



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”**  
Câmpus Experimental de Itapeva

**JORGE LUIS GEORGES MALATRASI**

**MÉTODOS ANALÍTICOS DE REGRESSÃO LINEAR COM ERROS EM**  
**AMBAS VARIÁVEIS**

Itapeva - SP  
2017

**JORGE LUIS GEORGES MALATRASI**

**MÉTODOS ANALÍTICOS DE REGRESSÃO LINEAR COM ERROS EM  
AMBAS VARIÁVEIS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado na Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – Câmpus Experimental de Itapeva, como requisito para a conclusão do curso de Engenharia Industrial Madeireira.

Orientador: Prof. Dr. José Fernando de Jesus  
Co-orientador: Carlos Alberto Oliveira de Matos

Itapeva - SP  
2017

Malatrasi, Jorge Luis Georges  
M239m Métodos analíticos de regressão linear com erros em ambas  
variáveis / Jorge Luis Georges Malatrasi. -- Itapeva, SP, 2017  
42 f.: il.

Trabalho de conclusão de curso (bacharelado - Engenharia  
Industrial Madeireira) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de  
Mesquita Filho", Câmpus Experimental de Itapeva, 2017

Orientador: José Fernando de Jesus

Coorientador: Carlos Alberto Oliveira de Matos

1. Estatística. 2. Análise de regressão. 3. Estatística matemática.  
I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus  
Experimental de Itapeva. II. Título.

CDD 519.536

Ficha catalográfica elaborada pela biblioteca da Universidade Estadual Paulista (Unesp),  
Câmpus Experimental de Itapeva  
Valderez Soares - CRB 8/4654

**JORGE LUIS GEORGES MALATRAS**

**MÉTODOS ANALÍTICOS DE REGRESSÃO LINEAR COM ERROS EM  
AMBAS VARIÁVEIS**

Trabalho de Conclusão de Curso para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Industrial Madeireira, da Universidade Estadual Paulista - UNESP - Campus Experimental de Itapeva.

**BANCA EXAMINADORA**

Orientador: \_\_\_\_\_ 

Prof. Dr. José Fernando de Jesus  
Universidade Estadual Paulista - UNESP - Campus Experimental de Itapeva.

2º Examinador: \_\_\_\_\_ 

Prof. Dr. André Luis Debiaso Rossi  
Universidade Estadual Paulista - UNESP - Campus Experimental de Itapeva.

3º Examinador: \_\_\_\_\_ 

Prof. Dr. Rodolfo Valentim da Costa Lima  
Universidade Federal de São Paulo - UNIFESP - Campus Diadema.

Itapeva, 22 de junho de 2017.

Em memória do meu avô Michel Georges, homem mais guerreiro que já  
conheci e que sempre me apoiou durante minha vida universitária.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente agradeço a Deus, pois sem ele eu não teria chegado aonde estou.

Agradeço aos meus pais que me incentivaram todos os anos que estive na faculdade, minha madrinha Gloria Georges Feres que sempre me apoiou e também aos meus familiares que sempre estiveram do meu lado quando precisava.

Aos meus professores, em especial ao Prof. Dr. José Fernando de Jesus que sempre esteve comigo nos trabalhos que realizei.

Agradeço também ao apoio do meu co-orientador Prof. Dr. Carlos Alberto Oliveira de Matos, e pela bolsa de iniciação científica concedida.

Enfim, agradeço a todas as pessoas envolvidas que fizeram parte desta etapa da minha vida.

*“Duas coisas são infinitas: o universo e a estupidez humana. Mas, em relação ao universo, ainda não tenho certeza absoluta”.*

*(Albert Einstein)*

## RESUMO

Atualmente em diversos trabalhos, percebemos que a análise estatística muitas vezes é deixada de lado, ou tratada muito superficialmente. Este trabalho tem como objetivo mostrar a importância do devido tratamento estatístico, no que diz respeito ao ajuste de retas, utilizando métodos estatísticos conhecidos, como o método dos mínimos quadrados, qualidade do ajuste e outros. Em particular, mostramos a importância de se considerar as incertezas dos dados em ambas variáveis em várias situações. A partir disso, analisando dados de artigos disponíveis na literatura, aplicamos os métodos estudados no presente trabalho, comparamos com os resultados obtidos naqueles artigos, mostrando a diferença no resultado final, onde obtivemos resultados estatisticamente mais corretos. Como resultados gerais, encontramos que para ajuste de reta com incertezas fixas em ambas variáveis, os melhores ajustes dos parâmetros dependem da razão das incertezas. Encontramos também que os melhores ajustes dependem mais da razão das incertezas no caso em que os dados são pouco correlacionados.

