

IFT

**Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.011/05

Análise de um Modelo Microscópico para o Mercado Financeiro

Antonio Vitor Garcia Alves Rodrigues

Orientador

Gerson Francisco



Maio de 2005

23-4121

Instituto de Ensino Superior
Universidade Federal do Rio de Janeiro



1977-1978

DEPARTAMENTO DE HISTÓRIA

Atividade de um aluno de graduação em História

Trabalho de conclusão de curso

Assinado por:
Assessoria de Orientação



Dedicado à minha família,

Agradecimentos

Ao prof. Gerson Francisco, por sua orientação e amizade.

À minha família, que tem me proporcionado as condições necessárias para o meu desenvolvimento.

Ao Bira, pela grande amizade e muitas contribuições no decorrer do mestrado.

Ao Fernandinho, cuja ajuda foi fundamental na realização deste trabalho.

Aos amigos Crepaldi, Márcio, Marcel e André Fonseca, companheiros de grupo que proporcionaram um ambiente adequado para estudo.

Aos amigos Poliana, Douglas, Victo, André Silva, Raquel, Paulo e Fábio, pelos muitos bons momentos compartilhados.

Aos amigos de graduação, pelas ótimas reuniões e discussões sobre assuntos variados.

Aos funcionários do IFT, pelo pronto atendimento às necessidades.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro.

Resumo

Neste trabalho é apresentado um estudo do Jogo da Minoria, um modelo que visa simular o comportamento coletivo dos agentes no mercado financeiro. As propriedades deste sistema, bem como a resolução analítica do mesmo, são tratadas. Por fim, faz-se uma discussão das relações do jogo com o mercado real e reproduz-se um método que busca a utilização deste sistema para fins de modelagem e previsão de séries temporais.

Palavras Chaves: jogo da minoria; algoritmos genéticos; modelagem de séries temporais.

Áreas do conhecimento:1.02.02.06-4; 1.05.01.00-2; 6.03.02.01-1

Abstract

In this work we study the Minority Game, a model which tries to simulate the collective behavior of the agents in the financial market. The properties of the system, as well as its analytical resolution, are shown. A discussion of the relations between this game and the real market, and also a reproduction of a method, which uses this system to look for modeling and prediction of temporal series, are made.

Palavras Chaves: minority game; genetic algorithms; time series modeling.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Bar El Farol	3
1.2	Jogo da Minoria	4
1.3	Exemplo	6
1.4	MG Grande Canônico	8
1.4.1	Versão 1	8
1.4.2	Versão 2	9
1.5	Dinâmica de Preços	10
2	Propriedades do Jogo da Minoria	11
2.1	Cooperação	11
2.2	Transição de fase	14
2.3	Interpretação Geométrica	16
2.4	Abordagem Analítica	18
2.4.1	Simplificações da dinâmica do jogo	18
2.4.2	Solução Exata	22
3	Algoritmos Genéticos	26
3.1	Motivações biológicas	26
3.1.1	Conceitos relevantes	27
3.2	Modelo Básico	29
3.2.1	O Algoritmo	31
3.3	Teorema do Esquema	31
3.3.1	Efeito da Seleção	32
3.3.2	Efeito da Recombinação	33
3.3.3	Efeito da Mutação	35
3.3.4	Teorema	35
4	O Jogo da Minoria e o Mercado Financeiro	36
4.1	Fatos Estilizados	36

4.1.1	Ausência de autocorrelação linear	37
4.1.2	Clusters de Volatilidade	38
4.1.3	<i>Caudas Pesadas</i>	39
4.2	Modelagem e Previsão	40
4.2.1	Busca dos Parâmetros	42
4.2.2	Previsão	43
4.2.3	Testes	44
4.2.4	Considerações Finais	49
A Relação entre σ e H		50
B Cálculos da Solução Exata		52
Referências		57

Capítulo 1

Introdução

Nos últimos anos houve um grande aumento no número de físicos trabalhando em problemas das ciências sociais [1, 2], biológicas[3] e econômicas [4]. O motivo pelo qual estes pesquisadores voltaram suas atenções para áreas interdisciplinares não é a perda de interesse pelas áreas tradicionais da Física, mas sim a percepção de que existem interessantes sistemas complexos que podem ser observados e estudados utilizando-se de técnicas, desenvolvidas principalmente pela mecânica estatística, que obtiveram grande êxito na Física.

A abordagem quantitativa dos problemas econômicos já foi e continua sendo amplamente trabalhada por economistas que recebem grande ajuda dos matemáticos. Esta ajuda é enfatizada em rigorosas provas que pouco se relacionam com os dados reais do mercado. Tal fato fica bem explicitado em uma declaração feita pelo famoso investidor George Soros:

“Existing theories about the behavior of stock prices are remarkably inadequate. They are of so little value to the practioners that I am not even fully familiar with them. The fact that I could get by without them speaks for itself.”

G. Soros, “Alchemy of Finance” (1994).

Apesar do ponto de vista crítico adotado acima, é evidente que a contribuição dos matemáticos para a Economia é grande e uma prova disto é a criação da Teoria dos Jogos. Um importante conceito desta teoria é o equilíbrio de Nash, que foi formulado por John Nash em 1951. Ele ganhou o prêmio Nobel de *Economia* em 1994.

Ainda assim esta contribuição apresenta problemas, uma vez que nesta teoria a Economia é vista como um jogo em que os participantes são completamente racionais e tomam atitudes através de deduções. Trata-se de um cenário de equilíbrio sem

conexões com as grandes flutuações encontradas nas séries de preço. Pode-se dizer que a Teoria dos Jogos tem grande aplicabilidade no estudo de estratégias de tomada de decisões e contratos de negociação, mas não na modelagem do mercado financeiro, visto que para isto são necessários um grande número de jogadores tornando esta abordagem inviável.

E de onde vem então a idéia de que os físicos podem contribuir de alguma forma diferente? A resposta está justamente na idéia de que não se trata de um sistema em equilíbrio e tais sistemas com flutuações e desordem são comumente tratados pelos físicos estatísticos. Trata-se de uma abordagem que trabalha com os dados reais e que constrói teorias fenomenológicas e deriva leis empíricas. Além disso o acesso a uma grande quantidade de dados econômicos fornece as condições necessárias para que os pesquisadores da área desenvolvam e testem seus modelos [5].

No final da década de 90 alguns físicos propuseram diversos modelos usando agentes heterôgeneos [4, 6] para a modelagem de mercados financeiros. Estes modelos tinham o mérito de conseguirem reproduzir as flutuações anômalas encontradas nas séries reais. A tentativa de obtenção destes *fatos estilizados* (distribuição de retorno com cauda gorda, clusters de volatilidade, enfim, propriedades comuns às séries reais) do mercado tornou-se bastante popular entre os pesquisadores. Apesar de se tratar de um avanço, esta abordagem apresentava um grande problema, pois, para obter tais propriedades os modelos faziam uso de uma grande quantidade de parâmetros, o que dificultava no exercício de estabelecer o que exatamente estava influenciando nas características observadas. Tais modelos tinham portanto o defeito de estarem se tornando refinados a ponto de ficarem tão complicados quanto o mundo real. Percebeu-se então que dever-se-ia procurar por um modelo extremamente simplificado mas que capturasse mecanismos básicos do mercado e permitisse uma abordagem analítica. Um problema similar e que foi solucionado pela Física é a modelagem de materiais magnéticos. Para tanto criou-se o modelo de Ising, que reduziu cada átomo do sistema em uma simples variável binária chamada spin e assumiu simples interações entre estas, conseguindo assim atingir bons resultados qualitativos. Procurava-se então um “modelo de Ising” do mercado financeiro.

Nesta dissertação é apresentado um modelo baseado em agentes bastante simples e que possui um comportamento bastante complexo, trata-se do chamado Jogo da Minoria. No capítulo 1 é feita uma apresentação do histórico e da dinâmica do modelo em questão. No segundo capítulo o comportamento deste sistema é estudado em detalhes. No intuito de relacionar mais diretamente este jogo e o mercado real, introduz-se os chamados algoritmos genéticos no capítulo 3, uma vez que esta ferramenta de busca é bastante utilizada no quarto capítulo. O último, portanto, é dedicado às tentativas de utilização deste sistema para modelagem e previsão, de

séries geradas pelo próprio modelo, bem como, de séries reais.

1.1 Bar El Farol

Em 1994 o economista Brian Arthur propôs em um artigo [7] o problema do Bar El Farol. Este era um exemplo onde os jogadores agiam por razões indutivas em um cenário de limitado conhecimento sobre o sistema. A idéia de racionalidade limitada vem do fato de um participante não conhecer as estratégias dos outros e ter assim atitudes baseadas em suas próprias crenças, sem contudo, se tratar de um agente irracional, uma vez que este tem acesso às ações passadas do conjunto de agentes e pode portanto se adaptar à situação.

Ao propor este problema Arthur estava questionando a abordagem convencional de agentes completamente racionais e capazes de tudo entender. Trata-se de uma situação em que os jogadores não estão jogando um contra o outro mas sim contra o mercado, uma vez que só possuem as informações pessoais e as conjuntas. Uma analogia interessante, com um problema físico, que permite entender que considerar as atitudes coletivas dos indivíduos é mais adequada do que o estudo individual de cada agente, é o estudo da transição de fase da água, ou seja, quando analisa-se poucas moléculas de água nada se pode concluir sobre as temperaturas de transição, contudo, na medida em que um grande número de moléculas são agregadas o fenômeno da transição de fase emerge e passa a ser compreendido.

O El Farol Bar é um pub irlandês da cidade de Santa Fé nos Estados Unidos, onde ocorrem apresentações de música irlandesa às quintas-feiras. Ao frequentar estes shows, Arthur, tendo em mente seus questionamentos sobre Economia, imaginou um problema da seguinte forma: uma vez que existem 100 pessoas na cidade que frequentam estes eventos e sendo que o bar possui apenas 60 lugares, o que devem fazer estas pessoas para decidirem, levando-se em conta a suposição de que todos preferem não ir ao local quando este está lotado, se vão ou não ao bar?

A solução proposta por Arthur foi a construção de um simples modelo em que os indivíduos agissem de maneira indutiva. Neste modelo cada pessoa tem um número limitado de estratégias (regras utilizadas para decidir ir ou não ao bar) que são pontuadas positiva ou negativamente conforme sua performance. Não se discute o mérito das estratégias mas apenas as suas pontuações. É através destas que a pessoa toma a sua decisão, ou seja, a atitude será proposta pela estratégia que tiver mais pontos positivos.

Nota-se que neste jogo não há uma melhor solução, uma vez que se houvesse todos seguiriam esta e por consequência todos ficariam infelizes, ou em um bar lotado, ou estando em casa quando o bar não estava lotado. O curioso neste problema é que

apesar da pouca informação que possuem os participantes e das diferentes estratégias dos mesmos, o número de frequentadores do bar evolui para um valor ótimo. No caso da simulação de Arthur a frequência de clientes flutuou em torno de 60 pessoas.

Apesar de aparentemente este problema não ter relação com a Economia, é fácil perceber que se trata de um modelo simples de mercado quando considera-se cada jogador com sendo um agente que tem a opção de escolher entre comprar ou vender uma ação. Após cada rodada o preço da ação é dado pela lei da oferta e da procura, assim os agentes que compraram quando a maioria vendeu (preço baixo) são recompensados, bem como os que vendem quando a maioria compra (preço alto). Logo a ligação entre o El Farol Bar e o mercado é a regra de que a minoria ganha. Tal fato é encontrado em outros sistemas tais como o tráfego de veículos em uma estrada, o tráfego de pacotes de informações em uma rede de computadores [2], etc.

Contudo algumas pessoas podem discordar com esta lei da minoria no contexto do mercado financeiro, visto que são comuns as situações em que seguir a maioria é a atitude mais lucrativa. Entretanto, ainda nestas situações, é possível detectar vantagens na minoria, ou melhor, este *boom* que todos estão seguindo terá um fim em dado momento e os que saírem primeiro serão os vencedores. Mas, possivelmente, negociações no mercado financeiro real necessitem de estratégias mista entre a regra da minoria e da maioria.

Baseando-se neste problema proposto por Arthur, os físicos Damien Challet e Yi-Chen Zhang propuseram uma versão para o mercado financeiro que foi chamada de Minority Game (Jogo da Minoria) [8, 9, 10]. Trata-se de uma formalização do problema do El Farol Bar que manteve as duas principais características deste, ou seja, a frustração (nem todas as pessoas podem vencer ao mesmo tempo, o que provoca uma permanente competição) e a decisão por indução (cada participante tem suas estratégias pontuadas ao longo do tempo; tal fato faz com que os participantes sejam adaptativos).

1.2 Jogo da Minoria

Nesta primeira versão criada por Zhang e Challet, um grupo de N (número ímpar) pessoas devem optar por uma dentre duas opções, sendo no caso considerada a questão de comprar ou vender uma ação. Esta decisão deve ser tomada individualmente e simultaneamente pelos participantes (serão chamados de agentes para criar uma analogia com o mercado de ações) sem que ocorra qualquer tipo de comunicação entre eles. Serão vencedores em cada rodada aqueles que tiverem escolhido a opção menos popular entre os agentes, ou seja, os que ficaram na minoria.

Todos os agentes possuem a informação de quais foram as decisões vencedoras

nos m passos anteriores (informação pública) e possuem também a informação de como tem sido o desempenho de suas estratégias (informação pessoal).

A sistematização deste processo é feita da seguinte maneira:

- para iniciar o jogo cada agente i montará S (igual para todos) estratégias de acordo com os m resultados anteriores, ou seja, dado que a cada instante eles terão acesso a m bits e que cada bit pode assumir dois valores diferentes, então os agentes precisam criar $P = 2^m$ escolhas em cada uma de suas S estratégias. Estas escolhas são simbolizadas pelo termo $a_{i,s}^\mu$, onde i representa o agente, s a estratégia que ele está usando e μ o estado em que se encontra o sistema. Dizer que $a_{i,s}^\mu = 1$ significa dizer o agente i compra uma ação quando o sistema se encontra no estado μ se ele utilizar sua estratégia s , já se $a_{i,s}^\mu = -1$ o agente vende uma ação .

ex: Dado $m = 2$ e $S = 1$, uma possível estratégia seria

00	01	10	11
1	-1	-1	-1

Uma vez que existem duas opções possíveis (± 1) para cada um dos 2^m estados, então o número de estratégias existentes é de 2^{2^m} .

- convencionou-se na construção dos resultados, aos quais os agentes terão acesso, que se a opção vencedora foi a de compra (a minoria comprou) então este fato será simbolizado com o bit 1 e se a opção vencedora foi a de venda (minoridade vendeu) com o bit 0.
- cada agente criará um rank ($U_{i,s}(t)$) de pontuação para as estratégias, de forma que a cada instante eles utilizarão a estratégia com melhor pontuação, ou seja,

$$s_i(t) = \max_{s=1,\dots,S} U_{i,s}(t) \quad (1.1)$$

Se mais de uma estratégia apresentar a mesma pontuação e esta for a de valor mais alto, a decisão sobre qual destas utilizar será feita através de um sorteio.

- Uma vez que, dado um estado μ em um tempo t , os agentes fazem suas escolhas, a determinação do resultado das atitudes de todos os agentes é feita somando-se os $a_{i,s_i(t)}^{\mu(t)}$ de forma a definir o excesso de demanda $A(t)$

$$A(t) = \sum_i a_{i,s_i(t)}^{\mu(t)} \quad (1.2)$$

- Sendo conhecido o sinal de $A(t)$ (positivo se a maioria comprou e negativo se a maioria vendeu) a pontuação dos ranks é feita da seguinte maneira

$$U_{i,s}(t+1) = U_{i,s}(t) - a_{i,s}^{\mu(t)} \text{sgn}[A(t)] \quad (1.3)$$

ou seja, as estratégias representadas por $a_{i,s}^{\mu(t)}$ com o mesmo sinal da maioria, perdem um ponto, e as que ficaram na minoria são recompensados com um ponto. Esta pontuação é feita para todas as estratégias, inclusive as que não foram utilizadas, uma vez que é através deste rank que o agente escolherá qual a melhor para se utilizar no próximo momento.

- Se em um jogo com $m = 2$ ($P = 2^m = 4$), no instante t o $\mu(t)$ é 00 (o que significa que em $t - 2$ e $t - 1$ a minoria vendeu ações) e a minoria neste instante t compra ações, então $\mu(t+1) = 01$. Representando este $\mu(t)$ em valores decimais que variam de 0 a P (00 = 0, 01 = 1, 10 = 2, 11 = 3) podemos atualizar o valor do estado μ com a seguinte expressão :

$$\mu(t+1) = [2\mu(t) + ((1 - \text{sgn}A(t))/2)] \text{MOD } P \quad (1.4)$$

No exemplo citado teríamos: $\mu(t) = 0$, $\text{sgn}A(t) = -1$ e $P = 4$, logo

$$\mu(t+1) = [2 * 0 + ((1 - (-1))/2)] \text{MOD } 4 = 1$$

As equações 1.1, 1.2, 1.3 e 1.4 definem o mecanismo do modelo.

1.3 Exemplo

Para exemplificar a dinâmica deste jogo, segue o exemplo abaixo:

Parâmetros utilizados: $N = 5$ $m = 2$ $S = 2$

Criação aleatória das matrizes estratégia

$$S_1$$

$i \setminus \mu$	00	01	10	11
1	1	-1	-1	1
2	-1	-1	1	1
3	-1	-1	1	1
4	-1	1	-1	1
5	1	-1	-1	-1

$$S_2$$

$i \setminus \mu$	00	01	10	11
1	-1	1	1	-1
2	-1	1	1	-1
3	-1	-1	1	1
4	1	1	-1	-1
5	-1	-1	-1	1

Condição inicial $\mu(0) = 00$ (em decimal $\mu(0) = 0$)

Pontuação inicial das estratégias

$$Rank_1$$

i	Rank
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0

$$Rank_2$$

i	Rank
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0

A decisão de qual estratégia jogar, em situações como esta em que as pontuações estão empatadas, é feita jogando-se moedas. Define-se a notação $K(\text{Cara}) = S_1$ e $C(\text{Coroa}) = S_2$.

Primeira rodada:

	$S_1(\mu = 00)$	$S_2(\mu = 00)$	Sorteio
1	1	-1	K
2	1	-1	K
3	-1	-1	C
4	-1	1	C
5	1	-1	C

Logo, $A = \sum_i a_{i,s}^\mu$ é no caso a soma dos valores em destaque, que são as decisões escolhidas por cada um dos cinco jogadores, ou seja, $A = 1 + 1 - 1 + 1 - 1 = 1$,

portanto a maioria vende e os vencedores são os compradores.

