

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus de Rio Claro

**RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
NO CENÁRIO DA MATEMÁTICA DISCRETA**

FERNANDA DOS SANTOS MENINO

Orientadora: Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic

Tese de Doutorado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem de Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos para obtenção do título de Doutora em Educação Matemática.

Rio Claro – SP
2013

510.07 Menino, Fernanda dos Santos
M545r Resolução de problemas no cenário da matemática
discreta / Fernanda dos Santos Menino. - Rio Claro : [s.n.],
2013
289 f. : il., figs., gráfs., tabs., quadros, mapas

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Lourdes de la Rosa Onuchic

1. Matemática - Estudo e ensino. 2.
Ensino-Aprendizagem - Avaliação de matemática através da
resolução de problemas. 3. Peças do dominó. 4. Educação
matemática. I. Título.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Ruy Madsen Barbosa

Profa. Dra. Maria Ignez de Souza Vieira Diniz

Profa. Dra. Norma Suely Gomes Allevato

Profa. Dra. Rosana Giaretta Sguerra Miskulin

Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic
(Orientadora)

Fernanda dos Santos Menino
(Aluna)

Rio Claro, 06 de março de 2013.

Resultado: Aprovada.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida, por sempre ter abençoado meus caminhos.
“Tudo é do Pai. Toda Honra e toda Glória. É Dele a vitória alcançada em minha vida”. Pe. Fábio de Melo

À minha família. À minha mãe, Iraci, que me apoiou em todos os momentos e ao meu pai, Jesus (*in memoriam*), que certamente estaria vibrando comigo por mais esta conquista. Ao meu irmão Juninho por toda ajuda.

Ao Álvaro, por incentivar a realização dos meus sonhos.

À professora Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic, por sua dedicação, por ter confiado, por ter desafiado, exigido e acompanhado. Por fazer desta professora uma pesquisadora melhor. Não tenho como agradecer.

À Banca Examinadora: professor Dr. Ruy Madsen Barbosa, professora Dra. Maria Ignez de Souza Vieira Diniz, professora Dra. Norma Suely Gomes Allevato e professora Dra. Rosana Giarretta Sguerra Miskulin, pelas valiosas contribuições prestadas para o aprimoramento desta obra.

Ao Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas – GTERP da UNESP/Rio Claro: Andresa, Célia, Eliane, Elizabeth, Fabiane, Marcos, Maria Lúcia, Norma, Raquel, Roger, Rosilda, Sandra e Tatiane, pela amizade, pelos momentos de alegria, de estudo, de trabalho, de aprendizagem e de reflexão compartilhada.

Às amigas Malu e Raquel, pelo carinho e força nesta empreitada.

Aos professores e aos colegas do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PPGEM da UNESP/Rio Claro.

À Inajara, por sua alegria, por todo apoio.

À UNESP/Rio Claro e a todos os seus funcionários do Departamento de Matemática, da Biblioteca e da Seção de Pós-graduação e a todos os que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivos tratar matematicamente um problema gerado pelo uso das peças do Dominó, identificando a matemática que pode ser construída para a sustentação teórica desse problema, e oferecer recomendações aos professores do Ensino Básico, visando ao trabalho em sala de aula, envolvendo problemas matemáticos a partir das peças do Dominó, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Adotamos para o desenvolvimento desta pesquisa a Metodologia de Thomas A. Romberg. Definido o Fenômeno de Interesse - o envolvimento da Matemática e da Resolução de Problemas, consideradas no contexto do uso das peças do Dominó - foi criado o Modelo Preliminar em três e ampliadas versões. O apoio em ideias de outros pesquisadores, sobre a fundamentação teórica da pesquisa: a Matemática Discreta e a Resolução de Problemas, nos conduziu às seguintes questões: Como a Matemática Discreta pode ser trabalhada através da resolução do Problema da Fernanda? De que forma a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode contribuir para o trabalho em sala de aula, na construção de conceitos, de conteúdos e de procedimentos matemáticos em diferentes séries da Educação Básica? Para responder a essas inquietações, criamos dois projetos frente aos quais a pesquisadora assumiu duas posturas diferentes: a primeira voltada à *Matemática* e a segunda voltada à *Educação Matemática*. No cenário da Matemática Discreta, conjugados esses dois projetos, seus desenvolvimentos operacionais trouxeram tanto resultados matemáticos novos como recomendações para o uso da metodologia adotada, oferecendo caminhos para o trabalho do professor em sala de aula, com importantes resultados para sua prática docente.

Palavras-chave: Matemática Discreta. Resolução de Problemas. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Peças do Dominó. Educação Matemática.

ABSTRACT

The objective of the present research is to treat mathematically a problem that was generated by the use of Domino tiles, identifying the Math that can be built for the theoretical foundation of that problem, and to provide guidelines to Elementary school teachers aiming at classroom work, involving Math problems from Domino tiles and making use of Methodology of Math Teaching-Learning-Evaluation through Problem Solving. For the development of the present research we adopted the Methodology of Thomas A. Romberg. Once the interest phenomenon was defined, *the involvement of Mathematics and problem solving considered in the context of using Domino tiles*, the Preliminary Model in three expanded versions was created. The support on other researchers' ideas about the research theoretical foundation: Discrete Mathematics and problem solving, led us to the following questions: How can Discrete Mathematics be worked through Fernanda's problem resolution? In what way can the Methodology of Teaching-Learning-Evaluation through Problem Solving contribute to classroom work in the construction of Math concepts, contents and procedures in different grades of Elementary school? To answer those questions we created two projects in which the researcher developed two different approaches: the first one regarding *Mathematics* and the second one regarding *Mathematics Education*. In the Discrete Mathematics scenario, once those two projects were combined, their operational developments brought new mathematical results as well as guidelines for the use of the adopted methodology, offering the teachers ways to work in classroom, with important results for their teaching practice.

Keywords: Discrete Mathematics. Problem Solving. Mathematics Teaching-Learning-Evaluation through Problem Solving. Domino tiles. Mathematics Education.

ÍNDICE DE ILUSTRAÇÕES

	página
Figura 1 – A relação de sociedade, matemática, alunos, professores e escolarização.....	21
Figura 2 – As atividades de Pesquisa e como elas estão relacionadas.....	23
Figura 3 – Modelo Preliminar 1.....	37
Figura 4 – Modelo Preliminar 2.....	38
Figura 5 – Modelo Preliminar 3.....	40
Figura 6 – Quadro de Conteúdos relacionados aos <i>Standards</i> e aos <i>Grades</i>	47
Figura 7 – Um problema de progressão geométrica no Papiro de Ahmes.....	82
Figura 8 – Uma página de <i>Addison-Wesley Mathematics</i>	85
Figura 9 – Quadro de Padrões de Conteúdo e Padrões de Procedimento dos <i>Standards-2000</i>	91
Figura 10 – Quadro de Ensino-Aprendizagem-Avaliação.....	100
Figura 11 – Modelo Modificado.....	118
Figura 12 – Modelo Modificado 1.....	124
Figura 13 – Efeito Dominó.....	128
Figura 14 – As peças do Jogo Dominó.....	129
Figura 15 – Uma organização das peças do Dominó para listagem	132
Figura 16 – Localização da cidade de São Petersburgo.....	136
Figura 17 – Multiplicação de Kordenski.....	140
Figura 18 – Uma Solução do Problema de Kordenski.....	141
Figura 19 – Oito soluções para o Problema de Perelmán.....	143
Figura 20 – Solução da Profa. Carmem para o Problema de Perelmán.....	145
Figura 21 – Solução do Problema de Perelmán representada em forma matricial.....	145
Figura 22 – Solução do Problema de Perelmán correspondente à forma matricial.....	146
Figura 23 – Solução Inédita 10 do Problema de Perelmán.....	147
Figura 24 – Solução Inédita 11 do Problema de Perelmán.....	147
Figura 25 – Quadrado de Perelmán de Soma S.....	148
Figura 26 – Quadrado de Perelmán com os opostos intermediários destacados.....	148
Figura 27 – Quadrado de Perelmán com os opostos intermediários representados.....	149
Figura 28 – Quadrado de Perelmán com os valores de canto destacados.....	150
Figura 29 – Dois QP-S com a representação da Soma de dois intermediários opostos.....	152

Figura 30 – Disposição das peças do Dominó para formar o quadrado.....	154
Figura 31 – Quadrado de Soma Mágica 2.....	154
Figura 32 – Dois Quadrados de Soma Mágica 4.....	154
Figura 33 – Peças do Dominó possíveis para formar Soma Mágica 5.....	155
Figura 34 – Quadrados de Soma Mágica 5.....	155
Figura 35 – Somas mágicas e a Quantidade de Soluções.....	159
Figura 36 – Gráfico da Função: Somas mágicas × Quantidade de Soluções.....	159
Figura 37 – Dois Pares de Peças Complementares.....	161
Figura 38 – Únicas Peças do Dominó Auto Complementares.....	161
Figura 39 – Quadrados de Perelmán Correspondentes.....	163
Figura 40 – Somas Mágicas e a Frequência de Soluções.....	164
Figura 41 – Histograma com a Frequência das Somas nas Soluções.....	164
Figura 42 – Gráfico da Função: Somas mágicas × Quantidade de Soluções.....	165
Figura 43 – As Sete Soluções da Soma Mágica 3 apresentadas pelo MatLab.....	166
Figura 44 – Modelo Modificado 2.....	169
Figura 45 – Adições com 3 peças do Dominó.....	250
Figura 46 – Adições com 4 peças do Dominó.....	251
Figura 47 – Seis Adições com 4 peças do Dominó.....	252
Figura 48 – Uma Solução para o Problema da Adição.....	253
Figura 49 – Um Trem de dominós com 3 vagões.....	254
Figura 50 – Um Trem de dominós com 4 vagões.....	254
Figura 51 – Três Trens de dominós com 4 vagões.....	255
Figura 52 – Trem de dominós com 10 vagões e 63 passageiros.....	255
Figura 53 – Quatro Trens de dominós com 7 vagões.....	256
Figura 54 – Dois anéis de dominós.....	257
Figura 55 – Disposição I das peças do Dominó.....	258
Figura 56 – Disposição II das peças do Dominó.....	258
Figura 57 – Uma Moldura Quadrada com as 28 peças do Dominó.....	259
Figura 58 – Quadrado constituído conectando peças adjacentes com partes iguais.....	260
Figura 59 – Seis Soluções para o Novo Sete Quadrados.....	262

SUMÁRIO

	página
INTRODUÇÃO	11
CAPÍTULO 1 – Metodologia de Pesquisa	18
Considerações Iniciais	19
1.1 – Metodologia de Thomas A. Romberg	20
1.1.1 – A Educação Matemática como um Campo de Estudo.	20
1.1.2 – As Atividades dos Pesquisadores - Fluxograma de Romberg	22
1.1.3 – Os Métodos de Pesquisa usados pelos Pesquisadores	28
CAPÍTULO 2 – Identificação do Problema da Pesquisa (Iniciando a Pesquisa - 1º Bloco de Romberg)	30
2.1 – Fenômeno de Interesse	31
2.1.1 – Minha Trajetória Estudantil e Profissional	31
2.1.2 – Minha Trajetória Profissional rumo à Pesquisa	34
2.2 – Modelo Preliminar	36
2.3 – Relacionar com Ideias de “Outros”	41
CAPÍTULO 3 – Matemática Discreta	43
3.1 – O que é Matemática Discreta?	44
3.2 – Algumas Considerações sobre Matemática Discreta	46
CAPÍTULO 4 – Resolução de Problemas	75
Introdução	76
4.1 – O que é um Problema?	79
4.2 – Perspectivas Históricas da Resolução de Problemas no Currículo de Matemática	81
4.3 – Resolução de Problemas	87
4.3.1 – Uma Breve História da Resolução de Problemas	87
4.3.2 – Diferentes abordagens de Resolução de Problemas	92
4.3.2.1 – Ensinar <i>sobre</i> Resolução de Problemas	92
4.3.2.2 – Ensinar <i>para</i> resolver problemas	93
4.3.2.3 – Ensinar <i>via</i> resolução de problemas	93
4.3.2.4 – Ensinar <i>através da</i> resolução de problemas	95
4.3.3 – A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas	98
4.4 – Diretrizes Futuras e Perspectivas para a Pesquisa e Desenvolvimento Curricular em Resolução de Problemas	104
CAPÍTULO 5 – O Modelo Modificado e a Pergunta da Pesquisa	111
5.1 – O Modelo Modificado	112
5.2 – A Pergunta da Pesquisa	119

CAPÍTULO 6 – Estratégias e Procedimentos (Dando Continuidade à Pesquisa - 2º Bloco de Romberg).....120

6.1 – Estratégias e Procedimentos Selecionados visando a responder as questões do Problema da Pesquisa.....	121
---	-----

CAPÍTULO 7 – O Projeto 1 123

7.1 – Estratégias e Procedimentos para o Projeto 1.....	125
7.2 – Procedimento Geral do Projeto 1 em ação.....	127
7.2.1 – P_1 : A primeira ação - a escolha do conjunto finito formado pelas 28 peças do Dominó.....	127
7.2.2 – P_2 : Algumas considerações sobre o <u>Dominó</u> , em ação.....	127
7.2.2.1 – O Efeito Dominó	128
7.2.2.2 – O Jogo Dominó.....	129
7.2.2.3 – Noções Históricas sobre o Jogo Dominó.....	131
7.2.2.4 – Algumas Notas Educacionais sobre as Peças do Dominó.....	132
7.2.2.5 – Explorando uma Contagem Importante.....	135
7.2.3 – P_3 : A <u>proposição de problemas</u> , a partir de <u>peças do Dominó</u> , criados pela pesquisadora ou encontrados na literatura sobre esse tema, em ação.....	135
7.2.4 – P_4 : A apresentação de <u>Problemas Maiores</u> : o Problema de Perelmán, o Problema de Kordenski, dentre outros, destacando o <u>Problema de Perelmán</u> , em ação.....	136
7.2.4.1 – Os Sete Quadrados ou o Problema de Perelmán.....	136
7.2.4.1.1 – Algumas Considerações sobre Perelmán.....	136
7.2.4.1.2 – Os Sete Quadrados ou o Problema de Perelmán.....	138
7.2.4.2 – O Problema de Kordenski.....	140
7.2.4.2.1 – Atividades envolvendo Multiplicações de Kordenski.....	140
7.2.4.2.2 – As Sete Multiplicações ou o Problema de Kordenski.....	141
7.2.5 – P_5 : A apresentação dos <u>avanços para o Problema de Perelmán</u> e dos <u>resultados matemáticos para os Quadrados de Perelmán</u> , em ação.....	142
7.2.5.1 – Avanços no Problema de Perelmán.....	142
7.2.5.2 – Explorações Matemáticas nos Quadrados de Perelmán.....	148
7.2.6 – P_6 : A criação e a descrição do caminho trilhado para se chegar do problema escolhido: o Problema de Perelmán, ao problema criado: o <u>Problema da Fernanda</u> , em ação.....	153
7.2.7 – P_7 : A apresentação dos avanços e dos resultados matemáticos relacionados ao <u>Problema da Fernanda</u> , em ação.....	158
7.2.7.1 – Avanços no Problema da Fernanda.....	158
7.2.7.1.1 – A Orientação do Trabalho de Conclusão de Curso.....	158
7.2.7.1.2 – Explorações Matemáticas no Problema da Fernanda.....	161
7.2.7.1.3 – Solução Computacional para o Problema da Fernanda.....	164

7.2.7.1.4 – Comparando os Resultados.....	165
7.2.8 – P_G : A identificação da matemática que pode ser construída para a sustentação teórica do Problema da Fernanda, em ação.....	167
CAPÍTULO 8 – O Projeto 2	168
8.1 – Estratégias e Procedimentos para o Projeto 2.....	170
8.2 – Procedimento Geral do Projeto 2, em Ação.....	171
8.2.1 – P_1 : O estudo do Programa Curricular de Matemática no Brasil, em ação.....	171
8.2.2 – P_2 : A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, em ação.....	172
8.2.3 – P_3 : A escolha e a proposição de problemas, a partir das peças do Dominó, dentre os criados ou encontrados na literatura sobre o tema, em ação.....	172
8.2.4 – P_4 : A criação do roteiro para apoiar o trabalho do professor no desenvolvimento dessas atividades em sala de aula, com a identificação dos objetivos, a resolução e a análise de cada atividade, em ação.....	173
8.2.5 – P_G : A oferta de recomendações aos professores do Ensino Básico, visando ao trabalho em sala de aula no cenário da Matemática Discreta, envolvendo problemas matemáticos a partir das peças do Dominó, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, em ação.....	174
8.2.5.1 – Atividades sugeridas para o Ensino Fundamental I.....	176
8.2.5.2 – Atividades sugeridas para o Ensino Fundamental II.....	192
8.2.4.3 – Atividades sugeridas para o Ensino Médio.....	200
CONSIDERAÇÕES FINAIS	225
REFERÊNCIAS	237
ANEXOS	245
ANEXO A – Relação de alguns Cursos Ministrados envolvendo problemas matemáticos com o uso das peças do Dominó.....	246
ANEXO B – Outros Problemas Maiores: o Problema da Adição, o Problema do Trem, o Problema dos Anéis em Conexão, o Problema da Moldura Quadrada e o Novo Sete Quadrados.....	250
ANEXO C – Reportagem sobre a Solução Inédita para o Problema de Perelmán encontrada pela Profa. Carmem.....	263
ANEXO D – Somas Mágicas e suas respectivas Soluções.....	264
ANEXO E – Programa executado na plataforma MatLab para a resolução do Problema da Fernanda.....	284
ANEXO F – Vinte soluções do Desafio Máximo.....	285

INTRODUÇÃO

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa abrange dois eixos temáticos: *Matemática Discreta e Resolução de Problemas*.

A escolha do tema, Resolução de Problemas a partir das peças do Dominó, para este trabalho emergiu de experiências de minha vida profissional enquanto professora e pesquisadora.

Em 2000 comecei, como docente, no Curso de Licenciatura em Matemática na Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Catanduva/SP-FAFICA, onde era responsável pelas disciplinas Metodologia do Ensino de Matemática I e II.

Intuitivamente, sempre gostei de trabalhar com problemas em sala de aula. Então, nessa disciplina, selecionava alguns problemas que julgava serem importantes para a aprendizagem dos alunos e os propunha em sala, discutia e os corrigia no quadro. Ou seja, trabalhava com problemas simplesmente por gostar e considerar importante fazer isso, sem assumir nenhum embasamento teórico.

Até que, em janeiro de 2001, conheci a *Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas*¹ no Minicurso realizado pela Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic no VI EPEM/Catanduva/SP, fato que marcou e influenciou minha trajetória profissional.

Quando fiz o Minicurso da Profa. Lourdes, pude notar que poderia avançar muito em meu trabalho docente, pois a proposta dela era a de trabalhar com problemas, mas de uma maneira diferenciada, organizada, estruturada, baseada numa metodologia de ensino, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. A partir daí, eu não apenas propunha problemas em sala. O objetivo não era simplesmente o de ensinar a resolver problemas mas, sim, o de usar problemas para ensinar matemática, o que é bem diferente, de acordo com o que havíamos aprendido nesse Minicurso.

No ano de 2001, fui docente na FAFICA no Ciclo de Oficinas Pedagógicas, sob a coordenação do Prof. Dr. Ruy Madsen Barbosa. Esse Ciclo teve a participação de professores do Ensino Fundamental e do Ensino Médio das redes municipal, estadual e particular de ensino da cidade de Catanduva e região.

¹Essa Metodologia, a partir de 2002, foi renomeada Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, onde a avaliação integrada ao ensino visa à melhoria da aprendizagem.

O Prof. Ruy me apresentou possibilidades educacionais do uso das peças do Dominó para o ensino-aprendizagem de matemática. Desenvolvi tais ideias, preparei e ministrei, pela primeira vez, uma Oficina sobre o tema no Ciclo, *usando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas*. A boa aceitação, motivação e desempenho dos participantes na resolução dos *problemas matemáticos, com as peças do Dominó*, constituíram-se forças propulsoras para eu continuar estudando e trabalhando sobre os dois assuntos.

É importante destacar que ministrei muitas oficinas e cursos, em várias instituições de ensino, relacionando as temáticas: *Resolução de Problemas Matemáticos com as peças do Dominó* e *Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas*. Adquiri conhecimento e experiência sobre esses tópicos, mas acreditava que ainda havia muito para ser estudado e que seria possível avançar na direção desses temas.

Das possibilidades emergentes de minha experiência profissional e da participação no Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas - GTERP da UNESP/Rio Claro, relacionando as temáticas acima, é que se fundamentou o presente trabalho.

Apresentamos como objetivos desta pesquisa: (1) Tratar matematicamente um problema gerado pelo uso das peças do Dominó, identificando a matemática que pode ser construída para a sustentação teórica desse problema e (2) Oferecer recomendações aos professores do Ensino Básico, visando ao trabalho em sala de aula, envolvendo problemas matemáticos a partir das peças do Dominó, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Ao fazer a exposição deste nosso trabalho de pesquisa, procuramos seguir os passos trabalhados ao longo de seu desenvolvimento.

No Capítulo 1 – Metodologia de Pesquisa – descrevemos a metodologia de pesquisa adotada para desenvolver este trabalho, apresentada por Thomas A. Romberg em seu artigo, de 1992, intitulado *Perspectives on Scholarship and Research Methods*. Essa metodologia é composta por uma sequência de dez atividades, descritas por Romberg num fluxograma, que orientam os pesquisadores iniciantes e explicitam o transcorrer da pesquisa. Ao conjunto dessas atividades

chamamos Metodologia de Thomas A. Romberg. Essas dez atividades estão distribuídas em três blocos: o primeiro bloco trata da identificação do problema (atividades 1, 2, 3 e 4); o segundo bloco apresenta uma proposta de resolução desse problema, no qual estratégias e procedimentos de trabalho são levantados e selecionados (atividades 5 e 6); e o terceiro e último bloco que, após o procedimento geral ser posto em ação, trata da análise das informações obtidas, buscando tudo o que ficou evidente diante da questão ou conjectura levantada (atividades 7, 8, 9 e 10).

No Capítulo 2 – Identificação do Problema de Pesquisa (Iniciando a Pesquisa - 1º Bloco de Romberg) – demos início à nossa pesquisa trabalhando sobre as quatro primeiras atividades: identificar um Fenômeno de Interesse; construir um Modelo Preliminar; relacionar o Fenômeno de Interesse e o Modelo Preliminar com ideias de outros pesquisadores, visando a levantar questões específicas ou fazer uma conjectura plausível, que levassem à identificação do problema de pesquisa.

Apresentei, a partir da minha trajetória estudantil e profissional e da minha trajetória profissional rumo à pesquisa, como cheguei ao *Fenômeno de Interesse* desta pesquisa, que é o *envolvimento da Matemática e da Resolução de Problemas, consideradas no contexto do uso das peças do Dominó*.

Para delinear um caminho a ser seguido durante a pesquisa, construímos, dentro da Metodologia de Romberg, um Modelo Preliminar que apresentava uma sequência de passos organizados a serem seguidos, envolvendo variáveis relativas ao fenômeno de interesse e às relações implícitas entre elas. Nesse trabalho, houve necessidade de apresentar o Modelo Preliminar em três versões: Modelo Preliminar 1, Modelo Preliminar 2 e Modelo Preliminar 3, para descrever as evoluções, que pediam mudanças na pesquisa a ser realizada.

Em continuidade, trabalhamos sobre a fundamentação teórica necessária ao desenvolvimento de nossa pesquisa. Para relacionar nossas ideias com ideias de outros, antes de relacionar, é preciso saber o que “outros”, aqueles que tratam temas relacionados aos nossos eixos temáticos, já falaram, refletiram e publicaram. Nossa pesquisa está fundamentada em dois eixos: *Matemática Discreta* como cenário, do qual fazem parte problemas para o ensino-aprendizagem de Matemática, fazendo uso das peças do Dominó e *Resolução de Problemas* como uma importante

Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática capaz de gerar situações que mostram caminhos para produzir novos conhecimentos.

No Capítulo 3 – Matemática Discreta – descrevemos algumas concepções sobre o que é Matemática Discreta. Posteriormente, apresentamos considerações sobre a Matemática Discreta relacionada com aspectos educacionais. Os documentos oficiais, publicações, artigos, livros e teses estudadas que refletem resultados de pesquisas sobre *Matemática Discreta*, forneceram-nos um referencial sólido no que diz respeito a conteúdos, objetivos, competências e habilidades, e indicam a importância de se trabalhar com ela no ambiente escolar em diferentes níveis de ensino, pois a mesma amplia e enriquece o currículo tradicional. A investigação sobre Matemática Discreta foi, para nós, uma experiência muito enriquecedora, pois pudemos constatar a importância e o desconhecimento desse assunto em muitos ambientes educacionais.

No Capítulo 4 – Resolução de Problemas – apresentamos algumas concepções sobre o que é um Problema Matemático e, depois, as Perspectivas Históricas da Resolução de Problemas no Currículo de Matemática. Em seguida, tecemos considerações sobre a Resolução de Problemas, mostrando uma Breve História da Resolução de Problemas, explicitando as Diferentes abordagens de Resolução de Problemas, destacando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, como um caminho para ensinar, aprender e avaliar a matemática escolar. Finalmente, apontamos Diretrizes Futuras e Perspectivas para a Pesquisa e Desenvolvimento Curricular em Resolução de Problemas.

No Capítulo 5 – O Modelo Modificado e a Pergunta da Pesquisa – relacionamos nossas ideias às ideias de outros pesquisadores. Definimos nosso Modelo Modificado e o Problema da Pesquisa: (1) Como a Matemática Discreta pode ser trabalhada através da resolução do Problema da Fernanda? (2) De que forma a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode contribuir, no trabalho em sala de aula, para a construção de conceitos, de conteúdos e de procedimentos matemáticos em diferentes séries da Educação Básica?

No Capítulo 6 – Estratégias e Procedimentos (Dando Continuidade à Pesquisa – 2º Bloco de Romberg) – refletimos sobre as muitas contribuições que

recebemos de nossos “outros” e, ao analisar nosso Modelo Modificado, nos damos conta de que nossa pesquisa ainda pedia mais. Nela, poderíamos assumir duas posturas diferentes, ou seja, aparecer ora como: (1) uma pesquisadora que busca respostas a um problema emergente de sua atuação profissional, procurando identificar a *matemática* que pode ser construída para a sustentação teórica desse problema; (2) uma professora-pesquisadora que ministrou, desde 2001, muitos cursos, oficinas e palestras sobre a temática Resolução de problemas a partir das peças do Dominó. Esse tipo de trabalho foi desenvolvido em Congressos e Encontros de Educação Matemática, em muitas salas de aula de várias instituições, em diferentes níveis de ensino. Esse tema foi ainda trabalhado com alunos da Graduação de Cursos de Licenciatura em Matemática e de Pós-Graduação em Educação Matemática, usando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Tendo pesquisado, estudado e refletido sobre esse assunto, com resultados importantes para a aprendizagem dos alunos, a pesquisadora quer compartilhar essas experiências e espera deixar uma contribuição para a *Educação Matemática*, oferecendo recomendações aos professores do Ensino Básico.

Frente a essas duas posturas colocadas, para responder às questões de pesquisa, foram construídos dois projetos distintos. O Projeto 1, atendendo à postura (1) da pesquisadora, visa à *matemática* que pode ser construída para a sustentação teórica de um problema; e o Projeto 2, atendendo à sua postura (2), visa à *Educação Matemática*.

No Capítulo 7 – O Projeto 1 – para atender à postura (1) da pesquisadora foi desenvolvido o Projeto 1. Nele, nossa primeira ação foi a escolha do conjunto finito formado pelas 28 peças do Dominó. Em seguida, tratamos de aspectos relacionados ao Dominó, fizemos referência ao termo “Efeito Dominó”, apresentamos esse Jogo, explicitamos seus aspectos históricos e algumas notas educacionais sobre suas peças. Depois de tratar matematicamente a própria composição das peças do Dominó, apontamos para a proposição de problemas, a partir de peças do Dominó, criados pela pesquisadora ou encontrados na literatura. Cuidamos da apresentação de Problemas Maiores: o Problema de Perelmán, o Problema de Kordenski, dentre outros, destacando o Problema de Perelmán. Fizemos a exposição dos nossos avanços para o Problema de Perelmán e salientamos os resultados matemáticos

para os Quadrados de Perelmán por nós obtidos. Descrevemos o caminho trilhado para se chegar do problema escolhido: o Problema de Perelmán, ao problema criado: o Problema da Fernanda. Mostramos os avanços por nós obtidos para o Problema da Fernanda, através da orientação de um Trabalho de Conclusão de Curso, dos resultados matemáticos, da resolução computacional e da análise comparativa dos resultados encontrados. Enfim, foi feita *a identificação da matemática que pode ser construída para a sustentação teórica do Problema da Fernanda* e, desse modo, concluído o Projeto 1.

No Capítulo 8 – O Projeto 2 – para atender à postura (2) da pesquisadora foi desenvolvido o Projeto 2. Nele, nossa primeira ação foi o estudo do Programa Curricular de Matemática no Brasil. Em seguida, adotamos uma dinâmica para o trabalho em sala de aula: a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Cuidamos da escolha e da proposição de problemas, a partir das peças do Dominó, dentre os criados ou encontrados na literatura sobre o tema. Em seguida, categorizamos essas atividades em três níveis: Ensino Fundamental I (1º, 2º, 3º, 4º e 5º anos), Ensino Fundamental II (6º, 7º, 8º e 9º anos) e Ensino Médio (1º, 2º e 3º anos). Tratamos da criação de um roteiro para apoiar ao trabalho do professor no desenvolvimento dessas atividades em sala de aula, com a identificação dos objetivos, a resolução e a análise de cada atividade. *Ofertamos recomendações aos professores do Ensino Básico, visando ao trabalho em sala de aula, no cenário da Matemática Discreta, envolvendo problemas matemáticos a partir das peças do Dominó, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.*

Por fim - nas Considerações Finais – procurando combinar os dois projetos desenvolvidos, houve uma retomada às perguntas da tese levantadas, procurando respondê-las. É destacado como a Matemática Discreta foi trabalhada através da resolução do Problema da Fernanda. São apontadas algumas contribuições que esta pesquisa trouxe no sentido de oferecer caminhos para orientar o trabalho de professores em sala de aula e, ainda, para a Educação Matemática. Finalizando, este relatório de pesquisa é deixado para julgamento e possível uso de educadores e pesquisadores interessados em desenvolver suas atividades, a partir das peças do Dominó, no cenário da Matemática Discreta.

Capítulo 1

METODOLOGIA DE PESQUISA

Considerações Iniciais

1.1 – Metodologia de Thomas A. Romberg

1.1.1 – A Educação Matemática como um Campo de Estudo

1.1.2 – As Atividades dos Pesquisadores - Fluxograma de Romberg

1.1.3 – Os Métodos de Pesquisa usados pelos Pesquisadores

CAPÍTULO 1 – Metodologia de Pesquisa

O homem não conhece, não investiga a natureza para satisfazer um desejo imotivado, mas para se realizar, na condição de ente humano. (PINTO, 1979, p. 426-7)

Considerações Iniciais

Ao iniciarmos este trabalho de Doutorado em Educação Matemática, houve necessidade de compreendermos as perspectivas e os fundamentos de uma metodologia de pesquisa. Evidenciava-se uma lacuna em nossa formação universitária de graduação e de pós-graduação, onde não houvera muita preocupação com questões dessa natureza.

Desse modo, procuramos respostas para as perguntas: (1) O que significa fazer pesquisa científica e, portanto, desenvolver um trabalho cientificamente? (2) Porque é importante para o pesquisador adotar uma linha metodológica de pesquisa?

Com relação à questão (1), encontramos uma resposta em Santos (2007) quando afirma que a pesquisa científica produz, primeiramente, conhecimentos para o pesquisador e, depois, um texto escrito para um leitor, o que demanda duas competências distintas: a habilidade de produzir conhecimento e a habilidade de apresentar conhecimento escrito. Então, em nosso entender, a atividade intelectual, que é o cerne da pesquisa científica, é a “construção de um conhecimento novo”, nossa ambição neste trabalho.

Para a pergunta (2), compartilhamos as ideias de Herminio (2008) quando diz que para garantir a consistência de uma pesquisa é necessário um método. Não existe, porém, uma única metodologia de pesquisa correta ou aplicável para todo e qualquer tipo de trabalho. O que determina qual deverá ser a metodologia de pesquisa adotada é o tipo de estudo e o objetivo do trabalho a ser realizado.

Uma metodologia de pesquisa é um conjunto de métodos ou caminhos. Santos (2007, p.15) salienta que “métodos são caminhos facilitadores, em geral complementares e raramente excludentes”. A utilização de uma metodologia adequada é importante, pois a credibilidade da pesquisa transparece no método.

É consensual a ideia de que toda estrutura de um trabalho deve estar pautada numa metodologia de pesquisa. Como nosso objetivo é o de desenvolver uma

pesquisa em Educação Matemática, seguimos as orientações de Thomas A. Romberg¹, no artigo publicado em 1992, no capítulo 3 do *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Manual de Pesquisa em Ensino e Aprendizagem de Matemática), intitulado *Perspectives on Scholarship and Research Methods* (Perspectivas sobre Educação e Métodos de Pesquisa), traduzido por Onuchic e Boero, em 2007.

1.1 Metodologia de Thomas A. Romberg

Romberg (1992, 2007), em seu artigo, justifica a importância da pesquisa em Educação Matemática, situando-a como parte do conhecimento científico atual. Nele, pretende identificar, nas ciências sociais, as amplas tendências de pesquisa que estão relacionadas ao estudo do ensino e da aprendizagem nos cenários escolares e determinar como estas tendências têm influenciado o estudo de Matemática nas escolas. Este artigo é fundamentado em três partes: a Educação Matemática como um campo de estudo; as atividades dos pesquisadores; a variedade de métodos usados pelos pesquisadores, de modo a que o autor possa identificar nas ciências sociais as amplas tendências de pesquisa relacionadas ao estudo do ensino e da aprendizagem em ambientes escolares e determinar como estas tendências têm influenciado o estudo da matemática nas escolas.

1.1.1 A Educação Matemática como um Campo de Estudo

Para Romberg (1992, 2007), o termo pesquisa refere-se a processos, a coisas que se faz, não a objetos que se pode ver e tocar. Pesquisa não deve ser vista como algo mecânico ou como um conjunto de atividades que os indivíduos seguem de maneira prescrita ou predeterminada. As atividades envolvidas na realização de uma pesquisa reúnem mais características de uma arte² do que de uma disciplina puramente técnica e, como em todas as artes, deve haver consenso sobre que procedimentos devem ser seguidos e o que é considerado aceitável para um trabalho de pesquisa.

¹Romberg é educador matemático, professor de Currículo e Ensino do Centro Nacional de Pesquisa em Educação de Ciências Matemáticas, da Universidade de Wisconsin – Madison/USA.

²“Arte é toda ação que envolve emoção, habilidade e criatividade”. Definição de Romeu Tanelini em 2001, professor de Educação Artística da E.E. Capitão Narciso Bertolino de Olímpia/SP. Ainda, a “criatividade envolve fluência, flexibilidade e originalidade”. (GUILFORD, 1959 apud RODRIGUES, 1992).

A Educação Matemática é um campo de estudo, pois, como Shulman (1988) afirmou, a escola é complexa e, assim, as perspectivas e os procedimentos de investigação dos pesquisadores, sobre muitas disciplinas, têm sido usados para investigar as questões levantadas e inerentes aos processos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem de Matemática nas escolas.

Em seu artigo, Romberg apresenta um diagrama de E. G. Begle (1961), que ilustra a interrelação dos componentes no processo da educação escolar e a necessidade de perspectivas e múltiplos procedimentos. Esse diagrama (representado na figura 1) revela que a escola está inserida num contexto social; o currículo de Matemática envolve um subconjunto da Matemática; e o ensino é levado adiante por um professor com um grupo de estudantes em uma sala de aula, dentro de uma escola, ao longo de um tempo. Ou seja, como esclarece Herminio (2008), os professores atuando na escola, os estudantes fazendo parte dessa escola, a disciplina Matemática a ser nela trabalhada e tudo isso objetivando preparar o estudante para que, ao sair da escola, seja capaz de atuar bem na sociedade em que vive.

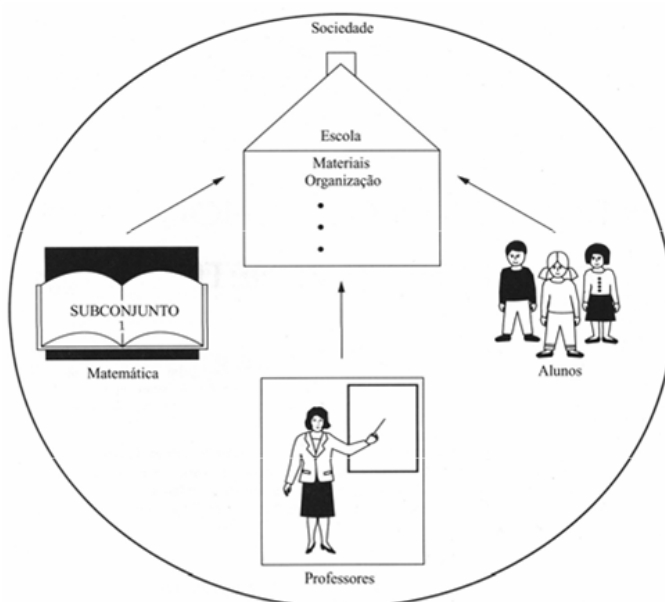


Figura 1 – A relação de sociedade, matemática, alunos, professores e escolarização

Além disso, Romberg (1992, 2007) salienta que esse diagrama foi feito com o objetivo de relacionar o ensino de Matemática com o desenvolvimento de cinco pontos básicos:

- 1) As escolas foram criadas por grupos sociais para preparar seus jovens para serem membros da sociedade.
- 2) Um ensino de excelência em Matemática é abordado a partir de uma preocupação sobre que ideias de Matemática devem ser ensinadas e que procedimentos são indicados para atingir essas ideias.
- 3) O ensino de Matemática será eficaz se o estudante for levado em consideração.
- 4) Um ensino de matemática eficiente deve ser realizado, levando-se em consideração aspectos de educação.
- 5) Os professores são os condutores e guias que fazem o processo de ensino-aprendizagem funcionar.

1.1.2 As Atividades dos Pesquisadores - Fluxograma de Romberg

Neste item, apresentaremos as dez atividades da Metodologia de Romberg, como ele as descreveu, organizadas em um fluxograma (representado na figura 2), atividades que os pesquisadores devem percorrer para a realização de um trabalho de pesquisa. Para um melhor desenvolvimento desse trabalho, o autor distribui essas atividades em três blocos que orientam o modo como se deve investigar, planejar e executar o que foi planejado. Romberg (1992, 2007) esclarece, nesse artigo, que não há nada exclusivo nessa lista de atividades, pois quase todos os métodos de pesquisa trazem uma sequência de atividades semelhantes às que são mostradas por ele. No entanto, o autor justifica esse modelo apresentado em sua metodologia, pois serve para: (1) Esclarecer alguns problemas comuns com que pessoas, que não têm familiaridade com pesquisa, se deparam para entender seu processo de investigação; e (2) Dar fundamentação à discussão das tendências da pesquisa.

Romberg afirma ainda que, independente dos passos apresentados em sua metodologia, nenhum deles necessita ser seguido obrigatoriamente na ordem em que se apresentam, já que intenções, hipóteses, conjecturas, disponibilidade de informações, métodos, entre outras características do pesquisador, não podem necessariamente ser separadas tão claramente.

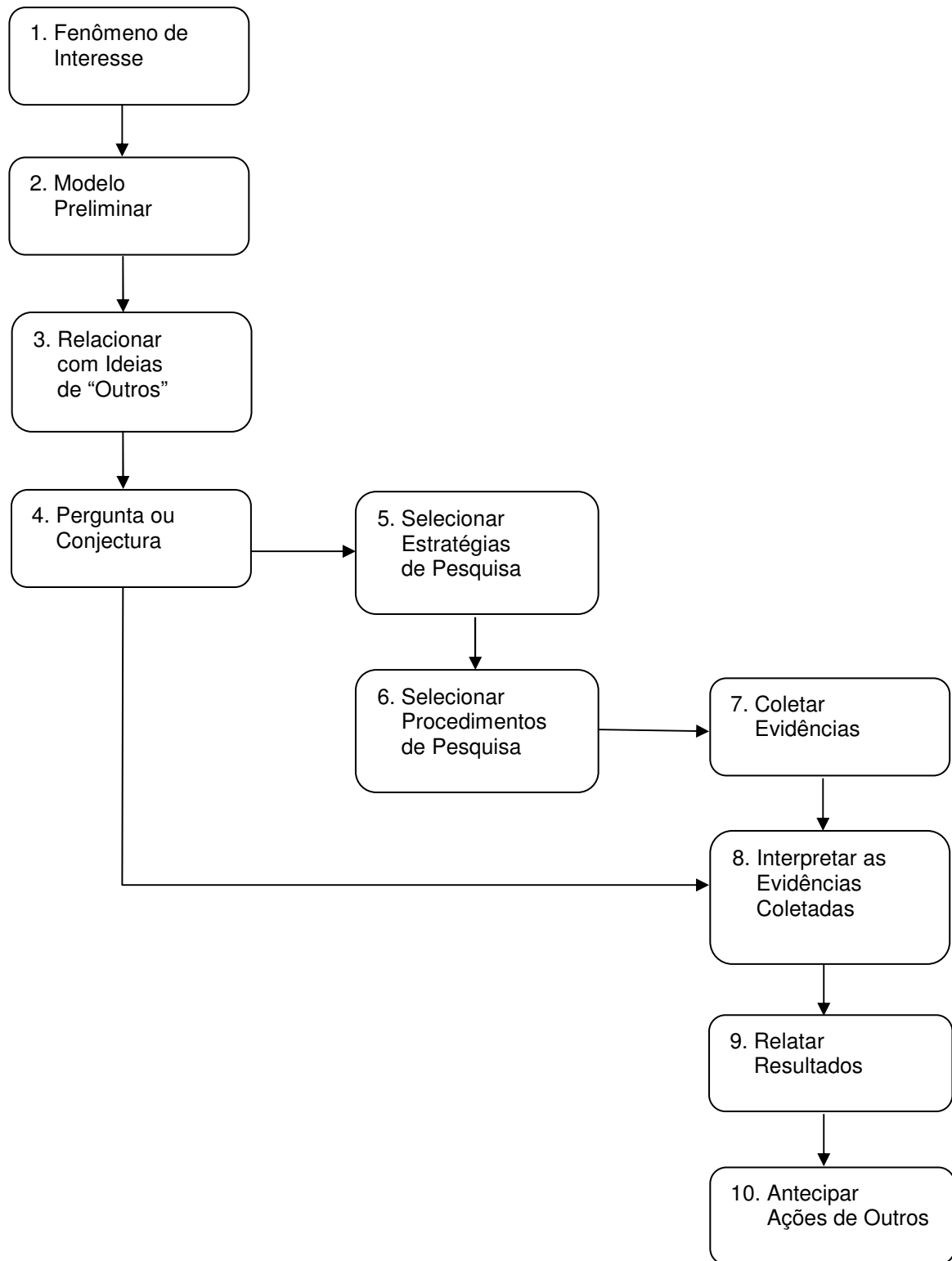


Figura 2 – As atividades de Pesquisa e como elas estão relacionadas
Modelo de Thomas A. Romberg

O fluxograma (figura 2) é composto por três blocos: o primeiro bloco trata da **identificação do problema** (atividades 1, 2, 3, e 4); o segundo bloco se propõe a **resolver esse problema**, onde estratégias e procedimentos de trabalho são levantados e selecionados (atividades 5 e 6); e o terceiro e último bloco, após o procedimento geral ser posto em ação, trata da **análise das informações obtidas**, buscando tudo o que ficou evidente frente à questão ou conjectura levantada.

1º bloco: A Identificação do Problema da Pesquisa.

Para Romberg, essas são as atividades mais importantes, pois estão envolvidas em situar as ideias que se tem sobre um problema particular, relacioná-las com ideias de outros e decidir o que se quer investigar.

1ª atividade: Identificar um Fenômeno de Interesse.

Romberg esclarece que o fenômeno de interesse de toda pesquisa começa com uma curiosidade sobre um fenômeno³ particular do mundo real. Ou seja, o fenômeno de interesse é o objeto de estudo requerido pelo pesquisador.

2ª atividade: Construir um Modelo Preliminar.

Nesta atividade deve ser construído um primeiro modelo formado a partir das variáveis-chave do fenômeno de interesse e das relações implícitas entre elas.

O Modelo Preliminar serve como um ponto de partida para a pesquisa e mostra como as variáveis identificadas pelo pesquisador possivelmente possam estar operando. Ou seja, o pesquisador representa seu problema em um modelo inicial.

³Entendendo-se fenômeno como um fato de interesse científico que pode ser descrito e explicado cientificamente.

3ª atividade: *Relacionar com Ideias de Outros.*

Ao relacionar o Fenômeno de Interesse e o Modelo Preliminar com ideias de outros pesquisadores, pode-se sentir que este passo consiste em examinar o que outras pessoas falaram ou falam sobre o tema escolhido e também em determinar se suas ideias podem explicar, ampliar ou modificar o modelo proposto⁴.

4ª atividade: *Levantar Perguntas ou Conjecturas.*

Este é um passo decisivo para a pesquisa, porque uma grande quantidade de perguntas potenciais pode aparecer ao se examinar um fenômeno particular e “decidir quais perguntas examinar não é fácil” (ROMBERG, 1992, 2007, p.100).

O autor destaca sua preferência por conjecturas ao invés de perguntas. “As conjecturas estão baseadas em algumas relações entre as variáveis que caracterizam o fenômeno e nas ideias sobre aquelas variáveis-chave e suas relações com o esboçado no modelo”.

2º bloco: Resolução do Problema Levantado.

Para a validação das conjecturas é necessária a demonstração e as perguntas devem ser respondidas com justificção. Desse modo, provar a conjectura ou responder a pergunta levantada constitui-se como a resolução do problema da pesquisa.

5ª atividade: *Selecionar uma Estratégia Geral de Pesquisa em busca de Evidências que levem a Resolver o Problema Levantado.*

Nesta atividade, o pesquisador deve decidir “o quê” fazer para responder as questões levantadas ou defender sua conjectura. Para decidir que métodos serão utilizados, Romberg diz que a estratégia geral selecionada deve estar relacionada às questões ou às conjecturas levantadas a partir da visão de mundo que ele, o pesquisador, tem e do modelo preliminar construído que explica o fenômeno de interesse selecionado.

⁴Romberg alerta que o pesquisador deve tomar cuidado para optar por autores que estejam trabalhando sobre a linha de interesse do fenômeno escolhido.

Para estabelecer a Estratégia Geral selecionada, torna-se necessário levantar estratégias auxiliares, apoiadas nas variáveis presentes no Modelo Preliminar.

6ª atividade: *Selecionar um Procedimento Geral de Pesquisa, correspondente à Estratégia Geral selecionada que, por meio de procedimentos auxiliares correspondentes às estratégias auxiliares, possa conduzir o pesquisador durante toda investigação.*

Esse passo mostra como selecionar procedimentos específicos. Para responder as questões específicas que foram levantadas, evidências devem ser coletadas. “É nesse passo que as técnicas usualmente ensinadas em cursos de métodos de pesquisa são importantes: como selecionar uma amostra, como coletar uma informação (entrevista, pergunta, observação, teste), como organizar a informação uma vez que ela tenha sido coletada, e assim por diante” (ROMBERG, 1992, 2007, p.102).

Há um grande número de procedimentos específicos que se poderia seguir para diferentes tipos de questões. O autor destaca que é preciso ter cuidado ao selecionar procedimentos que irão esclarecer as questões levantadas.

Tendo se tornado evidentes os procedimentos auxiliares selecionados e postos em ação, como consequência o Procedimento Geral será posto em ação.

3º bloco: Análise das Informações Obtidas.

7ª atividade: *Coletar Informações.*

Quando o Procedimento Geral é posto em ação, obtém-se informações que serão importantes para responder as perguntas ou atender as conjecturas levantadas. Os procedimentos podem ser totalmente planejados ou até serem redefinidos durante a coleta. Isso depende do modo com que se conduz a pesquisa.

8ª atividade: Interpretar as Informações Coletadas.

Neste estágio, analisam-se e interpretam-se as informações coletadas em função do problema identificado na pesquisa. O pesquisador pode se utilizar de métodos quantitativos, no caso em que se atribui números às informações e os procedimentos matemáticos são seguidos para agregar e resumir as evidências coletadas. Porém, se os números não forem utilizados, os métodos de análise são denominados qualitativos. É importante notar que, em cada investigação, é coletada mais informação do que a necessária para responder à questão. Parte dessas informações é relevante, parte é irrelevante e parte é até não compreensível. Cabe ao pesquisador, então, selecionar aquelas que sejam importantes para a pesquisa. “Tentar encontrar informação importante dentre todas as que estejam disponíveis é uma arte na qual certas pessoas são melhores do que outras” (ROMBERG, 1992, 2007, p.103).

9ª atividade: Transmitir os Resultados para Outros.

Romberg ressalta que ser membro de uma comunidade científica é ter o compromisso de informar aos seus outros membros sobre uma investigação terminada e buscar por seus comentários e críticas. Além disso, é importante que o pesquisador esclareça, em seu trabalho, sua própria visão de mundo, pois suas descobertas serão interpretadas segundo essa visão. Caso contrário, os leitores usarão suas próprias noções para interpretar o estudo feito.

10ª atividade: Antecipar a Ação de Outros.

“Os pesquisadores tentam situar cada estudo em uma cadeia de investigações. Coisas que vieram antes e coisas que vêm após em qualquer particular estudo são importantes” (ROMBERG, 1992, 2007, p.103).

Nessa atividade, o pesquisador está preocupado com o que acontecerá depois de sua pesquisa concluída e deveria antecipar ações posteriores. Desse modo, membros de uma comunidade científica discutem ideias entre si, dão

sugestões para novos passos, modificações de estudos anteriores, elaboração de propostas e assim por diante.

1.1.3 Os Métodos de Pesquisa usados pelos Pesquisadores

Segundo Romberg (1992, 2007, p.112-3)

As atividades 5 a 10 são aquelas onde um pesquisador decide (1) que evidência é necessária para dirigir as questões ou conjecturas levantadas; (2) como coletar, analisar e interpretar aquela evidência; e (3) como relatar as descobertas para outros. Deveria ser observado que os pesquisadores raramente começam uma investigação com uma estratégia fixada para coletar dados ou com um método específico de análise em mente [...] As decisões sobre os métodos são tomadas como uma consequência das atividades 1 a 4. Dado este aviso, há dois aspectos para o uso do termo *métodos de pesquisa* que precisam ser entendidos. Primeiro, os métodos específicos discutidos na literatura de pesquisa podem incluir a maneira na qual a informação é coletada, o modo como ela é agregada e analisada, ou, às vezes, como ela é relatada. Segundo, os métodos vigentes que um pesquisador usa para coletar evidências dependem de pelo menos cinco fatores: a visão de mundo; orientação do tempo das perguntas a serem feitas; se a situação atualmente existe ou não; a fonte de informação prevista; e o julgamento do produto.

O autor diz que a *visão de mundo* situa os métodos usados dentro das crenças de uma particular comunidade de pesquisa. A *orientação do tempo* avalia se as questões que estão sendo levantadas são dirigidas ao passado, presente ou futuro. É preciso conferir se as *situações* existem ou se precisam ser criadas. As *fontes* de evidências devem ser tanto artefatos (livros, discursos e outros), respostas às questões feitas ou observações de ações. O *julgamento* se refere a avaliar estudos como uma categoria distinta de métodos de pesquisa. Há na literatura um grande número de métodos específicos que estão baseados neles ou que fazem uso deles.

Com o objetivo de estudos futuros - que, em nosso entender, serão importantes para a continuidade do trabalho atual - mostraremos o que diz Romberg (1992, 2007), em seu artigo, a respeito de dois tipos de métodos diferentes utilizados pelos pesquisadores:

(1) Métodos usados com uma evidência existente

Existem três métodos nos quais os pesquisadores não são livres para gerar novos dados. Eles devem encontrar o que já existe e não podem alterar a forma em que os dados aparecem. São eles: historiografia; análise de conteúdo; e análise de tendência.

HISTORIOGRAFIA: Nesta abordagem, é feito um esforço para lançar luz sobre condições e problemas atuais através de uma compreensão mais profunda e completa do que foi feito ou ocorreu no passado.

ANÁLISE DE CONTEÚDO: Este método é usado para investigar questões orientadas no presente, quando artefatos atuais podem ser examinados.

ANÁLISE DE TENDÊNCIA: Este método é usado para ir além da informação sobre o passado ou o presente com a finalidade de fazer previsões sobre o futuro.

(2) Métodos usados quando uma situação existe e evidência deve ser desenvolvida

Existem vários métodos diferentes de investigação para os quais uma situação existe e dados específicos devem ser coletados. Em cada método, o pesquisador tem controle sobre a forma pela qual a informação é obtida e agregada, alguns deles são: pesquisa retrospectiva; pesquisa de massa descritiva; entrevistas estruturadas; observações estruturadas; estudos de caso; e pesquisa-ação, dentre outros.

Capítulo 2

IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

(Iniciando a Pesquisa - 1º Bloco de Romberg)

2.1 – Fenômeno de Interesse

2.1.1 – Minha Trajetória Estudantil e Profissional

2.1.2 – Minha Trajetória Profissional rumo à Pesquisa

2.2 – Modelo Preliminar

2.3 – Relacionar com Ideias de “Outros”

CAPÍTULO 2 – Identificação do Problema da Pesquisa

(Iniciando a Pesquisa - 1º Bloco de Romberg)

De presente, recebem-se os resultados já conseguidos pelas gerações anteriores; o compromisso é continuar a perseguir as necessidades, questionar os modelos, aprender a aprender para superar-se. (SANTOS, 2007, p. 24)

A Metodologia de Romberg, entre várias metodologias indicadas para o desenvolvimento de uma pesquisa, foi a escolhida como nossa metodologia de pesquisa para este trabalho (conforme a descrevemos no Capítulo 1). Desse modo, iniciamos o trabalho pelo primeiro bloco que trata da Identificação do Problema da Pesquisa. O problema em questão emergiu da vida profissional da pesquisadora e, portanto, é importante compreender-se o caminho trilhado por ela na direção desta investigação.

2.1 Fenômeno de Interesse

2.1.1 Minha Trajetória Estudantil e Profissional

Meu contato com a área de Educação iniciou-se no ano de 1988, quando ingressei no Curso de Magistério, na EESG Capitão Narciso Bertolino, em Olímpia/SP, e, com a Educação Matemática, em 1992 no Curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Estadual Paulista/UNESP, em São José do Rio Preto.

Concluído o Magistério poderia ter assumido o cargo de Professora no Ensino Fundamental, na cidade de Olímpia, mas optei por cursar uma Faculdade. A escolha, pelo Curso de Matemática, deveu-se ao fato da facilidade que tive, desde o Ensino Fundamental II (5ª a 8ª séries), em resolver problemas.

No decorrer da graduação foi aumentando meu envolvimento com as temáticas educacionais e, no ano de 1994, conclui o projeto, financiado pelo PROLICEN-MEC-SESU-PROGRAD, intitulado *Algumas dificuldades históricas em matemática*.

Depois de concluir a graduação iniciei, como professora de matemática, no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, na rede estadual de ensino, mas senti que precisava aprender mais, não conteúdo, mas saber relacionar melhor teoria e prática com o objetivo de que mais estudantes aprendessem e gostassem de matemática.

Então, em 1997, vim para o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - PPGEM da UNESP/Rio Claro, cursar disciplinas como aluna especial e, no mesmo ano, iniciei a Especialização e Estágio no Laboratório de Informática do Departamento de Matemática, na área de Informática no Ensino de Matemática, projeto financiado pelo convênio da UNESP/IBM.

Nesse ano participei ativamente do Grupo de Informática, outras Mídias e Educação Matemática - GPIMEM. Nesse grupo tive acesso a várias leituras e oportunidade de realizar cursos e adquirir experiência sobre o tema, junto a professores da rede estadual e municipal de ensino, o que resultou em publicação e participação em congressos.

Em 1998, conclui o Curso, financiado pela FAPESP, intitulado *A construção de gráficos de funções com fundamentação teórica e computacional*, na UNESP/Rio Claro.

No ano de 1999, ingressei como aluna regular no Curso de Mestrado do PPGEM da UNESP/Rio Claro e, com apoio financeiro da CAPES, conclui, em 2001, minha Dissertação de Mestrado intitulada *A Escola de Engenharia de São Carlos e a Criação de um Curso de Matemática*.

Enquanto aluna do Mestrado, fui membro do Grupo de Pesquisa em História da Matemática e suas relações com a Educação Matemática, participei e apresentei trabalho em evento nacional.

Em 2000, assumi o cargo de professora efetiva na rede estadual de ensino na cidade de Olímpia/SP. Permaneci nesse cargo até 2002. Destaco esse período como importante na minha vida profissional por ter lecionado em todas as séries do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, quando foi possível aplicar conhecimentos e experiências adquiridas na Pós-Graduação em Educação Matemática.

O Mestrado ampliou meus horizontes profissionais. No início de 2000¹, ingressei como docente no Ensino Superior, no Curso de Licenciatura em Matemática, na Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Catanduva/SP - FAFICA, onde lecionei as disciplinas Metodologia do Ensino de Matemática I e II; Resolução de Problemas na Aprendizagem de Matemática; e Lógica.

No ano de 2002² iniciei, como docente em outros três Cursos de Licenciatura em Matemática, no Centro Universitário de São José do Rio Preto/SP - UNIRP, na Fundação Educacional de Barretos/SP - FEB, e nas Faculdades Ernesto Riscali de Olímpia/SP - FAER.

Nos anos 2001 e 2002, concomitantemente às atividades mencionadas, atuei como Professora-Multiplicadora da Secretaria de Estado da Educação - SEE/SP. Nessa função ministrei, por várias vezes, a oficina intitulada *Um X em questão*, na área de Informática Educativa para professores do Ensino Médio, da rede estadual de ensino da Diretoria de Ensino de Barretos.

Durante esse período conclui, como aluna, vários cursos de capacitação em informática no ensino de matemática, oferecidos pela SEE/SP. Destaco, entre eles, o Curso de Formação de professores multiplicadores realizado em Águas de Lindóia/SP, onde, junto a professores de matemática, representantes do Estado de São Paulo, concluímos a apostila para ser utilizada nos Cursos que ministramos. Foi um período muito rico em aprendizagem, refleti muito sobre a relação teoria e prática usando diferentes *softwares* educativos.

Em 2003, permaneci ministrando aulas na graduação e na pós-graduação na FAFICA e na FEB. Até que, em 2004, assumi a disciplina Cálculo Diferencial e Integral, em Regime de Dedicação Exclusiva – D.E, no Centro Universitário da Fundação Educacional de Barretos - UNIFEB, até março de 2011.

Em 2011, fui aprovada, em Concurso Público do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais/IFMG - Câmpus Formiga, para o cargo de Professora do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico, em D.E, onde atuei nos Cursos de Licenciatura em Matemática e Computação. E, de acordo com a publicação do D.O.U de 22.10.2012, fui redistribuída para o IFSP - Câmpus Barretos, onde desenvolvo atividades acadêmicas e de docência.

¹Em 2000 era aluna do Mestrado na UNESP/Rio Claro, professora da rede estadual de ensino em Olímpia/SP e do Ensino Superior em Catanduva/SP.

²Em 2002 optei pela docência somente no Ensino Superior, ministrava aulas em quatro Instituições.

2.1.2 Minha Trajetória Profissional rumo à Pesquisa

Sempre gostei de trabalhar com problemas em sala de aula. No início de 2000, ao ser convidada para trabalhar na FAFICA, com estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática, minha postura como professora era a de selecionar alguns problemas, considerados importantes para a aprendizagem desses estudantes, propondo-os, discutindo-os e corrigindo-os na lousa. Trabalhava com problemas simplesmente por gostar e considerar importante fazer isso, sem nenhum embasamento teórico.

Em janeiro de 2001, conheci a *Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas*, no Minicurso oferecido pela Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic no VI EPEM/Catanduva/SP, fato que marcou e influenciou minha trajetória profissional.

Ao participar desse Minicurso pude notar que poderia avançar muito em meu trabalho docente, pois a proposta era a de trabalhar com problemas, mas de maneira diferenciada, organizada, estruturada, baseada numa metodologia de ensino, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas.

A partir daí, eu não apenas propunha problemas em sala. O objetivo não era simplesmente o de ensinar a resolver problemas mas, sim, o de usar problemas para ensinar matemática, o que é bem diferente, de acordo com o que havíamos aprendido nesse Minicurso. Antes de propor um problema em sala, sempre me questionava sobre a matemática que pretendia ensinar a partir dele. Por isso é que esse Minicurso influenciou de maneira decisiva minha conduta como docente, o que obviamente refletiu-se em minhas aulas. As preocupações passaram a ser as de buscar problemas, respeitando os conteúdos programáticos de cada série, interessantes, significativos e adequados para trabalhar em sala de aula, assim como ler sobre a referida metodologia³.

Ainda em 2001, fui docente na FAFICA no Ciclo de Oficinas Pedagógicas, coordenado pelo Prof. Dr. Ruy Madsen Barbosa. Esse Ciclo teve a participação de

³Em nossas aulas, trabalhando com Resolução de Problemas, agora de forma estruturada, constatamos o envolvimento dos alunos que, dispostos em grupos, resolviam os problemas propostos, nos quais o resultado final não era o mais importante, e sim as diferentes estratégias que apareciam, as quais, depois eram comparadas e apresentadas para todos com minha ajuda.

professores do Ensino Fundamental e do Ensino Médio das redes municipal, estadual e particular de ensino da cidade de Catanduva e região.

Por essa ocasião, o Prof. Ruy me apresentou possibilidades educacionais do uso das peças Dominó para o ensino-aprendizagem de matemática. Desenvolvi tais ideias, preparei e ministrei, pela primeira vez, uma Oficina sobre o tema no Ciclo, usando a *Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas*. A boa aceitação, motivação e desempenho dos participantes na resolução dos *problemas matemáticos com as peças do Dominó*, constituíram-se forças propulsoras para eu continuar estudando e trabalhando sobre os dois assuntos.

No período de 2003-2005, atuei ativamente como professora na FEB e na FAFICA nos Cursos de Formação Continuada “Teia do Saber”, projeto financiado pela SEE/SP. Nesses Cursos trabalhei, principalmente, sobre as temáticas *Resolução de Problemas*, *Jogos Matemáticos com Dominós* e *Informática no Ensino de Matemática*. Esses Cursos contribuíram de maneira ímpar para minha formação profissional, trabalhar com professores da rede estadual de ensino foi uma experiência enriquecedora, uma via de mão dupla, ensinei e aprendi, produzindo e compartilhando conhecimentos.

É importante destacar que ministrei muitas oficinas e cursos⁴ relacionando as temáticas: *Resolução de Problemas Matemáticos com as peças do Dominó* e *Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas*. Adquiri conhecimento e experiência sobre esses tópicos, mas acredito que ainda há muito para ser estudado e que é possível avançar na direção desses temas.

Das possibilidades emergentes de minha experiência profissional e da participação no GTERP⁵, relacionando as temáticas acima, é que se fundamentou meu Projeto de Doutorado, sob a orientação da Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic, cujas ideias esclarecemos no próximo item.

⁴Para professores da rede estadual e municipal do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, alunos de graduação e de pós-graduação de Cursos de Licenciatura em Matemática, dentre outros. Ver a relação de alguns Cursos que ministrei no Anexo A.

⁵Esse Grupo, Coordenado pela Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic, se reúne semanalmente desde 1992 e um dos aspectos marcante de sua filosofia de trabalho é o de buscar incessantemente desenvolver estudos que efetivamente atinjam a sala de aula, ou seja, que estejam relacionados com questões de ensino-aprendizagem-avaliação tanto sob a perspectiva do aluno quanto do professor.

Como mencionamos no Capítulo 1, concordamos com Romberg (1992, 2007), quanto ao fato de que o termo pesquisa refere-se a processos, a coisas que se faz, não a objetos que se pode ver e tocar. Pesquisa não deve ser vista como algo mecânico ou como um conjunto de atividades que os indivíduos seguem de maneira prescrita ou predeterminada.

Toda pesquisa começa com uma curiosidade sobre um fenômeno particular do mundo real. Em nosso caso essa curiosidade tem raízes, conforme relatamos, em nossa vivência como professora, como pesquisadora e como formadora de professores. Os educadores matemáticos enfocam uma variedade de áreas para pesquisa. Em nossa pesquisa estamos envolvendo **a Matemática e a Resolução de Problemas, consideradas no contexto do uso das peças do Dominó**. Esse envolvimento constitui-se como o nosso *Fenômeno de Interesse*.

2.2 Modelo Preliminar

Ao recomendar a construção de um modelo preliminar como uma das atividades (atividade 2) que os pesquisadores devem realizar, Romberg (1992) se distingue de outros autores que tratam do assunto, tornando seu trabalho, neste aspecto, original. O modelo preliminar é um dispositivo heurístico⁶ que ajuda a “clarear” um fenômeno complexo e serve como ponto de partida e como orientação para o desenvolvimento do processo de pesquisa. Consiste num esquema onde se indicam as variáveis componentes do fenômeno e as relações entre elas. Variáveis são os elementos que compõem e interferem no fenômeno de interesse. (ALLEVATO, 2005, p. 20)

Como aponta minha trajetória profissional, no período de 2001 a 2006, em todas as atividades desenvolvidas – em sala de aula e nas mencionadas no Anexo A. Além disso, em 2002, tive a publicação de um artigo, na SBEM/SP, intitulado *Uma seleção de atividades lúdicas usando as peças do Dominó* e, em 2005, orientei um Trabalho de Conclusão de Curso, com o objetivo de obter todas as soluções para um problema matemático envolvendo as peças do Dominó – *o fato de conseguir novos resultados, sem conhecer o número de possíveis soluções para cada uma das atividades, não estava mais atendendo às expectativas da pesquisadora. Era preciso avançar do ponto de vista matemático*.

Assim, seguindo o Modelo de Romberg, surgiu o *Projeto 1*, onde o *Fenômeno de Interesse 1* foi o de **tratar matematicamente os diferentes**

⁶Heurística: “Que se refere à descoberta e serve de ideia diretriz numa pesquisa, de enunciação das condições da descoberta científica”. (JAPIASSÚ; MARCONDES, 1996 apud ALLEVATO, 2005, p. 20)

problemas matemáticos com o uso das peças do Dominó. O *objetivo* desse *Projeto 1* era o de formalizar matematicamente a plena resolução dos problemas trabalhados.

Foi construído, então, o ***Modelo Preliminar 1***:

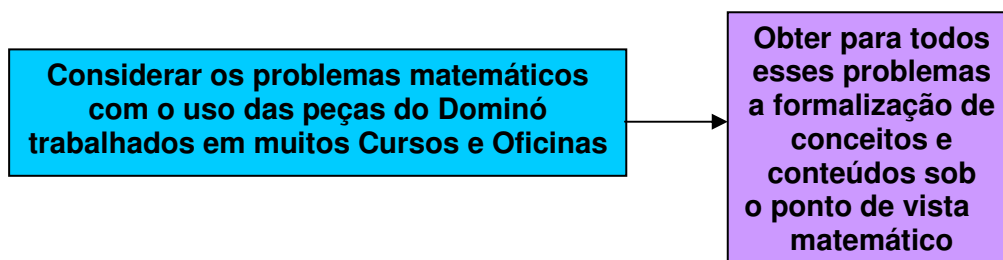


Figura 3 - Modelo Preliminar 1

Observamos que esse *Projeto 1* foi enviado para a seleção do PPGEM da UNESP/Rio Claro em 2009, mas o mesmo, não foi levado à frente.

Notamos que, nesse *Projeto 1*, a pesquisadora teve sua atenção voltada apenas para a *matemática* existente nas atividades desenvolvidas.

Em 2007 e 2008, continuei trabalhando, em diferentes cursos, sobre os dois assuntos: *atividades matemáticas envolvendo as peças do Dominó*; e *Resolução de Problemas em sala de aula*. Fui aprovada na seleção para o Doutorado 2009, do PPGEM da UNESP/Rio Claro, para a qual foi enviado esse mesmo *Projeto 1*.

Com meu ingresso como aluna regular do Doutorado, com a conclusão de três disciplinas cursadas no PPGEM, com orientação frequente, e com participação efetiva no GTERP, ocorreram muitas discussões e novas ideias foram levantadas para nossa pesquisa.

Um módulo, sobre essas atividades, foi ministrado, pela pesquisadora, na PPGEM (*latu sensu*) da UNISO - Universidade de Sorocaba/SP.

A partir desse trabalho, nossa pesquisa pedia por um novo projeto e surgiu o *Projeto 2*.

Para ele, houve mudanças tanto no Fenômeno de Interesse quanto no Modelo Preliminar.

O *Fenômeno de Interesse 2* foi o de **criar uma proposta de ensino, envolvendo problemas matemáticos com as peças do Dominó, cobrindo os níveis de escolaridade do Ensino Fundamental e do Ensino Médio**. O *objetivo do Projeto 2* era o de contribuir para o trabalho do professor em sala de aula, fazendo uso de problemas matemáticos com as peças do Dominó e adotando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Modelo Preliminar 2:

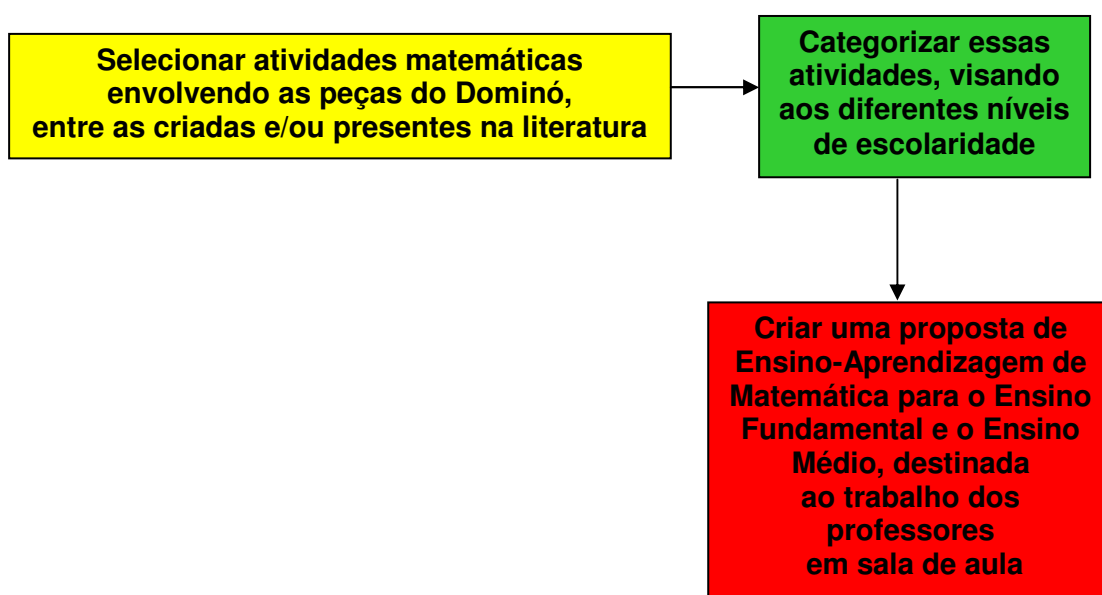


Figura 4 - Modelo Preliminar 2

No *Projeto 2*, a visão da pesquisadora mudou. Nele tem a atenção voltada para *aspectos educacionais*, relacionados ao ensino-aprendizagem de matemática.

Somente em 2010, é que ocorreu o envolvimento da pesquisadora com a necessidade de uma metodologia de pesquisa que se mostrasse suficientemente adequada às ideias e às crenças trazidas por ela. Então, foi criado o Capítulo 1 desta tese, sobre a Metodologia de Romberg que, conforme afirmamos anteriormente, foi a metodologia de pesquisa escolhida, dentre outras, para a presente investigação.

Salientamos que todo o trabalho feito por ela, no decorrer de todos esses anos, influenciou sua visão de mundo, provocando o amadurecimento de suas ideias em relação à pesquisa a ser realizada. Desse modo, nasceu um novo projeto de pesquisa, o Projeto 3, apoiado na evolução dos projetos criados anteriormente.

Neste *Projeto 3* será destacado, como objeto de estudo,

Resolver um problema matemático usando as peças do Dominó, identificando a matemática que pode ser construída através da resolução desse problema

que é, agora, meu *Fenômeno de Interesse 3*.

Os *objetivos* desse *Projeto 3* são: (1) Tratar matematicamente um problema gerado pelo uso das peças do Dominó, identificando a matemática que pode ser construída através da resolução desse problema, apresentando seus fundamentos teóricos; (2) Apresentar uma Proposta de Ensino, cobrindo os diferentes níveis de escolaridade do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, envolvendo problemas matemáticos com as peças do Dominó, usando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, destinada a contribuir para o trabalho dos professores em sala de aula.

O Modelo Preliminar apresenta os passos a serem seguidos para o desenvolvimento de uma pesquisa. Assim, o *Modelo Preliminar* desta investigação está representado na figura 5.

No <i>Projeto 3</i> , agora a pesquisadora tem a atenção voltada tanto para a <i>matemática</i> quanto para os <i>aspectos educacionais</i> das atividades desenvolvidas.

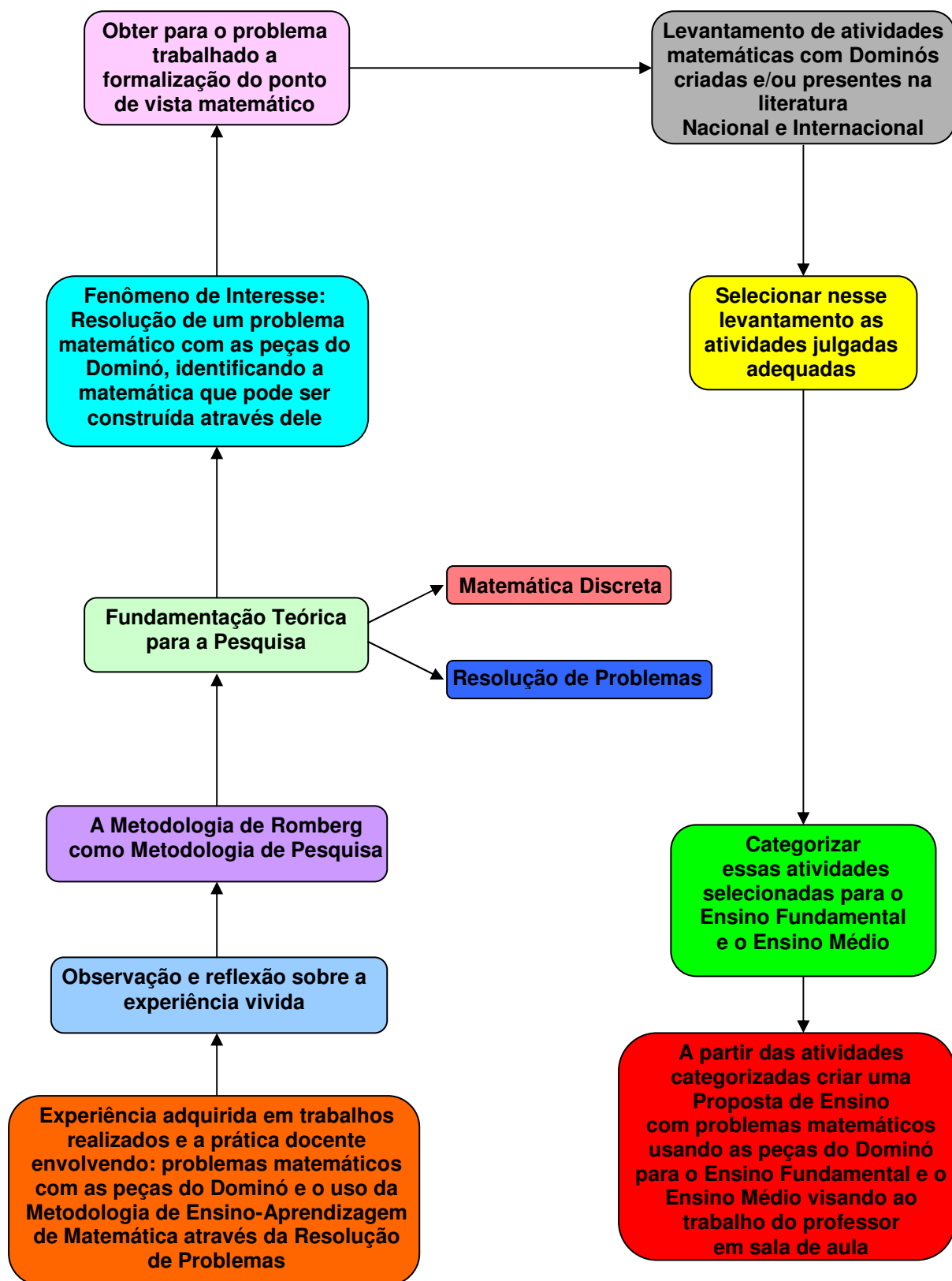
Modelo Preliminar 3:

Figura 5 - Modelo Preliminar 3

2.3 Relacionar com Ideias de “Outros”

Seguindo a Metodologia de Romberg, uma vez definido nosso Fenômeno de Interesse e construído o Modelo Preliminar, o passo seguinte, a atividade 3, é a de relacionar nossas ideias com ideias de outros. Para cobrir essa atividade, antes de relacionar, é preciso saber o que “outros”, aqueles que tratam temas relacionados aos nossos eixos temáticos, já falaram, refletiram e publicaram. Desse modo, compilaremos⁷ trechos de seus textos julgados importantes para nossa pesquisa.

