RESSALVA

Atendendo solicitação da
autora, o texto completo desta
dissertação será disponibilizado
somente a partir de 09/02/2019.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

BÁRBARA PINTO CARNEIRO

ANÁLISE DE ESCALA NO MAPA PADRÃO DISSIPATIVO DESCONTÍNUO

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

São Paulo - 2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “Júlio de Mesquita Filho”
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS - CAMPUS DE RIO CLARO

BÁRBARA PINTO CARNEIRO

ANÁLISE DE ESCALA NO MAPA PADRÃO DISSIPATIVO DESCONTÍNUO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Juliano Antônio de Oliveira

Rio Claro - SP
2018

517.39 Carneiro, Bárbara Pinto
C289a Análise de escala no mapa padrão dissipativo descontínuo / Bárbara Pinto Carneiro. - Rio Claro, 2018
54 f. : il., figs., gráfs., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Juliano Antônio de Oliveira

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. Mapa padrão. 3. Função de descontinuidade. 4. Expoentes críticos. 5. Lei de escala. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP - Ana Paula Santulo C. de Medeiros / CRB 8/7336

BÁRBARA PINTO CARNEIRO

ANÁLISE DE ESCALA NO MAPA PADRÃO DISSIPATIVO DESCONTÍNUO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Juliano Antônio de Oliveira
Prof. Dr. Rene Orlando Metrano Torricos
Profa. Dra. Priscilla Andressa de Souza Silva

Resultado: APROVADA

Rio Claro, SP 09 de fevereito de 2018

"Não deixe que a saudade sufoque, que a rotina acomode, que o medo impeça de tentar. Desconfie do destino e acredite em você. Gaste mais horas realizando que sonhando, fazendo que planejando, vivendo que esperando porque, embora quem quase morre esteja vivo, quem quase vive já morreu."

Sarah Westphal

Agradecimentos

Agradeço a minha família, meu pai, minha mãe e minha irmã, que sempre estiveram ao meu lado, me apoiando e me incentivando a crescer e nunca desistir dos meus sonhos, mesmo nos momentos mais difíceis até naqueles em que quis desistir, me mostraram sempre a importância de continuar.

Agradeço ao meu orientador Juliano Antônio de Oliveira, por ter aceitado me orientar e a enfrentar esse desafio de fazer um mestrado comigo, e que sempre me ajudou e "puxou" minha orelha, quando necessário, e assim me fez crescer muito como pesquisadora, mas, além disso me ajudou a crescer como pessoa, acreditando em mim e na minha capacidade de levar esse trabalho adiante.

Um agradecimento em especial ao meu marido Francisco Bauke, que me acompanhou em todos os momentos, me ajudando a superar minhas dificuldades e minhas teimosias, me apoiando sempre, em momentos difíceis, e segurando minha mão para enfrentarmos juntos todas as dificuldades.

Agradeço também as minhas amigas Rivania Teixeira e Amanda Prina, que em muitas conversas me fizeram refletir sobre minhas decisões e me ajudaram na decisão de continuar o mestrado, mas além disso fazem a minha vida cada dia melhor.

Agradeço enormemente ao meu amigo André Livorati, que me ajudou a solucionar muito problemas sejam eles pessoais ou acadêmicos, e sempre esteve presente para tomarmos um copo de cerveja.

Não tenho palavras para descrever o agradecimento que eu tenho pela minha amiga Marina Heleno, minha eterna convivente, que apesar de estar longe me ouve e me ajuda a ser uma pessoa melhor, e a refletir sobre a vida.

Gostaria de agradecer aos meus amigos de laboratório Hans Muller, Diogo Costa e Matheus Hansen, por me ajudarem. Um agradecimento especial ao Prof. Dr. Edson Denis Leonel por ceder o laboratório e pelos conselhos sobre a vida acadêmica.

Um grande agradecimento as minhas amigas, Ana Laura Boscolo, Ana Laura Curcio, Tereza Ramponi, Bruna Patrocinio, meu amigo Alisson Marques pelas manhãs, tardes e noites de estudo e de muita conversa.

Gostaria de agradecer a UNESP - Rio Claro, pelo ambiente criativo amigável que proporciona aos seus graduandos e pós-graduandos, principalmente todos do Departamento de Física, pois nesses 7 anos de faculdade, sendo 5 de graduação e 2 de pós-graduação, sempre estiveram a disposição para ajudar na minha formação.