Atualização do Rank usando $U(t + 1) = U(t) - a_{i,s}sgn(A(t))$

$Rank_1$	
1	1
2	1
3	-1
4	-1
5	1

$Rank_2$	
1	-1
2	-1
3	-1
4	1
5	-1

Atualização do estado $\mu(t)$

$$\mu(t + 1) = [2 * \mu(t) + (1 - sgn(A))/2]Mod P = [2 * 0 + (1 - 1)/2]Mod 4 = 0$$

Dando prosseguimento, na próxima rodada também será utilizada a coluna $\mu(t) = 00$ (ou coluna $\mu(t) = 0$ em decimal), sendo que o agente 1 e o agente 5 utilizarão a estratégia S_1 (no caso deles, possui melhor rank do que S_2), o agente 4 utilizará sua estratégia S_2 (melhor pontuação do que S_1) e os agentes 2 e 3 decidirão jogando moeda (S_1 e S_2 possuem mesma pontuação no rank).

É fácil agora dar continuidade ao jogo.

Uma observação importante a ser feita é a de que neste jogo, uma vez criada as matrizes estratégia, estas não mais serão modificadas.

1.4 MG Grande Canônico

1.4.1 Versão 1

Conforme mencionado o jogo da minoria é uma grande simplificação dos mecanismos reais do mercado. Estes mecanismos, por sua vez, variam de acordo com os produtos que estão sendo negociados, local de negociação, instituição e necessidade dos agentes. Contudo, algumas propriedades das flutuações de mercado, os *atos estilizados* [11], são indiferentes às variações citadas.

Visando a reprodução destas características descobriu-se que as modificações básicas necessárias para alcançar este objetivo é a de permitir aos agentes a possibilidade de não jogar quando não for conveniente para eles e a criação de dois tipos de agentes, os produtores e os especuladores. É devido ao fato de haver variação

do número de jogadores por rodada que chamou-se esta versão de grande canônica [12], em alusão aos estudos da mecânica estatística.

Os produtores são agentes que utilizam o mercado para negociar mercadorias, e portanto não estão interessados em lucrar com as flutuações do mercado. Eles possuem um comportamento previsível com relação à introdução de novas informações, e na ausência de outro tipo de agentes fariam com que o mercado seguisse uma trajetória determinística. Poderiam ser chamados de fundamentalistas.

Os especuladores são agentes adaptativos que visam lucrar com as flutuações tentando prever os próximos movimentos. Eles garantem aos produtores a liquidez de mercado de que estes necessitam e são os responsáveis pela emergência dos fatos estilizados.

Com relação à permissão de não negociar quando conveniente, é utilizada apenas pelos especuladores, uma vez que os produtores se comportam de maneira determinística com relação à $\mu(t)$. Para cada produtor constrói-se uma única estratégia.

Aos especuladores são fornecidas $S + 1$ estratégias sendo uma delas ($s = 0$) construída de forma que todos os seus elementos sejam nulos ($a_{i,0}^\mu = 0$). A pontuação das estratégias é modificada em relação à do jogo da minoria padrão e passa a ter a seguinte forma:

$$U_{i,s}(t+1) = U_{i,s}(t) - a_{i,s}^{\mu(t)} \operatorname{sgn}[A(t)] + \epsilon \delta_{s_i(t),0}$$

ou seja, para s diferente de zero não há modificações, contudo, para a estratégia adicional $s = 0$ a atualização é feita de forma que a cada rodada esta é recompensada de $\epsilon > 0$ pontos. A interpretação para tal modificação é a de refletir a aversão ao risco dos agentes no mercado real, na medida em que eles são recompensados com um ganho ϵ livre de risco quando não participam do jogo.

1.4.2 Versão 2

Uma segunda versão para o jogo da minoria grande canônico foi proposta em [13, 14]. Neste caso levou-se em consideração que um agente só negocia utilizando uma estratégia quando ele se sente suficientemente confiante em relação à esta. Logo, neste modelo cada estratégia será monitorada durante um período T de tempo e só será utilizada se for melhor do que as outras e se possuir um desempenho maior do que um valor $T\tau$ onde $0 < \tau < 1$, ou seja, se $\tau = 0.5$ significa dizer que o agente só irá negociar caso possua uma estratégia que tenha obtido um aproveitamento superior a 50% nas últimas T rodadas.

Trata-se portanto de uma versão que possui apenas um tipo de agentes, com S estratégias cada e que possuem a oportunidade de não jogar caso não tenham es-

estratégias com o desempenho esperado. O termo grande canônico é também utilizado devido a variação do número de agentes que estão atuando em cada rodada.

Observando-se estas versões ou até mesmo outros modelos baseados em agentes, percebem-se diversas distorções com relação ao mercado real, tais como, o fato de todos os agentes negociarem ao mesmo tempo e na mesma quantidade, a ausência de custos de transação, a limitação de estratégias e outros. Contudo, a motivação física de entender quais interações são responsáveis pelos fenômenos observados é atingida.

1.5 Dinâmica de Preços

Definindo-se $p(t)$ como sendo o preço de uma ação no instante t , o retorno $r(t)$ de uma ação é escrito da seguinte maneira

$$r(t) = \frac{p(t) - p(t-1)}{p(t-1)}$$

Considerando $r(t)$ pequeno, a expressão anterior pode ser reescrita como

$$r(t) = \log p(t) - \log p(t-1)$$

No caso do Jogo da Minoria define-se a dinâmica de preço de acordo com o excesso de demanda $A(t)$, assim

$$A(t) = \log p(t) - \log p(t-1)$$

e portanto,

$$p(t) = p(t-1) \exp A(t) \quad (1.5)$$

Existem outras formas de definir o preço de uma ação no Jogo da Minoria [15], porém a mais utilizada é a definida na expressão 1.5.

Capítulo 2

Propriedades do Jogo da Minoria

2.1 Cooperação

Os primeiros artigos [8, 16] sobre o Jogo da Minoria relataram propriedades observadas do sistema no estado estacionário, tais como, a cooperação entre os agentes. Conforme descrito e observado em simulações, nenhum dos grupos em questão (agentes que compram e agentes que vendem, por exemplo) situam-se sistematicamente na minoria, ou seja, $\langle A(t) \rangle = 0$ (média temporal).

Apesar da média de $A(t)$ possuir um comportamento trivial, o mesmo não se pode afirmar com respeito à variância $\sigma^2 = \langle [A(t) - \langle A(t) \rangle]^2 \rangle$. Esta representa o quanto o sistema é eficiente na distribuição dos recursos, ou seja, a eficiência global deste. Dessa forma, quanto menor a variância, menor será o número de perdedores e, portanto, maior o número de vencedores no decorrer do jogo.

Um jogo em que as decisões são tomadas aleatoriamente pelos agentes, produz flutuações de ordem N (número de agentes), sendo assim, diz-se que os jogadores cooperam quando obtém-se flutuações menores do que esta.

A cooperação entre os agentes no jogo da minoria é dependente dos parâmetros N , m e S utilizados [16]. O comportamento do sistema é demonstrado na figura 2.1. Trata-se do cálculo da variância da série do número de jogadores que optam por determinada atitude (compra de ações, por exemplo) versus m . Para cada m utilizado foram rodados trinta realizações independentes, tendo todas o mesmo número de jogadores e o mesmo número de estratégias por jogador. A reta horizontal tracejada representa o comportamento de um jogo com tomada de decisões aleatórias (RCG - Random Choice Game).

Observam-se claramente algumas características marcantes, dentre as quais destacam-se:

- a dispersão dos σ 's para diferentes rodadas, com diferentes matrizes estratégias iniciais, é maior quanto menor o m utilizado;

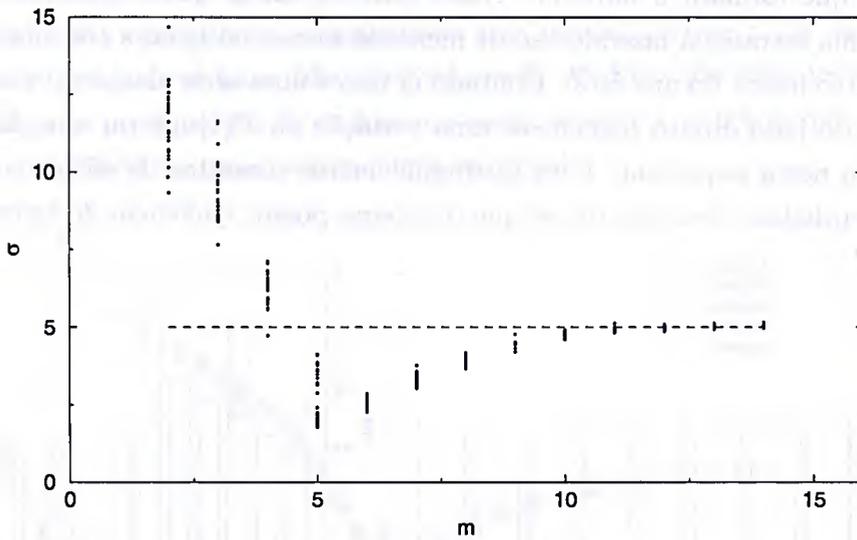


Figura 2.1: Comportamento da variância do número de jogadores que optam por uma determinada atitude para diferentes valores de m . Para cada m foram feitas 30 diferentes realizações independentes uma das outras. Utilizou-se $N=101$ e $m=2$. A linha tracejada representa um RCG.

- existe um valor mínimo de σ em $m = 5$, onde σ possui o valor mais baixo em relação ao RCG. O m no qual a curva σ vs m tem valor mínimo é designado m_c ;
- na medida em que m assume valores maiores que 6, σ aumenta e aproxima-se do valor obtido por um RCG;
- o gráfico pode ser subdividido em três regiões distintas, ou seja, onde não há cooperação entre os agentes ($\sigma > \sigma_{RCG}$), onde há cooperação ($\sigma < \sigma_{RCG}$) e região em que o sistema comporta-se como um RCG.

Uma melhor compreensão destes fatos é obtida estudando-se a série temporal binária G (1 se $A(t) < 0$ e -1 se $A(t) > 0$) de forma a verificar a informação acessível aos agentes. Para isto calcula-se $P(1|u_k)$, a probabilidade condicional de se obter 1 imediatamente após uma sequência específica u de k elementos.

Na figura 2.2, a série G foi construída utilizando-se os parâmetros $m=3$, $N=101$ e $S=2$. O lado esquerdo desta figura mostra o histograma da $P(1|u_k)$ para $k=m=3$ e o lado direito da mesma mostra para $m=3$ e $k=4$. É facilmente perceptível que para $k=m=3$ as probabilidades condicionais são todas iguais, mostrando assim que neste caso a série G não possui nenhuma previsibilidade com relação ao próximo

grupo que formará a minoria. Neste sentido, diz-se que o mercado é eficiente e nenhuma estratégia fazendo uso de memória menor ou igual a três obterá uma taxa de acerto maior do que 50%. Contudo G não é uma série aleatória, uma vez que na figura do lado direito percebe-se uma variação da $P(1|u_k)$, ou seja, há informação contida nesta sequência. Para distinguir outros conceitos de eficiência de mercado da propriedade descrita, diz-se que o sistema possui *eficiência de estratégia*.

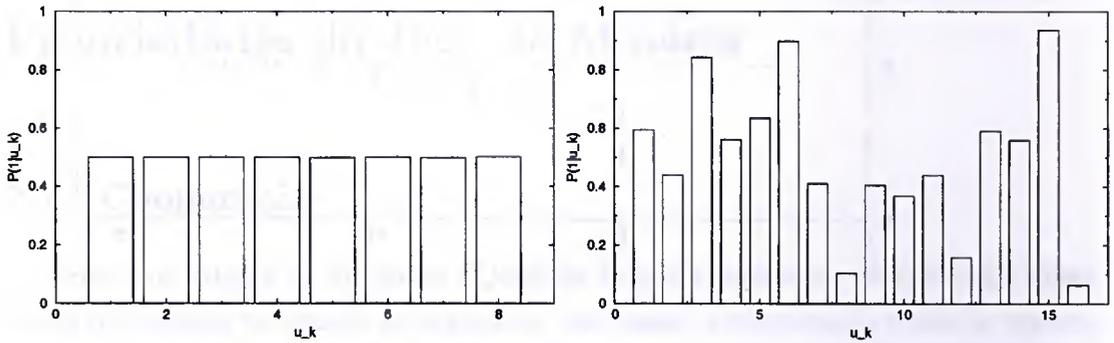


Figura 2.2: Lado Esquerdo-Histograma da $P(1|u_k)$ para $k = 3$ e série gerada com $m=3$. Lado Direito-Histograma da $P(1|u_k)$ para $k = 4$ e série gerada com $m=3$.

Repetindo-se a mesma análise para m maior ou igual a seis ($N=101$ e $S=2$) e $k = m$, observa-se na figura 2.3 um comportamento não constante do histograma. Neste caso, portanto, há informação significativa acessível aos agentes e o mercado não é eficiente neste sentido.

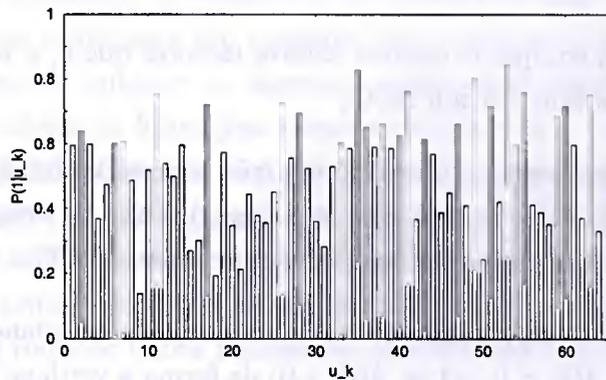


Figura 2.3: Histograma da $P(1|u_k)$ para $k=6$ e série gerada com $m=6$.

Com relação ao comportamento da curva $\sigma(m)$ em função de N , simulações para outros valores de N foram feitas e apresentaram um comportamento qualitativo igual ao da figura mostrada, sendo que a posição do m_c é proporcional ao $\ln N$ [16]. Este m_c está separando dois comportamento distintos, visto que, para $m < m_c$ σ é proporcional à N e para $m \geq m_c$ σ é proporcional à \sqrt{N} . Em [17] argumenta-

se utilizando uma descrição de campo médio que, em uma primeira aproximação, σ^2/N é função apenas do parâmetro $2^m/N$, denotado por α . Para uma melhor visualização desta constatação, construiu-se uma figura (2.4) de σ^2/N vs α , onde está representada a curva para diferentes valores de N . Em cada uma destas curvas variou-se apenas o parâmetro m de forma a varrer o eixo α . Nota-se que os dados estão todos contidos em uma mesma curva universal.

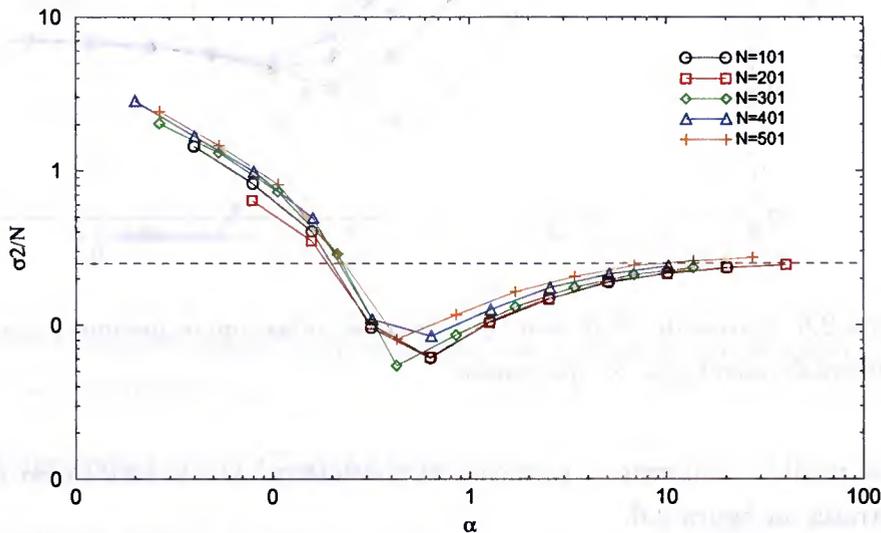


Figura 2.4: Curvas de σ^2/N vs α . Construiu-se a mesma curva para diferentes valores do parâmetro N e observou-se que todas caem em uma curva universal.

As análises feitas nesta seção foram realizadas com $S = 2$. Contudo foi verificado que o comportamento qualitativo para S 's maiores é igual, apesar de não tão marcante. Uma justificativa para este fato é apresentada na seção 2.4.1 deste trabalho. Apenas para ilustrar com o fato empírico, o comportamento em questão é mostrado na figura 2.5.

2.2 Transição de fase

Uma outra maneira de quantificar a informação contida na série temporal $A(t)$ foi proposta em [18]. Trata-se da chamada predictabilidade, que é definida por:

$$H = \frac{1}{2^m} \sum_{\nu=1}^{2^m} \langle \text{sgn}A(t) | \mu(t) = \nu \rangle^2 \tag{2.1}$$

Apesar da simetria do sistema com relação à média, baseando-se nos estudos apresentados na seção anterior, é esperado que exista uma mudança no comportamento

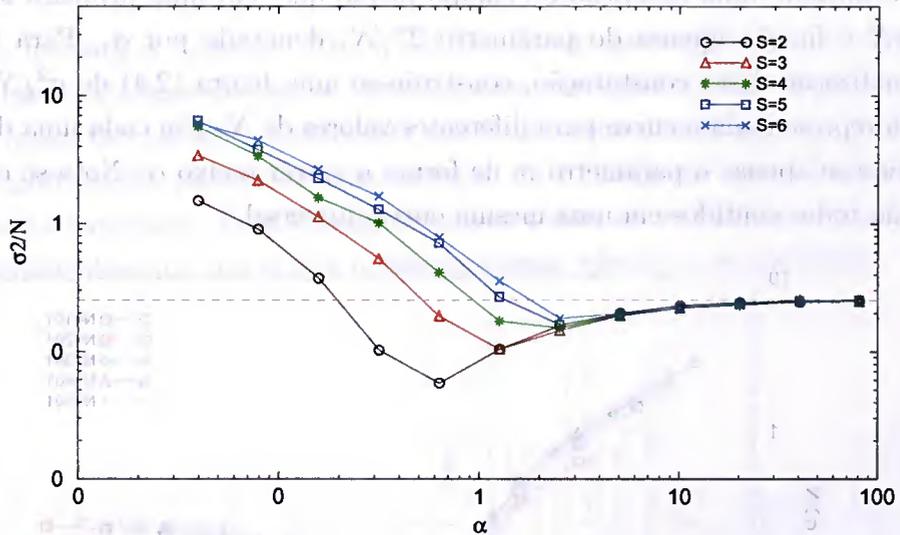


Figura 2.5: Curvas de σ^2/N vs α . Construiu-se todas com os mesmos parâmetros, exceto o número de estratégias S , que variou.

desta medida conforme a variação do parâmetro α . A verificação de tal fato é mostrada na figura 2.6.