Depois de considerar toda a vivência profissional da pesquisadora e levantados questionamentos sobre o uso das peças do Dominó, trabalhos realizados com elas em sala de aula e, com o apoio da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, foram identificados dois eixos norteadores fundamentais para o desenvolvimento desta pesquisa:

1. *Matemática Discreta* como cenário, do qual fazem parte problemas para o ensino-aprendizagem de Matemática, fazendo uso das peças do Dominó.
2. *Resolução de Problemas* como uma importante Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática capaz de gerar situações que mostram caminhos para produzir novos conhecimentos.

Para desenvolvermos esses dois eixos temáticos, realizamos um levantamento de literatura nacional e internacional. Assim, falaremos sobre a Matemática Discreta e sobre a Resolução de Problemas e, em particular, a resolução de problemas matemáticos promovendo possibilidades de busca de caminhos favoráveis à construção de padrões, de conceitos e de conteúdos matemáticos.

⁷Assumimos a palavra compilar, segundo o dicionário Houaiss (2009), “como reunir, num texto sem originalidade, ideias ou passagens de outros autores ou outras obras, tomadas por mero empréstimo”.

Na verdade, esses dois eixos mencionados constituem o pano de fundo sobre o qual trabalharemos nossa pesquisa. Como esses eixos norteadores a nós se apresentam exigindo muita busca na literatura, decidimos atribuir, a cada um deles, um particular capítulo:

Capítulo 3 - Matemática Discreta;

Capítulo 4 - Resolução de Problemas.

Após a compilação de trabalhos feitos nessas duas linhas de pesquisa, é que o problema desta pesquisa será identificado.

Capítulo 3

MATEMÁTICA DISCRETA

3.1 – O que é Matemática Discreta?

3.2 – Algumas Considerações sobre Matemática Discreta

CAPÍTULO 3 – Matemática Discreta

Mudança é a lei da vida. E aqueles que olham somente para o passado ou o presente estão certamente esquecendo-se do futuro. (John F. Kennedy, West Germany, 1963, apud KENNEY, M.J.; HIRSCH, C.R., 1991, vii)

Como foi mencionado no final do Capítulo 2, para relacionar nossas ideias com ideias de “outros” é preciso, primeiramente, saber o que é que esses outros falam sobre o assunto que estamos pesquisando. Desse modo, no Capítulo 3 e no Capítulo 4, as vozes que serão ouvidas são desses “outros”.

Neste Capítulo, inicialmente, apresentaremos concepções sobre o que é Matemática Discreta. Depois, para tecer considerações relevantes sobre Matemática Discreta relacionada com aspectos educacionais, recorreremos a quem trabalhou bastante com ela, o *National Council of Teachers of Mathematics* - NCTM (Conselho Nacional de Professores de Matemática dos Estados Unidos). Nos E.U.A., esse ramo da Matemática cresceu rapidamente em proeminência na década de 1980. Em seguida, foram consultados documentos oficiais, referentes ao currículo matemático escolar do Brasil, que incluem e trabalham tópicos de Matemática Discreta.

3.1 O que é Matemática Discreta?

A literatura aponta que não existe uma definição oficial para Matemática Discreta, assim procuraremos caracterizá-la.

Matemática Discreta é um termo relativamente novo, considerado como o estudo de propriedades matemáticas de conjuntos e sistemas que têm somente um número finito de elementos.

Dentre várias concepções, encontradas para o termo “Matemática Discreta”, escolhemos algumas delas e as organizamos cronologicamente.

Então, o que é Matemática Discreta?

[...] a Matemática Discreta pode ser contrastada com a noção clássica da Matemática Contínua, que é a matemática subjacente na maioria da Álgebra e do Cálculo. Esses dois tópicos tipicamente usam números reais ou complexos como um domínio para suas funções. **A Matemática Discreta, por contraste, é necessária para a investigação de cenários onde as funções são definidas sobre conjuntos de números discretos ou finitos tais como os inteiros positivos.** (DOSSEY, 1991, p.1, grifo nosso)

A Matemática Discreta não é a clássica Matemática Contínua, como a do Cálculo. Pode-se reformular a dicotomia entre discreto e contínuo dizendo que **a Matemática Discreta está preocupada com conjuntos contáveis, como os inteiros ou os racionais**, enquanto a matemática contínua está preocupada com conjuntos incontáveis, como os reais.

À primeira vista, a Matemática Discreta é muito parecida com a matemática finita. Embora as duas compartilhem alguns tópicos, elas são definitivamente diferentes. Por exemplo, tópicos como a teoria dos grafos e equações diferença não são normalmente encontrados em cursos de matemática finita, **Matemática Discreta não é um curso “terminal” como os cursos de matemática finita frequentemente são, e a Matemática Discreta coloca mais ênfase em métodos algorítmicos**. (HART, 1991, p.68, grifo nosso)

Hart esclarece que falar sobre algoritmos não significa que se esteja pondo ênfase sobre as técnicas algorítmicas. **“A Matemática Discreta se preocupa com planejar, usar e analisar algoritmos que resolvem problemas e desenvolvem teoria, frequentemente fazendo uso de tecnologia computacional”**. (HART, 1991, p. 68, grifo nosso)

A Matemática Discreta é um importante ramo da matemática contemporânea que é amplamente utilizada no mundo dos negócios e da indústria. Elementos de Matemática Discreta têm se apresentado ao longo da própria matemática. No entanto, **a Matemática Discreta surgiu como um ramo distinto da matemática somente em meados do século XX**, quando começou a expandir-se rapidamente, principalmente por causa da revolução da informática, mas também por causa da necessidade de técnicas matemáticas para ajudar a planejar e implementar projetos logísticos monumentais como aterrissar um homem na lua. A Matemática Discreta tem crescido para ser ainda mais importante e difusa hoje. (NCTM, 2007, p.1, grifo nosso)

Descrições de Matemática Discreta frequentemente listam os tópicos que ela inclui, como os grafos vértice-aresta, **contagem sistemática**, e iteração e recorrência. Outros tópicos relevantes para o currículo escolar incluem matrizes, métodos de votação, divisão justa, criptografia, teoria da codificação, e teoria dos jogos. **Em geral, a Matemática Discreta trabalha sobre processos finitos e fenômenos com números inteiros**. Às vezes descrita como a base matemática da ciência da computação, a Matemática Discreta tem aplicação ainda mais ampla, desde o social, administração e ciências naturais que também a usam. A Matemática Discreta contrasta com a matemática contínua, tal como a matemática subjacente à maioria dos Cálculos. Entretanto, essa associação dá a impressão de que a Matemática Discreta é destinada apenas para estudantes avançados da *High School*, embora elementos da Matemática Discreta sejam realmente acessíveis e importantes para todos os estudantes em todos os graus. **Definições gerais de Matemática Discreta a identificam como “a matemática da tomada de decisão para as criações finitas”** (NCTM, 1990, p. 1) **e da matemática para otimizar sistemas finitos**. Os tópicos comuns da Matemática Discreta são os seguintes:

- Modelagem com Matemática Discreta - usando ferramentas matemáticas discretas como grafos vértice-aresta e recorrência para representar e resolver problemas.
- Resolução de problemas algorítmicos - projetando, usando e analisando procedimentos passo a passo para resolver problemas.
- Otimização - encontrando a melhor solução. (NCTM, 2007, p.2, grifo nosso)

3.2 Algumas Considerações sobre Matemática Discreta

Para redigir sobre Matemática Discreta, uma vez feito o levantamento do assunto em literatura nacional e internacional, e selecionados documentos, publicações, artigos, livros, dissertações e teses a serem estudados, optamos por organizar todo esse material cronologicamente.

Em linhas gerais, foram usadas as seguintes referências: (1) *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* do NCTM (1989); (2) *Discrete Mathematics across the Curriculum K-12 Yearbook* do NCTM (1991). Mais especificamente, nesse livro, escolhemos os artigos dos autores: Dossey, Gardiner, Graham, Hart, Bogart e Holliday; (3) *Mathematics Framework for California Public Schools* (1992); (4) *Principles and Standards for School Mathematics* do NCTM (2000); (5) *Discrete mathematics topics in the secondary school curriculum* da autora Boyd (2002); (6) *Navigating through Discrete Mathematics*, grades 6–12 do NCTM (2007); e (7) *The Place of Discrete Mathematics in the School Curriculum: An Analysis of Preservice Teachers' Perceptions of the Integration of Discrete Mathematics into Secondary Level Courses*, da autora Rivera-Marrero (2007). Em seguida, foram consultados documentos oficiais, referentes ao currículo matemático escolar do Brasil, como: Parâmetros Curriculares Nacionais-PCNs, Orientações Curriculares para o Ensino Médio e Publicações da SEE/SP.

Nesta seção, para discorrer sobre Matemática Discreta, usando essas referências norte-americanas, haverá repetições, pois se observa que muitas dessas obras endossam e/ou se apoiam nas anteriores, mas sempre lhes acrescentando novas ideias.

A publicação de 1989, do NCTM - *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (Padrões de Currículo e Avaliação para a Matemática Escolar) - é uma estrutura destinada a criar e implementar mudanças no ensino e na aprendizagem de Matemática em todos os níveis da escola americana, do *Kindergarden* até a *High School*. Isso significa que os *Standards* se comportam como lentes através das quais professores, escolas e sistemas educacionais, podem ver o currículo matemático e a forma como esse currículo se posiciona frente às

necessidades da crescente sociedade tecnológica. Um ramo particular dos *Standards* que vai ao encontro da necessidade de mudança é a Matemática Discreta.

Nesse documento, do NCTM-1989, os padrões curriculares de mudança, organizados em três níveis de escolaridade: k-4, 5-8, 9-12, foram por nós tabelados no quadro abaixo.

Curriculum Standards (Padrões Curriculares)			
Grades¹/ Standards	Grades k-4	Grades 5-8	Grades 9-12
Standard 1	Matemática como Resolução de Problemas	Matemática como Resolução de Problemas	Matemática como Resolução de Problemas
Standard 2	Matemática como Comunicação	Matemática como Comunicação	Matemática como Comunicação
Standard 3	Matemática como Raciocínio	Matemática como Raciocínio	Matemática como Raciocínio
Standard 4	Conexões Matemáticas	Conexões Matemáticas	Conexões Matemáticas
Standard 5	Estimativa	Números e Relações Numéricas	Álgebra
Standard 6	Sentido Numérico e Numeração	Sistemas Numéricos e Teoria dos Números	Funções
Standard 7	Conceitos de Operações com Números Naturais	Cálculo e Estimativa	Geometria sob uma perspectiva Sintética
Standard 8	Cálculo com Números Inteiros	Padrões e Funções	Geometria sob uma perspectiva Algébrica
Standard 9	Geometria e Sentido Espacial	Álgebra	Trigonometria
Standard 10	Medida	Estatística	Estatística
Standard 11	Estatística e Probabilidade	Probabilidade	Probabilidade
Standard 12	Frações e Decimais	Geometria	Matemática Discreta
Standard 13	Padrões e Relações	Medida	Conceitos Básicos do Cálculo
Standard 14			Estrutura Matemática

Figura 6 – Quadro de Conteúdos relacionados aos *Standards* e aos *Grades*

¹Nos U.S.A, hoje, o ensino está dividido da seguinte maneira:

Elementary School (grades K-5): [preKindergarden (5 anos), 1º ano (6 anos), 2º ano (7 anos), 3º ano (8 anos), 4º ano (9 anos) e 5º ano (10 anos)].

Middle School (grades 6-8): [6º ano (11 anos), 7º ano (12 anos) e 8º ano (13 anos)].

High School (grades 9-12): [9º ano - Freshman (14 anos), 10º ano - Sophomore (15 anos), 11º ano - Junior High School (16 anos) e 12º ano - Senior High School (17 anos)].

Como se pode notar, esses *Standards* incluíram a Matemática Discreta como um padrão de conteúdo para o nível secundário. Esse fato foi decisivo para fazer emergir uma série de considerações sobre esse tópico em vários programas da matemática escolar.

Nos grades 9-12 o currículo de Matemática deveria incluir tópicos de Matemática Discreta de modo que todos os estudantes pudessem:

- representar situações-problema usando estruturas discretas tais como grafos finitos, matrizes, sequências e relações de recorrência;
 - representar e analisar grafos finitos usando matrizes;
 - **desenvolver e analisar algoritmos**;
 - resolver problemas de enumeração e de probabilidade finita;
- e ainda, em adição, estudantes que pretendem ir para universidade devem
- representar e resolver problemas usando programação linear e equações diferença;
 - **investigar situações-problema que surgem em conexão com a validação computacional e a aplicação de algoritmos.** (NCTM, 1989, p.176, grifo nosso)

No *Standard* 12 é ressaltado como foco que

Enquanto nos movemos para o século vinte e um, informação e sua comunicação têm se tornado pelo menos tão importantes quanto a produção de bens materiais. Enquanto o mundo físico ou material é mais frequentemente modelado pela Matemática Contínua, isto é, o Cálculo e ideias pré requisitadas de Álgebra, Geometria, e Trigonometria, o mundo não material do processamento de informação requer o uso da Matemática Discreta (descontínua). **A tecnologia computacional, também, exerce uma influência sempre crescente sobre como a Matemática é criada e usada. Os computadores são, essencialmente, máquinas finitas e discretas, e assim tópicos de Matemática Discreta são essenciais para resolver problemas que usam métodos computacionais.** À luz desses fatos, é crucial que todos os estudantes tenham experiências com os conceitos e métodos da Matemática Discreta. (NCTM, 1989, p.178, grifo nosso)

A literatura aponta que, após a publicação desse documento, alguns artigos, não baseados em pesquisas, sobre a integração da Matemática Discreta nas escolas secundárias, foram liberados. Dois livros - Em 1991, o Yearbook *Discrete Mathematics across the Curriculum K-12* e , em 1997, o *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science: Discrete Mathematics in the Schools*² - foram escritos com a finalidade de elaborar e ilustrar as razões pelas quais a Matemática Discreta deve fazer parte do currículo de matemática escolar.

²Livro editado por Rosenstein, J. G. DeBellis, V. A. Sociedade Americana e NCTM, 1997.

No primeiro livro, o Yearbook de 1991 do NCTM, verificam-se aspectos da Matemática Discreta, tais como: por que ela é importante; o que ela compreende nos vários níveis escolares; onde ela aparece no currículo; e algumas ideias sobre o seu ensino. No prefácio desse livro é focado que a Matemática Discreta, como linha unificadora, permeando várias ideias, incorpora muitas recomendações colocadas pelos *Standards*:

- **A Matemática Discreta promove a elaboração de conexões matemáticas;**
- **A Matemática Discreta oferece um cenário para a resolução de problemas com aplicações do mundo real;**
- **A Matemática Discreta trabalha sobre cenários tecnológicos;**
- **A Matemática Discreta favorece o pensamento crítico e o raciocínio matemático.** (KENNEY; HIRSCH, 1991, p. vii, grifo nosso)

No primeiro artigo, do referido livro, intitulado *Discrete Mathematics: The Math for Our Time*, John A. Dossey apresenta a Matemática Discreta como *a Matemática para o nosso tempo*, e faz considerações importantes sobre ela. Segundo o autor

O dicionário define discreto como “distinto de outros; separado; consistindo de partes distintas; descontínuas”. Matemática Discreta, então, potencialmente envolve o estudo de objetos e de ideias que podem ser divididos em partes “separadas” ou “descontínuas” [...] A Matemática Contínua é bem apropriada a situações cujo principal objetivo é a medida de uma quantidade. **Em cenários de Matemática Discreta, o foco está em determinar uma contagem.** Embora alguns coloquem os dois ramos de Matemática, Contínua e Discreta, numa competição frente a frente, a realidade pode mostrar que as duas abordagens se complementam nas aplicações do mundo real. Por exemplo, abordagens discretas dão aproximações para o tamanho de algumas medidas, enquanto que métodos contínuos permitem o estabelecimento de alguns limites para o número de passos ao calcular algoritmos que são finitos na natureza. (DOSSEY, 1991, p.1, grifo nosso)

Ele salienta que

O ramo da Matemática conhecido como Matemática Discreta cresceu rapidamente em importância na década passada. Este crescimento é devido em grande parte às muitas aplicações de seus princípios em negócios e às suas ligações com a Ciência Computacional. **Os teoremas e as estratégias de resolução de problemas, centrais à Matemática Discreta, combinados com o crescente poder dos computadores, abriram novas áreas de investigação e de aplicações.** Entretanto, cidadãos comuns e muitos professores de Matemática nunca ouviram falar em Matemática Discreta. O que é isso perguntam? (DOSSEY, 1991, p.1, grifo nosso)

Esse autor diz que os problemas de Matemática Discreta podem ser classificados em três amplas categorias:

A primeira categoria, *problemas de existência*, trata de reconhecer se um dado problema tem uma solução ou não;

A segunda categoria, *problemas de contagem*, investiga quantas soluções podem existir para problemas com soluções conhecidas; e

A terceira categoria, *problemas de otimização*, focaliza sobre a descoberta de uma melhor solução para um problema particular. (DOSSEY, 1991, p.1-2, grifo nosso)

No que se refere à gênese do currículo de Matemática Discreta, ele enfatiza que

A Matemática Discreta tem origem na resposta das Ciências Matemáticas à necessidade de uma melhor compreensão das bases combinatórias da matemática usada no desenvolvimento de algoritmos computacionais eficientes, na criação de novas abordagens para problemas de pesquisa operacionais, e no estudo das heurísticas subjacentes às abordagens de tais problemas. A existência da Matemática Discreta como uma área separada de estudo teve seu início nos anos 60. E, no início da década de 70, muitos textos influentes apareceram no nível superior de graduação. (DOSSEY, 1991, p.3)

Concluindo, ele afirma que

A Matemática Discreta permite aos estudantes explorarem situações-problema únicas que não são diretamente abordáveis através da escrita de uma equação ou da aplicação de uma fórmula comum. Pedese aos estudantes que frequentemente visualizem a situação através do desenvolvimento de um modelo ou de qualquer outra forma de representação. A teoria não requer aprender um grande número de definições e teoremas, mas realmente requer uma mente afiada e inquisitiva (perspicaz e curiosa). Um desenvolvimento cuidadoso do conteúdo de Matemática Discreta, construir suas ligações ao programa atual, e intensificar as conexões entre abordagem contínua e discreta para tópicos matemáticos, podem dar aos estudantes as oportunidades pretendidas pelos *Standards* e necessárias aos jovens adultos que se preparam para entrar no mundo do trabalho no século XXI. (DOSSEY, 1991, p.8, grifo nosso)

Contrapondo-se às ideias de Dossey, Gardiner (1991) tem outra visão sobre a Matemática Discreta.

Em seu artigo, intitulado *A Cautionary Note* (Uma Nota Cautelosa), ele diz que a Matemática Discreta não é nova e que muitas de suas ideias e técnicas fundamentais emergiram no século dezoito, especialmente com Euler. Mas essas não foram reconhecidas como um ramo separado da Matemática até muito recentemente. Somente durante os últimos quarenta anos é que a Matemática Discreta ganhou sua independência e se tornou crescentemente mais importante tanto na Matemática quanto na vida diária. Isto ocorreu parcialmente devido aos desenvolvimentos dentro da Matemática em si mesma, mas o fator decisivo foi o surgimento meteórico dos computadores. Sem dúvida, uma definição de Matemática Discreta poderia ser dada por “aquelas partes da Matemática que são mais obviamente relevantes para a computação”. (GARDINER, 1991, p.10)

O autor salienta que a interação da Matemática Discreta e dos computadores tem tornado possível aplicações novas e poderosas, tem chamado a atenção para novos tipos de problemas, e tem nos forçado a olhar para a Matemática tradicional em novos modos. Enquanto estas mudanças têm acontecido e, embora elas mereçam sérias considerações, elas não deveriam ser usadas para justificar uma rejeição precipitada à matemática tradicional em favor daquilo que imaginamos ser uma matéria mais relevante.

Gardiner (1991, p.10), citando Lovász e Poincaré, fala que

A ciência computacional penetra a matemática clássica colocando velhas questões em uma nova perspectiva [...] Esta nova perspectiva sobre [...] matemática clássica é de fato um desafio para os educadores matemáticos. A introdução dos computadores (em qualquer nível) é somente uma resposta muito parcial [...] muito mais trabalho terá que ser feito – experimental e teórico – antes que os contornos da resposta fiquem claros. (LOVÁSZ, 1988, p.69)
O ensino não deveria estar submetido a mudanças rápidas sob caprichosas rajadas de modas efêmeras. (POINCARÉ, 1914, p.151)

Segundo Gardiner, poucos matemáticos clássicos foram mais ligados ao espírito moderno do que Poincaré. Poucos matemáticos modernos contribuíram mais impressionantemente para os desenvolvimentos recentes do que Lovász. Ainda, quando chega a ideia de rever a matemática com os estudantes comuns, ambos saem de seus caminhos e recomendam cautela. Antes de olhar mais de

perto para a questão da Matemática Discreta no nível escolar, esse autor recomenda que se deveria tentar explicar por que seria necessário considerar suas recomendações seriamente, pois a educação é um longo período de preparação. Ainda, enfatiza que

A matemática escolar tem que evoluir de um modo controlado. Nunca se deveria permitir que ela perdesse o controle para a recente “moda efêmera”, mesmo que isso significasse continuar, por um certo tempo, a ensinar a matéria à moda antiga [...] O que tudo isso tem a nos dizer sobre a possível introdução da Matemática Discreta no nível escolar? Toda a matemática escolar também facilmente se degenera numa sucessão de rotinas sem significado. E a Matemática Discreta tem características que a tornam vulnerável a tal degeneração. (GARDINER, 1991, p.11-12)

Ao tratar sobre as implicações para a Matemática Discreta no nível escolar ele diz que

Primeiro, se os problemas matemáticos na Matemática Discreta são dados em seu cenário natural, eles tendem a ser mais difíceis – mesmo para aqueles que sentem que saberiam como resolvê-los [...] O valor educacional da Matemática Discreta encontra-se precisamente no fato de que ela força os estudantes a *pensar* sobre coisas muito elementares, tais como contagem sistemática. Entretanto, essa ideia pode ser facilmente enfraquecida pelo fato de que a maioria dos professores de Matemática sentem-se obrigados a “ajudar” os estudantes a resolver problemas difíceis reduzindo as resoluções a um número de passos manejáveis e predizíveis ou regras, requerendo um *mínimo absoluto de pensar* [...] Seu valor educacional, assim, estará perdido. [...] Segundo, embora o trabalho com Matemática Discreta seja elementar no sentido de que ela tem poucos pré-requisitos técnicos, muito dela é intrinsecamente não natural para a média dos adolescentes. [...] Terceiro, é frequentemente dito que Matemática Discreta tem a vantagem de ter muitas aplicações do mundo real aparentemente acessíveis. Estas são acessíveis somente no sentido de que o problema que se está tentando resolver pode ser compreendido (em alguma forma convenientemente simplificada) e que uma solução pode ser efetuada usando-se algum simples algoritmo *dado*. O algoritmo relevante pode ser *implementado* por estudantes da *High School*, embora as ideias matemáticas por trás dele podem estar bem fora do alcance deles. (GARDINER, 1991, p.12-13)

Esse autor ressalta que

No nível introdutório, **a Matemática Discreta deveria estar baseada sobre muitas ideias importantes, não sobre teorias ou algoritmos padronizados**. Ela deveria concentrar-se sobre problemas que requerem que os estudantes pensem em contextos que lhes sejam familiares e naturais, e não deveria recorrer a rotinas pobremente compreendidas. **Os problemas estudados deveriam ser escolhidos de modo que deles se pudesse extrair um pequeno número de técnicas centrais**. (GARDINER, 1991, p.13, grifo nosso)

Gardiner cita Engel (1983, p. 313) e observa que

Se você ensina geometria, você não prova uma amostra aleatória de teoremas. Você seleciona aqueles teoremas dos quais pode dominar o assunto. Sim, este é o problema! Identificar técnicas centrais apropriadas pode ser complicado.

Esta é presumivelmente uma razão porque Lovász esperava que houvesse muito mais trabalho antes que se pudesse esperar atingir um consenso sobre as técnicas centrais apropriadas para o nível escolar e lembra que

Se desejarmos explorar as vantagens educacionais de problemas compreendidos facilmente que forcem os estudantes a pensar, então devemos produzir um currículo revisado que não tente fazer *tanta mudança*. Devemos também desenvolver paradigmas de aprendizagem regulares para ajudar os professores a ensinar os novos tópicos com sucesso. [...] Se se quer explorar a arte de contar, então os estudantes precisam já ter tido experiência com muita contagem estruturada intuitivamente. (GARDINER, 1991, p.13-14)

Esse autor apresenta, para trabalhar com os estudantes, possíveis mudanças curriculares envolvendo os seguintes conteúdos: Contagem (grades 1-12); Inteiros (grades 6-12); Sequências (grades 6-12); Geometria (grades 4-12), Recorrência (grades 6-12); Algoritmos (grades 8-12); e Probabilidade (grades 7-12).

Em seu artigo, intitulado *Strengthening a K-8 Mathematics Program with Discrete Mathematics* (Fortalecendo um Programa Matemático de K-8 com Matemática Discreta), Graham (1991, p. 29) diz que muitos conceitos, problemas, atividades, explorações, e experimentos de Matemática Discreta já estão presentes nos programas matemáticos da *Elementary* e da *Middle School*. “O que é necessário é uma atenção mais focada sobre esses tópicos”. Essa autora diz que os exemplos citados, nesse artigo, são uma pequena amostra das muitas ideias que já estão ou que podem ser incorporadas no currículo de matemática. Com o tempo, mais Matemática Discreta que é apropriada para esses estudantes pode ser adicionada ao programa.

Para ela o estudo de Matemática deveria ser uma experiência ampla e desafiadora para os estudantes de modo que eles pudessem ser preparados para o século XXI. Os professores são encorajados a levar seus estudantes à exploração e à investigação de tópicos de Matemática Discreta para ampliar sua perspectiva de estudo e de aplicação de Matemática.

No seu artigo, intitulado *Discrete Mathematics: An Exciting and Necessary Addition to the Secondary School Curriculum* (Matemática Discreta: Um Acréscimo Excitante e Necessário para o Currículo da Escola Secundária), Hart faz considerações sobre tópicos de Matemática Discreta como: teoria dos grafos, combinatória, equações de diferenças, matrizes, empacotamento de caixas e teoria da votação. Abaixo, transcrevemos trechos de seu texto sobre equações de diferenças.

Uma equação de diferença é uma equação que envolve recorrência. Recorrência é o processo de definir alguma coisa em termos de si mesma numa forma espiral mais do que numa forma circular. Por exemplo, a quantidade de dinheiro em uma conta bancária pagando juros este ano, depende de quanto se tinha na conta bancária no ano passado, que depende do montante que se tinha na conta no ano anterior, e assim por diante, até que a espiral pára no primeiro depósito feito no tempo zero [...]. As equações de diferenças não são alguma coisa nova; elas são exatamente o que estava sendo estudado, agora mais explicitamente. Elas também são conhecidas como equações de recorrência ou relações de recorrência. [...] “As equações de diferenças são importantes porque elas descrevem mudança, e mudança é uma característica essencial do mundo real”. As ferramentas padrão usadas para descrever mudança contínua são o cálculo e as equações diferenciais. As equações de diferenças podem ser pensadas como análogos discretos de equações diferenciais. As equações diferenciais envolvem declividades e linhas tangente, isto é, derivadas, e equações de diferenças envolvem declividades e linhas secante. Uma das belezas das equações de diferenças é que elas nos permitem fazer muitas aplicações de equações diferenciais sem ter que primeiro aprender Cálculo. (HART, 1991, p. 71)

Como matrizes podem ser usadas nos cursos de Álgebra e Cálculo, nesse trabalho pode-se ler que

O tópico matrizes é um dos tópicos mais negligenciados no currículo tradicional. Matrizes são ferramentas poderosas usadas em muitas aplicações. Por exemplo, matrizes podem ser usadas para armazenar dados, representar gráficos, representar transformações como as rotações no plano, resolver sistemas de equações lineares, descrever as cadeias de Markov e modelar jogos [...] Com muita frequência as matrizes são usadas em sala de aula somente para resolver sistemas de equações lineares. Às vezes elas não são usadas. Mais instrução sobre matrizes é provavelmente a maneira mais rápida e fácil para obter mais Matemática Discreta nas escolas. (HART, 1991, p. 72)

Hart (1991) esclarece a razão de devermos ensinar Matemática Discreta nos *grades 7-12*. Ele disse, em 1991, que cada relatório nacional sobre educação matemática incluía recomendação para se ensinar Matemática Discreta nas escolas secundárias. Em particular, os *Standards-1989* recomendavam que o estudo da Matemática Discreta deveria ser incluído para todos os estudantes, não somente para os estudantes vinculados à Universidade. Nessa época, a maioria dos relatórios do Estado fazia uma recomendação semelhante.

Nesse artigo, Hart (1991), nas páginas 74 a 76, enfatiza que essas recomendações foram feitas, por muitas razões:

(1) A Matemática está viva.

Os estudantes tendem a acreditar que a Matemática é seca e árida e que tudo isso tem sido conhecido por centenas, ou mesmo milhares, de anos. Disse Hart: ouvi até mesmo estudantes perguntando como alguém pode obter um Ph.D. em Matemática - não porque seria muito difícil, mas porque um Ph.D. requer algo novo, e não há nada de novo para fazer em Matemática. É difícil acabar com esse equívoco no contexto da Aritmética, Álgebra, Geometria e Cálculo, uma vez que estes são de fato ramos muito antigos da Matemática, e os novos desenvolvimentos tendem a ser bastante técnicos para apresentar nas escolas secundárias. A Matemática Discreta, porém, está repleta de novos desenvolvimentos e problemas não resolvidos que podem ser apresentados aos estudantes que têm pouquíssimos conhecimentos matemáticos.

Por exemplo, o problema do caixeiro viajante - “Dado um conjunto de n cidades, um vendedor deve partir de uma cidade inicial, visitar todas as demais cidades uma única vez e regressar posteriormente à cidade de origem, de tal forma que a distância percorrida seja mínima”³ - é facilmente compreendido como uma tentativa de encontrar o caminho ótimo para percorrer um conjunto de cidades. Matemáticos têm trabalhado sobre ele durante décadas, problema para o qual ninguém conhece uma solução eficiente.

O problema de empacotamento de caixas - “Suponha que oito caixas grandes de livros devam ser despachadas para uma nova biblioteca. As caixas têm os seguintes pesos, em centenas de libras: 32, 60, 56, 40, 48, 20, 60 e 64. Se os

³Esse enunciado é apresentado por Geraldo Robson Mateus DCC/UFMG. Disponível em: <<http://www2.dcc.ufmg.br/laboratorios/lapo/ensino/.../Caixeiro.pdf>>. Acesso em 07 jun. 2011.

caminhões têm uma capacidade de 12 000 libras cada um, qual é o número mínimo de caminhões necessários para transportar todos os livros que devem ser enviados ao mesmo tempo?”⁴ - é outro exemplo desse tipo, para o qual não se conhece nenhum algoritmo eficiente que possa resolvê-lo de um modo geral.

Na área de equações de diferenças, o comportamento de uma delas, mesmo simples, como $A(n + 1) = r A(n) \cdot [1 - A(n)]$, ainda está sendo estudada e tem implicações para a compreensão do caos. Os estudantes podem mesmo fazer a “investigação” sobre o comportamento de uma equação como essa simplesmente escolhendo valores diferentes para um $A(0)$ e r e usando uma calculadora ver o que acontece. Assim, uma contribuição importante da Matemática Discreta para a educação matemática do ensino secundário é ajudar a trazer o entusiasmo e a vitalidade da Matemática para a sala de aula.

(2) Resolução de Problemas e Modelagem são importantes.

Resolução de Problemas foi o tema central da educação matemática na década de 1980. É ainda importante. O estudo da Matemática Discreta pode, de maneira única e significativa, melhorar a capacidade dos estudantes em resolver problemas, desenvolvendo sua habilidade para usar a ferramenta poderosa da resolução de problemas algorítmicos.

A modelagem matemática é uma habilidade importante e relacionada àquilo que os estudantes devem adquirir. No entanto, a única modelagem que muitos estudantes veem, se é que eles a reconhecem como tal, é a representação de um problema enunciado por uma equação algébrica. A Matemática Discreta oferece uma variedade de novos e poderosos modelos matemáticos. Grafos e matrizes em particular podem ser usados para modelar muitos problemas interessantes e podem proporcionar uma nova área para o ensino, a aprendizagem e a apreciação da modelagem matemática.

⁴Esse enunciado é apresentado por (HART, 1991, p. 72-73).

(3) A Matemática Discreta tem muitas aplicações.

Segundo Hart (1991), a Matemática Discreta é amplamente usada nos negócios, na indústria e no governo. Por exemplo, a teoria dos grafos pode ser usada para programar todas as subtarefas em um grande projeto, para alcançar o melhor tempo de conclusão; as equações diferença são uma ferramenta matemática essencial para empresas de engenharia de alta tecnologia; e as matrizes são indispensáveis para a computação gráfica.

Uma indicação da aplicabilidade de Matemática Discreta na nossa sociedade moderna é mostrada por um grande projeto empreendido pelo *Consortium for Mathematics and Its Applications* - COMAP (Consórcio de Matemática e Aplicações) nos anos oitenta. O propósito desse projeto foi “trazer para o estudante o entusiasmo do pensamento matemático contemporâneo e novas aplicações”. O livro, produzido pelo COMAP-1988, tem cerca de 80% de Matemática Discreta. Portanto, um grande projeto enfatizando aplicações de Matemática produziu uma publicação em que predomina a Matemática Discreta.

Esse autor diz que nada disso quer dizer que a outra Matemática não seja tão útil como a Matemática Discreta. Antes, o ponto a ser considerado é que a Matemática Discreta é amplamente útil, e se quisermos dar uma representação justa de Matemática e suas aplicações, deveríamos ensinar Matemática Discreta juntamente com os tópicos mais tradicionais.

(4) A Matemática Discreta complementa e enriquece o currículo tradicional.

A Matemática Discreta não é um concorrente do currículo tradicional, nem é uma revolução que vai mudar radicalmente a nossa forma de ensinar ou os livros didáticos a partir dos quais nós ensinamos. Ela simplesmente amplia e enriquece o currículo de matemática. De fato, a Matemática Discreta realmente complementa os tópicos tradicionais como Álgebra, Geometria e Cálculo da escola secundária:

- O método de Newton é uma equação diferença que foi desenvolvida usando Cálculo para encontrar os zeros de funções contínuas. É um exemplo da estreita ligação entre a Matemática Contínua e a Matemática Discreta.

- Habilidades algébricas são necessárias e reforçadas ao longo da Matemática Discreta. Por exemplo, um dos fatores quadráticos frequentes quando se resolve equações diferença lineares de segunda ordem e sistemas de equações lineares é uma parte essencial da resolução de problemas em teoria dos jogos e programação linear.
- Na geometria, a teoria dos grafos pode ser usada para enriquecer o estudo de polígonos e poliedros, e equações diferença dão origem à nova e fascinante geometria dos fractais.
- A Matemática Discreta pode enriquecer conhecimentos básicos de Matemática. Por exemplo, o tema da distribuição em partes iguais é uma boa aplicação do arredondamento de frações.

Apesar dos detalhes desses exemplos não serem dados, o ponto que eles trazem é que a Matemática Discreta é realmente complementar ao currículo tradicional da escola secundária.

Nesse artigo, Hart (1991), nas páginas 76 a 77, aponta como se pode ajustar a Matemática Discreta no currículo. Ele diz que, apesar de um currículo já lotado, existem várias estratégias viáveis para a inclusão de Matemática Discreta no currículo:

(1) Enfatizar tópicos de Matemática Discreta que já estão colocados.

Matrizes, contagem, indução, sequências, conjuntos, lógica são tópicos de Matemática Discreta que já fazem parte do currículo atual. Poder-se-ia começar o ensino de Matemática Discreta enfatizando esses tópicos e trazendo-os para fora da obscuridade em que eles podem ter caído.

(2) Adotar uma abordagem discreta para tópicos antigos.

Por exemplo, resolver sistemas de equações lineares usando matrizes, representar as relações por meio de gráficos e matrizes, usar fórmulas recursivas para representar sequências, ou usar matrizes para representar as transformações em uma unidade na geometria transformacional.

(3) Ensinar pequenas unidades (2 a 10 dias) sobre novos tópicos de Matemática Discreta.

Tópicos como a teoria dos grafos, equações diferença, teoria dos jogos ou programação linear podem ser ensinados. Há espaço no currículo? Sim. Muitos professores já estão ensinando pequenas unidades sem eliminar quaisquer outros

tópicos fazendo uso de tempos específicos durante o ano mais eficientemente. Além disso, pode-se dar espaço para Matemática Discreta reduzindo o tempo gasto sobre alguns outros tópicos.

(4) Ministrando curso de um semestre inteiro sobre Matemática Discreta.

A Matemática Discreta é apropriada e útil para todos os estudantes. Portanto, um curso de Matemática Discreta poderia se ajustar em muitos lugares. Poderia ser ensinada em níveis gerais de Matemática, poderia ser um curso para estudantes que completaram Álgebra 1 ou Geometria, mas ainda não estão prontos para a Álgebra 2, que poderia ser ensinada no mesmo ano, com o Pré-Cálculo, ou poderia ser um curso para seguir ou substituir o Cálculo. Todos estes cursos são possíveis, pois existem muitos tópicos dentro da Matemática Discreta que podem ser abordados em vários níveis de sofisticação.

(5) Integrar a Matemática Discreta em todos os cursos.

Fazer isso é parte da questão do currículo integrado geral, mas é menos penosa, uma vez que a Matemática Discreta pode ser integrada separadamente em cursos já existentes. Essa integração pode ser realizada de acordo com as três primeiras categorias anteriores, bem como usando tópicos de Matemática Discreta como breves exemplos e aplicações dentro do currículo existente. Assim, um exemplo da teoria dos jogos poderia ser usado como uma aplicação de resolução de sistemas de equações lineares. Um exemplo de distribuição, como repartir assentos em uma legislatura do Estado, poderia ser usado como uma aplicação de arredondamento de frações. Calcular o Índice de Poder de Banzhaf⁵ poderia ser usado como uma aplicação relacionada a conjuntos e subconjuntos.

⁵“Um sistema de votação ponderado é aquele no qual os participantes podem ter número de votos distintos e o poder de cada participante no sistema de votação se mede por sua capacidade para influir nas decisões [...] Em 1946, Lionel S. Penrose propôs um índice para calcular o poder de voto de um jogador (Penrose index). Para tanto, é preciso calcular todas as combinações possíveis que um jogador pode utilizar para formar uma coalizão com outros jogadores para conseguir a maioria qualificada. John F. Banzhaf III realizou análise similar à de Penrose para sistemas de votos em blocos baseado em análises probabilísticas, popularizando este método que ficou mais conhecido como o Índice de Poder de Banzhaf. O poder de um jogador se define como sua capacidade de influir nas decisões aprovadas mediante um jogo de votação ponderada. Os índices buscam medir, a priori, este poder, baseados na capacidade de cada jogador para participar das coalizões vencedoras. É uma medida de poder mais precisa do que o número de votos que o jogador possui”. Zyczkowski & Stomczynski (2004) descrevem um algoritmo capaz de computar o Índice de Poder de Banzhaf. Esse assunto é tratado no artigo de Francisco de Sousa Ramos e Ana Carolina da Cruz Lima. Disponível em: <http://www.bnb.gov.br/content/aplicacao/eventos/forumbnb2008/docs/o_indice_de_poder_de_banzhaf.pdf>. Acesso em 07 jun. 2011.

Hart diz que o seu artigo contempla uma breve introdução à Matemática Discreta e, ainda, nele

O conteúdo e o método de Matemática Discreta foram examinados, comparações foram feitas com outras tendências e tipos de Matemática, e as razões para a inclusão de Matemática Discreta no currículo da escola secundária, juntamente com estratégias para fazê-la, foram discutidas. A conclusão geral só pode ser que a Matemática Discreta é um acréscimo excitante e necessário para o currículo da escola secundária, por isso vamos ensiná-la e apreciá-la! (HART, 1991, p. 77)

No artigo intitulado *The Roles of Finite and Discrete Mathematics in College and High School Mathematics* (Os Papéis da Matemática Discreta e Finita no *College* e na *High School* em Matemática), Bogart (1991) comenta sobre o que é um curso de Matemática Finita; o que é um curso de Matemática Discreta; apresenta a distinção entre Matemática Discreta e Matemática Finita; e responde as duas questões: (1) A Matemática Finita é apropriada para a *High School*? e; (2) A Matemática Discreta é apropriada para a *High School*?

Segundo esse autor podemos distinguir Matemática Finita como o ramo da Matemática Discreta que lida com os processos, passo a passo, com um número finito de etapas. Essa descrição caracteriza o assunto matematicamente, mas não pedagogicamente. A Matemática Finita, então, é um curso essencialmente terminal que tenta desenvolver certas habilidades e uma consciência das aplicações de Matemática fora da tradicional sequência Álgebra-Trigonometria-Cálculo. Embora a Matemática Finita aumente a amplitude e a consciência matemática dos estudantes e pode introduzir novas habilidades, ela não visa a aumentar a sofisticação matemática dos estudantes.

Com relação à distinção entre Matemática Discreta e Matemática Finita ele afirma que

Os cursos de matemática finita se concentram em tópicos de uso finais, como programação linear, estatística, finanças e aplicações de probabilidade, enquanto os cursos de Matemática Discreta se concentram igualmente em tópicos de uso futuro como relações de equivalência, indução, recursão, análises de algoritmos, e a idéia de prova. Esta dicotomia é semelhante à distinção do NCTM em seu *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (NCTM, 1989) entre os tópicos para todos os estudantes e os tópicos para os estudantes interessados no *College*⁶. Parece, no entanto, que as recomendações do NCTM para programação linear e análise de algoritmos na Matemática Discreta são excessões para esta regra. A programação linear, como um tópico final que exige apenas álgebra simples e direta, seria melhor que fosse incluída para todos os estudantes. A análise de algoritmo assintótico exige ideias semelhantes às ideias de limites e é útil principalmente para estudantes que irão utilizá-la mais tarde em estudos da ciência da computação ou na compreensão de limites. Assim, este tópico pode melhor ser restrito aos estudantes que pretendem ir para o *College*. As semelhanças entre os cursos de Matemática Discreta e Matemática Finita e os padrões recomendados pelo NCTM sugerem que, com modificações apropriadas, esses cursos podem ser bem adaptados para as escolas secundárias. (BOGART, 1991, p. 82)

E, concluindo, esse autor salienta que

Qualquer um dos dois tipos de cursos de Matemática Discreta agora ensinados nos *Colleges* poderiam ser apropriados para os estudantes da *High School*. Porque os livros de Matemática Finita são destinados aos estudantes do *College* que tiveram a menor quantidade possível de Matemática na *High School*, esses livros podem formar a base para um curso destinado aos estudantes que não vão para o *College* em Matemática. Exceto pela diferença de ritmo entre *High School* e *College* em Matemática, não deve ser difícil integrar alguns dos livros de Matemática Finita atuais em um curso de Álgebra. Se os estudantes não interessados em ir para o *College* fizerem cursos fora do segundo ano de Álgebra, a Matemática Finita deveria ser seriamente considerada para poder seguir até o último ano de Álgebra. O material dos cursos de Matemática Discreta do *College* é mais apropriado para o estudante do *Precollege* do que Cálculo. Integrando este material em um curso de “Funções e Gráficos Contínuos e Discretos” pode-se proporcionar uma melhor fundamentação para o Cálculo e uma melhor base para a Matemática do *College* em geral do que o sistema atual. Para todos, exceto os melhores estudantes, um curso de um ano inteiro de Matemática Discreta seria uma melhor preparação para a Matemática do *College* do que um curso AP⁷ de cálculo. (BOGART, 1991, p. 85-86)

⁶*College* nos E.U.A é Ensino Superior em Faculdades.

⁷AP Calculus Course: Curso AP de Cálculo

Advanced Placement Exam Calculus – São testes que os estudantes fazem para documentar seu conhecimento na Disciplina.

Holliday no seu artigo, *Graph Theory in the High School Curriculum* (Teoria dos Grafos no Currículo da *High School*), enfatiza que

Para cursos mais fortes na *High School Junior ou Senior*, a teoria dos grafos elementar pode ser uma abordagem importante e adequada para a apresentação da Matemática Discreta. A Teoria dos Grafos é um tópico não ameaçador no qual a análise dos resultados padrão pode dar aos estudantes excelentes exemplos da importância de definições precisas, contagem de argumentos, provas indutivas, algoritmos e aplicações do mundo real. (HOLLIDAY, 1991, p.87)

A publicação de 1985, *Mathematics Framework for Califórnia Public Schools* (Estrutura Matemática para as Escolas Públicas da Califórnia), identificou sete linhas de conteúdo matemático: número, medida, geometria, padrões e funções, estatística e probabilidade, lógica e álgebra. O documento de 1992, *Mathematics Framework for Califórnia Public Schools*, endossa aquelas linhas, e adiciona outra, a Matemática Discreta.

Esse documento diz que a importância da Matemática Discreta tem crescido significativamente nas últimas décadas, e que o currículo da *High School* deve refletir sobre este fato. A Matemática Discreta, o estudo de sistemas com entidades separadas (discretas) é contrastado com sistemas envolvendo quantidades contínuas. Isso não significa que tudo que não é contínuo deva ser considerado Matemática Discreta. A aritmética com inteiros, por exemplo, é tratada no padrão *número*, não na Matemática Discreta, pois o conjunto dos inteiros é infinito.

Essa publicação realça que

A Matemática Discreta é especialmente importante nas ciências da informação e outras situações nas quais as relações entre conjuntos finitos de elementos são de interesse.

Gráficos finitos e suas representações matriciais associadas são importantes adições ao repertório de ferramentas para resolução de problemas pelos estudantes. Os diagramas, as redes e os fluxogramas que estudantes constroem para modelar situações ou usam para planejar, esquematizar e tomar decisões podem ser explorados por suas propriedades matemáticas. **Os estudantes precisam experimentar desenvolvendo e analisando algoritmos em uma variedade de situações: na prática (instruções, jogos, procedimentos); no computador (programação, aplicações); e na matemática (fatoração em números primos).** Além disso, **eles deveriam investigar técnicas de contagem e organização** e compreender como estas técnicas são usadas na probabilidade. Muitas dessas ideias da Matemática Discreta servem para projetos práticos e para a integração com temas de outras áreas do currículo, especialmente as ciências sociais. (MATHEMATICS FRAMEWORK, 1992, p.149, grifo nosso)

Ainda, esse documento traz considerações sobre a Matemática Discreta *no núcleo do currículo* e *no currículo posterior*. No primeiro caso afirma que: situações realísticas frequentemente têm características discretas que podem ser representadas por estruturas matemáticas apropriadas para os estudantes da *High School*, particularmente os grafos orientados e não orientados e suas matrizes associadas. Os estudantes podem usar essas ideias para dar sentido em esquematizar, rotacionar e trabalhar com redes; empregar métodos de caminhos críticos, nos contextos práticos, e usar métodos simples para organizar classificações como hierarquias ou classificação cruzada. A ideia de recorrência é desenvolvida como um meio de reduzir situações complicadas a outras mais simples. Os estudantes constroem, analisam e comparam algoritmos, e usam métodos gráficos de programação linear e suas analogias discretas como uma técnica de tomada de decisão. Métodos combinatórios são usados para analisar situações envolvendo probabilidades. Referindo-se ao segundo caso, fala que: os estudantes se tornam familiares com operações matriciais elementares e as implicações dessas operações em diferentes situações. A indução matemática é desenvolvida como uma técnica de prova formal com uma variedade de aplicações.

Em 2000, o NCTM publicou os *Principles and Standards for School Mathematics* (Princípios e Padrões para a Matemática Escolar), fruto da reflexão e da revisão do *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, de 1989. Esse novo documento não inclui a Matemática Discreta como um padrão de conteúdo, separadamente, como os *Standards* -1989 fizeram. Nos *Standards*-2000, os principais tópicos de Matemática Discreta são incluídos, mas eles estão distribuídos ao longo dos Padrões, ao invés de receber um tratamento separado, eles se espalham a partir do *pre-K* até o *grade 12*⁸.

Essa publicação enfatiza que

Como um ramo ativo da matemática contemporânea, que é amplamente utilizada nos negócios e na indústria, a Matemática Discreta deveria ser uma parte integrante do currículo de matemática escolar, e esses tópicos naturalmente ocorreriam através de outros ramos da matemática. Três

⁸No entanto, de acordo com Rivera-Marrero (2007, p.2) “não é claro no livro, onde a Matemática Discreta é integrada nos *grades K-3*”.

áreas importantes de Matemática Discreta estão integradas dentro desses *Standards*: combinatória, iteração e recorrência, e grafos vértice-aresta. Essas ideias podem ser sistematicamente desenvolvidas desde o *prekindergarten* até o *grade* 12. Além disso, matrizes deveriam ser atendidas nos *grades* 9-12. Combinatória é a matemática da contagem sistemática. Iteração e recorrência são usadas para modelar sequências, numa mudança passo a passo. Grafos vértice-aresta são usados para modelar e resolver problemas envolvendo caminhos, redes e relações entre um número finito de objetos. (NCTM, 2000, p.31)

Analisando o trabalho de Boyd (2002), *Discrete Mathematics Topics in the Secondary School Curriculum* (Tópicos de Matemática Discreta no Currículo da Escola Secundária), verifica-se como forte referencial teórico o Yearbook de 1991. Mas, nesse trabalho, ela traz ideias próprias que complementam as ideias colocadas por autores do Yearbook. A autora aponta situações para ilustrar a diferença entre Matemática Discreta e Matemática Contínua.

Os estudantes aprendem gráficos envolvendo e^x em Álgebra, e o que é um epsilon em Cálculo, mas o que são essas coisas? Muitos estudantes têm dificuldades para assimilar conceitos abstratos que permeiam a Matemática Contínua, especialmente em Matemática Avançada e nos Cursos de Cálculo. A Matemática Discreta tem tópicos que os estudantes podem facilmente relacionar. Os estudantes trabalham um problema, encontram uma resposta, e veem na vida real aplicação do mesmo. Determinar a melhor rota que um ônibus escolar pode fazer para pegar crianças é um problema que os estudantes podem visualizar. A maioria dos estudantes não vê para quê a derivada de $3x^2$ é útil, mesmo se isto lhes for contado. Eles têm dificuldade para compreender a aplicação porque o conceito é bastante abstrato. (BOYD, 2002, p.4)

Boyd apresenta algumas razões, pelas quais considera que o ensino de Matemática Discreta é vantajoso para os estudantes, quando diz

Primeiro, ela mantém os estudantes interessados em matemática. Ela ajuda a atraí-los para, regularmente, atender e participar das aulas. Quando os estudantes estão interessados no conteúdo, é mais fácil para eles aprenderem e estarem interessados do que quando ela é apresentada com problemas difíceis e complexos. **Embora a resolução de problemas em Matemática Discreta possa ser complicada, os problemas em si mesmos podem ser facilmente compreendidos.** Os estudantes, por esse motivo, são capazes de compreender e trabalhar os problemas, o que lhes dá uma confiança muito necessária. Muitos estudantes se afastam para sempre da matemática durante a *High School*. A Matemática Discreta é uma ótima maneira de ajudar esses estudantes a permanecerem interessados e envolvidos com matemática.

Em segundo lugar, **a Matemática Discreta beneficia os estudantes permitindo-lhes ver conexões entre a matemática que eles estão estudando e o mundo real.** Por exemplo, podemos ser capazes de convencer os nossos estudantes de que o Cálculo pode ser usado para ajudar os engenheiros civis a melhor construir pontes, mas os estudantes ainda não podem ver como isso realmente funciona. Mas, na teoria dos grafos (e em outras áreas da Matemática Discreta), podem-se mostrar as aplicações, os estudantes podem ver como elas funcionam, e podem realmente ver os problemas reais.

Os professores precisam ajudar os estudantes a rejeitar a ideia de que não há nada novo para descobrir em matemática e ajudá-los a olhar além do cálculo aritmético básico. (BOYD, 2002, p.5, grifo nosso)

Ela salienta que

Outro benefício da Matemática Discreta é que ela enriquece o currículo tradicional. **Ela coloca mais ênfase em ensinar os estudantes a pensar matematicamente** e menos ênfase em certas habilidades computacionais. A Matemática Discreta presta-se ao trabalho em grupo mais facilmente do que a matemática tradicional. É também útil aos professores porque lhes dá uma nova maneira de ensinar elementos do currículo, o que pode tornar os conceitos tradicionais mais fáceis de ensinar e aprender. Usar Matemática Discreta para ensinar elementos já existentes no currículo, pode ajudar a mudar completamente a forma como os estudantes veem a Matemática. (BOYD, 2002, p.6, grifo nosso)

Essa autora diz, também, que o NCTM não se preocupa em proporcionar aos professores orientações detalhadas. Ele só fornece um conjunto de metas e tópicos para a cobertura da Matemática Discreta na *High School*. Portanto, cabe a cada professor, ou ao departamento de matemática, dentro de cada escola, decidir como esses tópicos devem ser implementados. Infelizmente, muitos professores não estão familiarizados, e até mesmo sentem-se desconfortáveis com a Matemática Discreta. Assim, pode ser difícil para eles saberem como incorporar esses tópicos no currículo. Devido ao fato de que a Matemática Discreta pode ser usada para ensinar elementos tradicionais do currículo, esses tópicos podem ser cobertos de maneiras diferentes ao longo do ano letivo, sem ter que reservar um tempo extra para cobri-los.

Ainda, Boyd realça que

O ensino de Matemática Discreta ao longo do currículo tradicional proporciona aos estudantes diferentes métodos para a aprendizagem do conteúdo e pode ajudar os professores a chegar em cada aluno. A Matemática Discreta também oferece aos estudantes uma melhor visão global do que a Matemática tem a oferecer e pode introduzi-los a todas as diferentes formas de Matemática que existem. **A Matemática não consiste apenas de conceitos provados há muito tempo por Euler e Fermat, está sempre em expansão, com novos conceitos a serem descobertos e provados o tempo todo.** (BOYD, 2002, p.46, grifo nosso)

Em 2007, o NCTM lançou o livro *Navigating through Discrete Mathematics/Grades 6-12* (Navegando através da Matemática Discreta/grades 6-12). O objetivo desse livro é a reflexão sobre a visão da Matemática Discreta apresentada nos *Standards-2000*.

Esse livro, do NCTM de 2007, traz diretrizes para a integração de tópicos de Matemática Discreta em um currículo que é baseado nos *Standards-2000* do NCTM.

Nele são listados e descritos os tópicos de Matemática Discreta que os *Standards-2000* incluem:

Esses *Standards-2000* integram três tópicos importantes da Matemática Discreta: análise combinatória, iteração e recorrência, e grafos vértice-aresta.

- Combinatória é a matemática da listagem e contagem sistemática. Ela facilita a resolução de problemas como a determinação do número de diferentes ordens para dar carona a três amigos ou contar o número de diferentes senhas de computador que são possíveis com cinco letras e dois números.
- Iteração e recorrência podem ser usadas para representar e resolver problemas relacionados à sequência de mudança passo a passo, como o crescimento de uma população ou uma quantia de dinheiro variando de ano para ano. Iterar significa repetir, então a iteração consiste em repetir um procedimento, um processo, ou uma regra repetitivamente. Recorrência é um método de descrever a etapa atual de um processo em termos das etapas anteriores.
- Grafos vértice-aresta, são compostos por pontos (chamados vértices) e segmentos de linha ou arcos (chamados arestas) que conectam alguns dos pontos. Esses grafos fornecem modelos e conduzem às soluções de problemas sobre caminhos, redes e relações entre um número finito de elementos. (NCTM, 2007, p.2-3)

Nessa publicação, do NCTM de 2007, é salientado que os *Standards-2000* concentram-se na integração da Matemática Discreta com outras áreas do currículo de Matemática.

Outros temas de Matemática Discreta que podem receber atenção no currículo escolar incluem a matemática do processamento da informação (tais como códigos de correção de erros e criptografia) e matemática de decisão democrática e social (por exemplo: métodos de votação, distribuição em partes iguais, divisão justa, e teoria dos jogos).

Esse livro, do NCTM de 2007, **analisa porque o currículo escolar deve incluir Matemática Discreta**. Nele é ressaltado que tempo de instrução é valioso e o currículo matemático tem espaço limitado. Por isso, os educadores devem fazer escolhas cuidadosas sobre o que devem incluir no currículo. Os *Standards-2000* recomendam que a Matemática Discreta é parte integrante do currículo de matemática escolar porque ela é útil, contemporânea e pedagogicamente poderosa, além de ser um campo importante e ativo da Matemática.

O referido livro descreve que a **Matemática Discreta é matemática útil**.

A Matemática Discreta é muito usada nos negócios, na indústria e na vida cotidiana. Rosenstein, Franzblau e Roberts (1997) enumeram uma variedade de aplicações, afirmando que os tópicos de Matemática Discreta “são utilizados nas tomadas de decisão em negócios e no governo; pelos trabalhadores em áreas como telecomunicações e informática que dependem da transmissão de informação, e por aqueles em muitas profissões com mudanças rápidas envolvendo cuidado à saúde, biologia, química, produções automatizadas, transporte, etc. Cada vez mais, Matemática Discreta é a linguagem de uma grande área da ciência e fundamenta decisões que os indivíduos tomarão em suas próprias vidas, em suas profissões, e como cidadãos” (p. xiii-xiv). (NCTM, 2007, p.3)

Essa publicação defende o argumento de que a **Matemática Discreta é matemática contemporânea**.

A Matemática Discreta é uma área da matemática em rápida expansão. Ela é particularmente relevante na era da informação digital de hoje. Por exemplo, ela fundamenta muitos aspectos da Internet, desde uma criptografia segura dos números do cartão de crédito de consumidores, quando eles fazem compras *on-line*, até a compressão e a descompressão efetiva de músicas, de fotos e de vídeos que os usuários fazem *download*. Mais ainda, muitos problemas resolvidos e não resolvidos nas fronteiras da Matemática Discreta são não apenas relevantes para os estudantes de hoje mas também acessíveis a eles. Os estudantes podem entender os problemas e algumas soluções parciais, como o problema de encontrar o caminho ótimo de uma rede (o problema do caixeiro viajante) ou encontrar um método mais seguro para transmissão de dados entre computadores. Além disso, a Matemática Discreta tem fortes ligações com a tecnologia e os estudantes de hoje são força tecnológica de trabalho de amanhã e é importante para o futuro deles, bem como para o futuro da nossa nação, que eles se tornem mais familiarizados com os tópicos de Matemática Discreta. (NCTM, 2007, p.4)

Ainda, expõe que a **Matemática Discreta é pedagogicamente poderosa.**

A Matemática Discreta não inclui apenas conteúdos matemáticos importantes, mas ela é também um veículo poderoso para o ensino e a aprendizagem de processos matemáticos, estimulando os estudantes a fazer matemática. Porque a Matemática Discreta é útil e contemporânea, ela muitas vezes motiva e interessa os estudantes. Os tópicos de Matemática Discreta podem engajar e prover sucesso para os estudantes que já tenham antes sido vencidos pela matemática ou alienados dela. Muitos desses tópicos são acessíveis aos estudantes de todos os graus, quer se eles estejam envolvidos na classificação de diferentes tipos de botões nas séries iniciais, contando com padrões diferentes na *Middle School*, ou usando grafos vértice-aresta e o método do caminho crítico para planejar um baile na *High School*.

Além disso, Matemática Discreta é um contexto eficaz para trabalhar os cinco padrões de procedimentos dos Standards-2000 do NCTM. **Ao trabalhar com Matemática Discreta, os estudantes podem fortalecer suas habilidades de raciocínio, prova, resolução de problemas, comunicação, conexões e representação de várias maneiras.** Por exemplo, eles raciocinam sobre caminhos no contexto visual dos grafos vértice-aresta e justificam se determinados circuitos devem existir. Eles argumentam sobre o porquê uma fórmula recursiva é melhor do que uma fórmula explícita, ou vice-versa, em uma situação particular. Eles aprendem novos métodos de prova, incluindo a prova por indução matemática. Eles desenvolvem novos tipos de raciocínio, tais como o raciocínio combinatório, que eles podem usar para raciocinar sobre o número de diferentes possibilidades que podem surgir em situações de contagem (por exemplo, o número de pizzas diferentes que são possíveis de pedir quando eles escolhem duas das cinco coberturas). Estudantes exercitam suas habilidades de resolução de problemas quando resolvem problemas em uma variedade de configurações de acesso, mas desafiadores. Eles desenvolvem novas estratégias de resolução de problemas, tais como problemas algorítmicos e novas maneiras de pensar, como pensar recursivamente. Estudantes adquirem e aplicam novas ferramentas, incluindo fórmulas recursivas e grafos vértice-aresta para a representação de problemas. Assim, os estudantes aprendem conteúdos matemáticos importantes e processos matemáticos poderosos enquanto estudam Matemática Discreta. (NCTM, 2007, p.4, grifo nosso)

Nesse livro encontramos dados sobre a **história e recursos recentes da Matemática Discreta.**

A Matemática Discreta veio à tona como uma questão curricular nos anos oitenta, quando a Associação Matemática da América (MAA) começou a debater a necessidade de maior instrução em Matemática Discreta durante os dois primeiros anos do *College*. Esse debate culminou em um relatório divulgado em 1986 pela MAA. Embora as recomendações desse relatório não tenham sido implementadas na íntegra, educadores instituíram mais cursos de Matemática Discreta, que continuou a ser ensinada nos *Colleges* de todo o mundo. Em particular, Matemática Discreta agora é um curso padrão em programas de cursos superiores de ciência da computação e um curso obrigatório para muitas especializações matemáticas.

Essa discussão sobre Matemática Discreta no *College* fez o seu caminho até o nível da *High School* alguns anos mais tarde, quando o NCTM recomendou a Matemática Discreta como um padrão para os graus 9-12 na sua publicação *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (NCTM, 1989). Como resultado desses *Standards*, a Matemática Discreta expandiu-se rapidamente pelo currículo escolar. O *National Science Foundation* (NSF) financiou projetos para o aprimoramento de professores para ajudar a implementar o padrão Matemática Discreta.

As *High Schools* passaram a oferecer cursos de Matemática Discreta e muitos estados adicionaram Matemática Discreta em seus *Frameworks* estaduais. Cursos de Matemática Discreta desempenharam um papel cada vez mais importante no currículo da *High School*, proporcionando matemática essencial para a tecnologia e a informação intensiva do século XXI, principalmente porque mais estudantes são obrigados a adquirir mais matemática e o currículo tradicional preparatório de Cálculo da *High School* não serve também a todos os estudantes.

Vários projetos, financiados pelo NSF, desenvolvidos para o currículo baseado nos *Standards* curriculares têm integrado a Matemática Discreta numa série de livros didáticos da *High School*. (NCTM, 2007, p.5)

Esse livro, do NCTM de 2007, apresenta uma visão geral, sobre todos os níveis de ensino, dos três tópicos principais: análise combinatória (listagem e contagem sistemática), grafos vértice-aresta, e iteração e recorrência. Nele verifica-se, ao desenvolver esses tópicos no currículo (do *pre-K* até o *grade 12*), duas progressões importantes que são: (1) do concreto para o abstrato e (2) do raciocínio informal para o raciocínio mais formal.

Uma **visão geral da listagem e contagem sistemáticas do *pre-K* até o *grade-12*:**

Estudantes em todos os níveis deveriam ser capazes de resolver problemas de contagem. Exemplos de problemas adequados para diferentes níveis são mostrados a seguir:

- Na *Elementary School*: “De quantas maneiras diferentes pode alguém se vestir com três camisas e dois shorts?”
- Na *Middle School*: “Quantas torres diferentes de quatro andares pode-se construir com blocos vermelhos e azuis?”
- Na *High School*: “Qual é o número de possíveis senhas de computador que usam seis letras e três números?”

A chave para responder tais perguntas é desenvolver estratégias para listar e contar, de forma sistemática, todos os modos de completar a tarefa. Enquanto os estudantes avançam nos níveis de escolaridade, as tarefas mudam - os objetos a serem contados se tornam abstratos, assim como concretos, os números de objetos aumentam, as representações se tornam mais algébricas, e o raciocínio torna-se mais formal, culminando com a demonstração - mas a discussão comum é que os estudantes precisam fazer a contagem sistematicamente. Se os estudantes têm oportunidade suficiente para explorar problemas de contagem em todos os níveis, então estas transições serão suaves, e eles vão adquirir uma compreensão profunda. Além disso, o conhecimento das estratégias de contagem ajudam a estabelecer as bases necessárias para compreender as ideias de probabilidade. (NCTM, 2007, p.6)

Todos os *Standards* do NCTM integram conceitos e métodos de listagem e contagem sistemáticas. Em apoio a essa integração, as recomendações seguintes sugerem como desenvolver listagem e contagem sistemática ao longo dos anos:

No prekindergarten-grade 2, os estudantes deveriam:

- classificar, organizar e contar um pequeno número de objetos;
- usar informalmente o princípio aditivo de contagem;
- listar todas as possibilidades em situações de contagem;
- classificar, organizar e contar objetos, utilizando os diagramas de Venn.

Nos grades 3-5, os estudantes deveriam:

- representar, analisar e resolver uma variedade de problemas de contagem usando agrupamentos, listagens sistemáticas, diagramas de árvore, e diagramas de Venn;
- usar e explicar o princípio aditivo da contagem;
- usar informalmente o princípio multiplicativo da contagem;
- compreender e descrever as relações entre agrupamentos, listagens sistemáticas, diagramas de árvore e o princípio multiplicativo de contagem.

Nos grades 6-8, os estudantes deveriam:

- representar, analisar e resolver problemas de contagem que envolvem ou não a ordenação e que envolvem ou não a repetição;
- compreender e aplicar os princípios aditivos e multiplicativos de contagem e representar esses princípios com álgebra, incluindo a notação fatorial;
- resolver problemas de contagem, usar diagramas de Venn e álgebra para representar as relações mostradas por um diagrama de Venn;
- construir e descrever padrões no triângulo de Pascal;
- usar implicitamente o princípio de pigeonhole⁹ e o princípio da inclusão-exclusão.

Nos grades 9-12, os estudantes deveriam:

- compreender e aplicar permutações e combinações;
- usar o raciocínio e as fórmulas para resolver problemas de contagem em que a repetição é ou não permitida e a ordenação importa ou não;
- compreender, aplicar e descrever as relações entre o teorema binômial, o triângulo de Pascal, e combinações;
- aplicar métodos de contagem em situações probabilísticas envolvendo resultados igualmente prováveis;
- usar o raciocínio combinatório para construir provas, bem como para resolver uma variedade de problemas. (NCTM, 2007, p.6-7)

Também, esse livro apresenta recomendações de como desenvolver grafos vértice-aresta e iteração e recorrência do *pre-K* até o *grade* 12. Não abordaremos esses dois tópicos por não se constituírem objetos de interesse deste trabalho.

⁹ **Princípio da casa dos pombos** ou **Princípio das gavetas de Dirichlet (Teorema de Dirichlet)**: “Se forem dados n objetos, a serem colocados em, no máximo, $(n - 1)$ gavetas, então uma delas conterá necessariamente mais do que um objeto. Ou, equivalentemente, se forem dados n objetos, a serem colocados em, no máximo, $(n - 1)$ gavetas, então uma delas conterá pelo menos dois objetos”. A demonstração e aplicações desse princípio, apresentadas por João Bosco Pitombeira, podem ser encontradas na Revista do Professor de Matemática nº 08, p.21-26, 1º semestre de 1986.

Rivera-Marrero (2007) diz que a Matemática Discreta oferece oportunidade aos professores para desenvolver estratégias inovadoras e, aos estudantes, experienciar abordagens matemáticas não padronizadas para resolver problemas do mundo real. Escreve, ainda, que ela é aplicável, acessível, atraente e apropriada, e que pode ser usada como uma abordagem de investigação em salas de aula de matemática.

Embora isso possa dar a impressão de que a Matemática Discreta tem sido considerada um tema importante no campo da Educação Matemática, é difícil determinar quantas escolas integraram Matemática Discreta, de forma separada ou como um curso integrado no currículo de matemática, desde a publicação dos Standards-1989. Também é marcante que a comunidade de pesquisa em educação matemática não tem focado, na sua maior parte, o ensino e a aprendizagem da Matemática Discreta como uma área de investigação. Eu não encontrei publicados estudos de professores ou experiências de estudantes com Matemática Discreta na *Elementary, Middle, ou High Schools*. (RIVERA-MARRERO, 2007, p.3)

Essa autora comenta que matemáticos e educadores matemáticos continuam a discutir a posição da Matemática Discreta no currículo escolar, no entanto, alguns deles se baseiam em pesquisas ou experiências de professores (DEBELLIS, ROSENSTEIN, 2004; HEINZE, ANDERSON, REISS, 2004).

Ela diz, ainda, que alguns dos argumentos sobre a importância de ensinar e aprender Matemática Discreta nas escolas são:

- (a) é acessível para todos os estudantes em todos os níveis (Kenney, 1996; Monaghan, Orton, 1994; Rosenstein, Franzbalu, Roberts, 1997);
- (b) incentiva uma abordagem de investigação (abordagem não-rotineira, aplicando fórmulas ou equações) no ensino de Matemática (Burghes, 1985; DeBellis, Rosenstein, 2004; Dossey, 1991; Heinze et al, 2004; McDuffie, 2001; Schuster, 2004);
- (c) é aplicável em situações cotidianas (Glidden, 1990; Perham, Perham, 1995; Schuster, 2004);
- (d) oferece problemas mais desafiadores e acessíveis para tornar os estudantes interessados em matemática (Anderson, Asch, Lint, 2004; DeBellis, Rosenstein, 2004; Friedler, 1996; Kenney, 1996; Rosenstein, 1997);
- (e) é uma boa abordagem para ilustrar e enfatizar os cinco padrões de procedimento dos Standards-2000 do NCTM. (Kenney, Bezuszka, 1993);
- (f) permite aos professores ver a matemática de uma forma nova e repensar sobre componentes da matemática tradicional do currículo do ensino secundário (DeBellis, Rosenstein, 2004; Kenney, 1996);
- (g) facilita o uso de formas de ensino inovadoras na aula de matemática (Wilson, Rivera-Marrero, 2004; Wilson & Spielman, 2003).(RIVERA-MARRERO, 2007, p.3)

No cenário internacional, o estudo de todo esse material norte-americano nos permitiu fazer algumas considerações:

A Matemática Discreta aparece como um tópico separado em alguns documentos do NCTM: *Standards*-1989; *Mathematics Framework*-1992; e *Curriculum Focal Points High School*-2007. Entretanto, não aparece dessa forma nos *Standards*-2000, no *Mathematics Framework*-1985 e nos *Curriculum Focal Points preK-grade 8*-2006.

O tema Matemática Discreta é abordado por vários autores de artigos do Yearbook (1991). Selecionamos: Dossey, Gardiner, Hart, Graham, Bogart e Holliday. Depois, buscamos os trabalhos de pesquisa de Boyd (2002) e Rivera-Marrero (2007). Todos esses autores são pesquisadores ou educadores matemáticos que trabalham a Matemática Discreta num processo de “para o” e não “no” ensino básico. Ou seja, eles falam de Matemática Discreta, ressaltam sua importância e recomendam sua inclusão no currículo de matemática escolar, mas não a desenvolvem na prática de sala de aula. Esse fato pode ser constatado quando se lê

Embora isso possa dar a impressão de que a Matemática Discreta tem sido considerada um tema importante no campo da Educação Matemática, é difícil determinar quantas escolas integraram Matemática Discreta, de forma separada ou como um curso integrado no currículo de matemática, desde a publicação dos Standards-1989. Também é marcante que a comunidade de pesquisa em educação matemática tem, na sua maior parte, não focado o ensino e a aprendizagem da Matemática Discreta como uma área de investigação. **Eu não encontrei publicados estudos de professores ou experiências de estudantes com Matemática Discreta na *Elementary, Middle, ou High Schools*.** (RIVERA-MARRERO, 2007, p.3, grifo nosso)

No cenário nacional, para tecer considerações sobre Matemática Discreta, consultamos os seguintes documentos:

(1) Os PCN_s, nas suas diferentes versões:

- PCN – 1997 (1^a a 4^a séries),
- PCN – 1998 (5^a a 8^a séries),
- PCN – 1999 (Ensino Médio),
- PCN₊ – 2002 (Ensino Médio);

(2) Orientações Curriculares para o Ensino Médio – 2006;

(3) Publicações da SEE/SP:

- Subsídios para a implementação da proposta curricular de matemática para o 2^o grau – 1980,

- Proposta curricular para o ensino de matemática: 1º grau – 1988,
- Proposta curricular para o ensino de matemática: 2º grau – 1989,
- Subsídios para a implementação da proposta curricular de matemática para o 2º grau, 2 ed – 1989,
- Proposta curricular para o ensino de matemática: 1º grau – 1991,
- Proposta curricular para o ensino de matemática: ensino fundamental – 1997,
- Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática – 2008,
- Revista São Paulo faz escola. Edição especial da proposta curricular. Matemática: 5ª, 6ª, 7ª e 8ª séries do ensino fundamental e respectivos Jornais dos alunos - 2008,
- Revista São Paulo faz escola. Edição especial da proposta curricular. Matemática: 1ª, 2ª, e 3ª séries do ensino médio e respectivos Jornais dos alunos – 2008.

Ao analisar esses documentos oficiais, referentes ao currículo matemático do Brasil, constatamos que eles incluem e trabalham tópicos de Matemática Discreta, como Números e Operações com inteiros e racionais; Contagem; Análise Combinatória; Tratamento da Informação; Probabilidade e Estatística; Jogos; dentre outros. Mas, os documentos mencionados não fazem referência a esses tópicos como próprios da Matemática Discreta, que exige formas diferentes de raciocinar e de dar sentido a eles. Devido a esse tratamento, professores e estudantes continuam a trabalhar esses assuntos da Matemática Discreta, sob a ótica da Matemática que ele conhecem, ou seja da Matemática Contínua.

Assim, neste Capítulo, verifica-se como forte referencial teórico o NCTM. A partir de suas produções, nosso propósito foi o de redigir sobre Matemática Discreta, relacionada com aspectos educacionais, em diferentes níveis de ensino, com o enfoque de ver problemas, conceitos e conteúdos de Matemática Discreta tratados na própria Matemática Discreta.

No Brasil, pesquisando sobre instituições de ensino superior que trabalham Matemática Discreta na Graduação encontramos essa disciplina nos Cursos de Ciência da Computação, Sistemas de Informação e Engenharia Informática.

No entanto, em nossa busca por essa disciplina nos Cursos de Licenciatura em Matemática, onde se formam nossos professores, constatamos que apenas alguns desses Cursos têm em suas matrizes curriculares a disciplina Matemática Discreta.

Na Pós-Graduação em Educação Matemática não tem sido muito fácil encontrar pesquisas envolvendo o trabalho de professores em suas salas de aula com a Matemática Discreta.

