuma simetria original da ação inicial S foi quebrada na fixação do gauge conforme. Para isso notemos que o caráter tensorial dos ξ_a é transparente quando ele é escrito a partir do tensor α_{ab} :

$$\xi_1 = \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{\rho}} = \frac{\alpha_{12}}{g^{1/4}}; \quad \xi_2 = \frac{\alpha_{11}}{\sqrt{\rho}} = \frac{\alpha_{11}}{g^{1/4}} \quad (1.36)$$

Inicialmente temos: $\theta(L_{FP} + L_{GF}) = i \delta^B (\xi_1 \tilde{f}^1 + \xi_2 \tilde{f}^2)$,

com:

$$\tilde{f}^1 = \tilde{g}_{12} = g^{-1/4} g_{12}; \quad \tilde{f}^2 = \frac{g^{-1/4}}{2} (g_{11} - g_{22})$$

mas de $g^{ab} g_{ab} = 2$ temos:

$$g_{12} = -g g^{12} ; g_{11} = g g^{22} ; g_{22} = g g^{11}$$

usando ainda (1.36) podemos escrever:

$$\Theta (L_{FP} + L_{GF}) = -i \delta^B \left\{ \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{g}} g^{12} g + \frac{\alpha_{11}}{\sqrt{g}} g \left(\frac{g^{11} - g^{22}}{2} \right) \right\}$$

lembrando que $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ e $\alpha_{22} = -\alpha_{11}$ temos:

$$\Theta (L_{FP} + L_{GF}) = \delta^B \left(\frac{\sqrt{g} g^{ab} \alpha_{ab}}{2} \right) \quad (1.37)$$

Vemos então que a adição do termo $(L_{FP} + L_{GF})$ a lagrangeana inicial $L = (\mu_0/2) (\sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\mu)$ além de não quebrar a simetria por B.R.S.T. mantém ainda a simetria por reparametrizações intacta e com isso a forma tensorial da lagrangeana total é bem definida.

Observamos ainda que nem mesmo a simetria de Weyl da lagrangeana inicial L foi quebrada na fixação de gauge, já que $\sqrt{g} g^{ab}$ é um invariante por transformações de Weyl.

Concluimos então que o processo de fixação de gauge usando-se o princípio de simetria de B.R.S.T. é totalmente covariante.

A P Ê N D I C E D

SOBRE A QUANTIZAÇÃO CANÔNICA DA CORDA BOSÔNICA ABERTA

Nesta tese temos assumido que a superfície M varrida pela corda no espaço-tempo é localmente euclídeana, no caso específico do estudo de anomalias essa notação é mais conveniente já que a maioria dos autores trabalha com ela ((20), (6), (15), etc.). Entretanto para estudarmos a quantização canônica, pelo mesmo motivo ((1), (12), etc.), é conveniente trabalharmos com M localmente minkowskiana, nesse caso o gauge conforme fica:

$$g_{ab} = \rho \eta_{ab} = \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad g^{ab} = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e em vez de $\sqrt{g}$ passamos a usar $\sqrt{-g}$.

Os supercampos permanecem inalterados, pois as variações sob reparametrizações possuem a mesma forma tanto para M localmente euclídeana como para localmente minkowskiana.

Além de trabalharmos com M localmente minkowskiana é importante fixarmos o gauge conforme através do tensor métrico contravariante: $\tilde{g}^{ab} = (-g)^{1/4} g^{ab}$, no gauge conforme $-g = \rho^2$ assim:

$$\tilde{g}^{ab} = \sqrt{\rho} \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

E agora em vez de usarmos as condições de gauge $\tilde{r}^1$ e $\tilde{r}^2$ do capítulo 2, temos: $\tilde{v}^1$ e $\tilde{v}^2$:

$$\tilde{v}^2(\zeta) = \frac{\tilde{g}^{11}(\zeta) + \tilde{g}^{22}(\zeta)}{2} = 0 \quad (1.1)$$

$$\tilde{v}^1(\zeta) = \tilde{g}^{12}(\zeta) = 0$$

Analogamente à fixação de gauge no caso euclieano (capítulo 2) escrevemos a lagrangiana total como:

$$L_T = L + L_{GF} + L_{FP} ,$$

com a seguinte prescrição (ver III-31 - capítulo 2):

$$L_{GF} + L_{FP} = -i \int d\theta \, \varepsilon_a(\zeta, \theta) \, \tilde{v}^a(\zeta, \theta) \quad (1.2)$$