Nesta, percebe-se claramente que $H = 0$ para $\alpha < \alpha_c \simeq 0.3$ e $H \neq 0$ para $\alpha > \alpha_c$. Devido a este fato, diz-se que o sistema passa por uma transição de fase em α_c . Esta transição separa uma fase simétrica ($\alpha < \alpha_c$) de uma assimétrica ($\alpha > \alpha_c$).

Além de medir a informação contida na série, pode-se interpretar H como uma maneira de medir a assimetria da resposta dos agentes à informação disponível a eles, ou seja, enquanto $H = 0$ toda a informação é tratada igualmente por todos os agentes ao passo que para $H \neq 0$ o sistema reage diferentemente à informação disponível.

As duas fases do sistema podem também serem chamadas de fases eficiente e ineficiente conforme o contexto considerado, ou seja, quando se considera o comportamento do sistema no que diz respeito à volatilidade a fase simétrica é dita ineficiente (sistema perde mais do que um RCG) ao passo que a fase assimétrica é dita eficiente (sistema perde menos do que um RCG), já quando se considera a informação contida na série, diz-se que na fase simétrica o sistema é eficiente ($H = 0$) e na fase assimétrica o sistema é ineficiente ($H \neq 0$, possibilidade de arbitragem).

Outro parâmetro que explica a transição de fase encontrada em $\alpha = \alpha_c$ é a fração de agentes ϕ que usam sempre a mesma estratégia ao longo do tempo. Em $\alpha < \alpha_c$ cada agente muda de estratégia ao menos uma vez durante o jogo enquanto que em $\alpha > \alpha_c$ existem agentes que mantêm sempre a mesma estratégia.

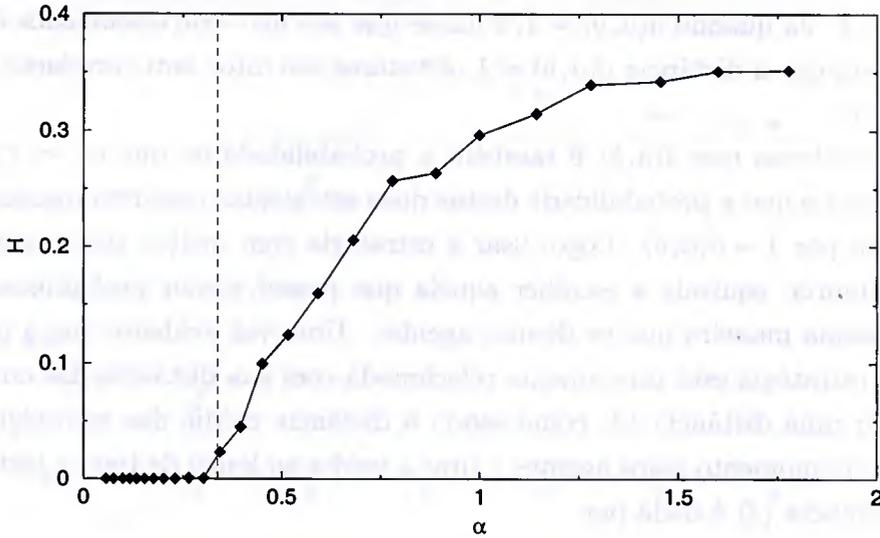


Figura 2.6: Comportamento de H de acordo com a variação do parâmetro α . A reta vertical tracejada marca o α_c .

2.3 Interpretação Geométrica

Na tentativa de explicar qualitativamente os motivos pelo qual o sistema passa por uma transição de fase e a universalidade em seu comportamento para diferentes números de agentes, estratégias e memória, buscou-se o entendimento do sistema através de uma interpretação geométrica.

Sabe-se que existem 2^{2^m} possíveis estratégias para o sistema e que cada agente busca utilizar a que seja o mais diferente possível das demais, logo, espera-se que os agentes sejam bastante distintos uns dos outros quando o número de estratégias permitidas em um jogo for muito maior do que o número de agentes, sendo que quando o número de agentes for muito maior do que o de estratégias esta diferenciação não mais ocorrerá na mesma proporção. Tal fato é intuitivo e leva a crer que o sistema passará por uma mudança de comportamento quando $N \sim 2^{2^m}$, todavia, as simulações demonstram que tal mudança ocorre em $N \sim 2^m$.

Conforme descrito em diversos trabalhos [19, 20], apesar de existirem 2^{2^m} estratégias possíveis, a dimensão do espaço no qual estas estão inseridas é 2^m . Cada estratégia é um vetor de 2^m bits e pertence a um hipercubo \mathcal{H}_P de dimensão P . A distância entre dois elementos pertencentes a este espaço é a chamada distância de Hamming: dados dois elementos a e b de \mathcal{H}_P , a distância entre eles é dada por

$$d(a, b) = \frac{1}{4P} \sum_{\mu=1}^P (a^\mu - b^\mu)^2 \tag{2.2}$$

No caso em que $d(a, b) = 0$ diz-se que a e b são totalmente correlacionados, isto

é, $a = b$. Já quando $d(a, b) = 1/2$ diz-se que são não-correlacionados e por fim, no caso em que a distância $d(a, b) = 1$ os vetores são ditos anti-correlacionados, isto é, $a = -b$.

Percebe-se que $d(a, b)$ é também a probabilidade de que $a^\mu = b^\mu$ para um μ qualquer e que a probabilidade destas duas estratégias reagirem da mesma maneira é dada por $1 - d(a, b)$. Logo, usar a estratégia com melhor pontuação, pela regra da minoria, equivale a escolher aquela que possui menor probabilidade de reagir da mesma maneira que os demais agentes. Uma vez evidente que a pontuação de cada estratégia está diretamente relacionada com sua distância das outras, convém definir uma distância $\langle d \rangle$ como sendo a distância média das estratégias utilizadas em cada momento pelos agentes e tirar a média ao longo de toda a história do jogo. A distância $\langle d \rangle$ é dada por

$$\langle d \rangle = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} \langle d(a_i, a_j) \rangle \quad (2.3)$$

Visto que grandes flutuações significam grandes perdas pelos agentes e que a distância entre as estratégias sendo utilizadas influenciam no ganho e na perda de recursos por estes, em [19] propôs-se uma expressão relacionando estas quantidades,

$$\frac{\sigma^2}{N} = 1 - 2(N-1) \left[\langle d \rangle - \frac{1}{2} \right]. \quad (2.4)$$

Esta relação fica evidente quando constrói-se o gráfico $\langle d \rangle$ versus m obtido por meio de simulações. Basta comparar o comportamento qualitativo na figura 2.7 com o da figura 2.1 para evidenciar o fato de que quanto maior a distância $\langle d \rangle$, menor será σ .

Uma outra interpretação para o comportamento do sistema que foi dada em [21, 22] definiu os chamados grupos *crowd* e *anti-crowds*. Trata-se basicamente de calcular a probabilidade de que cada um dos agentes esteja utilizando a k -ésima melhor estratégia (ou uma similar) e a probabilidade de que esteja utilizando a estratégia anti-correlacionada à anterior. Um grupo de agentes utilizando a k -ésima melhor, forma um *crowd* e o grupo utilizando a anti-correlacionada à k -ésima, forma o *anti-crowds*. Utilizando esta idéia foi possível montar uma expressão analítica que modela razoavelmente bem a curva da volatilidade e permitiu também uma outra explicação qualitativa para o problema: *i*) quando m é pequeno o número de agentes que possuem apenas estratégias mal pontuadas é também pequeno (uma vez que o número de estratégias possíveis é também pequeno), assim o efeito *crowds* é predominante nesta região e, por isso, a grande volatilidade ($\sigma^2/N \sim N$); *ii*) na região de m intermediário o número de estratégias possíveis é relativamente grande e assim ocorre de muitos agentes possuírem apenas estratégias perdedoras, formando

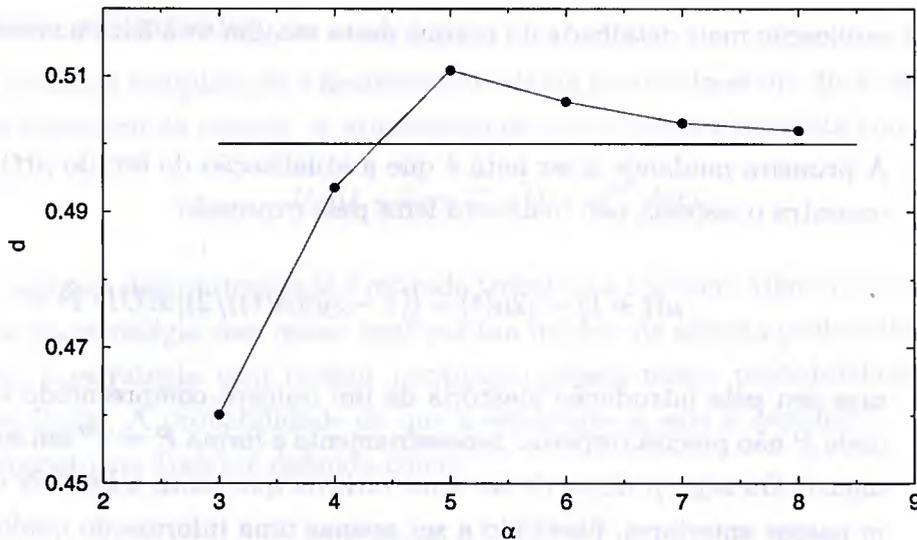


Figura 2.7: Curva de $\langle d \rangle$ vs α . A variação do parâmetro α foi obtida alterando o valor de N e mantendo $m = 5$ constante.

os grupos *anti-crowds*. Igualmente provável é a formação de grupos *crowds*, logo há a anulação do efeito de cada um deles e, portanto, baixa volatilidade ($\sigma^2/N \sim 0$); *iii*) quando m é grande a probabilidade de que diversos agentes utilizem as mesmas estratégias é pequena, logo não há formação de grupos *crowds* e *anti-crowds* e portanto os agentes agem independentemente uns dos outros fazendo com que o sistema comporte-se de maneira aleatória ($\sigma^2/N \sim 1$).

2.4 Abordagem Analítica

Na seção anterior, buscou-se apresentar as explicações qualitativas para o comportamento do modelo, contudo este sistema possui também um tratamento analítico. Para tratar esta abordagem serão antes necessárias algumas simplificações no modelo que não alterem o mesmo, mas que permitam uma resolução analítica para o problema. Em seguida, é demonstrada uma maneira de se obter uma expressão que fornece boa previsão para curva da volatilidade na região em que $\alpha > \alpha_c$. Alguns trabalhos [23] tratam do problema para $\alpha < \alpha_c$, porém tais complicações fogem dos objetivos desta dissertação .

2.4.1 Simplificações da dinâmica do jogo

As simplificações tratadas aqui visam facilitar o tratamento analítico sem alterar o modelo. Seguindo este objetivo, o problema será tratado utilizando-se $S = 2$, apesar de que a generalização do problema também levaria a soluções corretas.

Uma explicação mais detalhada do porquê desta escolha será feita no decorrer desta seção

1. A primeira mudança a ser feita é que a atualização do estado $\mu(t)$ em que se encontra o sistema não mais será feita pela expressão

$$\mu(t + 1) = [2\mu(t) + ((1 - \text{sgn}A(t))/2)] \text{MOD } P$$

mas sim pela introdução aleatória de um número compreendido entre 0 e P onde P não precisa respeitar necessariamente a forma $P = 2^m$ em sua definição inicial. Ou seja, μ deixa de ser uma variável que conta a história do jogo nos m passos anteriores, passando a ser apenas uma informação qualquer gerada para que o jogo reaja à ela e continue.

A motivação para esta mudança é baseada nos resultados do trabalho da referência [24]. Neste artigo mostra-se que o comportamento do sistema quando utilizando uma história exôgena é o mesmo de quando utilizando uma história endôgena ao jogo. Assim, a explicação para a estrutura encontrada neste modelo não pode ser compreendida na possibilidade de os agentes explorarem a informação na qual eles têm acesso para atingirem uma melhor coordenação. A descrição da transição de fase observada deve ser, portanto, baseada em considerações geométricas. Neste cenário, a importância do parâmetro m no entendimento do problema fica restrita à definição da dimensão do espaço das estratégias.

Na verdade, um estudo mais detalhado acerca do problema da memória foi feito em [25] e mostrou-se que algumas propriedades do sistema são perdidas na passagem da memória endôgena para exôgena, contudo, não se tratam de mudanças relevantes para o objetivo em questão e, portanto, mantem-se esta simplificação .

2. Apesar da simplicidade em que o jogo da minoria é apresentado, do ponto de vista matemático as descontinuidades existentes na atualização do *rank*

$$U_{i,s}(t + 1) = U_{i,s}(t) - a_{i,s}^{\mu(t)} \boxed{\text{sgn}[A(t)]}$$

e no método de escolha da estratégia a ser utilizada

$$s_i(t) = \max_{s=1, \dots, s} U_{i,s}(t)$$

devem ser removidas.

A primeira complicação é facilmente resolvida propondo-se um dinâmica linear na contagem de pontos. A atualização do *rank* pode ser reescrita como

$$U_{i,s}(t+1) = U_{i,s}(t) - a_{i,s}^{\mu(t)} A(t) \quad (2.5)$$

A segunda descontinuidade é retirada trocando a regra em vigor que é a utilização da estratégia com maior *rank* por um modelo de escolha probabilístico, em que a estratégia com melhor pontuação possui maior probabilidade de ser escolhida. A probabilidade de que a estratégia s_i seja a escolhida, conforme proposto em (refe), é definida como:

$$\pi_{i,s_i}(t) = \frac{e^{\Gamma U_{i,s_i}(t)}}{\sum_{s'_i} e^{\Gamma U_{i,s'_i}(t)}}, \quad (2.6)$$

onde Γ é o *inverso da temperatura*. Uma vez que o objetivo é a simplificação do problema, o acréscimo de variáveis parece não ser sensato, contudo o comportamento do jogo na fase assimétrica não é dependente de Γ , conforme será explicitado na próxima seção .

A coerência do modelo proposto fica evidente ao notar que no limite em que $\Gamma \rightarrow \infty$ a regra anterior de escolha da estratégia melhor pontuada é reestabelecido, uma vez que a expressão de $\pi_{i,s}$ pode ser reescrita como

$$\pi_{i,s_i}(t) = \frac{1}{1 + e^{-\Gamma \Delta U_i(t)}} \quad (2.7)$$

3. Por fim descreve-se não uma simplificação do sistema mas sim a construção de uma notação adequada para um melhor entendimento e resolução do mesmo.

Tendo em mente que para $S = 2$ as estratégias $s_i = 1, 2$ são denotadas por $s_i = -1, 1$. Uma vez que estas estratégias são criadas independentemente uma da outra, a probabilidade de as decisões estipuladas pelas duas serem a mesma, para uma determinada história μ , é $1/2$, logo, pode-se separar a decisão do agente i em uma parte constante ω_i^μ e uma componente variável ξ_i^μ , de forma que

$$a_{i,s}^\mu = \omega_i^\mu + s_i \xi_i^\mu \quad (2.8)$$

onde

$$\omega_i^\mu = \frac{1}{2}(a_{i,+}^\mu + a_{i,-}^\mu) \text{ e } \xi_i^\mu = \frac{1}{2}(a_{i,+}^\mu - a_{i,-}^\mu) \quad (2.9)$$

Evidentemente apenas uma das componentes será diferente de zero em cada instante.

Pode-se então reescrever o excesso de demanda $A(t)$ como uma parte constante e outra variável

$$A^{\mu(t)}(t) = \sum_{i=1}^N [\omega_i^{\mu} + s_i(t)\xi_i^{\mu}] = \Omega^{\mu(t)} + \sum_{i=1}^N s_i(t)\xi_i^{\mu} \quad (2.10)$$

Esta maneira de escrever o $A(t)$ permite um melhor entendimento do comportamento do sistema, uma vez que na fase simétrica o termo constante é nulo e na fase assimétrica, por existirem agentes que sempre utilizam a mesma estratégia, o termo constante é diferente de zero. A notação em questão explica também o motivo para utilizar preferencialmente $S = 2$ na abordagem analítica, pois, visto que, a probabilidade de as decisões estipuladas pelas diversas estratégias serem a mesma é dada por $1/(2^{S-1})$, para valores maiores de S a contribuição da componente constante seria menor e é por isso que, conforme citado na seção 2.1, a cooperação entre os agentes diminui na medida em que S aumenta. Além disso para $S > 2$ não seria possível a decomposição 2.8 e a análise descrita acima.

Levando-se em conta a primeira simplificação descrita, a predictabilidade H pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$H = \sum_{\mu} \rho^{\mu} \langle A | \mu \rangle^2 = \sum_{\mu} \rho^{\mu} \langle A \rangle^2 = \frac{1}{P} \sum_{\mu} (A^{\mu})^2 = \overline{\langle A \rangle^2} \quad (2.11)$$

onde $\rho^{\mu} = \frac{1}{P}$ e a barra superior representa a média em μ .

A variância por sua vez é apresentada como:

$$\sigma^2 = \overline{\langle A^2 \rangle} \quad (2.12)$$

Expandindo as expressões 2.11 e 2.12 e fazendo uso de 2.10, obtém-se uma relação entre as grandezas H e σ dada por*:

$$\frac{\sigma^2}{N} = \frac{H}{N} + \frac{1}{2}(1 - Q), \quad (2.13)$$

onde $Q = \sum_i \langle s_i \rangle^2 / N$ é a fração de agentes que nunca mudam de estratégia.

É conveniente também, para os cálculos que se seguem, escrever a média do excesso de demanda $A(t)$ apenas como

$$\begin{aligned} A^{\mu(t)}(t) &= \sum_{s_i} \sum_i a_{i,s_i}^{\mu} \pi_{i,s_i} = \sum_i a_{i,s_i}^{\mu} (\pi_{i,+s_i,+} + \pi_{i,-s_i,-}) \\ A^{\mu(t)}(t) &= \sum_i a_{i,s_i}^{\mu} (\pi_{i,+} - \pi_{i,-}) = \sum_i a_{i,s_i}^{\mu} m_i \end{aligned} \quad (2.14)$$

sendo que o termo m_i pode ser reescrito, utilizando a definição 2.6, como sendo $m_i = \tanh \Gamma U$ e assim $m \in [-1, 1]$.

*Este cálculo pode ser visto no apêndice A

2.4.2 Solução Exata

Mostrou-se anteriormente que para $\alpha > \alpha_c$ o sistema trabalha no sentido de maximizar a eficiência global do mesmo. A idéia de minimização de alguma variável é muito comum no contexto da mecânica estatística, contudo, no problema específico da dinâmica do jogo da minoria, qual seria esta variável?