O GTERP tem direcionado esforços no sentido de oferecer caminhos para se trabalhar Matemática Discreta por meio da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas. Esse Grupo tem produzido dissertações, teses e artigos, sobre essa temática. Ainda, tem realizado minicursos, proferido palestras, para pesquisadores, professores em formação inicial e continuada em congressos de Educação Matemática. Uma ação recente do Grupo foi o Minicurso, “Matemática Discreta através da Resolução de Problemas”, ministrado por Onuchic e Allevato, em novembro de 2012, no XI EPEM.

Capítulo 4

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Introdução

4.1 – O que é um Problema?

4.2 – Perspectivas Históricas da Resolução de Problemas no Currículo de Matemática

4.3 – Resolução de Problemas

4.3.1 – Uma Breve História da Resolução de Problemas

4.3.2 – Diferentes abordagens de Resolução de Problemas

4.3.2.1 – Ensinar *sobre* Resolução de Problemas

4.3.2.2 – Ensinar *para* resolver problemas

4.3.3 – Ensinar *via* resolução de problemas

4.3.3.4 – Ensinar *através da* resolução de problemas

4.3.3 – A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

4.4 – Diretrizes Futuras e Perspectivas para a Pesquisa e Desenvolvimento Curricular em Resolução de Problemas

CAPÍTULO 4 – Resolução de Problemas

Aquilo que você foi obrigado a descobrir por si mesmo deixa um caminho em sua mente que pode ser usado novamente quando a necessidade surge. (LICHTENBERG, 1742-1799).

Introdução

A literatura aponta a importância dos problemas como mola propulsora da atividade e da produção do conhecimento matemático. Se voltarmos o olhar para o processo de construção do conhecimento matemático, notamos que

ele é dinâmico, caracterizado por incontáveis momentos em que prevalecem resultados obtidos experimental e indutivamente. Quantos não são os casos, na História da Matemática, em que constatamos a construção de conhecimento a partir da busca pela solução de um problema específico? Muitos resultados matemáticos não teriam sido obtidos não fosse a persistência e a criatividade de pessoas motivadas por uma dúvida, por um problema e pela ânsia de resolvê-lo. Não terá sido esse o caso do matemático inglês Andrew Willes, ao demonstrar o Último Teorema de Fermat? A demonstração desse teorema foi um problema que desafiou matemáticos por aproximadamente 350 anos (SINGH, 1999 apud ALLEVATO, 2005, p.38).

A História da Matemática está repleta de exemplos da força motivadora que os problemas podem ter. Concordamos com os autores sobre o fato de que

a Matemática não é infalível ou inquestionável; não está pronta e totalmente estruturada. Ela se desenvolve pela prática da crítica e da dúvida e move-se a partir de conhecimentos anteriores, em busca de novos conhecimentos necessários à solução de novos ou antigos, mas não resolvidos, problemas. Alguns exemplos podem ser encontrados, na literatura, em estudos que apresentam a resolução de problemas a partir de uma perspectiva histórica. (GAZIRE, 1988; LESTER, 1994, 1993 apud ALLEVATO, 2005, p.38).

Ainda, nos PCN-1997 podemos ler que

a História da Matemática mostra que a Matemática foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática. (BRASIL, 1997, p. 42)

Referindo-se à História das Ciências, Brasil (1964, p.22) afirma que

Tradicionalmente o problema é empregado, pelos professores, na verificação e na fixação da aprendizagem. Atentando, porém, para a história das ciências, notamos que o problema antecede invariavelmente as descobertas, é o provocador dos estudos e o orientador das construções teóricas. Por que, no ensino da Matemática especialmente, invertemos a ordem natural das coisas?

Compartilhamos com as ideias de Santos (2002, p.14) quando afirma que “de uma certa maneira, a ideia construtivista se apoia no próprio processo histórico de construção do conhecimento científico, cujos objetos foram sendo construídos como respostas a problemas específicos”.

A crença de que só se aprende a resolver problemas por imitação, ou seja, imitando as atividades e procedimentos de quem os resolve, predominou e, infelizmente, ainda predomina em muitas salas de aula. De acordo com Nunes (2010, p.75-76) “não podemos negar que esse caminho [...] pode servir para algumas pessoas no que se refere à aprendizagem, entretanto precisamos pensar que a escola não foi feita para que alguns aprendam e, sim, para que todos aprendam”. Nessa direção, Van de Walle (2001, p.17) nos diz que

Cada ideia introduzida na sala de aula de Matemática pode e deveria ser completamente compreendida por cada criança. Não há exceções! Não há absolutamente desculpa para as crianças aprenderem qualquer aspecto da matemática sem tê-la compreendido. Todas as crianças são capazes de aprender tudo de matemática que queremos que elas aprendam, e elas podem aprendê-la de uma maneira significativa, de uma forma que faça sentido para elas.

Acreditamos que o conhecimento matemático deve emergir da experiência com a resolução de problemas, experiência essa que engloba processos como a exploração do contexto, a elaboração de novos algoritmos, a criação de modelos ou a própria formulação de problemas.

Diante desses fatos, não podemos pensar em problema como uma atividade puramente técnica e, sim, como uma ferramenta para o pensar matematicamente que envolva nossos estudantes.

Em sintonia com essas ideias Vila e Callejo (2006, p. 29) dizem que “isso exige um clima educativo que favoreça a confiança de cada aluno em suas próprias capacidades de aprendizagem [...] um ambiente em que se tenha prazer com os desafios e com a própria atividade intelectual”.

A proposta a que se destina esta pesquisa está voltada para a sala de aula e para trabalhar com os alunos no ambiente escolar, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, acreditando que esta poderá contribuir para o progresso na aprendizagem matemática dos alunos, já que eles próprios terão a oportunidade de, com o apoio do professor, construir seu próprio conhecimento.

Acreditamos na Resolução de Problemas¹ como uma parte importante do ensino, da aprendizagem e da avaliação de Matemática. O estudo da literatura relacionada a esse tema trouxe à tona alguns aspectos que procuraremos destacar no texto a seguir. Inicialmente, apresentaremos algumas concepções sobre o que é um Problema Matemático e, depois as Perspectivas Históricas da Resolução de Problemas no Currículo de Matemática. Mostraremos Uma Breve História da Resolução de Problemas. Explicitaremos as Diferentes abordagens de Resolução de Problemas, destacando A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, como um caminho para ensinar, aprender e avaliar a matemática escolar. Finalmente, apontaremos Diretrizes Futuras e Perspectivas para a Pesquisa e Desenvolvimento Curricular em Resolução de Problemas.

¹A notação “**R**esolução de **P**roblemas” será usada quando nos referirmos à teoria da Resolução de Problemas e a expressão “**r**esolução de **p**roblemas” será utilizada quando nos referirmos ao procedimento dessa atividade.

4.1 O que é um Problema?

Dentre as diferentes concepções encontradas na literatura para o termo “problema”, escolhamos algumas delas e as organizamos cronologicamente.

Então, o que é um problema?

Ter um problema significa buscar conscientemente alguma ação apropriada para alcançar um fim claramente concebido, mas não imediatamente atingível. (POLYA, 1962, p. 117)

Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la. (BRASIL, 1997, p. 44)

É tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em fazer. (ONUCHIC, 1999, p. 215)

É qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la. (DANTE, 2000, p. 10)

É toda situação em que se tem um planejamento inicial e uma exigência que obriga a transformá-lo. O caminho, para passar da situação ou planejamento inicial à nova situação exigida, tem que ser desconhecido e a pessoa deve querer fazer a transformação. (PÉREZ, CABRERA, 2000, p. 118)

Um problema é qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta (VAN de WALLE, 2001, p. 42).

Problema é toda situação em que os alunos necessitam pôr em jogo tudo o que sabem, mas que contém também algo novo, para o qual ainda não têm resposta e que exige a busca de soluções. É nesse movimento de busca de soluções que se estabelecem novas relações e se constroem conhecimentos que modificam os anteriores. (MARINCEK, 2001, p.15)

Um problema é, por definição, uma situação que causa desequilíbrio e perplexidade. (LAMBIDIN, 2003, p.7)

Um problema é uma situação para a qual não se dispõe, à partida, de um procedimento que nos permita determinar a solução, sendo a resolução de problemas o conjunto de ações tomadas para resolver essa situação. (VALE, PIMENTEL, 2004, p.12)

Um problema é uma situação, proposta com finalidade educativa, que propõe uma questão matemática cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno/resolvedor ou ao grupo de alunos que tenta resolvê-la, porque não dispõe de um algoritmo que relaciona os dados e a incógnita ou de um processo que identifique automaticamente os dados com a conclusão e, portanto, deverá buscar, investigar, estabelecer relações e envolver suas emoções para enfrentar uma situação nova (VILA, CALLEJO, 2006, p. 29).

Sob a ótica de Wagner (2003, p. 612) tem-se um problema quando duas características se mostram presentes: (1) há uma necessidade não satisfeita e (2) são descobertos caminhos não óbvios para satisfazê-la. Ela diz que uma situação sobre a qual se tem controle não corresponde a um problema e afirma: “meus problemas me prendem – eles me fazem cativo”.

Nos PCN podemos ler que “o que é problema para um aluno pode não ser para outro, em função do seu nível de desenvolvimento intelectual e dos conhecimentos de que dispõe”. (BRASIL, 1997, p. 44)

Vale e Pimentel (2004, p.12) consideram que

Definir problema é um propósito difícil, já que uma determinada situação pode ser um problema para um dado indivíduo, num dado momento, e para o mesmo indivíduo, num outro momento, ser apenas um exercício ou um fato específico. Podemos assim concluir que existe um conjunto de fatores inerentes ao indivíduo e à própria tarefa, além de outros, que vão condicionar quer à sua caracterização quer ao seu desempenho.

4.2 Perspectivas Históricas da Resolução de Problemas no Currículo de Matemática

O texto que vamos apresentar, neste item, tem como embasamento teórico, quase que em sua íntegra, o artigo *Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum*, de George M. A. Stanic e Jeremy Kilpatrick. Esse importante artigo foi publicado na monografia *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*, resultante de um encontro realizado em San Diego, Califórnia, USA, de 9 a 12 de janeiro de 1987, no Projeto *Research Agenda for Mathematics Education*. Nele, Stanic e Kilpatrick descrevem a história da resolução de problemas no currículo de matemática, delineando o papel da resolução de problemas desde as primeiras civilizações até o final do século XX.

Esses autores apontam que

Problemas têm ocupado um lugar central no currículo da matemática escolar desde a Antiguidade, mas que resolução de problemas não. Somente recentemente, educadores matemáticos têm aceitado a ideia de que o desenvolvimento da habilidade em resolver problemas merece atenção especial. (STANIC, KILPATRICK, 1989, p.1)

Eles observam que, ainda assim, esse foco sobre resolução de problemas veio acompanhado de discordância entre os educadores matemáticos. O termo *Resolução de Problemas* transformou-se num slogan englobando diferentes visões do que é a educação, a escolaridade, a matemática, e das razões porque devemos ensinar matemática em geral e resolução de problemas em particular.

Stanic e Kilpatrick (1989) apontam, para justificar essa falta de concordância entre os educadores matemáticos a respeito da resolução de problemas, a *Agenda para a Ação* do NCTM (1980), que recomendava *a resolução de problemas como foco da matemática escolar durante os anos oitenta*. Embora a resolução de problemas apareça caracterizada nesse documento como uma das dez áreas de habilidades básicas, e seja assumido que há uma relação direta entre a resolução de problemas nas aulas de matemática e a resolução de problemas encontrados na vida, segundo eles essa *Agenda* não esclarece de modo adequado o que seria a resolução de problemas, por quê deveríamos ensiná-la, ou como a posição adequada se insere em um contexto histórico.

Stanic e Kilpatrick (1989) identificaram vários temas que historicamente caracterizam o papel da resolução de problemas nos currículos escolares matemáticos. Para eles, esses temas se entrelaçaram e se mantiveram na maior parte sem exame. O que os educadores matemáticos dizem uns aos outros, hoje, acerca da resolução de problemas, está ligado a várias tradições diferentes nos campos da psicologia, do currículo e da educação matemática.

Problemas nos currículos remontam, pelo menos, aos antigos egípcios, chineses e gregos. Por exemplo, o Papiro de Ahmes², copiado de um documento mais antigo, pelo escriba Ahmes, por volta de 1650 A.C., é um manuscrito matemático egípcio que consiste numa coleção de problemas. Num dos problemas, é pedido ao estudante que efetue a soma de cinco termos de uma progressão geométrica, onde o primeiro termo e a razão são ambos iguais a 7 (CHASE³, 1979, p. 59, 136-137 apud STANIC, KILPATRICK, 1989, p.1). No próprio papiro, só é dada uma forma abreviada do problema, com dois métodos de resolução e a resposta. O fato de o problema se referir a casas, gatos, ratos, etc., a serem adicionados, sugere que este era um problema recreativo ou um puzzle.



Figura 7 – Um problema de progressão geométrica no Papiro de Ahmes (CHASE, 1979, p. 17)

²Ahmes é o nome do escriba que encontrou um antigo documento egípcio em 1650 a.C. Sabe-se que, o escocês, Henry Rhind o comprou em 1858.

³Chase, A. B. (1979). *The Rhind mathematical papyrus*. Reston, VA: NCTM.

Um segundo exemplo vem de *Nine Sections*, um documento chinês, datado de cerca de 1000 A.C:

De duas ervas daninhas de água, uma cresce três “pés” e a outra um “pé”, no primeiro dia. O crescimento da primeira é, todos os dias, metade do dia anterior, enquanto que a outra cresce duas vezes o que cresceu no dia anterior. Em quantos dias terão as duas atingido a mesma altura? (SANFORD⁴, 1927, p. 7 apud STANIC, KILPATRICK, 1989, p. 2)

Nos gregos antigos, temos uma primeira versão do problema da cisterna:

Eu sou um leão de bronze; minhas goteiras são os meus dois olhos, a minha boca e a parte lisa da minha pata direita. Meu olho direito enche a cisterna em dois dias, meu olho esquerdo em três, e o meu pé em quatro. Minha boca é capaz de enchê-la em seis horas. Diga-me quanto tempo, os quatro juntos, levarão para enchê-lo. (SANFORD, 1927, p. 69 apud STANIC, KILPATRICK, 1989, p. 3)

Stanic e Kilpatrick (1989) dizem que alguns métodos particulares de resolução de problemas têm também uma longa história. Por exemplo, uma técnica muito semelhante à Regra da Falsa Posição já aparece no Papiro de Ahmes. Vera Sanford (1927), em sua história de problemas da álgebra, dá um exemplo do uso dessa regra no seguinte problema, tirado de um trabalho do século XV, de Phillippo Calandri:

A cabeça de um peixe pesa $\frac{1}{3}$ de todo o peixe, a sua cauda pesa $\frac{1}{4}$ dele, e o seu corpo pesa 30 onças. Qual é o peso de todo o peixe? (SANFORD, 1927, p. 19 apud STANIC, KILPATRICK, 1989, p. 3)

Sanford explicou que a Regra da Falsa Posição foi usada para resolver o problema do seguinte modo:

Se todo o peixe pesa 12 onças, então a cabeça pesa 4, a cauda 3 e o corpo 5. Evidentemente, o peso do peixe é o mesmo múltiplo de 12 que 30 é de 5, e, então, o peso do peixe é 72 onças. (SANFORD, 1927, p. 19 apud STANIC, KILPATRICK, 1989, p. 3)

⁴Sanford, V. (1927). *The history and significance of certain standard problems in algebra*. New York: Columbia University, Teachers College, Bureau of Publications.

Segundo Stanic e Kilpatrick, encontram-se problemas semelhantes em livros de matemática dos séculos XIX e XX. Eles enfatizam que o ponto importante a ser considerado, acerca desses exemplos, é que neles transparece uma visão muito limitada da aprendizagem da resolução de problemas. Até tempos relativamente recentes, ensinar resolução de problemas significava apresentar problemas e, talvez, incluir um exemplo de uma técnica de solução específica. Uma página do texto intitulado *A Mental Arithmetic*, de Willian J. Milne, de 1897, reflete essa visão do ensino da resolução de problemas. O texto intitulado *New School Algebra*, de G. A. Wentworth, de 1900, é semelhante.

Clifford B. Upton⁵ apud Stanic e Kilpatrick, em seu texto intitulado *Social Utility Arithmetics*, de 1939, tentou fazer com que as crianças pensassem sobre o processo de resolver um problema apresentando problemas sem números, mas não chegou a discutir o que é que se pode aprender com tais problemas. Mesmo textos escritos para professores apresentam visões estreitas de resolução de problemas. Um bom exemplo é o livro *Principles of Arithmetic*, de H. O. R. Siefert⁶, publicado em 1902, e também o livro *Normal Elementary Algebra* de Edward Brooks, publicado em 1871. Brooks pelo menos falava acerca do “método de resolver um problema”.

Há exemplos de discussões mais detalhadas sobre como resolver problemas, em páginas de *Plane and Solid Geometry*, publicado em 1899. O *Strayer-Upton Arithmetics – Higher Grades*, publicado em 1928, traz algum conselho sobre “como resolver problemas difíceis”.

A atenção de hoje ao desenvolvimento das habilidades em resolução de problemas dos alunos pode ser vista na figura a seguir, que mostra uma página do livro 5 da série *Addison-Wesley Mathematics* (EICHOLZ⁷, O'DAFFER, FLEENOR, CHARLES, YOUNG & BARNETT, 1987).

⁵Upton, C. B. (1939). *Social Utility Arithmetics-First book*. New York: American Book.

⁶Siefert, H. O. R. (1902). *Principles of arithmetic: Embracing comum fractions, decimal fractions, percentage, proportion, involution and mensuration. A manual for teachers and normal students*. Boston: Heath.

⁷Eicholz, R. E., O'Daffer, P. G., FLEENOR, C. R., CHARLES, R. I., YOUNG, S & BARNETT, C. S. (1987). *Addison-Wesley Mathematics* (Book 5). Menro Park, CA: Addison-Wesley.

Problem-Solving Strategy: Draw a Picture

Sometimes it is easier to solve a problem if you use a strategy called

DRAW A PICTURE

First I show all the information in a picture and label it carefully.

Then I see that I first must add, then subtract to find the answer.

Try This Rockton is 572 km from Millville. Roy's family started at Millville and drove 258 km toward Rockton. Cassie's family started at Rockton and drove 219 km toward Millville during the same time. How far apart were the two families then?

Roy's family	Cassie's family
258 Km	219 Km
572 Km	
Millville	Rockton
$\begin{array}{r} 258 \\ + 219 \\ \hline 477 \end{array}$	$\begin{array}{r} 572 \\ - 477 \\ \hline 95 \end{array}$

The families were 95 km apart.

Solve.

- Alton, Benton, Clinton, and Dunlap are towns on the same highway. Dunlap is between Alton and Clinton. Dunlap is 189 km from Alton. Clinton is between Dunlap and Benton. Clinton is 237 km from Benton. Alton and Benton are 671 km apart. How far apart are Dunlap and Clinton?
- Sara and her family are taking a 1,024-km trip from Bayview to Forest City. On the way they will go through only two other towns, first Oakville and then Durham. It is 587 km from Bayview to Durham and 96 km from Durham to Oakville. How many kilometers farther is it between Bayview and Oakville than between Durham and Forest City?

Figura 8 – Uma página de *Addison-Wesley Mathematics* (Livro 5)

Stanic e Kilpatrick (1989) relatam que, no último século especialmente, discussões sobre o ensino de resolução de problemas passaram da visão de que aos estudantes deveriam, simplesmente, serem introduzidos problemas ou regras para a resolução de problemas particulares, para a visão de que era preciso desenvolver abordagens mais gerais para a resolução de problemas. Entretanto, os educadores matemáticos não examinaram plenamente a questão: porque deveríamos ensinar resolução de problemas?

O papel da resolução de problemas no currículo de matemática escolar é o resultado de forças conflitantes ligadas a ideias antigas e persistentes acerca das vantagens do estudo da matemática, e a uma variedade de eventos que se influenciaram mutuamente, ocorridos no princípio do século XX. (STANIC, KILPATRICK, 1989, p. 4)

A principal razão para a grande ênfase dada por educadores matemáticos ao ensino da resolução de problemas é que, até este século, foi assumido que o estudo de matemática – de qualquer matemática, não somente aquela que hoje poderíamos considerar problemas – melhoraria, de uma maneira geral, o pensamento das pessoas. Platão dizia que

aqueles que são por natureza bons em cálculo, são, pode-se dizer, naturalmente argutos em outros estudos, e [...] aqueles que são lentos nisso, se forem educados e exercitados nesse estudo, sem dúvida melhorariam e se tornariam mais afiados do que eram. (GRUBE⁸, 1974, p.18 apud STANIC, KILPATRICK, 1989, p. 9)

Segundo Stanic e Kilpatrick (1989), desde pelo menos Platão, tem-se a ideia de que, estudando Matemática, melhoramos nossa capacidade de pensar, de raciocinar e de resolver problemas com que nos confrontaremos no mundo real. Num certo sentido, a resolução de problemas nos currículos foi simplesmente um meio de se conseguir que os alunos estudassem matemática. Os problemas eram um elemento do currículo de matemática que contribuiu, tal como todos os outros elementos, para o desenvolvimento do poder de raciocínio.

⁸Grube, G.M.A. (Trans.) (1974). *Plato's Republic*. Indianapolis: Hackett.

4.3 Resolução de Problemas

4.3.1 Uma Breve História da Resolução de Problemas

A literatura aponta que a Resolução de Problemas, como campo de pesquisa, teve início com Polya, que escreveu o livro intitulado *How to solve it*, pioneiro nessa linha, em 1945.

As primeiras pesquisas sobre Resolução de Problemas iniciaram-se sob a influência de George Polya (1888-1983), da Universidade de Stanford-EUA, e discutiam sobre um conjunto de regras e métodos que visam à descoberta, de modo a que os professores pudessem entender e saber usar corretamente o processo de resolução de problemas. No seu livro *How to Solve It* (traduzido como *A Arte de Resolver Problemas*), 1994, com 1ª ed. em 1945, Polya apresenta um método de trabalho desenvolvido em quatro etapas para a resolução de problemas: 1ª) compreender o problema, lendo-o e interpretando-o; 2ª) elaborar um plano, 3ª) executar o plano, 4ª) fazer o retrospecto ou verificação da solução encontrada no problema original. Polya desenvolve um processo heurístico ao longo da resolução de problemas. Chegar à solução de um problema não é o único objetivo que ele propõe. O aluno deveria, ao longo do processo de resolução do problema, descobrir por si mesmo, com ajuda e guia do professor, o significado dos conceitos matemáticos envolvidos. Para ele, era fundamental “ensinar o aluno a pensar”. (SOUZA, 2010, p. 118)

Nunes (2010, p. 78) diz que a publicação da obra de Polya, *How to solve it*, no ano de 1945, foi um fato fundamental no ensino da resolução de problemas pois, “pela primeira vez, é ilustrado um caminho didático para o ensino da resolução de problemas”.

Os dados que temos indicam que algumas das estratégias básicas propostas por Polya adquiriram grande popularidade nas investigações em Educação Matemática e em alguns textos de matemática escolar. É importante destacar que, já naquele tempo, Polya acreditava que o “ensinar a pensar” devia ser o objetivo principal do ensino de matemática, pois, segundo ele:

Ensinar a pensar significa que o professor de Matemática não deveria simplesmente comunicar informação, mas deveria também tentar desenvolver a habilidade dos estudantes em usarem a informação transmitida: ele deveria enfatizar o saber-fazer, as atitudes úteis e os hábitos da mente desejáveis (POLYA, 1962, p. 100).

Polya (1962), em sua obra *Mathematical Discovery*, no capítulo XIV, *On Learning, Teaching and Learning Teaching* menciona que esse objetivo precisava certamente de maiores esclarecimentos, mas, nesse caso, será suficiente enfatizar apenas dois aspectos:

primeiro, esse ensinar a pensar, ou seja, o pensamento com o qual Polya estava preocupado, significava, na visão dele, um “pensar para um propósito”, ou um “pensar voluntário” (William James) ou, ainda, um “pensar produtivo” (Max Wertheimer). E essas formas de “pensar” podem ser identificadas, pelo menos numa primeira abordagem, com resolução de problemas. Segundo, o pensar matemático não é puramente “formal”, não está apenas relacionado com axiomas, definições e demonstrações rígidas, mas também com muitas outras coisas pertencentes a ele: generalização a partir de casos observados, argumentos indutivos, argumentos de analogia, reconhecimento de um conceito matemático ou extraíndo-o de uma situação concreta. O professor de matemática tem uma excelente oportunidade para instruir seus alunos com estes importantíssimos processos de pensamento “informais”. Ou seja, o professor deveria utilizar esta oportunidade melhor, e muito melhor, do que ele faz hoje. Finalizando, diz Polya: “Estabelecido incompletamente, mas concisamente, deixem os professores ensinar demonstrando por todos os meios, mas deixem-nos também ensinar conjecturando”.

Polya preconizava um ensino ativo para a Matemática, na crença de que um aprendizado eficiente dar-se-ia se o estudante mergulhasse no mundo da descoberta. (NUNES, 2010, p. 79)

Polya “acreditava que o ensino da Matemática deveria abarcar os aspectos principais do pensamento envolvido na descoberta da Matemática e isso se deve ao fato do grande interesse em discutir-se sobre as condições do descobrimento científico”. (BARALDI, 1994, p.6)

Nos Estados Unidos, em 1948, surgiu o trabalho de Herbert F. Spitzer, em Aritmética Básica, que se apoiava numa aprendizagem com compreensão, sempre a partir de situações-problema. No Brasil, em 1964, temos o trabalho do professor Luis Alberto S. Brasil que defendia um ensino de matemática a partir de um problema gerador de novos conceitos e novos conteúdos.

Na década de 70, começaram as investigações sistemáticas sobre Resolução de Problemas e suas implicações curriculares, ganhando espaço no mundo inteiro já no final dessa década. Iniciando-se, então, o movimento a favor de um ensino baseado em resolução de problemas. (ANDRADE apud ONUCHIC, 1999)

No Brasil e no mundo, discussões no campo da Educação Matemática apontavam para a necessidade de se adequar o trabalho escolar a novas tendências que pudessem aprimorar melhores formas de ensinar, de aprender e de avaliar o progresso dos estudantes e o trabalho dos professores.

Na década de 80, passaram a surgir no mundo vários documentos sobre Resolução de Problemas. Nos Estados Unidos, em 1980, o NCTM já manifestava sua preocupação com essas questões e, então, publicou o documento *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980's* (Uma Agenda para Ação: Recomendações para a matemática escolar nos anos 80), que chamava todos os interessados, pessoas e grupos para, juntos, num esforço cooperativo massivo, procurarem uma melhor compreensão matemática para todos. A primeira dessas recomendações dizia: *resolver problemas deve ser o foco da matemática escolar para os anos 80*. Os educadores matemáticos daquela época tinham um grande interesse em fazer da resolução de problemas um foco do currículo de Matemática.

Onuchic (1999) ressalta que os estudos da década de 80 deram grande atenção ao processo de resolução de problemas, foram desenvolvidos muitos dos recursos em resolução de problemas, visando ao trabalho em sala de aula, na forma de coleção de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividades e orientações para avaliar o desempenho em resolução de problemas e, muito desse material passou a ajudar os professores a fazerem da resolução de problemas o ponto central de seu trabalho.

No final da década de 80, pesquisadores começaram a questionar o ensino e o efeito de estratégias e modelos. Passaram a discutir as perspectivas didático-pedagógicas da resolução de problemas e a noção de que a resolução de problemas devesse desempenhar um papel importante no currículo de forma que tivesse aceitação bastante definida.

Andrade apud Onuchic (1999, p. 207) nos chama atenção para o fato de que

a
Resolução de problemas passa a ser pensada como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de se ensinar Matemática. O problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento. Sob esse enfoque, problemas são propostos ou formulados de modo a contribuir para a formação de conceitos, antes mesmo de sua apresentação em linguagem matemática formal.

Desse modo, a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino passa a ser o lema das pesquisas e estudos para os anos 90 e, a partir desta década, começam a surgir propostas curriculares envolvendo essa temática.

No Brasil, os PCNs (1997, 1998, 1999) também recomendam a Resolução de Problemas como um caminho para fazer matemática em sala de aula.

Segundo os PCN-1997

É relativamente recente, na história da Didática, a atenção ao fato de que o aluno é agente da construção do seu conhecimento, pelas conexões que estabelece com seu conhecimento prévio num contexto de resolução de problemas. (BRASIL, 1997, p. 40)

Ao se colocar o foco na resolução de problemas, dentre outras ideias, esse documento defende que

O ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las. (BRASIL, 1997, p.42)

Os objetivos gerais da área de Matemática, nos PCN-1998, têm como propósito fazer com que os alunos possam: pensar matematicamente, levantar ideias matemáticas, estabelecer relações entre elas, saber se comunicar ao falar sobre elas, desenvolver formas de raciocínio, estabelecer conexões entre temas matemáticos e outras áreas; poder construir conhecimentos matemáticos e desenvolver a capacidade de resolver problemas, explorá-los, generalizá-los e até propor novos problemas a partir deles.

Para o Ensino Médio os PCN, na sua versão PCN₊, deixam escrito

A resolução de problemas é a peça central para o ensino de matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. (BRASIL, 2002, p. 112)

Em 2000, o NCTM publicou os *Standards-2000*, como já foi falado no Capítulo anterior. Esse documento fornece orientações para o ensino de Matemática do *pre-K* até o *grade 12*, expõe os *Princípios* - leis que devem ser obedecidas, que são: **Equidade, Currículo; Ensino; Aprendizagem; Avaliação e Tecnologia.**

Os *Standards-2000*, além dos *Princípios*, oferecem cinco *Padrões de Conteúdo* e cinco *Padrões de Procedimento*, por nós apresentados no quadro abaixo. Os primeiros Padrões tratam sobre “o quê” de matemática devemos ensinar e os segundos Padrões tratam sobre “o como” devemos ensinar.

<i>Padrões de Conteúdo</i>	<i>Padrões de Procedimento</i>
Números e operações	<i>Resolução de problemas</i>
Álgebra	Raciocínio e prova
Geometria	Comunicação
Medida	Conexões
Análise de dados e probabilidade	Representação

Figura 9 – Quadro de Padrões de Conteúdo e Padrões de Procedimento dos *Standards-2000*

Vale destacar que, nos *Standards-2000*, o primeiro Padrão de Procedimento é Resolução de Problemas, um processo que pretende o engajamento do aluno numa tarefa para a qual o método de resolução não é de início conhecido. Para chegar à solução, o aluno precisa buscar, em seu conhecimento prévio e através desse processo, conseguir desenvolver novas compreensões matemáticas. Resolver problemas não é somente um objetivo da aprendizagem matemática mas, também, um meio importante de se fazer matemática. Ainda, nesse documento, pode-se ler que:

Resolver problemas é uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática e, assim, ela não deveria ser uma parte isolada do programa de Matemática. [...] Os contextos dos problemas podem variar desde experiências familiares envolvendo as vidas dos estudantes ou seu dia-a-dia na escola, até aplicações envolvendo as ciências ou o mundo do trabalho. [...] Bons problemas dão aos estudantes a oportunidade de solidificar e estender sua compreensão e estimular nova aprendizagem. [...] Muitos conceitos matemáticos podem ser introduzidos através de problemas baseados nas experiências familiares vividas pelos estudantes ou de contextos matemáticos. (NCTM, 2000, p. 52)

4.3.2 Diferentes abordagens de Resolução de Problemas

Como mencionamos anteriormente, durante a década de 80, foram desenvolvidos materiais instrucionais para auxiliar o professor em sala de aula, com a resolução de problemas passando a ser o ponto central de seu trabalho. Onuchic (1999, p.206) esclarece que

Entretanto, esse tipo de trabalho, não deu o tipo de coerência e a direção necessária a um bom resultado porque havia pouca concordância na forma pela qual esse objetivo era encarado. Essa falta de concordância ocorreu, possivelmente, pelas grandes diferenças existentes entre as concepções que pessoas e grupos tinham sobre o significado de “resolução de problemas ser o foco da matemática escolar”.

Assim, surgem diferentes formas de se conceber resolução de problemas no processo de ensino-aprendizagem de Matemática. Schroeder e Lester (1989), identificam três maneiras distintas de abordar resolução de problemas: (1) ensinar *sobre* Resolução de Problemas (Teorizar sobre Resolução de Problemas); (2) ensinar Matemática *para* resolver problemas (Ensinar a resolver problemas) e (3) ensinar Matemática *via* resolução de problemas (Resolução de problemas como uma metodologia de ensino-aprendizagem)

4.3.2.1 Ensinar *sobre* Resolução de Problemas

O professor que ensina *sobre* resolução de problemas, tem um trabalho pautado no modelo de ensino proposto por Polya (1994-1945) ou variações dele. Esse modelo descreve um conjunto de quatro fases interdependentes no processo de resolução de problemas matemáticos: compreender o problema, criar um plano, executar o plano; e olhar de volta ao problema original, no intuito de avaliar a solução encontrada. Segundo Polya, um inteligente resolvidor de problemas utiliza as quatro fases quando está resolvendo problemas matemáticos, e é encorajado a tomar conhecimento de seu próprio progresso, através dessas fases, enquanto resolve o problema.

4.3.2.2 Ensinar *para* resolver problemas

Schroeder e Lester (1989) enfatizam que, no ensinar *para* resolver problemas, o professor se concentra sobre a matemática programada para aquela aula que seria aplicada na resolução de problemas dados. Ainda que a aquisição do conhecimento matemático seja de fundamental importância, o propósito essencial para aprender matemática, nessa linha, é o de ser capaz de usá-la. Aos estudantes devem ser dados muitos exemplos de conceitos e de estruturas matemáticas que eles estão estudando, e muitas oportunidades para aplicar essa matemática na resolução de problema. Ainda, o professor que ensina *para* resolver problemas está muito preocupado sobre a habilidade dos estudantes em transferir aquilo que eles já aprenderam no contexto de um problema para outros. Uma forte justificativa dessa abordagem é a de que a única razão para aprender Matemática é a de ser capaz de usar o conhecimento adquirido em sala de aula para resolver problemas.

4.3.2.3 Ensinar *via* resolução de problemas

Em 1989, Schroeder e Lester nos chamam a atenção para a falta de concordância que houve na interpretação da primeira recomendação deixada pelo documento *Uma Agenda para Ação*, que pedia que resolução de problemas fosse o foco da matemática escolar nos anos 80, como já foi dito anteriormente. Pesquisadores começaram a questionar o ensino e o efeito de estratégias e modelos e passaram a discutir as perspectivas didático-pedagógicas da resolução de problemas e, como diz Andrade (1989, p. 12), “a resolução de problemas passou a ser pensada como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de se ensinar matemática”.

Nesse ano, estudiosos passaram a trabalhar o ensino de Matemática “via” resolução de problemas, entendendo “via” como um meio de se aprender Matemática.

No ensino *via* resolução de problemas, os problemas são trabalhados não apenas com o propósito de se aprender Matemática, mas também como o principal meio de se fazer isso. Nessa abordagem, o ensino de um tópico de Matemática começa com uma situação problema que incorpora aspectos chave do tópico, e técnicas matemáticas são desenvolvidas como respostas razoáveis a problemas razoáveis. Um objetivo de se aprender Matemática é o de transformar certos problemas não rotineiros em rotineiros⁹. A aprendizagem matemática, nessa forma, pode ser vista como um movimento do concreto (um problema do mundo real que serve como um exemplo de conceito matemático ou de técnica matemática) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar com estes símbolos). (SCHROEDER, LESTER, 1989, p. 33)

De acordo com Schroeder e Lester (1989), diferentemente das outras duas primeiras abordagens, ensinar via resolução de problemas é uma concepção que não tem sido adotada, nem implicitamente, nem explicitamente por muitos professores, autores de livros-texto e desenvolvedores de currículo, mas ela é uma abordagem para se ensinar matemática e que merece ser considerada, desenvolvida, experimentada e avaliada. Eles realçam que

Não há dúvida de que ensinar matemática *via* resolução de problemas é a abordagem mais consistente com as recomendações da Comissão de Padrões do NCTM, que dizem:

- Habilidades e conceitos matemáticos devem ser aprendidos no contexto da resolução de problemas;
- O desenvolvimento de processos de pensamento de nível superior deve ser estimulado através de experiências em resolução de problemas;
- O ensino de Matemática deve acontecer numa atmosfera de resolução de problemas, orientada para a pesquisa. (SCHROEDER, LESTER, 1989, p. 34)

⁹“Problemas rotineiros são classificados como *problemas padrões* que são resolvidos pela aplicação direta de um ou mais algoritmos anteriormente aprendidos. Não exigem estratégias para a sua solução. [...] A resolução do problema já está contida no próprio enunciado. A tarefa básica é transformar a linguagem usual para uma linguagem matemática adequada, identificando quais operações ou algoritmos são apropriados para resolver o problema [...]. (DANTE, 1988, p. 85)

4.3.2.4 Ensinar *através* da resolução de problemas

Foi, a partir de 1990, que a abordagem “ensinar *via* resolução de problemas” (*Teaching via Problem Solving*) se tornou “ensinar *através* de resolução de problemas” (*Teaching through Problem Solving*), que é uma metodologia recente na história da pesquisa em resolução de problemas no currículo de Matemática. Nela o que se pretende é ensinar, aprender e avaliar a matemática construída pelos alunos com a guia e direção do professor *através* da resolução de problemas.

O que distingue essa abordagem da anterior é que a expressão “através de” significa do começo ao fim, inteiramente, ao longo da resolução do problema e não simplesmente um recurso para se resolver o problema dado como pedia a expressão “via” que significa “por meio de”. Deste modo, a expressão “através de” é uma forma de o professor ensinar e, conseqüentemente, o aluno aprender durante o processo de resolução, de fazer matemática, pois o aluno diante do problema deve se mostrar como um co-construtor do seu próprio conhecimento. A primeira ação do professor deve ser a de apresentar, para os alunos, problemas que gerarão novos conceitos ou conteúdos, objetivados para a aula.

Ensinar através da resolução de problemas inicia-se com um problema. Os estudantes aprendem e compreendem aspectos importantes de conceitos ou ideias matemáticas ao explorarem a situação problema. [...] A aprendizagem acontece durante o processo da resolução do problema. Enquanto os estudantes resolvem o problema eles podem fazer uso de qualquer abordagem que tenham pensado, isto é, fazer uso de qualquer parte do conhecimento que já possuem e justificar suas ideias no modo que eles acreditam ser convincente. O ambiente de aprendizagem de uma sala de aula baseada em problemas dá um cenário natural para os alunos apresentarem variadas soluções ao seu grupo ou à classe e aprenderem matemática através de interações sociais, negociações significativas e de compreensão compartilhada. (CAI, 2003, p. 242-243)

Van de Walle (2001) sugere um trabalho de ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas, em seu livro, *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*. Para ele, a resolução de problemas é o foco do currículo de Matemática e diz que o ensino de Matemática através da resolução de problemas deve ser visto como a principal estratégia de ensino. Ele, ainda, enfatiza que o trabalho de ensinar deve começar sempre onde estão os alunos, ao contrário da forma tradicional em que o ensino começa onde estão os professores, ignorando-se, na maioria das vezes, os conhecimentos prévios dos estudantes.

A maioria, se não todos, os conceitos e procedimentos matemáticos importantes podem ser melhor ensinados através da resolução de problemas. Isto é, tarefas ou problemas podem e devem ser colocados de forma a engajar os estudantes em pensar e desenvolver a matemática importante que precisam aprender (VAN DE WALLE, 2001, p. 40).

Esse autor salienta que não há dúvida de que ensinar matemática através da resolução de problemas não é tarefa fácil. Menciona que o professor deve estar muito bem preparado para trabalhar, usando esse caminho, no sentido de que as tarefas devem ser selecionadas e planejadas a cada dia, levando em consideração o conhecimento que os estudantes trazem consigo e as necessidades de atender ao currículo.

Van de Walle (2001), ao descrever o ambiente em uma sala de aula em que se ensina matemática *através* da resolução de problemas, diz que não se pode esperar sentado que uma mágica aconteça. O professor é responsável por criar um clima para o bom funcionamento da aula. Assim, ele apresenta um modo de encaminhar as aulas composto por três fases importantes: o *Antes*, o *Durante* e o *Depois*. Cada uma dessas fases tem uma programação específica e requer ações específicas do professor, que são necessárias para tornar a aula eficiente.

Antes (fora da sala de aula)

Nessa fase, o professor deve levar em consideração o conhecimento prévio dos alunos, necessário à construção de novo conhecimento matemático. Além disso, o professor deve fazer todo o planejamento da aula, organizando-a assim: o foco da aula – ou seja, ter em mente o que de novo se pretende construir em Matemática, com o problema dado; o problema – selecionar um problema que permita chegar à construção de novos conceitos e conteúdos pretendidos; as estratégias – devem ser selecionadas para o encaminhamento e o desenvolvimento da aula; a resolução do problema – o problema deve ser resolvido detalhadamente, pelo professor, selecionando diferentes caminhos para se chegar à solução; a plenária – levantar questões para estimular os alunos à discussão e à exploração do problema durante a plenária; e a formalização – é o momento em que o professor, sob sua inteira responsabilidade, faz o fechamento da aula, apresentando, por escrito, as definições dos novos conceitos construídos e todo o conteúdo matemático decorrente desse trabalho.

Durante (na sala de aula)

Nessa fase, o professor é um observador e avaliador do trabalho dos alunos. Inicialmente, entrega a cada aluno, uma cópia da atividade que deve ser lida por ele. Em seguida, formam-se os grupos, e nesse ambiente, há a socialização do trabalho onde, seus participantes passam a trabalhar cooperativamente à busca de possíveis estratégias que poderão levar o grupo à busca da solução, num trabalho colaborativo.

É importante dar aos alunos o tempo que o professor considera suficiente para desenvolver esse trabalho. Após a leitura do problema, é possível que alguns alunos, em seus grupos, façam perguntas a respeito do enunciado. Se necessário, o professor poderá interferir no processo, desde que essa

situação se apresente como uma dúvida (problema secundário) pois, se não esclarecida, o trabalho poderá não ir para a frente. Também seria considerado um problema secundário se alguns alunos ou alguns grupos não conseguissem fazer a leitura correta do problema, falhando em sua interpretação. Considerado pelo professor o tempo esgotado, será solicitada a colocação das resoluções de alguns grupos, na lousa, esperando-se que, na plenária, suas dúvidas fiquem esclarecidas.

Depois (na sala de aula)

Para esta fase, o professor congrega todos os alunos de todos os grupos para uma atividade participativa – professor e alunos.

Nela, o professor considera as soluções apresentadas pelos grupos, sem avaliá-las, e dirige uma discussão exploratória enquanto os alunos defendem suas resoluções e dão justificativas. Professor e alunos, socialmente analisam as resoluções colocadas na lousa: as estratégias escolhidas, os resultados corretos ou não, e, com as dúvidas esclarecidas, chega-se a um consenso acerca da solução obtida. O professor termina com a formalização, totalmente de responsabilidade do professor, escrevendo na lousa os novos conceitos e conteúdos construídos e com os alunos anotando em seus cadernos toda a teoria construída.

Este é um tempo de muita exploração, tanto da parte do professor quanto dos alunos. Aproveita-se esse tempo, também, para levar os alunos a entenderem como os membros de uma comunidade devem proceder, quando estão num ambiente de formação de um cidadão: saber ouvir, saber falar e saber agir num ambiente onde o respeito pelo outro, quer seja colega ou professor, deve acontecer.

Dúvidas esclarecidas, questionamentos levantados e discutidos, conscientização do que se queria buscar nos dados do problema e em sua resolução fazem parte dessa fase.

O professor, como um veículo que conduz os alunos durante todo esse trabalho, deve usar terminologia e notação adequadas de acordo com a construção Matemática dos conceitos e nos conteúdos pretendidos. (SOUZA, 2010, p.125-126)

4.3.3 A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Decidimos, para nosso trabalho, fazer uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, pois a consideramos como um importante caminho para se fazer Matemática em sala de aula.

Nessa Metodologia, ensinar com compreensão é importante, pois o estudante precisa aprender o conceito e não somente executar processos; uma vez que ele tenha adquirido o conceito, repetir é necessário para fixá-lo; e fazer a formalização, as demonstrações do ponto de vista matemático são fundamentais, pois a Matemática tem sua linguagem própria, precisa, concisa e universal, que precisa ser aprendida e usada corretamente pelos estudantes, sob a guia do professor.

Allevato e Onuchic (2008)¹⁰ salientam que, na referida Metodologia, os problemas são propostos aos estudantes antes mesmo de lhes ter sido apresentado formalmente o conteúdo matemático que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor como necessário ou mais apropriado para a resolução do problema proposto.

Portanto, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos-chave desse tópico e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca por respostas razoáveis ao problema dado. A avaliação do progresso dos alunos é feita continuamente durante a resolução do problema.

Cai (2003, p.241) realça que

o ensino de resolução de problemas tem uma longa história na matemática escolar. Nas últimas décadas houve avanços significativos em nossa compreensão dos processos complexos envolvidos em resolução de problemas (Lester 1994; Schoenfeld 1992; Silver 1985). Também, uma considerável discussão tem acontecido sobre ensino de Matemática com um foco sobre resolução de problemas (Hembree e Marsh 1993; Henningsen e Stein 1997; Hiebert et al 1997; Kroll e Miller 1993; Stein, Smith e Silver 1999). Entretanto, ensinar através da resolução de problemas é uma ideia relativamente nova na história da resolução de problemas no currículo de matemática (Lester, 1994). De fato, porque ensinar matemática através da resolução de problemas é antes de tudo um conceito novo, ele não tem sido assunto de muita pesquisa.

¹⁰ Esse trabalho foi apresentado no grupo de trabalho e discussão sobre Resolução de Problemas (Topic Study Group 19) no ICME, 2008.

Embora pouco se conheça sobre os mecanismos atuais que os estudantes usam para aprender e dar sentido à matemática através da resolução de problemas, os pesquisadores concordam que ensinar através da resolução de problemas permanece a promessa de aprendizagem nos estudantes. Muitas das ideias tipicamente associadas com essa abordagem (mudança nos papéis do professor, projetar e selecionar problemas para o ensino, aprendizagem colaborativa, e problematizar o currículo) têm sido extensivamente estudadas, resultando em respostas baseadas em pesquisa para as várias questões frequentemente levantadas sobre o ensino com resolução de problemas.

O GTERP, coordenado por Onuchic desde 1992, na UNESP de Rio Claro, tem por objetivo central o de desenvolver pesquisas que efetivamente atinjam a sala de aula e tem sido o núcleo gerador de atividades de aperfeiçoamento, de investigação e de produção científica na linha de Resolução de Problemas em Educação Matemática e adota a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

“Ensinar Matemática através da resolução de problemas é uma abordagem consistente com as recomendações do NCTM (2000) e dos PCN_s (1997, 1998, 1999), pois conceitos e habilidades matemáticos são aprendidos no contexto da resolução de problemas”. (ONUCHIC e ALLEVATO, 2005, p. 222).

É importante reconhecer que a Matemática deve ser trabalhada através da Resolução de Problemas, ou seja, que tarefas envolvendo problemas ou atividades sejam um veículo pelo qual um currículo deva ser desenvolvido. A aprendizagem será uma consequência do processo de Resolução de Problemas. (ONUCHIC e ALLEVATO, 2005, p.221)

A palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação significa que o ensino e a aprendizagem devem ocorrer simultaneamente, durante o processo de construção de um determinado conceito. A avaliação, integrada ao ensino, contribui para a melhora da aprendizagem.

Huaman Huanca (2006, p.44) apresentou um quadro que procura fazer a distinção entre essas três palavras, sejam elas consideradas isoladamente ou em composição. Uma nova versão desse quadro, modificando algumas dessas ideias, foi feita por Nunes (2010, p.93) como apresentamos a seguir.

Três processos distintos, individuais, na primeira metade do século XX	Ensino A responsabilidade do ensino é do professor que visa à aprendizagem do aluno	Aprendizagem Se o professor tivesse o domínio do conhecimento, então, o aluno aprenderia. Os alunos deveriam aprender a partir do que o professor ensinava, mas a responsabilidade da aprendizagem seria do aluno. Como? Sabendo relacionar suas ideias com o que o professor ensinava e isso nem sempre ocorria.	Avaliação A avaliação era feita através de provas. Mudanças ao longo do tempo promoviam discussões sobre diferentes formas de como se poderia avaliar.
Um processo duplo ligando ensino à aprendizagem, ocorrido entre as décadas de 60 a 80 do século XX.	Ensino-Aprendizagem Este é um ser maior. É maior do que o ensino. É maior do que a aprendizagem. Deve acontecer simultaneamente durante a construção do conhecimento. Os professores são guias e os alunos aprendem sabendo relacionar suas ideias com o conhecimento que ambos querem construir. A avaliação ainda se dava por meio de provas, mudando-se, às vezes, os enfoques assumidos.		
Um processo único de ensinar, aprender e avaliar, a partir da década de 90 do século XX.	Ensino-Aprendizagem-Avaliação Este é um ser ainda maior. É maior do que o ensino, do que a aprendizagem e do que a avaliação. A avaliação constitui-se, então, como parte integrante do processo ensino-aprendizagem, que passa a ser vista como um processo bem mais amplo chamado ensino-aprendizagem-avaliação. Nesse processo nem só o aluno é avaliado, mas também, o professor.		

Figura 10 – Quadro de Ensino-Aprendizagem-Avaliação

Van de Walle (2001) diz que tarefas ou problemas podem e deveriam ser propostos para envolver os estudantes em atividades para pensar e para desenvolver a importante Matemática que eles precisam aprender. Um ponto importante que esse autor destaca é o potencial avaliativo da resolução de problemas. Para ele, essa atividade é uma fonte segura de valiosas informações que permitem ao professor, entre outras coisas, planejar as aulas seguintes e ajudar os estudantes, individualmente, a avaliar seu progresso.

Van de Walle (2001, p. 62), apoiado nos *Assessment Standards*, definiu a avaliação como “o processo de obter evidência sobre o conhecimento de um estudante, habilidade para usar, e aptidão para a matemática e de fazer inferências a partir da evidência de uma variedade de propósitos”. Para ele

A avaliação deveria ser vista como um processo contínuo mas também bastante deliberado. A avaliação precisa ser planejada e, então, os dados são adquiridos na sala de aula. A evidência é, depois, interpretada e é usada para planejar o ensino e informar aos alunos. Isso leva a planejar a avaliação seguinte e o ciclo continua. (VAN DE WALLE, 2001, p. 62)

Segundo esse autor a avaliação envolve quatro estágios que usualmente operam num ciclo: o planejamento da avaliação (estabelecendo objetivos claros); a obtenção de evidência (empregando múltiplos métodos); a interpretação da evidência coletada (fazendo inferências) e o uso dos resultados (tomando decisões).

Bransford, Brown e Cocking (2007, p. 44) afirmam que “as avaliações contínuas permitem que o professor compreenda as ideias preconcebidas dos estudantes, perceba em que ponto estão no caminho que leva do raciocínio informal para o formal e planeje a instrução de acordo com isso”. Segundo Nunes (2010, p.94) esse tipo de avaliação ajuda tanto o professor como o aluno na monitoração do progresso.

Nessa Metodologia, como já foi dito, concebemos problema matemático como algo que não sabemos resolver mas que há interesse em resolvê-lo (ONUCHIC, 1999). O problema é o ponto de partida no processo de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática. Desse modo, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática é um meio de se aprender Matemática através da resolução de problemas.

Essa Metodologia não valoriza a mecanização do conhecimento, pelo contrário tem por meta ajudar os alunos a se tornarem investigadores diante de uma situação desafiadora, um problema, de forma a compreender e questionar os conceitos de que irão necessitar para resolvê-lo. O papel do professor muda de “comunicador de conhecimento” para o de observador, organizador, consultor, mediador, controlador, incentivador da aprendizagem. Desse modo, exige-se bastante do professor, “o professor terá que enfrentar situações inesperadas em sala de aula e, em algumas oportunidades, deverá alterar aquilo que tinha planejado, ainda mais, terá que estar atento às dificuldades apresentadas pelos alunos”. (RODRIGUES, 1992, p.29).

Apoiadas na literatura sobre o tema, Onuchic e Allevato (2011) dizem que “não há formas rígidas para colocar em prática essa Metodologia”. E, apresentam uma proposta que consiste em organizar as atividades seguindo as seguintes etapas:

1) Preparação do problema – Selecionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha, ainda, sido trabalhado em sala de aula.

2) Leitura individual – Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.

3) Leitura em conjunto – Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.

- Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo o problema.
- Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.

4) Resolução do problema – A partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da *matemática nova* que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.

5) Observar e incentivar – Nessa etapa o professor não tem o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor como mediador leva os alunos pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.

- O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias, já conhecidas, necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho.

6) Registro das resoluções na lousa – Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

7) Plenária – Para esta etapa são convidados todos os alunos, afim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.

8) Busca do consenso – Depois de sanadas as dúvidas, e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.

9) Formalização do conteúdo – Neste momento, denominado *formalização*, o professor registra na lousa uma apresentação *formal* – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto. (ONUCHIC, ALLEVATO, 2011, p.84-85)

Concordamos com Herminio (2008, p. 65) sobre o fato de que

O ideal seria poder proporcionar ao aluno a possibilidade de, num primeiro momento, resolver problemas reais, semelhantes àqueles que o homem pode encontrar em seu dia-a-dia, para que ele possa saber ou reconhecer que aquilo que ele está estudando tem aplicação na vida. Mas não podemos limitar o crescimento intelectual dos alunos e, por isso, devemos incentivá-los a não fazer da Matemática uma ferramenta utilitarista, mas fazê-los pensar sobre a criatividade que ela pode despertar ao ponto de, utilizando conhecimentos prévios, poder construir novos conhecimentos. Dessa maneira, valorizam-se as diferentes descrições de resolução por parte dos alunos, bem como proporcionam o incentivo a diferentes reflexões sobre os problemas trabalhados.

Esse mesmo autor, ainda acrescenta que

Para que essa metodologia de trabalho, em sala de aula, tenha bons resultados, é necessário que haja uma melhor formação do professor, já que esse bom resultado depende muito de um preparo prévio das aulas e de uma reflexão sobre os objetivos que se pretende alcançar durante a aula.

O professor precisa estar atento ao seu planejamento e ao desenvolvimento da aula a ser trabalhada a partir da resolução de problemas, bem como criar condições para que os alunos adquiram confiança em si mesmos e consigam caminhar no sentido da resolução do problema proposto. É necessário ver o professor como um guia, seu colaborador e não um obstáculo ao seu crescimento. (HERMINIO, 2008, p. 65)

Marincek (2001, p.16) defende que

Para garantir que os alunos construam um conhecimento contextualizado, provido de sentido, é necessário que o professor formule ou escolha cuidadosamente os problemas que irá propor, para que o aluno considere-os como problemas de fato e sinta-se impelido a agir, a falar e a refletir para solucioná-los.

Para atender a isso, Onuchic (1998) elaborou algumas questões dirigidas aos professores ao adotar essa metodologia, para ajudá-los a refletir sobre elas e a bem escolher os problemas com os quais irá trabalhar:

Isso é um problema? Por quê?

Que tópicos de Matemática podem ser iniciados com esse problema?

Haverá necessidade de se considerar problemas menores (secundários) associados a ele?

Para que séries acredita ser este problema adequado?

Que caminhos poderiam ser percorridos para se chegar à sua solução?

Como observar a razoabilidade das respostas obtidas?

Como professor, você teria dificuldade em trabalhar esse problema?

Que grau de dificuldade acredita que seu aluno possa ter diante desse problema?

Como relacionar o problema dado com aspectos sociais e culturais?

4.4 Diretrizes Futuras e Perspectivas para a Pesquisa e Desenvolvimento Curricular em Resolução de Problemas

O texto que apresentaremos a seguir tem, como referência, o artigo *Future Directions and Perspectives for Problem Solving Research and Curriculum Development* (Diretrizes Futuras e Perspectivas para a Pesquisa e Desenvolvimento Curricular em Resolução de Problemas), dos autores Lyn English, Richard Lesh e Thomas Fennewald, apresentado, em 2008, no ICME 11-México.

Nesse trabalho esses autores dizem que, desde a década de 60, numerosos estudos sobre Resolução de Problemas têm revelado a complexidade do domínio e a dificuldade em transferir descobertas da pesquisa para a prática. A literatura aponta que o impacto da pesquisa em Resolução de Problemas sobre o currículo matemático tem sido limitado. Além disso, nosso acúmulo de conhecimento sobre o ensino de resolução de problemas é lento.

Nesse artigo eles inicialmente apresentam um resumo dos 50 anos de pesquisa sobre resolução de problemas matemáticos. Em seguida, consideram alguns fatores que têm impedido a pesquisa em Resolução de Problemas nas últimas décadas e propõem algumas diretrizes de como podemos avançar nesse campo. Enfatizam a necessidade urgente de levar em conta a natureza da Resolução de Problemas em várias áreas do mundo de hoje, de modernizar nossas perspectivas sobre o ensino e a aprendizagem de resolução de problemas e de conteúdo matemático através da resolução de problemas. Relatam que o desenvolvimento de uma teoria forte é também muito esperado e pretendem mostrar como novas perspectivas sobre o desenvolvimento de habilidades em resolução de problemas podem contribuir, no desenvolvimento de teoria, para orientar projetos de atividades de aprendizagem que valem a pena. Em particular, exploram um modelo e perspectivas de modelação como uma alternativa para visões existentes sobre Resolução de Problemas.

Esses autores realçam que

A pesquisa sobre resolução de problemas matemáticos tem recebido muita atenção nas últimas décadas. Entre os desenvolvimentos notáveis acontecidos há: o trabalho pioneiro de Polya (1945) sobre como resolver problemas, estudos de hábeis resolvidores de problemas (por exemplo, Anderson, Boyle, & Reiser, 1985), pesquisa sobre o ensino de estratégias em resolução de problemas, heurísticas e posteriores processos metacognitivos (por exemplo, Charles & Silver, 1988; Lester, Garofalo, e Kroll, 1989) e, mais recentemente, estudos sobre modelação matemática (por exemplo, Lesh, no prelo; English, 2007). Atualmente, perspectivas já existentes sobre resolução de problemas têm tratado essa pesquisa como um tópico isolado. Onde as habilidades em resolução de problemas são assumidas para desenvolver, a partir da aprendizagem inicial de conceitos, procedimentos seguidos pela prática de “problemas enunciados”, através da exposição a uma série de estratégias (por exemplo, “desenhe um diagrama”, “adivinhe e verifique”) e, finalmente, por experiências em aplicar essas competências para resolver problemas “novos” ou “não-rotineiros”. (ENGLISH, LESH, FENNEWALD, 2008, p.1)

Quando ensinada dessa maneira, a resolução de problemas é vista como independente, isolada do desenvolvimento de ideias, compreensões e processos matemáticos essenciais. Apesar dessas décadas de pesquisa e desenvolvimento curricular associado, parece que as habilidades em resolução de problemas dos estudantes ainda necessitam melhorar consideravelmente, especialmente devido à rápida evolução do mundo atual (KUEHNER, MAUCH, 2006; LESH, ZAWOJEWSKI, 2007; LESTER, KEHLE, 2003).

O estado atual dessas questões não tem sido ajudado pelo declínio notável da quantidade de pesquisas em resolução de problemas, que foram conduzidas, na década passada. Muitos fatores foram identificados como contribuintes para esse declínio. Tais fatores incluem: as tendências cíclicas desencorajadoras das políticas e práticas educacionais, a pesquisa limitada sobre o desenvolvimento de conceito e resolução de problemas, o conhecimento insuficiente de resolução de problemas dos estudantes fora da sala de aula, a natureza mutável dos tipos de resolução de problemas e pensamento matemático necessário para fora da escola e a falta de acúmulo de pesquisa sobre resolução de problemas (LESH, ZAWOJEWSKI, 2007). Antes de considerar cada um desses fatores, English, Lesh, Fennewald (2008) apresentam **Um Breve Resumo da Pesquisa sobre Resolução de Problemas Matemáticos nos últimos 50 anos**, e salientam que

Em Educação Matemática, a pesquisa sobre resolução de problemas tem focado, primeiramente, sobre os *problemas enunciados* do tipo enfatizado nos livros texto ou testes escolares - em que "problemas" são caracterizados como atividades que envolvem *ir dos dados para os objetivos quando o caminho não é óbvio*. Com tais situações em mente, o livro *How to Solve It* (1945) de Polya introduziu a noção de heurísticas - tais como: *fazer um desenho*, *trabalhar de trás para frente*, *olhar para um problema semelhante*, ou *identificar os dados e os objetivos* (mais tarde conhecido como *estratégias* por educadores matemáticos) - que pesquisadores, em educação matemática imediatamente reconheceram serem úteis para gerar descrições, depois do ato, dos comportamentos passados por muitos hábeis resolvidores de problemas. Mas, mesmo para resolvidores de problemas menos experientes, essas mesmas heurísticas também eram esperadas para fornecer respostas úteis para a pergunta: "O que devo fazer quando eu estou impedido de prosseguir?" (ENGLISH, LESH, FENNEWALD, 2008, p.2)

Eles dizem que, infelizmente, os últimos 50 anos de investigação não forneceram validação para essas últimas expectativas. No entanto, a maioria das pesquisas passadas tem avançado na investigação das questões:

- (a) Podem as heurísticas estilo-Polya serem ensinadas?
- (b) O fato de as estratégias-heurísticas serem aprendidas tem impactos positivos sobre as competências dos estudantes?

Mas, quase não existe pesquisa que tenha dado definições operacionais úteis para responder questões mais fundamentais, tais como:

- (a) O que significa "entender" heurísticas tipo-Polya?
- (b) Como (e de que maneira) essas compreensões se desenvolvem?
- (c) Qual é a natureza dos níveis iniciais de desenvolvimento?
- (d) Como o desenvolvimento pode ser observado, documentado e medido (ou avaliado), de forma confiável?

Até os pesquisadores desenvolverem respostas úteis para essas últimas perguntas, não é razoável esperar um progresso significativo a ser feito sobre as duas questões anteriores. (ENGLISH, LESH, FENNEWALD, 2008, p.2)

Apesar da validade da forma aparente das heurísticas de Polya, numa revisão abrangente da literatura de pesquisa em educação matemática, Begel (1979) concluiu que havia pouca evidência para apoiar o apelo de que os processos gerais, que os especialistas usam para descrever seus comportamentos passados em resolução de problemas, também forneceriam prescrições para orientar os passos seguintes dos novatos. De forma semelhante, na sua avaliação da literatura sobre Resolução de Problemas, Silver (1985) concluiu que, mesmo em estudos onde algumas aprendizagens bem sucedidas tem sido relatadas, a transferência de aprendizagem tem sido inexpressiva. Além disso, os sucessos geralmente

ocorreram apenas quando os professores, ministraram cursos longos e complexos, nos quais o tamanho e a complexidade dos “tratamentos” não deixaram claro *porque* o desempenho melhorou. Talvez, sugeriu Silver, a melhora no desempenho em resolução de problemas, simplesmente resultou da aprendizagem pelos estudantes de conceitos matemáticos relevantes - ao invés de aprender estratégias de resolução de problemas, heurísticas ou processos de resolução de problemas!

Conclusões semelhantes foram novamente estabelecidas, em Grouws (1992), no *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* do NCTM, onde no capítulo sobre Resolução de Problemas, Schoenfeld (1992) concluiu que as tentativas de ensinar os estudantes a usarem as heurísticas e processos estilo-Polya, em geral, não tinham provado ser bem sucedidas. No entanto, Schoenfeld chegou a sugerir que uma das razões para essa falta de sucesso pode ser porque muitas de heurísticas de Polya parecem ser descritivas, mas não prescritivas. Isto é, são realmente apenas nomes de grandes categorias de processos, ao invés de serem processos bem definidos em si mesmos. Assim, numa tentativa de ir além do “poder descritivo” para alcançar “o poder prescritivo”, Schoenfeld lembrou que a pesquisa e o ensino em Resolução de Problemas deveriam:

- (a) Ajudar os estudantes a desenvolverem um maior número de *estratégias de resolução de problemas mais específicas* que se ligam, mais claramente, a classes específicas de problemas;
- (b) Ensinar *estratégias metacognitivas*¹¹, de modo que os estudantes aprendam a quando usar suas estratégias e conhecimento do conteúdo em resolução problemas;
- (c) Desenvolver formas de melhorar as crenças dos estudantes sobre a natureza da matemática, a resolução de problemas e suas próprias competências pessoais. (ENGLISH, LESH, FENNEWALD, 2008, p.3)

Infelizmente, dez anos após as propostas feitas por Schoenfeld, Lester e Koehle (2003) novamente revisaram a literatura e novamente concluíram que a pesquisa sobre resolução de problemas, ainda, tinha pouco a oferecer para a prática escolar. Uma explicação para essa falta de sucesso parecia estar, de uma maneira

¹¹A metacognição “envolve o conhecimento do indivíduo sobre seu próprio conhecimento. Isto ocorre quando o indivíduo tem consciência e sabe o que de fato já aprendeu e já domina com segurança e facilidade, e quando o indivíduo também está ciente sobre o que ainda não aprendeu e o que sente dificuldades. Ou seja, quando o indivíduo está desenvolvendo sua metacognição ele tem conhecimento, a nível consciente, de suas potencialidades e dificuldades. Além disso, o indivíduo sabe usar seu conhecimento de modo eficaz e sabe procurar superar suas dificuldades”. (SANTOS, 1997, p. 20).

simples, na proposta de Schoenfeld que mudou a falha básica das heurísticas de Polya para um nível mais alto. Ou seja, independentemente da atenção focada sobre as heurísticas estilo-Polya ou sobre o modelo dos processos ou crenças metacognitivos estilo-Schoenfeld, listas curtas de processos descritivos ou regras tendem a ser muito gerais para terem poder prescritivo. Ainda, listas mais longas de processos prescritivos ou regras tenderiam a tornar-se tão numerosos que saber quando usá-los se tornaria o centro do que significaria entendê-los. Este resultado tende a ser agravado pelo fato de que, independentemente da atenção focada sobre as heurísticas de Polya ou sobre os processos ou crenças metacognitivos de Schoenfeld, virtualmente todos os processos e regras são contraprodutivos em algumas situações. Por exemplo, mesmo a advertência, aparentemente sensível, para os estudantes planejarem-monitorarem-avaliarem seus trabalhos, cuidadosamente, costuma ser reservada explicitamente durante os períodos de produtiva “reflexão”, durante os estágios iniciais da resolução de problemas complexos. Na verdade, a característica definidora da reflexão é que resolvedores de problemas são supostamente rápidos em gerar um conjunto variado de ideias – temporariamente, evitando crítica, avaliação e preocupações sobre longa gama de implicações. Assim, saber quando e porque usar tais técnicas emerge como uma das partes mais importantes do que significa entendê-las.

Em resposta a tais conclusões, sobre o estado da pesquisa em Resolução de Problemas, na sessão plenária de Schoenfeld, em 2007, no NCTM - *Research Pre-session*, ele propôs um outro adorno de sua mesma teoria básica. O centro dessa recomendação foi o de que os pesquisadores deveriam focar algo que poderíamos chamar de *processos meta-meta-cognitivos* - ou regras que se esperam operar sobre os processos, heurísticas, estratégias, habilidades ou conhecimentos metacognitivos de nível mais baixo. Mas, novamente, assim como no caso das crenças e processos metacognitivos que Schoenfeld propôs 15 anos antes, processos meta-meta-cognitivos foram descritos como sendo explicitamente regras executáveis (por exemplo, regras custo-benefício que operam sobre regras de nível mais baixo). Consequentemente, não está claro porque regras meta-cognitivas deveriam ser esperadas para evitar os mesmos resultados que foram associadas às noções passadas de heurísticas, estratégias ou processos meta-cognitivos. Isto é,

nas listas curtas de regras descritivas falta poder prescritivo e listas mais longas de regras prescritivas envolvem saber quando e porque usá-las.

Esses autores ressaltam que

Lesh e Zawojewski (2007) concluíram que quando um campo de pesquisa tenha experimentado mais de 50 anos de falha usando entorno contínuo de conceitos governados por regras da competência de resolução de problemas, talvez tenha chegado a hora de considerar outras opções - e reexaminar hipóteses com base sobre o que significa compreender conceitos e processos de resolução de problemas matemáticos. Em particular, é hora de reexaminar hipóteses com base sobre o que significa compreender um pequeno número de grandes ideias em matemática elementar. Uma alternativa é a utilização de perspectivas teóricas e acompanhamento de metodologias de pesquisa do que nós chamamos de modelo e perspectivas de modelação (MMP) sobre ensino, aprendizagem e resolução de problemas matemáticos (Lesh & Doerr, 2003). (ENGLISH, LESH, FENNEWALD, 2008, p.3)

No referido artigo, antes de descreverem os aspectos relevantes da MMP, esses autores identificam algumas das principais razões do porquê de as últimas pesquisas em Resolução de Problemas produzirem pouco sucesso. Assim, eles abordam sobre os itens: **Fatores Limitantes da Pesquisa em Resolução de Problemas e Avançando no Campo da Pesquisa em Resolução de Problemas e Desenvolvimento Curricular.**

Esses autores descrevem sobre cada um dos Fatores Limitantes da Pesquisa em Resolução de Problemas que, em seu entender, são: Amplitude do Pêndulo movido pelos Testes; Pesquisa Limitada sobre Desenvolvimento Conceitual e Resolução de Problemas; Conhecimento Limitado de Resolução de Problemas dos Estudantes além da Sala de Aula; Natureza Mutante dos Tipos de Resolução de Problemas e Pensamento Matemático Necessário além da Escola; e Falta de Acúmulo de Pesquisa em Resolução de Problemas.

Embora, os referidos autores tenham destacado algumas dessas questões que têm atingido a pesquisa em Resolução de Problemas, segundo eles “há sinais emergentes de que a situação está começando a melhorar”. Acreditam que o pêndulo da mudança está começando a balançar de volta para a Resolução de Problemas em nível internacional, dando ímpeto para novas perspectivas sobre a natureza da Resolução de Problemas e seu papel na matemática escolar (LESTER & KEHLE, 2003). Por exemplo, muitos países asiáticos têm reconhecido a importância de um conhecimento econômico próspero e têm mudado seu foco

curricular para resolução de problemas matemáticos, pensamento crítico, criatividade, inovação e avanços tecnológicos (por exemplo, Maclean, 2001; Tan, 2002) .

Ao refocalizar a atenção sobre Resolução de Problemas e como ela pode se tornar uma componente integral do currículo ao invés de ser um tópico separado, frequentemente até mesmo negligenciado, eles exploram as seguintes questões:

- Qual é a natureza da Resolução de Problemas em várias áreas do mundo de hoje?
- Quais perspectivas orientadas para o futuro são necessárias sobre o ensino e a aprendizagem da Resolução de Problemas incluindo um foco sobre o desenvolvimento de conteúdo matemático através da resolução de problemas?
- Como podem os estudos de hábeis resolvedores de problemas contribuir para o desenvolvimento de uma teoria que possa orientar um projeto de experiências de aprendizagem que valem a pena?
- Por que modelos e perspectivas de modelação são uma alternativa poderosa para as visões existentes sobre resolução de problemas? (ENGLISH, LESH, FENNEWALD, 2008, p.6)

Esses autores, ao explorarem essas questões, abordaram vários subitens desse tópico: A Natureza da Resolução de Problemas no Mundo de hoje; Perspectivas Orientadas para o Futuro sobre Ensino e Aprendizagem de Resolução de Problemas; Estudos de Experiências em Resolução de Problemas e suas Contribuições para o Desenvolvimento Teórico; Desenvolvimento Teórico: Uma Perspectiva de Modelos e Modelação sobre o Desenvolvimento de Resolução de Problemas dentro e fora da sala de aula.

E ainda, concluem dizendo que

A pesquisa sobre resolução de problemas matemáticos estagnou durante grande parte da década de 90 e início deste século. Além disso, a pesquisa que foi realizada não parece ter acumulado um conhecimento substantivo orientado para o futuro, sobre como se pode efetivamente promover a Resolução de Problemas dentro e fora da sala de aula. Esta falta de progresso é principalmente devido aos muitos anos de elaborações repetidas de conceitos governados por regras na competência resolução de problemas.

Chegou a hora de considerar outras opções para avançar na pesquisa em Resolução de Problemas e desenvolvimento curricular. Temos destacado a necessidade de reexaminar as hipóteses de nível básico sobre o que significa compreender conceitos e processos de resolução de problemas matemáticos. Uma poderosa alternativa em que avançado é a de utilizar as perspectivas teóricas e as metodologias de pesquisa que as acompanham com modelos e modelação (MMP), sobre ensino, aprendizagem e resolução de problemas matemático. (ENGLISH, LESH, FENNEWALD, 2008, p. 10)

Capítulo 5

O MODELO MODIFICADO E A PERGUNTA DA PESQUISA

5.1 – O Modelo Modificado

5.2 – A Pergunta da Pesquisa

CAPÍTULO 5 – O Modelo Modificado e a Pergunta da Pesquisa

Um método de resolução é perfeito se podemos pressupor desde o começo, e até mesmo provar, que seguindo esse método atingiremos nosso fim. (Leibniz, Opuscles, 1903, p.161)

5.1 O Modelo Modificado

Segundo Romberg (1992), na construção de um modelo preliminar, que envolve uma escolha de variáveis operando sobre o fenômeno de interesse, pode-se propiciar a compreensão desse fenômeno, servindo como um ponto de partida para nortear o pesquisador. Por outro lado, após algumas etapas do processo de pesquisa já terem sido cumpridas, um reexame do fenômeno pode levar a uma nova seleção de variáveis e à identificação de novas relações entre elas e, portanto, à elaboração de um novo modelo. Desse modo, acreditávamos que ao consultar em literatura nacional e internacional, o que aqueles que tratam temas relacionados aos nossos dois eixos temáticos já falaram, refletiram e publicaram, nosso Modelo Preliminar 3 sofresse mudanças. Mas, nossas expectativas foram superadas com muitas e inesperadas modificações. Analisando o que cada um desses “outros” queria nos dizer entendemos que:

(A) Os documentos oficiais, publicações, artigos, livros e teses estudadas que refletem resultados de pesquisas sobre *Matemática Discreta*, forneceram-nos um referencial sólido no que diz respeito a conteúdos, objetivos, competências e habilidades, e indicam a importância de se trabalhar com ela no ambiente escolar em diferentes níveis de ensino, pois a mesma amplia e enriquece o currículo tradicional. Desse modo, não se constituiu uma tarefa difícil relacionar alguns fatores que justificam a inclusão da *Matemática Discreta* no currículo matemático escolar:

- (1) A Matemática Discreta oferece um cenário para a resolução de problemas com aplicações do mundo real; promove a elaboração de conexões matemáticas; trabalha com recursos tecnológicos; favorece o pensamento crítico e o raciocínio matemático.
- (2) A Matemática Discreta é identificada como a *matemática da tomada de decisão para as criações finitas* e da matemática para otimizar sistemas finitos. Ela é a linguagem de uma grande área da ciência e fundamenta decisões que os indivíduos tomarão em suas próprias vidas, em suas profissões e como cidadãos.
- (3) A Matemática Discreta é necessária para a investigação de cenários onde as funções são definidas sobre conjuntos de números discretos ou finitos tais como os inteiros positivos. [...] em cenários de Matemática Discreta, o foco está em determinar uma contagem.
- (4) A tecnologia computacional exerce uma influência sobre como a Matemática é criada e usada. Os computadores são máquinas finitas e discretas e, assim, tópicos de Matemática Discreta são essenciais para resolver problemas que usam métodos computacionais.
- (5) A Matemática Discreta se preocupa com planejar, usar e analisar algoritmos que resolvem problemas e desenvolvem teoria, frequentemente fazendo uso de tecnologia computacional.
- (6) A Matemática Discreta coloca mais ênfase em ensinar os estudantes a pensar matematicamente e menos ênfase em certas habilidades computacionais.
- (7) A Matemática Discreta permite aos estudantes explorarem situações-problema únicas que não são diretamente abordáveis através da escrita de uma equação ou da aplicação de uma fórmula comum. Pede-se aos estudantes que frequentemente visualizem a situação através do desenvolvimento de um modelo ou de qualquer outra forma de representação. A teoria não requer aprender um grande

número de definições e teoremas, mas realmente requer uma mente afiada e inquisitiva que seja perspicaz e curiosa.

(8) Os teoremas e as estratégias de resolução de problemas, centrais à Matemática Discreta, combinados com o crescente poder dos computadores, abriram novas áreas de investigação e de aplicações.