**Palavras-chave:** Estatística. Ajuste de reta. Qualidade de ajuste.

## ABSTRACT

Currently, in many scientific works, we realize that the statistical analysis are often left aside, or just superficially treated. This work has the aim of showing the importance of the due statistical treatment, with regard to the straight line fitting, using known statistical methods, like least squares method, goodness of fit and others. In particular, we show the importance of considering data uncertainties in both variables in several situations. From this, by analyzing data from papers available in the literature, we applied the methods studied in the present work, compared the results obtained in those papers, showing the difference in the final result, where we have obtained more statistically correct results. As general results, we have found that in case of straight line fitting with fixed uncertainties in both variables, the best fit parameters depend on the uncertainties ratio. We also have found that the best fit depend more of the ratio of uncertainties in the case that the data are poorly correlated.

**Keywords:** Statistics. Straight line fitting. Goodness of fit.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo I - Dados com retas ajustadas. ....	29
Figura 2 – Exemplo I - $a(\varepsilon)$ e $b(\varepsilon)$ para os dados analisados. ....	30
Figura 3 – Exemplo I - Variação percentual de $a(\varepsilon)$ e $b(\varepsilon)$ para os dados analisados. ....	30
Figura 4 – Exemplo I - $\sigma_a(\varepsilon)$ , $\sigma_b(\varepsilon)$ e $\text{cov}(a, b)$ para os dados analisados. ....	31
Figura 5 – Exemplo I - Variação percentual de $\sigma_a(\varepsilon)$ , $\sigma_b(\varepsilon)$ e $\text{cov}(a, b)(\varepsilon)$ para os dados analisados. ....	32
Figura 6 – Exemplo II - Dados com retas ajustadas. ....	33
Figura 7 – Exemplo II - $a(\varepsilon)$ e $b(\varepsilon)$ para os dados analisados. ....	34
Figura 8 – Exemplo II - Variação percentual de $a(\varepsilon)$ e $b(\varepsilon)$ para os dados analisados. ....	35
Figura 9 – Exemplo II - $\sigma_a(\varepsilon)$ , $\sigma_b(\varepsilon)$ e $\text{cov}(a, b)$ para os dados analisados. ....	36
Figura 10 – Exemplo II - Variação percentual de $\sigma_a(\varepsilon)$ , $\sigma_b(\varepsilon)$ e $\text{cov}(a, b)(\varepsilon)$ para os dados analisados. ....	36

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Quadro-resumo dos ajustes aqui analisados. Além das quantidades já definidas no texto, definimos aqui as quantidades:  $D_1 \equiv (\varepsilon^2 s_{yy} - s_{xx})^2 + 4\varepsilon^2 s_{xy}^2$ ,  $D_2 \equiv (\varepsilon^2 \delta_{yy} - \delta_{xx})^2 + 4\varepsilon^2 \delta_{xy}^2$  ..... 24

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Exemplo I - Variação da densidade com a altura, no município de Cana Verde. ....	27
Tabela 2 – Exemplo I - Valores de $a$ e $b$ de melhor ajuste para alguns valores de $\varepsilon$ .....	29
Tabela 3 – Exemplo II - Dados simulados com baixa correlação. ....	33
Tabela 4 – Exemplo II - Valores de $a$ e $b$ de melhor ajuste para alguns valores de $\varepsilon$ .....	34