Por fim, mas não menos importante, gostaria de agradecer a CAPES, por me ajudar financeiramente nesse último ano.

Resumo

Neste trabalho consideramos o mapa padrão descrito nas variáveis momento e ângulo, a partir do movimento de um rotor pulsado. Uma vez definido o modelo para o caso conservativo, construímos o espaço de fase para analisar a dinâmica do sistema. Observamos um mar caótico ao redor de ilhas periódicas e limitado por um conjunto de curvas invariantes *spannig*. Para caracterizar o caos, usamos os expoentes de Lyapunov. Estendemos os nossos estudos introduzindo dissipação no sistema. Dada a escolha dos parâmetros de controle, observamos que a estrutura mista observada no sistema conservativo decai exponencialmente para atratores caóticos. Os expoentes de Lyapunov foram usados para caracterizar os atratores caóticos. Introduzimos uma função de descontinuidade no sistema para investigar a raiz quadrada da variável ação quadrática média ao longo dos atratores caóticos. Uma lei de escala foi estabelecida e os expoentes de escala são encontrados numericamente. Finalmente, discutimos uma abordagem analítica para a variável ação quadrática média no mapeamento padrão dissipativo descontínuo.

Palavras Chaves: Mapa Padrão, Função de Descontinuidade, Expoentes Críticos, Lei de Escala.

Abstract

In this work we consider the standard map described in the momentum and angle variables from the movement of a kicked rotor. Once the model for the conservative case is defined, we build the phase space to analyze the dynamics of the conservative system. We observe a chaotic sea surrounding periodic islands and limited by a set of invariant spannig curves. To characterize chaos we use the Lyapunov exponents. We extend our studies introducing dissipation in the system. Given the chose of the control parameters we obseve that the mixed structure observed in the conservative case decay exponentially for large chaotic attactors. The Lyapunov exponents were used to characterize the chaotic attactors. We introduce a discontinuity function in the system to investigate the root mean square of the quadratic action variable along of the chaotic attractors. A scaling law was established and the scaling exponents are found numerically. Finally a analytical approach for the quadratic mean action variable in the dissipative discontinuous standard mapping is discussed.

Key Words: Standard Map, Discontinuous Function, Critical Exponents, Scaling Law.

SUMÁRIO

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

O estudo de sistemas dinâmicos vem despertando o interesse de vários autores nas últimas décadas. Trabalhos com esse tipo de sistema começaram a ter um maior destaque após o matemático francês *Henri Poincaré*, no final do século XVIII e início do XIX, demostrar a estabilidade do movimento dos corpos do Sistema Solar [1, 2, 3]. O sistema de três corpos estudado, mostrou movimentos complexos e instáveis [4, 5].

Em 1961, Edward Lorenz, meteorologista americano, descobre acidentalmente as consequências do caos determinístico. Lozenz trabalhava em uma área cujas equações que descreviam a atmosfera eram não lineares. Para resolver o problema do tempo computacional que inicialmente demorava muitas horas, ele recomeçou a evolução de um ponto intermediário da antiga solução, entretanto os dados fornecidos por ele tinham três casas decimais, mas os valores computacionais tinham seis casas [1]. Com essa pequena mudança, os valores obtidos com os dados com poucas casas decimais ocasionaram em resultados completamente diferentes dos resultados obtidos com os números completos.

Com o desenvolvimento computacional, as simulações numéricas ficaram mais acessíveis, e investigar detalhadamente as dinâmicas de sistemas não lineares ficou mais abordável. Logo, os mapeamentos discretos acabaram se tornando cada vez mais possíveis. A técnica de resolver problemas por meio de seguidas auto realimentações, isto é, necessitando inicialmente apenas de um par de condições iniciais, são conhecidas como *mapas* [1]. Tais mapeamentos são parametrizados utilizando parâmetros de controle que desempenham um papel fundamental na evolução de um sistema, de modo que, podemos observar a ocorrência de caos, sensibilidade às condições iniciais e estabilidade. O comportamento caótico segue algumas características como: a imprevisibilidade, o comportamento aperiódico e não variância de escala [6].