(9) A Matemática Discreta não consiste apenas de conceitos provados há muito tempo por Euler e Fermat. Está sempre em expansão, com novos conceitos a serem descobertos e provados o tempo todo. Assim, uma contribuição importante da Matemática Discreta para a Educação Matemática é a de ajudar a trazer o entusiasmo e a vitalidade da Matemática para a sala de aula.

(10) Os estudantes aprendem conteúdos matemáticos importantes e processos matemáticos poderosos enquanto estudam Matemática Discreta. Embora, ela aumente a amplitude e a consciência matemática dos estudantes e pode introduzir novas habilidades, não visa a aumentar a sofisticação matemática dos estudantes.

(11) A Matemática Discreta é uma ótima maneira de ajudar os estudantes a permanecerem interessados e envolvidos com matemática, permitindo-lhes ver conexões entre a matemática que eles estão estudando e o mundo real.

(12) A Matemática Discreta é um contexto eficaz para trabalhar os cinco Padrões de Procedimento dos *Standards-2000*, do NCTM. Ao trabalhar com Matemática Discreta, os estudantes podem fortalecer suas habilidades de resolução de problemas, de raciocínio e prova, de comunicação, de conexões e de representação.

(13) Enfim, dentre outros, a Matemática Discreta: é acessível para todos os estudantes em todos os níveis; incentiva uma abordagem de investigação no ensino de matemática; permite aos professores ver a matemática de uma forma nova e repensar sobre componentes da matemática tradicional do currículo de ensino; e facilita o uso de formas de ensino inovadoras na aula de matemática.

(B) A *Resolução de Problemas* - como ponto de partida da atividade matemática - é um importante caminho para se fazer matemática em sala de aula, capaz de gerar situações que mostram caminhos para produzir novos conhecimentos. A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas é bastante recomendada por pesquisadores e desenvolvedores de currículos. Enfatizamos alguns pontos que, em nosso entender, justificam adotá-la no ambiente escolar:

- (1) Na História da Matemática pode-se constatar a importância dos problemas como mola propulsora da atividade e da produção do conhecimento matemático. Muitos resultados matemáticos não teriam sido obtidos não fosse a persistência e a criatividade de pessoas motivadas por uma dúvida, por um problema e pela ânsia de resolvê-lo.
- (2) A Matemática se desenvolve pela prática da crítica e da dúvida e move-se a partir de conhecimentos anteriores, em busca de novos conhecimentos necessários à resolução de novos ou antigos mas não resolvidos problemas.
- (3) Considerando (1) e (2) e atentando para a história das ciências notamos que o problema antecede as descobertas é o provocador dos estudos e o orientador das construções teóricas, acreditamos que não faz sentido, no ensino de matemática, inverter a ordem natural das coisas.
- (4) Desde pelo menos Platão, acredita-se que, estudando matemática, melhora a capacidade de pensar, de raciocinar e de resolver problemas com que se confronta no mundo real. Os problemas eram um elemento do currículo de matemática que contribuiu, tal como todos os outros elementos, para o desenvolvimento do poder de raciocínio.
- (5) Não podemos pensar em problema como uma atividade puramente técnica e, sim, como uma ferramenta para pensar matematicamente. A Resolução de Problemas pode contribuir para o progresso na aprendizagem matemática dos estudantes, já que eles próprios terão a oportunidade de, com o apoio do professor, construir seu próprio conhecimento.

(6) Em nosso entender, o conhecimento matemático deve emergir da experiência com a resolução de problemas, experiência essa que engloba processos como a exploração do contexto, a elaboração de novos algoritmos, a criação de modelos ou a própria formulação de problemas.

(7) A Resolução de Problemas permite levar os alunos a pensar matematicamente, a levantar ideias matemáticas, estabelecer relações entre elas, saber se comunicar ao falar sobre elas, desenvolver formas de raciocínio, estabelecer conexões entre temas matemáticos e desenvolver a capacidade de resolver problemas, explorá-los, generalizá-los e até propor novos problemas a partir deles.

(8) Os conceitos e procedimentos matemáticos importantes podem ser melhor trabalhados através da resolução de problemas. Isto é, tarefas ou problemas podem e devem ser colocados de forma a engajar os estudantes em pensar e desenvolver a matemática importante que precisam aprender.

(9) É importante reconhecer que a matemática deve ser trabalhada através da resolução de problemas, ou seja, que tarefas envolvendo problemas sejam um veículo pelo qual um currículo deva ser desenvolvido. A aprendizagem será uma consequência do processo de resolução de problemas.

(10) O ambiente de aprendizagem de uma sala de aula baseada em problemas dá um cenário natural para os alunos apresentarem variadas soluções ao seu grupo ou à classe toda e aprenderem matemática através de interações sociais, negociações significativas e de compreensão compartilhada.

(11) Para que essa metodologia de trabalho, em sala de aula, tenha bons resultados, é necessário que haja uma melhor formação do professor, já que esse bom resultado depende muito de um preparo prévio das aulas e de uma reflexão sobre os objetivos que se pretende alcançar durante a aula.

(12) A Resolução de Problemas é uma fonte segura de valiosas informações que permitem ao professor, entre outras coisas, planejar as aulas seguintes, ajudar os estudantes individualmente e avaliar seu progresso.

(13) Entendendo-se avaliação no sentido mais amplo, ou seja, como instrumento indicador de oportunidades para a ampliação da compreensão sobre determinado conceito, a Resolução de Problemas possibilita a função de avaliação no ensino, a percepção da presença de concepções errôneas; a detecção de lacunas no conhecimento, de necessidades específicas e oportunidades de aprender; enfim, como qualquer recurso que permita redirecionar, se necessário, as condutas de ensino como um todo.

(14) O NCTM, em 1980, lançou o documento *Uma agenda para a ação* e, nele, pode-se ler que “a Resolução de Problemas deveria ser o foco da Matemática escolar nos anos oitenta”.

(15) No final da década de 80 do século XX, a Resolução de problemas passa a ser pensada como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de se ensinar Matemática.

(16) Os PCNs (1997, 1998, 1999) também recomendam a Resolução de Problemas como um caminho para fazer matemática em sala de aula.

(17) Nos *Standards-2000*, o primeiro Padrão de Procedimento é a Resolução de Problemas.

(18) Nessa Metodologia ensinar com compreensão é importante, pois o estudante precisa aprender o conceito e não somente executar processos; uma vez que ele tenha adquirido o conceito, repetir é necessário para fixá-lo; e fazer a formalização, as demonstrações do ponto de vista matemático são fundamentais, pois a Matemática tem sua linguagem própria, precisa, concisa e universal, que precisa ser aprendida e usada corretamente pelos estudantes, sob a guia do professor.

À luz desses fatos, mencionados em (A) e (B), em nosso entender é extremamente importante que professores e estudantes tenham experiências com a *Matemática Discreta* e com a *Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas*. Assim, nosso Modelo Preliminar 3,

conforme mostrado na figura 5 do item 2.2, desta tese, pode se apresentar inteiramente reelaborado, como apresentado abaixo no **Modelo Modificado**.

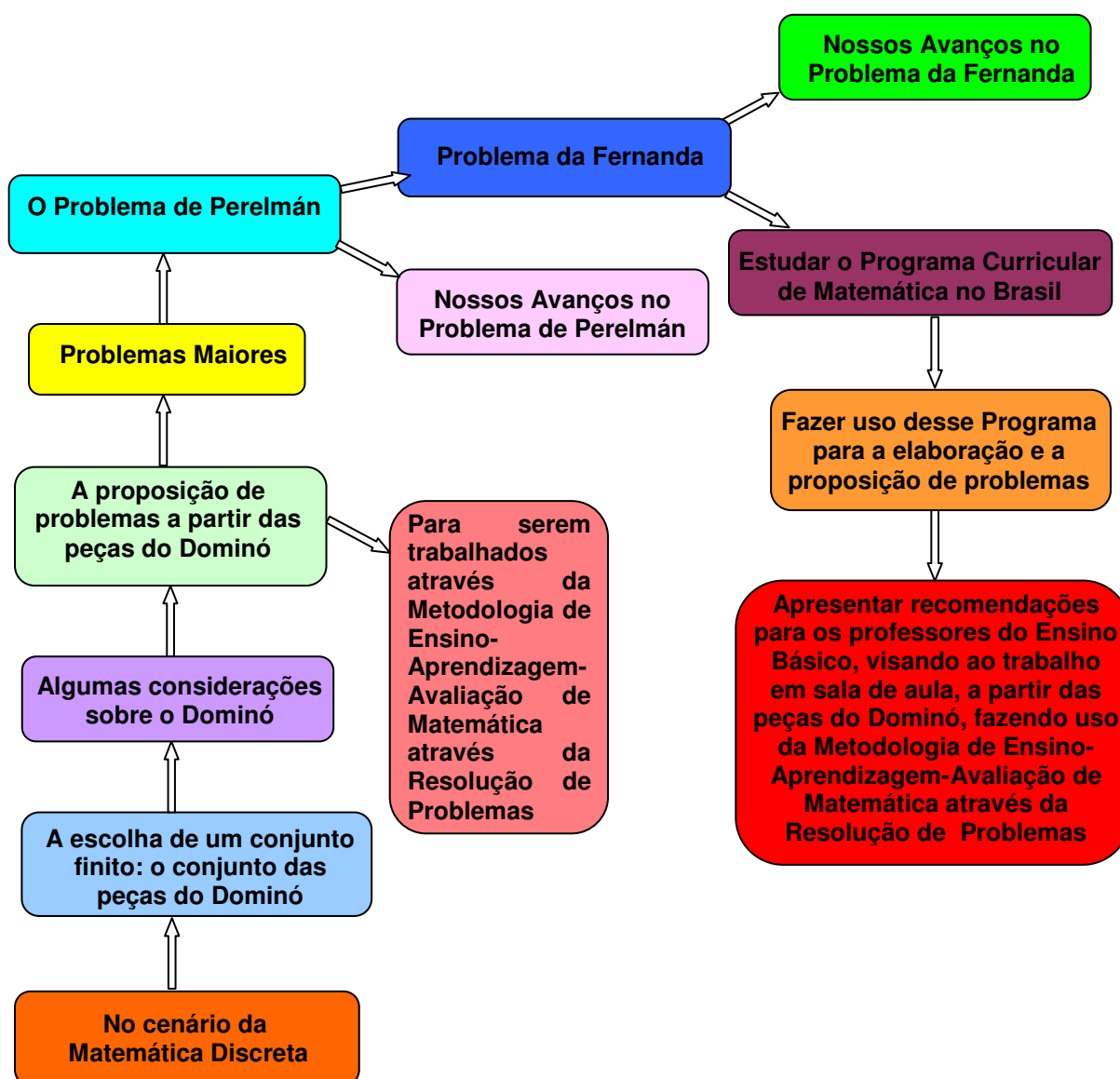


Figura 11 - Modelo Modificado

5.2 A Pergunta da Pesquisa

Assimilando as ideias dos “outros”, que falaram, refletiram e publicaram sobre as bases desta pesquisa, os eixos temáticos necessários ao desenvolvimento deste trabalho e, assim, tendo percorrido o primeiro bloco de Romberg, em suas atividades (1), (2) e (3), pudemos criar, para nossa pesquisa, não uma única pergunta, mas duas questões que podem ser formuladas do seguinte modo:

(1) Como a Matemática Discreta pode ser trabalhada através da resolução do Problema da Fernanda?

(2) De que forma a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode contribuir, no trabalho em sala de aula, para a construção de conceitos, de conteúdos e de procedimentos matemáticos em diferentes séries da Educação Básica?

Encontrar resposta para a questão (1) trará uma satisfação pessoal para a pesquisadora pois, como foi mencionado no Capítulo 2, essa inquietação emergiu de sua atuação profissional, além de o problema tornar-se uma fonte de pesquisa da matemática que o sustenta.

Juntando-se a ela a outra questão que, quando respondida, analisada e justificada, pode gerar um caminho para orientar o trabalho dos professores, em sala de aula, no desenvolvimento de problemas matemáticos que fazem uso das peças do Dominó, adotando-se a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Capítulo 6

ESTRATÉGIAS E PROCEDIMENTOS

(Dando Continuidade à Pesquisa - 2º Bloco de Romberg)

6.1 – Estratégias e Procedimentos Seleccionados visando a responder as questões do Problema da Pesquisa

CAPÍTULO 6 – Estratégias e Procedimentos

(Dando Continuidade à Pesquisa - 2º Bloco de Romberg)

Para realizar uma pesquisa,

a decisão sobre que métodos utilizar segue diretamente das questões que se seleciona, da visão de mundo na qual essas questões estão inseridas, do modelo preliminar que foi construído para explicar o fenômeno de interesse, e da pergunta (ou conjectura) que se faz a respeito da evidência necessária. (ROMBERG, 1992, p.52)

6.1 Estratégias e Procedimentos Selecionados Visando a Responder as Questões do Problema da Pesquisa

Entende-se como estratégia a ideia de “o quê vou fazer?” e, por procedimento, “como vou fazer?”.

Passamos, então, para o segundo bloco de Romberg, compreendendo as atividades (5) e (6), que requerem do pesquisador a capacidade de planejar e programar caminhos e procedimentos que o levem a responder ao Problema da Pesquisa.

Daremos continuidade à nossa pesquisa, lançando mão do Modelo Modificado, cujas variáveis estão dispostas na figura 11.

O Modelo Modificado, comparado com os Modelos Preliminares 1, 2 e 3 de nossa pesquisa, apresenta outros passos que passaram a constituir-se como novas variáveis para o Problema da Pesquisa e que, de nós, exigiram novas investigações.

Ao analisar esse Modelo Modificado, nos demos conta de que nossa pesquisa ainda pedia mais, pois, nela, poderíamos aparecer ora como:

(1) Uma pesquisadora que busca respostas a um problema emergente de sua atuação profissional, procurando identificar a matemática que pode ser construída para a sustentação teórica desse problema.

(2) Uma professora-pesquisadora que ministrou, desde 2001, muitos cursos, oficinas e palestras sobre a temática Resolução de Problemas a partir das peças do Dominó. Esse tipo de trabalho foi desenvolvido em Congressos e Encontros de Educação Matemática, em muitas salas de aula de várias instituições, em diferentes níveis de ensino. Esse tema foi ainda trabalhado com alunos da Graduação de Cursos de Licenciatura em Matemática e de Pós-Graduação em Educação Matemática, usando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Tendo pesquisado, estudado e refletido sobre esse assunto, com resultados importantes para a aprendizagem dos alunos, a pesquisadora quer compartilhar essas experiências e espera deixar uma contribuição para a Educação Matemática, oferecendo recomendações aos professores do Ensino Básico.

Frente a essas duas posturas colocadas, percebemos a necessidade da construção de dois projetos distintos: o Projeto 1 e o Projeto 2. O Projeto 1, atendendo à postura (1) da pesquisadora, visa à *matemática* que pode ser construída para a sustentação teórica de um problema, e o Projeto 2, atendendo à sua postura (2), visa à *Educação Matemática*.

Considerando que cada um desses projetos será, possivelmente, volumoso, decidimos atribuir, a cada um deles, um particular capítulo:

Capítulo 7 – O Projeto 1;

Capítulo 8 – O Projeto 2.

Capítulo 7

O PROJETO 1

7.1 – Estratégias e Procedimentos para o Projeto 1

7.2 – Procedimento Geral do Projeto 1 em Ação

7.2.1 – P_1 : A primeira ação - a escolha do conjunto finito formado pelas 28 peças do Dominó

7.2.2 – P_2 : Algumas considerações sobre o Dominó, em ação

7.2.3 – P_3 : A proposição de problemas, a partir de peças do Dominó, criados pela pesquisadora ou encontrados na literatura sobre esse tema, em ação

7.2.4 – P_4 : A apresentação de Problemas Maiores: o Problema de Perelmán, o Problema de Kordenski, dentre outros, destacando o Problema de Perelmán, em ação

7.2.4.1 – Os Sete Quadrados ou o Problema de Perelmán

7.2.4.2 – O Problema de Kordenski

7.2.5 – P_5 : A apresentação dos avanços para o Problema de Perelmán e dos resultados matemáticos para os Quadrados de Perelmán, em ação

7.2.5.1 – Avanços no Problema de Perelmán

7.2.5.2 – Explorações Matemáticas nos Quadrados de Perelmán

7.2.6 – P_6 : A criação e a descrição do caminho trilhado para se chegar do problema escolhido: o Problema de Perelmán, ao problema criado: o Problema da Fernanda, em ação

7.2.7 – P_7 : A apresentação dos avanços e dos resultados matemáticos relacionados ao Problema da Fernanda, em ação

7.2.7.1 – Avanços no Problema da Fernanda

7.2.7.1.1 – A Orientação do Trabalho de Conclusão de Curso

7.2.7.1.2 – Explorações Matemáticas no Problema da Fernanda

7.2.7.1.3 – Solução Computacional para o Problema da Fernanda

7.2.7.1.4 – Comparando os Resultados

7.2.8 – P_8 : A identificação da matemática que pode ser construída para a sustentação teórica do Problema da Fernanda, em ação

CAPÍTULO 7 – O Projeto 1

Para reger sua continuidade, esta pesquisa pedia uma modificação no Modelo Modificado, apresentado na figura 11, que será decomposto em duas partes. A primeira, vista como Modelo Modificado 1 – MM_1 , visa a atender à postura (1) da pesquisadora. Ou seja, essa parte da pesquisa será dedicada exclusivamente à matemática a ser construída para a justificativa de possíveis resultados matemáticos que garantam as conjecturas levantadas que, quando provadas, darão a sustentação teórica para a resolução do problema proposto.

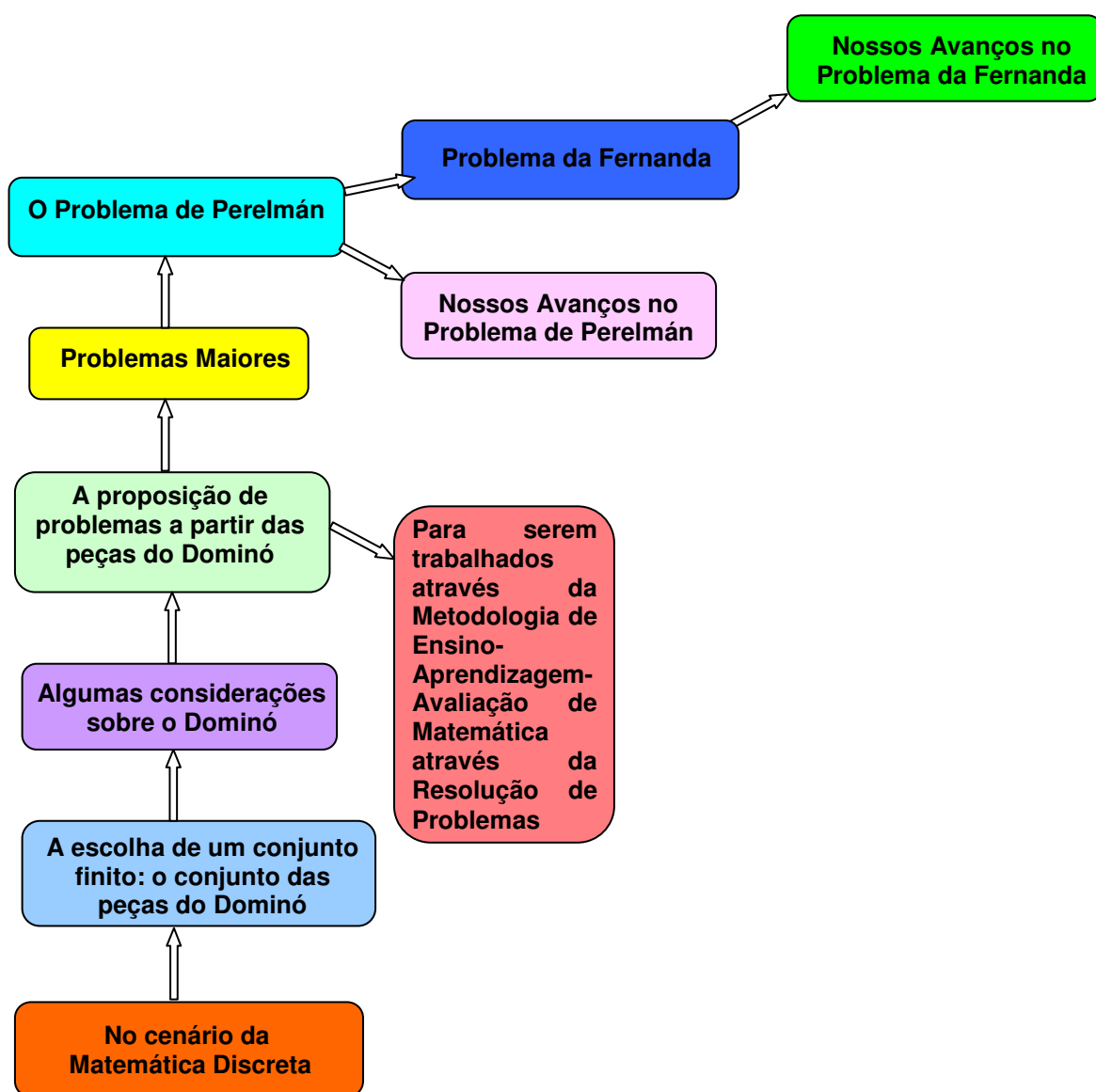


Figura 12 - Modelo Modificado 1

O MM_1 será utilizado para o desenvolvimento do Projeto 1

7.1 Estratégias e Procedimentos para o Projeto 1

A Estratégia Geral para o Projeto 1 ficou assim definida,

E_G : Buscar por uma fundamentação matemática teórica responsável pela resolução de um problema, no cenário da Matemática Discreta.

Correspondente a essa Estratégia Geral foi selecionado o seguinte Procedimento Geral,

P_G : A identificação da matemática que pode ser construída para a sustentação teórica do Problema da Fernanda.

Olhando para o MM_1 , buscamos nele as variáveis que possam nos auxiliar no trabalho de pesquisa que tem como cenário a Matemática Discreta. Uma breve apresentação de estratégias e procedimentos auxiliares correspondentes a elas será feita:

E_1 : Escolher um conjunto finito formado por peças do Dominó;

P_1 : Nossa primeira ação será a escolha do conjunto finito formado pelas 28 peças do Dominó;

E_2 : Tecer considerações sobre esse conjunto;

P_2 : O levantamento de algumas considerações sobre o Dominó;

E_3 : Propor problemas a partir das peças do conjunto escolhido;

P_3 : A proposição de problemas, a partir das peças do Dominó, criados pela pesquisadora ou encontrados na literatura sobre esse tema;

E_4 : Apresentar alguns problemas, chamados Problemas Maiores, cuja resolução envolve todas as peças do conjunto escolhido;

P_4 : A apresentação de Problemas Maiores: o Problema de Perelmán, o Problema de Kordenski, dentre outros, destacando o Problema de Perelmán;

E₅: Apresentar os avanços obtidos para o problema escolhido;

P₅: A apresentação dos avanços para o Problema de Perelmán e dos resultados matemáticos para os Quadrados de Perelmán;

E₆: Criar problemas distintos a partir do problema escolhido;

P₆: A criação e a descrição do caminho trilhado para se chegar do Problema escolhido: o de Perelmán, ao Problema criado: o da Fernanda;

E₇: Apresentar avanços relacionados ao problema criado;

P₇: A apresentação dos avanços e resultados matemáticos relacionados ao Problema da Fernanda.

Para atingir o procedimento geral P_G, desse Projeto 1: a identificação da matemática que pode ser construída para a sustentação teórica do Problema da Fernanda, *devemos fazer uso de todos os procedimentos auxiliares citados*.

7.2 Procedimento Geral do Projeto 1 em Ação

Visando a colocar em ação o Procedimento Geral do Projeto 1 será necessário, antes, colocar em ação cada um dos procedimentos auxiliares.

7.2.1 P₁: A primeira ação - a escolha do conjunto finito formado pelas 28 peças do Dominó.

Assim, no cenário da Matemática Discreta, consideraremos o conjunto finito formado pelas 28 peças que compõem o Dominó.

7.2.2 P₂: Algumas considerações sobre o Dominó, em ação.

Neste item, tecemos considerações sobre o Dominó, fizemos referência ao termo “Efeito Dominó” e tratamos da apresentação desse Jogo. Em seguida, explicitamos seus aspectos históricos. Finalmente, mencionamos algumas notas educacionais sobre as peças do Dominó.

Por que escolhemos, para nossa pesquisa, trabalhar com as peças do Dominó?

- A escolha deve-se ao fato de tratar-se de um material manipulativo de baixo custo, portanto de fácil aquisição para docentes e discentes.
- As peças do Dominó apresentam potencialidades educacionais, sendo que sua própria constituição já permite ser tratada matematicamente.
- Em Congressos recentes, como em 2011, no II Seminário em Resolução de Problemas - II SERP, foi recomendada e ressaltada a importância, por palestrantes renomados, da utilização de materiais manipulativos para o ensino-aprendizagem de matemática.
- Foram considerados resultados, de nossa vivência e de pesquisas feitas em vários cursos, oficinas e disciplinas ministrados, ver em Anexo A, que nos forneceram respostas mais do que satisfatórias em relação à motivação, com o envolvimento dos participantes, na resolução de problemas matemáticos usando as peças do Dominó, e à contribuição desses problemas para a construção e/ou fixação de conceitos matemáticos de diferentes níveis de escolaridade.

- As informações fornecidas por muitos docentes participantes dos cursos, das oficinas e das disciplinas ministrados, conforme Anexo A, que se interessaram pelo assunto, aplicaram as atividades em suas salas de aula e nos deram um *feedback* dos resultados alcançados que, segundo eles, foram muito positivos.
- Em particular, uma professora do Ensino Fundamental I destacou o fato de que *todas essas atividades devido às reentrâncias apresentadas nas peças do Dominó, podem ser desenvolvidas por alunos com deficiência visual*, o que para ela representava grande vantagem pois, em sua sala de aula, havia alunos com essa necessidade especial.

Por isso, nesse ambiente, para nós não ficou dúvida a respeito da contribuição desse material que, usado com um bom preparo do professor, poderá trazer resultados positivos para o ensino-aprendizagem de matemática. Desse modo resolvemos desconhecer um questionamento possível e, às vezes, usual sobre a validade do uso do Dominó como material pedagógico. Assim, nossa pesquisa caminhará na direção de ampliar e aprofundar resultados anteriormente obtidos e divulgados.

7.2.2.1 O Efeito Dominó

As peças do Dominó possuem intrinsicamente condições para o ensino-aprendizagem do que chamamos de Indução Finita, conhecida, muitas vezes por leigos, como “Efeito Dominó”, caracterizado pelas famosas condição inicial e condição de passagem. Em suma, colocadas as peças enfileiradas, uma a uma, empurrando-se a primeira cai a segunda, essa é a condição inicial; e, se cai uma qualquer delas, cai a seguinte, é chamada condição de passagem.



Figura 13 – Efeito Dominó¹

¹Disponível em: <<http://atomo.blogspot.com/2008/09/all-day-all-day-watch-them-allfall.html>>. Acesso em 23 dez. 2011.

7.2.2.2 O Jogo Dominó

É bastante conhecido o Jogo Dominó como o apresentado na figura 14, cujo material consta de um conjunto de peças retangulares divididas em duas partes quadrangulares, cada uma com indicação numérica de 0 a 6, por algarismos, ou mesmo por pequenas cavidades ou reentrâncias circulares coloridas ou, ainda, por um número correspondente de figurinhas pintadas na mesma face.

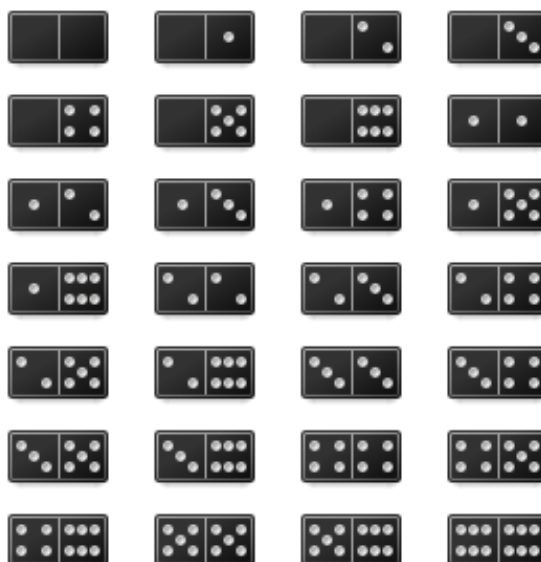


Figura 14 - As peças do Jogo Dominó²

²Disponível em: <<http://www.kosbie.net/cmu/fall-08/15-100/handouts/hw4.html>>. Acesso em 15 jul. 2010.

De acordo com Menino e Barbosa (2002, p. 16) usualmente esse Jogo segue regras como as seguintes ou com pequenas modificações:

- as peças são colocadas com as faces numeradas voltadas para baixo e misturadas;
- cada jogador (máximo 4) pega 7 (sete) peças e as dispõe em sua proximidade de maneira que as faces numeradas sejam só visíveis a ele;
- o jogo inicia pelo jogador que possuir a peça dupla mais alta 6-6³, que a colocará sobre a mesa; no caso dessa peça não pertencer a qualquer jogador a inicial será a 5-5, e assim sucessivamente;
- o jogador seguinte deverá colocar uma de suas peças, desde que ela possua indicação numérica igual à inicial, conectando-as, e assim sucessivamente;
- na hipótese de o jogador não possuir alguma peça que permita a conexão, ele “compra” uma das peças restantes; se elas não existirem é penalizado, passando a sua vez;
- a partida termina quando um dos jogadores colocar a sua última peça, sendo então declarado vencedor. No caso do jogo paralisar sem que algum jogador tenha se liberado de todas as peças teremos a situação de empate.

Não nos preocuparemos em estudar o desenvolvimento de estratégias para o jogo assim formulado, devido à sua utilização e popularidade no Brasil, inclusive com suas variantes educacionais: dominós para a adição, subtração, multiplicação e divisão, dentre outros, já há algum tempo comercializados em todo o país.

³Neste trabalho, de um modo geral, usaremos para representar qualquer peça do Dominó as seguintes notações – (traço), : (dois pontos) ou | (barra).

7.2.2.3 Noções Históricas sobre o Jogo Dominó



As origens do nome Dominó, assim como do próprio Jogo, também são bastante incertas. De acordo com a enciclopédia Larousse (1998), o nome Dominó vem da expressão latina *Benedicamus Domino* que significa “Bendigamos ao Senhor”. Alguns pesquisadores como Macedo e Petty (1997) acreditam que a denominação do jogo seria originária do termo *Domino Gratias* que quer dizer “Graças ao Senhor” e que a cor de suas peças teria ligação com a pele de morsa⁴ (preta e branca), empregada na murça⁵, usada em trajes de alguns dignitários eclesiásticos.

Existe quem atribua a criação do Dominó aos chineses, há três séculos. Segundo alguns historiadores, há indícios de que o Dominó foi introduzido na Europa, pela Itália, no século XVIII.

Nesta pesquisa, trataremos problemas matemáticos empregando as peças do Dominó usual, conhecido no Brasil, isto é, com 28 peças. No entanto, o número de peças desse jogo pode variar de um país para outro. Por exemplo, o Dominó oriental compõe-se de 21 peças (é excluído o zero das peças). Nos Estados Unidos são utilizados dois tipos de Dominó: um de 28 peças (numeradas de 0 a 6) e outro de 55 peças (numeradas de 0 a 9). Acredita-se que este último tem principalmente finalidade educacional, segundo Menino e Barbosa (2002).

Parece que essa diversidade era bem maior no início do século XX, como nos chama atenção Sainte-Laguë (1946) para o fato de que na Rússia empregava-se o Dominó até o duplo-sete, na Alemanha até o duplo-oito e, na Suécia, até o duplo-nove.

⁴Morsa: mamífero marinho de grande porte, segundo Larousse (1998).

⁵Murça: manto curto, com pequeno capuz, que recobre apenas as costas e o peito, usado pelos cônegos, conforme nos apresenta Larousse (1998).

7.2.2.4 Algumas Notas Educacionais sobre as Peças do Dominó

A própria constituição das peças do Jogo Dominó pode ser tratada matematicamente. *Quais são as peças? Por que 28 peças?*

Para responder a pergunta *Quais são as peças?*, apresenta-se uma maneira para a listagem das peças do Dominó - a atividade (1).

Na atividade (1) sugere-se organizar um quadro da seguinte maneira: na primeira linha coloca-se o *zero* combinado com ele próprio e com todos os outros, de 1 a 6. Na segunda linha o *um* combinado com ele próprio e com todos os outros, exceto com o *zero* que já foi listado. Na terceira o *dois* combinado com ele próprio e com todos os outros, exceto com o *zero* e com o *um*, já listados. A seguir, recomenda-se convidar os estudantes a escrever as outras linhas, listando as outras peças, uma vez que tenham identificado uma regularidade.

Listagem

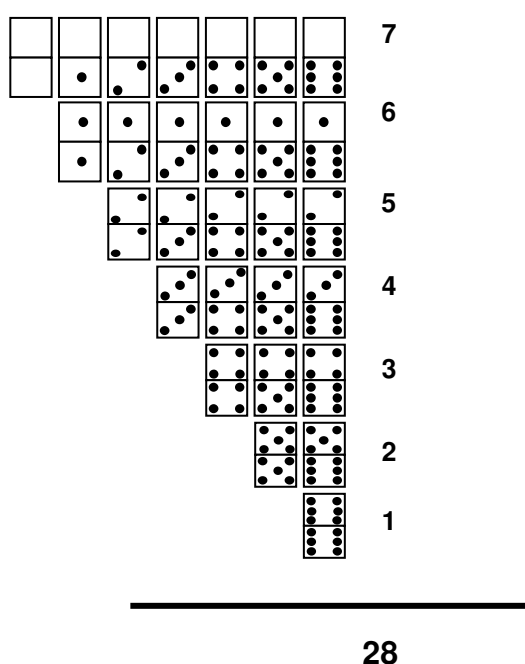


Figura 15 – Uma organização das peças do Dominó para listagem

Ao lado acrescenta-se, à direita, uma coluna dos respectivos números de peças de cada linha: 7, 6, 5, 4, 3, 2 e 1. Adicionando-se os valores dessa coluna, faz-se a contagem, obtém-se o total de 28 peças. É claro que, dependendo das

informações e do nível de escolaridade dos alunos, o professor poderia explorar o cálculo da soma com recursos de progressão aritmética.

Essa atividade (1) pode ser desenvolvida no Ensino Fundamental e sua vantagem educacional é destacada por Menino e Barbosa (2002), pois consiste em desenvolver hábitos de metodização, preparando o educando para análogas situações-problema tão comuns em matemática. Onuchic (2003) destaca que “na resolução de problemas em matemática a organização é muito importante” e essa atividade possibilita ao educando atuar, ainda que de maneira despretensiosa, nessa direção.

De acordo com o documento *Everybody Count* (1989, p.31), do National Research Council⁶, “a Matemática é uma ciência de padrão e ordem”, pois

A Matemática revela padrões ocultos que nos ajudam a compreender o mundo ao nosso redor. Muito mais do que Aritmética e Geometria, a Matemática hoje é uma disciplina diferente, que trabalha com dados, medidas e observações da ciência; com inferência, dedução e prova; e com modelos matemáticos de fenômenos naturais, de comportamento humano e de sistemas sociais.

O ciclo de dados para a dedução e, dela, para a aplicação ocorre em toda parte que a Matemática é usada, desde tarefas caseiras como planejar uma viagem até gerenciar problemas maiores como esquematizar o tráfego aéreo ou o investimento em ações. O processo de “fazer” matemática está bastante longe do que apenas fazer contas ou deduções; ele envolve observação de padrões, testagem de conjecturas e estimativas de resultados.

Como uma matéria prática, a Matemática é uma ciência de padrão e ordem. Seu domínio não são moléculas ou células, mas números, probabilidade, forma, algoritmos e mudança. Como uma ciência de objetos abstratos, a Matemática conta mais com a lógica do que com a observação como seu padrão de verdade, embora ainda empregue observação, simulação e, mesmo, experimentação como meios para descobrir a verdade.

O papel especial da Matemática na educação é uma consequência de sua aplicabilidade universal. Os resultados da Matemática -teoremas e teorias - são tanto significativos quanto úteis; os melhores resultados são elegantes e profundos. Através de seus teoremas, a Matemática oferece à ciência tanto uma fundamentação de verdade quanto um padrão de certeza.

Em Van de Walle (2001, p.16), lê-se que “a Matemática é uma ciência de coisas que têm um padrão de regularidade e uma ordem lógica. Descobrir e explorar essa regularidade ou essa ordem e, então, dar sentido a ela é o que significa *fazer matemática*”.

⁶National Research Council/USA: Conselho Nacional de Pesquisa dos Estados Unidos.

Para responder a pergunta *Por que 28 peças?*, é necessária a contagem dos elementos do conjunto, ou seja, das peças do Dominó, o que é possível fazer como visto anteriormente ou como se mostra na atividade (2).

Na atividade (2), que pode ser desenvolvida no Ensino Médio, propõe-se a contagem, onde os estudantes são envolvidos na arte de contar sem contar, devem justificar matematicamente o resultado, o que é possível fazer usando noções de combinatória.

Contagem

Tem-se um conjunto de sete números: 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Cada peça do Dominó utiliza dois deles, combinando-os para fornecer as indicações numéricas das duas partes de uma peça. Contudo, elas podem ter o mesmo número, isto é, pode haver repetição. Segue, então, que o total de peças será dado pelo número de combinações com repetição de um conjunto de sete elementos, tomados dois a dois.

$$CR_{7,2} = 7^{[2]} / 2! = \begin{bmatrix} 7+2-1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{7.8}{1.2} = 28$$

Uma forma alternativa seria a de pensar combinações simples (sem repetição) e acrescentar o número de peças duplas.

então, nessa nossa atividade (2), temos

$$C_{7,2} = \binom{7}{2} = \frac{7.6}{1.2} = 21$$

e como são 7 as peças duplas, tem-se

$$\text{Total} = 21 + 7 = 28$$

Não é frequente encontrarmos problemas, em que a matemática usada para resolvê-los é dada pela fórmula da combinação com repetição. Por isso, em nosso entender, essa atividade dá uma oportunidade para introduzir esse conceito matemático.

7.2.2.5 Explorando uma Contagem Importante

A constituição das peças do Dominó permite a exploração da soma das indicações numéricas das 28 peças. *Qual é a soma dos números indicados em todas as 28 peças?*

Conforme sugerem Menino e Barbosa (2002) para responder a questão, ou seja, obter a soma total dos números, é possível fazer uso de contagens interessantes, que descrevemos a seguir.

Desde que todo número indicado, nas peças do Dominó, aparece combinado com todos os outros e com ele próprio, então ele aparece oito vezes, seis com os outros e uma vez com ele mesmo em peça dupla. Segue, então, que a soma total será dada por

$$\begin{aligned}8 \times 0 + 8 \times 1 + 8 \times 2 + 8 \times 3 + 8 \times 4 + 8 \times 5 + 8 \times 6 &= \\8 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) &= 168\end{aligned}$$

Um segundo argumento, usado por Sainte-Lagué (1946), para se chegar à soma das indicações numéricas, é o seguinte: a cada peça corresponde uma sua complementar, em relação a 6; ou seja o que falta em cada parte dessa peça para chegar no 6, assim a complementar da peça 2-5 é a 4-1, de 4-3 é a 2-3, enquanto a complementar da peça 2-4 é a própria peça 4-2, ou seja, ela é auto complementar. As auto complementares, em número de quatro, possuem 6 por soma de seus numerais. Para as outras, cada par de complementares tem por soma 12, que equivale em média a ter, cada uma, soma 6. Segue que o total é $28 \times 6 = 168$.

7.2.3 P₃: A proposição de problemas, a partir de peças do Dominó, criados pela pesquisadora ou encontrados na literatura sobre esse tema, em ação.

Até este ponto do nosso trabalho foi tratada matematicamente a própria constituição das peças do Dominó. Daqui para frente, apontaremos para problemas usando essas peças. Existe uma classe de problemas que, para serem solucionados, exige que sejam usadas todas as 28 peças do Dominó, por isso os denominamos de Problemas Maiores e é sobre eles que falaremos a seguir. Para alguns desses problemas consideraremos algumas atividades preparatórias visando à sua resolução.

7.2.4 P₄: A apresentação de Problemas Maiores: o Problema de Perelmán, o Problema de Kordenski, dentre outros, destacando o Problema de Perelmán, em ação.

De que irei me ocupar no céu, durante toda a eternidade, se não me derem uma infinidade de problemas de matemática para resolver? (CAUCHY)

Neste item, apresentaremos alguns Problemas Maiores, iniciando com Os Sete Quadrados, por nós chamado Problema de Perelmán. Finalmente, trataremos o problema intitulado Novo Sete Quadrados.

7.2.4.1 Os Sete Quadrados ou o Problema de Perelmán

Antes de apresentar o famoso *Problema de Perelmán*, julgamos importante tecer alguns comentários sobre seu autor.

7.2.4.1.1 Algumas Considerações sobre Perelmán

Yakov Isidorovich Perelmán nasceu em 1882 na cidade de Bialystok e morreu em 16 de março de 1942 em Leningrado, atual São Petersburgo/Rússia. Em 1909, terminou os estudos no Instituto Florestal de São Petersburgo, onde recebeu o título de engenheiro florestal.



Figura 16 – Localização da cidade de São Petersburgo

Em 1913, o eminente Perelmán lançou o livro *Física Recreativa*. A obra rapidamente conquistou os corações dos leitores, especialmente dos jovens, que encontraram nela respostas para muitos problemas que os preocupavam.

Essa obra, que se constituiu como uma das mais populares, era interessante não somente pela forma como foi escrita, mas também porque continha um enorme material cognitivo. No prefácio da décima primeira edição, Yakov I. Perelmán escreveu

O objetivo fundamental do livro *Física Recreativa* é o de estimular a fantasia científica, ensinar o leitor a pensar com espírito e criar em sua mente numerosas associações de conhecimento físico relacionados aos fenômenos mais diversos de vida cotidiana e com todo aquele com que mantém contato.

Depois de *Física Recreativa* ele escreveu outros livros, e seu trabalho o tornou reconhecido como admirável divulgador da ciência. Dentre as obras mais conhecidas, citamos: *Aritmética recreativa*, *Matemáticas recreativas*, *Geometría recreativa*, *Astronomía recreativa*, *Mecánica recreativa*, *Física a cada paso*, *Trucos y pasatiempos*.

Perelmán também escreveu vários livros relacionados aos problemas das viagens interplanetárias como: *Viajes interplanetarios*, *A las estrellas en cohete*, *Lejanías del Universo*, dentre outros.

Vale destacar o comentário, referindo-se a Yakov Perelmán, feito pelo cientista K. E. Tsiolkovsky: “o autor é conhecido há muito tempo por suas obras populares, inteligentes e completamente científicas sobre Física, Astronomia e Matemática, escritas com grande estilo e de fácil assimilação pelos leitores”.

Perelmán publicou uma série de livros e artigos em revistas, como os intitulados: *El Saber es fuerza* e *Técnica de la juventud*. Ele, além de dedicar-se ao ensino e às atividades científicas e literárias, também dedicou grande parte de seu tempo ao trabalho de redação, pois foi o editor das revistas *La naturaleza y los hombres* e *En el taller de la Naturaleza*.

Muitas gerações estudaram os divertidos livros de Yakov Isidorovich Perelmán e, provavelmente, os mesmos continuarão exercendo influência sob as novas gerações.⁷

⁷As ideias apresentadas nesse item 7.4.1.1, de nossa pesquisa, tem como referência o prólogo, de autoria de Patrício Barros e Antonio Bravo, do livro de PERELMÁN, Y.I. *Problemas y experimentos recreativos*. Disponível em <<http://www.librosmaravillosos.com/problemasyexperimentos/index.html>>. Acesso em: 16 jul. 2010.

7.2.4.1.2 Os Sete Quadrados ou o Problema de Perelmán

A biografia de Perelmán indica que ele publicou vários livros. Neste item, enfatizaremos especificamente o problema *Os sete quadrados*, que aparece no capítulo 23 - *Juegos y trucos aritméticos* - de sua obra *Problemas y experimentos recreativos*. Esse capítulo é composto por trinta problemas⁸, em vários deles, o autor faz uso da estrutura do Dominó, ou seja, das 28 peças que o compõem.

Perelmán (1907, 1983, p. 343), no mencionado livro, apresenta o seguinte problema:

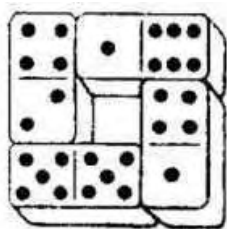


Figura 270

Los siete cuadrados

Cuatro fichas de dominó pueden elegirse de tal modo que con ellas pueda hacerse un cuadrado, en el que cada uno de los lados contenga la misma suma de puntos. Una muestra puede verse en la fig. 270: sumando los puntos, que hay en cada lado del cuadrado se obtiene 11 en todos los casos.

Disponiendo de un juego de dominó completo, ¿podría usted hacer, al mismo tiempo, *siete* cuadrados de este tipo? No se exige que la suma de los puntos de un lado sea la misma en todos los cuadrados. Lo único que hace falta es que cada cuadrado tenga en sus cuatro lados el mismo número de puntos.

⁸No final do capítulo 23 de seu livro, Perelmán apresenta as respectivas soluções para cada um dos trinta problemas por ele aí propostos.

A partir das informações dadas por Perelmán, observa-se que há várias formas de construir esses quadrados. Na página 370, de seu livro, o autor admite a existência de várias soluções para o *problema*, mas expõe apenas as duas abaixo.

Los siete cuadrados

Damos dos de las muchas soluciones posibles de este problema.

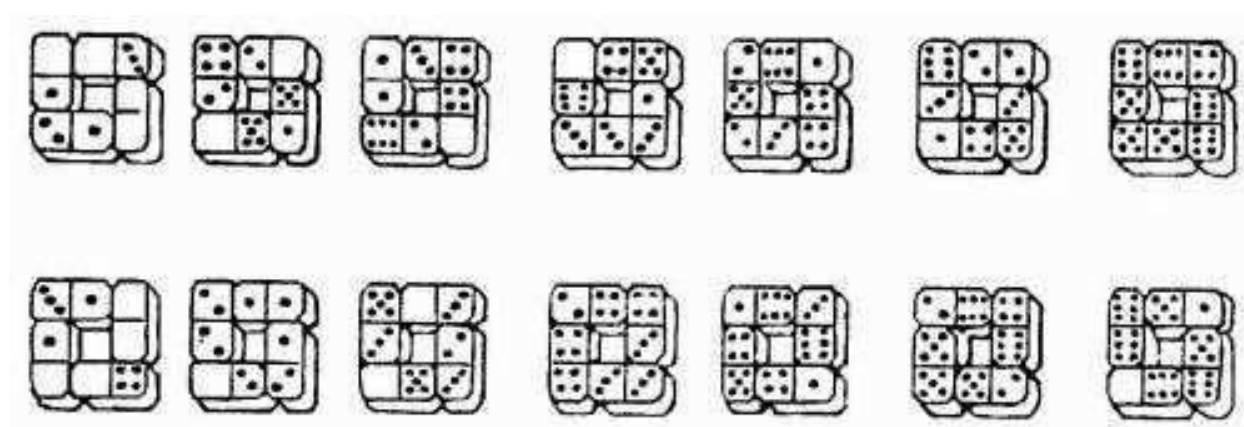


Figura 282

En la primera solución (fig. 282 arriba) tenemos:

1 cuadrado con la suma 3	2 cuadrados con la suma 9
1 cuadrado con la suma 6	1 cuadrado con la suma 10
1 cuadrado con la suma 8	1 cuadrado con la suma 16

En la segunda solución (fig. 282, abajo):

2 cuadrados con la suma 4	2 cuadrados con la suma 10
1 cuadrado con la suma 8	2 cuadrados con la suma 12

7.2.4.2 O Problema de Kordenski

7.2.4.2.1 Atividades envolvendo Multiplicações de Kordenski

Nestas atividades efetuaremos multiplicações com as peças do Dominó. Serão realizadas multiplicações de um fator, de um só algarismo, por centenas, utilizando duas peças de Dominó. O resultado desse produto deve ser da ordem de milhar, ou seja, com quatro algarismos, usando, neste caso, duas peças do Dominó.

Na figura abaixo apresentamos quatro peças do Dominó, correspondentes à multiplicação $342 \times 6 = 2052$.

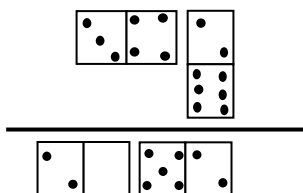


Figura 17 - Multiplicação de Kordenski

Algumas situações-problema:

- (1) Construir pelo menos uma multiplicação usando quatro peças do Dominó.
- (2) Construir multiplicações empregando as seguintes peças:
 - a) 5-5, 3-3, 5-1 e 6-1.
 - b) 0-2, 4-3, 6-2 e 5-2.
- (3) Construir uma multiplicação com quatro peças, de tal maneira que o produto seja igual a:
 - a) 1 512
 - b) 2 204

7.2.4.2.2 As Sete Multiplicações ou o Problema de Kordenski

Possivelmente, o matemático recreacionista, Boris Anastasevich Kordenski foi quem propôs, em seu livro *Matematicheskaja Smekalka*, em 1907, o que denominamos de As Sete Multiplicações ou Problema de Kordenski, cujo enunciado é: *construir empregando todas as 28 peças do Dominó (sem repetir) sete multiplicações.*

Mostramos, a seguir na figura 18, uma solução para esse problema, deixando a cargo dos que se interessarem pelo assunto descobrir outras.

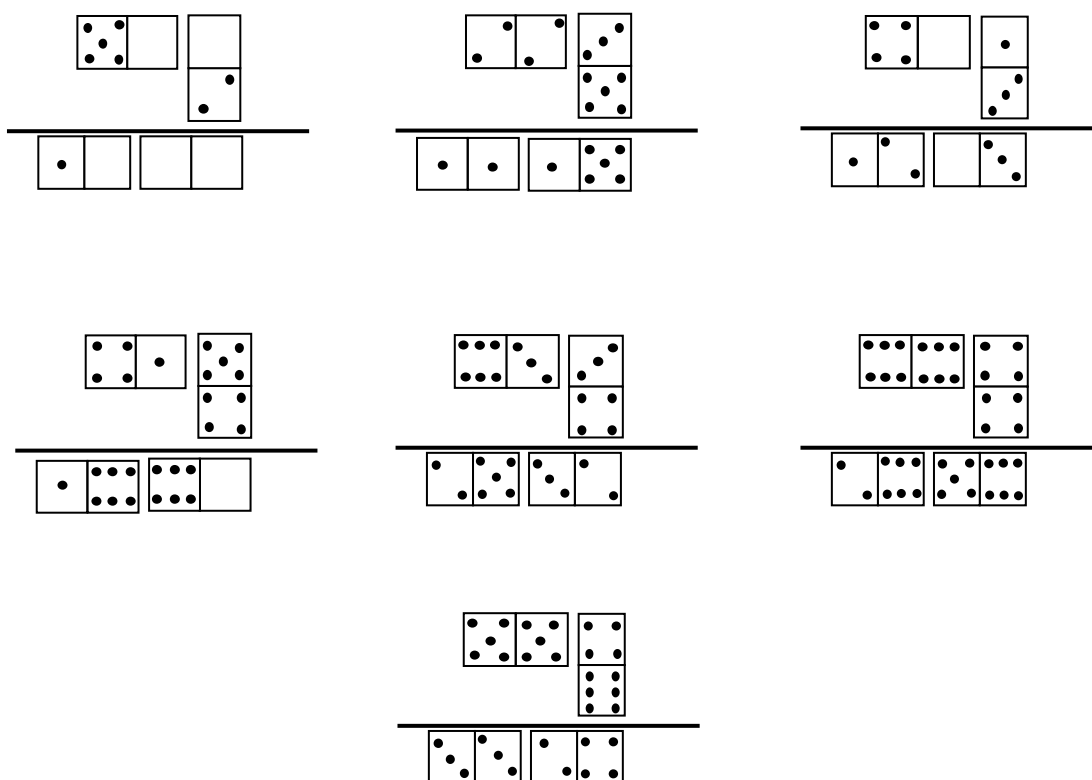


Figura 18 - Uma Solução do Problema de Kordenski

A continuação deste item 7.2.4 encontra-se no Anexo B. No referido Anexo são apresentados outros Problemas Maiores como: o Problema da Adição, o Problema do Trem, o Problema dos Anéis em Conexão, o Problema da Moldura Quadrada e o Novo Sete Quadrados.

7.2.5 P₅: A apresentação dos avanços para o Problema de Perelmán e dos resultados matemáticos para os Quadrados de Perelmán, em ação.

No presente item, apresentaremos nossos avanços no Problema de Perelmán, destacando os resultados matemáticos obtidos por nós para os Quadrados de Perelmán.

7.2.5.1 Avanços no Problema de Perelmán

Tudo indica que *Os Sete Quadrados* ou *Problema de Perelmán* foi proposto por Yakov I. Perelmán, por volta de 1907, como apontam Menino e Barbosa (2002, p.18). Esses autores, por sua vez, enunciam *o problema* da seguinte forma:

Construir, empregando todas as peças do Dominó, sem repetir, sete quadrados. Em cada um, a soma dos números indicados em cada lado de um mesmo quadrado deve ser a mesma.

Desse enunciado resulta que todas as 28 peças deverão ser utilizadas, e infere-se que não há qualquer exigência de que as somas constantes de cada quadrado sejam diferentes entre si.

Uma das características dos resultados obtidos para esse problema é que eles são frutos de nossos estudos, pesquisas e ações, que se desenvolveram junto a alunos e professores de muitas instituições de ensino⁹. Por isso, ao longo de nossa atuação em formação continuada de professores e, devido às inquietações que essa atuação gerou, foram muitas as questões que nos propusemos a investigar e dentre as quais destacamos:

- (1) *Quantas soluções existem para o Problema de Perelmán?*
- (2) *Seria possível obter a generalização do ponto de vista matemático, ou seja, uma fórmula matemática que gerasse todas as soluções do problema?*

Assim, o envolvimento com essa temática nos levou a buscar resposta para a primeira pergunta. Desse modo, obtivemos as soluções, publicadas no artigo da Revista de Educação Matemática da SBEM-SP, por Menino e Barbosa (2002, p. 19):

⁹Conforme as descremos no Anexo A.

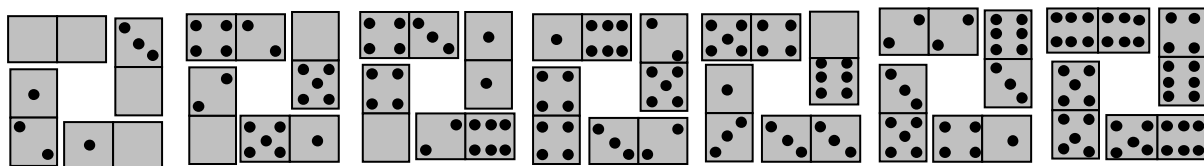
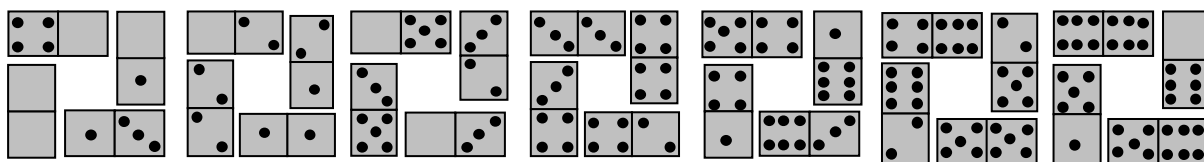
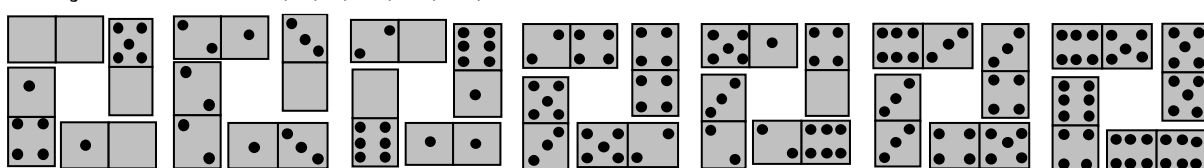
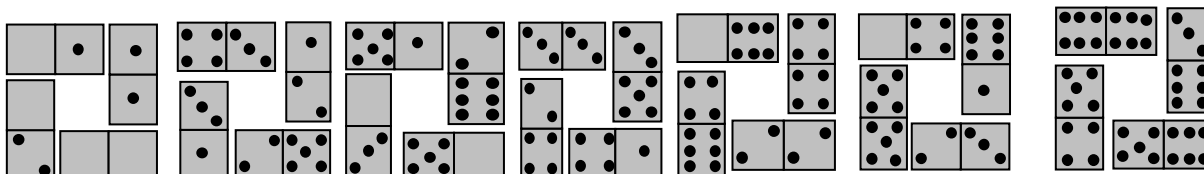
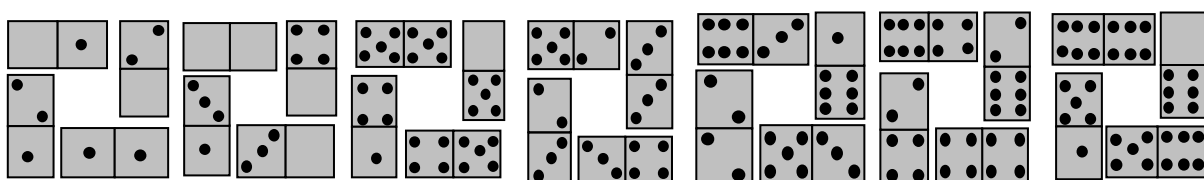
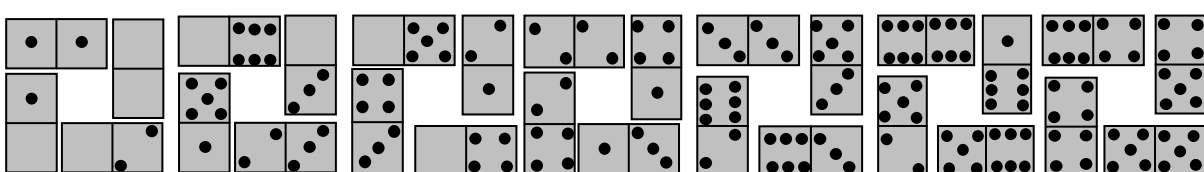
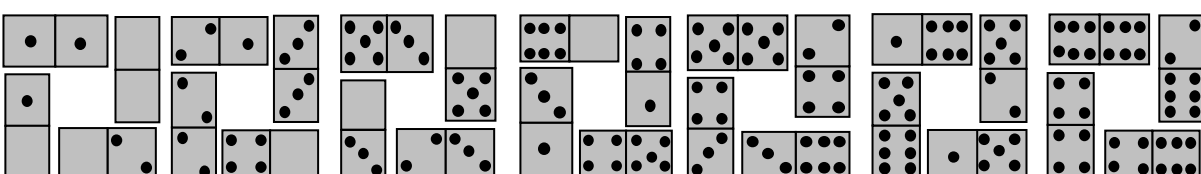
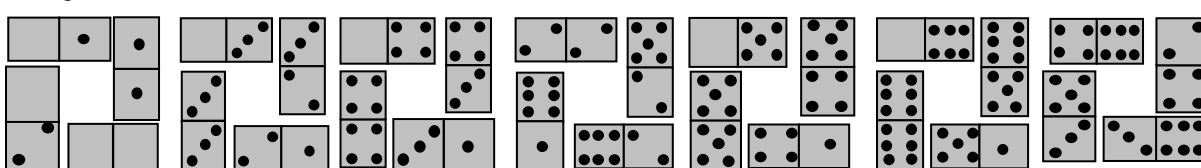
Solução 1 – Somas: 3. 6. 8. 9. 9. 10. 16**Solução 2 – Somas: 4. 4. 8. 10. 10. 12. 12****Solução 3 – Somas: 5, 6, 8, 10, 10, 12, 16****Solução 4 – Somas: 2, 8, 8, 9, 10, 10, 15****Solução 5 – Somas: 3, 4, 10, 10, 12, 12, 12****Solução 6 – Somas: 2, 6, 7, 8, 11, 13, 14****Solução 7 – Somas: 2, 6, 8, 10, 12, 12, 14****Solução 8 - Somas: 2, 6, 8, 9, 10, 12, 12**

Figura 19 – Oito Soluções para o Problema de Perelmán

Apresentamos oito soluções para o *Problema de Perelmán*, sendo que as soluções (1) e (2) são as mesmas introduzidas por ele, no capítulo 23 de seu livro, como foi visto anteriormente. Observamos que a estratégia, por nós utilizada para a resolução desse *problema*, foi a de *Tentativa e Erro*.

Em seu livro, *Quatro cores, senha e dominó: oficina de jogos em uma perspectiva construtivista e psicopedagógica*, Macedo e Petty mostram apenas as duas soluções de Perelmán e chamam atenção para a dificuldade em se descobrir uma nova estratégia para a resolução desse *problema*, dizendo

Até o presente momento, não conseguimos descobrir uma estratégia para a solução da montagem dos sete quadrados, visto que não encontramos ainda uma regularidade que pudesse expressar uma constante, como já foi feito com o quadrado mágico. Fizemos algumas descobertas, mas essas não são suficientes para expressar o raciocínio completo e a lógica do jogo. (MACEDO, PETTY, 1997, p. 115)

Compartilhamos com a opinião dos autores e, também, constituiu-se nossa preocupação encontrar estratégias para a resolução plena do *Problema de Perelmán*.

Dando continuidade ao assunto, vale relatar um fato surpreendente que aconteceu numa sala de aula, quando propusemos o *Problema de Perelmán* no Curso¹⁰, *Atividades educacionais com dominós*, e a professora de matemática da E. E. Cel Almeida Pinto, de Barretos, Carmen Luisa Alves Palmeira apresentou rapidamente uma solução correta e inédita para o *Problema*. O fato foi notícia no jornal da cidade de Barretos e da Instituição. Conferir em Anexo C.¹¹

¹⁰Realizado no dia 16 de julho de 2004 na FEB em Barretos/SP no Curso de Matemática II do Programa de Formação Continuada - Teia do Saber da S.E.E.

¹¹Disponível em: <<http://www.feb.br/jornalset04.htm>>. Acesso em: 17. jul. 2010.

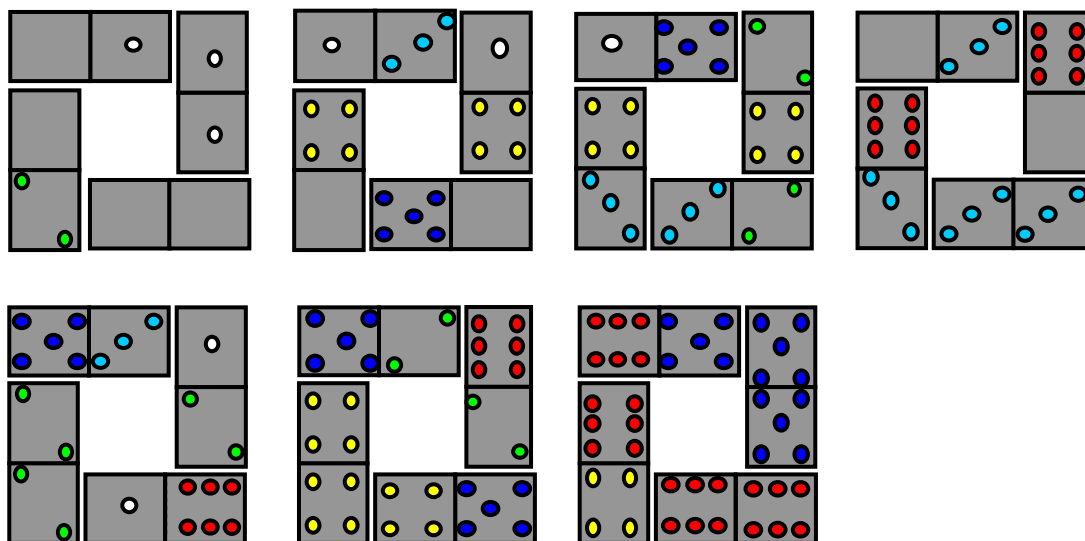
Solução 9 – Somas: 2, 5, 8, 9, 9, 13, 16

Figura 20 – Solução da Profa. Carmem para o Problema de Perelmán

Segundo as autoras Silva e Kodama (2007, p. 628-629) algumas soluções para o *Problema dos sete quadrados* podem ser encontradas em Menino e Barbosa (2002). Essas autoras divulgam, para facilitar o trabalho do leitor, uma disposição das peças que permite uma visualização para a apresentação de pelo menos uma solução. Cada peça possui uma posição (x,y) , onde x é a linha em que se encontra a peça (0 até 6) e y é a coluna (0 até 12).

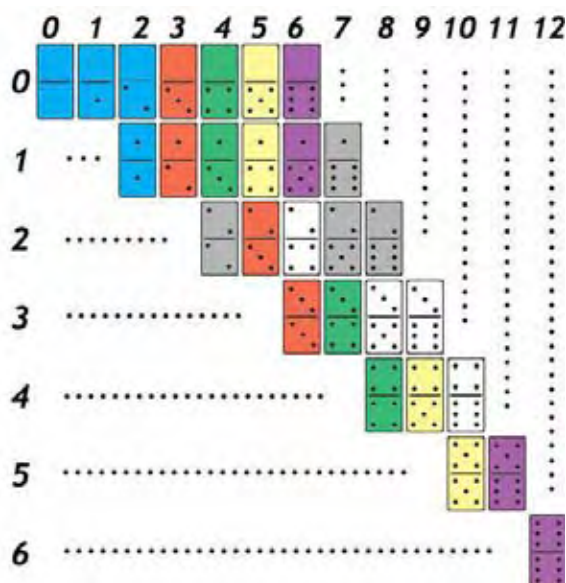


Figura 21 – Solução do Problema de Perelmán representada em forma matricial

A solução mostrada por elas, nessa figura 21, corresponde à nossa solução (8) da figura 19 e apontam o procedimento para organizá-la de acordo com a maneira exposta:

- (1) As peças: (0,0), (0,1), (0,2) e (1,2) (Azul) fornecem a solução: (i) $s(2)=0:0-2:0-0:1-1:1$;
- (2) As peças: (0,3), (1,3), (2,5) e (3,6) (Vermelho) fornecem a solução (ii) $s(6)=3:3-0:3-3:2-1:2$; Observe que essas peças podem ser retiradas utilizando-se a seguinte lógica:
 - a. Retira-se a peça: 0:3 – posição: (0,3);
 - b. Retira-se a peça imediatamente abaixo da peça anterior, ou seja, a peça 1:2 – posição: (1,3);
 - c. Retira-se agora a peça que contém os elementos de baixo das duas peças retiradas anteriormente, ou seja, a peça 2:3 – posição: (2,5);
 - d. Retira-se a peça dupla cujos elementos são iguais ao maior elemento que aparece nas peças anteriores, nesse caso a 3:3 – posição: (3,6);
- (3) Podemos seguir a lógica anterior até utilizarmos todas as peças da linha 0, assim as próximas peças e quadrados são: (0,4), (1,4), (3,7) e (4,8) (verde), cuja solução é: (iii) $s(8)=4:4-0:4-4:3-1:3$; (0,5), (1,5), (4,9), (5,10) (Amarelo), cuja solução é: (iv) $s(10)=5:5-0:5-5:4-1:4$; (0,6), (1,6), (5,11), (6,12) (Lilás), cuja solução é: (v) $s(12)=6:6-0:6-6:5-1:5$;
- (4) Agora restam apenas oito peças, então pegamos a (2, 4), que está separada, com as outras que formam um “L”, (1,7), (2,7), (2,8) (cinza). Estas peças fornecem a solução: (vi) $s(9)=2:6-1:6-2:2-5:2$;
- (5) Restando somente as peças (2,6), (3,8), (3,9) e (4,10) (branco). Estas peças fornecem a solução: (vi) $s(12)=4:6-2:4-6:3-3:5$.

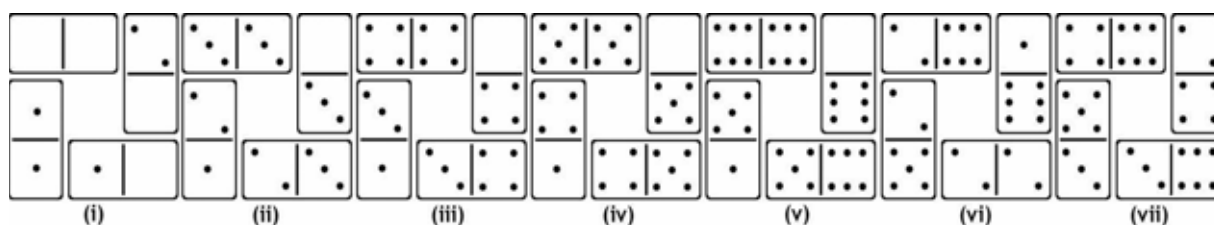


Figura 22 – Solução do Problema de Perelmán correspondente à forma matricial

O *Problema de Perelmán* continuou nos instigando e, não nos contentando com as nove soluções para ele obtidas, persistimos no caminho da busca de novas soluções e, em 2009, conseguimos encontrar mais duas soluções inéditas – 10 e 11, as quais estão sendo divulgadas nesta pesquisa:

Solução 10 – Somas: 2, 5, 6, 9, 12, 13, 14

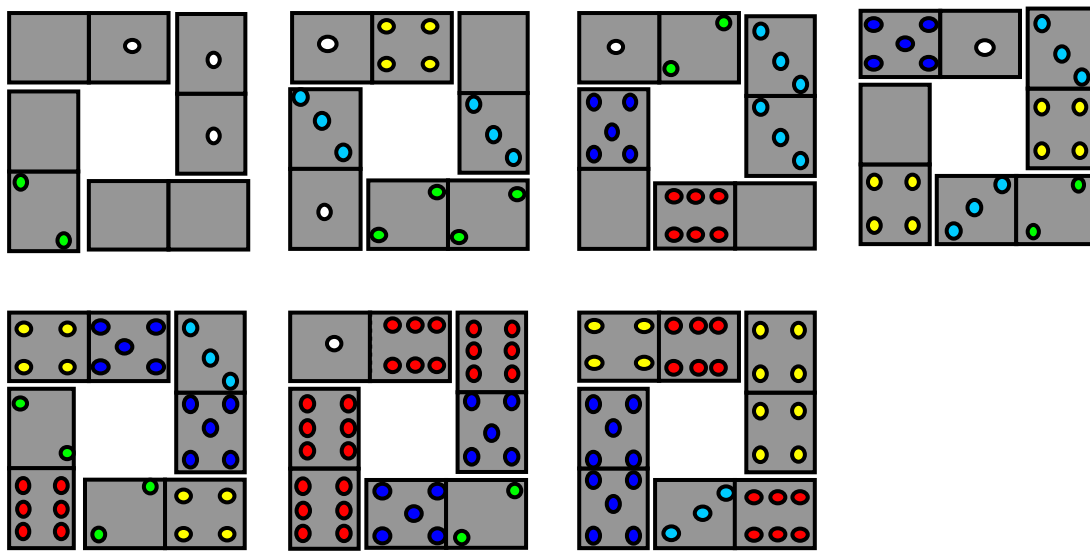


Figura 23 – Solução Inédita 10 do Problema de Perelmán

Solução 11 – Somas: 2, 5, 8, 10, 12, 12, 12

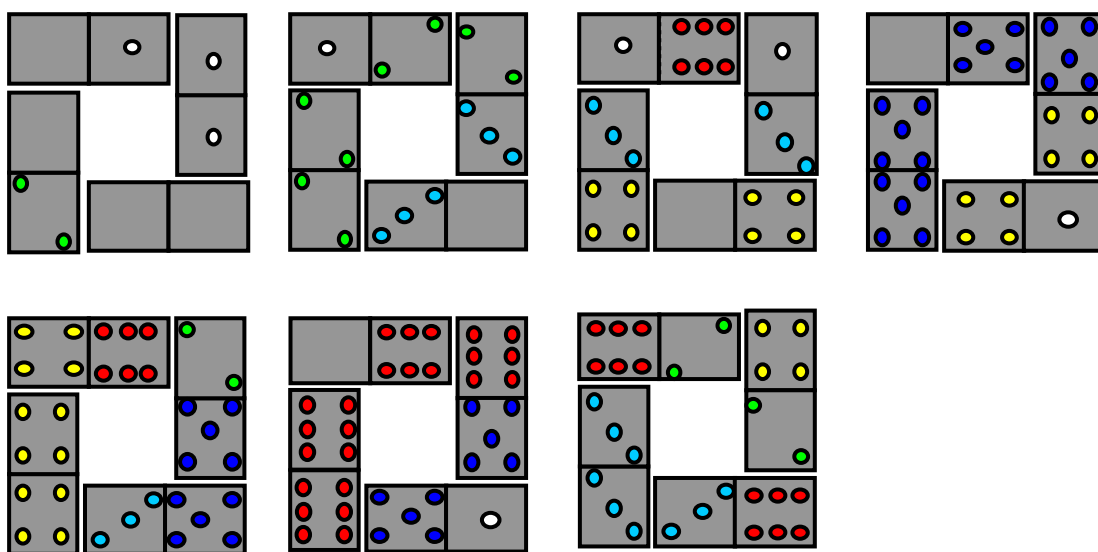


Figura 24 – Solução Inédita 11 do Problema de Perelmán

7.2.5.2 Explorações Matemáticas nos Quadrados de Perelmán

a) Exploração 1

Considerando vários Quadrados de Perelmán de Soma S , denotados por QP-S, representado, em sua forma geral, pela figura 25,

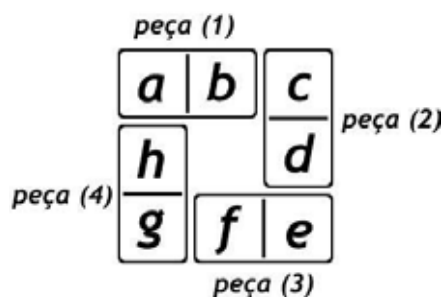


Figura 25 – Quadrado de Perelmán de Soma S

observamos que, em todos eles, as somas dos intermediários opostos são iguais.

Assim, surge a seguinte conjectura:

Conjectura 1: A soma de intermediários opostos nos QP-S são iguais.

Como se pode ver, neste caso, os intermediários opostos são: b e f , ou d e h .

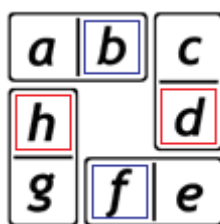


Figura 26 – Quadrado de Perelmán com os opostos intermediários destacados

Seja o QP-S, com as partes numéricas dos lados: a, b, c, d, e, f, g, h .

Segue que

$$a + b + c = S \quad (1)$$

$$c + d + e = S \quad (2)$$

$$e + f + g = S \quad (3)$$

$$g + h + a = S \quad (4)$$

Adicionando (1) e (3) e considerando C como a soma dos valores de canto, temos:

$$\begin{aligned} a + b + c + e + f + g &= 2S \Leftrightarrow \\ (a + c + e + g) + (b + f) &= 2S \Leftrightarrow \\ C + (b + f) &= 2S \quad (5) \end{aligned}$$

Analogamente, adicionando (2) e (4) obtemos:

$$\begin{aligned} c + d + e + g + h + a &= 2S \\ (c + e + g + a) + (d + h) &= 2S \\ C + (d + h) &= 2S \quad (6) \end{aligned}$$

De fato, de (5) e (6), resulta, $C + (b + f) = 2S$ e $C + (d + h) = 2S$ temos

$$\mathbf{b + f = d + h}$$

Com isso, a Conjectura 1 passa a ser o **Teorema 1** e essa argumentação é uma demonstração desse Teorema.

b) Exploração 2

Explorando Quadrados de Perelmán de Soma S , verificamos que é plausível que a soma dos quatro intermediários, em todos os QP-S, seja sempre par.

Conjectura 2: A soma dos quatro intermediários em todo QP-S é par.

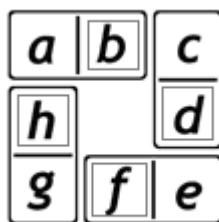


Figura 27 – Quadrado de Perelmán com os opostos intermediários representados

Observação: os quatro intermediários são b, f, d, h como representados na figura 27.