Portanto devemos obter os supercampos $\tilde{v}^a(\zeta, \theta)$. Para isso é suficiente obtermos $\delta^B \tilde{g}^{ab}$, usando a expansão (ver III-28 - capítulo 2):

$$\tilde{g}^{ab}(\zeta, \theta) = \tilde{g}^{ab}(\zeta, 0) + \delta^B \tilde{g}^{ab}(\zeta, 0) ,$$

com o resultado obtido para $\delta^B \tilde{g}^{ab}$ no apêndice A (seção A3) temos os supercampos:

$$\tilde{g}^{ab}(\zeta, \theta) = \tilde{g}^{ab}(\zeta, 0) + \theta \left\{ \left(-\frac{\partial_c \eta^c}{2} - \eta^c \partial_c \right) \tilde{g}^{ab} + (\partial_c \eta^a) \tilde{g}^{cb} + (\partial_d \eta^b) \tilde{g}^{ad} \right\}$$

Usando (1.1) acima, que relaciona $\tilde{g}^{ab}$ com $\tilde{v}^1$ e $\tilde{v}^2$ temos os supercampos:

$$\tilde{v}^1(\zeta, \theta) = \tilde{v}^1(\zeta) + \theta \left\{ \left(+\frac{\partial_c \eta^c}{2} - \eta^c \partial_c \right) \tilde{v}^1 + (\partial_1 \eta^2 - \partial_2 \eta^1) \tilde{v}^2 + (\partial_1 \eta^2 + \partial_2 \eta^1) \tilde{v}^3 \right\}$$

$$\tilde{v}^2(\zeta, \theta) = \tilde{v}^2 + \theta \left\{ \left(\frac{\partial_c \eta^c}{2} - \partial^c \eta_c \right) \tilde{v}^2 + (\partial_2 \eta^1 + \partial_1 \eta^2) \tilde{v}^1 + (\partial_1 \eta^1 - \partial_2 \eta^2) \tilde{v}^3 \right\}$$

$$\text{onde } \tilde{v}_3 = \frac{\tilde{g}^{11} - \tilde{g}^{22}}{2}$$

assim, usando a integral de Berezin $\int d\theta = 0$; $\int d\theta \theta = 1$ e os supercampos $\xi_a(\zeta, \theta) = \xi_a(\zeta, 0) + \theta B_a$, além do fato que:

$$\{\xi_a, \theta\} = 0$$

obtemos explicitamente o termo de Faddeev-Popov e o de fixação de gauge a partir da prescrição (1.2) e temos consequentemente a ação total para a corda (S_T) no gauge conforme:

$$g_{ab} = \rho \eta_{ab} = \rho \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

$$S_T = \int_M d^2 \zeta (L + L_{GF} + L_{FP})$$

$$L = \frac{\mu_0}{2} \sqrt{-g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\mu = \frac{\mu_0}{2} \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\mu; \quad \tilde{g} = \det \tilde{g}_{ab}$$

$$S_T = \int_M d^2 \zeta \left\{ \frac{\mu_0}{2} \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\mu + B_1 \tilde{v}^1 + B_2 \tilde{v}^2 + \right.$$

$$+ i \xi_1 \left(\left(\frac{\partial_c \eta^c}{2} - \partial^c \eta_c \right) \tilde{v}^1 + (\partial_1 \eta^2 - \partial_2 \eta^1) \tilde{v}^3 + (\partial_1 \eta^2 + \partial_2 \eta^1) \tilde{v}^2 \right) +$$

$$+ i \xi_2 \left(\left(\frac{\partial_c \eta^c}{2} - \partial^c \eta_c \right) \tilde{v}^2 + (\partial_2 \eta^1 + \partial_1 \eta^2) \tilde{v}^1 + (\partial_1 \eta^1 - \partial_2 \eta^2) \tilde{v}^3 \right) \}$$

Definindo:

$$A = \left(\frac{\partial_c n^c}{2} - n^c \partial_c \right) \quad \text{e} \quad D = (\partial_1 n^2 + \partial_2 n^1) \quad (1.4)$$

Podemos minimizar a ação S_T : $\delta S_T = 0$, com:

$$\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b \delta X^\mu = \partial_b (\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{ab} \partial_a X^\mu \delta X^\mu) - (\partial_b \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{ab} \partial_a X^\mu) \delta X^\mu$$

e

$$\int_M d^2 \zeta = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_{\sigma_i}^{\sigma_f} d\sigma ; \quad \zeta^0 = \tau ; \quad \zeta^1 = \sigma$$

usando a notação: $\gamma_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X^\mu$ temos:

$$\begin{aligned} \delta S_T = 0 = \int_M d^2 \zeta \{ & \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{\partial(\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{ab} \gamma_{ab})}{\partial \tilde{g}^{cd}} \delta \tilde{g}^{cd} - (\partial_b \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{ab} \partial_a X^\mu) \delta X^\mu \right) + \\ & + \delta B_1 \tilde{v}^1 + \delta B_2 \tilde{v}^2 + (B_1 + i \xi_2 D) \delta \tilde{v}^1 + (B_2 + i \xi_1 D) \delta \tilde{v}^2 + i \xi_A A \delta \tilde{v}^a \\ & + i (\xi_1 (\partial_1 n^2 - \partial_2 n^1) + \xi_2 (\partial_1 n^1 - \partial_2 n^2)) \delta \tilde{v}^3 + \\ & + i \delta \xi_1 (A \tilde{v}^1 + D \tilde{v}^2 + (\partial_1 n^2 - \partial_2 n^1) \tilde{v}^3) + i \delta \xi_2 (A \tilde{v}^2 + D \tilde{v}^1 + (\partial_1 n^1 - \partial_2 n^2) \tilde{v}^3) + \\ & + i (\xi_1 \tilde{v}^1 + \xi_2 \tilde{v}^2) \delta A + i (\xi_1 \tilde{v}^2 + \xi_2 \tilde{v}^1) \delta D + \\ & + i (\xi_1 \tilde{v}_3 \partial_1 - \xi_2 \tilde{v}_3 \partial_2) \delta n^2 + i (\xi_2 \tilde{v}_3 \partial_1 - \xi_1 \tilde{v}_3 \partial_2) \delta n^1 \} + \\ & + \int_{\sigma_i}^{\sigma_f} d\sigma \left(\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{a1} \partial_a X^\mu \delta X^\mu \right) \Big|_{\tau_i}^{\tau_f} + \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left(\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{a2} \partial_a X^\mu \delta X^\mu \right) \Big|_{\sigma_i}^{\sigma_f} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Onde δA e δD significam variações nos campos η^c que compõem essas quantidades. A anulação dos termos proporcionais a δB_1 e δB_2 requer:

$$\tilde{v}^1 = \tilde{g}^{12} = 0 ; \quad \tilde{v}^2 = \frac{\tilde{g}^{11} + \tilde{g}^{22}}{2} = 0 ,$$

ou seja, temos o gauge conforme: $g_{ab} = \rho \eta_{ab}$; $g^{ab} = (\rho)^{-1} \eta^{ab}$ e nesse caso $\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{ab} = \sqrt{-g} g^{ab} = \eta^{ab}$, da anulação do termo proporcional a δX^μ temos:

$$\partial_b (\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{ab} \partial_a X^\mu) = \eta^{ab} \partial_a \partial_b X^\mu = (\partial_1^2 - \partial_2^2) X^\mu = 0 \quad (1.6)$$

Além disso no processo de minimização da ação a variação dos campos é nula nos instantes iniciais e finais:

$$\delta X^\mu(\tau_i) = \delta X^\mu(\tau_f) = 0$$

assim a integral em $d\sigma$ é nula. A anulação da integral em $d\tau$ requer:

$$\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{a2} \partial_a X^\mu \Big|_{\sigma_i}^{\sigma_f} = 0 ,$$

lembrando que estamos no gauge conforme, onde

$$\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{ab} = \eta^{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

a anulação da integral em $d\tau$ requer:

$$\partial_2 X^\mu \Big|_{\sigma_i}^{\sigma_f} = 0 \quad (1.7)$$

Considerando que os termos proporcionais a $\tilde{v}^1$ e $\tilde{v}^2$ ou proporcionais a derivadas dessas quantidades que aparecem na expressão (1.5) devem ser nulos, pois na concha de massa $\tilde{v}^1 = \tilde{v}^2 = \text{cte} = 0$, podemos reescrever (1.5), lembrando que o termo proporcional a δX^μ já foi anulado pelas equações 1.6 e 1.5 temos:

$$\begin{aligned} \delta S_T = 0 = \int_M d^2 \xi \left\{ \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{\partial(\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{ab} \gamma_{ab})}{\partial \tilde{g}^{cd}} \right) \delta \tilde{g}^{cd} + \right. \\ + (B_1 + i \xi_2 D) \delta \tilde{v}^1 + (B_2 + i \xi_1 D) \delta \tilde{v}^2 + \\ + i \xi_a A \delta \tilde{v}^a + i (\xi_1 (\partial_1 \eta^2 - \partial_2 \eta^1) + \xi_2 (\partial_1 \eta^1 - \partial_2 \eta^2)) \delta \tilde{v}^3 + \\ + i \delta \xi_1 ((\partial_1 \eta^2 - \partial_2 \eta^1) \tilde{v}^3) + i \delta \xi_2 ((\partial_1 \eta^1 - \partial_2 \eta^2) \tilde{v}^3) + \\ \left. + i (\xi_1 \tilde{v}_3 \partial_1 - \xi_2 \tilde{v}_3 \partial_2) \delta \eta^2 + i (\xi_2 \tilde{v}_3 \partial_1 - \xi_1 \tilde{v}_3 \partial_2) \delta \eta^1 \right\} \quad (1.8) \end{aligned}$$