Em [26] demonstra-se que o Jogo da Minoria com função de atualização de *rank* linear, possui uma dinâmica dos agentes que tende a minimizar a predictabilidade H . Tal fato é concluído a partir do seguinte raciocínio lógico.

Fazendo uso de argumentos termodinâmicos, deriva-se uma equação a tempo contínuo para a atualização do *rank* das estratégias, $U_{i,s}(t+1) = U_{i,s}(t) + \Delta U_{i,s}^{\mu(t)}(t, s)$, que é expressa da seguinte maneira:

$$\frac{dU_{i,s}}{d\tau} = \overline{\langle \Delta U_{i,s} \rangle} \quad (2.15)$$

onde o tempo é redefinido como $\tau = \frac{t}{P}$ e usam-se os limites $N, P \rightarrow \infty$ e o limite de tempo contínuo $d\tau \rightarrow 0$. As médias são em relação às distribuições $\bar{\pi}_j^t$ da estratégias e sobre ρ_μ de μ^\dagger .

O resultado acima é utilizado para mostrar que este jogo admite H como sendo a função Lyapunov do sistema. Para tanto, H tem que ser uma função positiva definida e possuir $\frac{dH}{d\tau} \leq 0$. Uma vez que H é escrito como $H = \frac{1}{P} \sum_\mu (A^\mu)^2$, a primeira exigência é satisfeita, pois esta expressão é quadrática e positiva definida. A segunda exigência é mostrada reecreando-se $\frac{dH}{d\tau}$ como

$$\frac{dH}{d\tau} = \sum_i \sum_s \frac{\partial H}{\partial \pi_{i,s}} \frac{\partial \pi_{i,s}}{\partial \tau}, \quad (2.16)$$

onde

$$\frac{\partial H}{\partial \pi_{i,s}} = 2 \sum_\mu \rho^\mu (A^\mu)^2 a_{i,s}^\mu = 2 \langle A^\mu a_{i,s}^\mu \rangle = -2 \overline{\langle \Delta U_{i,s} \rangle} = -2 \frac{dU_{i,s}}{d\tau}, \quad (2.17)$$

e, fazendo uso da definição de $\pi_{i,s}$ escrita em 2.6, tem-se que o segundo termo de 2.16 é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_{i,s}}{\partial \tau} &= \Gamma_i \pi_{i,s} \frac{dU_{i,s}}{d\tau} - \frac{\Gamma_i e^{\Gamma_i U_{i,s}(t)} \sum_{s'} e^{\Gamma_i U_{i,s'}(t)} dU_{i,s}}{(\sum_{s'} e^{\Gamma_i U_{i,s'}(t)})^2} \frac{dU_{i,s}}{d\tau} = \\ &= \Gamma_i \pi_{i,s} \left(\frac{dU_{i,s}}{d\tau} - \sum_{s'} \pi_{i,s'} \frac{dU_{i,s'}}{d\tau} \right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

[†] maiores informações sobre este procedimento são encontradas nas páginas 16 e 17 da referência citada.

Logo, a equação 2.16 pode ser rearranjada como:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{d\tau} &= \sum_i \sum_s \left(-2 \frac{dU_{i,s}}{d\tau}\right) \Gamma_i \pi_{i,s} \left(\frac{dU_{i,s}}{d\tau} - \sum_{s'} \pi_{i,s'} \frac{dU_{i,s'}}{d\tau}\right) = \\ &= -2 \sum_i \Gamma_i \left[\left(\sum_s \pi_{i,s} \left(\frac{dU_{i,s}}{d\tau}\right)^2\right) - \left(\sum_s \pi_{i,s} \frac{dU_{i,s}}{d\tau}\right)^2 \right] = -2 \sum_i \text{Var}\left(\frac{dU_i}{d\tau}\right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Uma vez que este termo é sempre negativo, a segunda condição para que H seja a função Lyapunov do sistema é satisfeita, ou seja, $\frac{dH}{d\tau} \leq 0$.

Considerando-se então, H como sendo a Hamiltoniana do sistema, para encontrar seu estado de mínima energia monta-se primeiramente sua função de partição, definida como

$$Z(\beta) = \text{Tr}_{m_i} e^{-\beta H}, \quad (2.20)$$

onde β é o inverso da temperatura.

Tendo a função de partição conhece-se também a energia livre $F = 1/\beta \ln Z$.

Busca-se então as propriedades genéricas obtidas em realizações do jogo no limite em que $N \rightarrow \infty$ e não a solução do problema para uma realização em particular, e por este motivo o objetivo a ser atingido é o cálculo de $\langle F \rangle = 1/(N\beta) \langle \ln Z \rangle_{\Xi}$, onde a média em $\Xi = \{a_{i,s}^{\mu}\}$ elimina a dependência de Z em Ξ .

Para o cálculo de $\langle \ln Z \rangle$ faz-se necessário a utilização do método de réplica (x_{bm}), que consiste na utilização da seguinte identidade

$$\langle \ln x \rangle = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\langle x^n \rangle - 1}{n} \quad \text{ou} \quad \langle \ln x \rangle = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \langle x^n \rangle \quad (2.21)$$

onde, no caso em questão $x = Z$. A idéia básica neste método é a replicação do mesmo sistema em n vezes. Trata-se de um método bastante controverso mas que foi de grande utilidade para os pesquisadores que trabalham com o Jogo da Minoria.

Logo, deve-se calcular $\langle Z^n \rangle$. Para o cálculo deste termo foi proposto (refe) a redução do mesmo em uma integral no espaço $n \times n$ de matrizes \hat{Q} e \hat{R} , isto é

$$\langle Z^n \rangle_{\Xi} \propto \int dQ dR e^{-\beta N n f(\hat{Q}, \hat{R})} \simeq e^{-\beta n N \text{extr}_{\hat{Q}, \hat{R}} f(\hat{Q}, \hat{R})}, \quad (2.22)$$

esta aproximação é válida quando $N \rightarrow \infty$, sendo que $\text{extr}_{\hat{Q}, \hat{R}}$ significa dizer que apenas os pontos que maximizam a função f contribuem significativamente neste cálculo.

Assim quando $N \rightarrow \infty$ e $n \rightarrow 0$, pode-se escrever

$$F = - \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{N n \beta} \ln \langle Z^n \rangle_{\Xi} \simeq - \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{N n \beta} \ln e^{-\beta n N \text{extr}_{\hat{Q}, \hat{R}} f(\hat{Q}, \hat{R})} = \lim_{n \rightarrow 0} \text{extr}_{\hat{Q}, \hat{R}} f(\hat{Q}, \hat{R}), \quad (2.23)$$

ou seja, calcular os pontos que maximizam a função f equivale a calcular os pontos que minimizam a função H , que é o objetivo. Para tanto, deve-se calcular f e as equações de ponto de sela $\frac{\partial f}{\partial X}$ onde X assume os valores Q e R .

Escreve-se então $\langle Z^n(\beta) \rangle$ substituindo-se a expressão para H , ou seja,

$$\langle Z^n(\beta) \rangle = \text{tr}_{m_i} \prod_{b=1}^n \langle e^{-\beta \frac{1}{P} \sum_{\mu} (A_b^{\mu})^2} \rangle_{\Xi}. \quad (2.24)$$

Seguindo o procedimento padrão neste tipo de problema [27], introduz-se a variável gaussiana z_b^{μ} . Em seguida fazendo uso de outra identidade é possível escrever $\langle Z^n(\beta) \rangle$ na forma proposta em 2.22, onde a energia livre $f(\hat{Q}, \hat{R})$ fica escrita da seguinte maneira

$$f(\hat{Q}, \hat{R}) = \frac{\alpha\beta}{2n} \sum_{b,d} R_{b,d} Q_{b,d} - \frac{1}{n\beta} \ln \text{tr}_m e^{\frac{\alpha\beta^2}{2} \sum_{b,d} R_{b,d} m_{i,b} m_{i,d}} - \frac{\alpha}{n\beta} \ln \langle e^{-\frac{\beta}{\alpha} \sum_{b,d} z_b z_d Q_{b,d}} \rangle_z \quad (2.25)$$

O cálculo de f é feito utilizando-se o *ansatz* de simetria de réplica, definido como

$$Q_{b,d}^* = q + (Q - q)\delta_{b,d}, \quad R_{b,d}^* = r + (R - r)\delta_{b,d}, \quad (2.26)$$

através do qual encontra-se

$$f(Q, R) = \frac{\alpha\beta}{2} [RQ - rq] - \frac{1}{\beta} (\ln \text{tr}_m e^{\beta V(z,m)})_z + \frac{\alpha}{2\beta} \ln \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} (Q - q) \right) + \frac{q}{2 \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} (Q - q) \right)}, \quad (2.27)$$

onde

$$V(z, m) = mz\sqrt{\alpha r} + \frac{\alpha\beta}{2} (R - r)m^2. \quad (2.28)$$

Os parâmetros Q, q, R e r são finalmente encontrados resolvendo as equações $\frac{\partial f}{\partial X} = 0$ sendo que $X = Q, R, q$ ou r .

Com um pouco mais de álgebra encontram-se as equações para H_c ,

$$H_c = \frac{1 + Q}{2(1 + \chi)^2} \quad (2.29)$$

onde $\chi = \frac{\beta(Q-q)}{\alpha}$, e por conseguinte, de acordo com 2.13,

$$\alpha_c = H_c + \frac{1}{2}(1 - Q). \quad (2.30)$$

Com esta expressão foi possível construir a figura 2.8 e mostrar que a curva analítica consegue prever o comportamento da curva gerada por simulação.

Os detalhes dos cálculo acima podem ser vistos nos apêndice B.

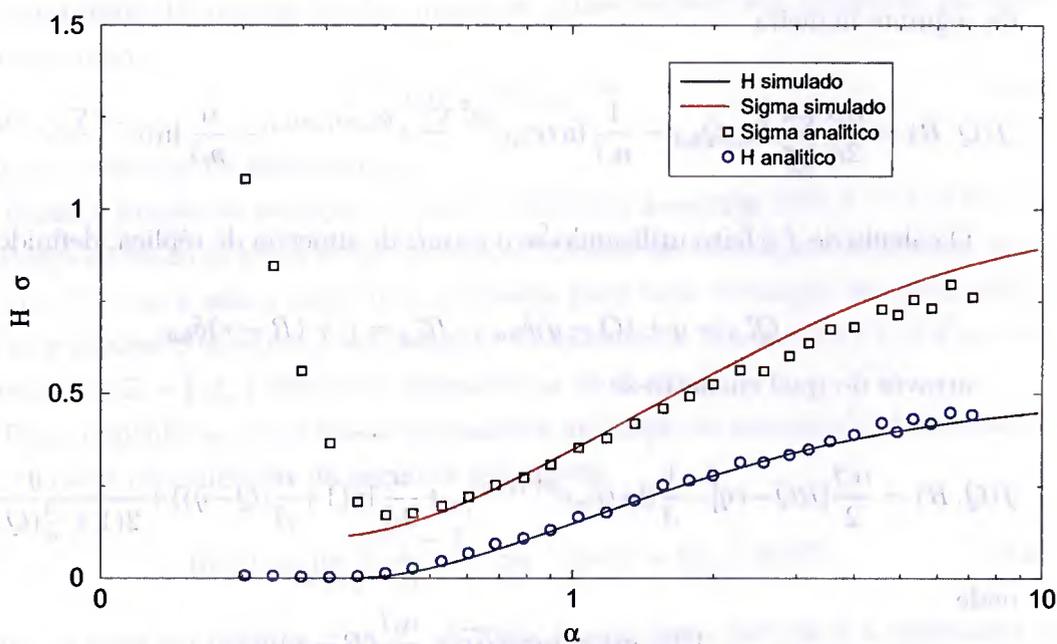


Figura 2.8: Ajuste analítico das curvas da variância e da predictabilidade em função do parâmetro α , para fase anti-simétrica do jogo.

Capítulo 3

Algoritmos Genéticos

A busca pela criação de vida artificial era o grande objetivo dos primeiros cientistas da computação (Alan Turing, John Von Neumann, Norbert Wiener e outros), que se mostravam tão interessados por questões técnicas de eletrônica como por biologia e psicologia. Foi através dos estudos destes pesquisadores que surgiram novas áreas de pesquisa, tais como, as redes neurais e os algoritmos evolucionários.

Os primeiros trabalhos sobre algoritmos evolucionários foram feitos nas décadas de 50 e 60 tendo como idéia básica que os mecanismos da evolução natural poderiam ser utilizados na resolução de problemas de engenharia. O esquema padrão utilizado era a criação de uma população de possíveis soluções para o problema e a evolução de seus indivíduos, feita através de operadores inspirados em variações genéticas naturais e na seleção natural.

Os algoritmos genéticos são um tipo de algoritmo evolucionário. Criado nas décadas de 60 e 70 por John Holland e seus alunos, tinham o objetivo de estudar o fenômeno da adaptação assim como ocorre na natureza. O algoritmo produzido conseguia resolver diversos problemas de uma maneira relativamente simples, assim como o que será tratado nos próximos capítulos desta dissertação.

3.1 Motivações biológicas

Um dos primeiros trabalhos a tratar sobre os mecanismos da evolução foi *Philosophie Zoologic*, escrito por Jean Baptiste Lamarck (1744-1829). Suas hipóteses, chamadas de *lamarckismo*, consistiam na defesa de duas premissas, a de que um ser vivo pode ter suas características modificadas durante a vida de acordo com a lei do uso e do desuso e a idéia de herança adquirida, segundo a qual as modificações pelas quais um indivíduo passa em vida podem ser transferidas para seus descendentes. Apesar de equivocado, Lamarck teve o mérito de perceber a importância da adaptação na explicação da evolução .

Em 1859, o inglês Charles Darwin publica o seu livro intitulado *A origem das espécies*. O *darwinismo*, como ficou conhecida sua teoria da evolução, abalou o modo de pensar vigente até então, uma vez que foi introduzido o conceito de mutabilidade ao acaso sem uma motivação divina ou filosófica, ou seja, o paradigma antigo de existência de um propósito para tudo estava sendo substituído por uma idéia mais simples e mecanicista.

Darwin, que possuía uma grande quantidade de dados coletados ao longo de suas viagens de navio, defende em seu livro que todos os organismos descendem de um ancestral em comum e também que o principal agente de modificação é a seleção natural. Os pontos fundamentais do darwinismo foram confirmados pela ciência contemporânea e serviram de base para a *teoria moderna da evolução*. Esta, fazendo uso da Genética, considera como principais fatores evolutivos a mutação gênica, a recombinação gênica e a seleção natural.

Para melhor entender os algoritmos genéticos faz-se necessária uma introdução da terminologia e conceitos utilizados pela Biologia no estudo da evolução.

3.1.1 Conceitos relevantes

Todos os organismos vivos consistem de células, e cada uma dessas possuem em seus núcleos um conjunto de *cromossomos*. Estes são filamentos formados por uma longa molécula de DNA e proteínas, onde as informações das características do indivíduo são guardadas. Cada característica é codificada em pequenos segmentos chamados *genes*. O lugar ocupado por um gene em um cromossomo é chamado de *locus* e as variações de um mesmo gene são chamadas de *alelos*.

A quantidade, o formato e o tamanho dos cromossomos variam entre as espécies. Ao conjunto de cromossomos dá-se o nome *genoma* enquanto que o termo *genótipo* refere-se ao conjunto dos genes contidos em um genoma. A manifestação das características determinadas por este genótipo recebe o nome de *fenótipo*.

As células que possuem seus cromossomos agrupados em pares são chamadas *diploides* e quando não emparelhados são chamadas *haploides*. A reprodução dos organismos ocorre através da união de duas células haploides, os gametas, um proveniente do pai e um da mãe, de modo a formar uma célula diploide, o *zigoto*, que dará origem a um novo ser da mesma espécie. O zigoto é portanto, a célula original diploide constituída por pares de *cromossomos homólogos*.

Na espécie humana, as células diploides possuem 23 pares de cromossomos cada. Todas as células do corpo de um organismo são formadas a partir de divisões, chamadas de *mitose*, da célula original. A mitose é um processo que gera duas células idênticas à célula-mãe, e por isso todas são diploides. Há contudo uma

exceção, os gametas, que são formados através de um outro tipo de divisão celular, a meiose, e possuem apenas 23 cromossomos cada (na espécie humana). A meiose é um processo em que uma célula diplóide passa por duas divisões consecutivas produzindo quatro células haplóides.

Durante a meiose, podem ocorrer dois eventos distintos que são de grande importância para a evolução das espécies:

Recombinação ou Crossover em um dado momento da meiose, segmentos de cromossomos homólogos podem ser trocados com os correspondentes de seus pares, ou seja, pode haver recombinação entre eles. Este processo pode ser melhor compreendido na figura 3.1.

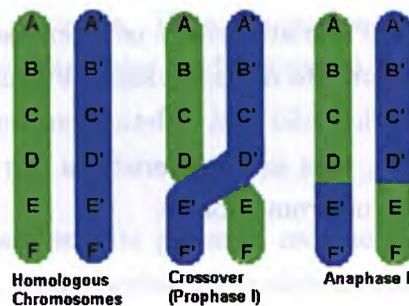


Figura 3.1: Ilustração do *crossover*

Mutação no decorrer da sucessivas divisões às quais a célula é submetida neste processo, podem ocorrer erros na cópia de um ou mais genes. Esses erros, que também podem ser induzidos por fatores externos (radiação não -ionizante e substâncias químicas), são as mutações. A figura ilustra um processo de mutação.

Esse tipo de reprodução gera indivíduos que podem ser mais ou menos bem adaptados do que seus pais ao ambiente em que vivem, de modo que, os mais bem adaptados terão maiores chances de viverem por mais longo tempo e reproduzirem em maior quantidade do que os menos adaptados. Este é o mecanismo da seleção natural, que perpetua os melhores cromossomos.

A evolução pode, portanto, ser considerada um método de busca em um enorme espaço de possíveis 'soluções', sendo esta busca feita em diversos organismos simultaneamente, uma vez que a evolução é uma mudança nas propriedades das populações que transcende o período de vida de um único indivíduo. Dessa forma

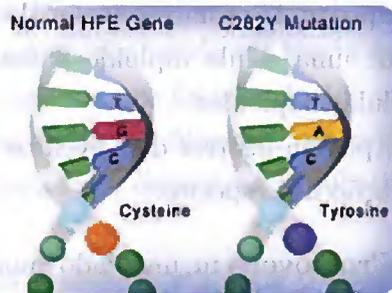


Figura 3.2: Ilustração de uma mutação. O cromossomo da direita representa uma mutação do cromossomo da esquerda.

a evolução é um processo que atua sobre os cromossomos dos indivíduos e não sobre os indivíduos propriamente ditos, ou seja, as transformações ocorridas com um organismo durante sua vida não será refletida em seu código genético, contanto, o inverso não é verdadeiro, pois as características dos seres vivos nada mais são do que a decodificação de seus cromossomos.