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	12
<b>1.1</b>	<b>Método de máxima verossimilhança</b> .....	12
<b>1.2</b>	<b>Método dos mínimos quadrados</b> .....	13
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	14
<b>2.1</b>	<b>Ajuste de reta com incertezas apenas em <math>y</math></b> .....	14
2.1.1	Ajuste de reta com incertezas iguais.....	16
2.1.2	Ajuste de reta $y = ax$ .....	17
2.1.3	Ajuste de reta $y = ax$ com incertezas iguais .....	17
<b>2.2</b>	<b>Ajuste de reta com incertezas em <math>x</math> e <math>y</math></b> .....	18
2.2.1	Incertezas iguais em $x$ e $y$ : $y = ax$ .....	19
2.2.2	Incertezas iguais em $x$ e $y$ : $y = ax + b$ .....	22
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b> .....	25
<b>3.1</b>	<b>Materiais</b> .....	26
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b> .....	27
<b>4.1</b>	<b>Exemplo I - Variação da densidade básica de <i>Toona ciliata</i> com a altura</b> .....	27
<b>4.2</b>	<b>Exemplo II - Simulação de dados pouco correlacionados</b> .....	32
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b> .....	38
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	39
<b>APÊNDICE A</b>	<b>– JUSTIFICATIVA GEOMÉTRICA DA EXPRESSÃO PARA O <math>\chi^2</math> NO CASO DE AJUSTE DE RETA COM ERROS EM AMBAS VARIÁVEIS</b> .....	40
<b>A.1</b>	<b>Caso sem desvio padrão</b> .....	40
<b>A.2</b>	<b>Caso com desvio padrão</b> .....	41

## 1 INTRODUÇÃO

A análise de regressão linear é uma análise estatística que busca, a partir dos dados disponíveis, uma relação entre uma variável dependente com uma ou mais variáveis independentes, no caso em que a função a ser ajustada é linear nos parâmetros. O objetivo dessa análise é obter uma equação para verificar o comportamento da variável dependente ( $y$ ) em relação à variável independente ( $x$ ).

Graficamente, essa equação poderia ser obtida analisando o comportamento dos dados referentes a  $y$  em relação aos dados que correspondem a  $x$ . Tal comportamento pode-se apresentar de diversas formas, como por exemplo: quadrático, cúbico, linear, exponencial, entre outras. Em geral, porém, essa relação é muito complicada de se obter graficamente e se recorrem a métodos numéricos ou analíticos.

Diante das análises estatísticas encontradas na literatura, é muito importante que se faça uma análise completa dos dados da amostra, para se obter resultados mais precisos. Neste trabalho, vamos focar no ajuste de reta, ou seja, queremos obter uma equação de reta, dada por:  $y = ax + b$ , onde  $a$  representa o coeficiente angular e  $b$  representa o coeficiente linear da reta.

Em muitos trabalhos com análise estatística, as incertezas na variável  $x$  são desprezadas, e às vezes até mesmo na variável  $y$  (por exemplo, Ribeiro et al. (2011)), com isso obtém-se resultados incorretos, caso não seja possível desprezar essas incertezas. Vamos considerar, nesse trabalho, o ajuste com incertezas em ambas variáveis, de modo a se obter resultados mais robustos. Porém a incerteza em  $x$  só precisa ser considerada quando tiver um valor comparável à incerteza de  $y$ , caso contrário ela pode ser desprezada.

### 1.1 Método de máxima verossimilhança

No caso de ajuste de uma função  $f(x)$  a um conjunto de pontos, ele pode ser obtido através de um método chamado de método de máxima verossimilhança. Este método consiste em ajustar a melhor função  $f(x)$  que descreva um conjunto de pontos experimentais, onde o conjunto de pontos é o mais verossimilhante possível. Em outras palavras, a ideia do método é assumir que ocorreu o resultado que tinha a maior probabilidade de ocorrer.