Vemos que para obtermos a minimização da ação S_T , ainda precisamos anular os coeficientes das variações $\delta \eta^a$, $\delta \tilde{v}^a$, $\delta \tilde{v}^3$ e $\delta \xi_a$. É preciso então reescrever o 1º termo da expressão acima explicitamente em função de $\delta \tilde{v}^a$ e $\delta \tilde{v}^3$, pois

$$\tilde{v}^1 = \tilde{g}^{12}, \quad \tilde{v}^2 = \frac{\tilde{g}^{11} + \tilde{g}^{22}}{2} \quad \text{e} \quad \tilde{v}^3 = \frac{\tilde{g}^{11} - \tilde{g}^{22}}{2}$$

Na verdade o termo proporcional a $\delta \tilde{g}^{cd}$ na expressão acima não depende de $\delta \tilde{v}^3$ e pode ser escrito em função apenas de $\delta \tilde{v}^1$ e $\delta \tilde{v}^2$. Isso pode ser verificado usando-se a defini-

ção do tensor energia-momento (ver III-6 - capítulo 1):

$$\left\{ \frac{\partial(\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{ab} \gamma_{ab})}{\partial \tilde{g}^{cd}} \right\} \delta \tilde{g}^{cd} = T_{cd} \sqrt{-\tilde{g}} \delta \tilde{g}^{cd}, \quad (1.9)$$

Devido a invariância de Weyl de $\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{ab}$ vimos no capítulo 1 que: $T_C^C = 0$, mas no gauge conforme:

$$g^{ab} = 1/\rho \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$T_C^C = T_{cd} g^{dc} = \frac{1}{\rho} (T_{11} - T_{22})$, portanto devemos ter $T_{11} = T_{22}$ além da simetria já esperada: $T_{12} = T_{21}$.

Usando esses resultados e as relações entre $\tilde{g}^{ab}$ e $\tilde{v}^a$ dadas em 1.1 temos:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{ab} \gamma_{ab})}{\partial \tilde{g}^{cd}} \right\} \delta \tilde{g}^{cd} &= \sqrt{-\tilde{g}} \{ T_{11} \delta(\tilde{g}^{11} + \tilde{g}^{22}) + 2T_{12} \delta \tilde{g}^{12} \} \\ &= 2\sqrt{-\tilde{g}} \{ T_{11} \delta \tilde{v}^2 + T_{12} \delta \tilde{v}^1 \} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Da definição de A, (1.4), obtém-se:

$$\begin{aligned} i \xi_a A \delta \tilde{v}^a &= i \xi_a \frac{(\partial_c \eta^c)}{2} \delta \tilde{v}^a - i \xi_a \eta^c \partial_c (\delta \tilde{v}^a) \\ &= i \xi_a \frac{(\partial_c \eta^c)}{2} \delta \tilde{v}^a - i \partial_c (\xi_a \eta^c \delta \tilde{v}^a) + i \partial_c (\xi_a \eta^c) \delta \tilde{v}^a \end{aligned} \quad (1.11)$$

como $\delta \tilde{v}^a \Big|_{\tau_i}^{\tau_f} = 0$, integrando por partes a divergência acima:

$$\begin{aligned}
\int d^2\zeta \{-i \partial_c(\xi_a n^c \delta \tilde{v}^a)\} &= \int_{\sigma_i}^{\sigma_f} d\sigma \left(-i \xi_a n^1 \delta \tilde{v}^a \right) \bigg|_{\tau_i}^{\tau_f} + \\
&+ \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left(-i \xi_a n^2 \delta \tilde{v}^a \right) \bigg|_{\sigma_i}^{\sigma_f} \\
&= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left(i \xi_a n^2 \delta \tilde{v}^a \right) \bigg|_{\sigma_i}^{\sigma_f} \quad (1.12)
\end{aligned}$$

Finalmente usando (1.10), (1.11), (1.12) e integrando por partes os termos proporcionais a δn^1 e δn^2 em (1.5), com

$$\delta n^a(\tau_i, \sigma) = \delta n^a(\tau_f, \sigma) = 0$$

temos:

$$\begin{aligned}
\delta S_T = 0 &= \int_M d^2\zeta \{ (2\sqrt{-g} T_{12} + i\xi_2^D + i\xi_1 \frac{(\partial_c n^c)}{2} + i \partial_c(\xi_1 n^c) + B_1) \delta \tilde{v}^1 + \\
&+ (2\sqrt{-g} T_{11} + i \xi_1^D + i \xi_2 \frac{(\partial_c n^c)}{2} + i \partial_c(\xi_2 n^c)) \delta \tilde{v}^2 + \\
&+ i(\xi_1(\partial_1 n^2 - \partial_2 n^1) + \xi_2(\partial_1 n^1 - \partial_2 n^2)) \delta \tilde{v}^3 + i\delta\xi_1(\partial_1 n^2 - \partial_2 n^2) \tilde{v}^3 \\
&+ i \delta\xi_2(\partial_1 n^1 - \partial_2 n^2) \tilde{v}^3 - i(\partial_1(\xi_1 \tilde{v}_3) - \partial_2(\xi_2 \tilde{v}_3)) \delta n^2 \\
&- i(\partial_1(\xi_2 \tilde{v}_3) + \partial_2(\xi_1 \tilde{v}_3)) \delta n^1 \} + \\
&+ \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left(-i \xi_a n^2 \delta \tilde{v}^a - i \xi_2 \tilde{v}_3 \delta n^2 - i \xi_1 \tilde{v}_3 \delta n^1 \right) \bigg|_{\sigma_i}^{\sigma_f} \quad (1.13)
\end{aligned}$$

Desde a construção da ação S_T temos trabalhado com a condição de contorno (Apêndice A - seção A5):

$$\eta^2(\tau, \sigma_i) = \eta^2(\tau, \sigma_f) = 0 \quad (1.14)$$

consequentemente $\delta\eta^2(\tau, \sigma_i) = \delta\eta^2(\tau, \sigma_f) = 0$. Portanto para que a integral em (1.13) seja nula devemos ter:

$$\xi_1(\tau, \sigma_i) = \xi_1(\tau, \sigma_f) = 0 \quad (1.15)$$

As equações de movimento que obtemos a partir do cancelamento dos termos proporcionais a $\delta\tilde{v}^a$ em (1.12) não influem na dinâmica dos campos físicos já que elas simplesmente levam a uma relação entre os campos auxiliares $B_a(x)$ e os demais campos.

Do cancelamento dos termos restantes em (1.13) obtem-se:

$$\begin{aligned} \partial_2 \eta^1 - \partial_1 \eta^2 &= 0 \\ \partial_1 \eta^1 - \partial_2 \eta^2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \partial_1 \xi_1^1 - \partial_2 \xi_2^1 &= 0 \\ \partial_1 \xi_2^1 + \partial_2 \xi_1^1 &= 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

onde

$$\xi_a^1 = \tilde{v}^3 \xi_a \quad \tilde{v}^3 = \frac{\tilde{g}^{11} - \tilde{g}^{22}}{2} = \frac{(-g)^{1/4} (g^{11} - g^{22})}{2}$$

Como estamos no gauge conforme:

$$g^{ab} = \frac{1}{\rho} \delta^{ab} ; \quad -g = \rho^2 ,$$

temos:

$$\xi'_a = \frac{\xi_a}{\sqrt{\rho}} \quad (1.18)$$

No caso da corda aberta onde $\tau_i = -\infty$; $\tau_f = +\infty$ e $\sigma_i = 0$; $\sigma_f = \pi$, levando em conta que todos os campos em questão são hemiteanos, a solução mais geral para as equações de movimento (1.6), (1.16) e (1.17) com as condições de contorno (1), (1.7), (1.14) e (1.5) são⁽¹²⁾:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = q_0^\mu + \frac{p_0^\mu}{\pi\alpha'} \tau + \sqrt{\frac{\alpha'}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (a_n^\mu e^{-in\tau} + a_n^{\mu+} e^{in\tau}) \cos n\sigma \quad (1.19)$$

$$\eta^1(\tau, \sigma) = \frac{C_0}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{-in\tau} + C_n^+ e^{in\tau}) \cos n\sigma \quad (1.20)$$

$$\eta^2(\tau, \sigma) = -\frac{i}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{-in\tau} - C_n^+ e^{in\tau}) \sin n\sigma \quad (1.21)$$

$$\xi_1^i(\tau, \sigma) = -\frac{i}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{C}_n e^{in\tau} - \bar{C}_n^+ e^{in\tau}) \sin n\sigma \quad (1.22)$$

$$\xi_2^i(\tau, \sigma) = \frac{\bar{C}_0}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{C}_n e^{-in\tau} + \bar{C}_n^+ e^{in\tau}) \cos n\sigma \quad (1.23)$$

Como $(\eta^1)^+ = \eta^1$ e $\xi_2^{i+} = \xi_2^i$, os modos zero acima devem ser hermiteanos:

$$c_0^+ = c_0 \quad ; \quad \bar{c}_0^+ = \bar{c}_0$$

Agora seguindo no procedimento da quantização canônica devemos definir os momenta canonicamente conjugados aos campos da teoria:

$$\pi_{\phi_i} = \frac{\partial L_T}{\partial (\partial_1 \phi_i)} \quad (1.24)$$

onde ϕ_i é um campo qualquer.