3.2 Modelo Básico

Na década de 70, Holland incorporou os princípios da genética na linguagem computacional, no intuito de resolver problemas complexos. No algoritmo genético criado, o termo cromossomo recebeu a interpretação de um possível candidato à solução do problema. Estes cromossomos são frequentemente tratados como vetores de elementos binários, onde cada elemento ou um grupo deles, correspondem à um gene na terminologia biológica. A noção de genótipo de um indivíduo é, portanto, a configuração dos bits em seu(s) cromossomo(s), contudo, no contexto do GA, não há uma analogia para o conceito de fenótipo de um indivíduo.

Com base na idéia da seleção natural, onde os mais bem adaptados são perpetuados, nos algoritmos genéticos cada indivíduo é avaliado pela função de adequação ou função *fitness*. Esta função é determinada de acordo com o problema a ser resolvido. A entrada para esta função é uma cadeia de bits (cromossomo de cada indivíduo) e a saída é um número real.

A escolha dos indivíduos que serão utilizados para reproduzirem é feita através de um processo de seleção. Existem diversos métodos de seleção sendo o mais popular deles* o *roulette wheel*, ou simplesmente método de seleção por roleta.

*método originalmente utilizado por Holland

A seleção por roleta consiste na criação de um círculo imaginário dividido em setores, onde cada setor representa um indivíduo. O tamanho do setor será proporcional ao grau de adaptabilidade de cada um, assim cada indivíduo ganha um setor de tamanho $2\pi \frac{f_i}{f_t}$, onde f_i é o *fitness* da cada um e f_t é a soma de todos os *fitness*. A sistematização deste processo ocorre da seguinte maneira: i) Gera-se um número aleatório q no intervalo de 0 a 2π . ii) Somam-se os valores correspondentes ao tamanho de cada setor, sendo que o processo de soma deve parar quando o valor q for ultrapassado. iii) O indivíduo correspondente ao último termo somado é o selecionado.

Este processo deve ser repetido duas vezes para a obtenção de dois pais.

A reprodução também sofre a ação dos operadores recombinação e mutação análogos aos utilizados na natureza. Uma vez que os indivíduos no GA possuem, geralmente, apenas 'células' haplóides, cada processo de reprodução entre dois indivíduos gera dois filhos.

Recombinação ou Crossover este processo escolhe aleatoriamente um *locus* do cromossomo[†]. Neste ponto ambos os cromossomos (um proveniente de cada pai) são quebrados e subsequências são trocadas entre os dois. Por exemplo, as sequências (indivíduo A) 1100000 e (indivíduo B) 0101111 poderiam fazer uma recombinação a partir do terceiro bit e produzirem os filhos 1101111 e 0100000, ou seja, a primeira parte de A foi ligada à segunda parte de B e a primeira parte de B ligada à segunda parte de A.

Assim como no caso real, este processo ocorre com uma certa probabilidade p_c . O valor de p_c é determinado no início do programa, logo, toda vez que ocorrer uma reprodução, gera-se um número aleatório entre 0 e 1, de forma que se este for menor que p_m o processo de recombinação ocorre e do contrário, não ocorre.

Mutação este processo altera aleatoriamente um ou mais bits dos cromossomos dos filhos. Para isto o operador percorre os dois cromossomos bit por bit e com probabilidade p_m altera o valor do mesmo. A probabilidade p_m é usualmente muito baixa, de modo que são poucos os bits afetados pela mutação. Um exemplo seria o indivíduo 1101111 sofrer mutação em seu quinto bit e torna-se 1101011.

[†] existem também versões multi-ponto, onde mais de um *locus* são trocados

3.2.1 O Algoritmo

Existem inúmeras maneiras de se implementar um GA, uma delas, o algoritmo básico descrito por Holland, pode ser descrito da seguinte maneira:

1. Criação de uma população de N indivíduos, com cromossomos gerados aleatoriamente.
2. Cálculo do *fitness* f_n de cada um dos cromossomos gerados.
3. Este passo deve ser repetido até que N novos cromossomos sejam criados:
 - Seleção de dois indivíduos da população .
 - Aplicação do operador crossover com probabilidade p_c de atuação. A não ocorrência de recombinação corresponde à criação de dois indivíduos que são cópias de seus pais.
 - Aplicação do operador mutação, em cada um dos dois novos cromossomos gerados, com probabilidade p_m de atuação .

Se N for ímpar, descarte de um novo membro aleatoriamente.

4. Substituição da população atual pela nova.
5. Se a solução ideal foi encontrada ou, se o critério de parada foi alcançado, término do programa. Caso contrário, retorno ao passo 2.

Cada iteração deste processo é chamada de geração. Um possível critério de parada pode ser o estabelecimento de um número máximo de gerações .

3.3 Teorema do Esquema

Em seu livro, Holland, buscando criar um modelo matemático que explicasse a eficiência do algoritmo, formulou o Teorema do Esquema.

O *esquema* é um padrão capaz de representar um subconjunto das possíveis soluções do problema. No caso em questão, onde os cromossomos (possíveis soluções) são cadeias binárias de caracteres 0 e 1, um esquema é uma cadeia formada pelo alfabeto $A=\{ 0,1,*\}$. O símbolo * denota a possibilidade de o gene poder assumir tanto o valor 0 como o 1.

Como exemplo de esquema, 10^* representa os cromossomos 101 e 100. O indivíduo 101 pode também ser representado por outros 2^3 esquemas: $***$, $**1$, $*01$, $1**$, $1*1$, $*0*$, $*01$ e $1*1$.

O comprimento δ de um esquema é definido como sendo a distância entre o primeiro e o último caractere não asterisco do esquema, assim, para os esquemas $H_1=1^{***}0$, $H_2=^{**}11^*$ e $H_3=1^*0^*1$, os comprimentos são $\delta_1 = 4$, $\delta_2 = 1$ e $\delta_3 = 4$.

A ordem de um esquema H , $o(H)$, é o número de caracteres não asterisco presentes no mesmo. Assim, para os esquemas H_1 , H_2 e H_3 citados acima, $o(H_1) = 2$, $o(H_2) = 2$ e $o(H_3) = 3$.

Busca-se entender o comportamento do algoritmo através da evolução do número de indivíduos que representam um esquema, ao longo do tempo.

3.3.1 Efeito da Seleção

O número de representantes de um esquema H em uma população $P(t)$ no instante t é identificado por $m(H, t)$. O fitness médio destes representantes de H em $P(t)$ é $f(H)$.

Utilizando-se o método de seleção por roleta, a probabilidade de selecionar um dado cromossomo é $f_n / \sum_j f_j$. Logo, para cada representante h_i de H , no instante $t + 1$, haverá $Np_{h_i} = N \frac{f_{h_i}}{\sum_j f_j}$ cópias em $P(t + 1)$.

Assim,

$$m(H, t + 1) = N \frac{f_{h_1}}{\sum_j f_j} + N \frac{f_{h_2}}{\sum_j f_j} + \dots + N \frac{f_{h_k}}{\sum_j f_j} \quad (3.1)$$

onde supõe-se k representantes de H em $P(t)$.

Então ,

$$m(H, t + 1) = N \frac{f_{h_1} + f_{h_2} + \dots + f_{h_k}}{\sum_j f_j} = N \frac{m(H, t) f_{h_1} + f_{h_2} + \dots + f_{h_k}}{m(H, t) \sum_j f_j} =$$

$$m(H, t + 1) = Nm(H, t) \frac{f_{h_1} + f_{h_2} + \dots + f_{h_k}}{m(H, t)} \frac{1}{\sum_j f_j} = Nm(H, t) \frac{f(H)}{\sum_j f_j}$$

Uma vez que $\bar{f} = \frac{\sum_j f_j}{N}$, pode-se escrever a última expressão como:

$$m(H, t + 1) = m(H, t) \frac{f(H)}{\bar{f}} \quad (3.2)$$

ou seja, o crescimento ou decaimento do número de representantes de um esquema é dado de acordo com a média dos mesmos.

Assumindo que um esquema H mantém-se acima da média total em uma quantia de $c\bar{f}$, onde c é uma constante, então ,

$$m(H, t + 1) = m(H, t) \frac{\bar{f} + c\bar{f}}{\bar{f}} = (1 + c)m(H, t)$$

Começando em $t = 0$ e assumindo c estacionário, obtém-se:

$$m(H, 0) = m(H, t)(1 + c)^t \quad (3.3)$$

o que se trata de uma progressão geométrica, e portanto,

Lema 3.1 *A seleção garante crescimento (decréscimo) exponencial aos representantes de um esquema com fitness acima (abaixo) da média da população .*

3.3.2 Efeito da Recombinação

Apesar de promover o crescimento e decréscimo dos bons e dos maus esquemas, a seleção não é capaz de explorar diversas regiões do espaço de busca sem a contribuição do operador recombinação .

Como ilustração do impacto do *crossover*, define-se o indivíduo $I = 1001001$ e os esquemas $H_1 = *0***1$ e $H_2 = **10**$ que esto contidos em I . Supondo que I tenha sido selecionado para reproduzir e que sorteou-se o ponto de quebra para *crossover* entre os genes 3 e 4, percebe-se facilmente que, caso o parceiro de I não seja idêntico ao próprio, o esquema H_1 será quebrado e o H_2 continuará sendo representado. Vizualizando-se graficamente:

$$I = 100 - 1001$$

$$H_1 = *0* - ***1$$

$$H_2 = *** - 10**$$

Intuitivamente, a probabilidade de H_1 ser quebrado é maior do que a de H_2 , uma vez que o número de possíveis pontos de quebra entre os genes fixos de H_1 é maior do que de H_2 , logo, conclue-se que a influência do operador *crossover* no esquema está intimamente ligada ao comprimento do mesmo.

Uma vez que existem $L - 1$ possíveis pontos de quebra para *crossover* em cromossomos de tamanho L , então, a probabilidade de um esquema H ser quebrado é dada por:

$$P(H \text{ ser quebrado }) = \frac{\delta(H)}{L - 1} \quad (3.4)$$

Deve-se, contudo, levar em consideração que um esquema também pode ser mantido caso este esteja contido no indivíduo sorteado para ser parceiro de I . A probabilidade de tal ocorrência é dada pela probabilidade de algum cromossomo conter H ,

$$P(\text{parceiro conter } H) = \frac{\text{número de cromossomos que contêm } H}{\text{número total de cromossomos}} =$$

$$= m(H, t) \frac{f(H)}{N\bar{f}} \quad (3.5)$$

Logo, a equação 3.4 deve ser reescrita como:

$$\begin{aligned} P(\text{H ser quebrado}) &= \frac{\delta(H)}{L-1} P(\text{parceiro NAO conter H}) = \\ &= \frac{\delta(H)}{L-1} (1 - P(\text{parceiro conter H})) = \\ &= \frac{\delta(H)}{L-1} (1 - m(H, t) \frac{f(H)}{N\bar{f}}) \end{aligned}$$

Porém existe também a possibilidade de o esquema H ser formado a partir de 2 cromossomos que não contêm H , logo deve-se reescrever a equação acima como:

$$P(\text{H ser quebrado}) \leq \frac{\delta(H)}{L-1} (1 - m(H, t) \frac{f(H)}{N\bar{f}}) \quad (3.6)$$

Considerou-se até o momento que todos os pares de cromossomos selecionados para reprodução sofrem recombinação, contudo, levando-se em conta que a probabilidade desta ocorrer é p_c , conclui-se que a probabilidade de um esquema ser quebrado é:

$$P(\text{H ser quebrado}) \leq p_c \frac{\delta(H)}{L-1} (1 - m(H, t) \frac{f(H)}{N\bar{f}}) \quad (3.7)$$

Segue-se então, que a probabilidade de um esquema H manter-se inalterado apesar da ação do *crossover* é

$$P(\text{H inalterado}) \geq 1 - p_c \frac{\delta(H)}{L-1} (1 - m(H, t) \frac{f(H)}{N\bar{f}}) \quad (3.8)$$

E finalmente, o número de representantes de um esquema H após as operações de seleção e recombinação, é:

$$m(H, t+1) \geq m(H, t) \frac{f(H)}{\bar{f}} (1 - p_c \frac{\delta(H)}{L-1} (1 - m(H, t) \frac{f(H)}{N\bar{f}})) \quad (3.9)$$

Desta análise obtém-se:

Lema 3.2 *Um esquema propaga-se a uma taxa exponencial somente se possuir um pequeno comprimento e um fitness superior ao da média da população.*

3.3.3 Efeito da Mutação

O operador mutação é aplicado a todos os bits de todos indivíduos envolvidos na reprodução com probabilidade $p_m \ll 1$.

Dizer que um esquema H manteve-se inalterado pela ação da mutação, equivale a dizer que a ordem de H , $o(H)$, não foi mudada. A probabilidade de que cada bit não seja alterado é $1 - p_m$, assim:

$$P(\text{H inalterado}) = (1 - p_m)^{o(H)} \simeq 1 - (p_m)^{o(H)} \quad (3.10)$$

onde na segunda passagem utilizou-se o fato de p_m ser pequeno para utilizar uma aproximação de Taylor de primeira ordem.

Desta análise conclui-se:

Lema 3.3 *Esquemas de ordem elevada possuem maior probabilidade de serem afetados pela ação da mutação.*

3.3.4 Teorema

Resumindo os resultados descritos nas seções anteriores:

Teorema 3.1 *Seja H um esquema. Seja $m(H, t)$ o número de representantes deste esquema na população $P(t)$ no instante t . Finalmente, seja p_c e p_m as probabilidades de ocorrerem crossover e mutação, respectivamente. Então, o número esperado de representantes de H na próxima geração após a ação da seleção, crossover e mutação é:*

$$m(H, t + 1) \geq m(H, t) \frac{f(H)}{\bar{f}} \left(1 - p_c \frac{\delta(H)}{L - 1} \left(1 - m(H, t) \frac{f(H)}{N\bar{f}}\right)\right) (1 - p_m)^{o(H)} \quad (3.11)$$

Ou seja, esquema pequenos, de baixa ordem e *fitness* acima da média crescem exponencialmente em gerações subsequentes.[‡]

[‡]Maiores informações sobre os assuntos tratados neste capítulo, podem ser obtidas nas referências [28, 29, 30].

Capítulo 4

O Jogo da Minoria e o Mercado Financeiro

Conforme apresentado nos primeiros capítulos, apesar de se tratar de um modelo intrigante e interessante, o Jogo da Minoria padrão relaciona-se com o mercado financeiro de maneira apenas metafórica. O primeiro avanço no sentido de relacionar este modelo mais diretamente com a realidade foi alcançado através de modificações feitas no jogo original, são os modelos grande canônicos. Estes permitiram a geração de séries que reproduziam propriedades encontradas nas séries reais de mercado.

Mais recentemente surgiram publicações [31, 32] relatando a possibilidade de se utilizar o jogo da minoria para modelar e prever séries que foram geradas pelo mesmo. Estes artigos relatam também testes realizados com séries financeiras que obtiveram sucesso.

No presente capítulo são apresentados alguns resultados que relacionam o Jogo da Minoria e o Mercado Financeiro.

4.1 Fatos Estilizados

Nos últimos anos, devido à grande quantidade de dados financeiros aos quais os pesquisadores passaram a ter acesso, foram inúmeros os trabalhos publicados [33, 34] que tratam dos estudos das propriedades estatísticas de séries financeiras. Algumas destas propriedades foram encontradas em diversos instrumentos e a partir de pesquisas independentes, logo, receberam a classificação de *fatos estilizados*. Como consequência destes estudos, houve o surgimento de modelos de mercado que buscavam reproduzir e entender o motivo pelo qual ocorriam tais propriedades. Dentre estes modelos estão os baseados em agentes, como o Jogo da Minoria e variações. Estes, conforme descrito em diferentes trabalhos [12], em determinadas condições, reproduzem alguns dos fatos estilizados:

4.1.1 Ausência de autocorrelação linear

A função de autocorrelação é definida por:

$$\rho_\tau = \frac{\langle (r_t - \mu)(r_{t+\tau} - \mu) \rangle}{\sqrt{(r_t - \mu)^2 (r_{t+\tau} - \mu)^2}} \quad (4.1)$$

A ausência de uma correlação linear significativa em séries de retorno é um fato já bastante explorado pela literatura. Esta informação garante um suporte empírico para modelos que supõem que os retornos são variáveis aleatórias e independentes.

Assim como no mercado real [11, 35], as séries geradas pelo Jogo da Minoria apresentam um decaimento da função de autocorrelação igualmente rápido.

A figura 4.1 mostra o comportamento desta função para uma série de retorno do índice ibovespa e para uma série gerada pelo jogo.

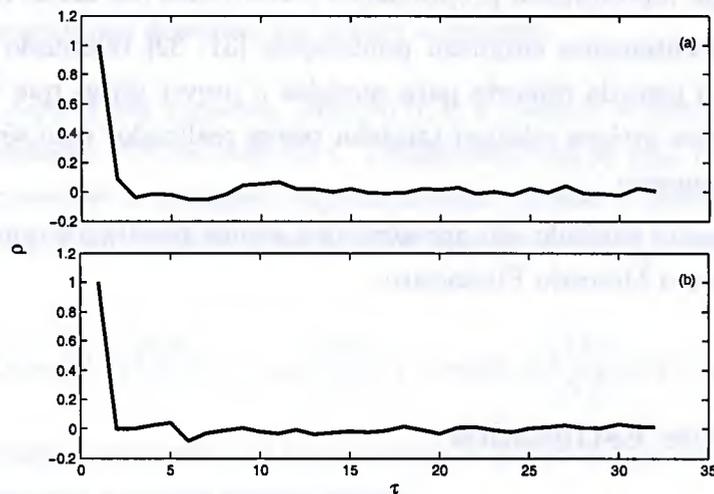


Figura 4.1: A figura (a) mostra o comportamento da função de autocorrelação para uma série de retorno do índice ibovespa. A figura (b) apresenta o comportamento desta mesma função aplicada à uma série gerada pelo Jogo da Minoria Grande Canônico.

O valor de τ no qual a função de autocorrelação assume o valor de $1/e$ pela primeira vez, é chamado de tempo de autocorrelação. O tempo de autocorrelação para a série do ibovespa considerada é de 0.69 e para a série gerada pelo jogo é de 0.64.

4.1.2 Clusters de Volatilidade

Trata-se de um fato estilizado bastante conhecido e que pode ser detectado simplesmente através de uma inspeção visual da série de retorno analisada. Para demonstrar tal fato, na figura 4.2 que corresponde à série de retorno do preço diário de fechamento do índice ibovespa no período de 02/93 à 05/04, verifica-se claramente regiões de grande volatilidade.