## 1.2 Método dos mínimos quadrados

A probabilidade de ocorrência de cada dado  $i$ , supondo-se que os erros possuem distribuição gaussiana, é dada por (VUOLO, 1996)

$$P_i = \frac{C}{\sigma_i} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{y_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2} \quad (1.1)$$

onde  $\mu_i$  é o valor médio que corresponde a  $y_i$  e  $C$  é uma constante. Podemos calcular a probabilidade  $P$  de ocorrer o conjunto de resultados realizando a multiplicação das probabilidades de cada resultado:

$$P = P_1 P_2 \dots P_n = \frac{C^n}{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2} \quad (1.2)$$

Substituindo  $\mu_i$  por  $f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_p)$  tem-se

$$P = \frac{C^n}{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n} e^{-\frac{1}{2} \chi^2} \quad (1.3)$$

onde,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{y_i - f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_p)}{\sigma_i} \right]^2 \quad (1.4)$$

Vemos que, maximizar a probabilidade  $P$  corresponde a minimizar essa quantidade  $\chi^2$ . Esse método, onde minimizamos o  $\chi^2$  para encontrar os parâmetros de melhor ajuste da função aos dados é o chamado Método dos Mínimos Quadrados (MMQ).

Utilizamos neste trabalho o MMQ, o qual procura minimizar a diferença entre o valor  $y_{med}$  medido e o valor  $y_{mod}$  predito pelo modelo. Minimizando esta diferença, ele otimiza o ajuste dos parâmetros do modelo aos dados observados.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Vamos estudar dois casos de ajuste de reta. Primeiro, o caso mais conhecido, em que há apenas incertezas em  $y$ . Depois, analisaremos o caso em que há incertezas em ambas variáveis,  $x$  e  $y$ .

### 2.1 Ajuste de reta com incertezas apenas em $y$

Como vimos, o método dos mínimos quadrados consiste em minimizar a quantidade

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{y_i - f(x_i)}{\sigma_{yi}} \right]^2 \quad (2.1)$$

Por simplicidade, nessa seção, usaremos a definição

$$\sigma_i \equiv \sigma_{yi}, \quad (2.2)$$

pois  $\sigma_{yi}$  é a única incerteza que aparece nesse ajuste. No caso de ajuste de reta, temos que a função a ser ajustada é  $y = f(x) = ax + b$ . Substituindo na Eq. (2.1) e abrindo a somatória, podemos escrever

$$\chi^2 = a^2 S_{xx} + b^2 S_{yy} + 2ab S_{xy} - 2a S_{xy} - 2b S_y \quad (2.3)$$

onde

$$\begin{aligned} S_{xx} &\equiv \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}, & S_{yy} &\equiv \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{\sigma_i^2}, \\ S_{xy} &\equiv \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}, & S_x &\equiv \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2}, \\ S_y &\equiv \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sigma_i^2}, & S_{\sigma} &\equiv \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Para minimizar o  $\chi^2$ , derivamos a expressão (2.3) parcialmente em relação aos parâmetros  $a$  e  $b$  e igualamos a zero, o que resulta no seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} \frac{\partial \chi^2}{\partial a} = 2a S_{xx} + 2b S_{xy} - 2S_{xy} = 0 \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial b} = 2a S_x + 2b S_{\sigma} - 2S_y = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Resolvendo os sistemas de equações acima pelo método de Cramer, obtemos os melhores valores dos parâmetros (VUOLO, 1996):

$$a = \frac{S_{\sigma} S_{xy} - S_x S_y}{\Delta_{xx}} \quad (2.6)$$

$$b = \frac{S_{xx}S_y - S_xS_{xy}}{\Delta_{xx}} \quad (2.7)$$

onde  $\Delta_{xx} \equiv S_{xx}S_\sigma - S_x^2$  é o determinante da matriz dos coeficientes do sistema linear (2.5). Vamos determinar agora as incertezas nos parâmetros. Como  $a$  e  $b$  são determinados a partir dos dados  $(x_i, y_i)$ , mas apenas os dados  $y_i$  apresentam erros, as incertezas nos parâmetros podem ser calculadas por:

$$\sigma_a^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial a}{\partial y_i} \right)^2 \sigma_i^2 \quad (2.8)$$

$$\sigma_b^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial b}{\partial y_i} \right)^2 \sigma_i^2 \quad (2.9)$$