É interessante reescrever a lagrangeana total L_T dada em (1.3) que: $\{\xi_a, \partial_c n^d\} = 0$, pois tanto n^d como ξ_a tem carácter fermiônico, além disso os termos do tipo: $-i \xi_a n^c \partial_c \tilde{v}^a$ podem ser integrados por partes:

$$-i \xi_a n^c \partial_c \tilde{v}^a = -i \partial_c (\xi_a n^c \tilde{v}^a) + i \partial_c (\xi_a n^c) \tilde{v}^a$$

Usando essas relações em (1.3) temos:

$$\begin{aligned} S_T = \int_M d^2 \zeta L_T = \int_M d^2 \zeta \{ & \frac{\mu_0}{2} \sqrt{-g^{ab}} \partial_a X^\mu \partial_b X^\mu + B_1 \tilde{v}^1 + B_2 \tilde{v}^2 + \\ & + i \xi_1 (\partial_1 n^2 + \partial_2 n^1) \tilde{v}^2 + i \xi_2 (\partial_1 n^2 + \partial_2 n^1) \tilde{v}^1 + \\ & + i \partial_c (\xi_a n^c) \tilde{v}^a + i \frac{\xi_a (\partial_c n^c)}{2} \tilde{v}^2 + \\ & - i ((\partial_1 n^2 - \partial_2 n^1) \xi_1^1 + (\partial_1 n^1 - \partial_2 n^2) \xi_2^1) \} + \end{aligned}$$

$$- i \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau (\xi_a \eta^2 \tilde{v}^a) \Big|_0^\pi - i \int_0^\pi d\sigma (\xi_a \eta^1 \tilde{v}^a) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \quad (1.25)$$

onde $\xi'_a = \xi_a \tilde{v}^3$.

Como já vimos antes $\eta^2(\tau, 0) = \eta^2(\tau, \pi) = 0$ assim a integral em $d\tau$ é nula, a integração em $d\sigma$ também é nula porque assumimos em geral que os campos em $\tau = \pm \infty$ vão a zero.

Usando a lagrangeana L_T de (1.25) e a definição dos momenta associados aos campos da teoria, (1.24), lembrando que na concha de massa $\tilde{v}^a = 0$ temos:

$$\Pi_{B_a} = \Pi_{\xi_a} = \Pi_{\tilde{v}^a} = \Pi_{\tilde{v}^3} = 0 \quad (1.26)$$

$$\Pi_{\eta^1} = -i \xi'_2; \quad \Pi_{\eta^2} = -i \xi'_1 \quad (1.27)$$

e ainda:

$$\Pi_{X^\mu} = \mu_0 \sqrt{-\tilde{g}} (\tilde{g}^{12} \partial_2 X^\mu + \tilde{g}^{11} \partial_1 X^\mu)$$

mas como estamos no gauge conforme:

$$g^{ab} = (1/\rho) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad g_{ab} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & -\rho \end{pmatrix}$$

e

$$\tilde{g}^{ab} = g^{1/4} g^{ab}; \quad \tilde{g}_{ab} = g^{-1/4} g_{ab}$$

reescrevendo Π_{X^μ} :

$$\pi_{\chi^\mu} = + \mu_0 \partial_1 \chi^\mu \quad (1.28)$$

Mostra-se que⁽¹²⁾ os campos que possuem momento conjugado nulo não possuem relevância no processo de quantização e podem ser eliminados da teoria.

Impõem-se as relações de comutação e anticomutação abaixo:

$$[\pi_{\chi^\mu}(\tau, \sigma), \chi^\nu(\tau, \sigma')] = -i \delta^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma')$$

$$\{\pi_{\eta^a}(\tau, \sigma), \eta^b(\tau, \sigma')\} = -i \delta^{ab} \delta(\sigma - \sigma')$$

e usando-se (1.27) e (1.28) além das expansões (1.19) a (1.23), temos as seguintes relações para os coeficientes das expansões dos campos:

$$[p_0^\mu, q_0^\nu] = i \delta^{\mu\nu}$$

$$[a_n^\nu, a_m^{\nu+}] = -\delta^{\mu\nu} \delta_{nm} \quad (1.29)$$

$$\{\bar{c}_n^+, c_m\} = \{\bar{c}_n, c_m^+\} = \delta_{nm} \quad (1.30)$$

$$\{\bar{c}_0, c_0\} = 1 \quad (1.31)$$

e os demais anti-comutadores ou comutadores são nulos. Como a nossa ação total S_t é invariante por transformações de B.R.S.T. tais que $\eta^2(\tau, 0) = \eta^2(\tau, \pi) = 0$ temos então uma carga conser-

vada (Q_B) associada a essa simetria.