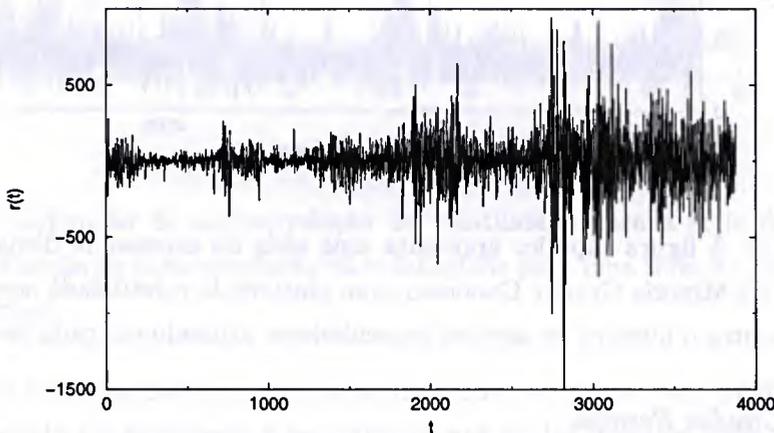


Figura 4.2: Série de retorno do índice ibovespa no período de 02/93 à 05/04.

A verificação deste fenômeno no Jogo da Minoria é apresentada na figura 4.3. A construção desta foi realizada utilizando-se o modelo grande canônico na versão 1, conforme intitulado no primeiro capítulo. Utilizou-se $N = 403$, $N_p = 141$, $m = 3$ e $\epsilon = 0.01$. Percebe-se claramente que as regiões de clusters de volatilidade presentes na série do excesso de demanda $A(t)$ (representa o retorno), correspondem também à regiões de volatilidade do volume.

Estudos empíricos da autocorrelação da volatilidade (a volatilidade está sendo definida como valor absoluto do retorno) mostram que esta apresenta um decaimento tipicamente na forma $\tau^{-0.3}$, para séries reais. Tal comportamento é também encontrado nas séries geradas pelo modelo em questão.

A figura 4.4 apresenta o comportamento desta correlação para a série do ibovespa e para a série gerada pelo jogo. Os valores encontrados para os expoentes foram de 0.23 e 0.18, respectivamente, e para os tempos de autocorrelação foram de 0.90 e 0.75.

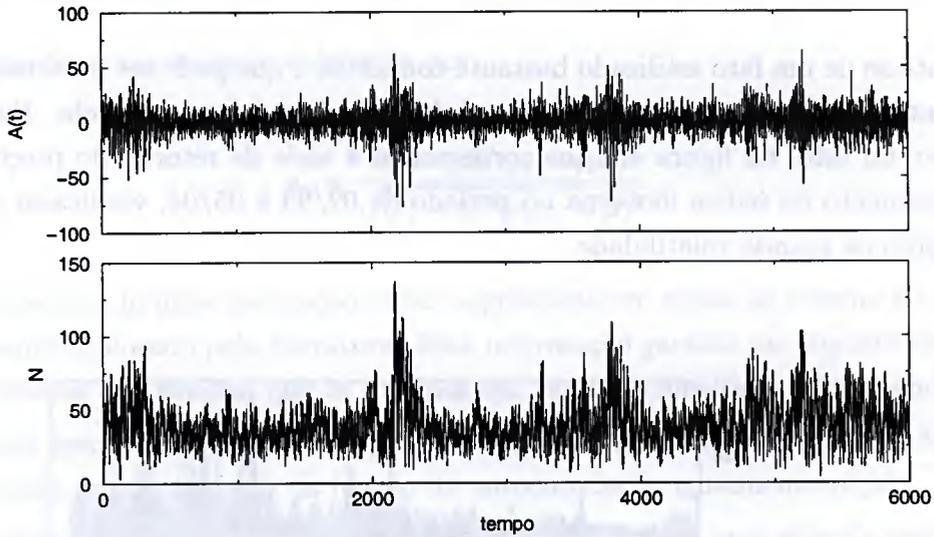


Figura 4.3: A figura superior apresenta uma série do excesso de demanda $A(t)$, gerada pelo Jogo da Minoria Grande Canônico, com clusters de volatilidade acentuados. A figura inferior mostra o número de agentes especuladores atuando em cada momento.

4.1.3 Caudas Pesadas

As distribuições de probabilidade das séries reais de retorno apresentam comportamento distinto ao de uma distribuição normal. Tal fato foi evidenciado na década de 60 por Mandelbrot [36].

Uma maneira de quantificar o desvio de uma pdf em relação à normal é obtido calculando-se a *kurtosis* da distribuição analisada. Este cálculo é dado por:

$$\kappa = \frac{\langle (r - \langle r \rangle)^4 \rangle}{\sigma^4} - 3. \quad (4.2)$$

A kurtosis é definida de tal forma que $\kappa = 0$ para uma distribuição Gaussiana e valores positivos de κ indicam “cauda gorda”, ou seja, o decaimento da pdf é mais lento do que na Gaussiana.

Assim como nos dados reais, foi possível encontrar séries geradas pelo jogo que possuíam kurtosis positiva. A série do ibovespa apresentou $\kappa = 9.99$ e a série do jogo $\kappa = 2.7$.

Outra medida utilizada para caracterizar a distribuição é a *skewness*, que caracteriza o grau de assimetria em relação à média. É definida por:

$$s\kappa = \frac{\langle (r - \langle r \rangle)^3 \rangle}{\sigma^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.3)$$

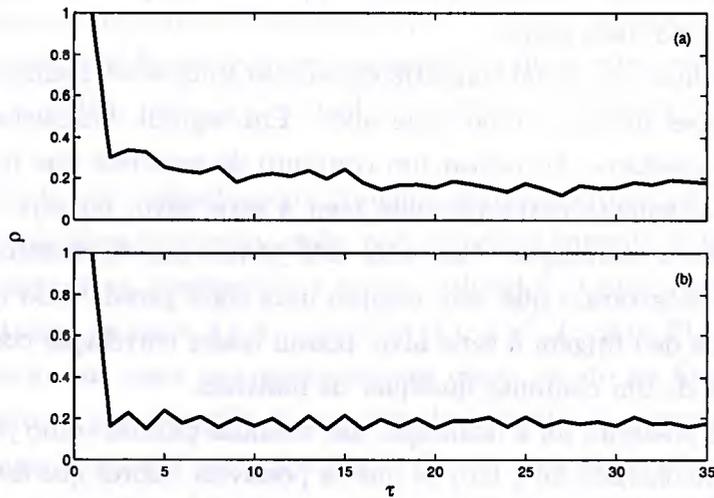


Figura 4.4: (a) Função de autocorrelação da volatilidade para a série de retornos do ibovespa. (b) Função de autocorrelação da volatilidade para uma série do Jogo da Minoria Grande Canônico.

Os valores tipicamente encontrados no mercado são negativos e próximos de zero. Esta propriedade foi verificada e encontrada nos dados gerados pelo jogo. A série do ibovespa apresentou $s\kappa = -0.6$ e a série do jogo $s\kappa = -0.22$.

Deve-se ressaltar que a obtenção dos fatos estilizados em séries geradas pelo Jogo da Minoria depende dos parâmetros utilizados e das condições iniciais, sendo que estas propriedades são encontradas na região simétrica do sistema.

Um fato interessante é que a análise de diferentes séries temporais geradas pelo jogo utilizando-se sempre as mesmas matrizes estratégias, mostrou que todas as séries possuíam valores bem definidos para algumas medidas, ao passo que quando modificadas as matrizes estratégias, apesar de mantidos os mesmos parâmetros, estas medidas deixaram de possuir valores bem definidos. As medidas que apresentaram este comportamento foram o tempo de autocorrelação, a kurtosis, a skewness e a variância.

4.2 Modelagem e Previsão

Baseando-se na informação de que as séries geradas pelo mesmo conjunto de matrizes estratégia (na região simétrica) possuem algumas características em comum, tais como as citadas acima e a distribuição, tentou-se criar um método para determinar,

a partir da medição destes valores, um possível conjunto de matrizes capazes de reproduzir uma dada série.

O procedimento inicial consistia em adotar uma série, conhecidos os parâmetros e as condições iniciais, como série alvo. Em seguida buscava-se, fazendo uso de algoritmos genéticos, encontrar um conjunto de matrizes que fosse capaz de gerar uma série altamente correlacionada com a série alvo, ou seja, o *fitness* utilizado na busca era a correlação. Contudo, este *fitness* não se mostrou eficiente e testes posteriores mostraram que nem sempre uma série gerada pelo mesmo conjunto de matrizes que deu origem à série alvo, possui maior correlação com esta do que uma série obtida de um conjunto qualquer de matrizes.

O passo posterior foi a utilização das medidas citadas como *fitness*. Neste caso o problema encontrado foi o fato de que os possíveis valores que estas medidas podem assumir são muito próximos uns dos outros, de forma que não é unívoca a relação entre o valor encontrado para um certa grandeza na análise de uma série e o conjunto de matrizes que geraram a mesma

A motivação para estes procedimentos é o fato de que se fosse possível encontrar um conjunto de matrizes bem definido que pudesse ter dado origem a uma determinada série (por exemplo, a *ibovespa*), então seria possível gerar um grande número de séries possuindo a mesma estatística da alvo, e assim, buscar uma maneira de precificar uma série financeira. Para tanto seria necessário a utilização de um método de precificação que não exigisse um comportamento gaussiano dos retornos, enfim, um outro desafio.

A utilização do Jogo da Minoria como um gerador de trajetórias de preços e a utilização destas no cálculo do prêmio de uma opção é um problema de difícil elaboração e pouco explorado. Durante a elaboração deste trabalho alguns avanços foram feitos neste sentido, como o de perceber que é possível controlar a tendência de uma série gerada pelo jogo e o fato de que estas séries possuem uma estatística dependente do conjunto de matrizes que as geraram.

A abordagem descrita até este ponto foi toda realizada utilizando o modelo grande canônico na versão 1, conforme intitulado no primeiro capítulo. Uma outra maneira de relacionar este jogo com o mercado real foi proposta [31] por um grupo de Oxford. Na trabalho citado utilizou-se a versão 2 do modelo grande canônico.

Neste caso supõe-se que um fenômeno físico pode ser descrito por um modelo multiagentes utilizando um conjunto de parâmetros m , N , T , τ e S desconhecidos. Pretende-se encontrar estes parâmetros, e para tanto, faz-se uma busca no espaço dos parâmetros no intuito de encontrar o conjunto capaz de produzir séries altamente correlacionadas com a série alvo. As condições iniciais, tais como as matrizes estratégias utilizadas, pouco influenciam nesta versão do jogo.

4.2.1 Busca dos Parâmetros

Inicialmente gera-se uma série utilizando o próprio modelo e conhecendo os parâmetros utilizados. O método de busca deve ser capaz de encontrar estes valores. Os valores utilizados são $N = 101$, $m = 3$, $\tau = 0.53$, $T = 100$ e $S = 2$, e a série possui 5000 pontos.

O método de busca utilizado neste trabalho foi o algoritmo genético. São criados 150 indivíduos aleatoriamente, onde, por indivíduo entende-se um conjunto de vetores que codificam os parâmetros a serem utilizados. Cada indivíduo pode ter entre 2 e 5 matrizes, m entre 2 e 9, τ entre 0.47 e 0.55, T entre 20 e 275 e N entre 100 e 1123, sendo que cada um destes valores estão escrito na forma binária, ou seja, o parâmetro m , por exemplo, é um vetor de tamanho 3, o que significa que em cada uma de suas 3 casas é inscrito o dígito 0 ou 1 com igual probabilidade, logo ao transformar este número binário em decimal este parâmetro poderá assumir 2^3 números decimais, no caso um valor entre 2 e 9. Evidentemente a região de busca poderia ser modificada.

Para cada um destes indivíduos roda-se um jogo e calcula-se a correlação da série originada deste com a série alvo. O valor da correlação é o *fitness* do indivíduo em questão.

Em seguida faz-se a escolha de dois indivíduos para reprodução. Esta escolha é feita pelo método descrito no capítulo 3. Cria-se um indivíduo cópia do pai e o submete aos processos de crossing over com a mãe e de mutação. Estes processos ocorrem com probabilidade $p_c = 0.7$ e $p_m = 0.08$, respectivamente, sendo que ocorrem para cada um dos vetores que correspondem aos parâmetros que definem um indivíduo. Este processo é repetido até que sejam criados 150 novos indivíduos. Estes substituem, então, a população anterior e são utilizados na criação de uma nova geração. O programa continua até que sejam criadas 100 novas gerações, quando o indivíduo de melhor *fitness* da última geração revela os parâmetros procurados.

A idéia parece simples, contudo a correlação entre duas séries geradas pelo jogo, mesmo que tenham sido originadas utilizando-se dos mesmo parâmetros, é muito baixa e não permite qualquer conclusão. A utilização deste método só é possível devido ao fato de ter sido descoberto [37] que substituindo-se o histórico de minorias criado pelo próprio jogo pelo histórico da série alvo, a correlação desta com a série que é gerada pelo jogo aumenta, e, se utilizados os parâmetros corretos, torna-se possível a modelagem da alvo.

Utilizando-se então o procedimento de busca descrito é facilmente encontrado que os parâmetros que geram séries com a melhor correlação são os parâmetros que deram origem à série alvo.

Na figura 4.5 é apresentada a maneira como varia esta correlação conforme modificados alguns parâmetros.

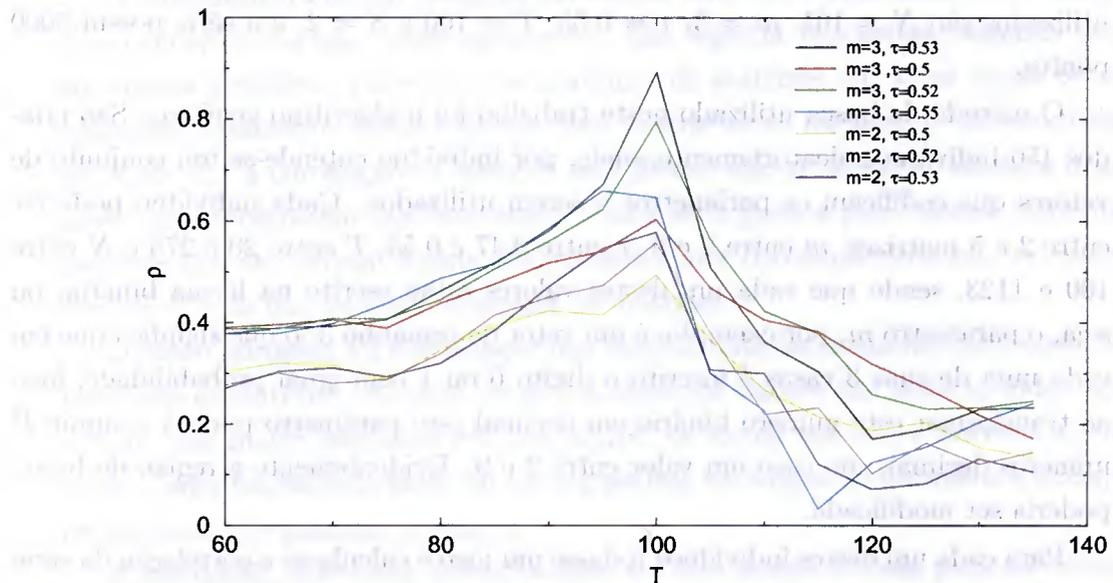


Figura 4.5: Comportamento da correlação entre a série alvo e as séries que visam a modelagem da anterior, conforme variação dos parâmetros.

Durante a realização deste trabalho foi percebido que os parâmetros N e S pouco influenciam no valor da correlação, assim a busca pode ser limitada aos demais parâmetros. No caso do número de jogadores N deve-se, contanto, considerar que este método não possui tão bom desempenho quando o sistema encontra-se na fase anti-simétrica.

Com relação ao tamanho da série, a busca pelos parâmetros adequados e a consequente modelagem, mostraram-se igualmente eficazes em todos os trechos testados, independentemente da quantidade de pontos utilizados.

4.2.2 Previsão

Uma vez encontrados os parâmetros que modelam uma série, busca-se uma previsão da mesma. Para prever os j passos futuros, após a realização do treinamento, calcula-se empiricamente a probabilidade de o sistema percorrer cada um dos 2^j caminhos possíveis e em seguida calcula-se o valor esperado do retorno em cada um dos passos da seguinte maneira:

$$E[X] = \sum_{k=1}^{2^j} p_k \mu_k, \quad (4.4)$$

onde k é o índice do caminho percorrido, p_k a probabilidade deste caminho ser percorrido e μ_k a média dos valores que seguiram este caminho.

Seguindo este procedimento construiu-se a figura 4.6, onde é mostrada a modelagem e a previsão para 9 pontos da série alvo, gerada com os parâmetros citados na subseção anterior.

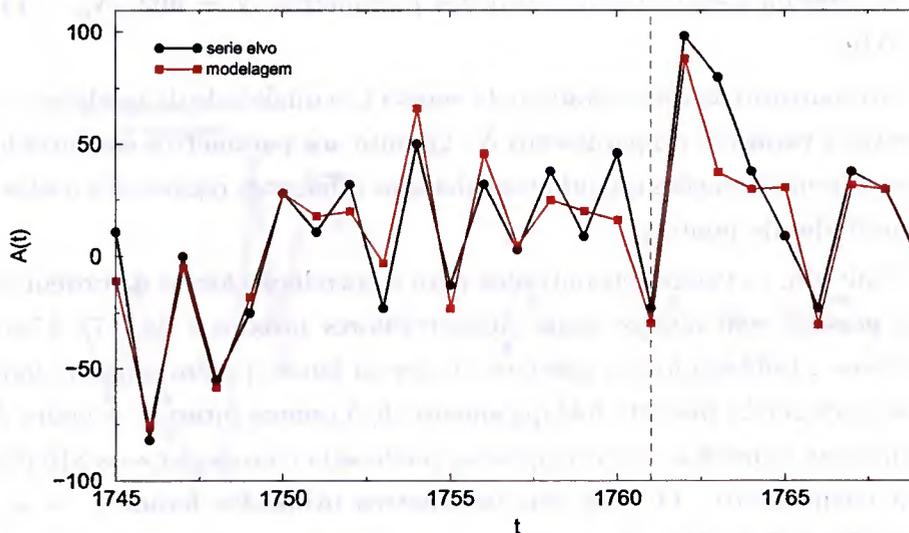


Figura 4.6: A figura mostra o treinamento e a previsão de uma série gerada pela mesma dinâmica. A reta tracejada divide a modelagem da validação. A correlação entre as duas séries é de 0.91.