Pelo Teorema 1 temos que $b + f = d + h$

Portanto, $(b + f) + (d + h) = 2(b + f) = \text{número par}$

A Conjectura 2 transforma-se no **Teorema 2** e sua demonstração foi feita acima.

c) Exploração 3

Considerando vários QP-S, verificamos que se a soma dos valores de canto é par, então a soma de dois intermediários é par. Analogamente, se a soma dos valores de canto é ímpar, então a soma de dois intermediários é ímpar. Portanto, temos a seguinte conjectura:

Conjectura 3: A paridade¹² de C é a mesma da soma de dois intermediários opostos.

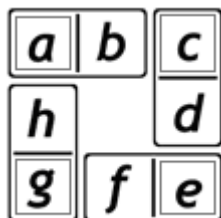


Figura 28 – Quadrado de Perelmán com os valores de canto destacados

Temos em (5) que:

$$C + (b + f) = 2S \Rightarrow$$

$$C + (b + f) = \text{par}$$

ou

C e (b + f) possuem a mesma paridade

¹²Paridade: propriedade de um número ser par ou ímpar.

Ter a mesma paridade significa que ou ambos são pares ou ambos são ímpares.

Assim, a Conjectura 3 passa a ser o **Teorema 3** e essa argumentação é uma demonstração desse Teorema.

d) Exploração 4

Continuando nossas explorações inferimos a seguinte conjectura.

Conjectura 4: Subtraindo do total T de pontos de um QP-S a soma de dois intermediários opostos obtemos o dobro da Soma S .

Temos que T de um QP-S é dado por

$$T = a + b + c + d + e + f + g + h$$

Sabemos que

$$a + b + c = S; \quad c + d + e = S; \quad e + f + g = S; \quad g + h + a = S$$

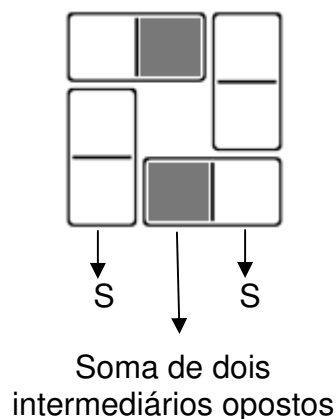
Subtraindo de T a soma de dois intermediários opostos, b e f , temos

$$\begin{aligned} T - (b + f) &= \\ a + b + c + d + e + f + g + h - (b + f) &= \\ a + c + d + e + g + h &= \\ (c + d + e) + (g + h + a) &= 2S \end{aligned}$$

Analogamente, esse resultado se verifica para os dois outros intermediários opostos d e h .

A Conjectura 4 transforma-se no **Teorema 4** e sua demonstração foi feita acima.

A validade desse Teorema 4 é visível em qualquer uma das duas seguintes representações:



ou

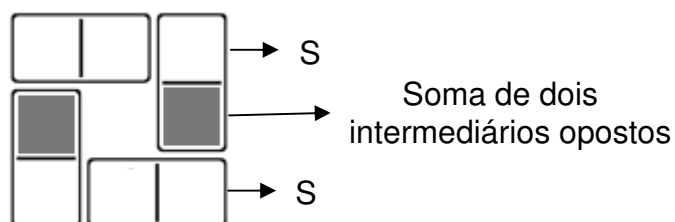


Figura 29 – Dois QP-S com a representação da Soma de dois intermediários opostos

Esses teoremas demonstrados funcionarão como guias para encontrar Quadrados de Perelmán para suas difentes somas.

Avançamos nesse *Problema* da Matemática Discreta, mas acreditamos que ainda há muito para ser investigado e trabalhado atualmente, inclusive com o auxílio dos recursos computacionais, para dar respostas definitivas às perguntas:

- (1) *Quantas soluções existem para o Problema de Perelmán?*
- (2) *Seria possível obter sua generalização do ponto de vista matemático, ou seja, obter uma fórmula matemática que gerasse todas as soluções do problema?*

que, em nosso entender, até hoje encontram-se em aberto.

Apesar de instigante, não daremos prosseguimento à investigação dessas questões por não ser objeto de estudo da presente pesquisa.

7.2.6 P₆: A criação e a descrição do caminho trilhado para se chegar do problema escolhido: o Problema de Perelmán, ao problema criado: o Problema da Fernanda, em ação

Meus problemas me prendem - eles me fazem cativo.
(WAGNER, 2003, p. 612)

Neste item, procuramos descrever o caminho trilhado para se chegar do Problema de Perelmán ao *Problema da Fernanda*¹³, objeto de estudo desta pesquisa. Esse problema, como afirmamos no Capítulo 2, emergiu de minha vida profissional.

Compartilhamos com as ideias de Onuchic (1999) quando salienta - em seu roteiro de atividades para orientar os professores no trabalho em sala de aula, usando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas - a necessidade de se trabalhar problemas secundários, ou seja, problemas menores importantes para se resolver um problema maior, mais complexo.

Segue-se aquilo que foi aconselhado por Descartes (1987, p.37-8) quando diz que, na resolução de um problema, “divide-se esse problema em tantas partes quantas forem necessárias para bem resolvê-lo”.

Então, convictos da dificuldade em descobrir uma estratégia geral para a resolução do *Problema de Perelmán*, tivemos a ideia de transformar esse *Problema* complexo em vários outros problemas menores, pois acreditávamos que, procedendo assim, tornar-se-ia mais fácil a tarefa de encontrar todas as suas soluções. Em outras palavras, construiríamos todos os quadrados possíveis para cada soma mágica fixada e faríamos o registro dos resultados obtidos para cada caso. Depois, escolheríamos sete quadrados diferentes, com peças diferentes, ou seja, sem repetir peças em todos eles. Dessa maneira, obteríamos várias soluções para o *Problema de Perelmán*. Exemplificaremos essa ideia a seguir.

Primeiramente nos empenhamos em resolver vários problemas como este: *Construir um quadrado com quatro peças (vazio no centro) de tal forma que em cada lado se tenha uma mesma soma fixada.*

¹³Nome dado a esse problema pela Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic, orientadora deste trabalho.

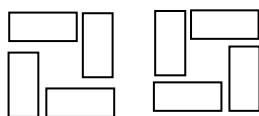


Figura 30 – Disposição das peças do Dominó para formar o quadrado¹⁴

Por exemplo, para a soma fixada 2, ou, como chamaremos, **soma mágica=2**, teríamos a solução única.

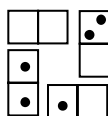


Figura 31 – Quadrado de Soma Mágica 2

A unicidade da solução é óbvia, pois se deve ao fato de que as peças 0:0 - 0:1 - 1:1 - 0:2 são as únicas do Dominó que podem ser utilizadas, para esse caso, pois, qualquer outra, ela sozinha forneceria soma maior que dois.

A unicidade da solução é uma questão que deve ser destacada, pois uma das perguntas que nos fazemos, ao escolher um problema para trabalhar em sala de aula, usando a Metodologia da Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, é: *a solução é necessariamente única?*

Se **soma mágica=4**, então, a figura abaixo corresponde a duas soluções para o problema pois, em qualquer lado dos quadrados, verifica-se essa soma, independente das disposições das peças do Dominó.

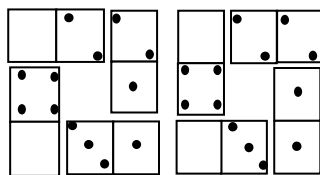


Figura 32 – Dois Quadrados de Soma Mágica 4

Como se pode perceber não é necessária, como no Jogo de Dominó, a conexão de duas peças com igualdade das indicações numéricas; elas podem ser conectadas encostando-se peças com indicações das partes numéricas diferentes.

¹⁴As duas formas de dispor as peças para formar um quadrado são aceitas.

Para a **soma mágica=5**, é preciso pensar quais as peças que pertencem ao conjunto universo. Sabemos que as únicas somas iguais a 5 com três parcelas são: $0+0+5$, $0+1+4$, $0+2+3$, $1+1+3$ e $1+2+2$. Assim as peças possíveis de serem usadas são as seguintes:

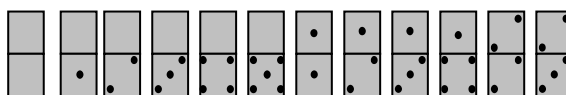


Figura 33 – Peças do Dominó possíveis para formar Soma Mágica 5

Desse modo, apresentamos algumas soluções para o problema:

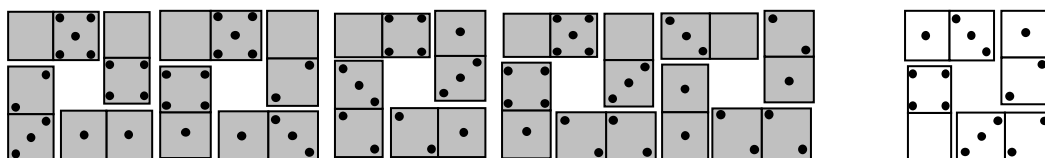


Figura 34 – Quadrados de Soma Mágica 5

É importante observar que, nestes problemas, não são considerados como solução os quadrados obtidos por meio de isometria¹⁵ a partir de uma solução já determinada.

Portanto, a terceira solução e a sexta, na figura 34, são congruentes, lembrando que ambas são compostas pelas mesmas peças, ocupando espaços diferentes.

Considerando a **soma mágica=18**, verificamos que é impossível encontrar solução.

A justificativa é simples: desde que se obtém soma 18 com três parcelas iguais a seis: $6 + 6 + 6$, resultaria que a única peça que poderíamos usar para formar o quadrado seria o duplo 6; e não teríamos quatro peças 6:6 disponíveis no conjunto universo do Dominó.

A impossibilidade de solução é outro tema que merece atenção pois, usando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, a conclusão desse fato é importante e é considerada como resposta para o problema.

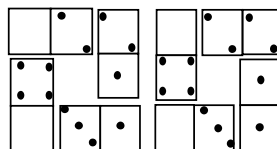
¹⁵Isometria: mesma medida, ou seja, usando as mesmas peças fazendo com elas qualquer tipo de rotação, translação ou reflexão.

Construímos vários e diferentes quadrados para cada soma mágica fixada, com o objetivo de encontrar uma estratégia para a resolução do *Problema de Perelmán*. Procedendo desse modo, conseguimos descobrir para ele soluções inéditas, conforme apresentadas no item – 7.2.5.1 Avanços no Problema de Perelmán. Mas, em nosso entender, essa forma de pensar, procurar quadradinhos diferentes, é exaustiva e não pode ser considerada uma estratégia eficaz para garantir a resolução desse *Problema*. Avançamos em relação a esse *Problema*, mas ainda estamos no estado da Arte e é imprescindível uma ação no sentido de se fazer Ciência.

Entretanto, é preciso ressaltar que esse caminho percorrido na busca de soluções para o *Problema de Perelmán* foi válido, pois ele nos levou em direção ao problema que é o foco deste estudo, o *Problema da Fernanda*. Vejamos como isso ocorreu.

Menino e Barbosa (2002, p.18), com o objetivo de preparar o leitor para o *Problema de Perelmán*, propuseram no artigo da Revista de Educação Matemática da SBEM-SP, os seguintes problemas:

1. Descobrir várias (se possível todas) soluções para a soma fixada igual a 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 e 14.
2. Mostrar que é impossível encontrar solução no caso da soma igual a 17.
3. Descobrir uma solução para soma igual a 16. Seria neste caso também única a solução ?!
4. Quais são as peças possíveis de serem empregadas para soma 15 (dica: são 6 peças)? Descubra pelo menos três soluções.
5. Um aluno conseguiu uma solução para soma fixada 4, dada pela disposição da primeira figura abaixo, mas a seguir, como estratégia, considerou as peças na forma da segunda figura, mantendo as indicações numéricas nas mesmas posições. Então, verificou que obteve uma solução diferente.



**Tente aplicar a estratégia para outras
soluções de soma 4.**

A resolução cuidadosa de cada um dos itens propostos, nos tornou convictos de que, no Universo do Dominó, ou seja, considerando suas 28 peças, é possível formar quadrados com as somas mágicas: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 e 16. Foi então, que elaboramos o *Problema da Fernanda*¹⁶:

No Universo do Dominó, ou seja, considerando o conjunto formado por suas 28 peças, obter todas as soluções para cada uma das somas mágicas 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 e 16.

Acreditamos que, também, nos influenciou na elaboração desse problema o fato de que, desde 2001, estamos integrados ao GTERP, assimilando as ideias desse Grupo relacionadas à Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

A partir daí, o *Problema da Fernanda* constituiu-se como um dos nossos principais interesses de investigação. Inicialmente, buscamos dar-lhe resposta através da orientação de um Trabalho de Conclusão de Curso, conforme mostraremos no próximo item desta tese.

¹⁶Nesse Problema, também, não são considerados, como solução, os quadrados obtidos por meio de isometria a partir de uma solução já determinada.

7.2.7 P₇: A apresentação dos avanços e dos resultados matemáticos relacionados ao Problema da Fernanda, em ação.

No presente item, mostraremos nossos avanços para o Problema da Fernanda, através da orientação de um Trabalho de Conclusão de Curso, dos resultados matemáticos para ele obtidos, da resolução computacional e da análise comparativa dos resultados encontrados.

7.2.7.1 Avanços no Problema da Fernanda

7.2.7.1.1 A orientação do Trabalho de Conclusão de Curso

Como mencionamos anteriormente, depois da elaboração do *Problema da Fernanda - No Universo do Dominó, ou seja, considerando suas 28 peças, obter todas as soluções para cada uma das somas mágicas 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 e 16* - nossa atenção esteve focada em buscar resposta para esse problema. Desse modo, a primeira oportunidade que tivemos para investigar o assunto foi no ano de 2005, quando orientamos o Trabalho de Conclusão de Curso (T.C.C.) intitulado *Somas mágicas e suas respectivas soluções*.

Assim, o principal objetivo dessa pesquisa de T.C.C. era o de encontrar todas as soluções para cada soma mágica fixada. A aluna, Kátia Renata Gouveia Pequeno do Curso de Licenciatura em Matemática da FEB, e eu nos empenhamos nessa tarefa.

Encontrar todas as soluções para cada uma das possíveis somas mágicas, no Universo do Dominó, em princípio nos parecia uma tarefa muito simples. Acreditávamos que o gráfico obtido pela relação, entre todas as somas mágicas possíveis e suas respectivas soluções, seria formado por pontos, cuja função que melhor se ajustaria a eles seria a parábola. Essa era a imagem prévia que havíamos feito da representação geométrica que descreveria a relação entre as variáveis desse problema.

No entanto, percebemos que o número de soluções para cada soma mágica fixada crescia muito à medida em que essas somas iam aumentando, o que tornava difícil esgotar todas as soluções para cada caso. Mas, não podíamos desistir do trabalho que havíamos proposto, então perseveramos na busca dessas soluções.

Os resultados obtidos, para esse problema, nesse T.C.C, estão na tabela representada na figura 35, na qual a primeira linha corresponde às Somas Mágicas fixadas e a segunda à Quantidade Total de soluções para cada uma delas.

S M	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Q(SM)	1	5	18	41	101	123	161	178	169	136	82	43	19	5	1

Figura 35 – Somas mágicas e a Quantidade de Soluções

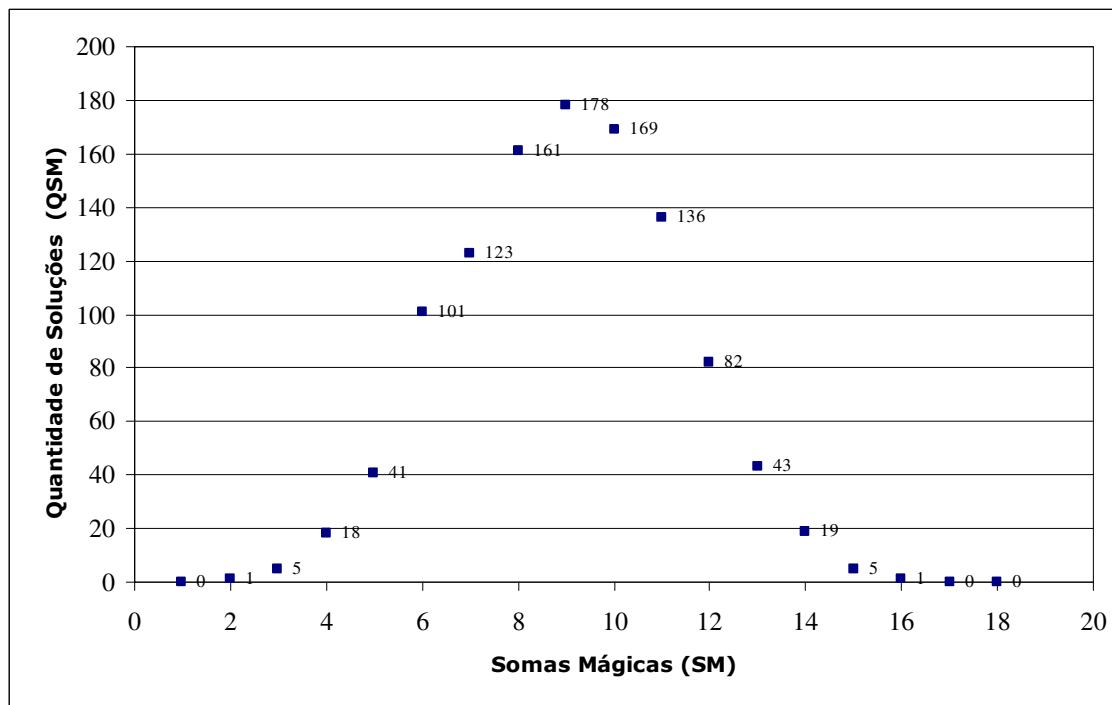


Figura 36 – Gráfico da Função: Soma mágica × Quantidade de Soluções

Considerando como domínio, ou campo de definição dessa função, o conjunto $SM = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$ e como imagem o campo de variação $Q(SM) = \{0, 1, 5, 18, 41, 101, 123, 161, 178, 169, 136, 82, 43, 19, 5, 1, 0\}$, obtivemos seu gráfico representado na figura 36.

É importante ressaltar que essa função é uma função de $SM \times Q(SM)$, ou seja, $f: SM \rightarrow Q(SM)$ (que associa a cada elemento $x \in SM$ um único elemento $y \in Q(SM)$). Portanto trata-se de uma **função discreta**.

Identificamos que esse é um **problema de contagem**, pois estamos interessados em mostrar **quantas** e **quais** são suas soluções. Apresentamos quais as soluções encontradas nesse T.C.C., no Anexo D.

O resultado desse trabalho de T.C.C. nos surpreendeu por dois motivos. O primeiro pela quantidade de soluções encontradas, sendo seu somatório $(1 + 5 + 18 + 41 + 101 + 123 + 161 + 178 + 169 + 136 + 82 + 43 + 19 + 5 + 1)$ igual a 1084, número muito acima de nossas expectativas. O segundo, pelo gráfico obtido da relação entre as somas mágicas fixadas e a quantidade de soluções para cada uma delas. Esperávamos que a curva que melhor se ajustasse a esses pontos seria uma parábola, o que não ocorreu.

Nossa expectativa é a de, com o Doutorado, avançar na investigação do *Problema da Fernanda*, corrigindo possíveis falhas nessa resolução apresentada, tratando-o matematicamente, buscando seus refinamentos teóricos.

7.2.7.1.2 Explorações Matemáticas no Problema da Fernanda

a) Sobre a Representação Gráfica das Frequências

Nesse trabalho de T.C.C, que orientamos em 2005 conforme relatado anteriormente, calculando todas as soluções para cada soma mágica fixada e obtendo os resultados para cada uma delas, ainda que com algumas falhas, repetições ou ausências, notamos que *a representação gráfica aparentava o aspecto de uma sinuosidade simétrica*. Assim, inferimos uma conjectura:

Conjectura: A representação gráfica do problema da Fernanda é simétrica.

Sainte-Lagué (1946) nos lembra que a cada peça do Dominó corresponde uma sua complementar, com relação a 6, ou seja o que falta em cada parte dessa peça para chegar no 6. Exemplificaremos essa ideia a seguir.

i) As peças complementares das peças do Dominó $4|3$ e $5|5$ são as peças do Dominó $2|3$ e $1|1$.

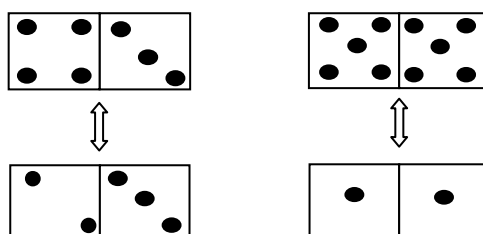


Figura 37 – Dois Pares de Peças Complementares

A complementar da complementar de uma peça qualquer é a própria peça.

ii) A peça de Dominó que é complementar dela própria é chamada de auto complementar. Existem só quatro peças auto complementares.

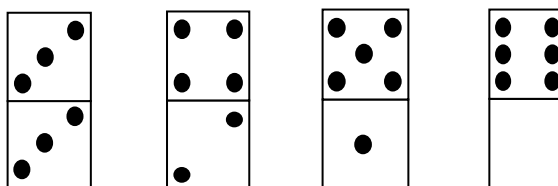


Figura 38 – Únicas Peças do Dominó Auto Complementares

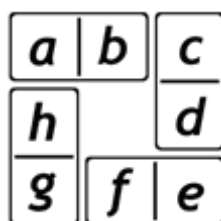
Desse modo, define-se, como peça complementar de uma peça do Dominó, por:

Dada a peça do Dominó $x|y$ chamaremos de peça complementar à peça $a|b$ se e só se $a = 6 - x$ e $b = 6 - y$.

Então, a conjectura anterior pode ser reescrita assim:

Conjectura 1_F: Dado um Quadrado de Perelmán de soma mágica S a ele corresponde o quadrado de soma mágica $18 - S$, e reciprocamente.

Seja o QP-S dado pelas quatro peças $a|b$, $c|d$, $e|f$, $g|h$.



Trocamos cada peça de Dominó pela sua complementar, obtendo as peças:

$$(6-a)| (6-b) , (6-c)| (6-d), (6-e)| (6-f) , (6-g)| (6-h)$$

Portanto, os lados terão como soma os seguintes valores numéricos:

$$(6-a) + (6-b) + (6-c) = 18 - S$$

$$(6-c) + (6-d) + (6-e) = 18 - S$$

$$(6-e) + (6-f) + (6-g) = 18 - S$$

$$(6-g) + (6-h) + (6-a) = 18 - S$$

Logo, concluímos que a cada QP-S haverá sempre um outro, seu correspondente, $QP - (18 - S)$.

Assim, a Conjectura 1_F passa a ser o **Teorema 1_F** e essa argumentação é uma demonstração desse Teorema.

Apresentamos, a seguir, um caso particular desse resultado.

Dado o QP-10, a ele corresponde o QP - $(18 - 10) = \text{QP} - 8$ e reciprocamente.

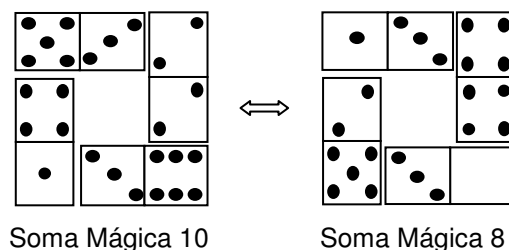


Figura 39 – Quadrados de Perelmán Correspondentes

Consequências

(1) *A representação gráfica do Problema da Fernanda é simétrica.*

De fato, pelo Teorema 1 podemos afirmar que o número de Quadrados de Perelmán de qualquer soma mágica S é igual ao número de Quadrados de Perelmán de soma mágica $18 - S$.

Em particular, se $S = 18 - S$ temos $S = 9$; portanto, considerando também resultados numéricos do trabalho de TCC citado, e que para $S=9$ verifica-se a maior frequência, afirmamos que a moda da distribuição se verifica para a soma mágica 9.

(2) *Esta simetria facilitará uma verificação da contagem do número de soluções exatas para o Problema da Fernanda.*

7.2.7.1.3 Solução Computacional para o Problema da Fernanda

Como mencionado anteriormente, na orientação do trabalho de TCC, foi usada a primeira estratégia para a resolução do Problema da Fernanda, que foi a de *tentativa e erro*. Nossa segunda estratégia objetivando a resolução desse problema foi buscar auxílio nos recursos computacionais. Assim, Daniel e André Schultz¹⁷, planejaram e executaram, um programa na plataforma MatLab, ver em Anexo E, que nos forneceu 1131 soluções e o histograma com as frequências das somas nas soluções.

S M	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Q(SM)	1	7	19	47	94	139	166	185	166	139	94	47	19	7	1

Figura 40 – Somas Mágicas e a Frequência de Soluções

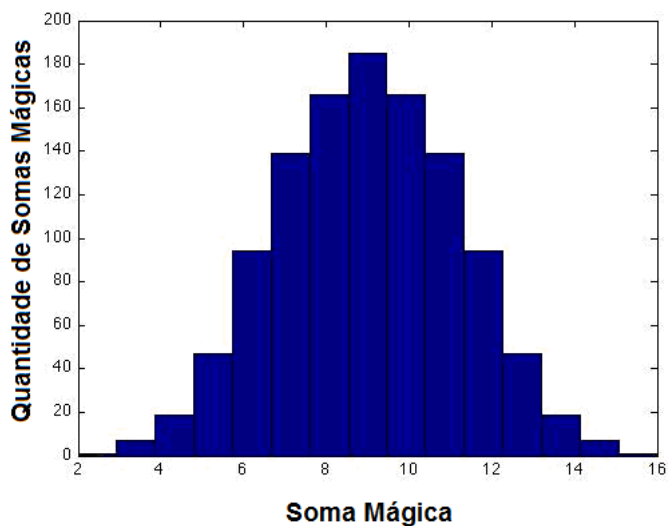


Figura 41 – Histograma com a Frequência das Somas nas Soluções

¹⁷ Daniel Schultz é formado em Engenharia Elétrica pelo ITA, Doutor em Física Molecular pela UCSD-Universidade da Califórnia - San Diego e Pós Doc na Universidade de Harvard – USA.

André Schultz é formado em Matemática pela Universidade de Michigan – Ann Arbor – USA e é doutorando em Engenharia Médica na Universidade Houston.

Por se tratar de um problema da Matemática Discreta, esses dados que foram por nós tabelados são representados graficamente, como mostramos a seguir.

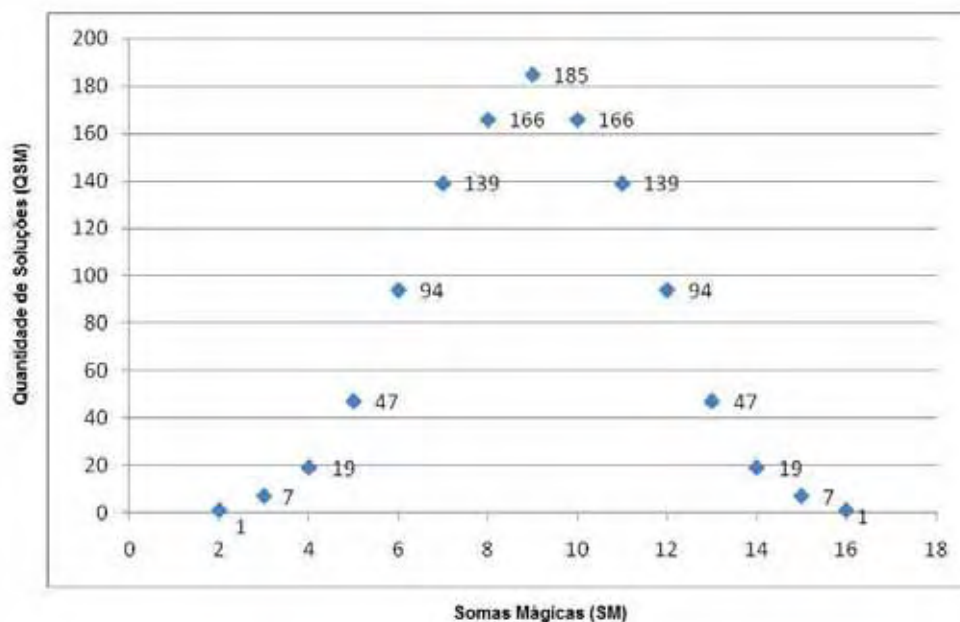


Figura 42 – Gráfico da Função: Soma mágica × Quantidade de Soluções

7.2.7.1.4 Comparando os Resultados

Resumindo, para o Problema da Fernanda temos os seguintes dados:

- (1) 1084 soluções obtidas no trabalho de T.C.C de Kátia Renata Gouveia Pequeno, sob minha orientação em 2005;
- (2) 1131 soluções fornecidas, sem justificar a origem, no artigo de Silva e Kodama, em 2007;
- (3) 1131 soluções obtidas através do MatLab por Daniel e André Schultz em 2010.

Analisando as soluções de (1), não podemos deixar de reconhecer o mérito desse trabalho, devido à perseverança para se encontrar suas 1084 soluções, usando uma estratégia limitada, a de Tentativa e Erro.

Deve ser destacado que foi a partir do contato com a representação gráfica de (1) que surgiu a ideia de que a mesma deveria ser simétrica. Esse resultado, com fundamentos no conceito de peças complementares dado por Sainte-Lagué (1946), nos levou a inferir a Conjectura 1_F , que depois de demonstrada se tornou o Teorema 1_F . Desse modo, não há dúvida de que os resultados de (1) para nós foram muito válidos. Mas, o Teorema 1_F nos permitiu enxergar que em (1) existem falhas em relação à simetria dos pontos correspondentes.

Consideramos (3) um excelente trabalho, uma vez que ele atendeu ao Teorema 1_F , onde a simetria dos pontos correspondentes é verificada. Assim, esse resultado apresenta, como representação gráfica, uma “curva” simétrica.

Em (3), notamos que o programa nos fornece, por exemplo, para a **soma mágica=3** as sete soluções seguintes:

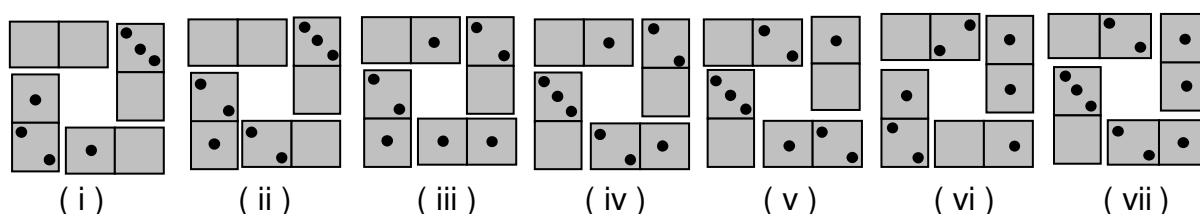


Figura 43 – As Sete Soluções da Soma Mágica 3 apresentadas pelo MatLab

Como se pode notar, a solução (iii) e a solução (vi) são formadas pelas mesmas peças do Dominó: 0-1, 1-1, 0-2 e 1-2. Mas essas soluções não são isométricas e, portanto, não são congruentes, isto é, são soluções diferentes.

Do mesmo modo, a solução (iv) e a solução (v) são constituídas pelas mesmas peças do Dominó: 0-1, 0-2, 1-2 e 0-3. Como essas soluções não são isométricas, elas são soluções diferentes.

Esse mesmo fato pode ser observado em soluções apresentadas para esse problema, pelo programa MatLab, para outras somas mágicas.

Matematicamente, também, é correto afirmar que (iii) e (vi) são soluções diferentes, pois apesar das duas serem constituídas pelas mesmas peças, essas

mesmas peças, em cada caso, estão dispostas de maneira diferente, como se pode verificar na figura 43.

Analogamente, esse comentário se aplica para as soluções (iv) e (v).

No Problema da Fernanda não consideramos as soluções obtidas por meio de isometria a partir de uma solução já determinada, ou seja, soluções congruentes a outras não são consideradas como novas soluções.

Já em (2), as autoras apenas apresentaram uma tabela para o número de soluções, sem se referir a como a ela chegaram.

7.2.8 P_G: A identificação da matemática que pode ser construída para a sustentação teórica do Problema da Fernanda, em ação.

Para nós esse Problema está resolvido de acordo com nosso propósito que era o de ver a matemática que poderia ser desenvolvida a partir dele, que resultou no Teorema 1_F.

Uma análise cuidadosa das soluções apresentadas pelo método computacional nos permitiu concluir que essas soluções, para cada soma mágica considerada, não são isométricas, ou seja, nenhuma delas é congruente a outras. Logo, no método computacional não há erros e o número total de soluções do Problema da Fernanda é 1131.

Notamos que a diferença das soluções encontradas em (1) e (3) é de 47 soluções a menos de (1) para (3). Nesse momento, preferimos não retornar aos nossos valores obtidos, mas há possibilidade de que em trabalhos futuros essa tarefa seja realizada. O caminho para executá-la seria o de partir da orientação dada pelo Teorema 1_F que nos garante que a representação gráfica desse Problema é simétrica. Depois, fazer cuidadosamente uma análise comparativa de todas as soluções de (1) e de (3), procurando fazer uma correspondência biunívoca entre elas, para a verificação de onde existem falhas em (1), ou seja, ausências ou repetições, para que se possa corrigi-las. Auxiliarão nessa tarefa, os Teoremas 1, 2, 3 e 4, tratados no item 7.2.5.2 que funcionarão como guias para se encontrar os Quadrados de Perelmán para suas diferentes somas.

Capítulo 8

O PROJETO 2

8.1 Estratégias e Procedimentos para o Projeto 2

8.2 Procedimento Geral do Projeto 2 em Ação

8.2.1 P_1 : O estudo do Programa Curricular de Matemática no Brasil, em ação

8.2.2 P_2 : A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, em ação

8.2.3 P_3 : A escolha e a proposição de problemas, a partir das peças do Dominó, dentre os criados ou encontrados na literatura sobre o tema, em ação

8.2.4 P_4 : A criação de um roteiro para apoiar o trabalho do professor no desenvolvimento dessas atividades em sala de aula, com a identificação dos objetivos, a resolução e a análise de cada atividade, em ação.

8.2.5 P_G : A oferta de recomendações aos professores do Ensino Básico, visando ao trabalho em sala de aula, no cenário da Matemática Discreta, envolvendo problemas matemáticos a partir das peças do Dominó, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, em ação

8.2.5.1 Atividades sugeridas para o Ensino Fundamental I

8.2.5.2 Atividades sugeridas para o Ensino Fundamental II

8.2.4.3 Atividades sugeridas para o Ensino Médio

CAPÍTULO 8 – O Projeto 2

Partindo do Modelo Modificado – MM, apresentado na figura 11, para atender à postura (2) da pesquisadora, foi criado o Modelo Modificado 2 – MM₂, que será, agora, o próprio Modelo Modificado, como apresentado na figura 44.

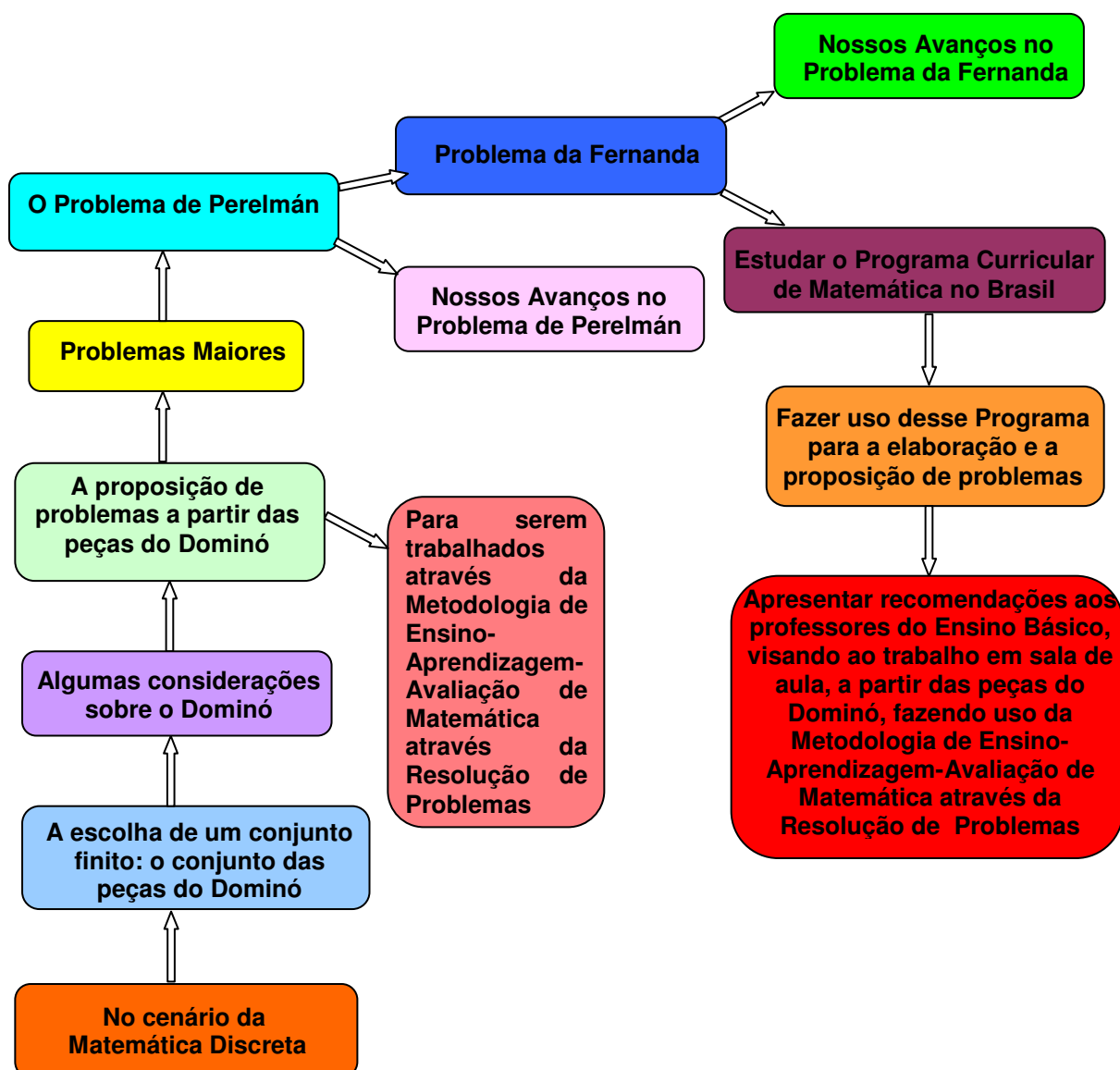


Figura 44 - Modelo Modificado 2

O MM₂ será utilizado para o desenvolvimento do Projeto 2.

Desde que ao MM_1 foram acrescentados os três passos finais do MM (figura 11) para compor o MM_2 , os resultados da matemática construída no MM_1 serão considerados no MM_2 . Além disso, ao considerar esses três últimos passos, nosso trabalho no Projeto 2 passa a se constituir como uma pesquisa em *Educação Matemática*.

8.1 Estratégias e Procedimentos para o Projeto 2

A Estratégia Geral para esse Projeto 2 ficou assim definida,

E_G : Apresentar recomendações aos professores do Ensino Básico, visando ao trabalho em sala de aula, no cenário da Matemática Discreta, envolvendo problemas matemáticos a partir das peças do Dominó, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Correspondente a essa Estratégia Geral foi selecionado o seguinte Procedimento Geral,

P_G : A oferta de recomendações aos professores do Ensino Básico, visando ao trabalho em sala de aula, no cenário da Matemática Discreta, envolvendo problemas matemáticos a partir das peças do Dominó, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Uma breve apresentação de estratégias auxiliares e procedimentos auxiliares correspondentes a elas será feita:

E_1 : Estudar o Programa Curricular de Matemática no Brasil;

P_1 : O estudo do Programa Curricular de Matemática no Brasil;

E_2 : Escolher uma dinâmica para o trabalho em sala de aula;

P_2 : A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas;

E₃: Selecionar e propor atividades, a partir das peças do Dominó;

P₃: A escolha e a proposição de atividades, a partir das peças do Dominó, dentre as criadas ou encontradas na literatura sobre o tema;

E₄: Criar um roteiro, para apoiar o trabalho do professor no desenvolvimento das atividades citadas em P₃ para a sala de aula, identificando os objetivos, resolvendo e analisando cada atividade;

P₄: A criação de um roteiro para apoiar o trabalho do professor no desenvolvimento dessas atividades em sala de aula, com a identificação dos objetivos, a resolução e a análise de cada atividade.

Para atingir o procedimento geral P_G desse Projeto 2 – a oferta de recomendações aos professores do Ensino Básico, visando ao trabalho em sala de aula, no cenário da Matemática Discreta, envolvendo problemas matemáticos a partir das peças do Dominó, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas – *devemos recorrer a todos os procedimentos auxiliares citados.*

8.2 Procedimento Geral do Projeto 2, em Ação

Visando a colocar em ação o Procedimento Geral do Projeto 2 será necessário, antes, colocar em ação cada um dos procedimentos auxiliares.

8.2.1 P₁: O estudo do Programa Curricular de Matemática no Brasil, em ação

Para realizar um estudo do Programa Curricular de Matemática no Brasil, lançamos mão dos PCNs (1997, 1998, 1999), da versão PCN₊ (2002), das Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) e do Currículo de Matemática do Estado de São Paulo (2010). Esse estudo teve como propósito identificar seus objetivos e suas finalidades para o ensino-aprendizagem de Matemática no Ensino Básico.

Identificamos nossa concepção no documento Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) onde se pode ler que

a aprendizagem de um novo conceito matemático dar-se-ia pela apresentação de uma situação-problema ao aluno, ficando a formalização do conceito como a última etapa do processo de aprendizagem. Nesse caso, caberia ao aluno a construção do conhecimento matemático que permite resolver o problema, tendo o professor como um mediador e orientador do processo ensino-aprendizagem, responsável pela sistematização do novo conhecimento. (BRASIL, 2006, p.81)

Essas ideias estão em sintonia com a Metodologia apontada no item seguinte.

8.2.2 P₂: A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, em ação

Apoiadas em nossas experiências em sala de aula e na de educadores que também trabalham resolução de problemas, recomendamos aos professores, para o desenvolvimento de atividades matemáticas, a partir das peças do Dominó, a adoção da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, como a descrevemos no item 4.3.3 desta tese.

O trabalho em sala de aula, com essa importante metodologia, é capaz de gerar situações que promovem caminhos favoráveis à construção de padrões, de conceitos e de conteúdos matemáticos.

8.2.3 P₃: A escolha e a proposição de problemas, a partir das peças do Dominó, dentre os criados ou encontrados na literatura sobre o tema, em ação

Com o propósito de apresentar recomendações aos professores do Ensino Básico, visando ao trabalho em sala de aula no cenário da Matemática Discreta, a partir das peças do Dominó, realizamos um levantamento desse assunto em literatura nacional e internacional. Depois, selecionamos, dentre as atividades criadas pela pesquisadora e as desse levantamento, as julgadas adequadas. Em seguida, categorizamos todas essas atividades em três níveis: Ensino Fundamental I (1º, 2º, 3º, 4º e 5º anos), Ensino Fundamental II (6º, 7º, 8º e 9º anos) e Ensino Médio (1º, 2º e 3º anos).

8.2.4 P₄: A criação de um roteiro para apoiar o trabalho do professor no desenvolvimento dessas atividades em sala de aula, com a identificação dos objetivos, a resolução e a análise de cada atividade, em ação.

Como professora-pesquisadora, pudemos compreender a necessidade, revelada em trabalhos de pesquisa em Educação Matemática, de encontrar dinâmicas diferentes para o trabalho em sala de aula e, em particular, de usar materiais manipulativos no ensino-aprendizagem de matemática.

Assim, visando ao ensino-aprendizagem de matemática no Ensino Básico, criamos um roteiro para apoiar o trabalho dos professores, em sala de aula, fazendo uso desse material manipulativo e da metodologia adotada.

O roteiro criado não se apresenta como um caminho rígido a ser seguido. Com ele, esperamos poder contribuir no sentido de sugerir possibilidades de encaminhamento para o trabalho do professor em sala de aula. Acreditamos que cada professor, dentro de cada sala de aula, dentro de cada escola e, por sua vez, dentro de cada sociedade, deve ter autonomia e discernimento para decidir “o quê” e “como” trabalhar com seus alunos e fazê-lo de maneira adequada.

Para elaboração e escolha das atividades, aqui desenvolvidas, a pesquisadora fez uso de seus conhecimentos prévios, conforme Anexo A. É importante mencionar que, para a exequibilidade desse Projeto 2, foi necessário limitar o número de atividades a serem trabalhadas, sabendo que existem muitas outras que não serão por ora tratadas.

Nesse roteiro, para cada atividade, serão explicitados: o conteúdo a ser desenvolvido; os objetivos de cada atividade; algumas de suas possíveis estratégias de resolução; o desenvolvimento da Plenária; e, por fim, a Formalização, responsabilidade exclusiva do professor.

8.2.5 P_G: A oferta de recomendações aos professores do Ensino Básico, visando ao trabalho em sala de aula, no cenário da Matemática Discreta, envolvendo problemas matemáticos a partir das peças do Dominó, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, em ação

Como já foi dito, com o propósito de apresentar recomendações aos professores do Ensino Básico, a dinâmica escolhida para seu trabalho em sala de aula foi a de usar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, mais especificamente, conforme proposta de Onuchic e Allevato (2011) que consiste em organizar as atividades seguindo as seguintes etapas:

1) Preparação do problema – Selecionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha, ainda, sido trabalhado em sala de aula.

2) Leitura individual – Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.

3) Leitura em conjunto – Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.

- Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo o problema.
- Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.
-

4) Resolução do problema – A partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-constructores da *matemática nova* que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.

5) Observar e incentivar – Nessa etapa o professor não tem o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor como mediador leva os alunos pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.

- O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias, já conhecidas, necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas

dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho.

6) Registro das resoluções na lousa – Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

7) Plenária – Para esta etapa são convidados todos os alunos, afim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.

8) Busca do consenso – Depois de sanadas as dúvidas, e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.

9) Formalização do conteúdo – Neste momento, denominado *formalização*, o professor registra na lousa uma apresentação *formal* – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto. (ONUICH, ALLEVATO, 2011, p.84-85)

Consideramos importante que, antes de propor atividades a partir das peças do Dominó, o professor questione sua turma perguntando-lhes se conhecem o Jogo Dominó. Em seguida, deverá pedir aos alunos para discutirem, nos grupos, e explicarem, com suas palavras, o que sabem sobre esse Jogo. Depois, ele apresentará o Dominó para a turma, explicitando a composição e o funcionamento desse Jogo, como mostrado no item 7.2.2.2 desta tese.

O professor deve esclarecer que, em seu trabalho, o objetivo não é o de jogar Dominó, mas usar as peças do Dominó, ou uma representação das mesmas, para o desenvolvimento de atividades matemáticas a partir dessas peças.

Desse modo, nesse trabalho, as peças do Dominó serão usadas como material pedagógico manipulativo, visando ao ensino-aprendizagem de matemática no Ensino Básico.

8.2.5.1 Atividades sugeridas para o Ensino Fundamental I

Concordando com ideias de Richardson (1984), adaptadas por nós, para as peças do Dominó, escrevemos: imagine, por um momento, que alguém abriu uma caixa e despejou na sua frente algo que você nunca viu antes – algo colorido e intrigante. Você seria naturalmente atraído para esse material, querendo tocá-lo, explorá-lo e ver como ele funciona. Essa reação pode ser esperada pelas crianças quando elas vêem as peças do Dominó.

Enquanto suas mentes estão cheias de suas próprias ideias e surge a curiosidade de explorar essas peças, será difícil para elas se concentrarem em qualquer atividade específica que o professor propuser para elas.

É necessário que o professor dê tempo para as crianças explorarem as peças do Dominó livremente antes de apresentá-las em uma atividade dirigida. Elas precisarão de tempo para satisfazer sua necessidade de conhecer e explorar essas peças.

Quando a intensidade de seu envolvimento diminuir e elas parecerem estar à procura de mais ideias para o que fazer com as peças do Dominó, elas estarão prontas para as atividades dirigidas que o professor tem em mente para elas.

Nesse momento, o professor pode começar a trabalhar o conceito de inclusão de classe. A noção de inclusão de classe é, geralmente, desenvolvida por volta dos seis anos de idade. Antes disso, as crianças têm dificuldade em raciocinar utilizando apenas duas classificações (por exemplo: cor e forma) ao mesmo tempo. Em termos de percepção, nas peças do Dominó, quando se pergunta sobre a forma retangular e uma de suas cores, pode lhes parecer haver mais de uma do que da outra. Então, elas darão uma resposta ao nível de sua percepção.

Para avaliar a compreensão das crianças em relação à adição de classes, ou seja, quando os objetos são membros de duas classes ao mesmo tempo, o professor pode pedir para elas classificarem as peças do Dominó colorido pela cor e pelo formato, levantando os seguintes questionamentos:

- Quantas peças com bolinhas vermelhas há?
- Qual a forma das peças com bolinhas vermelhas?

Fazer essas mesmas questões com outras cores.

Depois, faz-se a pergunta de inclusão de classe:

- Há mais peças retangulares ou mais peças com bolinhas vermelhas?

Pede-se, às crianças, a justificativa do raciocínio empregado para responder cada questão.

O professor pode também propor questionamentos para levar as crianças a reconhecer quantidades. Ele apresenta algumas peças escolhidas do Dominó e pede para elas identificarem as quantidades nelas representadas, perguntando:

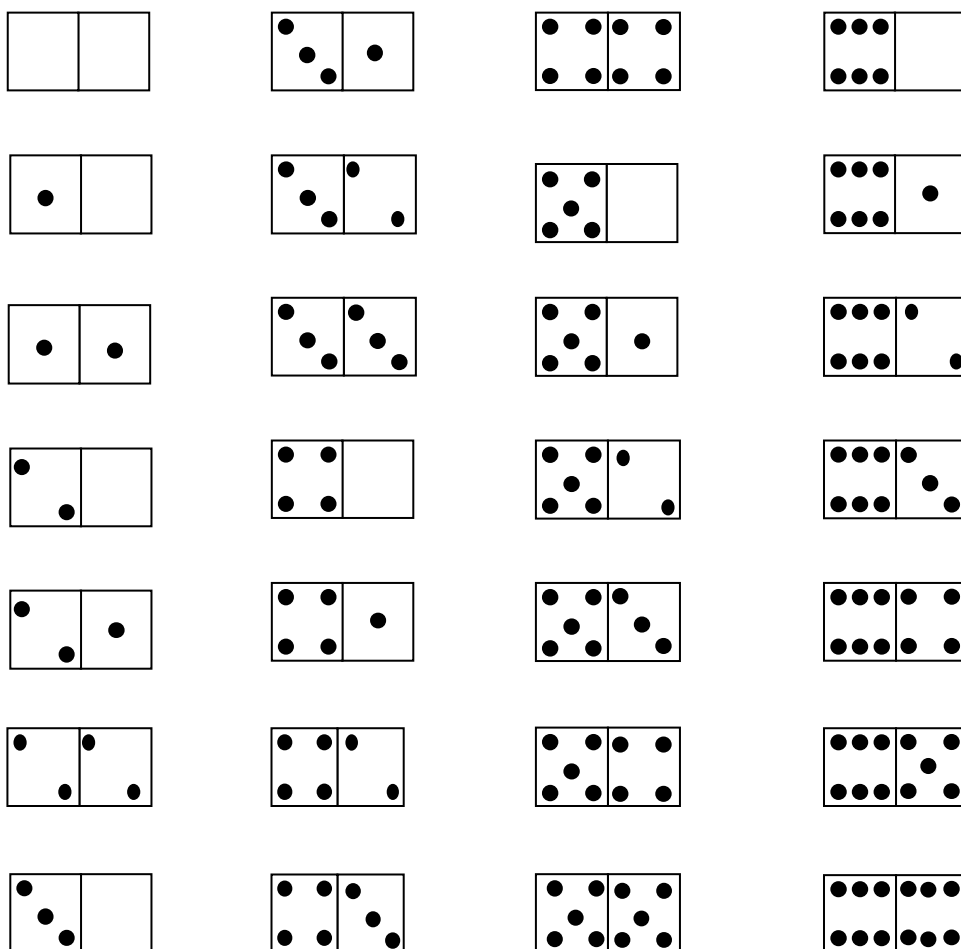
- Qual é a peça maior? Ou seja aquela que tem mais bolinhas.

- Qual é a peça menor? Ou seja aquela que tem a menor quantidade de bolinhas.

Depois dessa exploração inicial, que é extremamente benéfica para as crianças, o professor propõe a Atividade 1.

ATIVIDADE 1

Considerando que cada peça do Dominó é separada em duas partes, contorne as peças abaixo que têm a mesma quantidade de bolinhas em ambas as partes.

**Objetivos**

Sabendo que os alunos desse nível já trazem, para essa atividade, conhecimentos prévios sobre contagem e visualização representativa para essas quantidades, reconhecer quantidades iguais e quantidades diferentes.

Conteúdo matemático a ser desenvolvido a partir dessa atividade

Igualdade e diferença de quantidades.

Desenvolvimento

1) Leitura individual – Entregar uma cópia da Atividade 1 para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.

2) Leitura em conjunto – Formar grupos e solicitar nova leitura da atividade, agora em grupos. Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo-lhes a atividade. Se houver, no enunciado, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, até consultar um dicionário.

3) Resolução do problema – De posse da atividade, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo.

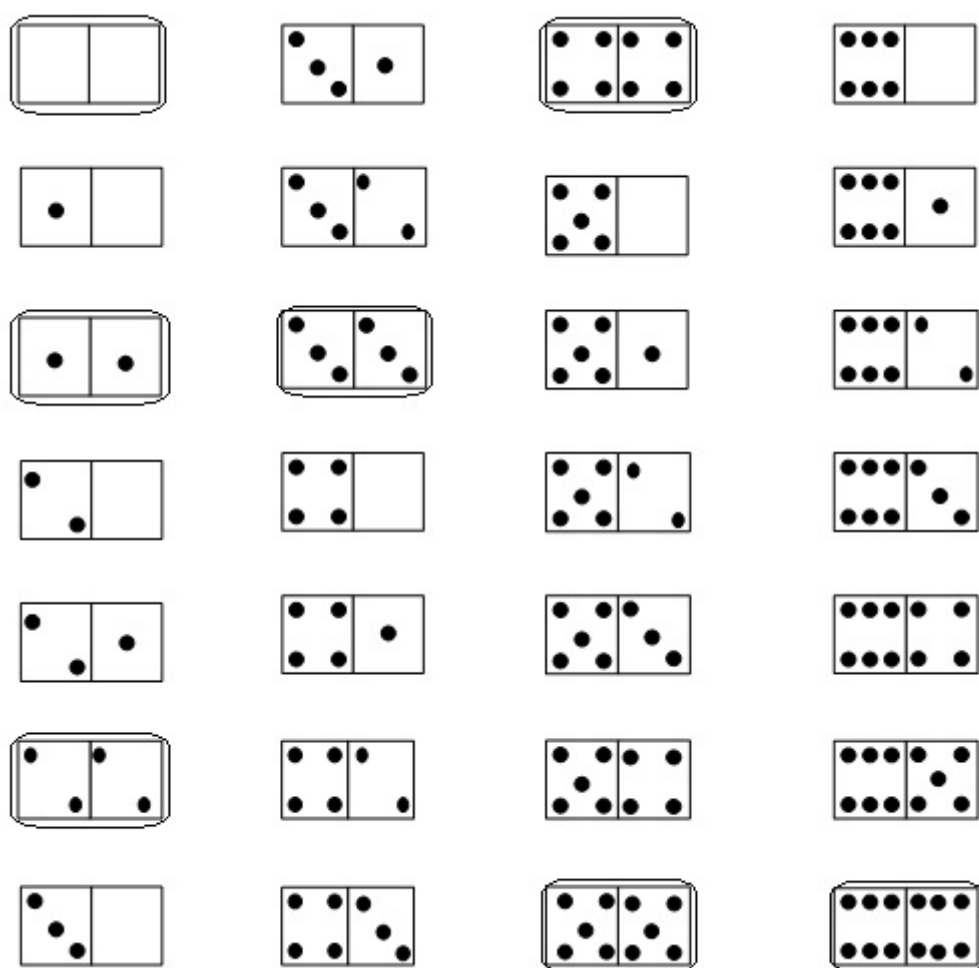
4) Observar e incentivar – Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor como mediador leva os alunos pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles. É necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e os ajuda, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução.

5) Registro das resoluções na lousa – Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções.

6) Plenária – Pretende-se que os alunos discutam suas resoluções, ou seja, quais as peças com quantidades iguais de bolinhas, em ambas as partes, foram circuladas. Acreditamos que, possivelmente, eles não circulem a peça 0-0. O professor como guia deve mediar essa discussão.

7) Busca do consenso – Após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções obtidas para a atividade, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.

8) Formalização – O professor registra na lousa uma síntese do que se objetiva aprender a partir desse problema.

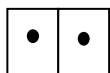


Faz a apresentação formal da definição de Igual que “é tudo que possui a mesma grandeza, o mesmo valor” (CARDOSO, 2001, p.134), entendendo-se por grandeza tudo aquilo que pode ser medido.

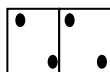
Pode-se notar que, num estágio mais avançado, as crianças até poderiam perceber uma lógica na apresentação das figuras contornadas no contexto de todas elas: da peça 0-0 até a peça 1-1, há somente uma peça; da peça 1-1 até a peça 2-2, há duas peças; da peça 2-2 até a peça 3-3, há três peças; da peça 3-3 até a peça 4-4, há quatro peças; da peça 4-4 até a peça 5-5, há cinco peças e da peça 5-5 até a peça 6-6, há seis peças. Esse é um padrão que se configura nessa atividade.

ATIVIDADE 2

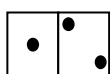
Ligar cada peça do Dominó abaixo ao número que corresponde à quantidade de bolinhas nela representada.



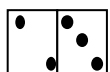
7



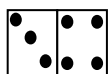
8



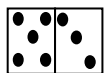
5



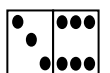
9



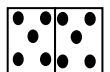
10



3



4



2

Pode-se perceber que as crianças iniciantes, no processo de contagem, notam que as pessoas apontam para objetos enquanto dizem as palavras numéricas. Quem não está seguro dessa ideia dirá palavras mais rápidas ou mais lentas enquanto apontam para os objetos, notando que elas precisam apontar e parar dizendo as palavras ao mesmo tempo. A necessidade de fazer corresponder

uma palavra a um objeto é referida como correspondência biunívoca ou correspondência um-a-um.

Objetivo

Trabalhar Correspondência Biunívoca entre a quantidade de bolinhas da coluna à esquerda e o número da coluna à direita.

Conteúdo matemático a ser desenvolvido a partir dessa atividade

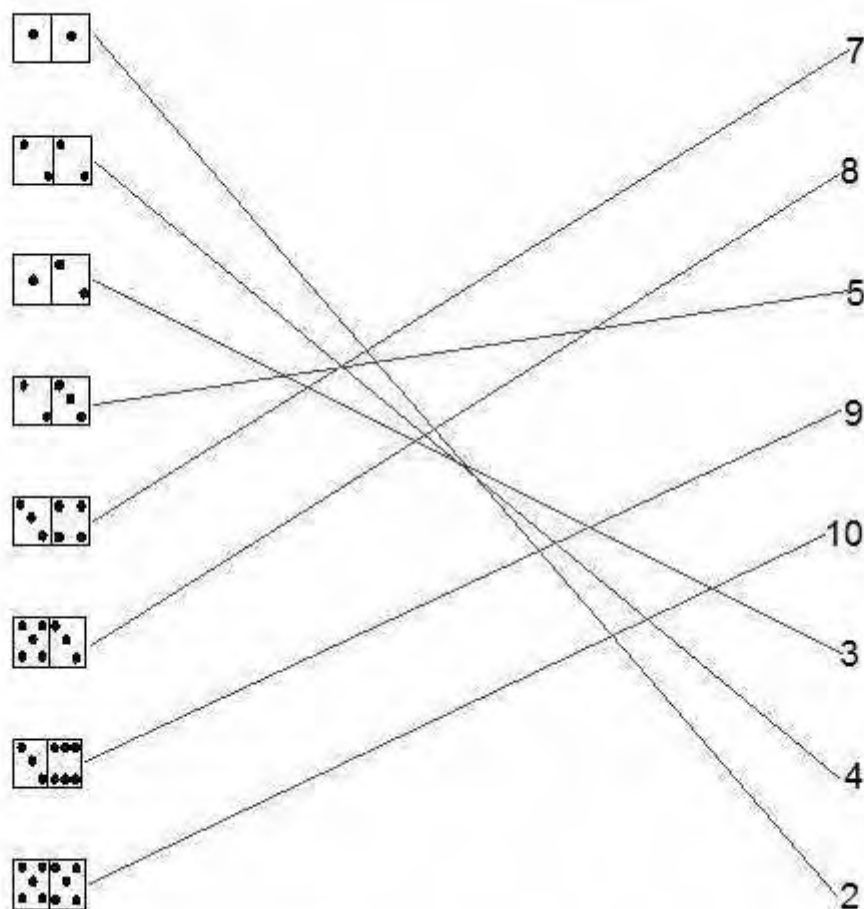
Correspondência Biunívoca.

Desenvolvimento

Os itens 1), 2), 3), 4), 5) e 7) são trabalhados de forma análoga às da Atividade 1.

6) Plenária – Pretende-se que os alunos discutam suas resoluções, ou seja, que identifiquem as quantidades de bolinhas representadas em cada peça de Dominó e as relacionem ao número correspondente.

8) Formalização – O professor registra na lousa uma síntese do que se objetiva aprender a partir desse problema.



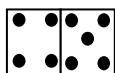
Correspondência Biunívoca: “Dois conjuntos A e B estão em correspondência biunívoca, ou um-a-um, quando a cada elemento do conjunto A corresponde um único elemento do conjunto B e todo elemento de B é o correspondente de um único elemento do conjunto A”. (CARDOSO, 2001, p.57).

Em nosso entender, nessa faixa, a apresentação formal da definição de Correspondência Biunívoca em Matemática não é apropriada, mas cabe ao professor usar uma linguagem conveniente visando à aprendizagem intuitiva desse conceito pelos alunos.

ATIVIDADE 3

Observe a peça de Dominó, abaixo.

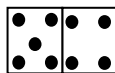
1) Quantas bolinhas há no total ?



$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

E mudando a posição dessa peça.

2) Quantas bolinhas há no total ?



$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

A percepção de mundo nas crianças (aquilo que elas veem) desempenha um papel importante na sua compreensão do mundo. O que parece ser verdade é mais fácil de acreditar do que pareceria lógico do ponto de vista de um adulto. Num determinado estágio, uma criança acredita que se alguma coisa parece diferente, ela é diferente. É natural pensar que há mais bolachas quando uma está quebrada em vários pedaços do que quando ela está inteira. As crianças são fortemente ligadas às suas percepções. Os símbolos vêm a ter significado para as crianças porque eles são apresentados não como fins em si mesmos, mas como rótulos para grupos de quantidades.

Saber que um número de objetos não muda quando os objetos são mudados, rearranjados ou ocultos é chamado conservação de quantidade.

Objetivo

Introduzir a Propriedade Comutativa da Adição.

Conteúdo matemático a ser desenvolvido a partir dessa atividade

Propriedade Comutativa da Adição.

Desenvolvimento

Esta atividade será desenvolvida seguindo a dinâmica estabelecida na metodologia adotada.

Plenária

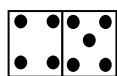
Pretende-se que os alunos discutam suas resoluções e percebam que, nessa peça, a ordem em que a adição foi efetuada, com essas parcelas, não alterou a soma. O professor como guia deve mediar essa discussão levando-os a refletir se o mesmo aconteceria com as outras peças de Dominó.

Formalização

O professor registra na lousa uma síntese do que se objetivava aprender a partir desse problema.

Observe a peça de Dominó, abaixo.

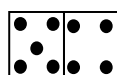
- 1) Quantas bolinhas há no total ?



$$4 + 5 = 9$$

E mudando a posição dessa peça.

- 2) Quantas bolinhas há no total ?



$$5 + 4 = 9$$

O professor faz a apresentação formal da definição de “Propriedade Comutativa da Adição”, sem se referir a esse termo, explicitando que “a ordem das parcelas não altera a soma” e que isso vale sempre.

Pode-se notar que, num estágio mais avançado, os alunos, conhecendo o significado da palavra comutar (trocar, mudar de ordem) e da palavra propriedade (uma verdade que vale sempre), poderão reconhecer a propriedade comutativa como um postulado (verdade aceita sem demonstração) estabelecido para algumas operações entre conjuntos numéricos.

ATIVIDADE 4

Completar a tabela abaixo, usando todas as 28 peças do Dominó.

Soma 0	
Soma 1	
Soma 2	
Soma 3	
Soma 4	
Soma 5	
Soma 6	
Soma 7	
Soma 8	
Soma 9	
Soma 10	
Soma 11	
Soma 12	

Depois de estabelecidos os grupos, com quatro alunos em cada um, o professor entrega a cada grupo um jogo completo de Dominó. Entrega também a Atividade 4, solicitando aos grupos que distribuam as 28 peças do Dominó, atendendo às somas indicadas em cada linha.

As crianças precisam aprender que, certas palavras e padrões de linguagem, como soma ou total e igual, são usados para descrever processos de ocorrências familiares em suas vidas diárias. O objeto da aritmética é a descrição de quantidades. Os símbolos representam quantidades de coisas, mas não há nada inerente num símbolo que comunique quanto representa aquele numeral.

As crianças que trabalham quase exclusivamente com símbolos começam a sentir que os símbolos existem fora deles mesmos, antes que sejam apresentadas as representações para eles. O único modo de dar sentido a uma quantidade representada por um símbolo é através de experiências com aquela quantidade de objetos reais e, então, aprender a associar as quantidades que estão experimentando com símbolos orais e escritos.

Objetivos

Efetuar adições de pares de números;

Adquirir hábitos de Organização e de Completude de um trabalho;

Identificar, na figura construída, um padrão de Simetria.

Conteúdo matemático a ser desenvolvido a partir dessa atividade

Contagem. Conceitos de Soma e Simetria.

Desenvolvimento

Esta atividade será desenvolvida seguindo a dinâmica estabelecida na metodologia adotada.

Plenária

Pretende-se, com esta atividade, que os alunos discutam suas resoluções, tirem suas dúvidas e identifiquem uma maneira correta e organizada de colocar cada peça de Dominó, de acordo com a soma que ela representa.

O professor, como guia, deve levá-los a refletir se, por exemplo, no caso da Soma 5 que tem 3 peças a serem colocadas, importaria a ordem e o sentido de se colocar essas mesmas peças. Ele pode ampliar essa discussão, perguntando se isso vale para todas as Somas que têm mais de uma peça a ser colocada, uma vez que, como já foi dito acima, a quantidade de objetos não muda quando os objetos são mudados, rearranjados. Isso é chamado conservação de quantidade.

O professor procura mediar a discussão sobre a importância da organização em Matemática, pois a “Matemática é uma ciência de padrão e ordem”. Deve ele ressaltar que existem determinados problemas de matemática que exigem organização na sua resolução

pois, caso contrário, é possível perder-se no caminho de sua resolução e não chegar ao resultado correto.

Formalização

O professor registra na lousa uma síntese do que se objetivava aprender a partir desse problema.

Soma 0	
Soma 1	
Soma 2	 
Soma 3	 
Soma 4	  
Soma 5	  
Soma 6	   
Soma 7	  
Soma 8	  
Soma 9	 
Soma 10	 
Soma 11	
Soma 12	

Esta atividade poderia levar os alunos a perceberem que, usando a linha da Soma 6 como um espelho refletor, uma simetria nas quantidades de soluções representadas nas Somas de 0 a 12.

Nessa atividade, em posteriores níveis de ensino, poderia também ser explorada a ideia de peças complementares, de Sainte-Lagué, que pode ser observada nos pares de soluções correspondentes cuja soma é sempre igual a 12, exceto para as soluções de Soma 6, cujas peças são auto complementares que formam o eixo de simetria.

Seria importante, em qualquer nível de escolaridade, que o professor tivesse conhecimento dessas ideias, de modo a poder trabalhar bem essas atividades.

De acordo com o dicionário Houaiss (2009, p.1945), simetria é “conformidade, em medida, forma e posição relativa, entre as partes dispostas em cada lado de uma linha divisória, um plano médio, um centro ou um eixo”.

Em nosso entender, nessa faixa, a apresentação formal da definição de Simetria em Matemática não é apropriada, mas cabe ao professor usar uma linguagem conveniente visando à aprendizagem desse conceito pelos alunos, sem perder o rigor.

ATIVIDADE 5

Observe as Sequências de peças do Dominó abaixo. Em cada caso, considerando todas as peças do Dominó, continue a Sequência observada.

(a)    ...

(b)    ...

(c)    ...

Antes do trabalho com sequências numéricas, deve ser dada uma atenção especial às sequências figurativas, utilizando eventualmente materiais manipulativos. As sequências com figuras cuja construção depende da anterior levam à generalização próxima ou local. Esta vai permitir o desenvolvimento do raciocínio recursivo. Se se relaciona a construção da figura com a ordem que esta ocupa na sequência dá-se um passo para a generalização distante ou global, que pode conduzir ao raciocínio funcional. (VALE, PIMENTEL, 2009)

Objetivo

Identificar Regularidades e Padrões.

Conteúdo matemático a ser desenvolvido a partir dessa atividade

Sequências ou Sucessões.

Desenvolvimento

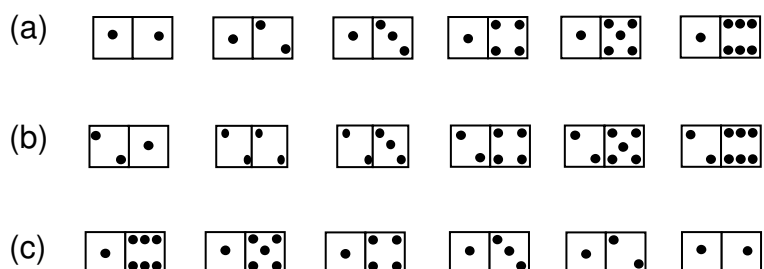
Esta atividade será desenvolvida seguindo a dinâmica estabelecida na metodologia adotada.

Plenária

Pretende-se que os alunos discutam suas resoluções, tirem suas dúvidas e identifiquem a maneira correta de se colocar mais três peças de Dominó em cada Sequência, observando o padrão de regularidade.

Formalização

O professor registra na lousa uma síntese do que se objetivava aprender a partir desse problema.



A seguir, o professor faz apresentação formal da definição de Sequência ou Sucessão que é “um conjunto de objetos de qualquer natureza, organizados ou escritos numa ordem bem determinada”.

Para representar uma sequência, escrevemos seus elementos, ou termos, entre parênteses. É importante destacar que, ao contrário do que ocorre num conjunto, qualquer alteração na ordem dos elementos de uma sequência altera a própria sequência.

Exemplos:

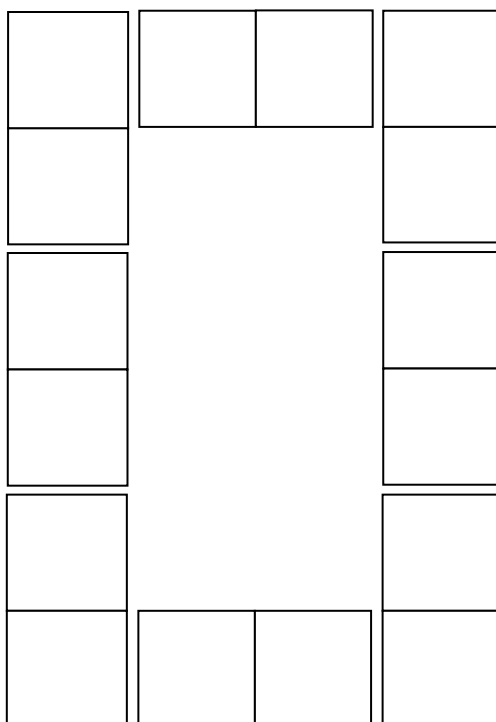
- a) O conjunto (janeiro, fevereiro, março, abril... dezembro) é chamado Sequência ou Sucessão dos meses do ano.
- b) O conjunto ordenado (0, 1, 2, 3, 4, 5...) é chamado Sequência ou Sucessão dos números naturais¹.

Em nosso entender, nesse nível de aprendizagem, a apresentação formal da definição de Sequência ou Sucessão Numérica em Matemática não é apropriada, mas cabe ao professor usar uma linguagem conveniente visando à aprendizagem desse conceito pelos alunos, sem perder o rigor.

¹<http://www.colegioweb.com.br/matematica/o-que-sao-sucessoes-ou-sequencias.html>

8.2.5.2 Atividades sugeridas para o Ensino Fundamental II**ATIVIDADE 6****Retângulo da Soma**

No Universo do Dominó, ou seja, considerando suas 28 peças, preencha todas as partes da moldura de forma retangular abaixo de modo que cada um dos seus lados tenha soma igual a 9.

**Objetivos**

Reconhecer forma retangular;

Distribuir as peças de modo a atender à solicitação do problema;

Identificar a contagem das bolinhas em cada um dos lados e, também, no perímetro dessa figura.

Conteúdo matemático a ser desenvolvido a partir dessa atividade

Adição numérica. Contagem. Perímetro.

Desenvolvimento

Para essa atividade, os passos 1), 2) e 3) são os mesmos do roteiro da metodologia adotada.

4) Observar e incentivar – O professor acompanha as explorações dos alunos e os ajuda, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução. Como, por exemplo, a respeito da composição dos lados desse “retângulo”. Nota-se que sua base é formada por uma peça inteira e duas partes de outras peças e sua altura por três peças inteiras ou seis partes, pois muitas dúvidas poderão ocorrer por ocasião do processo de resolução.

5) Registro das resoluções na lousa – Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções.

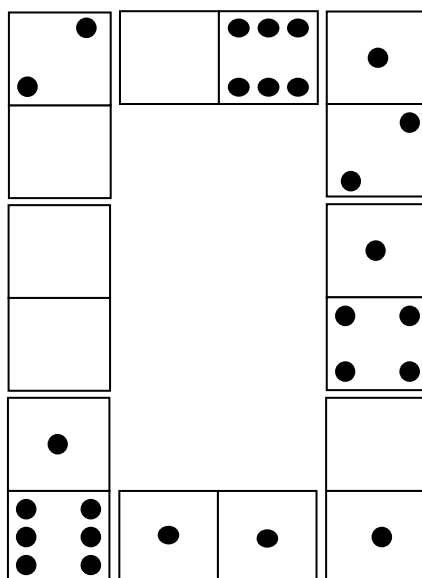
6) Plenária – Pretende-se que os alunos discutam suas resoluções, tirem suas dúvidas e identifiquem maneiras corretas de formar esses “retângulos”, com Soma 9 em cada um de seus lados, a partir das peças do Dominó. O professor, como guia, deve levá-los a refletir se existiriam outras soluções, diferentes daquelas por eles obtidas, questionando-os sobre o possível número de soluções para esse problema. O professor poderia, ainda, levantar questionamentos sobre a contagem do número de bolinhas utilizadas na solução de cada retângulo, esse número seria sempre o mesmo? Por quê?

7) Busca do consenso – Após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções obtidas para a atividade, o professor tenta, com todos os alunos, chegar a um consenso sobre os diferentes resultados corretos, depois de ouvi-los na defesa de seus argumentos.

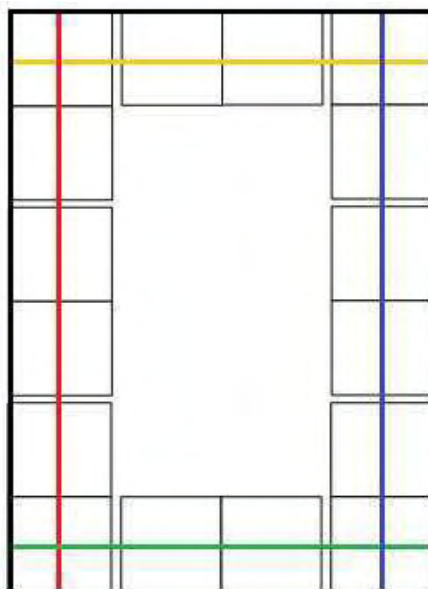
8) Formalização

O professor registra na lousa uma apresentação “formal”, organizada e estruturada em linguagem matemática, do se objetivava aprender a partir desse problema.