Pelo teorema de Noether temos a seguinte corrente conservada:

$$J^C = \frac{\partial L_T}{\partial (\partial_C \phi_i)} (\delta^B \phi_i) + L (\delta^B \zeta^C) \quad (1.32)$$

onde - ϕ_i representa um campo genérico da teoria e $\bar{e}$ assumida soma no índice i tal que todos os campos contribuam para a corrente J^C .

$$- L = \frac{\mu_0}{2} \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^v \partial_b X^v \quad (1.33)$$

$$- L_T = L + (L_{GF} + L_{FP})$$

- $\delta^B \zeta^a$ pode ser obtido a partir da reparametrização:

$\zeta^{a'} = \zeta^a + \epsilon^a$ com a prescrição $\epsilon^a = \theta \eta^a$, ou seja:

$$\delta^B \zeta^a = \zeta^{a'} - \zeta^a = \epsilon^a = \theta \eta^a \quad (1.34)$$

No apêndice A (seção A6) demonstramos explicitamente a conservação da corrente J^C :

$$\partial_C J^C = 0 \quad (1.35)$$

A carga de B.R.S.T. Q_B , tem caráter fermiônico, consequentemente a corrente da qual ela é obtida (J^C_{BRST}) deve possuir esse mesmo caráter. É natural então definirmos J^C_{BRST}

a partir de J^C segundo:

$$J^C_{BRST} \theta = J^C = \frac{\partial L_T}{\partial (\partial_c \phi_i)} (\delta^B \phi_i) + (\delta^B \zeta^C) \quad (1.36)$$

onde θ é uma constante grassmanniana que deverá aparecer no lado direito da expressão acima, a partir de $\delta^B \phi_i$ e $\delta^B \zeta^C$, de tal maneira que J^C_{BRST} seja independente de θ .

Da conservação de J^C temos a conservação de J^C_{BRST} :

$$\partial_c J^C_{BRST} = 0$$

ou seja:

$$\partial_1 J^1_{BRST} = - \partial_2 J^2_{BRST}; \text{ lembrando que } \zeta^1 = \tau \text{ e } \zeta^2 = \sigma$$

temos:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} J^1_{BRST} = - \frac{\partial}{\partial \sigma} J^2_{BRST}$$

Integrando a expressão acima em σ de 0 a π obtemos a seguinte equação para a carga de B.R.S.T.

$$\frac{\partial}{\partial \tau} Q_B = - J^2_{BRST} \Big|_0^\pi \quad (1.37)$$

com:

$$Q_B = \int_0^\pi d\sigma J^1_{BRST} \quad (1.38)$$

A equação (1.37) indica que a carga de B.R.S.T., Q_B , será conservada se e somente se:

$$J^2_{BRST} \Big|_0^\pi = 0$$

Após os cálculos de Q_B calcularemos J^2_{BRST} para verificar a igualdade acima.

seja:

$$L = \frac{\mu_0}{2} \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\mu, \text{ no gauge conforme:}$$

$$\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{ab} = \eta^{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

temos:

$$L = \frac{\mu_0}{2} (\partial_1 X^\mu \partial_1 X^\mu - \partial_2 X^\mu \partial_2 X^\mu)$$

Substituindo a expressão acima em (1.25) temos a lagrangeana total:

$$L_T = L + (L_{GF} + L_{FP}) = \frac{\mu_0}{2} (\partial_1 X^\mu \partial_1 X^\mu - \partial_2 X^\mu \partial_2 X^\mu) +$$

$$B_1 \tilde{v}^1 + B_2 \tilde{v}^2 + i\xi_1 (\partial_1 n^2 + \partial_2 n^1) +$$

$$+ i \xi_2 (\partial_1 n^2 + \partial_2 n^1) \tilde{v}^1 + i \partial_c (\xi_a n^c) \tilde{v}^a + i \frac{\xi_a}{2} (\partial_c n^c) \tilde{v}^a +$$

$$- i \{ (\partial_1 n^1 - \partial_1 n^1) \xi_1^1 + (\partial_1 n^1 - \partial_2 n^2) \xi_2^1 \}$$

onde $\xi_a^1 = \xi_a \tilde{v}^3$

Portanto usando a definição de J_{BRST}^C dada em (III-62) temos:

$$J_{BRST}^C \theta = \frac{\partial L_T}{\partial (\partial_c X^\mu)} \delta^B X^\mu + \frac{\partial L_T}{\partial (\partial_c n^1)} \delta^B n^1 + \frac{\partial L_T}{\partial (\partial_c n^2)} \delta^B n^2 +$$

$$\frac{\partial L_T}{\partial (\partial_c B_a)} \delta^B B_a + \frac{\partial L_T}{\partial (\partial_c \xi_a)} \delta^B \xi_a + \frac{\partial L_T}{\partial (\partial_c \tilde{v}^a)} \delta^B \tilde{v}^a + \frac{\partial L_T}{\partial (\partial_c \tilde{v}^3)} \delta^B \tilde{v}^3 - L \delta \xi^C$$