Percebe-se claramente o bom resultado obtido. Foram realizados diversos testes que também mostraram um ótimo desempenho para previsão quando considerados até 10 pontos futuros. Uma ressalva a este método é o fato de os bons resultados serem conseguidos basicamente em regiões de grandes movimentações na série de retorno a ser modelada.

4.2.3 Testes

O sucesso do método descrito para modelagem e previsão de séries temporais geradas pelo próprio Jogo da Minoria (Grande Canônico versão 2) é surpreendente, uma vez que se tratam de séries que possuem um comportamento estocástico [38]. A série utilizada na subseção anterior, por exemplo, apresenta complexidade de Lempel-Ziv 0.96. Este fato associado à possibilidade de ser possível a reprodução de alguns fatos estilizados através deste jogo, estimulam a tentativa de aplicação em séries financeiras reais.

O primeiro teste realizado no intuito de comprovar a robustez e funcionalidade do método, foi a geração de uma série, fazendo uso da versão 1 do Jogo da Minoria Grande Canônico, e sua posterior modelagem e previsão. Apesar de se tratar de uma série também gerada pelo jogo em questão, deve-se ressaltar que nesta versão os parâmetros utilizados são outros.

A série foi gerada fazendo uso dos parâmetros $N = 403$, $N_p = 141$, $m = 6$ e $\epsilon = 0.01$.

Ao contrário da série gerada pela versão 1, a qualidade da modelagem mostrou-se sensível à variações do parâmetro N . Quanto aos parâmetros encontrados na busca, estes sofrem alterações quando consideradas diferentes regiões dos dados e diferentes quantidades de pontos.

Contudo, os valores encontrados para a correlação foram da ordem de 0.6, tendo sido possível, em alguns casos, atingir valores próximos de 0.7. Com relação às previsões, também foram possíveis de serem feitas, porém a quantidade de pontos capazes de serem previsto foi tipicamente de 5 pontos futuros. A figura 4.7 mostra a modelagem e previsão da série gerada, tendo sido considerados os 346 pontos iniciais para treinamento. O valor dos parâmetros utilizados foram $m = 6$, $N = 493$, $\tau = 0.50$ e $T = 252$. Na verdade, com exceção do parâmetro m , os demais não foram valores únicos encontrados a produzirem correlações na mesma ordem, ou seja, poderiam ter sido utilizados outros valores próximos dos citados.

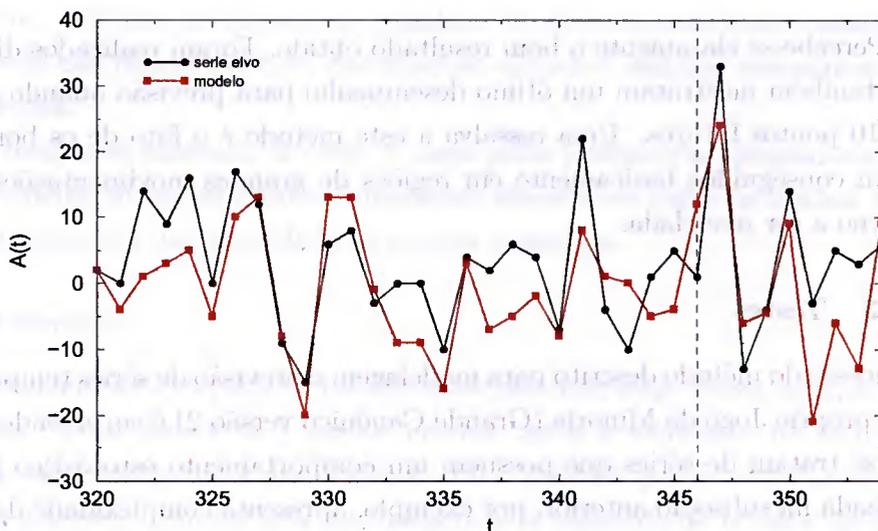


Figura 4.7: A figura mostra uma série gerada pelo jogo sendo modelada e prevista por uma série gerada por uma outra versão do mesmo. A correlação entre esta é de 0.65.

O fato de a qualidade das previsões aumentar nas regiões de grandes mudanças fica evidente ao se tentar fazer uma previsão onde não há a ocorrência de um grande movimento. A figura 4.8 mostra que o método não consegue repetir o mesmo padrão de comportamento da série alvo na região de previsão, apesar de a qualidade da modelagem ser tão boa quanto a obtida na figura 4.6. Em situações de correlação mais baixa entre as séries esta constatação fica ainda mais evidenciada.

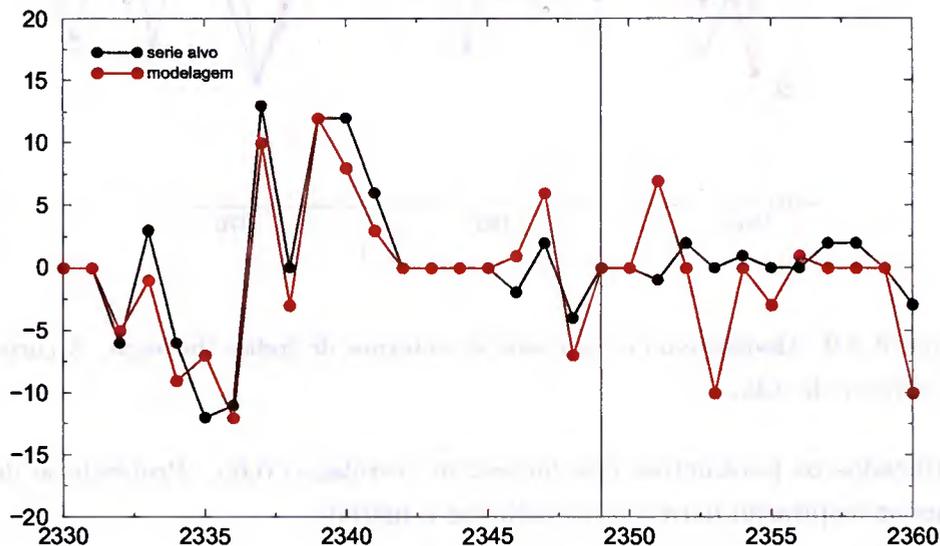


Figura 4.8: Modelagem e tentativa de previsão a partir de um ponto de pequena volatilidade. A correlação entre as séries é de 0.80.

Enfim, testou-se o método para uma série real. As dificuldades enfrentadas neste caso foram muito parecidas com as citadas acima, porém em maior intensidade. O método mostrou-se incapaz de conseguir bons valores de correlação quando considerados um grande número de dados, contudo, foi possível encontrar valores da ordem de 0.35 em alguns trechos.

A série mais utilizada para testes foi a do índice ibovespa, já citada anteriormente. Para um trecho de 180 dias, os parâmetros que melhor ajustaram a série foram $N = 2815$, $m = 9$, $\tau = 0.51$ e $T = 141$. A figura 4.9 mostra o resultado deste ajuste com correlação 0.35.

Para fins de comparação, construiu-se uma figura onde foram utilizados parâmetros que forneciam uma correlação também da ordem de 0.35, para a modelagem da série gerada com o Jogo da Minoria Grande Canônico na versão 1, no ponto 346. A figura 4.10 mostra que com este valor de correlação não é possível realizar uma boa modelagem e prever o comportamento da série, diferentemente do ocorrido quando

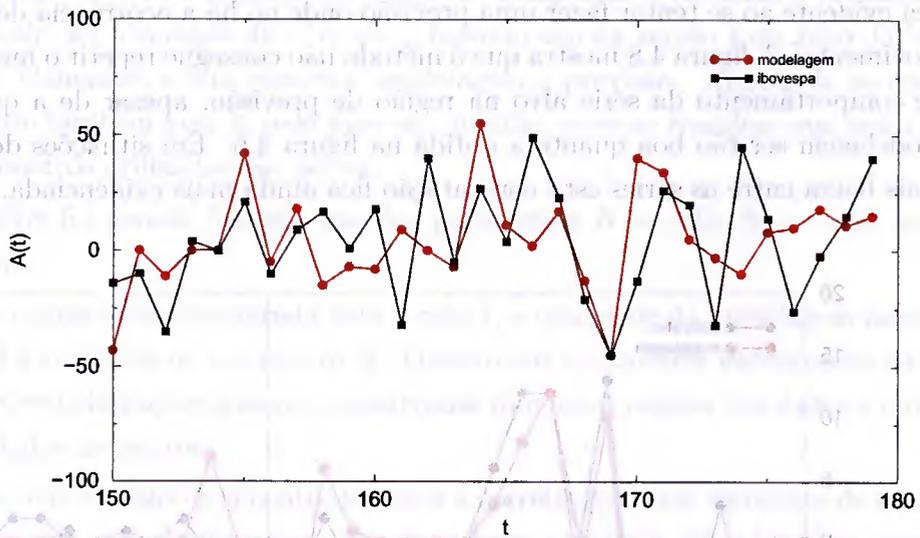


Figura 4.9: Modelagem de uma série de retornos do índice ibovespa. A correlação entre as séries é de 0.35.

utilizados os parâmetros que forneciam correlação 0.65. Pretende-se desta forma buscar inspiração para tentar melhorar o método.

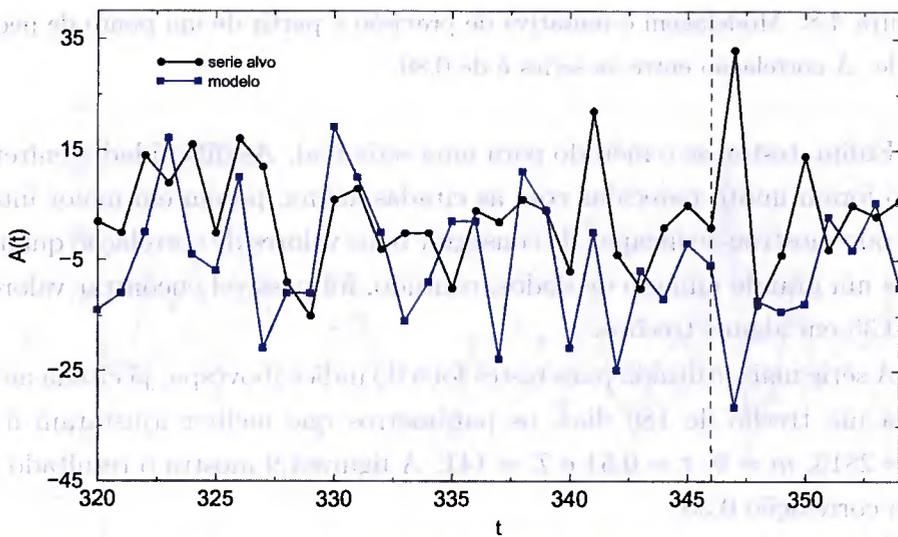


Figura 4.10: Modelagem de uma série com correlação de 0.32 e tentativa de previsão.

Os motivos pelos quais o método não é suficientemente eficiente quando aplicado à séries reais pode ser passível de diversas explicações, tais como, deficiência do

método de busca e diferenças nas dinâmicas que geram os processos do jogo da minoria e das séries reais. Um fato observado que deve ser verificado futuramente é que as séries do jogo da minoria possuem reversão à média, ao passo que as séries reais testadas não. De qualquer forma, baseando-se nos resultados obtidos neste trabalho e nos divulgados nos artigos citados, pode-se acreditar que a utilização prática dos modelos baseados em agentes é possível.

4.2.4 Considerações Finais

O Jogo da minoria é uma das abordagens dos físicos na tentativa de compreender os fenômenos que ocorrem em sistemas complexos, tais como, o mercado de ações. Muito estudado, este modelo apresenta características interessantes e úteis para o objetivo em questão. Neste trabalho focou-se os resultados obtido através do modelo padrão do jogo e da versão grande canônica, contudo outras versões já foram criadas e analisadas, como o Jogo da Maioria e o Dollar Game.

No que diz respeito à resolução analítica do sistema, foi apresentada uma solução para o modelo padrão e para a região anti-simétrica, porém muitos avanços já foram feitos no sentido de entender matematicamente o comportamento deste jogo. Na medida em que os pesquisadores da área melhor compreendem a dinâmica do modelo, aumentam as tentativas de utilização do mesmo em aplicações em sistemas reais. Uma importante tentativa de utilização prática do jogo foi mostrada, e apesar dos resultados não expressivos obtidos, a possibilidade de se conseguir maiores avanços é algo estimulante. As idéias que visam a obtenção de tais avanços existem e são diversas, tais como, melhora no sistema de busca dos parâmetros; utilização de outras versões do jogo; tentativa de modelagem de outros tipos de série, como as séries de taxa de juros, que apresentam um comportamento diferente das séries de índices que foram analisadas. Recentemente foi publicado um outro trabalho [39] que utiliza o Jogo da Minoria na previsão de séries temporais do mercado financeiro. Trata-se de uma extensão do método apresentado e que merece maiores estudos.

Apêndice A

Relação entre σ e H

Usando as expressões 2.10, 2.11 e 2.12 pode-se expandir σ^2 e H da seguinte maneira:

$$\sigma^2 = \overline{\Omega^2} + \sum_{i=1}^N \overline{\xi_i \Omega} \langle s_i \rangle + \sum_{i,j=1}^N \overline{\xi_i \xi_j} \langle s_i s_j \rangle \quad (\text{A.1})$$

$$H = \overline{\Omega^2} + \sum_{i=1}^N \overline{\xi_i \Omega} \langle s_i \rangle + \sum_{i,j=1}^N \overline{\xi_i \xi_j} \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle = \overline{A^2} \quad (\text{A.2})$$

No intuito de facilitar a comparação entre as duas expressões, define-se

$$h_i = \overline{\Omega \xi_i} \quad e \quad J_{i,j} = \overline{\xi_i \xi_j} \quad (\text{A.3})$$

Logo, reescreve-se A.1 e A.2 como:

$$\sigma^2 = \overline{\Omega^2} + \sum_{i=1}^N h_i \langle s_i \rangle + \sum_{i,j=1}^N J_{i,j} \langle s_i s_j \rangle \quad (\text{A.4})$$

$$H = \overline{\Omega^2} + \sum_{i=1}^N h_i \langle s_i \rangle + \sum_{i,j=1}^N J_{i,j} \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle \quad (\text{A.5})$$

Reescrevendo-as novamente:

$$\sigma^2 = C + \sum_i J_{i,i} \langle s_i^2 \rangle \sum_{i \neq j} J_{i,j} \langle s_i s_j \rangle = C + \sum_i J_{i,i} \langle s_i^2 \rangle \sum_{i \neq j} J_{i,j} \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle \quad (\text{A.6})$$

$$H = C + \sum_i J_{i,i} \langle s_i \rangle^2 \sum_{i \neq j} J_{i,j} \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle \quad (\text{A.7})$$

onde $C = \overline{\Omega^2} + \sum_{i=1}^N h_i \langle s_i \rangle$.

Subtraindo-se A.7 de A.6, σ^2 em função de H pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\sigma^2 = H + \sum_i J_{i,i} (\langle s_i^2 \rangle - \langle s_i \rangle^2) =$$

$$\sigma^2 = H + \sum_i J_{i,i} (1 - \langle s_i \rangle^2) \tag{A.8}$$

Utilizando o fato de que $\sum_i J_{i,i} = \overline{\sum_i \xi_i^2} = \overline{\sum_i \frac{1}{4} (a_{i,+} - a_{i,-})^2} = \frac{1}{2} N$ e introduzindo a simplificação $Q = \sum_i \langle s_i \rangle^2 / N$, a equação que relaciona σ^2 e H adquire a forma:

$$\frac{\sigma^2}{N} \simeq \frac{H}{N} + \frac{1}{2} (1 - Q) \tag{A.9}$$

Apêndice B

Cálculos da Solução Exata

Sendo $H = \frac{1}{P} \sum_{\mu} (A^{\mu})^2$, onde $A^{\mu} = \sum_i a_{i,m_i}^{\mu} m_i$, o termo $\langle Z^n \rangle$ é escrito como:

$$\langle Z^n \rangle = \text{tr}_{m_{i,b}} \prod_{b=1}^n \langle e^{-\beta \frac{1}{P} \sum_{\mu} (A^{\mu})^2} \rangle_a = \text{tr}_{m_{i,b}} \prod_{b=1}^n \langle e^{-\beta \frac{1}{P} \sum_{\mu} (\sum_{i=1}^N a_{i,m_i}^{\mu} m_{i,b})^2} \rangle_a \quad (\text{B.1})$$

Introduz-se então a variável gaussiana z_b^{μ} no intuito de linearizar o expoente da equação B.1. Para isto utiliza-se a identidade

$$\langle e^{-\gamma x^2} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \langle e^{-\frac{z^2}{2} - i\sqrt{2\gamma}zx} \rangle_a \quad (\text{B.2})$$

Logo, a equação B.1 é reescrita da seguinte maneira:

$$\langle Z^n \rangle = \text{tr}_{m_{i,b}} \int \prod_{\mu,b} \frac{dz_b^{\mu}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_b^{\mu 2}}{2}} \langle e^{-i\sqrt{\frac{2\beta}{P}} \sum_{\mu,b} (\sum_{i=1}^N a_{i,m_i}^{\mu} m_{i,b}) z_b^{\mu}} \rangle_a \quad (\text{B.3})$$

onde, a média em a pode ser resolvida levando-se em conta que este pode assumir dois valores distintos, assim:

$$\begin{aligned} \langle e^{-i\sqrt{\frac{2\beta}{P}} \sum_{\mu,b} (\sum_{i=1}^N a_{i,m_i}^{\mu} m_{i,b}) z_b^{\mu}} \rangle_a &= \prod_{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sqrt{\frac{2\beta}{P}} \sum_b (\sum_{i=1}^N a_{i,m_i}^{\mu} m_{i,b}) z_b^{\mu} [\frac{1}{2}\delta(a_{i,m_i}^{\mu} - 1) + \frac{1}{2}\delta(a_{i,m_i}^{\mu} + 1)]} da_{i,m_i}^{\mu} = \\ &= \prod_{\mu} (e^{-i\sqrt{\frac{2\beta}{P}} \sum_b \sum_i m_{i,b} z_b^{\mu}} + e^{i\sqrt{\frac{2\beta}{P}} \sum_b \sum_i m_{i,b} z_b^{\mu}}) = \prod_{\mu,i} \cos(\sqrt{\frac{2\beta}{P}} \sum_b (m_{i,b} z_b^{\mu})) \simeq \\ &\simeq \prod_{\mu,i} e^{-\frac{\beta}{P} (\sum_b m_{i,b} z_b^{\mu})^2} \end{aligned}$$

e, portanto, substituindo este resultado em B.3

$$\langle Z^n \rangle = \text{tr}_m \prod_{\mu,i} \int \frac{dz_b^{\mu}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_b^{\mu 2}}{2} - \frac{\beta}{P} (\sum_b m_{i,b} z_b^{\mu})^2} = \text{tr}_m \prod_{i,\mu} \langle e^{-\frac{\beta}{P} (\sum_b m_{i,b} z_b^{\mu})^2} \rangle_z \quad (\text{B.4})$$

Esta última equação, por sua vez, pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\langle Z^n \rangle = \text{tr}_m \prod_{\mu} \langle e^{-\frac{\beta}{\alpha} \sum_{b,d} z_b^{\mu} z_d^{\mu} \frac{1}{N} \sum_i m_{i,b} m_{i,d}} \rangle_z \quad (\text{B.5})$$

onde, $\frac{1}{N} \sum_i m_{i,b} m_{i,d} = Q_{b,d}$.