Para calcularmos as derivadas acima, vamos usar as expressões obtidas (2.6-2.7). Repare que  $\Delta$  não depende de  $y_i$ . Portanto, se escrevermos:

$$a = \frac{S_\sigma}{\Delta_{xx}} \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} - \frac{S_x}{\Delta_{xx}} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sigma_i^2}, \quad (2.10)$$

conseguimos calcular a derivada em relação a  $y_i$  dentro das somatórias:

$$\frac{\partial a}{\partial y_i} = \frac{S_\sigma}{\Delta_{xx}} \frac{x_i}{\sigma_i^2} - \frac{S_x}{\sigma_i^2} = \frac{S_\sigma x_i - S_x}{\Delta_{xx} \sigma_i^2} \quad (2.11)$$

Portanto, substituindo em (2.8):

$$\sigma_a^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(S_\sigma x_i - S_x)^2}{\Delta_{xx}^2 \sigma_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{S_\sigma^2 x_i^2 - 2S_\sigma S_x x_i + S_x^2}{\Delta_{xx}^2 \sigma_i^2} \quad (2.12)$$

Mas  $\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} = S_{xx}$ ,  $\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} = S_x$  e  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} = S_\sigma$ , portanto:

$$\sigma_a^2 = \frac{S_\sigma^2 S_{xx} - 2S_\sigma S_x^2 + S_x^2 S_\sigma}{\Delta_{xx}^2} = \frac{S_\sigma (S_\sigma S_{xx} - S_x^2)}{\Delta_{xx}^2} = \frac{S_\sigma}{\Delta_{xx}} \quad (2.13)$$

Da mesma forma podemos calcular  $\frac{\partial b}{\partial y_i}$ :

$$b = \frac{S_{xx}}{\Delta_{xx}} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sigma_i^2} - \frac{S_x}{\Delta_{xx}} \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \Rightarrow \frac{\partial b}{\partial y_i} = \frac{S_{xx} - S_x x_i}{\Delta_{xx} \sigma_i^2} \quad (2.14)$$

Portanto, substituindo em (2.9):

$$\sigma_b^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(S_{xx} - S_x x_i)^2}{\Delta_{xx}^2 \sigma_i^2} = \frac{S_{xx}}{\Delta_{xx}} \quad (2.15)$$

Outra quantidade importante, caso se queira calcular algo que dependa dos parâmetros estimados  $a$  e  $b$  é a covariância. A covariância pode ser calculada também por propagação de erros:

$$\sigma_{ab}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a}{\partial y_i} \frac{\partial b}{\partial y_i} \sigma_i^2 \quad (2.16)$$

Portanto, a partir das derivadas já calculadas, temos:

$$\sigma_{ab}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(S_{\sigma} x_i - S_x)(S_{xx} - S_x x_i)}{\Delta_{xx}^2 \sigma_i^2}, \quad (2.17)$$

o que resulta em:

$$\sigma_{ab}^2 = -\frac{S_x}{\Delta_{xx}} \quad (2.18)$$

A covariância, embora simbolizada por  $\sigma_{ab}^2$  pode ser positiva ou negativa, o que leva ao uso também da notação  $\text{cov}(a, b)$ .

### 2.1.1 Ajuste de reta com incertezas iguais

No caso em que as incertezas são iguais,  $\sigma_i = \sigma$ , as equações ficam mais simples, e podemos definir:

$$\begin{aligned} s_{\sigma} &\equiv \sigma^2 S_{\sigma} = \sum_{i=1}^n 1 = n, & s_x &\equiv \sigma^2 S_x = \sum_{i=1}^n x_i, & s_{xx} &\equiv \sum_{i=1}^n x_i^2, \\ s_y &\equiv \sum_{i=1}^n y_i, & s_{xy} &\equiv \sum_{i=1}^n x_i y_i, & s_{yy} &\equiv \sum_{i=1}^n y_i^2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Com essas definições, os melhores ajustes (2.6) e (2.7) agora ficam (VUOLO, 1996):