Apresentamos, apenas, uma das muitas possíveis soluções desse problema.



Por perímetro se entende a “linha” que forma o contorno de uma figura traçada num plano ou numa superfície ou, ainda, a soma das medidas dos lados de uma figura (Houaiss, 2009). Nesta atividade são indicados os quatro lados e o perímetro da figura abaixo

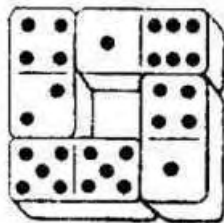


Amarelo – lado 1
 Vermelho – lado 2
 Verde – lado 3
 Azul – lado 4
 Preto – perímetro

A contagem das bolinhas em cada lado será sempre igual a 9. Entretanto, a contagem de bolinhas no perímetro varia, o que pode ser visto com a construção de outros exemplos.

ATIVIDADE 7

Um Quadrado de Perelmán é um quadrado formado por quatro peças, organizadas de tal modo que em cada lado verifica-se a mesma soma. Na figura abaixo



tem-se um quadrado que é um Quadrado de Perelmán de Soma 11, também chamado, por nós, de Quadrado de Soma Mágica 11 e denotado por QP-11.

No Universo do Dominó, ou seja, considerando suas 28 peças, construa dois Quadrados de Perelmán de Soma 15. Em seguida, classifique as afirmações abaixo em verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas.

- a) A soma dos intermediários opostos no QP-15 são iguais.
- b) A soma dos quatro intermediários no QP-15 é ímpar.
- c) A soma dos quatro intermediários no QP-15 é par.
- d) A paridade de C é a mesma da soma de dois intermediários opostos, onde C é a soma dos quatro cantos do quadrado.
- e) Subtraindo do total T de pontos de um QP-15 a soma de dois intermediários opostos obtemos o dobro da Soma 15.
- f) Construa outros Quadrados de Perelmán de várias somas mágicas. Verifique a validade das afirmações classificadas como verdadeiras nesses outros quadrados construídos.

Objetivos

Reconhecer um Quadrado de Perelmán, ou seja, um quadrado de soma mágica fixada;

Distribuir as peças de modo à atender à solicitação do problema;

Expressar-se, nas justificativas, verbalmente e por escrito, com clareza, precisão e objetividade;

Desenvolver, nos alunos, a capacidade e a consciência da necessidade de uma aprendizagem continuada.

Conteúdo matemático a ser desenvolvido a partir dessa atividade

Justificar, matematicamente, a validade das afirmações, usando os conceitos de igualdade, de números pares, de números ímpares, de intermediários opostos e de paridade.

Desenvolvimento

1) Leitura individual – Entregar uma cópia da Atividade 7 para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.

2) Leitura em conjunto – Formar grupos e solicitar nova leitura da atividade, agora em grupos. Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo-lhes a atividade. Se houver, no enunciado, palavras desconhecidas para os alunos, como intermediários opostos, paridade de C (sendo C a soma dos valores de canto do quadrado) e o total T de pontos de um Quadrado de Perelmán (sendo T a soma total de todas as partes de um quadrado de Perelmán), surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas, levantando outros questionamentos.

3) Resolução do problema – De posse da atividade, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo.

4) Observar e incentivar – Enquanto os alunos, em grupos, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa seus comportamentos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor como mediador leva os alunos pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles. É necessário que o professor atenda aos alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e os ajuda, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução.

5) Registro das resoluções na lousa – Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções.

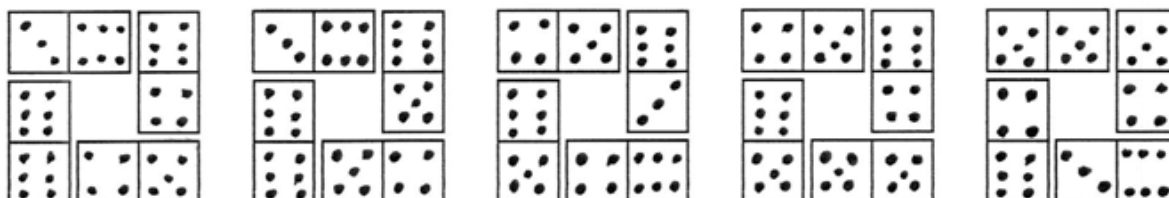
6) Plenária – Pretende-se que os alunos discutam suas resoluções, tirem suas dúvidas e identifiquem maneiras corretas de formar “quadrados”, com Soma 15 em cada um de seus lados, a partir das peças do Dominó. O professor, como guia, deve levá-los a refletir se existiriam outras soluções, diferentes daquelas por eles obtidas, questionando-os sobre qual seria a quantidade total de quadrados de soma 15.

7) Busca do consenso – Após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções obtidas para a atividade, o professor tenta, com todos os alunos, chegar a um consenso sobre os diferentes resultados corretos, depois de ouvi-los na defesa de seus argumentos.

8) Formalização

O professor registra na lousa uma apresentação “formal”, organizada e estruturada em linguagem matemática, do se objetivava aprender a partir desse problema.

Apresentamos os cinco possíveis Quadrados de Perelmán de Soma 15.



Os alunos perceberão que, na Atividade 7, os resultados obtidos serão os mesmos independente do quadrado escolhido dentre os cinco acima.

Selecionamos para o desenvolvimento desta atividade o terceiro quadrado.

a) A soma dos intermediários opostos no QP-15 são iguais?

De fato, temos que $6 + 3 = 5 + 4$, portanto (a) é verdadeira.

b) A soma dos quatro intermediários no QP-15 é ímpar?

Temos que $6 + 4 + 3 + 5 = 18$, que é um número par.

Portanto (b) é falsa.

- c) A soma dos quatro intermediários no QP-15 é par?

Como foi apresentado acima, portanto (c) é verdadeira.

- d) A paridade de C é a mesma da soma de dois intermediários opostos?

Sendo C: a soma dos valores de canto,

$C = 5 + 6 + 6 + 4 = 21$ que é um número ímpar.

A soma dos intermediários opostos $= 6 + 3$ ou $5 + 4$, que resulta 9 que também é um número ímpar.

Portanto, C e a soma dos intermediários opostos têm a mesma paridade.

(d) é verdadeira.

- e) Subtraindo do total T de pontos de um QP-15 a soma de dois intermediários opostos obtemos o dobro da Soma 15?

$$T = 4 + 5 + 6 + 3 + 6 + 4 + 5 + 6 = 39$$

$$\text{Soma dos intermediários opostos (S.i.o)} = 9$$

$$T - \text{S.i.o} = 39 - 9 = 30$$

$$\text{E, } 30 = 2 \times 15 \text{ que é do dobro da Soma 15.}$$

Portanto (e) é verdadeira

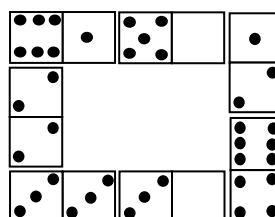
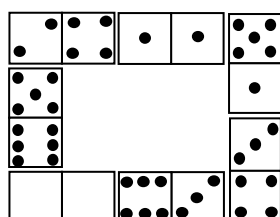
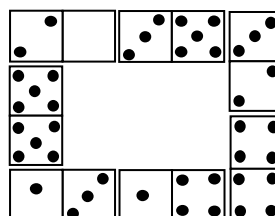
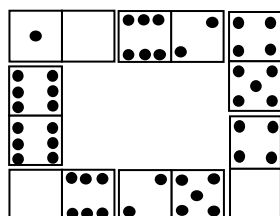
- f) Construa outros Quadrados de Perelmán de várias somas mágicas. Verifique a validade das afirmações classificadas como verdadeiras nesses outros quadrados construídos.

Como mostrado, no Anexo D, existem muitas possibilidades de construção dos QP em suas diferentes somas. Mas, independentemente do QP considerado será sempre verificada a validade dessas afirmações verdadeiras pois, como foi mostrado no item 7.2.5.2 desta tese, tratam dos Teoremas 1, 2, 3 e 4.

ATIVIDADE EXTRACLASSE²**Problema de Perelmán Invertido**

Construir, empregando todas as peças do Dominó, sem repetir, quatro retângulos. Em cada um, a soma dos números indicados em cada lado de um mesmo retângulo deve ser a mesma.

Apresentamos uma das muitas possíveis soluções desse problema.



² O Problema de Perelmán invertido pede a construção, com as 28 peças do Dominó, de quatro retângulos com 7 peças cada um. Este problema nos foi sugerido pelo Prof. Dr. Ruy Madsen Barbosa.

8.2.4.3 Atividades sugeridas para o Ensino Médio

ATIVIDADE 8

Considerar cada peça do Dominó, vista no sentido vertical (em pé), como uma fração onde a parte superior corresponde ao numerador e a parte inferior ao denominador da mesma. Por exemplo, a peça  corresponde à fração $\frac{2}{3}$.

Como consequência imediata do fato de que não há fração com denominador zero, devem ser retiradas do conjunto das peças do Dominó todas as peças com zero, restando portanto, para esta atividade, somente 21 peças.

1) “Soma 1” e “Soma 2”

- a) Usando 2 peças do Dominó obter soma igual a 1;
- b) Utilizando 3 peças do Dominó obter soma 1;
- c) Com 2 peças do Dominó obter soma 2;

Desafio: Usando 5 peças do Dominó obter soma $2\frac{1}{2}$.

2) “Soma 8”

- a) Empregando 2 peças do Dominó obter soma 8;
- b) Com 3 peças do Dominó obter soma 8;
- c) Utilizando 4 peças do Dominó obter soma 8;
- d) Com 5 peças do Dominó obter soma 8;
- e) Usando 6 peças do Dominó obter soma 8;
- f) Com 7 peças do Dominó obter soma 8;
- g) Empregando 8 peças do Dominó obter soma 8.

É importante observar que a proposição dessa Atividade 8 está vinculada ao fato de os alunos já terem trabalhado com frações, portanto conhecem (ou deveriam conhecer) os termos numerador e denominador. Sabem também que, para adicionar duas ou mais frações, devem achar o mínimo múltiplo comum (m.m.c) dos denominadores e encontrar frações equivalentes às dadas para fazerem a adição, ou seja, dar o mesmo denominador comum e adicionar os numeradores.

Objetivo

Ao propor essa atividade, o objetivo principal do professor não é exatamente o de promover a operação adição de frações mas, o de tornar os alunos capazes de encontrar, com facilidade, frações equivalentes, entendendo-se por frações equivalentes aquelas que têm formas diferentes e mesmo valor e, portanto números que ocupam o mesmo lugar na reta.

Conteúdo matemático a ser desenvolvido a partir dessa atividade

Usar frações equivalentes para adicionar frações representadas pelas peças do Dominó.

Desenvolvimento

Esta atividade será desenvolvida seguindo a dinâmica estabelecida na metodologia de trabalho adotada.

Observar e incentivar

O professor acompanha as explorações dos alunos e os ajuda, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução. Como, por exemplo, o de que os alunos precisam, ao olharem para as peças do Dominó “de pé”, vê-las como frações, e deveriam ver que frações ao serem adicionadas corresponderiam a outras peças do Dominó.

Plenária

Pretende-se que os alunos discutam suas resoluções e tirem suas dúvidas. O professor, como guia, deve levá-los a identificar que, para a realização dessas atividades com as peças do Dominó, para representar frações há limitações devido à própria composição dessas peças. E ainda que, no universo das peças do Dominó, cada uma das 21 peças será usada apenas uma vez em cada resolução.

É esperado que os alunos percebam que é possível adicionar frações, no conjunto universo dessa atividade, usando o conceito de frações equivalentes (o que torna, em muitos casos, esse tipo de operação mais simples).

Formalização

O professor projeta na lousa resoluções dos grupos e destaca tudo o que se pretendia construir ou reconstruir, no que se refere ao ensino-aprendizagem de frações, a partir desse problema.

1a) Usando 2 peças do Dominó obter soma igual a 1.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \quad (1)$$

Para aumentar o nível de dificuldade dessa atividade, o professor impõe a condição de que os denominadores têm que ser diferentes, e assim surgem outras soluções.

Os alunos chegam a essa solução abaixo, partindo da última solução acima, trocando sua peça $\frac{4}{6}$, por sua peça equivalente $\frac{2}{3}$.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \quad (1)$$

E, ainda apresentam as seguintes

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \quad (1)$$

O que os alunos pensam para chegar nessas três soluções é que qualquer metade mais outra metade resulta um inteiro. Essas soluções não são possíveis de serem representadas no universo das 21 peças do Dominó (o que exigiria a repetição da mesma peça: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$). Entretanto, usando a representação numérica

dessas peças como frações, essas seriam soluções possíveis. Essa é uma oportunidade para fazer ligação com o trabalho feito em sala de aula com frações.

1b) Utilizando 3 peças do Dominó obter soma 1

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \cdot \\ \hline \cdot \cdot \cdot \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot \\ \hline \cdot \cdot \cdot \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot \cdot \\ \hline \cdot \cdot \cdot \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \hline \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \hline \end{array} \quad (1)$$

Ao considerar denominadores diferentes, aumenta o nível de dificuldade e surgem outras soluções.

A partir dessa 1ª resolução é possível obterem-se outras:

- Trocando-se a peça $\frac{2}{6}$ por sua peça equivalente $\frac{1}{3}$ e mantendo-se as outras peças obtem-se mais uma solução.
- Trocando-se a peça $\frac{3}{6}$ por sua peça equivalente $\frac{1}{2}$ e mantendo-se as outras peças obtem-se mais uma solução.
- E, ainda trocando as duas peças a $\frac{2}{6}$ e a $\frac{3}{6}$, respectivamente, por suas peças equivalentes $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ e mantendo a peça $\frac{1}{6}$, obtem-se, ainda, outra solução, a representada abaixo.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot \\ \hline \cdot \cdot \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot \\ \hline \cdot \cdot \cdot \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \hline \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \hline \end{array} \quad (1)$$

Alguns alunos podem observar que também é possível encontrar quantas são as soluções obtidas, a partir da primeira solução apresentada em 1 b) sem listar todas essas soluções, apenas fazendo a contagem das mesmas. Pelo Princípio Multiplicativo temos que: em 1b) existe uma 1 possibilidade para a primeira peça, 2 possibilidades para a segunda e 2 possibilidades para a terceira, então, obtém-se portanto $1 \times 2 \times 2 = 4$ soluções, a partir dessa solução dada.

Existem, ainda, outras soluções como:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \cdot \\ \hline \cdot \cdot \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot \cdot \\ \hline \cdot \cdot \cdot \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot \\ \hline \cdot \cdot \cdot \\ \hline \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \cdot \\ \hline \cdot \cdot \cdot \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot \\ \hline \cdot \cdot \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot \\ \hline \cdot \cdot \cdot \\ \hline \end{array} \quad (1)$$

Observe que essa segunda solução foi obtida trocando-se a peça $\frac{1}{3}$ da primeira pela sua peça equivalente $\frac{2}{6}$.

Essas soluções não são possíveis de serem representadas no universo das 21 peças do Dominó mas essa é uma oportunidade para fazer-se ligação com o trabalho feito em sala de aula com frações.

1c) Com 2 peças do Dominó obter soma 2.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet \bullet \\ \hline \bullet \bullet \\ \hline \end{array} \quad (2)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet \\ \hline \bullet \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet \bullet \\ \hline \bullet \bullet \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet \bullet \\ \hline \bullet \bullet \\ \hline \end{array} \quad (2)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet \bullet \\ \hline \bullet \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet \bullet \\ \hline \bullet \bullet \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet \bullet \\ \hline \bullet \bullet \\ \hline \end{array} \quad (2)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet \bullet \\ \hline \bullet \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet \bullet \\ \hline \bullet \bullet \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet \bullet \\ \hline \bullet \bullet \\ \hline \end{array} \quad (2)$$

Impondo-se a condição de os denominadores serem diferentes, chega-se a outras soluções

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet \bullet \\ \hline \bullet \bullet \\ \hline \end{array} \quad (2)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet \bullet \\ \hline \bullet \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet \bullet \\ \hline \bullet \bullet \\ \hline \end{array} \quad (2)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet \bullet \\ \hline \bullet \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet \bullet \\ \hline \bullet \bullet \\ \hline \end{array} \quad (2)$$

Sabe-se que com quaisquer duas peças que representam o número inteiro um, cada duas delas, quando somadas, tem por resultado 2. No Universo das 21 peças do Dominó, há 6 peças que representam o número um. Portanto, a Análise Combinatória nos garante que temos 15 soluções desse tipo.

$$C_{6,2} = \binom{6}{2} = \frac{6.5}{1.2} = 15$$

Outra forma para visualizar as resoluções desse problema é usar o diagrama de árvore como um processo de atuação.

Existem, ainda, outras soluções como

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \quad (2)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \quad (2)$$

Desafio: Usando 5 peças do Dominó obter soma $2 \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \quad \left(\frac{5}{2} \text{ ou } 2 \frac{1}{2} \right)$$

Apresentamos, abaixo, dez das muitas possíveis soluções desse desafio, fazendo uso de suas expressões fracionárias.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{6} = 2,5$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{6} = 2,5$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{1}{6} + \frac{5}{6} + \frac{3}{6} = 2,5$$

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = 2,5$$

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{6}{6} + \frac{1}{2} = 2,5$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{6} + \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = 2,5$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 2,5$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{1}{3} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = 2,5$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{5}{4} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = 2,5$$

$$\frac{2}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{6}{6} + \frac{1}{2} = 2,5$$

Já vimos que uma maneira para se obter novas soluções, a partir de uma dada solução, é substituir uma peça escolhida por outra sua equivalente e isso vale sempre.

2a) Empregando 2 peças do Dominó obter soma 8.

Diagram (8) shows two dice being added. The first die has 5 dots on top and 1 dot on the bottom. The second die has 3 dots on top and 2 dots on the bottom. The sum is 8.

(8)

Na 2ª coluna trocando a peça $\frac{4}{2}$ por suas peças equivalentes a $\frac{2}{1}$ ou a $\frac{6}{3}$ e mantendo-se a outra peça obtêm-se mais duas soluções.

2b) Com 3 peças do Dominó obter soma 8.



$$\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet\bullet \\ \hline & \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet\bullet\bullet\bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet\bullet\bullet\bullet \\ \hline \bullet\bullet\bullet \\ \hline \end{array} \quad (8)$$

Diagram (8) shows three dice faces with 2, 3, and 6 dots respectively, summed together.

2c) Utilizando 4 peças do Dominó obter soma 8.

$$\begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \bullet \quad \bullet \\ \hline \bullet \quad \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \hline \bullet \quad \bullet \\ \hline \end{array} = 8 \quad (8)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet\bullet \\ \hline \bullet & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet\bullet\bullet & \bullet\bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet\bullet\bullet & \bullet\bullet\bullet \\ \hline \bullet\bullet & \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet\bullet\bullet & \bullet\bullet\bullet \\ \hline \bullet & \bullet\bullet \\ \hline \end{array} = ? \quad (8)$$

2d) Com 5 peças do Dominó obter soma 8.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 2 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 3 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 4 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 5 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad (8)$$

2e) Usando 6 peças do Dominó obter soma 8.

(8)

2f) Com 7 peças do Dominó obter soma 8.

[illegible]

$$\begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \bullet \quad \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \bullet \quad \bullet \\ \hline \bullet \quad \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \hline \bullet \quad \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \hline \bullet \quad \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \bullet \quad \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \bullet \quad \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} \quad (8)$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \bullet \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \bullet \bullet \\ \hline \bullet \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \bullet \bullet \bullet \\ \hline \bullet \bullet \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \hline \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \hline \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \hline \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \hline \end{array} \quad (8)$$

2g) Empregando 8 peças do Dominó obter soma 8

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \\ \hline \bullet & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \\ \hline \bullet & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \quad (8)$$

Frações equivalentes são aquelas frações que têm formas diferentes e mesmo valor e, portanto são números que ocupam o mesmo lugar na reta.

A classe de equivalência de uma fração é o conjunto de todas as frações equivalentes à fração dada.

Exemplos:

1) Classe de equivalência da fração $\frac{3}{1} : \left\{ \frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \frac{12}{4}, \dots \right\}$

2) Classe de equivalência da fração $\frac{3}{4} : \left\{ \frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \frac{12}{16}, \dots \right\}$ (CARDOSO, 2001, p.109).

ATIVIDADE EXTRACLASSE

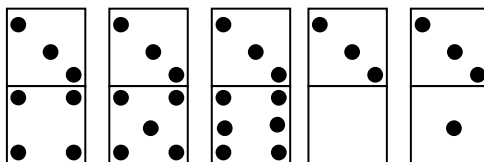
Desafio Máximo

Com as 21 peças do Dominó, obter (usando todas sem repetição) os números de 1 a 8.

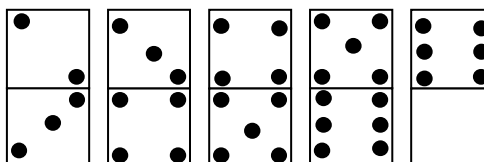
Apresentamos, no Anexo F, vinte das muitas possíveis soluções desse desafio.

ATIVIDADE 9³

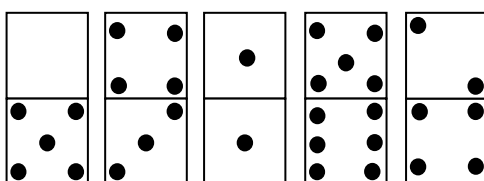
- 1) Considerar as cinco peças de dominó na ordem apresentada. Colocar mais duas peças de tal forma que se tenha a continuação dos padrões numéricos observados. Em seguida, acrescentar uma terceira peça.



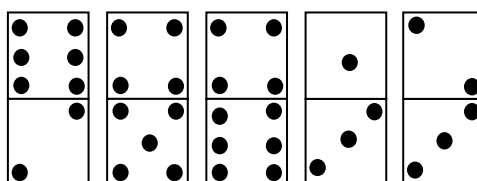
- 2) Dada a sucessão de dominós abaixo, continuá-la acrescentando três peças, conservando os padrões numéricos de suas peças.



- 3) Continuar a sucessão figurativa de dominós, acrescentando três novas peças, preservando os padrões numéricos apresentados por suas peças.

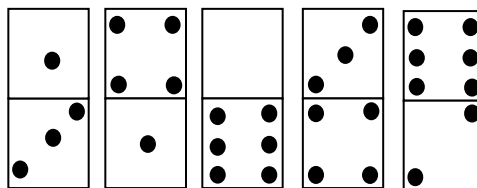


- 4) Continuar a sucessão de dominós, conservando os padrões numéricos de suas duas partes, ao acrescentar mais três peças.



³Esta Atividade 9 tem como embasamento teórico o trabalho de Menino e Barbosa (2004) intitulado *Dominós: um recurso lúdico na resolução de problemas para a aprendizagem de sucessões*.

- 5) Dada a sucessão de dominós abaixo, continuá-la preservando os padrões numéricos de suas peças, ao acrescentar mais três peças.



Consultando o livro *Padrões - Múltiplas Perspectivas e Contexto em Educação Matemática*, organizado por Isabel Vale e Ana Barbosa, na página 29 nos detivemos no artigo *Padrões e relações na sala de aula*, de Elizabeth Warren, que diz “generalizar padrões é visto como a chave para o desenvolvimento do raciocínio matemático e da compreensão algébrica”. Na introdução desse trabalho, a autora escreve que

Generalizar é um elemento chave e um objetivo de direção para a sala de aula de matemática [...] O processo de generalização matemático foi delineado como vendo o geral no particular (KRUTESKII, 1976; MASON, 1996). Ele envolve estudantes olhando, através de muitos casos e identificando a estrutura comum que sustenta cada um deles, e percebendo regularidades tais como padrões e estruturas e, ainda, explorando essas relações (KAPUT, 1999). Mas, há uma dualidade nesse processo. Mason (1996) determina isso como ver o geral no particular e o particular no geral. Kruteskii (1976) vê isso como a habilidade em ver alguma coisa que é geral e ainda desconhecida no que está isolado e particular comparado com a habilidade em ver alguma coisa geral e conhecida no que é particular e concreto [...] Mas, a generalização vai além de só perceber o geral no particular. Kieran (1989) argumenta que, na adição, é preciso ser capaz de expressar as generalizações algebricamente.

Muitas questões específicas são levantadas: como os estudantes e os professores constroem o termo geral num padrão ou numa sequência? Que sinais e representações levam os estudantes a notar a estrutura subjacente a um padrão? O que fazem os estudantes quando alcançam a generalização? Quais ações e sequências de atividades do professor levam os estudantes a perceber as regularidades existentes e expressar essa ideia numa linguagem e notação simbólica.

Objetivos

- Trabalhar Sequências e Sucessões Numéricas;
- Reconhecer Padrões e Ciclos, entendendo-se por padrão aquilo que sempre se repete e que envolve mudança ou repetição e, por ciclo, o espaço de tempo durante o qual ocorre e se completa, com regularidade, uma sequência de fatos;
- Trabalhar com as peças do Dominó observando as relações de mudança fazendo uso do conceito de Progressão Aritmética;
- Introduzir o conceito de Congruência módulo m .

Conteúdo matemático a ser desenvolvido a partir dessa atividade

Conceitos de: padrão, ciclo e progressão aritmética.

Congruências módulo m .

Desenvolvimento

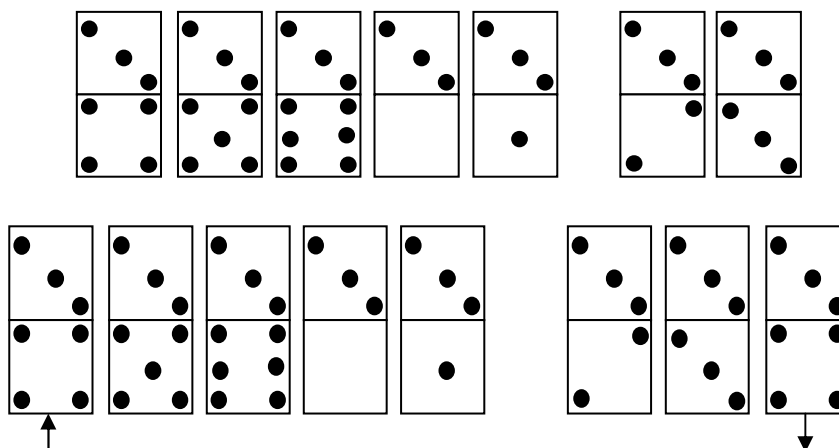
Esta atividade será desenvolvida seguindo a dinâmica estabelecida na metodologia de trabalho adotada.

Plenária – item 1

Pretende-se que os alunos discutam suas resoluções e percebam que, observando as partes superiores das peças do Dominó, emerge facilmente um padrão: o “3” repete-se sempre. Este fato indica a existência de uma sucessão constante. O professor, como guia, deve levá-los à descoberta de algum padrão para as partes inferiores das peças. Espera-se que os alunos percebam que os numerais iniciais dessas peças indicam um crescimento unitário de uma peça para outra, entendendo que após o “6” seria o “7”, mas desde que esse valor não existe no Dominó, torna-se aceitável o posicionamento do “zero” na parte inferior da quarta peça, o que é confirmado com o “1” na quinta peça, continuando o aumento de 1 em 1.

Portanto, é adequada a colocação das peças seguintes 3-2, 3-3 e 3-4, respectivamente.

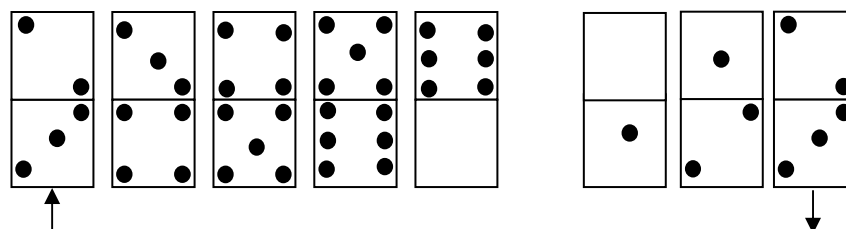
O professor deve conduzi-los a uma verificação que é: ao acrescentar a oitava peça a 3-4, volta-se à peça inicial e tudo recomeça. Forma-se então um **ciclo de 7 peças**. Esse fato caracteriza as sucessões com dominós pelo motivo de essas peças terem exatamente sete numerais distintos.

Formalização – item 1**Plenária – item 2**

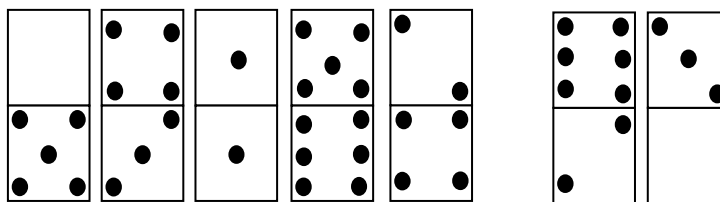
Pretende-se que os alunos discutam suas resoluções e tirem suas dúvidas. O professor, como guia, deve levá-los a perceber que essa atividade trata de duas sucessões numéricas crescentes. As partes superiores e inferiores das peças do Dominó indicam um crescimento de uma em uma unidade. O docente deve recordá-los da convenção de que o seguinte ao “6” é o “0”, conforme aceito na atividade anterior.

Portanto, é adequada a colocação das peças seguintes 0-1, 1-2 e 2-3 ... respectivamente.

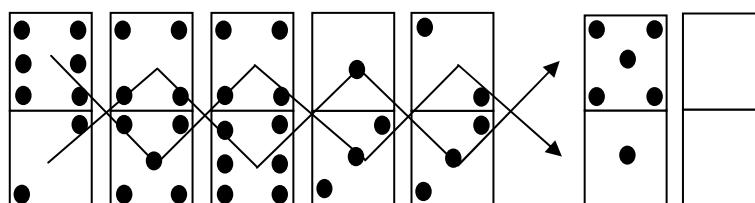
O professor deve conduzi-los à verificação de que ao acrescentar a oitava peça, a 2-3, volta-se à peça inicial e tudo recomeça. Forma-se então um **ciclo de 7 peças**.

Formalização – item 2**Plenária – item 3**

Pretende-se que os alunos discutam suas resoluções e tirem suas dúvidas. O professor como guia deve levá-los a perceber que as partes superiores formam uma sucessão crescente de 4 em 4 unidades, enquanto que as partes inferiores das peças constituem uma sucessão decrescente de 2 em 2 unidades.

Formalização – item 3**Plenária – item 4**

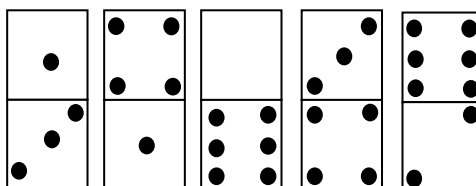
Pretende-se que os alunos discutam como resolveriam essa situação-problema que é um pouco mais difícil do que as anteriores. Na parte superior das peças, inicia-se o trabalho com um decréscimo, passou de 6 para 4; e, da segunda para a terceira peça, há repetição da indicação numérica 4 nas partes superiores. Também, nas partes inferiores há uma sucessão numérica que não apresenta um padrão identificável. Na hipótese de não se ter uma resposta satisfatória para a sexta peça convém, ao professor como guia, levá-los a refletir sobre a possibilidade das sucessões não serem exclusivas das partes superiores e das partes inferiores respectivamente. Esse questionamento sugere o encaminhamento dessa atividade e, em geral, produz o resultado esperado. Depois dessa dica é comum algum grupo encontrar a solução, tomando alternadamente os termos das sucessões com parte superior e inferior sucessivamente, como mostrado abaixo.

Formalização – item 4**Plenária 5 – item 5**

Pretende-se que os alunos percebam que esta sucessão das peças do Dominó apresenta nas partes superiores um padrão numérico que vai aumentando de três em três unidades (com a mesma convenção que depois do “6” vem o “0”), enquanto que nas partes inferiores decresce de duas em duas unidades.

Formalização – item 5

O professor registra, na lousa, uma síntese do que se objetiva aprender a partir dessa Atividade 9. Faz a apresentação formal das definições de Sequências ou Sucessões, de Padrão e de Ciclo.



Na questão 5 ambas as sucessões são progressões aritméticas-PA, a da parte superior inicia-se com o 1 e tem razão (+3), e, da parte inferior, começa com o 3 e tem a razão (-2). Portanto, essa situação-problema pode ser usada visando-se à fixação dessas particulares sucessões, as PA. Vejamos a resolução dessa atividade com recursos das progressões aritméticas:

De acordo com a fórmula do termo geral da PA: $a_n = a_1 + (n-1).r$, temos que:

a) Sucessão das partes superiores : $s_n = 1 + (n-1).3 = 3n - 2 \quad (n \geq 1)$

b) Sucessão das partes inferiores: $i_n = 3 + (n-1).(-2) = 5 - 2n \quad (n \geq 1)$

Fazendo sucessivamente $n = 1, 2, 3, \dots$ é possível encontrar os termos da PA:

Em a), $n = 1 \Rightarrow s_1 = 3.1 - 2 = 1$ (que confere com o primeira peça da sequência)

$$n = 2 \Rightarrow s_2 = 3.2 - 2 = 4 \text{ (que está de acordo com o segunda)}$$

$$n = 3 \Rightarrow s_3 = 3.3 - 2 = 7 \text{ (usamos a convenção de, nas peças do Dominó, o 7 corresponde ao 0).}$$

$$n = 4 \Rightarrow s_4 = 3.4 - 2 = 10 \text{ (usamos a convenção de, nas peças do Dominó, o 10 corresponde ao 3).}$$

Defendemos que esta é uma boa ocasião para se introduzir o conceito de **Congruência módulo m**, onde m é a medida do ciclo.

Nesse caso, para $n=4$, a congruência módulo 7, desde que passou 3 unidades do 7, escrevemos $10 \equiv 3 \pmod{7}$

Assim em a), efetuando os cálculos para os diversos valores de n teremos:

$$n = 3 \Rightarrow s_3 = 3.3 - 2 = 7 \equiv 0 \pmod{7}$$

$$n = 4 \Rightarrow s_4 = 3.4 - 2 = 10 \equiv 3 \pmod{7}$$

$$n = 5 \Rightarrow s_5 = 3.5 - 2 = 13 \equiv 6 \pmod{7}$$

$$n = 6 \Rightarrow s_6 = 3.6 - 2 = 16 \equiv 9 \pmod{7} \equiv 2 \pmod{7}$$

$$n = 7 \Rightarrow s_7 = 3.7 - 2 = 19 \equiv 12 \pmod{7} \equiv 5 \pmod{7}$$

$$n = 8 \Rightarrow s_8 = 3.8 - 2 = 22 \equiv 15 \pmod{7} \equiv 8 \pmod{7} \equiv 1 \pmod{7} \text{ que voltou ao valor inicial.}$$

Analogamente, a segunda fórmula em b) nos dará $i_1 = 3$, $i_2 = 1$ (de acordo com a primeira e segunda peças). Entretanto $i_3 = -1$, correspondente a $-1+7=6$, e assim, sucessivamente.

Assim em b) efetuando os cálculos para os diversos valores de n teremos:

$$n = 3 \Rightarrow i_3 = 5 - 2.3 = -1 \equiv 6 \pmod{7}$$

$$n = 4 \Rightarrow i_4 = 5 - 2.4 = -3 \equiv 4 \pmod{7}$$

$$n = 5 \Rightarrow i_5 = 5 - 2.5 = -5 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$n = 6 \Rightarrow i_6 = 5 - 2.6 = -7 \equiv 0 \pmod{7}$$

$$n = 7 \Rightarrow i_7 = 5 - 2.7 = -9 \equiv -2 \pmod{7} \equiv 5 \pmod{7}$$

$$n = 8 \Rightarrow i_8 = 5 - 2.8 = -11 \equiv -4 \pmod{7} \equiv 3 \pmod{7}, \text{ que voltou ao valor inicial.}$$

Depois de trabalhar o conceito de **Congruência módulo m** ⁴, o professor apresenta sua definição formal:

Dizemos que o número a é congruente ao número b , segundo o módulo m , se e só se $(a - b)$ é um múltiplo de m .

Então, existe um inteiro k tal que

$$a - b = k.m \text{ ou } b - a = k'.m$$

Escrevemos $a \equiv b \pmod{m}$ e lemos a é côngruo (ou correspondente) a b módulo m .

Exemplos:

$$\text{Se } m=6, \quad 23 \equiv 11 \pmod{6} \text{ desde que } 23 - 11 = 2.6 \text{ ou}$$

$$11 - 23 = (-2).6$$

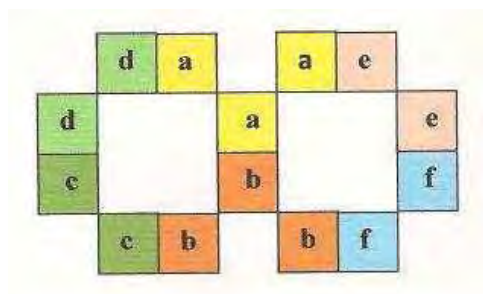
$$\text{Se } m=7, \quad 5 \equiv 26 \pmod{7} \text{ desde que } 5 - 26 = -21 = (-3).7 \text{ ou}$$

$$26 - 5 = 21 = 3.7.$$

⁴Para um melhor estudo desse tema consultar o livro de Domingues, H. H., *Fundamentos de Aritmética*. São Paulo: Atual, 1991.

ATIVIDADE 10⁵**Quadrados Bem Comportados**

A figura apresentada é considerada um diagrama construído com 7 (sete) peças do Dominó dispostas de tal maneira que formam 2 (dois) quadrados.



Nesse diagrama indicamos com cores as partes das peças do Dominó, para esclarecer que as conexões dessas peças acontecem por seus cantos caso as partes em conexão tenham a mesma indicação numérica.

Do diagrama resulta que são utilizados 6 (seis) tipos de indicações numéricas: a, b, c, d, e e f.

É vetado empregar peças duplas do Dominó, então o conjunto universo dessa atividade é formado pelas 21 peças restantes.

As Somas Associadas a Cada Quadrado são dadas pelas somas das oito partes das peças do Dominó que os contornam.

No caso das duas Somas Associadas serem iguais, justifica dizermos que os Quadrados são Bem Comportados.

Construir um diagrama com 7 peças do Dominó formando Dois Quadrados Bem Comportados sob as seguintes condições:

- 1) O formato do diagrama deve ser aquele dado acima;
- 2) É proibido utilizar peças duplas;
- 3) As conexões das peças só são possíveis se e só se o são por seus cantos, e que possuam as mesmas indicações numéricas;
- 4) As somas associadas aos dois quadrados vazios devem ser iguais.

⁵Este problema foi criado pelo Prof. Dr. Ruy Madsen Barbosa e a nós enviado.

Objetivo

Atingir a compreensão do enunciado;

Construir, com as 21 peças do Dominó, Quadrados Bem Comportados atendendo as condições do problema;

Procurar propriedades; Descobrir estratégias; Descobrir soluções e, se possível, o número de soluções.

Conteúdo matemático a ser desenvolvido a partir dessa atividade

Conceito de Quadrado Bem Comportado.

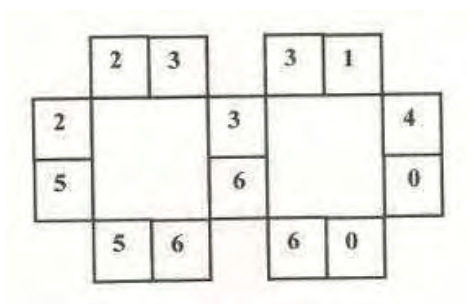
A percepção de simetrias para o desenvolvimento de diferentes soluções.

Desenvolvimento

Esta atividade será desenvolvida seguindo a dinâmica estabelecida na metodologia de trabalho por nós adotada.

Plenária

Pretende-se que os alunos discutam suas resoluções e tirem suas dúvidas. Se aparecer algum grupo que tenha feito um diagrama como o apresentado abaixo



o professor deveria explicar que esse diagrama é um contra-exemplo para o problema. Ele não está correto por dois motivos: há uma conexão do 1 com o 4 (desiguais) e, também as somas associadas aos quadrados não são iguais (32 e 23).

O professor, como guia, deve levá-los a construir o conceito de Quadrados Bem Comportados e, a partir das condições dadas para o problema, que eles sejam capazes de apresentar outros diagramas que formam dois Quadrados Bem Comportados.

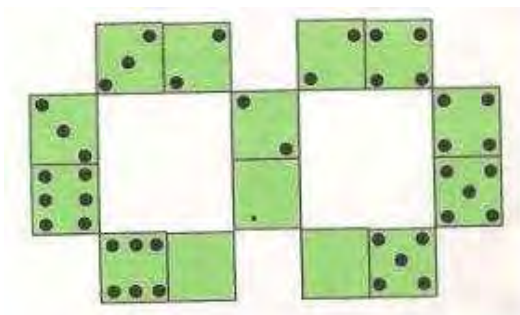
Formalização

O professor registra, na lousa, uma síntese do que se objetivava aprender a partir dessa Atividade. Faz a apresentação formal da definição de Quadrados Bem Comportados:

“Um diagrama com 7 peças do Dominó formam *Dois Quadrados Bem Comportados* ao assumir as seguintes condições:

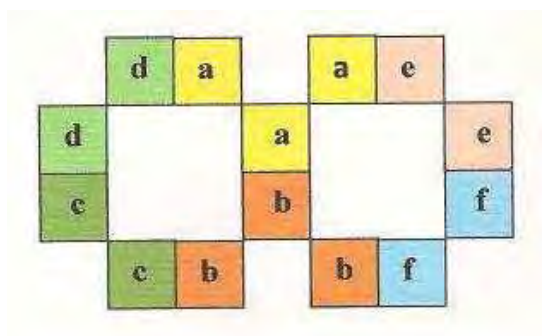
- 1) O formato do diagrama deve ser aquele apresentado no início da Atividade 10;
- 2) É proibido utilizar peças duplas;
- 3) As conexões das peças só são possíveis se e só se o são por seus cantos, e que possuam as mesmas indicações numéricas;
- 4) As somas associadas aos dois quadrados vazios devem ser iguais.”(BARBOSA, 2012)

Uma das muitas possíveis soluções desse problema é



Buscando descobrir propriedades para os Quadrados Bem Comportados, observamos vários deles e esse fato nos permitiu levantar a seguinte conjectura:

Conjectura 1: A soma dos valores numéricos das peças do Dominó nas posições verticais externas é a mesma: $c + d = e + f$.



De fato, como as somas associadas aos dois quadrados vazios são iguais, então

$$(1) a + a + b + b + c + c + d + d = a + a + b + b + e + e + f + f \Rightarrow$$

$$(2) 2(a + b + c + d) = 2(a + b + e + f) \Rightarrow$$

$$(3) a + b + c + d = a + b + e + f \Rightarrow$$

$$(4) c + d = e + f$$

Assim, a Conjectura 1 tornou-se o **Teorema 1**.

O Teorema 1 nos diz que a soma das partes das peças verticais externas deve ser igual.

Além disso, (3) nos diz que a soma das peças horizontais, superior e inferior, do primeiro quadrado é igual à soma de suas peças correspondentes no segundo quadrado.

Portanto, essas propriedades (3) e (4) são condições necessárias para a construção desses diagramas solicitados no problema.

Outro fato por nós observado é que, a partir de uma solução encontrada obtêm-se outras três soluções, através das simetrias possíveis no diagrama: horizontal, vertical e pontual.

Procurando descobrir uma estratégia para a resolução desse problema notamos que são usadas, em cada diagrama, seis partes numéricas de peças do Dominó, de cada vez.

De fato, dos sete números possíveis: 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6 para formar um diagrama, devemos combiná-los em grupo de 6.

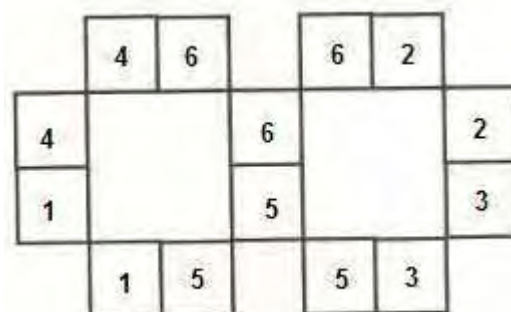
$$C_{7,6} = \frac{7!}{6!1!}$$

Logo, há sete sucessões de seis números possíveis para formar as soluções:

I- 1, 2, 3, 4, 5 e 6 de S = 21	V- 0, 1, 2, 3, 5 e 6 de S = 17
II- 0, 2, 3, 4, 5 e 6 de S = 20	VI- 0, 1, 2, 3, 4 e 6 de S = 16
III- 0, 1, 3, 4, 5 e 6 de S = 19	VII- 0,1, 2, 3, 4, 5 de S = 15
IV- 0, 1, 2, 4, 5 e 6 de S = 18	

Sendo S: a soma dos termos da sucessão.

Ilustramos abaixo Quadrados Bem Comportados usando a sucessão I de $S = 21$.



Depois da construção de vários desses diagramas, concluímos que devemos iniciá-la pela peça central, que no nosso exemplo é a peça 6/5.

Para descobrir se é possível obter solução começando por essa peça, tomamos o valor da Soma da sucessão considerada $S=21$ e dela subtraímos a soma das partes da peça central $(5+6)$,

$$S - (5+6) = 21 - 11 = 10$$

Obtivemos como resultado 10 que é um número par e $10 \div 2 = 5$. Assim, 5 deve ser o valor da soma das partes de cada peça externa vertical que, conforme o Teorema 1, devem ter somas iguais. Como, 5 pode ser dado por $1 + 4$ ou $2 + 3$, então, é possível formar esse diagrama, com esses valores numéricos que ainda não haviam sido utilizados, fechando o mesmo.

Procuraremos descrever uma estratégia geral para a construção de soluções desse problema:

- 1) Escolher uma dentre as sucessões: I, II, III, IV, V, VI e VII;
- 2) Verificar o valor S da Soma dos termos dessa sucessão;
- 3) Escolher uma peça para ser a peça central a/b ;
- 4) Verificar o valor encontrado na operação $S - (a+b)$.
- 5) Se ele for um número par, divide-se esse número por 2. O resultado dessa divisão deve estar nas somas em $c + d$ e em $e + f$, peças externas verticais que têm somas iguais.

- 6) Observar se os valores possíveis para c, d, e, f , são aqueles que ainda não estão no diagrama.
- 7) Se o resultado de $S - (a+b)$ for um número ímpar, quando dividido por 2 resultará um número decimal “não exato” e, portanto, será impossível construir o diagrama no conjunto universo deste problema.
- 8) O resultado de $S - (a+b)$ tem que ser um número par, e, para tanto, S e $(a+b)$ têm que ter a mesma paridade.

Apresentamos um caminho que pode ser usado para se encontrar o número de soluções do referido problema.

Sucessões	Adição dos Termos	Somas
I	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$	$S = 21$
II	$0 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$	$S = 20$
III	$0 + 1 + 3 + 4 + 5 + 6$	$S = 19$
IV	$0 + 1 + 2 + 4 + 5 + 6$	$S = 18$
V	$0 + 1 + 2 + 3 + 5 + 6$	$S = 17$
VI	$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 6$	$S = 16$
VII	$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5$	$S = 15$

Possíveis Peças Centrais	Soma das partes Ímpares	Soma das partes Pares
6-5, 6-4, 6-3, 6-2, 6-1, 6-0	$6 + 5 = 11$ $6 + 3 = 9$ $6 + 1 = 7$	$6 + 4 = 10$ $6 + 2 = 8$ $6 + 0 = 6$
5-4, 5-3, 5-2, 5-1, 5-0	$5 + 4 = 9$ $5 + 2 = 7$ $5 + 0 = 5$	$5 + 3 = 8$ $5 + 1 = 6$
4-3, 4-2, 4-1, 4-0	$4 + 3 = 7$ $4 + 1 = 5$	$4 + 2 = 6$ $4 + 0 = 4$
3-2, 3-1, 3-0	$3 + 2 = 5$ $3 + 0 = 3$	$3 + 1 = 4$
2-1, 2-0	$2 + 1 = 3$	$2 + 0 = 2$
1-0	$1 + 0 = 1$	

As tabelas a seguir nos fornecerão **quais** e **quantas** soluções são as soluções desse problema da Matemática Discreta.

Sabemos que S: Soma da sucessão, a+b: soma das partes da peça central e c-d e e-f: as duas peças verticais externas.

Tabela 1: com o 6 na peça central a-b					
S	(a+b)	S – (a+b)	$\frac{S - (a+b)}{2}$	c-d , e-f	Soluções
21	6-5: 11	10	5	4-1, 3-2	1
21	6-3: 9	12	6	5-1, 4-2	2
21	6-1: 7	14	7	5-2, 4-3	3
20	6-4: 10	10	5	5-0, 3-2	4
20	6-2: 8	12	6	5-1	não
20	6-0: 6	14	7	5-2, 4-3	5
19	6-5: 11	8	4	4-0, 3-1	6
19	6-3: 9	10	5	5-0, 4-1	7
19	6-1: 7	12	6	4-2	não
18	6-4: 10	8	4	3-1	não
18	6-2: 8	10	5	5-0, 4-1	8
18	6-0: 6	12	6	5-1, 4-2	9
17	6-5: 11	6	3	3-0, 2-1	10
17	6-3: 9	8	4	4-0	não
17	6-1: 7	10	5	5-0, 3-2	11
16	6-4: 10	6	3	3-0, 2-1	12
16	6-2: 8	8	4	4-0, 3-1	13
16	6-0: 6	10	5	4-1, 3-2	14
15	6-5: 11	4	2	2-0	não
15	6-3: 9	6	3	2-1	não
15	6-1: 7	8	4	4-0	não

Tabela 2: com o 5 na peça central a-b					
S	(a+b)	S – (a+b)	$\frac{S - (a+b)}{2}$	c-d , e-f	Soluções
21	5-4: 9	12	6	6-0	não
21	5-2: 7	14	7	6-1, 4-3	1
21	5-0: 5	16	8	6-2	não

20	5-3: 8	12	6	6-0, 4-2	2
20	5-1: 6	14	7	4-3	não
19	5-4: 9	10	5	3-2	não
19	5-2: 7	12	6	6-0	não
19	5-0: 5	14	7	6-1, 4-3	3
18	5-3: 8	10	5	4-1	não
18	5-1: 6	12	6	6-0, 4-2	4
17	5-4: 9	8	4	3-1	não
17	5-2: 7	10	5	4-1	não
17	5-0: 5	12	6	4-2	não
16	5-3: 8	8	4	4-0	não
16	5-1: 6	6	3	3-0	não
15	5-4: 9	6	3	3-0, 2-1	5
15	5-2: 7	8	4	4-0, 3-1	6
15	5-0: 5	10	5	4-1, 3-2	7

Tabela 3: com o 4 na peça central a-b

S	(a+b)	S – (a+b)	$\frac{S - (a+b)}{2}$	c-d , e-f	Soluções
21	4-3: 7	14	7	6-1, 5-2	1
21	4-1: 5	16	8	6-2, 5-3	2
20	4-2: 6	14	7	6-1	não
20	4-0: 4	16	8	6-2, 5-3	3
19	4-3: 7	12	6	6-0, 5-1	4
19	4-1: 5	14	7	5-2	não
18	4-2: 6	12	6	6-0, 5-1	5
18	4-0: 4	14	7	6-1, 5-2	6
17	4-3: 7	10	5	5-0	não
17	4-1: 5	12	6	6-0	não
16	4-2: 6	10	5	5-0	não
16	4-0: 4	12	6	5-1	não
15	4-3: 7	8	4	3-1	não
15	4-1: 5	10	5	5-0, 3-2	7

Tabela 4: com o 3 na peça central a-b					
S	(a+b)	S – (a+b)	$\frac{S - (a + b)}{2}$	c-d , e-f	Soluções
21	3-2: 5	16	8	-----	não
21	3-0: 3	18	9	5-4	não
20	3-1: 4	16	8	6-2	não
19	3-2: 5	14	7	6-1	não
19	3-0: 3	16	8	6-2	não
18	3-1: 4	14	7	5-2	não
17	3-2: 5	12	6	6-0, 5-1	1
17	3-0: 3	14	7	6-1, 5-2	2
16	3-1: 4	12	6	6-0, 4-2	3
15	3-2: 5	10	5	5-0, 4-1	4
15	3-0: 3	12	6	5-1, 4-2	5

Tabela 5: com o 2 na peça central a-b					
S	(a+b)	S – (a+b)	$\frac{S - (a + b)}{2}$	c-d , e-f	Soluções
21	2-1:3	18	9	6-3, 5-4	1
20	2-0: 2	18	9	6-3, 5-4	2
19	2-1: 3	16	8	5-3	não
18	2-0: 2	16	8	5-3	não
17	2-1: 3	14	7	4-3	não
16	2-0: 2	14	7	6-1, 4-3	3
15	2-1: 3	12	6	6-0	não

Tabela 6: com o 1 na peça central a-b					
S	(a+b)	S – (a+b)	$\frac{S - (a + b)}{2}$	c-d , e-f	Soluções
21	1-0:1	20	10	6-4	não
19	1-0: 1	18	9	6-3, 5-4	1
17	1-0: 1	16	8	6-2, 5-3	2
15	1-0: 1	14	7	5-2, 4-3	3

Essas tabelas nos fornecem $14 + 7 + 7 + 5 + 3 + 3 = 39$ soluções e, esse número representa o número de soluções geratrizes, uma vez que para cada geratriz se obtém, por simetria, mais três soluções existem para o problema **156 soluções**.

De acordo com o criador desse problema, o Prof. Dr. Ruy Madsen Barbosa, na verdade não é somente por simetria que se obtêm, a partir da geratriz, essas três soluções, mas também por outra estratégia, aquela de fixar a peça central e aplicar os seguintes procedimentos:

- a) Inverter as peças do Dominó verticais da esquerda e da direita (e acertar as peças horizontais);
- b) Inverter somente a peça do Dominó vertical da esquerda (e acertar as peças horizontais);
- c) Inverter somente a peça do Dominó vertical da direita (e acertar as peças horizontais).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ser membro de uma comunidade de pesquisa implica numa responsabilidade de informar aos outros membros sobre a investigação terminada e buscar seus comentários e críticas. (ROMBERG, 1992)

Nesta parte da pesquisa, depois do Projeto 1 e do Projeto 2 concluídos, discutidos e analisados, passamos para o 3º Bloco de Romberg, aquele em que evidências serão coletadas e interpretadas e a pesquisadora busca por informações que a levem a tirar conclusões, procurando responder às perguntas da tese.

Mas, antes de responder às perguntas da tese, retornaremos às questões da página 19 - (1) O que significa fazer pesquisa científica e, portanto, desenvolver um trabalho cientificamente? (2) Porque é importante para o pesquisador adotar uma linha metodológica de pesquisa? - procurando respondê-las.

Quanto a (1), em nosso entender, a atividade intelectual, que é o cerne da pesquisa científica, é a “construção de um conhecimento novo”, que em nossa pesquisa pode ser verificada tanto no Projeto 1 como no Projeto 2.

No Projeto 1 a construção de um conhecimento novo se apresentou com a matemática construída que tomou forma de Teoremas, para dar sustentação teórica a um problema emergente de minha atuação profissional. No Projeto 2 a construção de um conhecimento novo esteve relacionada às atividades criadas a partir das peças do Dominó para cobrir os diferentes níveis da escolaridade básica.

Respondendo à pergunta (2), para nós foi fundamental a escolha de uma metodologia de pesquisa adequada para o desenvolvimento do nosso trabalho, pois dispúnhamos de vários dados sobre a nossa temática de pesquisa resultantes da nossa experiência profissional, da nossa participação no GTERP, das disciplinas cursadas na PPGEM e, para organizar todo esse material, houve a necessidade de adotarmos uma metodologia de pesquisa.

Acreditando que a credibilidade de uma pesquisa transparece nos métodos utilizados, seguimos para a elaboração deste trabalho de Doutorado a Metodologia de Tomas A. Romberg. Pudemos constatar como a escolha dessa Metodologia foi importante para o desenvolvimento desta tese, pois ela nos conduziu, do início ao fim, passo a passo ao longo de suas dez atividades.

Como foi mencionado anteriormente, pudemos criar para nossa pesquisa, não uma única pergunta, mas duas questões formuladas do seguinte modo:

(1) Como a Matemática Discreta pode ser trabalhada através da resolução do Problema da Fernanda?

(2) De que forma a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode contribuir, no trabalho em sala de aula, para a construção de conceitos, de conteúdos e de procedimentos matemáticos em diferentes séries da Educação Básica?

Vale ressaltar que, provavelmente, o que nos levou a essas inquietações foi inicialmente a nossa trajetória profissional marcada pelo trabalho com a citada metodologia, a partir das peças do Dominó e de nossa convivência com o GTERP.

A partir do contato com essa metodologia, o fato de apenas encontrar novas soluções para um dado problema passou a não mais satisfazer às nossas expectativas. Então, procuramos ir além, e começamos a levantar questionamentos como: quantas soluções exatamente existiriam para cada problema proposto e quais os diferentes caminhos possíveis para sua resolução. Passamos a ver esses problemas sob múltiplos olhares, buscando por suas diversas formas de resolução: aritmética, algébrica, geométrica e computacional.

Considerando o que disse Lima (1996, p.1),

“Toda a Matemática atual é formulada na linguagem de conjuntos. Portanto, a noção de conjunto é a mais fundamental: a partir dela, todos os conceitos matemáticos podem ser expressos. Ela é também a mais simples das ideias matemáticas”

para o desenvolvimento das atividades deste trabalho, consideramos como conjunto universo o **conjunto finito** formado pelas **28 peças que compõem o Dominó**. Assim, esta pesquisa teve como cenário a **Matemática Discreta**.

Procurando responder às nossas indagações, foram criados dois projetos.

O Projeto 1 para *a identificação da matemática que pode ser construída para a sustentação teórica do Problema da Fernanda*.

Deve ser destacado o fato de que esse problema tornou-se uma fonte de pesquisa da **matemática** que o sustenta que, **uma vez construída**, tornou-se o **Teorema 1_F**.

Para responder à questão (1), primeira pergunta da pesquisa, buscamos a resolução do Problema da Fernanda, sob múltiplos olhares: o aritmético, o geométrico, o algébrico e o computacional. Atingir esse objetivo trouxe uma grande satisfação pessoal para a pesquisadora, pois essa inquietação emergira de sua atuação profissional.

Na Matemática Discreta esse Problema foi resolvido “aritmeticamente” quando foi usada a estratégia de *tentativa e erro*; “geometricamente” quando foi feita a representação gráfica dos conjuntos das somas mágicas e das quantidades de quadrados para cada uma delas; “algebricamente” quando a matemática necessária para sua sustentação teórica foi construída e demonstrada; e “computacionalmente” através da criação de um algoritmo computacional (algoritmo com passos finitos).

O Problema da Fernanda é um **problema de contagem**, pois nele estamos interessados em saber quantas e quais são suas soluções. Sua representação gráfica é uma **função discreta**. E, como diz Dossey (1991, p.1), a “Matemática Discreta é necessária para a investigação de cenários onde as funções são definidas sobre conjuntos de números discretos ou finitos tais como os inteiros positivos”.

Segundo Dossey (1991, p.1), “em cenários de Matemática Discreta, o foco está em determinar uma contagem”. No NCTM (2007, p.2) lê-se que “descrições de Matemática Discreta frequentemente listam os tópicos que ela inclui, como os grafos vértice-aresta ou vértice-arco, **contagem sistemática** e iteração e recorrência”. Como se pode ver a contagem é um desses tópicos da Matemática Discreta.

Compartilhamos com a opinião de Dossey quando afirma que:

A Matemática Discreta permite aos estudantes explorarem situações-problema únicas que não são diretamente abordáveis através da escrita de uma equação ou da aplicação de uma fórmula comum. Pede-se aos estudantes que frequentemente visualizem a situação através do desenvolvimento de um modelo ou de qualquer outra forma de representação. A teoria não requer aprender um grande número de definições e teoremas, mas realmente requer uma mente afiada e inquisitiva (perspicaz e curiosa). (DOSSEY, 1991, p.8)

Em nosso trabalho foi possível constatar essa afirmação. É importante salientar que a **conjectura 1_F** por nós levantada para o Problema da Fernanda, depois de demonstrada, tornou-se o **Teorema 1_F**.

No cenário da Matemática Discreta, notamos que as **demonstrações são mais simples** no processo de seu desenvolvimento do que as demonstrações feitas no cenário da Matemática Contínua. Isso não quer dizer que as ideias levantadas para se chegar a essas demonstrações sejam simples. O que queremos dizer é que para as demonstrações, no cenário da Matemática Discreta, não se usa uma matemática sofisticada, mas perceber o que se deve fazer para chegar a essas demonstrações **requer uma mente curiosa, perspicaz e muito raciocínio**.

Concordamos com Boyd (2002, p.5) quando diz que “a Matemática Discreta beneficia os estudantes permitindo-lhes ver conexões entre a matemática que eles estão estudando e o mundo real”. De acordo com essa autora, “os professores precisam ajudar os estudantes a rejeitar a ideia de que não há nada novo para descobrir em matemática e ajudá-los a olhar além do cálculo aritmético básico”. Ela menciona que a Matemática Discreta “coloca mais ênfase em ensinar os estudantes a pensar matematicamente” (BOYD, 2002, p.6).

Outro fato que em nosso trabalho ficou evidente foi que “a Matemática não consiste apenas de conceitos provados há muito tempo por Euler e Fermat, está sempre em expansão, com novos conceitos a serem descobertos e provados o tempo todo” (BOYD, 2002, p.46).

No cenário da Matemática Discreta, para a **solução computacional** do Problema da Fernanda foi necessária a criação de um **algoritmo finito**, conforme Anexo E.

No documento *Curriculum and Evaluation Standards* do NCTN (1989) pode-se ler que

A tecnologia computacional também exerce uma influência sempre crescente sobre como a Matemática é criada e usada. Os computadores são, essencialmente, máquinas finitas e discretas, e assim tópicos de Matemática Discreta são essenciais para resolver problemas que usam métodos computacionais. (NCTM, 1989, p.178)

Confirmando as ideias de Dossey (1991, p.1), podemos dizer que “os teoremas e as estratégias de resolução de problemas, centrais à Matemática

Discreta, combinados com o crescente poder dos computadores, abriram novas áreas de investigação e de aplicações”.

E, ainda, endossamos o que diz Hart (1991, p. 68) “a Matemática Discreta se preocupa com planejar, usar e analisar algoritmos que resolvem problemas e desenvolvem teoria, frequentemente fazendo uso de tecnologia computacional”.

Foi muito gratificante a realização desse Projeto 1, em que o Problema da Fernanda foi resolvido, onde nossa preocupação esteve voltada à *matemática necessária para a sustentação teórica* desse Problema.

O ponto de dificuldade, nessa primeira parte do trabalho, foi a formalização da matemática necessária para a sustentação teórica do Problema da Fernanda. Demorou bastante para construí-la, chegamos até mesmo a acreditar que não atingiríamos esse propósito.

Como já foi mencionado, o Problema da Fernanda tem a condição de considerar congruentes os quadrados obtidos por meio de isometrias a partir de uma solução já determinada. Na resolução (1) essa condição foi atendida, chegando-se a 1084 soluções, mas sua representação gráfica não tem forma simétrica. Já os outros dois resolvidores fizeram esse problema, encontrando 1131 soluções e, no caso da resolução (3) além de atender a essa condição do problema, atingiram a simetria para a representação gráfica. Logo, no método computacional não há erro e o número total de soluções do Problema da Fernanda é 1131.

Um tema que permite novas pesquisas é o Problema de Perelmán. Avançamos nesse Problema mas, em nosso entender, ele ainda não foi completamente resolvido, como apontamos nesta tese.

No cenário internacional, o estudo do material norte-americano, cujas referências estão listadas na página 46 do corpo desta tese, nos permitiu fazer algumas considerações:

A Matemática Discreta aparece como um tópico separado em alguns documentos do NCTM: *Standards-1989*; *Mathematics Framework-1992*; e *Curriculum Focal Points High School-2007*. Entretanto, não aparece dessa forma nos *Standards-2000*, no *Mathematics Framework-1985* e nos *Curriculum Focal Points preK-grade 8-2006*. Nesses últimos documentos, a Matemática Discreta aparece diluída ao longo do currículo.

O tema Matemática Discreta é abordado por vários autores de artigos do Yearbook - *Discrete Mathematics across the Curriculum k-12* (1991). Seleccionamos: Dossey, Gardiner, Hart, Graham, Bogart e Holliday. Depois, buscamos os trabalhos de pesquisa de Boyd (2002) e Rivera-Marrero (2007). Todos esses autores são pesquisadores ou educadores matemáticos que trabalham a Matemática Discreta num processo de “para o” e não “no” ensino básico. Ou seja, eles falam de Matemática Discreta, ressaltam sua importância e recomendam sua inclusão no currículo de matemática escolar, mas não a desenvolvem na prática de sala de aula. Esse fato pode ser constatado quando se lê

Embora isso possa dar a impressão de que a Matemática Discreta tem sido considerada um tema importante no campo da Educação Matemática, é difícil determinar quantas escolas integraram Matemática Discreta, de forma separada ou como um curso integrado no currículo de matemática, desde a publicação dos Standards-1989. Também é marcante que a comunidade de pesquisa em educação matemática tem, na sua maior parte, não focado o ensino e a aprendizagem da Matemática Discreta como uma área de investigação. **Eu não encontrei publicados estudos de professores ou experiências de estudantes com Matemática Discreta na *Elementary, Middle Grades, ou High School*.** (RIVERA-MARRERO, 2007, p.3, grifo nosso)

Não poderíamos deixar de observar que, no cenário nacional, para tecer considerações sobre a Matemática Discreta relacionada com aspectos educacionais, foram consultadas referências como: PCN_s, Orientações Curriculares para o Ensino Médio e Publicações da SEE/SP como as Propostas curriculares para o Ensino de Matemática, dentre outros.

Ao analisar esses documentos oficiais, referentes ao currículo matemático do Brasil, constatamos que eles incluem e trabalham tópicos de Matemática Discreta, como Números e Operações com inteiros e racionais, Contagem, Análise Combinatória, Tratamento da Informação, Probabilidade e Estatística, Jogos, dentre outros. Mas, os documentos mencionados não fazem referência a esses tópicos como próprios da Matemática Discreta, que exigem formas diferentes de raciocinar e de dar sentido a eles. Muito possivelmente, devido a esse tratamento, professores e estudantes continuam a trabalhar esses assuntos, da Matemática Discreta, sob a ótica da Matemática que eles conhecem, ou seja, a Matemática Contínua.

No Brasil, pesquisando instituições de ensino superior que trabalham Matemática Discreta na Graduação, encontramos essa disciplina nos Cursos de Ciência da Computação, Sistemas de Informação e Engenharia Informática.

No entanto, em nossa busca por essa disciplina nos Cursos de Licenciatura em Matemática, onde se formam nossos professores, constatamos que apenas alguns desses Cursos têm em suas matrizes curriculares a disciplina Matemática Discreta.

Na Pós-Graduação em Educação Matemática não tem sido muito fácil encontrar pesquisas envolvendo o trabalho de professores em suas salas de aula com a Matemática Discreta.

O GTERP tem direcionado esforços no sentido de oferecer caminhos para se trabalhar Matemática Discreta por meio da Metodologia de Ensino Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas. Esse Grupo tem produzido dissertações, teses e artigos, sobre essa temática. Ainda, tem realizado minicursos, proferido palestras, para pesquisadores, professores em formação inicial e continuada em congressos de Educação Matemática.

Juntando-se ao Projeto 1, buscando responder à questão (2) da tese - De que forma a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode contribuir, no trabalho em sala de aula, para a construção de conceitos, de conteúdos e de procedimentos matemáticos em diferentes séries da Educação Básica? - foi desenvolvido o Projeto 2, no qual nossa atenção esteve voltada para a *Educação Matemática*.

O que nos levou ao desenvolvimento do Projeto 2 foi o fato de compreendermos a necessidade, revelada em trabalhos de pesquisa em Educação Matemática, de encontrar dinâmicas diferentes para o trabalho em sala de aula e, em particular, de se usar materiais manipulativos visando ao ensino-aprendizagem de matemática por alunos da Escola Básica.

Como já foi dito, nossa trajetória profissional foi marcada pelo trabalho, no cenário da Matemática Discreta com a referida metodologia, a partir das peças do Dominó. Essa vivência nos permitiu constatar o entusiasmo e o bom desempenho dos alunos na resolução de problemas matemáticos usando o citado material manipulativo.

Então, no Projeto 2, nosso propósito foi o de aproveitar nossa experiência docente, a reflexão sobre ela, bem como estudos e pesquisas sobre essa temática, oferecendo caminhos para orientar o trabalho de professores em sala de aula, em três níveis de escolaridade: Ensino Fundamental I (1º, 2º, 3º, 4º e 5º anos), Ensino

Fundamental II (6º, 7º, 8º e 9º anos) e Ensino Médio (1º, 2º e 3º anos) dentro de um currículo a ser desenvolvido.

Pontos de dificuldade para a realização desse Projeto 2 foram: encontrar atividades matemáticas, a partir das peças do Dominó, na literatura; encontrar atividades que atendessem aos três níveis de escolaridade e, principalmente, que contemplassem conceitos matemáticos possíveis de serem (re)construídos através delas. Posta a questão - que matemática posso trabalhar a partir desse problema? - os problemas encontrados na literatura não satisfaziam às nossas expectativas, pois não permitiam trabalhar matemática, ficando muitas vezes no jogo pelo jogo.

Assim, para o desenvolvimento do Projeto 2, houve necessidade da criação da maioria das atividades, nele apresentadas, visando a atender os três níveis de escolaridade em um currículo a ser cumprido.

Outro ponto de dificuldade, nessa segunda parte do trabalho, foi o de o conjunto universo considerado ser formado pelas 28 diferentes peças do Dominó, um material limitado que impõe restrições tanto para a criação como na resolução de problemas, pois não é possível a repetição de peças.

As atividades com o referido material, por nós apresentadas no Projeto 2, permitem introduzir ou reforçar os seguintes conceitos da Matemática Discreta: inclusão de classe, quantidades iguais e diferentes de elementos, igualdade, correspondência biunívoca, contagem, adição, soma, propriedade comutativa da adição, padrão, simetria, sequências ou sucessões, perímetro, números pares, números ímpares, paridade, frações equivalentes, progressão aritmética, congruência módulo m , quadrado de Perelmán, quadrados bem comportados e, outros conceitos a eles relacionados.

Esse tema permite pesquisas futuras, pois os pesquisadores da área podem criar outros problemas, conforme caminhos apresentados em nosso trabalho, inclusive com o uso de diferentes materiais manipulativos.

Nossa experiência docente, culminando com o desenvolvimento operacional desse Projeto 2, nos permite recomendar a Resolução de Problemas como ponto de partida para a atividade matemática e, procurando responder à questão (2) da nossa tese, mostraremos as razões dessa recomendação.

Na História da Matemática pode-se constatar a importância dos problemas como mola propulsora da atividade e da produção do conhecimento matemático.

Segundo Singh (1999) citado por Allevato (2005, p.38) “muitos resultados matemáticos não teriam sido obtidos não fosse a persistência e a criatividade de pessoas motivadas por uma dúvida, por um problema e pela ânsia de resolvê-lo”. Também, Gazire (1988) e Lester (1994, 1993) citados por Allevato (2005, p.38) dizem que “a Matemática se desenvolve pela prática da crítica e da dúvida e move-se a partir de conhecimentos anteriores, em busca de novos conhecimentos necessários à resolução de novos ou antigos mas não resolvidos problemas.”

Endossando as duas citações anteriores e o que diz Brasil (1964, p.22) “atentando para a história das ciências notamos que o problema antecede as descobertas, é o provocador dos estudos e o orientador das construções teóricas, acreditamos que não faz sentido, no ensino de matemática, inverter a ordem natural das coisas”, por isso em nosso trabalho usamos a Resolução de Problemas como ponto de partida da atividade matemática.

Segundo Stanic e Kilpatrick (1989), desde pelo menos Platão, acredita-se que, estudando matemática, melhora-se a capacidade de pensar, de raciocinar e de resolver problemas com que se confronta no mundo real. Os problemas eram um elemento do currículo de matemática que contribuiu, tal como todos os outros elementos, para o desenvolvimento do poder de raciocínio.

No Projeto 2, os problemas não foram propostos como uma atividade puramente técnica mas, sim, como uma ferramenta para pensar matematicamente, o que envolverá nossos estudantes. Nesse sentido, a resolução de problemas com uso da metodologia adotada contribuirá para o progresso na aprendizagem matemática dos estudantes, já que eles próprios terão a oportunidade de, com o apoio do professor, construir seu próprio conhecimento.

“Isso exige um clima educativo que favoreça a confiança de cada aluno em suas próprias capacidades de aprendizagem [...] um ambiente em que se tenha prazer com os desafios e com a própria atividade intelectual”. (VILA, CALLEJO, 2006, p. 29)

No nosso trabalho consideramos que “a Matemática deve ser trabalhada através da Resolução de Problemas, ou seja, que tarefas envolvendo problemas ou atividades sejam um veículo pelo qual um currículo deva ser desenvolvido. A

aprendizagem será uma consequência do processo de Resolução de Problemas”. (ONUCHIC, ALLEVATO, 2005, p.221)

Outro fato a ser destacado é que “o ambiente de aprendizagem de uma sala de aula baseada em problemas dá um cenário natural para os alunos apresentarem variadas soluções ao seu grupo ou à classe toda e aprenderem matemática através de interações sociais, negociações significativas e de compreensão compartilhada”. (CAI, 2003, p. 243)

Em nosso entender o professor é o elemento chave no trabalho, em sala de aula, com a referida metodologia e concordamos com Hermínio (2008) sobre o fato de que para que “essa metodologia de trabalho tenha bons resultados, é necessário que haja uma melhor formação do professor, já que esse bom resultado depende muito de um preparo prévio das aulas e de uma reflexão sobre os objetivos que se pretende alcançar durante a aula”.

Como já foi mencionado, no texto desta tese, Van de Walle (2001) destaca um ponto importante dessa metodologia que é o seu potencial avaliativo. Para ele, essa atividade é uma fonte segura de valiosas informações que permitem ao professor, entre outras coisas, planejar as aulas seguintes e ajudar os estudantes, individualmente, a avaliarem seu progresso.

E, ainda, como foi dito por Bransford, Brown e Cocking (2007, p. 44) “as avaliações contínuas permitem que o professor possa compreender as ideias preconcebidas dos estudantes, perceba em que ponto estão no caminho que os leva do raciocínio informal para o formal e planeje sua instrução de acordo com isso”. Segundo Nunes (2010, p.94) esse tipo de avaliação ajuda tanto o professor como o aluno na monitoração do progresso.

Desse modo, considerando nossa vivência e, também, o que nos dizem os autores citados, recomendamos a avaliação, como vista acima, no desenvolvimento das atividades propostas no Projeto 2.

À luz desses fatos é que a questão (2) de nossa tese é respondida e fica evidente de que forma a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas contribui, no trabalho em sala de aula, para a construção de conceitos, de conteúdos e de procedimentos matemáticos em diferentes séries da Educação Básica.

Este relatório de pesquisa está sendo deixado para julgamento e possível uso de educadores e pesquisadores interessados em desenvolver suas atividades, a partir das peças do Dominó, no cenário da Matemática Discreta. Como nele apontamos caminhos novos a serem trilhados na busca de possíveis descobertas, fica nossa torcida para que, também, outros possam imprimir sua trajetória nessa direção. É muito gratificante!

Como disse Villarreal (1999, p.372) “é sempre maior o trabalho que fica a ser feito do que aquele que foi realizado.”

REFERÊNCIAS

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o computador à resolução de problemas: análise de uma experiência**, 2005. Tese (Doutorado em Educação Matemática) UNESP-Rio Claro.

ALLEVATO, N.S.G.; ONUCHIC, L.R. Teaching mathematics in the classroom through problem solving. In: **Research and Development in Problem Solving in Mathematics Education**, ICME, México, 2008, p. 59-70.

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e decodificação de problemas**, 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). UNESP-Rio Claro.

BARALDI, I. **Um pouco de história dos problemas... e da resolução de problemas**, PGEM, UNESP: Rio Claro/SP, 2º sem. 1994.

BOGART, K.P. The Roles of Finite and Discrete Mathematics in College and High School Mathematics. In: Kenney, M.J.; Hirsch, C.R. **Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12**: 1991, Yearbook. NCTM, p. 78-86, 1991.

BOYD, A. B. **Discrete mathematics topics in the secondary school curriculum**, 2002. In partial fulfillment of the requirements for the degree of *Master of Science*. In Department of Mathematics. The Graduate Faculty of the Louisiana State University and Agricultural and Mechanical College.