Uma vez que o objetivo é encontrar uma equação no formato,

$$\langle Z^n \rangle \propto \int dQ dR e^{-\beta N n f(\hat{Q}, \hat{R})} \quad (\text{B.6})$$

introduz-se a identidade,

$$\begin{aligned} 1 &= \int dQ_{b,d} \delta(Q_{b,d} - \frac{1}{N} \sum_i m_{i,b} m_{i,d}) \\ &\propto \int dr_{b,d} dQ_{b,d} e^{-\frac{\alpha\beta^2}{2} r_{b,d} (NQ_{b,d} - \sum_i m_{i,b} m_{i,d})} \end{aligned}$$

Desta forma a expressão B.5 é reescrita como:

$$\begin{aligned} \langle Z^n \rangle &= \text{tr}_m \prod_{\mu} \langle \int dQ_{b,d} dr_{b,d} e^{-\frac{\beta}{\alpha} \sum_{b,d} z_b^{\mu} z_d^{\mu} Q_{b,d} - \frac{\alpha\beta^2}{2} r_{b,d} (NQ_{b,d} - \sum_i m_{i,b} m_{i,d})} \rangle_z = \\ &= \int dQ_{b,d} dr_{b,d} e^{-N n \beta [\frac{\alpha\beta}{2n} \sum_{b,d} r_{b,d} Q_{b,d} - \frac{1}{n\beta} \ln \text{tr}_m e^{\frac{\alpha\beta^2}{2} \sum_{b,d} r_{b,d} m_{i,b} m_{i,d}} - \frac{\alpha}{n\beta} \ln(e^{-\frac{\beta}{\alpha} \sum_{b,d} z_b z_d Q_{b,d}})]} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

onde o termo entre colchetes é $f(\hat{Q}, \hat{r})$.

Fazendo uso do ansatz,

$$Q_{b,d} = q + (Q - q) \delta_{b,d}$$

$$r_{b,d} = r + (R - r) \delta_{b,d}$$

calculam-se os três termos que compõem $f(\hat{Q}, \hat{r})$, separadamente:

1.

$$\frac{\alpha\beta}{2n} \sum_{b,d=1}^n r_{b,d} Q_{b,d} = \frac{\alpha\beta}{2n} [n(RQ) + n(n-1)r q] = \frac{\alpha\beta}{2} [RQ - r q]$$

2.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n\beta} \ln \text{tr}_m e^{\frac{\alpha\beta^2}{2} \sum_{b,d} r_{b,d} m_{i,b} m_{i,d}} &= -\frac{1}{n\beta} \ln \text{tr}_m e^{\frac{\alpha\beta^2}{2} \sum_{b,d} (r + (R-r)\delta_{b,d}) m_{i,b} m_{i,d}} = \\ &= -\frac{1}{n\beta} \ln \text{tr}_m e^{\frac{\alpha\beta^2}{2} [r(\sum_b m_b)^2 + (R-r) \sum_b m_b^2]} = \end{aligned}$$

linearizando o termo quadrático

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{n\beta} \ln \text{tr}_m \int \frac{d\hat{z}_b}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\hat{z}_b^2}{2} - i\sqrt{-\alpha r \beta} \sum_b m_b \hat{z}_b + (R-r) \sum_b m_b^2 \frac{\alpha\beta^2}{2}} = \\ &= -\frac{1}{n\beta} \ln \int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \text{tr}_m \prod_b e^{\beta V(z,m)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{onde } V(z, m) &= \sqrt{\alpha r} m z + \frac{\alpha \beta}{2} (R - r) m^2 \\ &= -\frac{1}{n\beta} \ln D_z [tr_m e^{\beta V(z, m)}]^n = -\frac{1}{n\beta} \ln D_z [1 + n \ln tr e^{\beta V(z, m)}] = \\ &= -\frac{1}{n\beta} n D_z \ln tr_m e^{\beta V(z, m)} = -\frac{1}{\beta} \langle \ln tr_m e^{\beta V(z, m)} \rangle_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \frac{\alpha}{n\beta} \ln \langle e^{-\frac{\beta}{\alpha} \sum_{b,d} z_b z_d Q_{b,d}} \rangle_z &= \\ \frac{\alpha}{n\beta} \ln \int \frac{dz_b}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_b^2}{2} - \frac{\beta}{\alpha} \sum_{b,d} z_b z_d (q + (Q-q)\delta_{b,d})} &= \\ = \frac{\alpha}{n\beta} \ln \int \frac{dz_b}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_b^2}{2} - \frac{\beta}{\alpha} q \sum_{b,d} z_b z_d - \frac{\beta}{\alpha} (Q-q) \sum_b z_b^2} &= \\ = \frac{\alpha}{n\beta} \ln \int \frac{dz_b}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_b^2}{2} - \frac{\beta}{\alpha} q (\sum_b z_b)^2 - \frac{\beta}{\alpha} (Q-q) \sum_b z_b^2} &= \\ = \frac{\alpha}{n\beta} \ln \int \frac{dw}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} \int \frac{dz_b}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_b^2}{2} - i\sqrt{\frac{2\beta q}{\alpha}} \sum_b z_b w - \frac{\beta}{\alpha} (Q-q) \sum_b z_b^2} &= \\ = \frac{\alpha}{n\beta} \ln \int \frac{dw}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} \Pi_b \int \frac{dz_b}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_b^2}{2} (1 + \frac{2\beta}{\alpha} (Q-q)) - i\sqrt{\frac{2\beta q}{\alpha}} w z} &= \\ = \frac{\alpha}{n\beta} \ln \int \frac{dw}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} \Pi_b \int \frac{dz_b}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_b^2}{2} \gamma - i\rho w z} &= \end{aligned}$$

onde, $\gamma = (1 + \frac{2\beta}{\alpha} (Q - q))$ e $\rho = \sqrt{\frac{2\beta q}{\alpha}}$.

$$\begin{aligned} &= \frac{\alpha}{n\beta} \ln \int \frac{dw}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} \Pi_b \frac{e^{-\frac{\rho^2}{2\gamma}}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma}} = \\ &= \frac{\alpha}{n\beta} \ln \int \frac{dw}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2} - \frac{n\rho^2}{2\gamma}} \left(\sqrt{\frac{1}{\gamma}}\right)^n = \\ &= \frac{\alpha}{n\beta} \ln \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{n/2} + \frac{\alpha}{n\beta} \ln \int \frac{dw}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2} - \frac{n\beta q}{\alpha\gamma} w^2} = \\ &= -\frac{\alpha}{2\beta} \ln \left(1 + \frac{2\beta}{\alpha} (Q - q)\right) + \frac{\alpha}{n\beta} \ln \left[1 + \frac{n\beta q}{\alpha\gamma}\right]^{-1/2} = \\ &= -\frac{\alpha}{2\beta} \ln \left(1 + \frac{2\beta}{\alpha} (Q - q)\right) - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{n\beta} \frac{n\beta q}{\alpha\gamma} = \\ &= -\frac{\alpha}{2\beta} \ln \left(1 + \frac{2\beta}{\alpha} (Q - q)\right) - \frac{1}{2} \frac{q}{1 + \frac{\beta}{\alpha} (Q - q)} \end{aligned}$$

Portanto, juntando os termos, obtém-se a equação 2.27:

$$f(\hat{Q}, \hat{r}) = \frac{\alpha\beta}{2} [RQ - rq] - \frac{1}{\beta} \langle \ln tr_m e^{\beta V(z, m)} \rangle_z + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\beta} \ln \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} (Q - q)\right) + \frac{1}{2} \frac{q}{1 + \frac{\beta}{\alpha} (Q - q)} \quad (\text{B.8})$$

Os parâmetros Q, q, R e r são finalmente encontrados resolvendo as equações $\frac{\partial f}{\partial X} = 0$ sendo que $X = Q, R, q$ ou r . Logo:

- $\frac{\partial f}{\partial q} = 0$

$$-\frac{\alpha\beta r}{2} + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{1 + \frac{\beta}{\alpha} (Q - q)} \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{\beta}{\alpha} (Q - q)} + \frac{1}{2} \frac{q \frac{\beta}{\alpha}}{\left(1 + \frac{\beta}{\alpha} (Q - q)\right)^2} = 0$$

$$\frac{\alpha\beta r}{2} = \frac{1}{2\alpha} \frac{\beta q}{(1 + \frac{\beta}{\alpha}(Q - q))^2}$$

$$r = \frac{1}{\alpha^2} \frac{q}{(1 + \frac{\beta}{\alpha}(Q - q))^2} \quad (\text{B.9})$$

• $\frac{\partial f}{\partial Q} = 0$

$$\frac{\alpha\beta R}{2} + \frac{\alpha}{2\beta} \frac{1}{1 + \frac{\beta}{\alpha}(Q - q)} \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta}{2\alpha} \frac{q}{(1 + \frac{\beta}{\alpha}(Q - q))^2} = 0$$

Usando o item anterior:

$$(R - r) \frac{\alpha\beta}{2} = -\frac{1}{2} \frac{\alpha}{\alpha + \beta(Q - q)}$$

$$\beta(R - r) = -\frac{1}{\alpha + \beta(Q - q)} \quad (\text{B.10})$$

• $\frac{\partial f}{\partial R} = 0$

$$\frac{\alpha\beta Q}{2} - \frac{1}{\beta} \int \frac{dz}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{\partial}{\partial R} \ln \int_{-1}^1 dm e^{\beta V} = 0$$

$$\frac{\alpha\beta Q}{2} + \frac{1}{\beta} \int \frac{dz}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{\int_{-1}^1 dm \beta \frac{\partial V}{\partial R} e^{\beta V}}{\int_{-1}^1 dm e^{\beta V}} = 0$$

$$Q = \langle \langle m^2 \rangle_m \rangle_z \quad (\text{B.11})$$

• $\frac{\partial f}{\partial r} = 0$

$$-\frac{\alpha\beta q}{2} - \frac{1}{\beta} \langle \langle \beta \frac{\partial V}{\partial r} \rangle_m \rangle_z = 0$$

onde, $\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\alpha\beta m^2}{2} + mz \frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha r}}$.

$$\frac{\alpha\beta q}{2} = \langle \langle \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha r}} mz \rangle_m \rangle_z - \frac{\alpha\beta}{2} \langle \langle m^2 \rangle_m \rangle_z$$

$$\frac{\alpha\beta}{2} (q - Q) = \frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha r}} \langle \langle mz \rangle_m \rangle_z$$

$$\beta(q - Q) = \frac{1}{\sqrt{\alpha r}} \langle \langle mz \rangle_m \rangle_z \quad (\text{B.12})$$

Convenientemente definem-se os parâmetros χ e ζ ,

$$\chi = \frac{\beta(Q - q)}{\alpha} \quad \text{e} \quad \zeta = -\sqrt{\frac{\alpha}{r}}\beta(R - r). \quad (\text{B.13})$$

O cálculo das expressões B.11 e B.12 são feitos utilizando-se o fato de as integrais serem dominadas pelos mínimos do potencial de $V(z, m)$ em função de m . Derivando $V(z, m)$ em m obtém-se uma expressão que relaciona-se com ζ por $\zeta = z/m$. Desta forma as integrais em z são divididas em três regiões, de forma que são encontradas as seguintes expressões :

$$\langle\langle mz \rangle_m \rangle_z = \frac{1}{\zeta} \operatorname{erf} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{2}} \right), \quad (\text{B.14})$$

e

$$\langle\langle mz \rangle_m \rangle_z = 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\zeta^2/2}}{\zeta} - \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{2}} \right) \quad (\text{B.15})$$

Reescrevendo-se a equação 2.27 e manipulando-se as equações já obtidas, obtém-se a expressão ,

$$H_c = \frac{1 + Q}{2(1 + \chi)^2}, \quad (\text{B.16})$$

onde utilizou-se o fato, já comentado no capítulo 2, de que H equivale à energia livre F nos limites de $n \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow \infty$ e $N \rightarrow \infty$.

De acordo com a relação demonstrada no apêndice 1, σ_c é escrito por:

$$\sigma_c = H_c + \frac{1}{2}(1 - Q). \quad (\text{B.17})$$

Com estas expressões, construiu-se a figura 2.8.

Referências

- [1] A. Arenas, F. Vega-Redondo, C.J. Perez and A. Diaz-Guilera, 'Self-Organized Critical Evolution In Economic Systems That Display Local Complementarities', Society for Computational Economics (2000).
- [2] B. Huberman, P. Pirolli, J. Pitkow, and R.Lukose, 'Strong Regularities in World Wide Web Surfing ', Science **280**, 95 (1998).
- [3] C. P. Ferreira and J. F. Fontanari, "Nonequilibrium phase transition in a model for the origin of life", Phys. Rev. E **65**, 021902 (2002).
- [4] T. Lux and M. Marchesi, 'Scaling and criticality in a stochastic multi-agent model of a financial market', Nature **397**, 498 (1999).
- [5] J.D. Farmer, 'Physicists attempt to scale the ivory tower of finance', Computing in science and engineering, Nov-Dez 1999, 26.
- [6] G. Caldarelli, M. Marsilli, and Y.C. Zhang, 'A prototype model of stock exchange', Europhys. Lett. **40**, 479 (1997).
- [7] Arthur W.B., 'Inductive reasoning and bounded rationality: the El Farol problem', Am. Econ. Assoc. Papers and Proc **84**, 406 (1994).
- [8] D. Challet and Y.C. Zhang, 'Emergence of cooperation and organization in an evolutionary game', Physica A **246**, 407 (1997).
- [9] Y.C. Zhang, 'Modeling market mechanism with Evolutionary games', Europhys. News **29**, 51 (1998).
- [10] Para ver uma lista detalhada de artigos sobre o Jogo da Minoria, acessar <http://www.unifr.ch/econophysics>.
- [11] R. Cont, 'Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues', Quantitative Finance **1**, 223 (2001).

- [12] D. Challet, M. Marsili, and Y.C. Zhang, 'Stylized facts of financial markets and market crashes in minority games', *Physica A* **294**, 514 (2001).
- [13] N.F. Johnson, M. Hart, P.M. Hui, and D. Zheng, 'Trader dynamics in a model market', cond-mat/9910072 (1999).
- [14] M. Hart, P. Jefferies, and N.F. Johnson, 'Dynamics of the Time Horizon Minority Game', cond-mat/0102384 (2001).
- [15] J.V. Andersen and D. Sornette, 'The \$-game', *Eur. Phys. J. B* **31**, 141 (2003).
- [16] R. Savit, R. Manuca, and R. Riolo, 'Adaptative competition, market efficiency, and phase transition', *Physical Review Letters* **82**, 2203 (1999).
- [17] R. Manuca, Yi LI, R. Riolo, and R. Savit, 'The structure of adaptive competition in minority game', adap-org/9811005 (1998).
- [18] D. Challet, M. Marsili, 'Phase transition and symetry breaking in the minority game', *Phys. Rev. E* **60**, R6271 (1999).
- [19] D. Challet, Y.-C Zhang, 'On th minority game: analytical and numerical studies', *Physica A* **256**, 514 (1998).
- [20] E. Moro, 'The minority game: an introductory guide', cond-mat/0402651 (2004). Para ser publicado em "Advances in Condensed Matter and Statistical Mechanics", ed. E. Korutcheva and R. Cuerno.
- [21] N.F. Johnson, M.Hart, and P.M. Hui, 'Crowd effects and volatility in a competitive market', cond-mat/9811227 (1998).
- [22] M.Hart, P. Jefferies, P.M. Hui, and N.F. Johnson, 'Crowd-anticrowd theory of multi-agent market games', *Eur. Phys. J. B* **20**, 547 (2001).
- [23] J.A. Heimel and A.C.C. Coolen 'Generating functional analysis of the dynamics of the batch minority game with random external information', *Phys. Rev. E* **63**, 056121 (2001).
- [24] A. Cavagna 'Irrelevance of memory in the minority game', *Phys. Rev. E* **59**, R3783 (1999).
- [25] D. Challet and M. Marsili 'Relevance of memory in minority games', *Phys. Rev. E* **62**, 1862 (2000).

- [26] M. Marsili, D. Challet, and R. Zecchina 'Exact solution of a modified El Farol's bar problem: Efficiency and the role of market impact', *Physica A* **280**, 522 (2000).
- [27] D. Challet 'Modelling markets dynamics: minority games and beyond', Tese de doutorado realizado na Universit de Fribourg, disponvel em <http://www.unifr.ch/econophysics>.
- [28] M. Mitchell, *An Introduction to Genetic Algorithms*(MIT Press, Cambridge, 1996).
- [29] J.M. Amabis, and G.R. Martho, *Biologia da populações 3*(Editora Moderna, São Paulo, 1995).
- [30] J.H. Holland, *Adapatation in Natural and Artificial Systems*(University of Michigan Press, 1975).
- [31] N.F. Johnson, D. Lamper, and S.D. Howison 'Predictability of Large Future Changes in a Competitive Evolving Population', *Physical Review Letters* **88**, 017902 (2001).
- [32] N.F. Johnson, D. Lamper, M.Hart, P. Jefferies and S.D. Howison 'Application of multi-agent games to the prediction of financial time series', cond-mat/0105303 (2001).
- [33] V. Plerou, P. Gopikrishnan, B. Rosenow, Luis A.N. Amaral, H.E. Stanley 'Econophysics: financial time series from a statistical physics point of view', *Physica A* **279**, 443 (2000).
- [34] J.-P Bouchaud 'An Introduction to statistical finance', *Physica A* **313**, 238 (2002).
- [35] R.N. Mantegna, and H.E. Stanley, *An Introduction to Econophysics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000).
- [36] B.B Mandelbrot 'The variation of certain speculative prices ', *J. Business***36**, 394 (1963).
- [37] P. Jefferies, M.Hart, P.M. Hui, and N.F. Johnson, 'From market games to real-world markets', cond-mat/0008387 (2000).
- [38] F.F. Ferreira, G. Francisco, B.S. Machado, P. Muruganandam, 'Time series analysis for minority game simulations of financial markets', *Physica A* **321**, 619 (2003).

- [39] J.V. Andersen and D. Sornette, 'A Mechanism for Pockets of Predictability in Complex Adaptive Systems ', cond-mat/0410762 (2004).