$$a = \frac{s_{\sigma} s_{xy} - s_x s_y}{\delta_{xx}} \quad (2.20)$$

$$b = \frac{s_{xx} s_y - s_x s_{xy}}{\delta_{xx}} \quad (2.21)$$

onde  $\delta_{xx} \equiv s_{\sigma} s_{xx} - s_x^2$ . As variâncias agora ficam:

$$\sigma_a^2 = \frac{s_{\sigma}}{\delta_{xx}} \sigma^2 \quad \text{e} \quad \sigma_b^2 = \frac{s_{xx}}{\delta_{xx}} \sigma^2 \quad (2.22)$$

e a covariância:

$$\sigma_{ab}^2 = -\frac{s_x}{\delta_{xx}} \sigma^2 \quad (2.23)$$

É interessante notar que os valores ajustados dos parâmetros não dependem de  $\sigma$ .

### 2.1.2 Ajuste de reta $y = ax$

No caso de reta que passa pela origem,  $y = ax$ , o  $\chi^2$  fica simplesmente:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{y_i - ax_i}{\sigma_i} \right]^2 = a^2 S_{xx} - 2aS_{xy} + S_{yy} \quad (2.24)$$

Derivando:

$$\frac{d\chi^2}{da} = 2aS_{xx} - 2S_{xy} \quad (2.25)$$

Igualando a zero, temos o valor do parâmetro  $a$  de melhor ajuste (VUOLO, 1996):

$$a = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \quad (2.26)$$

A variância fica:

$$\sigma_a^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial a}{\partial y_i} \right)^2 \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\frac{x_i}{\sigma_i}}{S_{xx}} \right)^2 \sigma_i^2 = \frac{1}{S_{xx}^2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} = \frac{1}{S_{xx}} \quad (2.27)$$

### 2.1.3 Ajuste de reta $y = ax$ com incertezas iguais

No caso em que as incertezas na variável  $y$  são iguais,  $\sigma_i = \sigma$ , os resultados acima ficam simplesmente (VUOLO, 1996):

$$a = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (2.28)$$

e

$$\sigma_a^2 = \frac{\sigma^2}{S_{xx}} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (2.29)$$

## 2.2 Ajuste de reta com incertezas em $x$ e $y$

No caso do ajuste de reta com incertezas em ambas variáveis, a tarefa de encontrar os melhores valores dos parâmetros minimizando o  $\chi^2$  pode ser bem mais complicada. O método mais aceito para se considerar as incertezas na variável  $x$  é o *rebatimento de incertezas* (VUOLO, 1996).

No rebatimento de incertezas, consideramos que  $y$  é uma função de  $x$ ,  $y = f(x)$  e então propagamos a incerteza de  $x$  em  $y$ :

$$\sigma_{y(x)i} = \left| \frac{dy}{dx} \right|_i \sigma_{xi} \quad (2.30)$$

onde  $\sigma_{y(x)i}$  é a incerteza do dado  $y_i$  devido à incerteza em  $x_i$  e usamos o módulo da derivada  $\left| \frac{dy}{dx} \right|_i \equiv |f'(x_i)|$  para manter a incerteza não-negativa. Somamos quadraticamente essa incerteza à incerteza original de  $y$  obtendo a incerteza total:

$$\sigma_i^2 = \sigma_{yi}^2 + \sigma_{y(x)i}^2 = \sigma_{yi}^2 + \left( \frac{dy}{dx} \right)_i^2 \sigma_{xi}^2 \quad (2.31)$$

No caso da reta  $y = ax + b$ , isso se torna simplesmente

$$\sigma_i^2 = \sigma_{yi}^2 + a^2 \sigma_{xi}^2. \quad (2.32)$$

Como minimizar o  $\chi^2$  com essa expressão para a incerteza é bastante complicado, geralmente se apela para métodos iterativos, onde se determina o parâmetro  $a$  supondo  $\sigma_{xi} = 0$ , pelo método da sub-seção anterior, depois utiliza-se esse valor de  $a$  para corrigir (2.32) e continua-se esse processo até os valores ajustados de  $a$  e  $b$  convergirem para o melhor ajuste.