Um dos mapeamentos mais estudados na literatura é o mapa Taylor-Chirikov [7, 8], também conhecido como mapa padrão. Esse mapeamento pode ser descrito pelas variáveis ação e ângulo e por um parâmetro k que controla a não linearidade do sistema. Esse mapa pode descrever o comportamento de alguns sistemas físicos, tais como: do movimento de um rotor pulsado ou do movimento do pêndulo simples, ambos com pulsos periódicos.

O espaço de fase, isto é, o conjunto de todos os estados possíveis do sistema [9], que ilustra o comportamento do sistema dinâmico, pode apresentar uma estrutura mista composta por um mar de caos envolta de ilhas periódicas e limitado por curvas invariantes *spanning* [9]. Ilhas periódicas são estruturas que se repetem periodicamente e as curvas invariantes são as curvas que limitam o tamanho do mar de caos no espaço de fase.

No mapa padrão, a escolha do parâmetro k, determina no espaço de fase a transição de caos local, caos confinado por curvas invariantes do tipo *spanning*, para caos global, quando não se observa mais as curas invariantes *spanning* e uma partícula na região de caos difunde-se sem limites [9], essa transição pode ser observada após o valor de $k = 0,9716....$ Um estudo detalhado das propriedades dinâmicas no mapa padrão será feita no Capítulo 2.

Uma consequência imediata observada ao introduzir dissipação em um sistema é que a dinâmica do modelo é drasticamente afetada. De certa forma, podemos dizer que dissipação implica que a área do espaço de fase não é conservada sob o tempo de evolução. Existem várias maneiras de introduzir dissipação em um sistema [10, 11, 12, 13], todavia uma delas pode ser feita introduzindo forças de amortecimento, como o movimento relativo de uma partícula dentro de um fluido com um gás [10, 14]. Neste caso, o sistema não conserva área ou volume no espaço de fase e a estrutura mista vista no espaço de fase do mapa conservativo é destruída. Nesse momento é possível observar diferentes comportamentos à medida que o parâmetro de amortecimento é variado.

Dentre esses conportamentos temos, o efeitos de transiente que consiste no tempo que a partícula fica vagando até atingir o equilíbrio [15], pontos fixos atrativos que são ponto de equilíbrio estável [13, 16], órbitas periódicas que são o conjunto de todos os pontos percorrido pelo sistema no espaço de fase [14] e atratores caóticos. Atratores caóticos são atratores que têm dependência sensitiva às condições iniciais. Atrator é um conjunto invariante para o qual órbitas próximas convergem depois de um longo tempo. [2, 6, 17, 18].

A proposta deste trabalho é investigar algumas propriedades dinâmicas considerando o mapa padrão. Definido o mapeamento, o nosso foco será construir o espaço de fase para analisar o comportamento do sistema dinâmico considerando valores diferentes dos parâmetros de controle k e γ, onde k é um parâmetro de não linearidade e γ é um parâmetro de dissipação. Se $\gamma = 0$ recuperamos o modelo conservativo, para $\gamma \neq 0$ temos o modelo dissipativo.

No Capítulo 2, estudamos as propriedades dinâmicas para o mapa padrão conservativo e dissipativo. Inicialmente obteremos as equações para o mapa padrão conservativo, a partir da Hamiltoniana para o problema do Rotor Pulsado. Para o problema conservativo, construímos o espaço de fase e depois determinamos os expoentes de Lyapunov para caracterizar o caos. Posteriormente estudamos o caso dissipativo, construímos o espaço de fase, e determinamos os expoentes de Lyapunov. Mostramos também para o caso dissipativo que as estruturas mistas vistas no espaço de fase do modelo conservativo, quando adicionado dissipação, decaem em atratores caóticos, dependendo da escolha dos parâmetros de controle.

No capítulo 3, estudamos o mapa padrão dissipativo descontínuo. Iniciamos com o espaço de fase, depois calculamos sua matriz Jacobiana, determinamos os expoentes de Lyapunov, e mostramos o decaimento das estruturas mistas em um atrator caótico. Ainda nesse capítulo, iremos calcular numericamente os expoentes críticos. Os expoentes críticos são aqueles que definem uma classe de universalidade do mapa padrão dissipativo descontínuo. Iremos também propor algumas hipóteses de escala, na tentativa de colapsar todas as curvas da raiz quadrada da média (I_{RMS}) em uma única curva universal. Esse colpso serão comprovados, tanto analitica como numericamente.