BRANSFORD, J.D.; BROWN, A.L.; COCKING, R.R.(orgs.) **Como as pessoas aprendem: cérebro, mente, experiência e escola**. Tradução de Carlos David Szlak. São Paulo: Senac, 2007.

BRASIL, L. A. S. **Estudo Dirigido de Matemática no Ginásio**. São Paulo: Fundo de Cultura, 1964. 98p.

BRASIL, Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Matemática. v.2. Brasília: MEC/SEB, 2006.

BRASIL, Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática: Ensino Médio. Brasília: MEC/SEMT, 1999.

BRASIL, Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática: Ensino Médio (PCN+). Brasília: MEC/SEMT, 2002.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto e Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática: Ensino de primeira à quarta série. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto e Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática: Ensino de quinta à oitava séries. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p.

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio**. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEF, 2006. v.2, 135 p.

CAI, J. What Research tells us about Teaching Mathematics through Problem Solving In: LESTER, F.; CHARLES, R. **Teaching Mathematics through Problem Solving: prekindergarten – grade 6**. Reston: NCTM, p.241-253, 2003.

CALIFORNIA STATE BOARD OF EDUCATION. **Mathematics Framework for California Public Schools**. Sacramento: State Printing, 1985.

CALIFORNIA STATE BOARD OF EDUCATION. **Mathematics Framework for California Public Schools**. Sacramento: State Printing, 1992.

CARDOSO, L. F. **Dicionário de Matemática**. Rio de Janeiro: Expressão e Cultura, 2001.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 12 ed. São Paulo: Editora Ática, 2000. 176p.

DOSSEY, J.A. The Math for Our Time. In: Kenney, M.J.; Hirsch, C.R. **Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12**: 1991, Yearbook. NCTM, p. 1-9, 1991.

ENGLISH, L. LESH, R. FENNEWALD, T. **Future Directions and Perspectives for Problem Solving Research and Curriculum Development**. Artigo apresentado, em 2008, no ICME 11- México.

GARDINER, A.D. A Cautionary Note. In: Kenney, M.J.; Hirsch, C.R. **Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12**: 1991, Yearbook. NCTM, p.10-17, 1991.

GRAHAM, C.Z. Strengthening a k-8 Mathematics Program with Discrete Mathematics. In: Kenney, M.J.; Hirsch, C.R. **Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12**: 1991, Yearbook. NCTM, p.18-29, 1991.

GRANDE ENCICLOPÉDIA LAROUSSE CULTURAL. São Paulo: Nova Cultural Ltda, 1998. v.8, 17.

GRANDE ENCICLOPÉDIA PORTUGUESA E BRASILEIRA. Lisboa/Rio de Janeiro: Editorial Enciclopédia Limitada. v. XVIII.

HART, E.W. Discrete Mathematics: An Exciting and Necessary Addition to the Secondary School Curriculum. In: Kenney, M.J.; Hirsch, C.R. **Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12**: 1991, Yearbook. NCTM, p.67-77, 1991.

HERMINIO, P.H. **Matemática financeira – um enfoque da resolução de problemas como metodologia de ensino e aprendizagem**, 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) UNESP-Rio Claro.

- HOLLIDAY, R. L. Graph Theory in the High School Curriculum. In: Kenney, M.J.; Hirsch, C.R. **Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12**: 1991, Yearbook. NCTM, p.87-95, 1991.
- HOUAISS, A. VILLAR, M. S. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.
- HUAMAN HUANCA, R.R. **A Resolução de Problemas no processo ensino-aprendizagem e avaliação de matemática na e além da sala de aula**, 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). UNESP-Rio Claro.
- IRVIN, B. B. **Dominoes in Action! Problem-Solving Activities** Grades 3-6. U.S.A: Learning Resources, Inc, 1995.
- KENNEY, M.J.; HIRSCH, C.R. **Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12**: Yearbook. NCTM, 1991.
- KORDENSKI, B. A. **The Moscow Puzzles**. Trad. de *Matematicheskaja Smekalka* de 1907, N.Y.: Dover, 1992.
- KRULIK, S. REYS, R. E. **A resolução de problemas na matemática escolar**. Tradução de Hygino H. Domingues, Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.
- LAMBDIN, D.V. Benefits of Teaching through Problem Solving In: LESTER, F.; CHARLES, R. **Teaching Mathematics through Problem Solving: prekindergarten – grade 6**. Reston: NCTM, p.3-13, 2003.
- MACEDO, L. de., PETTY, A. L. S., PASSOS, N. C. **Quatro cores, senha e dominó: Oficina de jogos em uma perspectiva construtivista e psicopedagógica**. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1997.
- MARINCEK, V. Algumas contribuições da didática da Matemática: a resolução de problemas e o papel do professor. In: MARINCEK, V. (coord.) **Aprender Matemática resolvendo problemas**. Porto Alegre: Artmed, p.13 -17, 2001.
- MENINO, F. S. BARBOSA, R. M. **Novo sete quadrados**, Interciência: Ciências Exatas. Catanduva-SP, ano 4, n 2, p.59-63, 2004.
- MENINO, F. S. BARBOSA, R. M. Um recurso lúdico na resolução de problemas para a aprendizagem de sucessões. In: **Anais do VII EPEM – USP**, 2004, p. 160.
- MENINO, F. S. BARBOSA, R. M. **Um recurso lúdico na resolução de problemas para a aprendizagem de sucessões**. Disponível em: < www.unifafibe.com.br/19042010094930.pdf>. Acesso em: 09 ago. 2010.
- MENINO, F. S. BARBOSA, R. M. **Uma seleção de atividades lúdicas usando dominós**. **Revista de Educação Matemática**, SBEM-SP. São Paulo, ano 8, n 6-7, p.15-21, 2001-2002.

- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980's**. Reston: NCTM, 1980.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics**. Reston: Library of Congress Cataloguing, 1989.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Navigating through Discrete Mathematics/Grades 6-12**. Reston, VA: 2007.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston: Library of Congress Cataloguing, 2000.
- NATIONAL RESEARCH COUNCIL. **Everybody counts**: a report to the Nation on the future of mathematics education. Washington: National Academy Press, 1989.
- NUNES, C. B. **O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática**, 2010. Tese (Doutorado em Educação Matemática) UNESP-Rio Claro.
- ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.(Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: Editora UNESP,1999. cap.12, p.199-220.
- ONUCHIC, L. R., ALLEVATO, N. S. G. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas – Aritmética, Álgebra e Geometria. In: **Anais da Primeira Escola de Inverno de Educação Matemática de Santa Maria - UFSM**, 2008, p.1-7.
- ONUCHIC, L.R.; ALLEVATO, N.S.G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. 2^a ed. In: BICUDO, M. A.; BORBA, M. (orgs) **Educação Matemática – pesquisa em movimento**, São Paulo: Cortez, p.213-231, 2005.
- ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro (SP), v 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.
- PERELMÁN, Y. I. **Problemas y experimentos recreativos**. 2^a ed. Tradução do russo por Antonio Molina García. Moscú: Ed Mir, 1983.
- PÉREZ, L.C.; CABRERA, C.R. **Curso especial Geometria y resolucion de problemas**. In: XIV RELME, Panamá, 2000. p.117-124.
- PINTO, A. V. **Ciência e existência: problemas filosóficos da pesquisa científica**. 2 ed. São Paulo: Paz e Terra, 1979.

- POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2 ed, 1994. 196p.
- POLYA, G. **How to Solve It**. Princeton: Princeton University Press, 1945.
- POLYA, G. **Mathematical discovery: on understanding, learning and teaching problem solving**. USA: Library of Congress Catalog , vol.1, 1962 e v.2, 1965.
- RICHARDSON, K. **Developing number concepts using unifix cubes**. USA: Addison Wesley, 1984.
- RIVERRA-MARRERO, O. **The Place of Discrete Mathematics in the School Curriculum: An Analysis of Preservice Teachers' Perceptions of the Integration of Discrete Mathematics into Secondary Level Courses**, 2007. In partial fulfillment of the requirements for the degree of *Doctor of Philosophy in Mathematics*. The Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University.
- RODRIGUES, V. **Resolução de problemas como estratégia para incentivar e desenvolver a criatividade dos alunos na prática educativa matemática**, 1992. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) UNESP-Rio Claro.
- ROMBERG, T. A. Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa. Tradução: ONUCHIC, L.; BOERO, M.L. In: **BOLEMA - Boletim de Educação Matemática**. Rio Claro: UNESP, n.27, p.93-139, 2007.
- ROMBERG, T. A. Perspectives on Scholarship and Research Methods. In: Grouws, D. A.(ed.) **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**, p.49-64. NCTM, New York: Simon & Schuster, 1992.
- SAINTE-LAGUÉ, A. **Avec des nombres et des lignes**. troisième édition (première: 1924) Paris: Librairie Vuibert, 1946. p. 257-276.
- SANTOS, A. R. **Metodologia científica: a construção do conhecimento**. 7 ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2007.
- SANTOS, M. C. Algumas concepções sobre o ensino-aprendizagem de matemática. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo. v.9, n.12, p.11-15, 2002.
- SANTOS, V. M. P. **Avaliação de aprendizagem e raciocínio em Matemática: métodos alternativos**. Rio de Janeiro: UFRJ, 1997.
- SÃO PAULO, Secretaria de Educação. **Revista São Paulo faz escola**. Edição especial da proposta curricular. Matemática: Ensino Fundamental. São Paulo: SEE, 2008.
- SÃO PAULO, Secretaria de Educação. **Revista São Paulo faz escola**. Edição especial da proposta curricular. Matemática: Ensino Médio. São Paulo: SEE, 2008.
- SÃO PAULO, Secretaria de Educação. **Proposta Curricular Matemática – Ensino Fundamental – Ciclo II e Ensino Médio**. São Paulo: SEE, 2008.

SÃO PAULO, Secretaria de Educação. Coordenadoria de Estudos Normas Pedagógicas. **Proposta Curricular para o ensino de Matemática**: ensino fundamental, 5 ed. São Paulo: SE/CENP, 1997.

SÃO PAULO, Secretaria de Educação. Coordenadoria de Estudos Normas Pedagógicas. **Proposta Curricular para o ensino de Matemática**: 1º grau, 4 ed. São Paulo: SE/CENP, 1991.

SÃO PAULO, Secretaria de Educação. Coordenadoria de Estudos Normas Pedagógicas. **Proposta Curricular para o ensino de Matemática**: 1º grau, 3 ed., São Paulo: SE/CENP, 1988.

SÃO PAULO, Secretaria de Educação. Coordenadoria de Estudos Normas Pedagógicas. **Proposta Curricular para o ensino de Matemática**: 2º grau, 2 ed., São Paulo: SE/CENP, 1989.

SÃO PAULO, Secretaria de Educação. Coordenadoria de Estudos Normas Pedagógicas. **Subsídios para a implementação da proposta curricular de Matemática para o 2º grau**. São Paulo: SE/CENP/CECISP, 1980.

SÃO PAULO, Secretaria de Educação. Coordenadoria de Estudos Normas Pedagógicas. **Subsídios para a implementação da Proposta Curricular para o ensino de Matemática: 2º grau**, 2 ed., São Paulo: SE/CENP, 1989.

SCHROEDER, T.L., LESTER Jr., F.K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving, TRAFTON, P.R., SHULTE, A.P. (Ed.) **New Directions for Elementary School Mathematics**. National Council of Teachers of Mathematics, 1989. (Year Book).

SILVA, A. F. KODAMA, E. M. Y. **Dominós**. Publicação na página da pró-reitoria de graduação. São José do Rio Preto: UNESP, 1997. Disponível em: <<http://www.mat.ibilce.unesp.br/nucleo/nucleo.htm>>. Acesso em: 17 jul. 2010.

SOUZA, A. C. P. **Análise combinatória no ensino médio apoiada na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas**, 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) UNESP-Rio Claro.

SPITZER, H. F. **The Teaching of Arithmetic**. Cambridge, Massachusetts: The Riverside Press, 1948 – 1961.

STANICK, G.M.A. KILPATRICK, J. Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. In: CHARLES, R.I; SILVER, E.A. (Eds.) **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving**: Research Agenda for Mathematics Education, vol.3, Lawrence Erlbaum Associates. National Council of Teachers of Mathematics, 1989, p.1-22.

VALE, I.; BARBOSA, A (Org.). **Padrões - múltiplas perspectivas e contextos em Educação Matemática**. Viana do Castelo: FCT, 2009.

- VALE, I.; PIMENTEL, T. Resolução de problemas In: PALHARES, P. **Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico**. Lisboa: Lidel, p.6-51, 2004.
- VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics**. 4^a ed. New York: Longman, 2001.
- VAN DE WALLE, J. A. Teaching Through Problem Solving. In: VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally**. 4^a edição. New York: Longman, 2001. p.40-61.
- VILA, A.; CALLEJO, M. L. Modificação de crenças: proposta de intervenção educativa. In: VILA, A.; CALLEJO **Matemática para aprender a pensar: O papel das crenças na resolução de problemas**. Tradução Ernani Rosa. São Paulo: ARTMED S.A., 2006. p.127-182.
- WAGNER, D. R. We Have a Problem Here: $5 + 20 = 45$. **Mathematics Teacher**, Reston, v.96, n.9, p.612-616. 2003.

ANEXOS

ANEXO A – Relação de alguns Cursos Ministrados envolvendo problemas matemáticos com o uso das peças do Dominó

ANEXO B – Outros Problemas Maiores: o Problema da Adição, o Problema do Trem, o Problema dos Anéis em Conexão, o Problema da Moldura Quadrada e o Novo Sete Quadrados

ANEXO C – Reportagem sobre a Solução Inédita para o Problema de Perelmán encontrada pela Profa. Carmem

ANEXO D – Somas Mágicas e suas respectivas Soluções

ANEXO E – Programa executado na plataforma MatLab para a resolução do Problema da Fernanda

ANEXO F – Vinte soluções do Desafio Máximo

ANEXO A

Relação de alguns Cursos Ministrados envolvendo problemas matemáticos com o uso das peças do Dominó

- 1) A Oficina **Jogos Matemáticos com Dominós**, no dia 22.09.2001, no CICLO DE OFICINAS PEDAGÓGICAS, organizado e coordenado pelo Prof. Dr. Ruy Madsen Barbosa no Departamento de Matemática da Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Catanduva-FAFICA. O Ciclo contou com a participação de professores das redes municipal e estadual da cidade e região, assim como, alunos de graduação dos Cursos de Matemática e Pedagogia, totalizando 72 participantes;
- 2) A Oficina **Utilizando Dominós como material pedagógico para o ensino de Matemática**, nos dias 09 e 10.10.2001, na IV SEMANA DE MATEMÁTICA, realizada pelo Departamento de Matemática da FAFICA/SP. Participaram da oficina alunos da graduação e professores da rede estadual e municipal de ensino, no total de 40 pessoas;
- 3) A Oficina **Atividades Educacionais com o Dominó**, no dia 14.11.2001, na III SEMANA DE MATEMÁTICA inserida no 1º FÓRUM DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS DO CENTRO UNIVERSITÁRIO DE RIO PRETO-UNIRP/SP. A Oficina teve como público alvo os alunos de graduação do Curso de Licenciatura em Matemática, totalizando 38 participantes;

- 4) O Workshop **Jogos de Perelmán**, nos dias 29 e 30.11.2001, na OFICCAP¹/Olímpia/SP. O evento contou, em particular, com a presença de alunos do ensino fundamental e médio da rede estadual de ensino, cujo número de participantes não foi possível identificar. Nesse local, os jogos foram dirigidos por um grupo de alunos do 1º ano do ensino médio da E.E. “Capitão Narciso Bertolino”, que foi previamente preparado pela professora²;
- 5) A Oficina **Frações**, em 15.06.2002, no Curso denominado ENSINO DE MATEMÁTICA NAS SÉRIES INICIAIS: REVENDO CONCEITOS, REFORMULANDO PRÁTICAS, do Convênio FAFICA-Catanduva-SP/Secretaria Municipal de Educação-Olímpia-SP. O Curso contou com a participação das professoras da primeira a quarta série do ensino fundamental da rede municipal de ensino de Olímpia, no total de 60 participantes. Na referida Oficina trabalhamos atividades de soma de frações utilizando Dominós;
- 6) O Mini-Curso **Atividades Educacionais com o Dominó**, de 06 a 27.06.2002, com carga horária de 8 h, realizado pelo Departamento de Matemática no Centro Universitário de Rio Preto-UNIRP/Campus III. Participaram do mini-curso os alunos de graduação do 1º ano do Curso de Licenciatura em Matemática, no total de 40 participantes;
- 7) A Oficina **Atividades com Dominós numéricos: desafios com frações e desafios de continuação de padrões**, no dia 25.10.2002, com carga horária de 4 h, realizada durante o II Seminário sobre Ensino & Pesquisa da Faculdade “AUXILIUM” de Filosofia, Ciências e Letras de Lins/SP, no total de 30 participantes;

¹Oficina Cultural do Capitão.

²No decorrer do ano de 2001 atuávamos como professora da Rede Estadual na Escola de Ensino Médio “Capitão Narciso Bertolino”, onde desenvolvemos atividades usando Dominós em sala de aula, com o 1º ano C do período da manhã e os 2ºs anos do noturno.

- 8) A Apresentação do trabalho **Aprendendo Geometria com Dominós de quadriláteros**, no dia 26.10.2002, no II Seminário sobre Ensino & Pesquisa da Faculdade “AUXILIUM” de Filosofia, Ciências e Letras de Lins/SP;
- 9) A disciplina de Pós-Graduação (*lato sensu*) em Educação Matemática: **Materiais pedagógicos e jogos na aprendizagem de matemática** e colaboração na disciplina **Resolução de problemas na aprendizagem de matemática**, em 2003, na FAFICA em Catanduva/SP;
- 10) O Curso **Atividades Lúdicas com Dominós**, no dia 15.05.2003, com carga horária de 4 h, na XXVII Semana Científica e Cultural da Física e Matemática da Faculdade de Ciências da Fundação Educacional de Barretos/SP;
- 11) Apresentação da Comunicação Oral **Dominós: um recurso lúdico na resolução de problemas para a aprendizagem de sucessões**, no dia 12.06.2004, no VII Encontro Paulista de Educação Matemática, realizado na Universidade de São Paulo/SP;
- 12) O Curso **Dominós: um recurso lúdico na resolução de problemas em matemática**, nos dias 15 e 16.07.2004, com carga horária de 8 h, do PROGRAMA DE FORMAÇÃO CONTINUADA, Teia do Saber, convênio da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo e Faculdades Unificadas da Fundação Educacional de Barretos - FEB. Participaram do Curso professores e coordenadores da rede estadual de ensino;
- 13) A Oficina **O uso de atividades lúdicas no ensino de matemática**, no dia 22.10.2005, com carga horária de 6 h, do PROGRAMA DE FORMAÇÃO CONTINUADA, Teia do Saber, convênio da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo e Faculdades Unificadas da Fundação Educacional de Barretos - FEB. Participaram do curso professores e coordenadores da rede estadual de ensino;

- 14)A Oficina **O uso de jogos com dominós no ensino de matemática**, no dia 20.06.2006, com carga horária de 4 h, convênio da Secretaria de Municipal da Educação e Faculdades Unificadas da Fundação Educacional de Barretos - FEB. Participaram do Curso professores, coordenadores e supervisores da rede municipal de ensino;
- 15)As oficinas **Dominós como frações, Multiplicações de Kordenski, Jogos de Pérelman** no ano de 2007, no Curso de Formação Continuada Matemática nas séries iniciais: revendo conceitos e reformulando práticas, convênio da Secretaria de Municipal da Educação e Pro-Reitoria de Pós-graduação e Pesquisa do UNIFEB em Barretos/SP. Participaram do Curso professores, coordenadores e supervisores da rede municipal de ensino;
- 16)A Oficina **O Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas com as peças do Dominó**, nos dias 13 e 20.10.2009, no GTERP da UNESP/Rio Claro. Participaram dessa Oficina os membros integrantes do GTERP;
- 17)A disciplina de Pós-Graduação (*lato sensu*) em Educação Matemática: **O Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas**, em outubro e novembro de 2009, com carga horária de 40 h, na UNISO - *Campus* Seminário em Sorocaba/SP.

ANEXO B

Outros Problemas Maiores: o Problema da Adição, o Problema do Trem, o Problema dos Anéis em Conexão, o Problema da Moldura Quadrada e o Novo Sete Quadrados.

7.2.4.3 O Problema da Adição³

7.2.4.3.1 Atividades envolvendo Adições

Nessas atividades efetuaremos adições com as peças do Dominó. Serão realizadas adições: usando 3 peças de Dominó, com duas parcelas e uma soma e com 4 peças de Dominó, com três parcelas e uma soma.

a) Usando 3 peças do Dominó

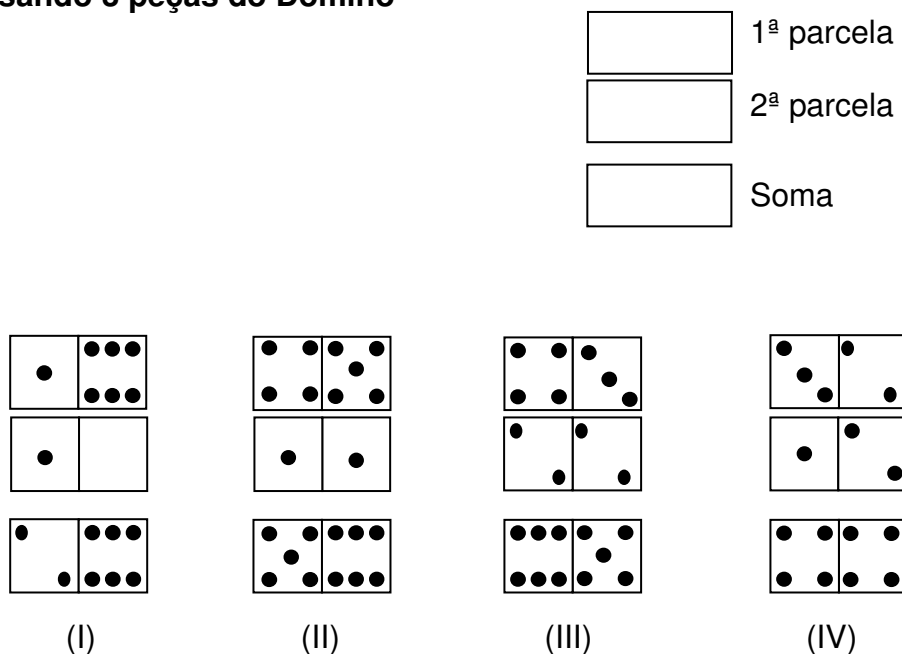


Figura 45 – Adições com 3 peças do Dominó

³As atividades, desse item 7.2.4.3, nos foram sugeridas, por contato telefônico, pelo Prof. Dr. Ruy Madsen Barbosa, respondendo ao nosso questionamento: a existência de problemas, com as 28 peças do Dominó, é possível somente com a operação multiplicação? Ele disse que eu deveria trabalhar com dezenas e ver a possibilidade da operação adição.

Temos as seguintes adições de dezenas, correspondentes em algarismos usuais, em: (I): $16+10 = 26$; (II): $45+11 = 56$; (III): $43+22 = 65$ e (IV): $32+12 = 44$

Observação: substituímos o traço horizontal que separa as parcelas da soma por um espaço maior.

b) Usando 4 peças do Dominó

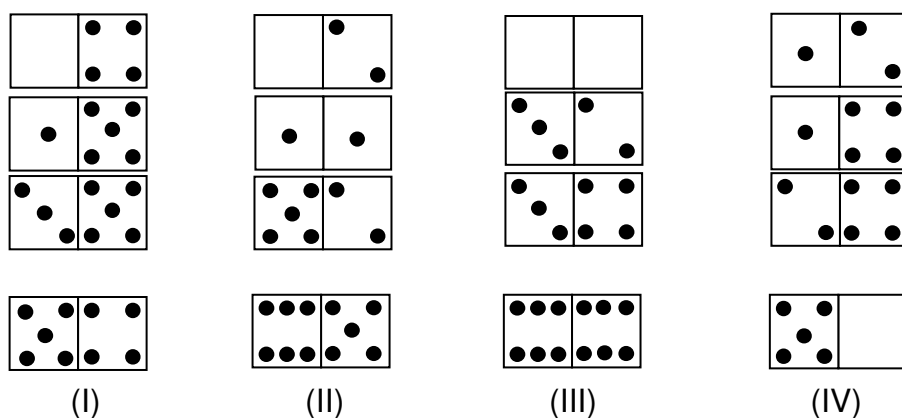


Figura 46 – Adições com 4 peças do Dominó

Temos as seguintes adições de dezenas, correspondentes em algarismos usuais, em: (I): $04+15+35 = 54$; (II): $02+11+52 = 65$; (III): $00+32+34 = 66$ e (IV): $12+14+24 = 50$.

Notas: a figura 20 exprime a solução da situação-problema enunciada em i:

i) com as 16 peças do Dominó: 0-0; 0-1; 1-1; 0-2; 1-2; 2-3; 1-4; 2-4; 3-4; 0-5; 1-5; 2-5; 3-5; 4-5; 5-6 e 6-6, construir 4 somas de 3 parcelas.

ii) outras situações- problema análogas podem ser preparadas.

c) Situação-problema análoga mas de maior dificuldade

Construir 6 somas de 3 parcelas-dezenas excluindo-se as 4 peças do Domimó: 1-1; 2-0; 3-1 e 3-3 mostradas abaixo.

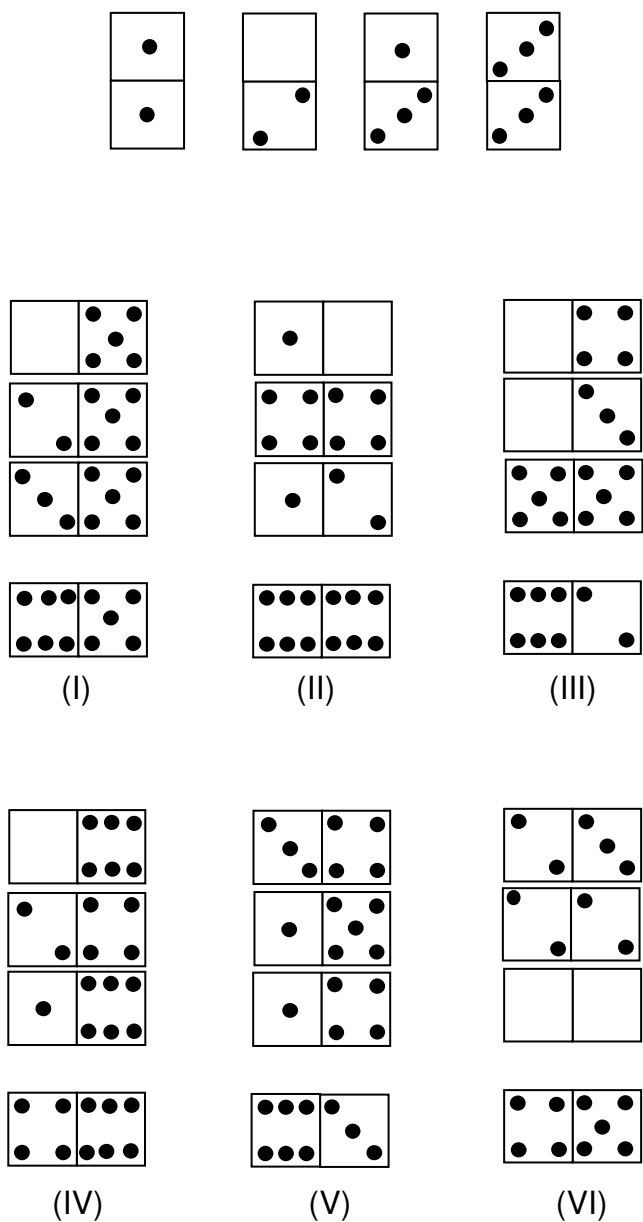


Figura 47 – Seis Adições com 4 peças do Dominó

7.2.4.3.2 O Problema da Adição

Usando todas as 28 peças do Jogo Dominó descobrir 7 adições de 4 peças do Dominó ($7 \times 4 = 28$); sendo cada adição de 3 parcelas, considerando-as, como já exposto, no sistema de numeração decimal (dezenas).

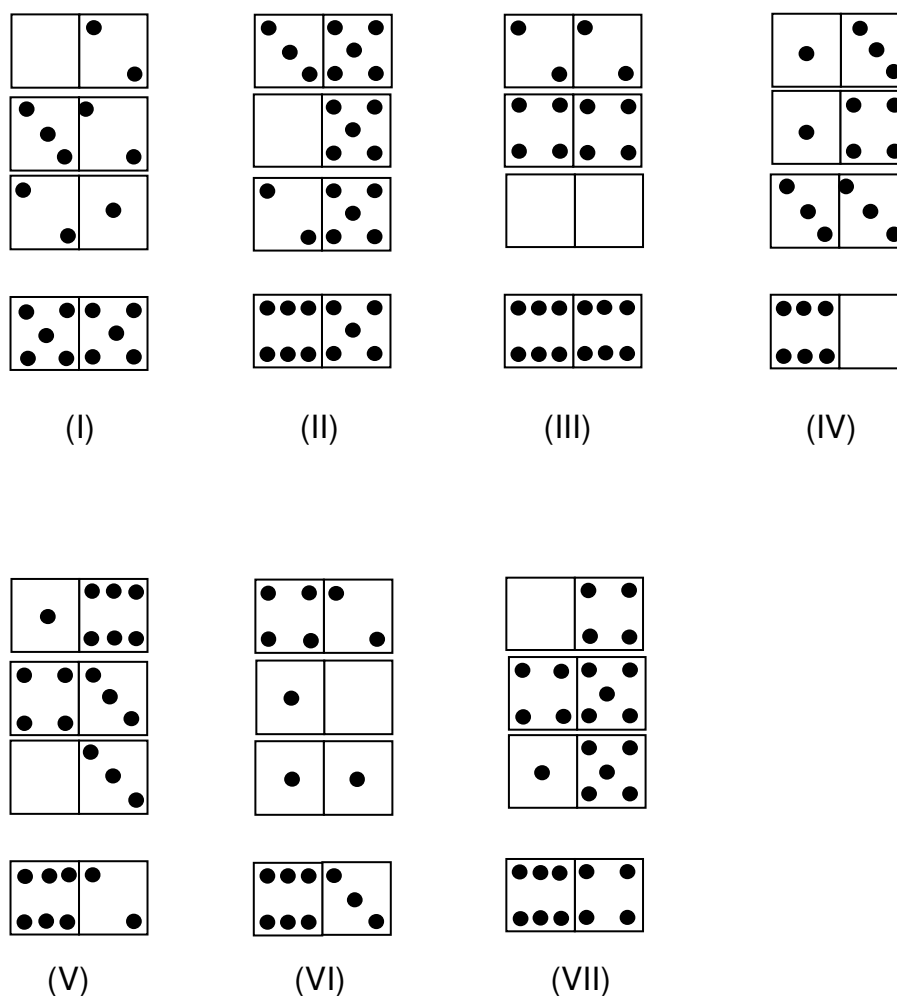


Figura 48 – Uma Solução para o Problema da Adição

Temos as seguintes adições de dezenas correspondentes em algarismos usuais em: (I): $02+32+21 = 55$; (II): $35+05+25 = 65$; (III): $22+44+00 = 66$; (IV): $13+14+33 = 60$; (V): $16+43+03 = 62$; (VI): $42+10+11 = 63$ e (VII): $04+45+15 = 64$.

Existiria outra solução?!

7.2.4.4 O Problema do Trem⁴

7.2.4.4.1 Atividades envolvendo Trens de dominós

Definimos *Trem de dominós com locomotiva*⁵ como uma sucessão de peças do Dominó representando os vagões e iniciando com uma outra peça representando a locomotiva. Essa peça com o maquinista ou com o maquinista mais o ajudante, portanto do tipo $1 \mid 0$; $1 \mid 1$ ou $2 \mid 0$.

O número de passageiros em cada vagão é a soma do número de bolinhas das partes de cada peça. De onde, o número total de passageiros do trem é dado pelo número de passageiros de todos vagões.

Salientamos que as brincadeiras com trens de dominós permitem várias aplicações interessantes; em várias delas é possível introduzir conceitos, por exemplo trabalhar com ordenações (3 vagões fornecem 6 maneiras de serem dispostos, e 4 vagões permitem 24 ordens diferentes, etc.); ou então trabalhar com número máximo e mínimo de passageiros.

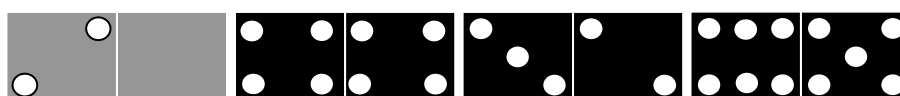


Figura 49 – Um Trem de dominós com 3 vagões

Na figura 49, temos um trem de 3 vagões e a locomotiva com maquinista e seu ajudante, com $8 + 5 + 11 = 24$ passageiros, totalizando 26 a bordo.

Algumas situações-problema:

- (1) Construir um trem de 4 vagões com o *maior* número possível de passageiros e uma locomotiva conduzida só pelo maquinista.

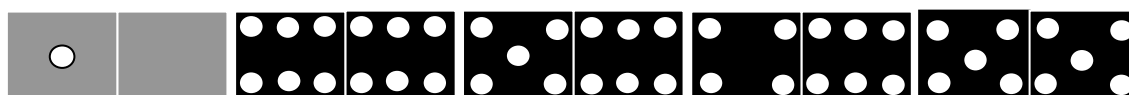


Figura 50 – Um Trem de dominós com 4 vagões

⁴O uso da palavra Trem nos foi inspirada pela leitura do livro *Dominoes in Action! Problem-Solving Activities* Grades 3-6, publicado em 1995, da autora Barbara Bando Irvin. Essas atividades, desse item 7.2.4.4, foram por nós criadas e desenvolvidas.

⁵Nesses problemas a inclusão dos termos trem e locomotiva tem como objetivo contextualizar, dar significado para estimular a imaginação dos alunos e, assim, motivá-los para aprendizagem. Mas, esses termos podem ser dispensados.

Nota: Observar que a ordem dos vagões não tem influência na resposta. Este questionamento poderá surgir em sala de aula e os alunos terão oportunidade de vivenciar a propriedade comutativa da adição. Uma variação possível desse problema é substituir em seu enunciado o termo “maior” por “menor” número de passageiros.

- (1) Construir 3 trens de 4 vagões, de modo que os trens devem ter 30 passageiros cada um. É permitido empregar cada peça uma única vez.

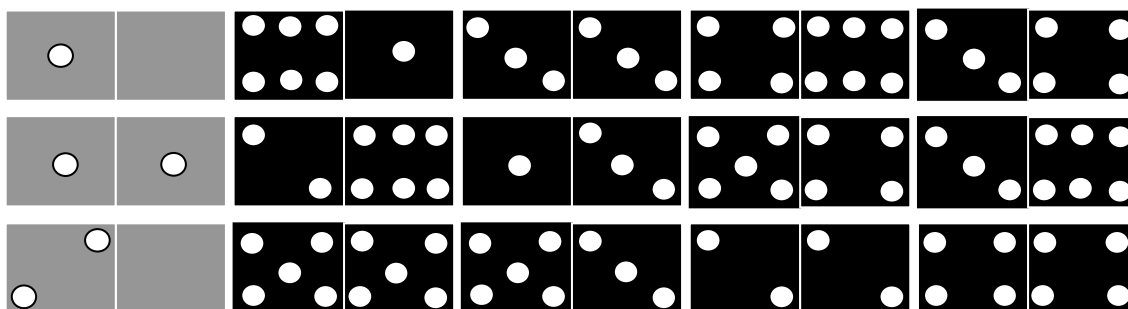


Figura 51 – Três Trens de dominós com 4 vagões

- (3) Construir um trem de 10 vagões; com o total de 63 passageiros.

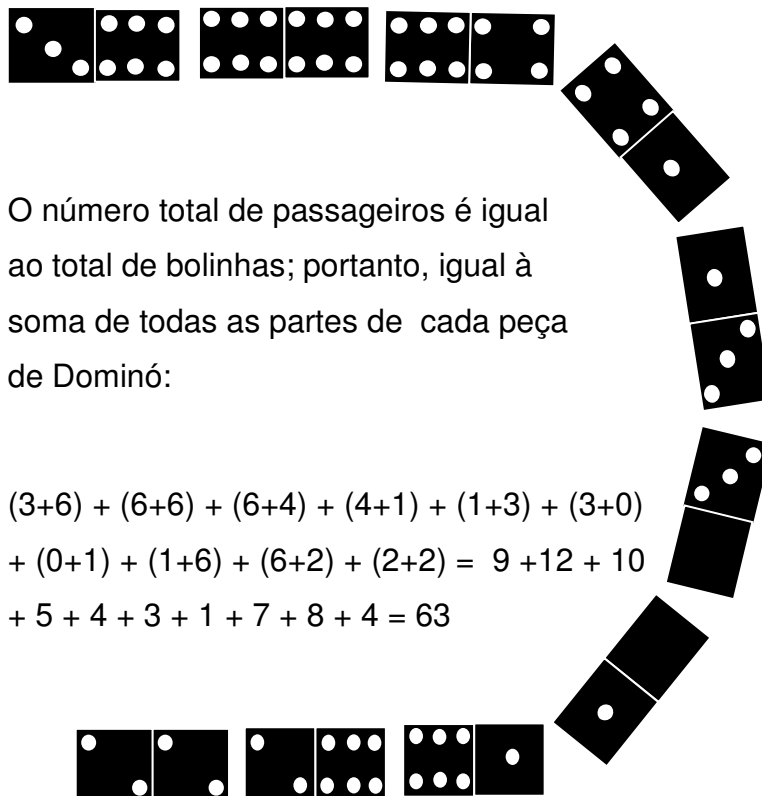


Figura 52 – Trem de dominós com 10 vagões e 63 passageiros

Como foi exposto na resolução (3), podemos aumentar as exigências nesse problema, por exemplo determinando que *a sucessão de dominós precisa ter cada par de dominós consecutivos (vizinhos) com as partes adjacentes conectadas iguais* (como no jogo Dominó tradicional).

Nota: Assim, a 2ª parte do 1ª peça do Dominó é 6, então 6 deve ser a 1ª parte da 2ª peça. Analogamente, teremos a próxima conexão com 6 e 6. Sucessivamente só podemos conectar duas peças do Dominó na sequência se as suas respectivas partes vizinhas forem iguais.

- (4) Construir um trem de apenas 4 vagões, conectados como no Jogo Dominó tradicional, com o primeiro vagão 3|5 e número de passageiros igual a 33.

7.2.4.4.2 O Problema do Trem

Usando as 28 peças do Dominó, construir 4 trens de 7 vagões empregando as conexões do Jogo Dominó usual, de tal forma que todos os trens possuam o mesmo número de passageiros (bolinhas).

Sabemos que o total de pontos (bolinhas) do Jogo Dominó é igual a 168; então cada trem deve ter $168 \div 4 = 42$ (bolinhas).

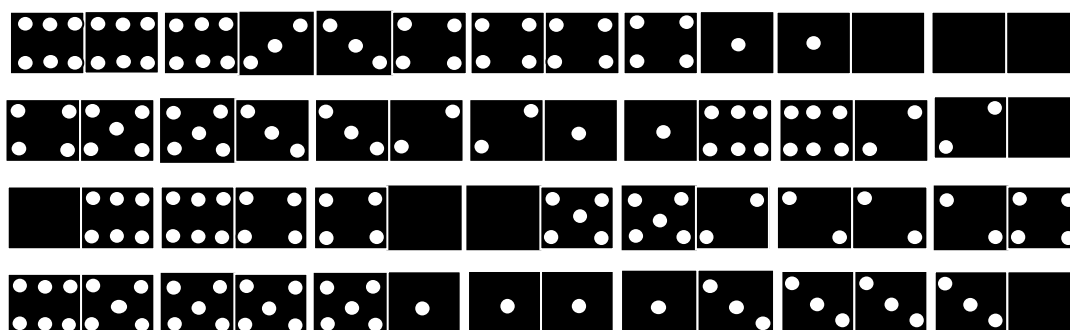


Figura 53 – Quatro Trens de dominós com 7 vagões

Existiriam outras solução?!

7.2.4.5 O Problema dos Anéis em Conexão

Usando as 28 peças do Dominó, construir 2 anéis circulares⁶ de 14 dominós empregando as conexões do Jogo Dominó usual; de tal forma que ambos possuam a mesma soma.

Desde que a soma de pontos (bolinhas) de todas as peças do Dominó é 168 concluimos que cada anel deve ter $168 \div 2 = 84$ bolinhas.

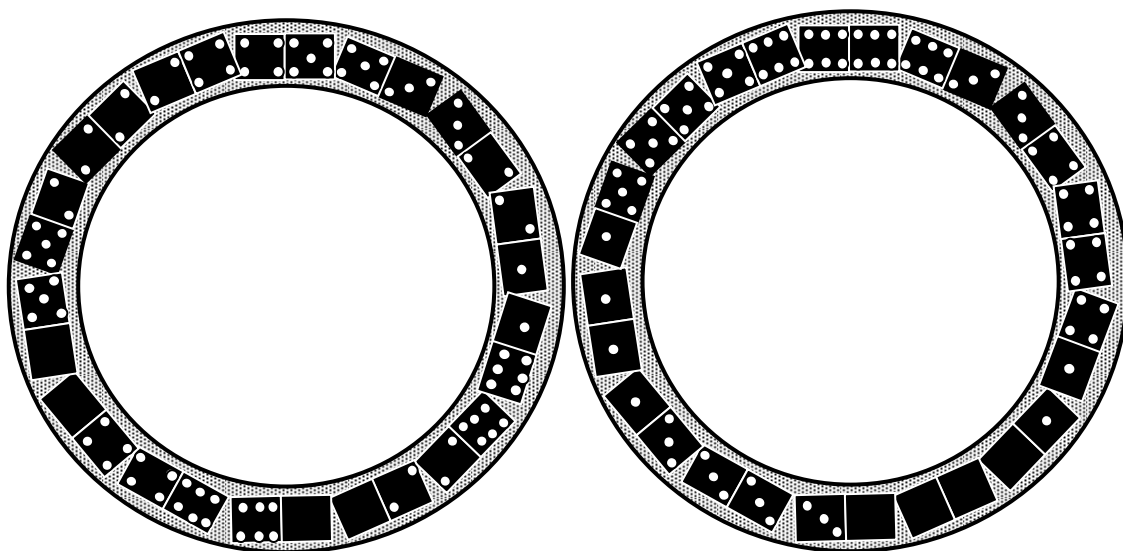


Figura 54 – Dois anéis de dominós

Não foi difícil descobrir a solução, pois examinando, atentamente, a solução dos 4 trens com 7 vagões com a conexão usual de igualdade, descobrimos que: (1) as pontas inicial e final do primeiro trem eram iguais respectivamente àquelas do quarto trem e (2) as pontas inicial e final do segundo trem eram iguais às do terceiro trem invertidas.

Conclusão: Era suficiente reuni-las conectando-as conforme os dois anéis circulares apresentados na figura 54.

⁶No caso da questão proposta ser de um só anel, com as 28 peças, então, *não haveria um problema*, pois bastaria conectarmos sucessivamente todas as peças conforme o usual a partir de qualquer peça do Dominó, que sempre voltaria a se conectar com a primeira fechando o anel circular. O único cuidado seria aquele de não esquecer de conectar as peças duplas.

7.2.4.6 O Problema da Moldura Quadrada

O Jogo de Dominó usual se desenvolve conectando as peças pelas partes iguais, nos dois sentidos, formando-se, então, figuras com formas variadas conforme a disposição determinada pelos participantes desse Jogo. E, ao se colocar todas as peças obtemos uma forma poligonal aberta com os extremos tendo as mesmas partes. Portanto, poderíamos transformá-la em poligonal fechada. Esse fato, nos inspirou a formar um quadrado usando todas as peças do referido Jogo.

7.2.4.6.1 Estudando a Disposição das Peças

Aparentemente a configuração seria simples desde que $28 \div 4 = 7$ peças em cada lado. Porém, ela então teria os cantos superiores (e os inferiores) conforme indicamos na figura 55.

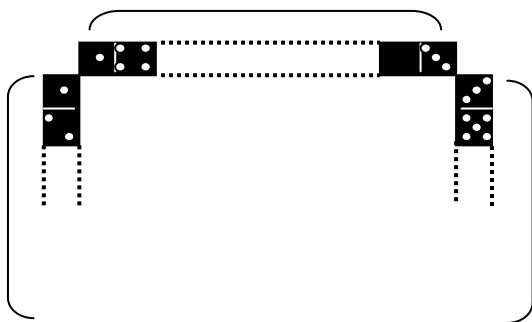


Figura 55 – Disposição I das peças do Dominó

Portanto, só interiormente teríamos um quadrado 7 peças x 7 peças. Para que exteriormente tenhamos também um quadrado empregamos a disposição nos cantos sugerida na figura 56.

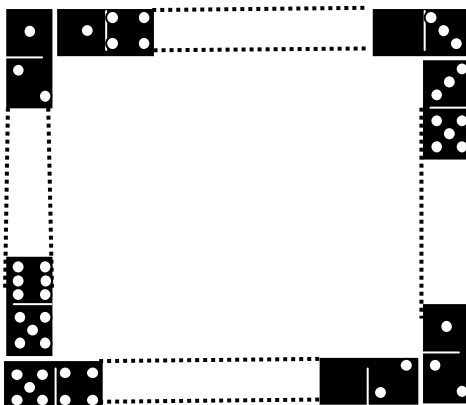


Figura 56 – Disposição II das peças do Dominó

Na figura 30 o quadrado exterior, que é a moldura desse quadrado, tem $7\frac{1}{2}$ peças em cada lado; e o quadrado interior tem $6\frac{1}{2}$ peças em cada lado.

Temos na verdade uma moldura quadrada com perímetro exterior $4 \times 7\frac{1}{2}$ partes = 4×15 partes = 60 partes; e perímetro interior igual $4 \times 6\frac{1}{2}$ partes = 4×13 partes = 52 partes.

7.2.4.6.2 O Problema da Moldura Quadrada

Construir um quadrado com todas as 28 peças do Dominó, usando as conexões usuais do Jogo Dominó tradicional.

Temos que todas as peças do Dominó devem ser empregadas e a soma de todos os seus pontos é 168.

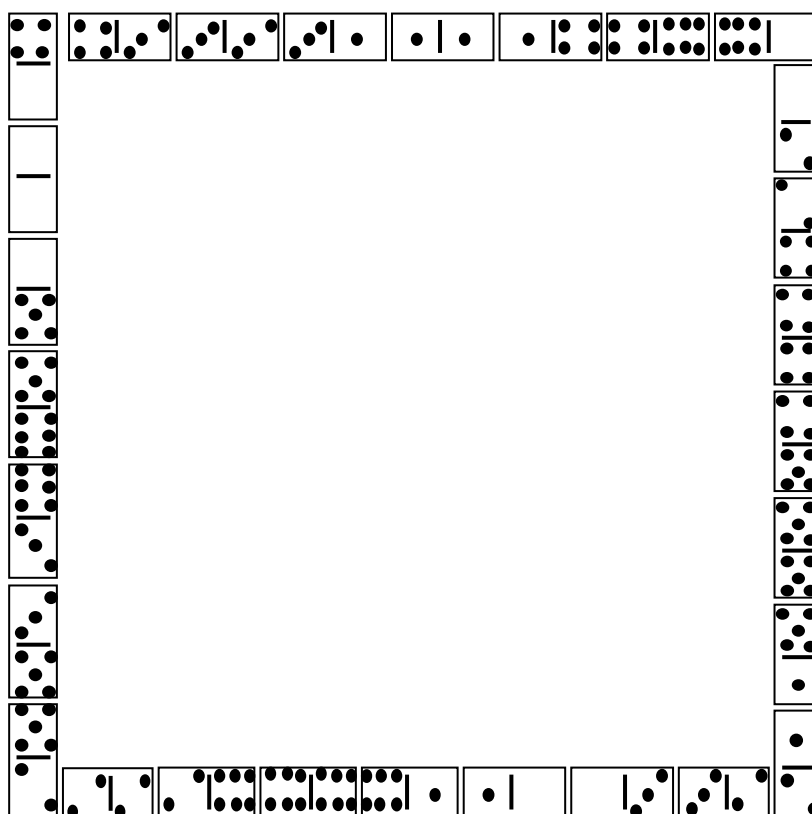


Figura 57 – Uma Moldura Quadrada com as 28 peças do Dominó

7.2.4.7 O Novo Sete Quadrados

À imagem e inspirados pelo Problema de Perelmán, Menino e Barbosa (2004) criaram um problema que denominaram *Novo Sete Quadrados*, este com exigência da conexão usual do Jogo Dominó tradicional, enunciado da seguinte maneira: *Empregando todas as 28 peças do Dominó, sem repetir, construir sete quadrados, cada um com quatro peças (vazio no centro) conectando as peças por partes com indicações numéricas iguais.*

É importante apresentar um quadrado para auxiliar na compreensão do problema, como o da figura 58:

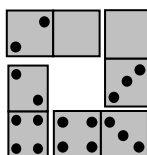


Figura 58 – Quadrado constituído conectando peças adjacentes com partes iguais

Para solucionar esse Problema, o resolvidor deverá formar sete quadrados, para isso, possivelmente, o método utilizado será o de *tentativa e erro*. Resolvendo-o dessa maneira, eventualmente, poderá encontrar solução. Como consequência de uma falta de estratégia elaborada, pode haver uma sobra de peças duplas, impossibilitando a descoberta de uma possível solução para o referido problema.

Desse modo, nesse momento, cabe interferência do professor. Mas, de acordo com Polya, “o professor deve auxiliar o aluno nem de mais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho. Complementa dizendo [...] e fazer uma pergunta ou indicar um passo que poderia ter ocorrido ao próprio estudante”.

Visando à resolução do Problema enunciado, sugerimos o seguinte roteiro de questionamentos:

- (1) Pode um quadrado ter duas peças duplas?

Uma explicação pode ser a seguinte: seja um quadrado com uma peça dupla, por exemplo a peça 5-5. A essa peça são conectadas duas peças, cada uma com uma parte igual às partes da peça dupla (por exemplo as peças 5-3 e 5-2). As outras partes serão necessariamente diferentes (no caso 3 e 2), uma vez que se fossem

iguais estaríamos repetindo peças. Sendo diferentes estas partes, então, a quarta peça não será dupla.

Conclusão os quadrados não podem ter duas peças duplas.

(2) Quantos quadrados podem ser construídos neste jogo?

Resposta: sete quadrados

(3) Quantas peças duplas possui o Jogo Dominó?

Resposta: sete peças

(3) Como deve ser cada quadrado desse jogo?

Resposta esperada: cada quadrado deve apresentar uma única peça dupla.

A reflexão sobre as respostas a esses questionamentos conduz a uma estratégia detalhada a seguir:

Fase inicial:

- Iniciamos construindo um quadrado com a peça dupla 6-6;
- Conectamos duas peças com partes 6;
- Conectamos a peça com partes iguais aos extremos das peças anteriores;

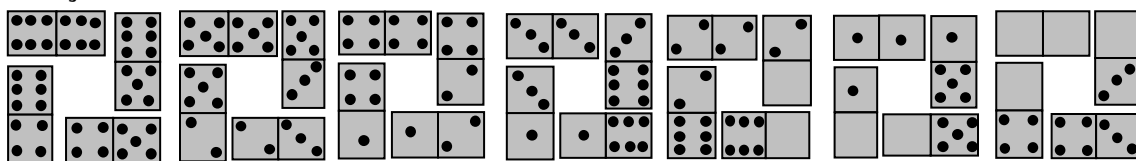
Continuação:

- Construimos o segundo quadrado com a peça dupla 5-5;
- Fazemos conexões análogas à fase anterior, porém empregando peças restantes;
- Continuamos assim sucessivamente;
- Duas possibilidades podem ocorrer:
 - ◆ Conseguimos ir até o final com o quadrado de peça dupla 0-0.
 - ◆ Não conseguimos ir até o final. Para completarmos algum quadrado não temos peças adequadas disponíveis. Então, voltamos para buscar a peça adequada (ou peças), o que obriga a substituição conveniente por outra peça (ou peças). Esse procedimento se repete.

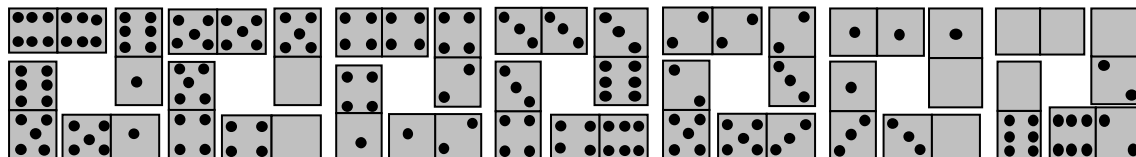
É importante a verificação da solução obtida, o que todo professor deve fazer juntamente com os estudantes. Recomendamos questionamentos sobre a existência de outras soluções, não limitando o trabalho discente a uma única solução.

Menino e Barbosa (2004, p.62-3) apresentam seis soluções, por eles descobertas, para o Novo Sete Quadrados:

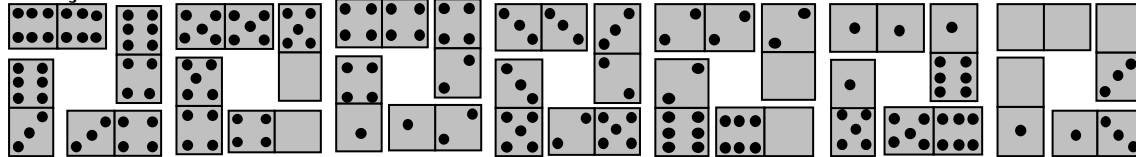
Solução 1



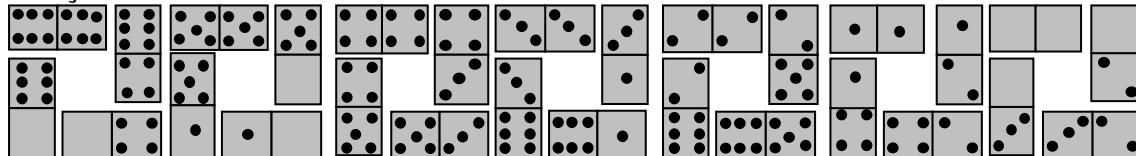
Solução 2



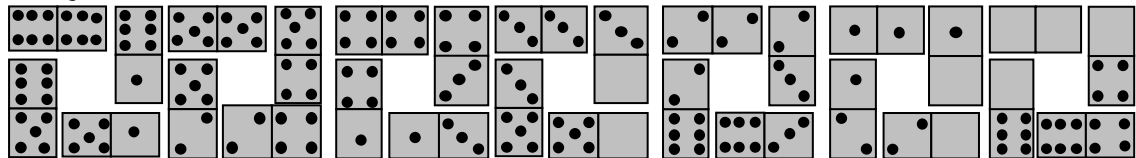
Solução 3



Solução 4



Solução 5



Solução 6

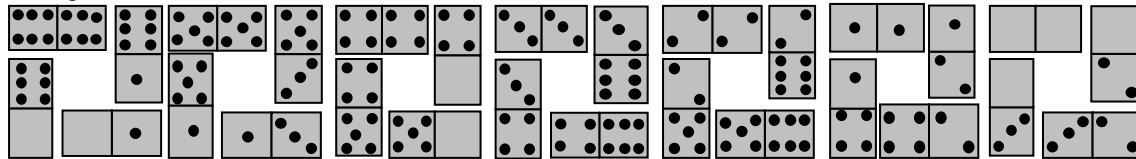


Figura 59 – Seis Soluções para o Novo Sete Quadrados

Existem, ainda, além dos problemas apresentados no item 7.2.4, outros Problemas Maiores, como o Problema de Pijowski.

ANEXO C

Reportagem sobre a Solução Inédita para o Problema de Perelmán encontrada pela Profa. Carmem



Notícias da FEB

TEIA DO SABER

SOLUÇÃO INÉDITA PARA O JOGO DOS SETE QUADRADOS OU PROBLEMA DE PERELMÁN

Barretos, 14 de setembro de 2004

Fonte: Rita de Souza / Webdesign: Setor de Informática

Durante a aula "Atividades educacionais com dominós", ministrada no dia 16 de julho de 2004, no Curso de Matemática II do Programa de Formação Continuada - Teia do Saber, a participante do curso Carmen Luisa Alves Palmeira, professora de matemática da E. E. Cel Almeida Pinto, realizou um feito surpreendente ao apresentar uma solução inédita para o famoso Problema de Perelmán.

Dentre os muitos jogos propostos pelo matemático russo Yakov Perelmán (1882-1942), encontra-se o jogo dos Sete Quadrados ou Problema de Perelmán. O desafio é construir sete quadrados com as 28 peças do dominó. A soma dos números em cada lado de um dado quadrado deve dar sempre o mesmo resultado. Vários jogos de Perelman com dominós podem ser encontrados no site www.geocities.com/problemasyexperimentos/cap23em.html#sol05 (em espanhol).

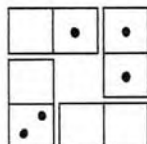


Quando criou o jogo, Perelmán apresentou apenas duas soluções para o problema. Na Revista de Educação Matemática da SBEM/SP (n. 6-7, 2001/2002, p.15-22) os autores Fernanda S. MENINO e Ruy M. BARBOSA descreveram as 9 soluções conhecidas até então para o Problema de Perelmán no artigo intitulado "Uma seleção de atividades lúdicas educacionais usando dominós". Segundo a Profa. Fernanda, professora da Teia do Saber, depois da solução inédita apresentada com brilhantismo pela Profa. Carmen, passam a ser conhecidas pelo menos 10 soluções distintas para o Problema de Perelmán.