Porém, como já mostrado em trabalhos anteriores (REED, 1989), a convergência nem sempre é garantida, principalmente quando as incertezas são muito grandes. Além disso, métodos numéricos perdem toda visualização e controle que só se podem obter com métodos analíticos. Por isso, nesse trabalho, concentramos em métodos analíticos e semi-analíticos para resolver esse problema.

O  $\chi^2$ , nesse caso, fica<sup>1</sup>:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - ax_i - b)^2}{\sigma_{yi}^2 + a^2 \sigma_{xi}^2} \quad (2.33)$$

<sup>1</sup> No Apêndice, apresentamos uma justificativa geométrica para o uso dessa expressão para o  $\chi^2$  no caso da reta.

Novamente, podemos escrever o  $\chi^2$  como

$$\chi^2 = a^2 S_{xx}(a) + b^2 S_{\sigma}(a) + S_{yy}(a) + 2ab S_x(a) - 2a S_{xy}(a) - 2b S_y(a) \quad (2.34)$$

Mas agora as somatórias são funções de  $a$ :

$$\begin{aligned} S_{xx}(a) &\equiv \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i(a)^2}, & S_{\sigma}(a) &\equiv \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i(a)^2}, & S_{yy}(a) &\equiv \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{\sigma_i(a)^2}, \\ S_x(a) &\equiv \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i(a)^2}, & S_{xy}(a) &\equiv \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\sigma_i(a)^2}, & S_y(a) &\equiv \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sigma_i(a)^2} \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde  $\sigma_i(a)^2 \equiv \sigma_{yi}^2 + a^2 \sigma_{xi}^2$ .

Derivando parcialmente em relação a  $b$ , e zerando, encontramos:

$$b = \frac{S_y(a) - a S_x(a)}{S_{\sigma}(a)} \quad (2.36)$$

Porém, inserindo esse resultado na equação de  $\chi^2$  e derivando, o resultado é extremamente não-linear e não pode ser resolvido analiticamente. Existem, na literatura, vários métodos semi-analíticos para resolver esse caso geral de ajuste de reta (YORK, 1966; REED, 1989; REED, 1990; REED, 1992; CECCHI, 1991; BRUZZONE; MORENO, 1998). Mas como nosso objetivo aqui é estudar métodos analíticos de ajuste de reta, simplificamos o problema estudando casos particulares para os quais é possível se obter soluções analíticas. Visando encontrar essas soluções, estudaremos a seguir cada caso particular em separado.

Percebemos, em nosso estudo, que os casos mais simples, que fornecem soluções analíticas, são aqueles em que as incertezas são iguais ponto a ponto, isto é,  $\sigma_y = \sigma_{yi}$ ,  $\sigma_x = \sigma_{xi}$ . Esses casos são bastante comuns nas análises mais básicas, quando não há mudança na escala do instrumento de medição, por exemplo (incertezas instrumentais iguais). Por serem mais simples, estudaremos esses casos a seguir.

### 2.2.1 Incertezas iguais em $x$ e $y$ : $y = ax$

Nesse caso, que corresponde à reta que passa pela origem, temos  $b = 0$  e as equações que minimizam o  $\chi^2$  ficam muito mais simples. Temos agora que  $\chi^2 = \chi^2(a)$ , apenas. Temos:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - ax_i)^2}{\sigma_y^2 + a^2 \sigma_x^2} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2 - 2ax_i y_i + a^2 x_i^2}{\sigma_y^2 + a^2 \sigma_x^2} \quad (2.37)$$

A partir daí, podemos definir a quantidade:

$$\varepsilon \equiv \frac{\sigma_x}{\sigma_y}, \quad (2.38)$$

que é interessante, pois, em muitas situações, temos  $\sigma_x \ll \sigma_y$ , o que corresponderia a  $\varepsilon \ll 1$  e onde podemos eventualmente fazer alguma aproximação, caso necessário.