Para complementar nossos estudos, no Capítulo 4, encontramos os valores dos expoentes críticos analiticamente. Finalmente, no Capítulo 5 apresentamos as considerações finais e as perspectivas de continuidade.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Estudamos nesse trabalho algumas propriedades do mapa padrão. Foi considerado três situações diferentes, o caso conservativo, o caso dissipativo e o caso dissipativo descontínuo.

Inicialmente, foi feita uma revisão dos cálculos para encontrar as equações do mapa padrão conservativo. A partir da Hamiltoniana do sistema do Rotor Pulsado, discretizamos e resolvemos as equações de movimento, assim encontramos as equações que descrevem o mapa padrão conservativo. A partir destas equações obtivemos os casos dissipativo e dissipativo descontínuo.

Para todos os mapas foram calculados os expoentes de Lyapunov. Em todas as situações encontramos expoentes possitivos, podendo assim, caracterizar o caos para todos os casos.

Para o mapa padrão dissipativo e dissipativo descontínuo mostramos analiticamente e numericamente, que as estruturas vistas no modelo conservativo são destruídas e decaem exponencialmente para atratores caóticos com expoente de decaimento dado por $-\gamma$.

Aprofundamos nossos estudos no mapa padrão dissipativo descontínuo, estudando a raiz quadrada da média da variável ação, I_{RMS}, ao longo dos atratores caóticos. Conseguimos encontar as curvas para I_{RMS}, analitica e numericamente, conseguindo uma boa sobreposição dessas curvas, possibilitando assim, a uma boa aproximação do estudo fenomenológico com o estudo numérico.

Com o estudo de I_{RMS}, foi possível encontrar os expoentes críticos que são, o expoente de aceleração β, os expoentes de saturação α_1 e α_2, e os expoentes dinâmicos z_1 e z_2.

Os expoentes críticos foram encontrados tanto numericamente quanto analiticamente, obtendo resultados semelhantes para ambos os casos, que podem ser visto na tabela a seguir:

Estes expoentes são os mesmos encontrados na literatura para o modelo de bouncer [18, 23, 24]. Além disso, a função de descontinuidade não interfere nos expoentes críticos obtidos para o mapa padrão dissipativo [1]. Também foi observado um colapso universal de todas as curvas das médias da variável ação, validando assim as hipóteses de escala que foram

Tabela 5.1: Comparações entre os valores analíticos e numéricos dos expoentes críticos

	expoente de aceleração	expoente de saturação	expoente dinâmicos
analítico	$\beta = 0,5(8)$	$\alpha_1 = 1,0$ e $\alpha_2 = -0,5$	$z_1 = 0$ e $z_2 = -1$
numérico	$\beta = 0,498(8)$	$\alpha_1 = 1,002(1)$ e $\alpha_2 = -0,4969(3)$	$z_1 = -0,01(1)$ e $z_2 = -0,9939(7)$

propostas.

Nossas perspectivas para a continuação desse trabalho é investigar o espaço de parâmetros a partir do cálculo dos expoentes de Lyapunov e dos pontos fixos para o mapa padrão dissipativo descontínuo. Esse estudo tem o intuito de investigar as estruturas de auto singularidade.

Referências Bibliográficas

[1] FRANCISCO, C. H. *Leis de escala para o mapa padrão dissipativo*. 2015. 33 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. 2015.

[2] JOUSSEPH, C. A. C. *Propriedades do Mapa Padrão na Transição do Conservativo para o Dissipativo*. 2014. 104f. Tese (Doutorado em Física) – Setor de Ciências exatas, Universidade Federal do Paraná. Curitiba. 2014.

[3] WOELLNER, C. F. *Aspectos dinâmicos de uma rede de mapas Hamiltonianos acoplados*. 2006. 68f. Dissertação (Mestrado em Física) – Setor de Ciências Exatas da Universidade do Paraná, Universidade do Paraná, Curitiba. 2006.

[4] POINCARÉ, H. *Les Méthodes Nouvelle de la Méchanique Céleste*. GAUTHIER-VILLARS, 1899.