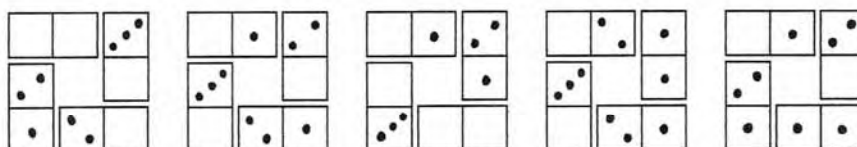
ANEXO D

Somam Mágicas e suas respectivas Soluções

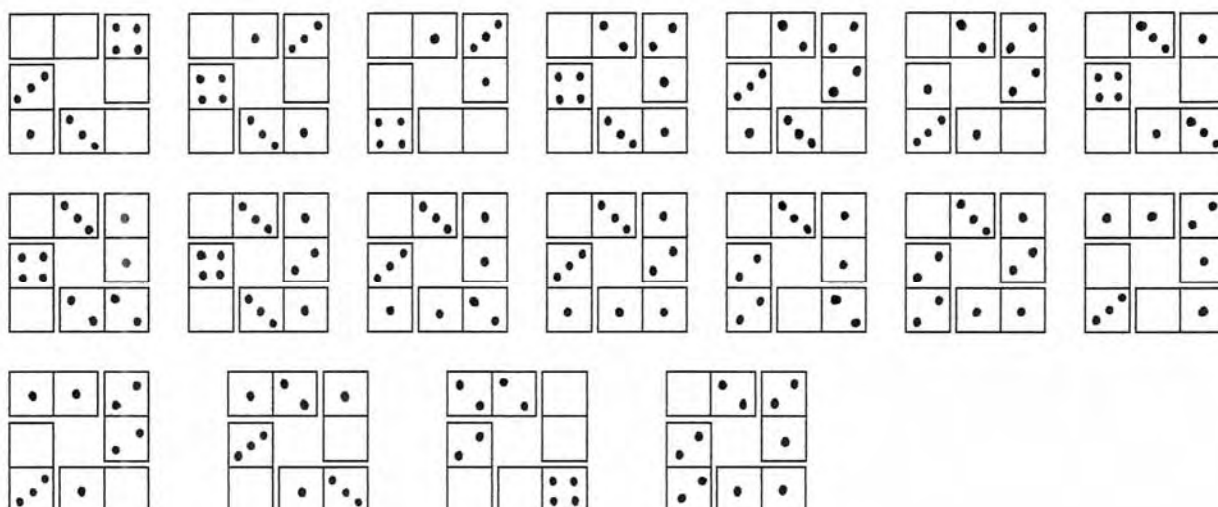
SOMA MÁGICA 2



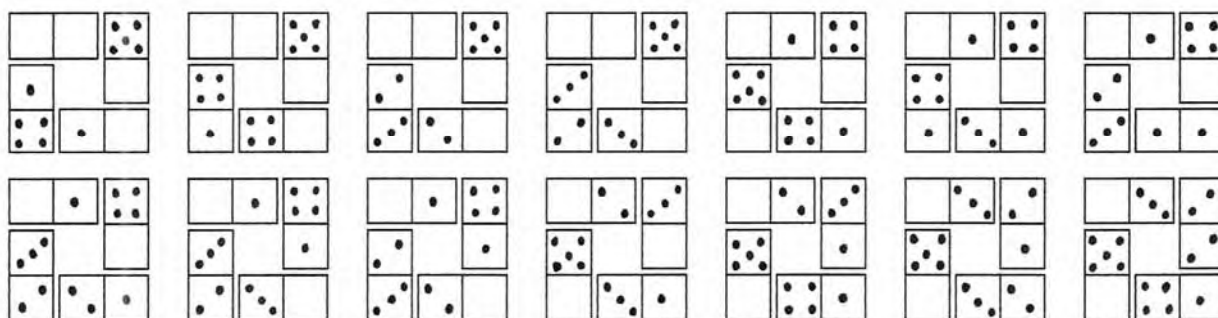
SOMA MÁGICA 3

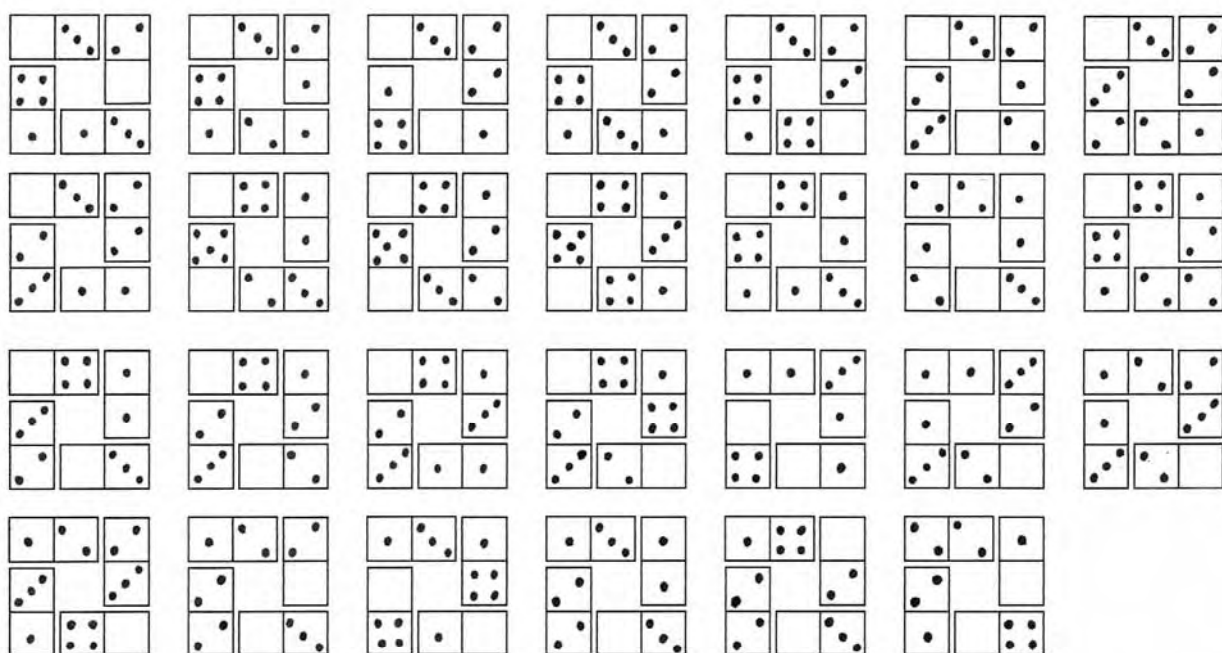


SOMA MÁGICA 4

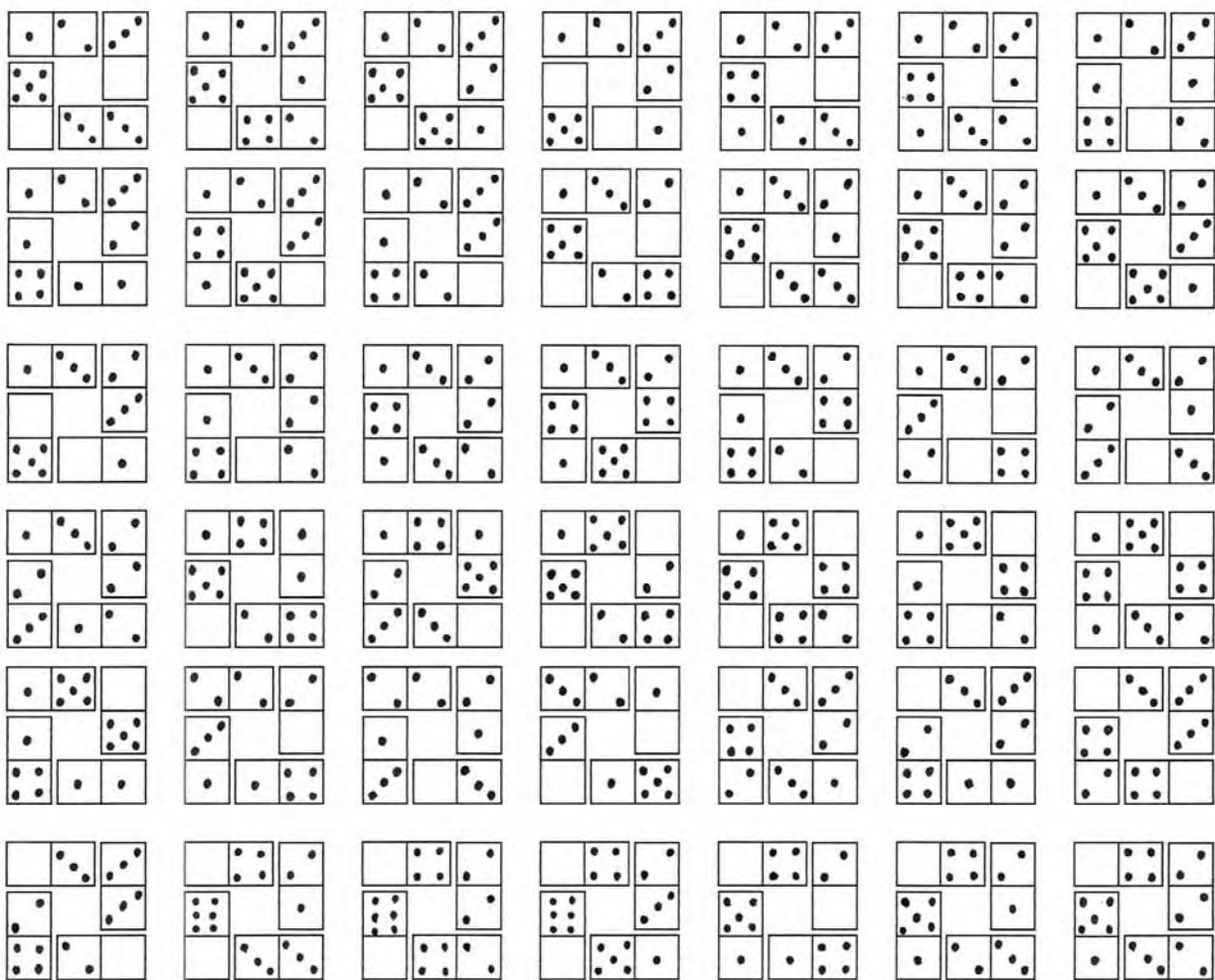


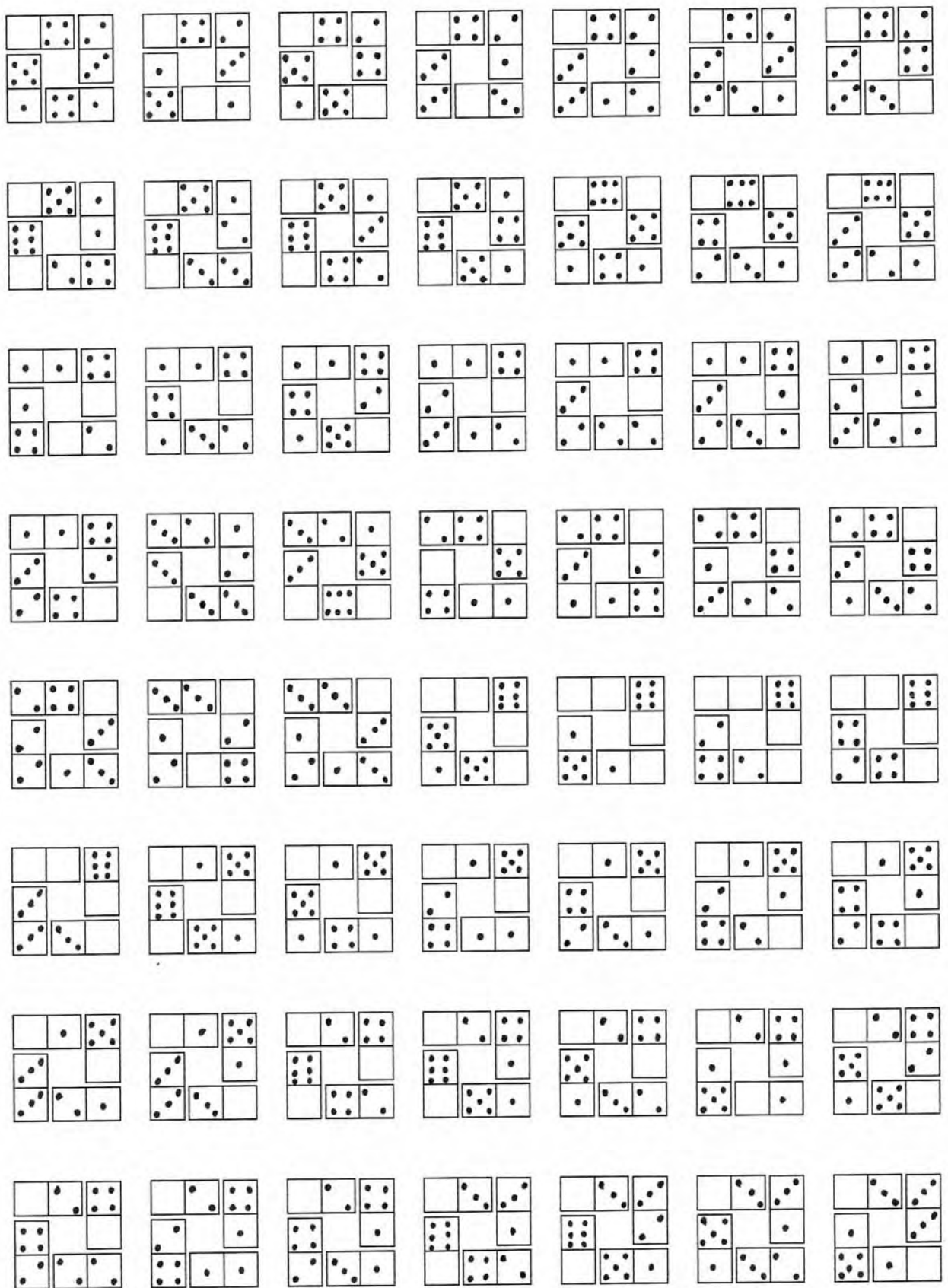
SOMA MÁGICA 5

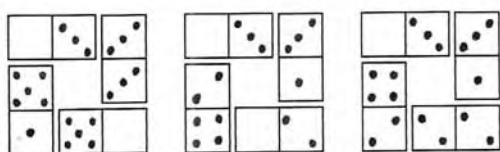




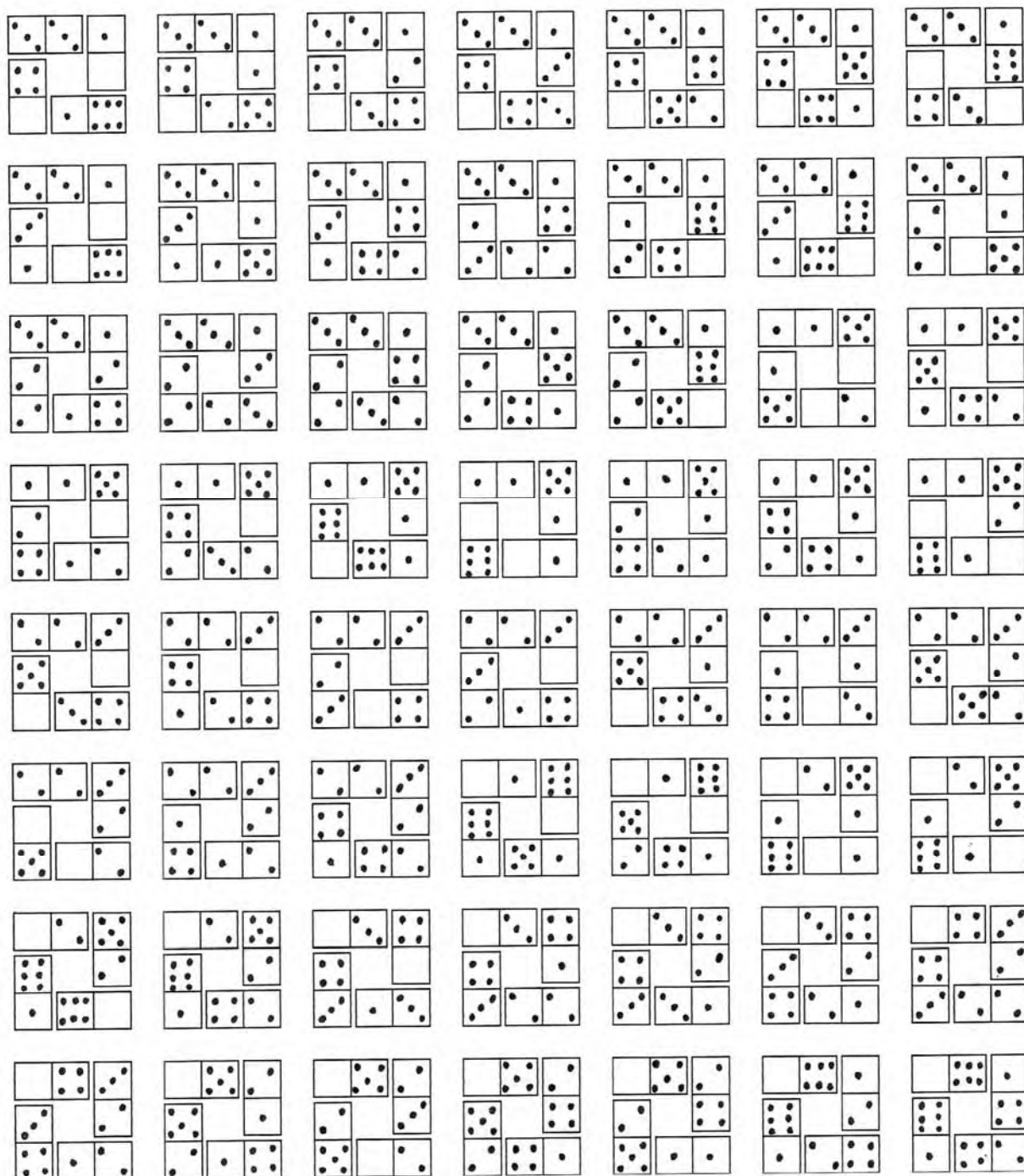
SOMA MÁGICA 6

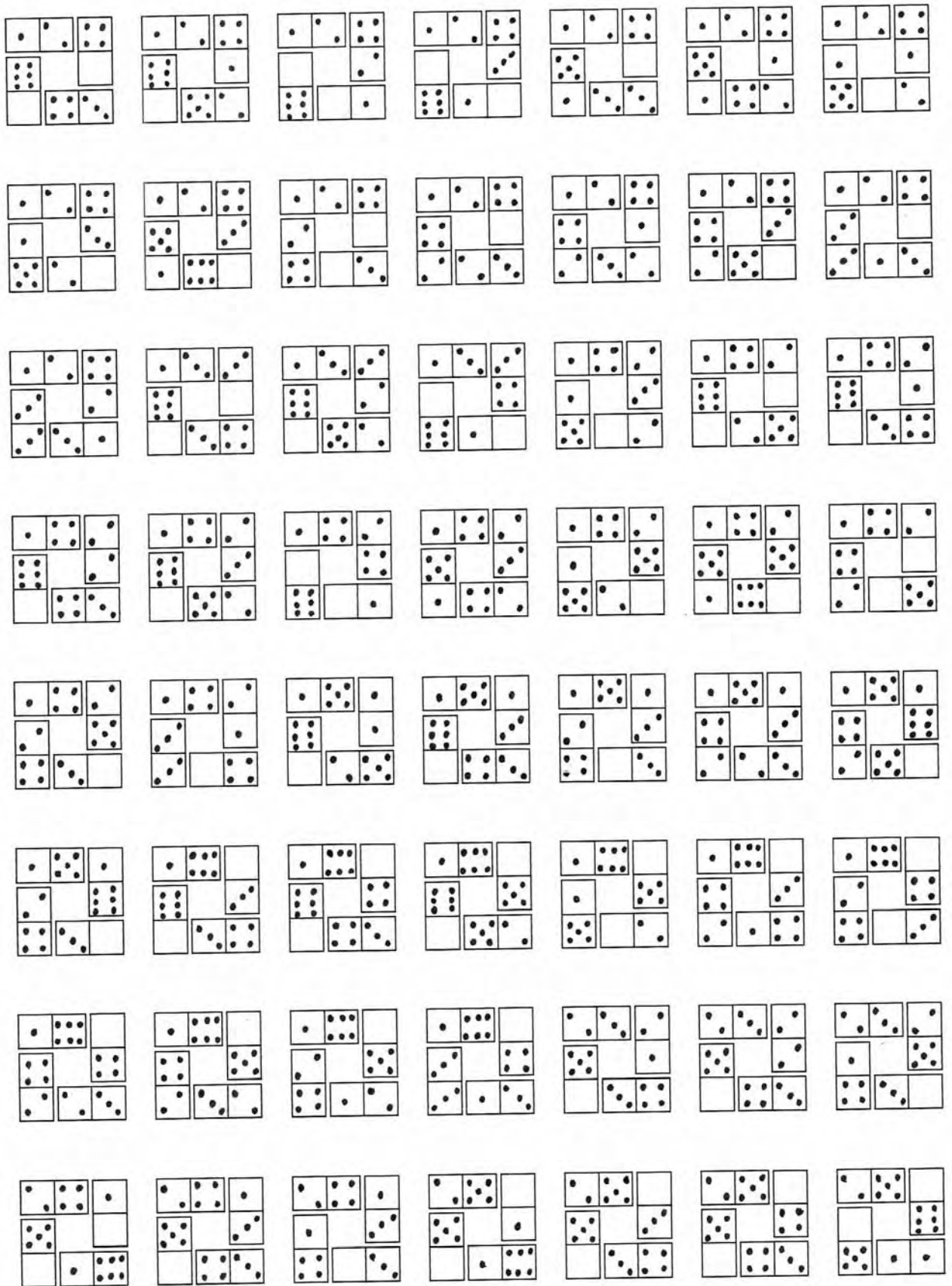


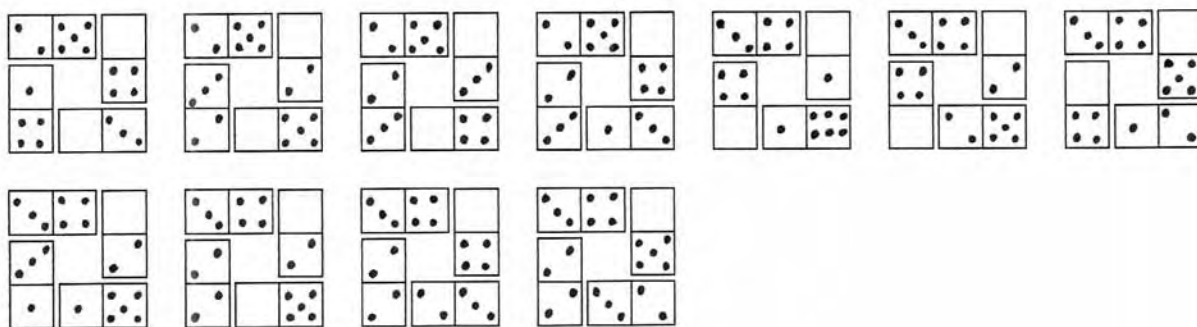




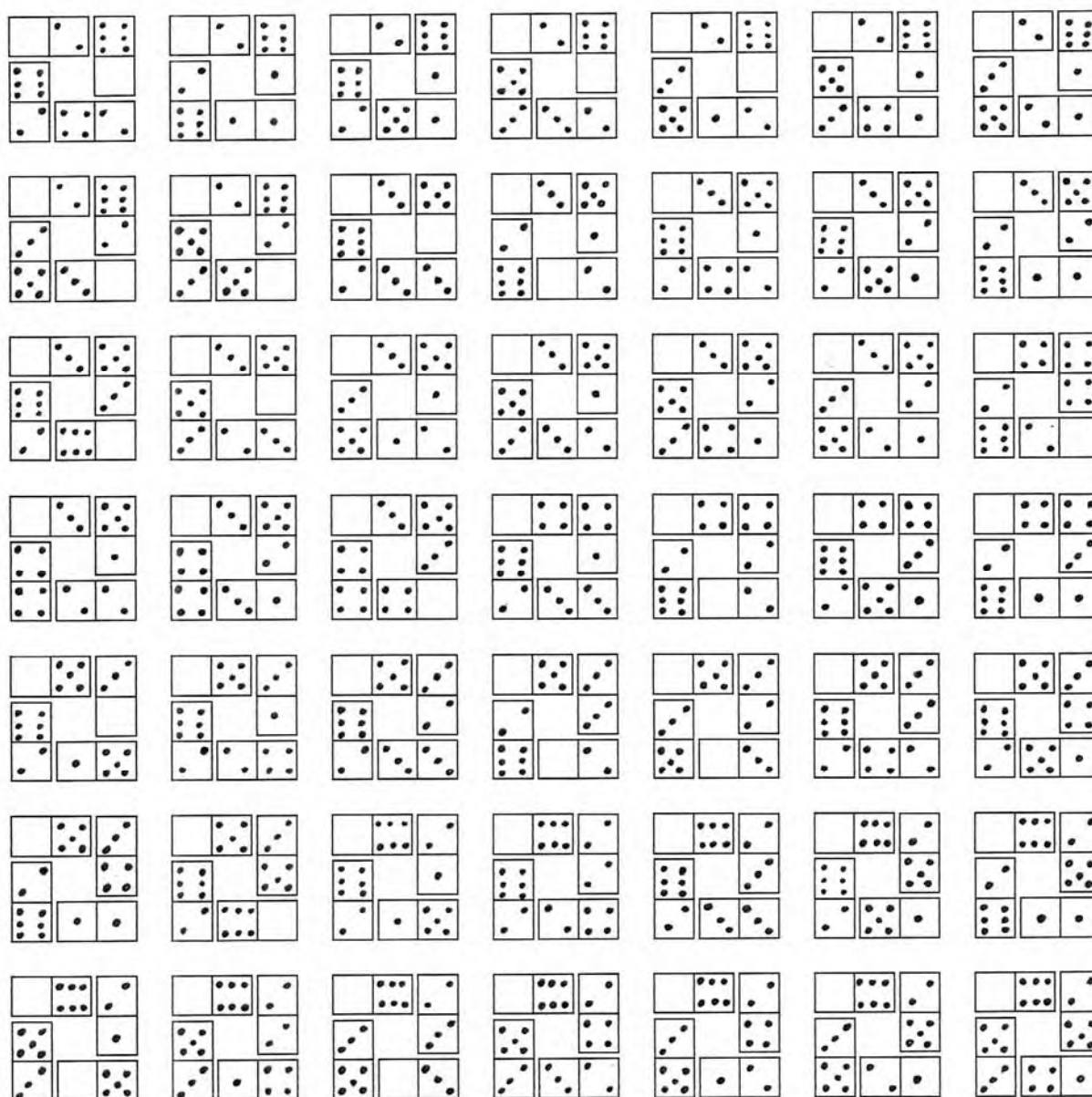
SOMA MÁGICA 7

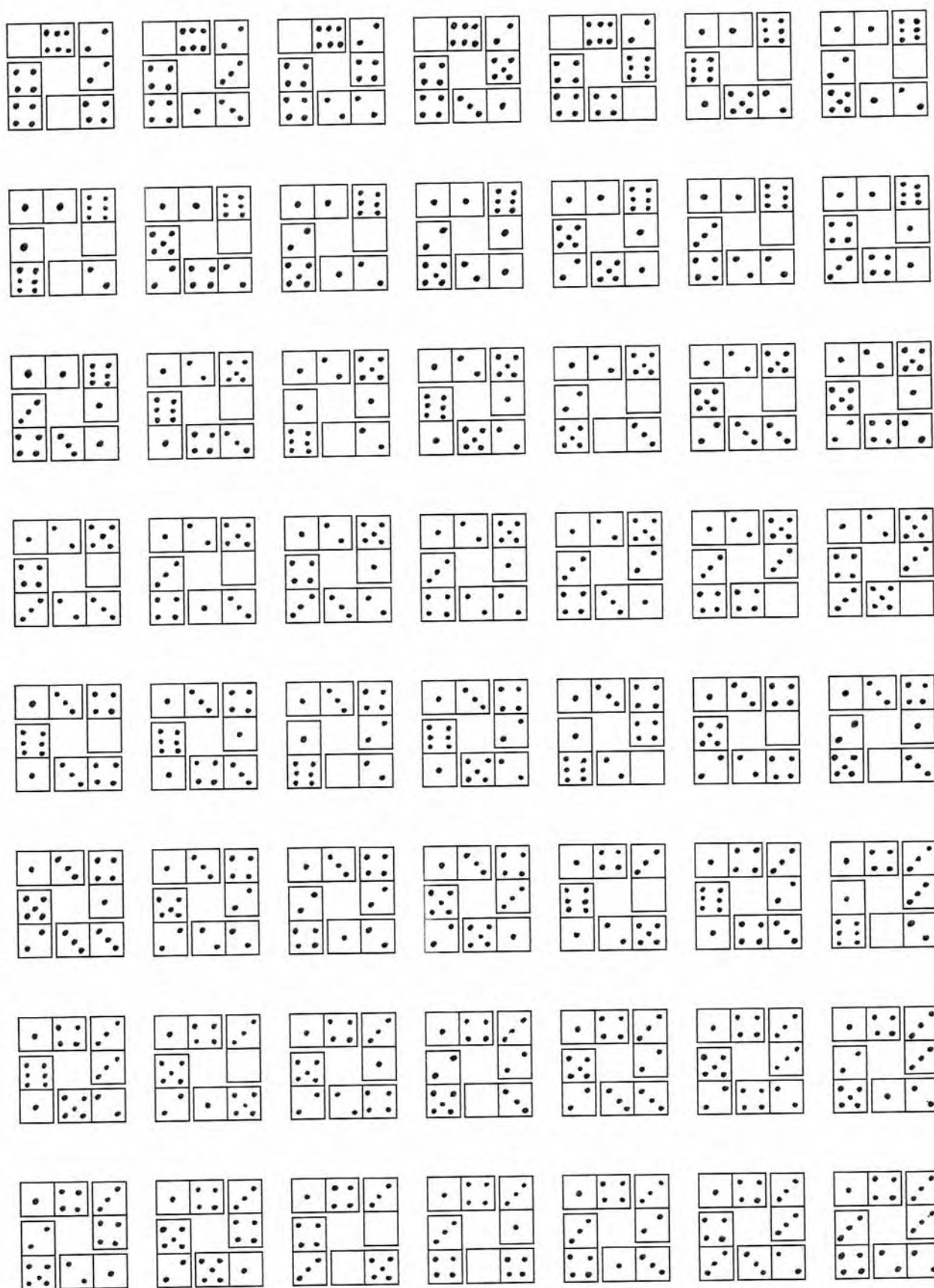


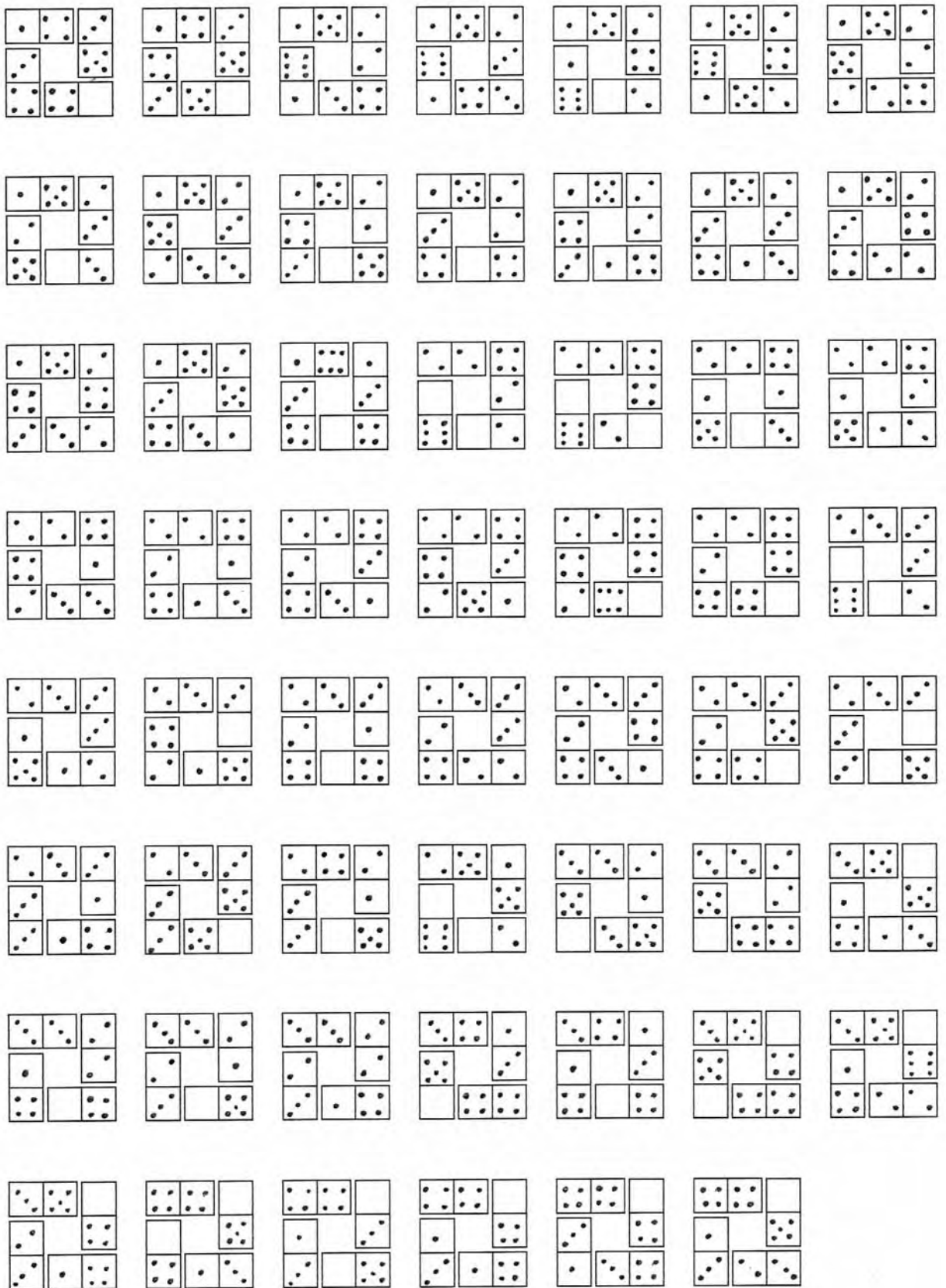




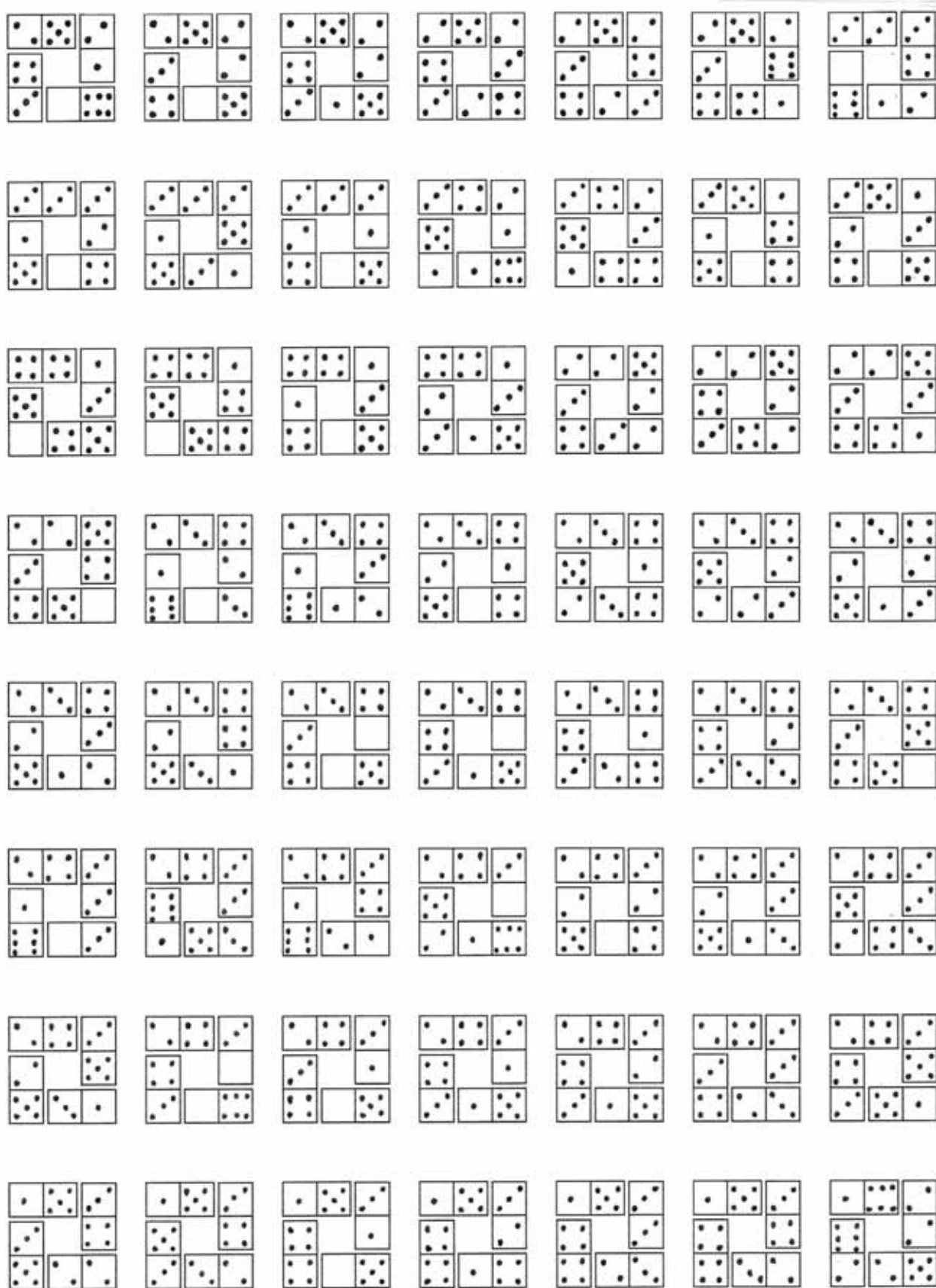
SOMA MÁGICA 8

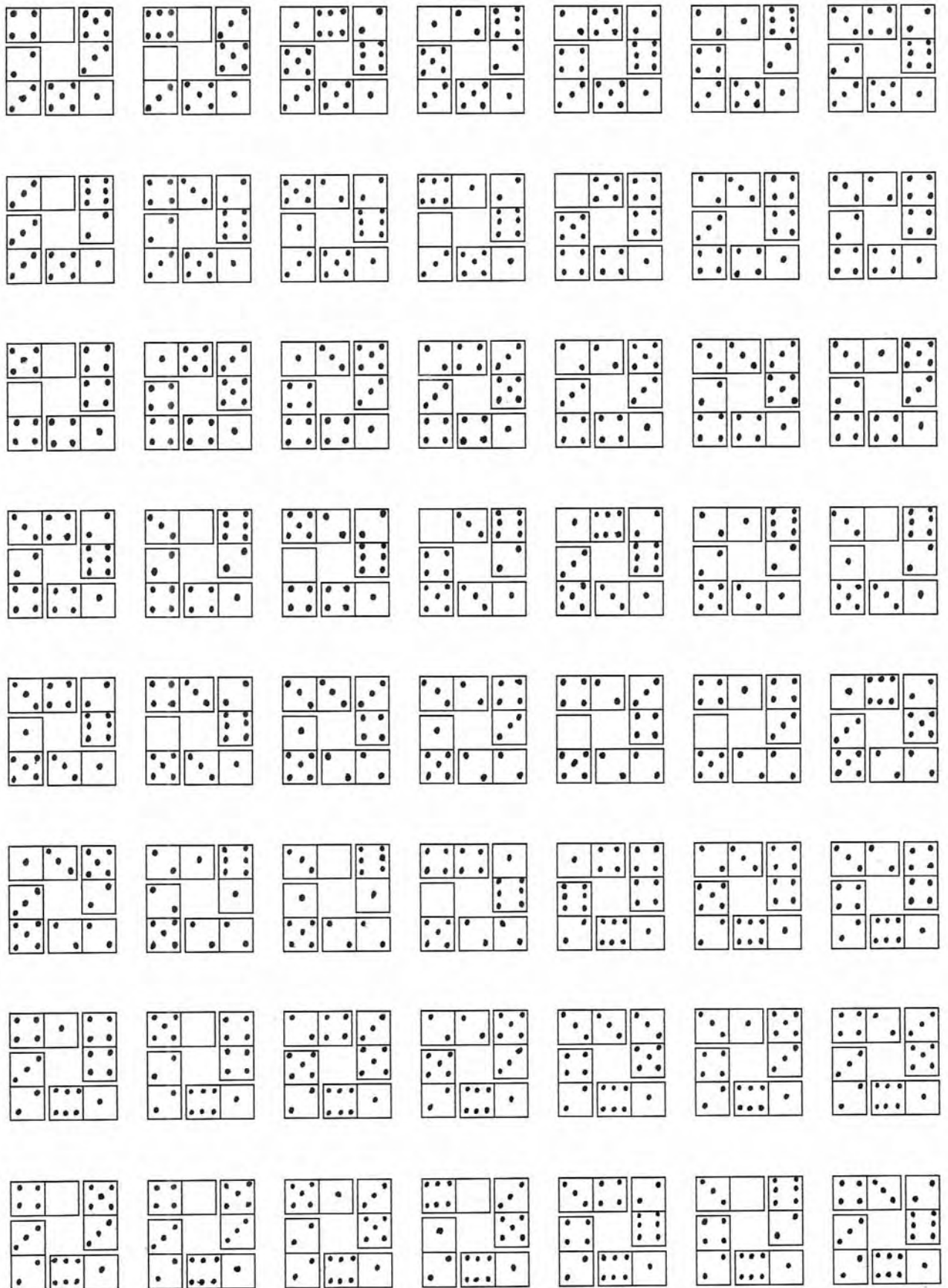


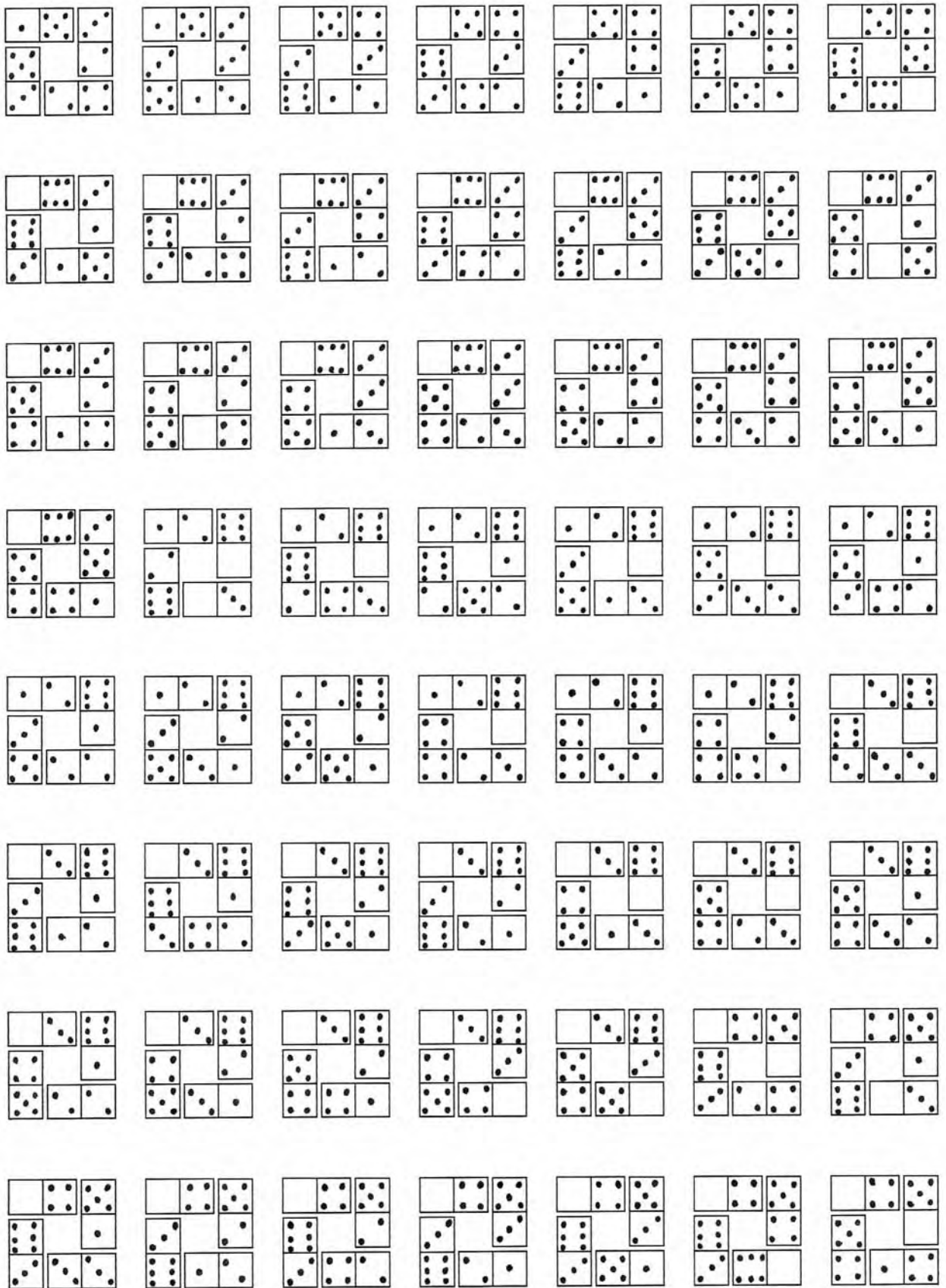


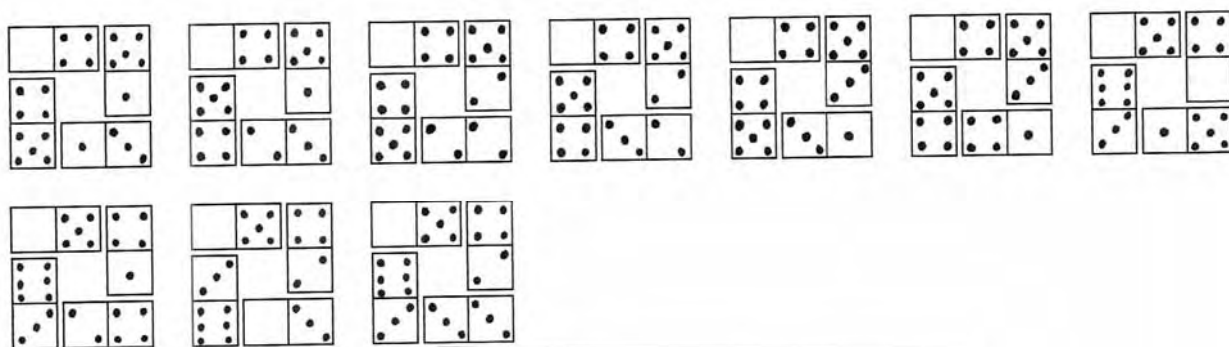


SOMA MÁGICA 9

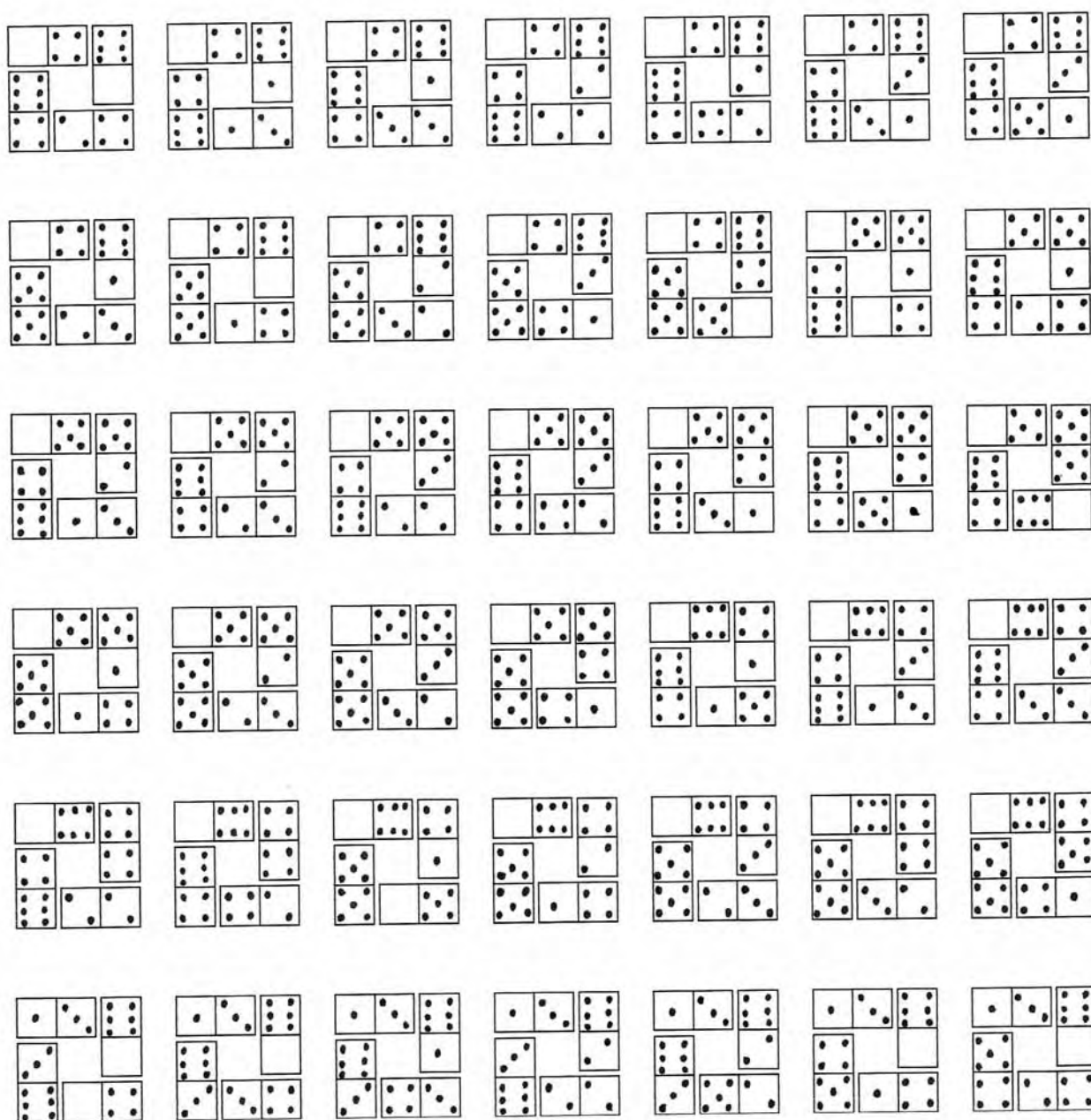


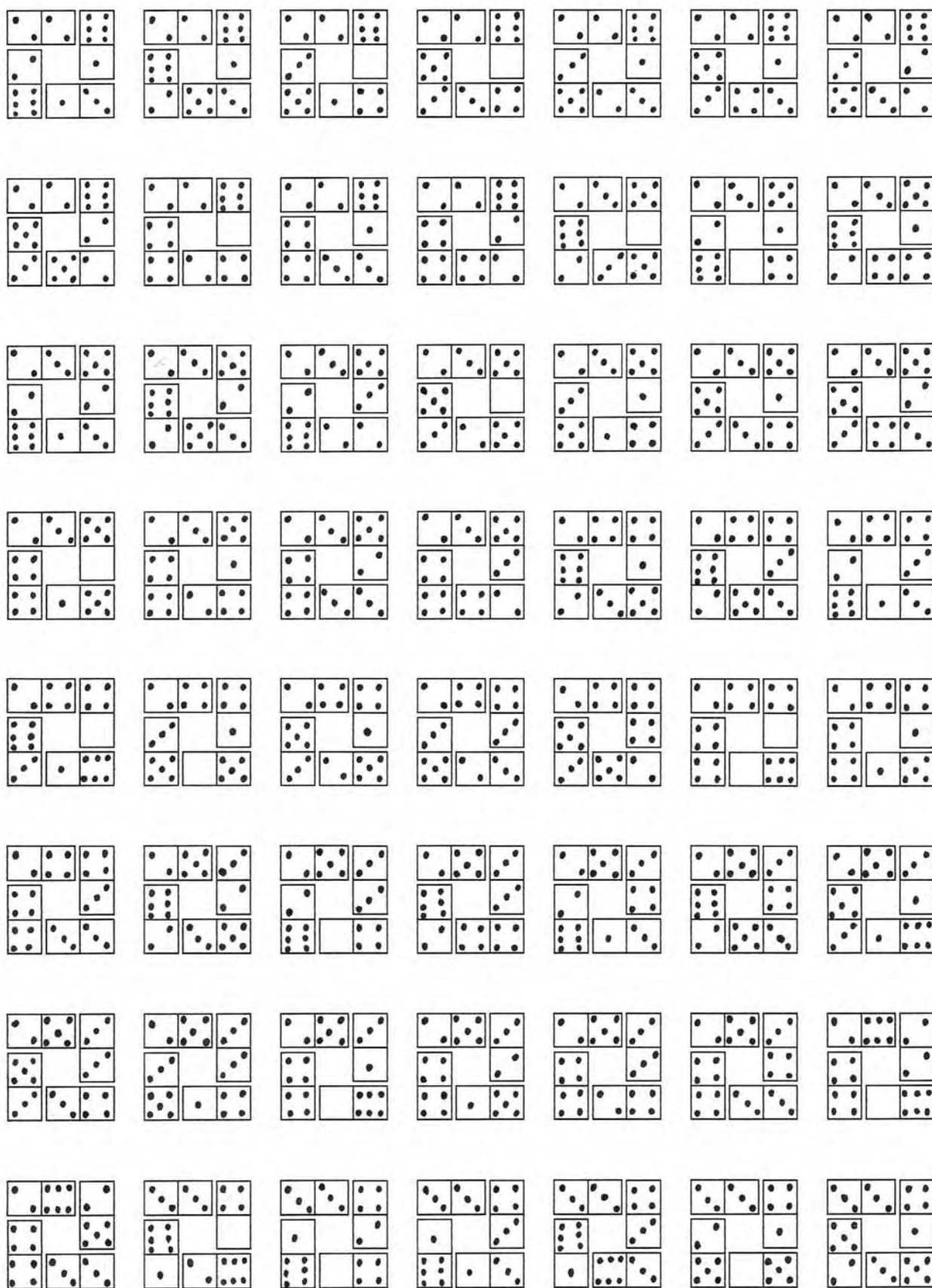


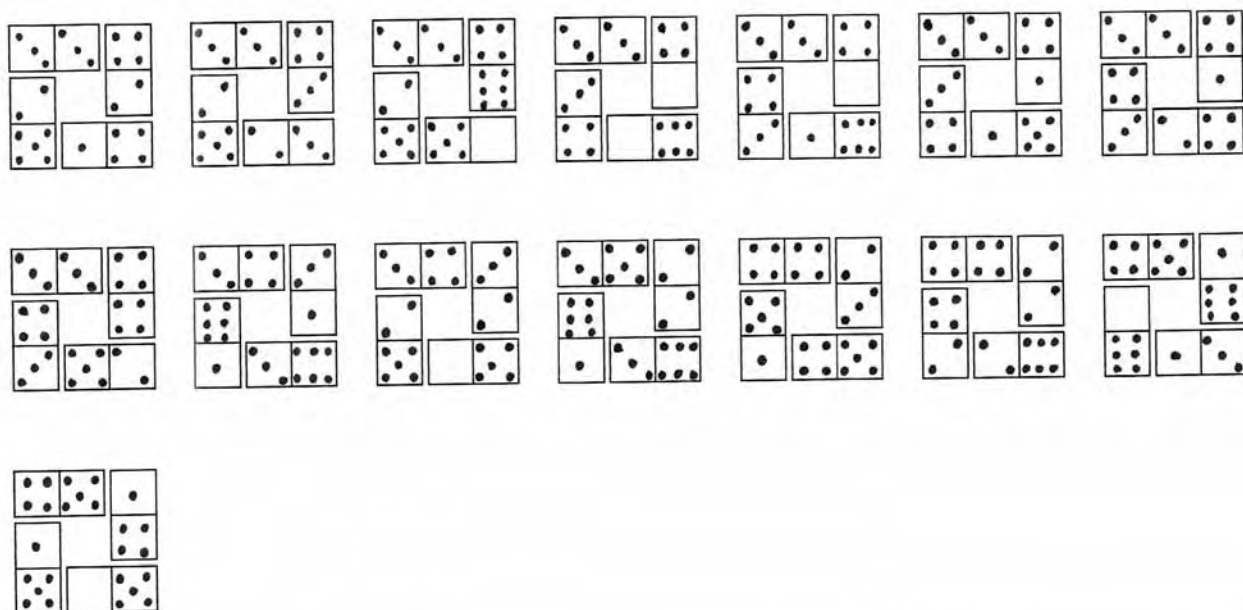




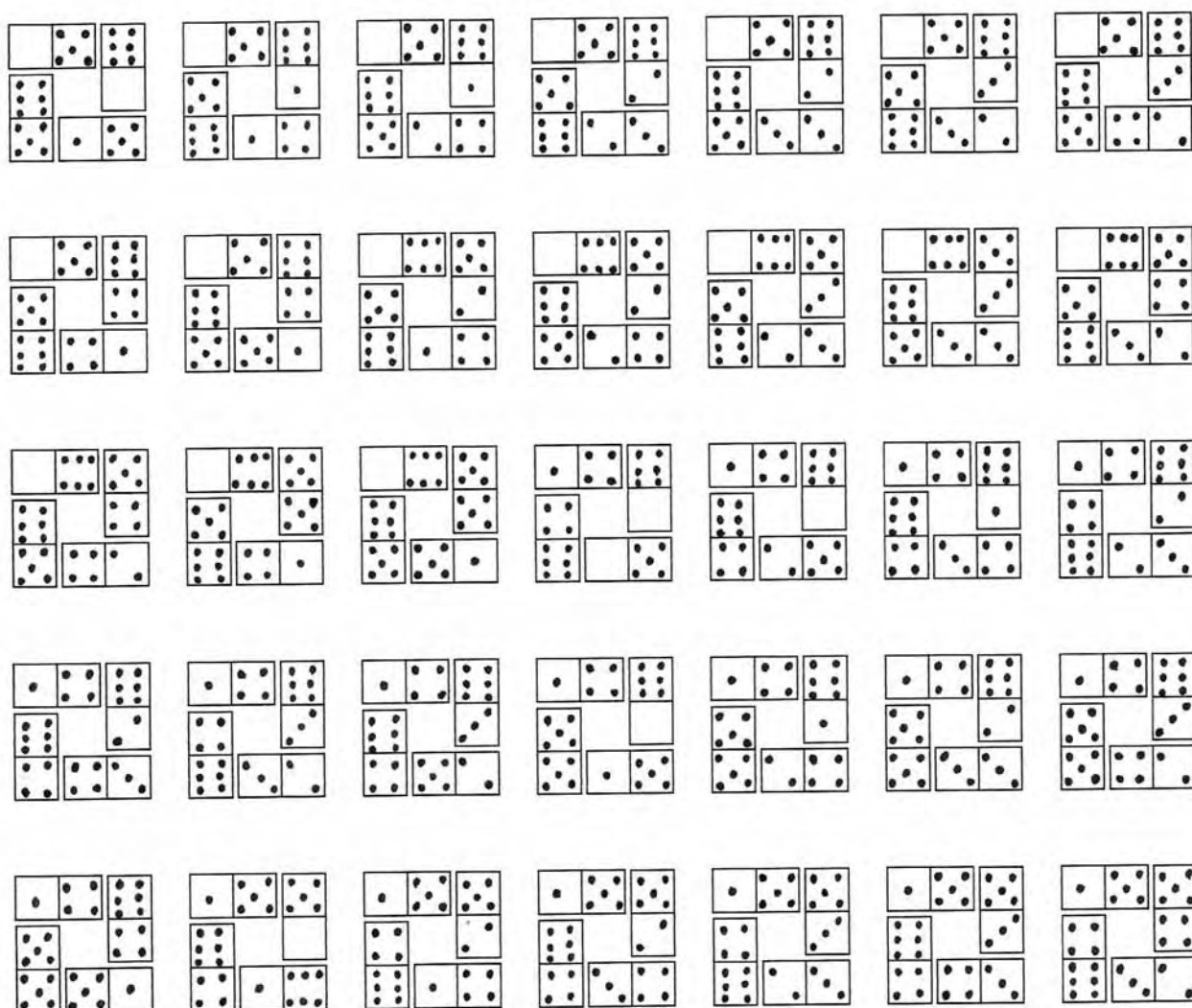
SOMA MÁGICA 10

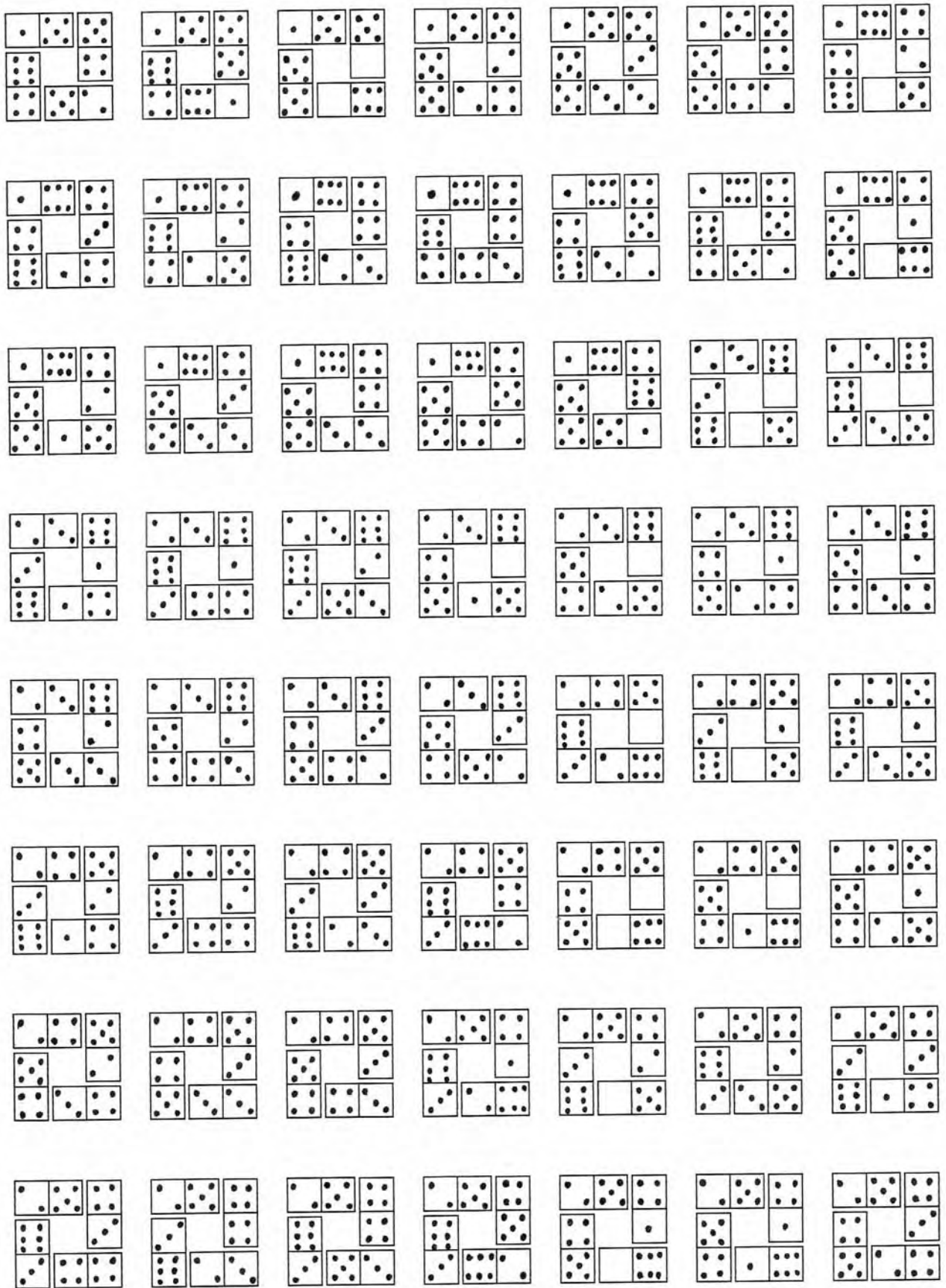


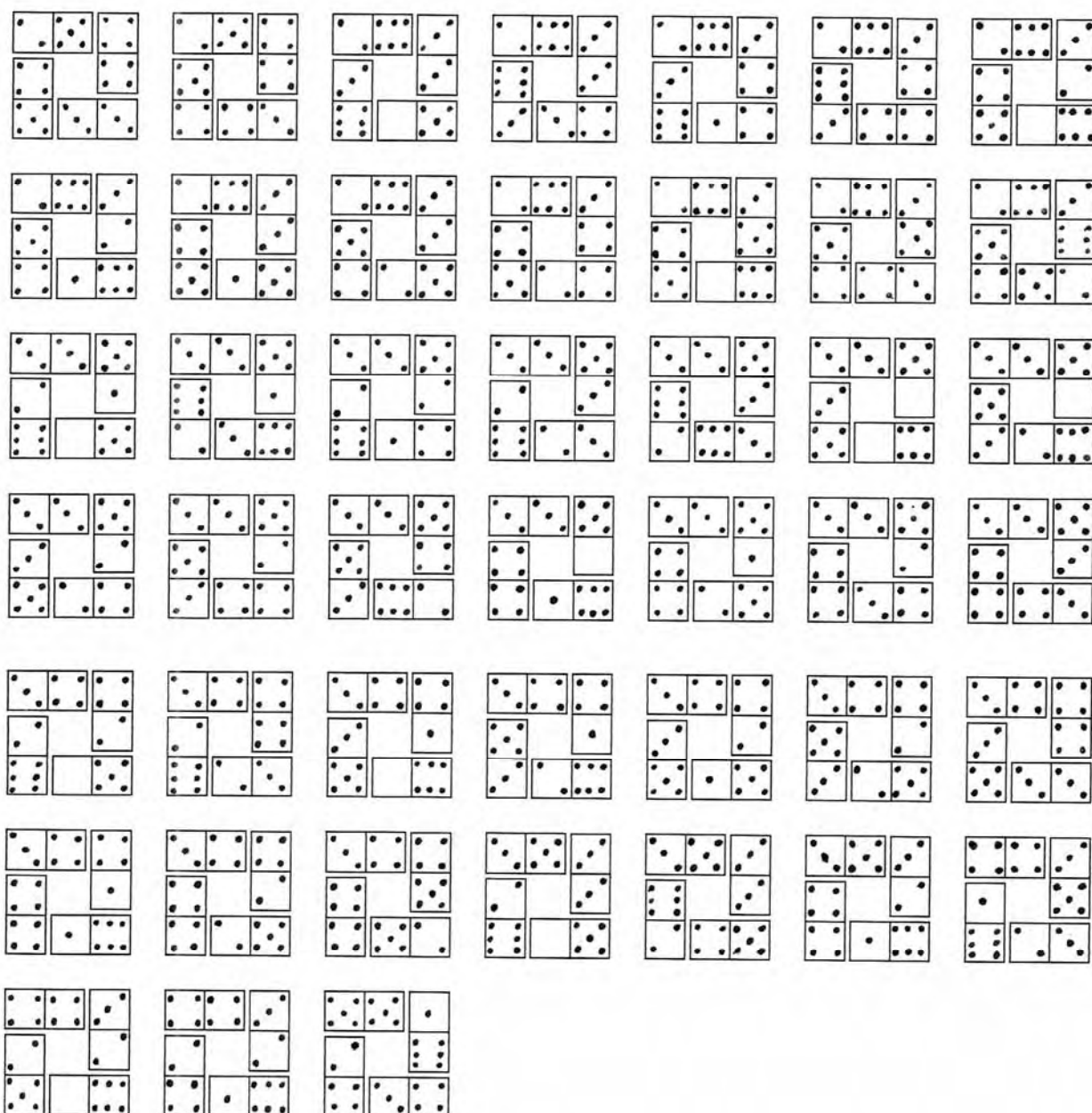




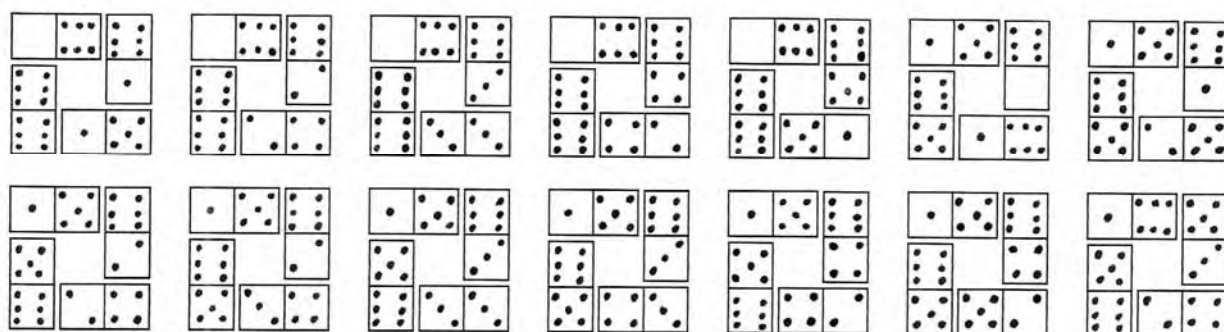
SOMA MÁGICA 11

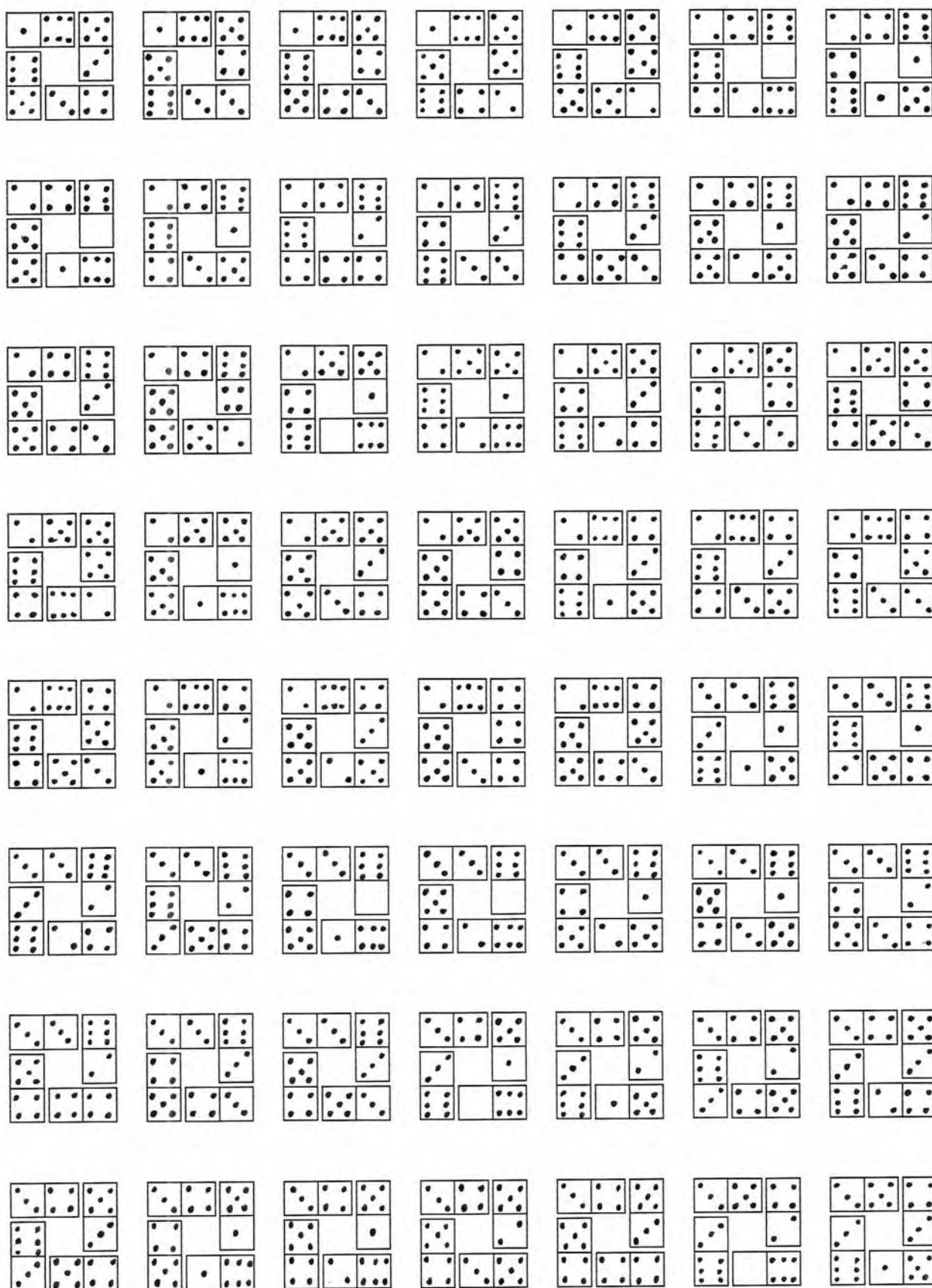


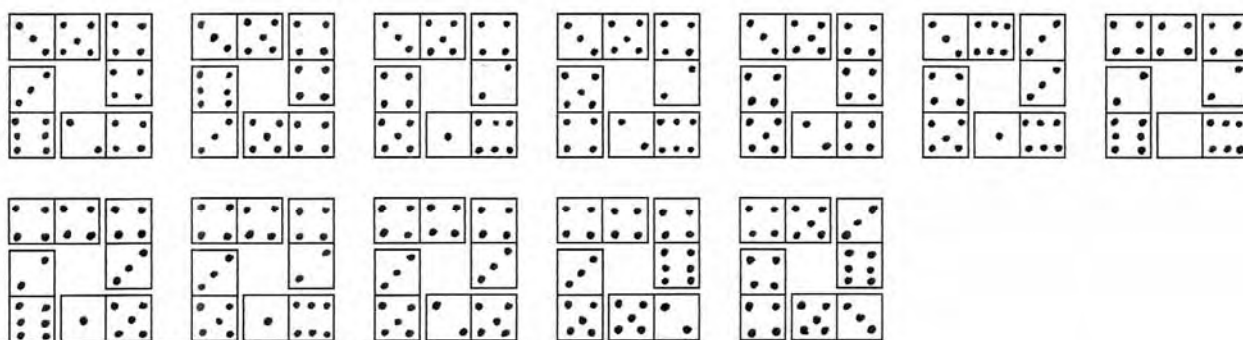




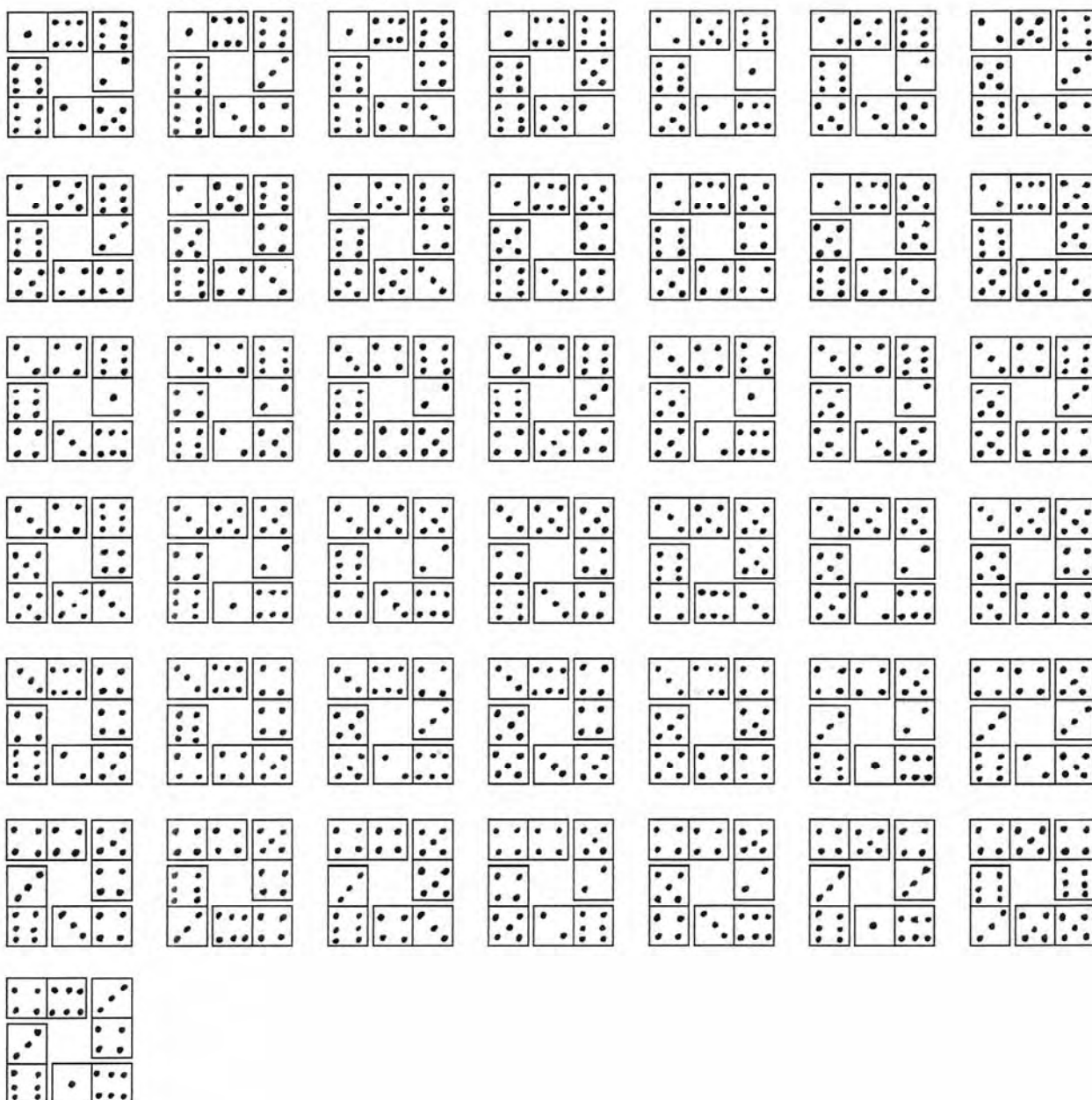
SOMA MÁGICA 12



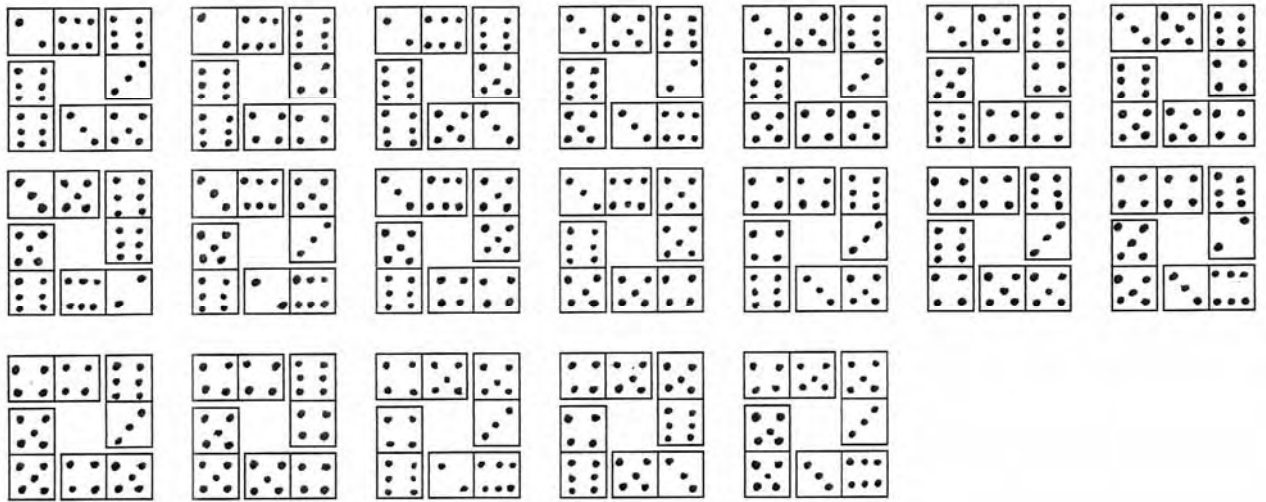




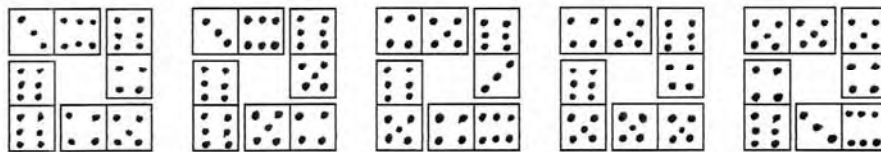
SOMA MÁGICA 13



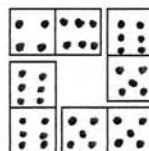
SOMA MÁGICA 14



SOMA MÁGICA 15

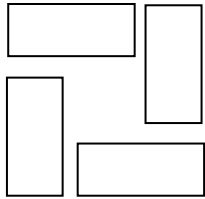


SOMA MÁGICA 16

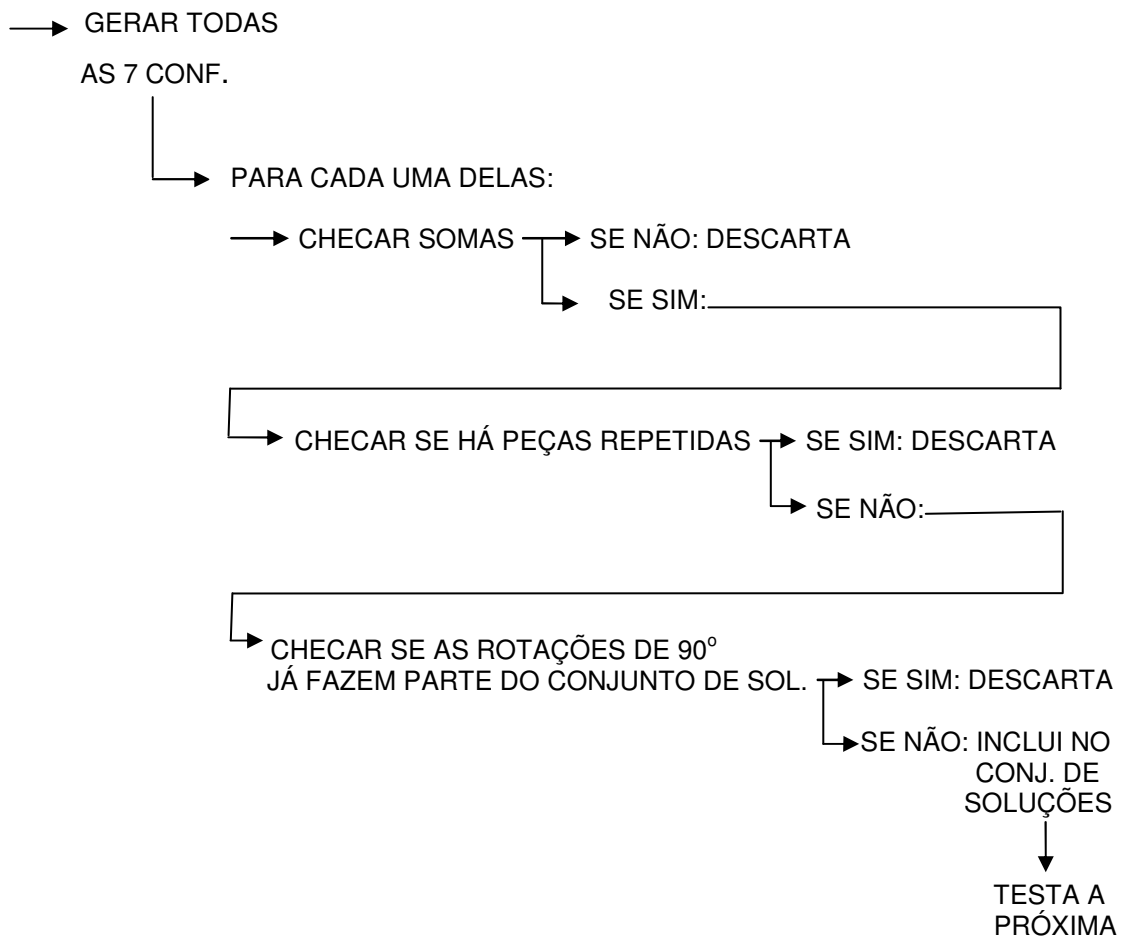


ANEXO E

Programa executado na plataforma MatLab para a resolução do Problema da Fernanda



0-0						
0-1	1-1					
0-2	1-2	2-2				
0-3	1-3	2-3	3-3			
0-4	1-4	2-4	3-4	4-4		
0-5	1-5	2-5	3-5	4-5	5-5	
0-6	1-6	2-6	3-6	4-6	5-6	6-6



ANEXO F

Vinte soluções do Desafio Máximo

Solução 1

$$\frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{3}{3} + \frac{6}{6} = 2$$

$$\frac{3}{1} = 3$$

$$\frac{2}{1} + \frac{4}{2} = 4$$

$$\frac{6}{3} + \frac{2}{2} + \frac{4}{4} + \frac{5}{5} = 5$$

$$\frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{1} = 6$$

$$\frac{6}{1} + \frac{4}{6} + \frac{2}{6} = 7$$

$$\frac{5}{1} + \frac{6}{5} + \frac{4}{5} + \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 8$$

Solução 2

$$\frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{6}{3} = 2$$

$$\frac{6}{2} = 3$$

$$\frac{5}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{2} = 4$$

$$\frac{5}{1} = 5$$

$$\frac{6}{1} = 6$$

$$\frac{3}{3} + \frac{4}{4} + \frac{5}{5} + \frac{6}{6} + \frac{5}{3} + \frac{4}{3} = 7$$

$$\frac{2}{2} + \frac{3}{1} + \frac{1}{4} + \frac{5}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 8$$

Solução 3

$$\frac{3}{3} = 1$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{3}{1} = 3$$

$$\frac{4}{1} = 4$$

$$\frac{5}{1} = 5$$

$$\frac{6}{1} = 6$$

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{6}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4}{3} + \frac{6}{3} + \frac{2}{3} = 7$$

$$\frac{1}{1} + \frac{5}{5} + \frac{6}{6} + \frac{2}{2} + \frac{4}{4} + \frac{4}{2} + \frac{2}{6} + \frac{4}{6} = 8$$

Solução 4

$$\frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

$$\frac{4}{5} + \frac{1}{5} + \frac{5}{5} + \frac{3}{3} = 3$$

$$\frac{4}{1} = 4$$

$$\frac{6}{3} + \frac{4}{2} + \frac{4}{4} = 5$$

$$\frac{6}{1} = 6$$

$$\frac{6}{6} + \frac{6}{2} + \frac{3}{1} = 7$$

$$\frac{2}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{3} + \frac{5}{2} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = 8$$

Solução 5

$$\frac{6}{6} = 1$$

$$\frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{6}{2} = 3$$

$$\frac{4}{1} = 4$$

$$\frac{5}{1} = 5$$

$$\frac{6}{1} = 6$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \frac{4}{4} + \frac{5}{5} = 7$$

$$\frac{3}{1} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 8$$

Solução 7

$$\frac{2}{6} + \frac{4}{6} = 1$$

$$\frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$$

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{6}{5} = 3$$

$$\frac{6}{3} + \frac{4}{4} + \frac{5}{5} = 4$$

$$\frac{3}{1} + \frac{2}{2} + \frac{1}{1} = 5$$

$$\frac{4}{1} + \frac{6}{6} + \frac{3}{3} = 6$$

$$\frac{5}{1} + \frac{2}{1} = 7$$

$$\frac{6}{1} + \frac{4}{2} = 8$$

Solução 6

$$\frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{5}{5} + \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 2$$

$$\frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 3$$

$$\frac{4}{1} = 4$$

$$\frac{2}{1} + \frac{3}{3} + \frac{4}{4} + \frac{6}{6} = 5$$

$$\frac{6}{1} = 6$$

$$\frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} = 7$$

$$\frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{3}{6} + \frac{6}{2} + \frac{3}{1} = 8$$

Solução 8

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

$$\frac{6}{3} = 2$$

$$\frac{3}{1} = 3$$

$$\frac{3}{2} + \frac{6}{4} + \frac{3}{3} = 4$$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{4}{2} + \frac{6}{5} + \frac{4}{5} = 5$$

$$\frac{6}{1} = 6$$

$$\frac{2}{1} + \frac{5}{1} = 7$$

$$\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{4}{4} + \frac{5}{5} + \frac{6}{6} + \frac{6}{2} = 8$$

Solução 9

$$\frac{1}{1}=1$$

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$$

$$\frac{6}{2}=3$$

$$\frac{3}{3}+\frac{4}{4}+\frac{5}{5}+\frac{6}{2}=4$$

$$\frac{5}{1}=5$$

$$\frac{4}{2}+\frac{4}{1}=6$$

$$\frac{6}{1}+\frac{2}{2}=7$$

$$\frac{3}{6}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}+\frac{3}{1}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=8$$

Solução 11

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{5}=1$$

$$\frac{3}{6}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}=2$$

$$\frac{3}{1}=3$$

$$\frac{4}{4}+\frac{3}{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=4$$

$$\frac{5}{4}+\frac{3}{4}+\frac{2}{2}+\frac{4}{2}=5$$

$$\frac{6}{1}=6$$

$$\frac{6}{2}+\frac{4}{1}=7$$

$$\frac{5}{5}+\frac{6}{6}+\frac{5}{1}+\frac{1}{1}=8$$

Solução 10

$$\frac{1}{1}=1$$

$$\frac{5}{4}+\frac{3}{4}=2$$

$$\frac{6}{4}+\frac{3}{2}=3$$

$$\frac{3}{1}+\frac{3}{3}=4$$

$$\frac{5}{2}+\frac{4}{2}+\frac{1}{2}=5$$

$$\frac{1}{5}+\frac{3}{5}+\frac{6}{5}+\frac{4}{1}=6$$

$$\frac{6}{1}+\frac{4}{4}=7$$

$$\frac{2}{2}+\frac{6}{2}+\frac{6}{3}+\frac{5}{5}+\frac{6}{6}=8$$

Solução 12

$$\frac{2}{6}+\frac{4}{6}=1$$

$$\frac{5}{5}+\frac{3}{3}=2$$

$$\frac{4}{4}+\frac{2}{2}+\frac{1}{1}=3$$

$$\frac{4}{2}+\frac{6}{3}=4$$

$$\frac{2}{1}+\frac{3}{1}=5$$

$$\frac{6}{6}+\frac{5}{1}=6$$

$$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+\frac{6}{5}+\frac{2}{5}+\frac{4}{1}=7$$

$$\frac{6}{1}+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=8$$

Solução 13

$$\frac{1}{1}=1$$

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$$

$$\frac{3}{1}=3$$

$$\frac{5}{4}+\frac{1}{4}+\frac{5}{2}=4$$

$$\frac{5}{1}=5$$

$$\frac{6}{1}=6$$

$$\frac{2}{2}+\frac{3}{3}+\frac{4}{4}+\frac{5}{5}+\frac{5}{3}+\frac{4}{3}=7$$

$$\frac{3}{6}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}+\frac{6}{6}+\frac{4}{2}+\frac{6}{2}=8$$

Solução 15

$$\frac{6}{6}=1$$

$$\frac{1}{5}+\frac{3}{5}+\frac{6}{5}=2$$

$$\frac{5}{5}+\frac{6}{3}=3$$

$$\frac{3}{3}+\frac{4}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=4$$

$$\frac{6}{2}+\frac{4}{2}=5$$

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{4}+\frac{6}{4}+\frac{5}{2}=6$$

$$\frac{2}{2}+\frac{6}{1}=7$$

$$\frac{3}{1}+\frac{1}{1}+\frac{4}{1}=8$$

Solução 14

$$\frac{6}{6}=1$$

$$\frac{4}{2}=2$$

$$\frac{6}{2}=3$$

$$\frac{4}{1}=4$$

$$\frac{5}{1}=5$$

$$\frac{6}{1}=6$$

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{4}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{6}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}=7$$

$$\frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\frac{3}{3}+\frac{4}{4}+\frac{5}{5}+\frac{3}{1}=8$$

Solução 16

$$\frac{5}{5}=1$$

$$\frac{2}{2}+\frac{4}{4}=2$$

$$\frac{1}{1}+\frac{3}{3}+\frac{6}{6}=3$$

$$\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=4$$

$$\frac{6}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=5$$

$$\frac{2}{1}+\frac{4}{1}=6$$

$$\frac{3}{1}+\frac{6}{3}+\frac{2}{4}+\frac{6}{4}=7$$

$$\frac{1}{5}+\frac{3}{5}+\frac{6}{5}+\frac{5}{5}+\frac{6}{1}=8$$

Solução 17

$$\frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{3}{1} = 3$$

$$\frac{4}{1} = 4$$

$$\frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \frac{4}{4} + \frac{5}{5} + \frac{6}{6} = 5$$

$$\frac{6}{1} = 6$$

$$\frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{6}{2} = 7$$

$$\frac{6}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4} + \frac{6}{4} + \frac{1}{5} + \frac{3}{5} + \frac{6}{5} = 8$$

Solução 19

$$\frac{3}{3} = 1$$

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} + \frac{6}{5} = 2$$

$$\frac{1}{1} + \frac{4}{4} + \frac{5}{5} = 3$$

$$\frac{2}{4} + \frac{6}{4} + \frac{2}{1} = 4$$

$$\frac{2}{2} + \frac{6}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = 5$$

$$\frac{6}{1} = 6$$

$$\frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{6}{2} = 7$$

$$\frac{4}{1} + \frac{3}{1} + \frac{6}{6} = 8$$

Solução 18

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

$$\frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = 2$$

$$\frac{3}{4} + \frac{4}{4} + \frac{5}{4} = 3$$

$$\frac{6}{6} + \frac{6}{2} = 4$$

$$\frac{5}{1} = 5$$

$$\frac{1}{1} + \frac{3}{3} + \frac{5}{5} + \frac{3}{1} = 6$$

$$\frac{2}{2} + \frac{4}{1} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 7$$

$$\frac{6}{1} + \frac{4}{2} = 8$$

Solução 20

$$\frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{3}{1} = 3$$

$$\frac{4}{1} = 4$$

$$\frac{5}{1} = 5$$

$$\frac{6}{1} = 6$$

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{6}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{6}{3} = 7$$

$$\frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \frac{4}{4} + \frac{5}{5} + \frac{6}{6} + \frac{4}{2} + \frac{2}{6} + \frac{4}{6} = 8$$