Lembrando que $\tilde{v}^a = 0$ na concha de massa e usando as relações:

$$\{n^C, \theta\} = 0; \quad \delta^B X^\mu = -\theta n^C \partial_C X^\mu; \quad \delta^B n^C = -\theta n^a \partial_a n^C; \quad \delta^B \xi^C = \theta n^C$$

temos:

$$J_{BRST}^1 \theta = \mu_0 \{ (\partial_1 X^\mu) (n^C \partial_C X^\mu) \theta - \left(\frac{\partial_1 X^\mu \partial_1 X^\mu - \partial_2 X^\mu \partial_2 X^\mu}{2} \right) n^1 \theta \} +$$

$$+ i \xi_2^1 (n^C \partial_C n^1) \theta + i \xi_1^1 (n^C \partial_C n^2) \theta.$$

como $\partial_1 X^\mu \partial_2 X^\mu = \partial_2 X^\mu \partial_1 X^\mu$ e $\xi_d^1 (n^C \partial_C n^b) = n^C (\partial_C n^b) \xi_d^1$

quantização canônica, é consistente se e somente se a dimensão do espaço tempo for igual a 26

REFERÊNCIAS

- (1) - J. Scherk, Rev. of Mod. Phys. 47 (1975) 123.
- (2) - T. Banks, M.E. Peskin, Nucl. Phys. B264 (1986) 513.
- (3) - M.B. Green, Scientific American - 255 - nº 3 - setembro/86.
- (4) - M.B. Green, J.H. Schwarz , Phys. Lett. 149B (1984) 117.
- (5) - M.B. Green, J.H. Schwarz , Nucl. Phys. B255 (1985) 93.
- (6) - O. Alvarez, Nucl. Phys. B216 (1983) 125.
- (7) - T. Goto, Prog. Theor. Phys. 46 (1971) 1560.
- (8) - O. Alvarez, "Differential Geometry in String Models" - U. C.L.A. - preprint, outubro/85, U.C.B. - PTH - 85/50.
- (9) - L. Brink, P. di Vecchia, P. Howe, Phys. Lett. 65B (1976) , 471.
- (10) - L. Brink, P. di Vecchia, P. Howe, Nucl. Phys. B118 (1977), 76.
- (11) - L.D. Landau, E. Lifshitz, "Teoria do Campo" - Editora Mir - Moscou.
- (12) - M. Kato, K. Ogawa, Nucl. Phys. B212 (1983), 443
- (13) - H. Nicolai, A.N. Schellekens; "preprint" - CERN - T.H.4585/86, novembro/86.
- (14) - O. Alvarez, Cornell Preprint CLNS 82/539 (1982).
- (15) - B. Durhuus, "Quantum Theory of Strings" - Nordita "Preprint" - 82/36.
- (16) - Ta-Pei Cheng, Ling-Fong Li, "Gauge Theory of Elementary Particle Physics", Oxford Science Publications.

- (17) - Becchi, Rouet, Stora, Ann. of Phys. 98 (1976), 287.
- (18) - T. Kugo, I. Ojima, Supplem. Progr. Theor. Phys. 66 (1979), 1.
- (19) - T. Kugo, S. Uehara, Nucl. Phys. B197 (1982), 378.
- (20) - K. Fujikawa, Phys. Rev. D-25 (1982), 2584.
- (21) - J. Wess, J. Bagger - "Supersymmetry and Supergravity" .
Princeton University Press.
- (22) - L. Bonora, M. Tonin, Phys. Lett. 98B (1981), 48.
- (23) - K. Fujikawa, Phys. Rev. Lett. 42 (1979), 1195.
- (24) - K. Fujikawa em "Superstrings, Supergravity and Unified
Theories", World Scientific.
- (25) - G.A. Christos, Zeitschrift für Physik C - Particles and
Fields 18 (1983), 155-162.
- (26) - K. Fujikawa, Nucl. Phys. B226 (1983), 437.
- (27) - R. Balian, C. Bloch, Ann. of Phys. 64 (1971), 271.
- (28) - B. Durhuus, P. Olesen, J.L. Petersen, Nucl. Phys. B198
(1982), 157 e Nucl. Phys. B201 (1982), 176.
- (29) - A.M. Polyakov, Phys. Lett. 103B (1981), 207.