[5] POINCARÉ, H. *Sur le Problème des Trois Corps et les Èquations de la Dynamique*. ACTA MATH. v. 13, p.1-271, 1890.

[6] FIEDLER-FERRARA, N.; PRADO, C. P. C. *Caos: Uma introdução*. 1a Reimpressão. São Paulo: Editora Edgard Blücher LTDA, 1995. 402p.

[7] CHIRIKOV, B. V. *A universal instability of many-dimensional oscillator systems*. PHYSICS REPORTS, v. 52, n. 5, p. 263-379, 1979.

[8] LICHTENBERG, A. J. LIEBERMAN, M. A. *Regular and Chaotic Dynamics*. 2a edição. New York: Springer, v. 38, 1992. 692p.

[9] LEONEL, E. D. *Fundamantos da Física Estatística*. São Paulo: Editora Edgard Blücher LTDA, 2015. 418p.

[10] LEONEL, E. D.; McCLINTOCK P. V. E. *Effect of a fractional force on the Fermi–Ulam model*. *JOURNAL OF PHYSICS*. v. 39, n. 37, p. 11399-11415, 2006.

[11] PIASSI, V. S. M.; et al. *Arnold family in acoustically forced air bubble formation*. *CHAOS, SOLITONS AND FRACTALS*. v. 41, p. 1041-1049, 2009.

[12] LEONEL, E. D.; de CARVALHO, E. *A family of crisis in a dissipative Fermi accelerator model*. *PHYSICS LETTERS A*. v. 364, p. 475-479, 2007.

[13] de OLIVEIRA, J. A.; LEONEL, E. D. *The effect of weak dissipation in two-dimensional mapping*. *INT. JOURNAL BIFURCATION CHAOS*. v. 22, p. 1250248-1250256, 2012.

[14] TAVARES, D. F.; LEONEL E. D. *A Simplified Fermi Accelerator Model Under Quadratic Frictional Force*. *BRAZILIAN JOURNAL OF PHYSICS*. v. 38, n. 1, p. 58-61, 2008.

[15] LIEBERMAN, M. A.; TSANG, K. Y. *Transient Chaos in Dissipatively Perturbed, Near-Integrable Hamiltonian Systems*. *PHYSICAL REVIEW LETTERS* v. 55, n. 9, p. 908-911, 1985.

[16] LUCK, J. M.; MEHTA A. *Bouncing ball with a finite restitution: Chattering, locking, and chaos*. *PHYSICAL REVIEW E*. v. 48, n. 5, p. 3988-3997, 1993.

[17] TSANG K. Y.; LIEBERMAN M. A. *Analytical calculation of invariant distributions on strange attractors*.*PHYSICA D: NONLINEAR PHENOMENA* v. 11, p. 147-166, 1984.

[18] de OLIVEIRA, J. A.; LEONEL E. D. *Dissipation and its consequences in the scaling exponents for a family of two-dimensional mappings*. *JOURNAL OF PHYSICS A* v. 45, p. 165101-165111, 2012.

[19] HORSTMANN, A. C. da C. *Estudo da Dinâmica do Mapa Padrão Dissipativo Relativístico*. 2014. 77f. Dissertação (Mestrado em Física) – Centro de Ciências Tecnológicas, Universidade do Estado de Santa Catarina. Joinville. 2014.

[20] SANDRI M. *Numerical Calculation of Lyapunov Exponents*. The Mathematica Journal, Itália, v. 6, n. 3, p. 78-84, 1996.

[21] SUSSMAN, G. J.; WISDOM, J. *Structure and Interpretation of Classical Mechanics*. v. 1, MIT Press; 2nd Revised edition, 2015.

[22] STEWART, J. *Cálculo*. 5a Edição. São Paulo: Thomson Learning, 2006. 581p.

[23] LIVORATI, A. L. P.; LADEIRA, D. G.; LEONEL, E. D. *Scaling investigation of Fermi acceleration on a dissipative bouncer model*. *PHYSICAL REVIEW E*. v. 78, p. 056205-056217, 2008.

[24] LEONEL, E. D.; LIVORATI, A. L. P. *Describing Fermi acceleration with a scaling approach: bouncer model revisited*. *PHYSICA A*. v. 387, p. 1155-1160, 2008.