Em termos de  $\varepsilon$ :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2 - 2ax_iy_i + a^2x_i^2}{\sigma_y^2(1 + a^2\varepsilon^2)} \quad (2.39)$$

Se definirmos a função

$$W(a) \equiv \frac{1}{\sigma_y^2(1 + a^2\varepsilon^2)}, \quad (2.40)$$

podemos reescrever o  $\chi^2$ :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n W(a)(y_i^2 - 2ax_iy_i + a^2x_i^2) = W(a)(a^2s_{xx} - 2as_{xy} + s_{yy}) \quad (2.41)$$

onde agora temos as somas simples, que não envolvem incertezas:

$$s_{xx} \equiv \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad s_{xy} \equiv \sum_{i=1}^n x_iy_i, \quad s_{yy} \equiv \sum_{i=1}^n y_i^2. \quad (2.42)$$

Derivando em relação a  $a$ :

$$\frac{d\chi^2}{da} = \frac{dW}{da}(a^2s_{xx} - 2as_{xy} + s_{yy}) + 2W(a)(as_{xx} - s_{xy}) \quad (2.43)$$

onde

$$\frac{dW}{da} = -\frac{2a\varepsilon^2}{\sigma_y^2(1 + a^2\varepsilon^2)^2} \quad (2.44)$$

Inserindo em (2.43) e igualando a zero, encontramos a equação quadrática

para  $a$ :

$$a^2\varepsilon^2s_{xy} + a(s_{xx} - \varepsilon^2s_{yy}) - s_{xy} = 0, \quad (2.45)$$

cuja solução é dada por:

$$a = \frac{\varepsilon^2s_{yy} - s_{xx} \pm \sqrt{(\varepsilon^2s_{yy} - s_{xx})^2 + 4\varepsilon^2s_{xy}^2}}{2\varepsilon^2s_{xy}} \quad (2.46)$$

Assim, surge uma ambiguidade: com dois valores possíveis para o parâmetro  $a$  que são pontos críticos de  $\chi^2(a)$ , vem à tona a questão de qual solução é mínimo e qual é máximo. Propomos o seguinte método para distinguir as duas situações: da Eq. (2.43) com o resultado (2.44), podemos escrever:

$$\frac{\sigma_y^2(1 + a^2\varepsilon^2)^2}{2} \frac{d\chi^2}{da} = a^2\varepsilon^2s_{xy} + a(s_{xx} - \varepsilon^2s_{yy}) - s_{xy} \quad (2.47)$$

Derivando essa expressão, temos:

$$\frac{\sigma_y^2(1+a^2\varepsilon^2)^2}{2} \frac{d^2\chi^2}{da^2} + \frac{d}{da} \left( \frac{\sigma_y^2(1+a^2\varepsilon^2)^2}{2} \right) \frac{d\chi^2}{da} = 2a\varepsilon^2 s_{xy} + s_{xx} - \varepsilon^2 s_{yy} \quad (2.48)$$

Mas, **no ponto crítico**,  $\frac{d\chi^2}{da} = 0$ , então, podemos escrever para a segunda derivada nesse ponto:

$$\left. \frac{\sigma_y^2(1+a^2\varepsilon^2)^2}{2} \frac{d^2\chi^2}{da^2} \right|_{cr} = 2a\varepsilon^2 s_{xy} + s_{xx} - \varepsilon^2 s_{yy} \quad (2.49)$$

onde  $\left. \frac{d^2\chi^2}{da^2} \right|_{cr}$  é a segunda derivada no ponto crítico. Como sabemos, se a segunda derivada de uma função é positiva num ponto crítico, esse ponto é um mínimo, e se for negativa, é um máximo. Assim, como estamos apenas interessados no sinal da segunda derivada, esse sinal será dado pelo lado direito da Eq. (2.49). Definimos:

$$f(a) \equiv 2a\varepsilon^2 s_{xy} + s_{xx} - \varepsilon^2 s_{yy} \quad (2.50)$$

Calculando essa função nos pontos críticos (2.46), temos que  $f(a) > 0$  na solução com sinal positivo da raiz. Assim, o valor de  $a$  que minimiza o  $\chi^2$  é:

$$\bar{a} = \frac{\varepsilon^2 s_{yy} - s_{xx} + \sqrt{(\varepsilon^2 s_{yy} - s_{xx})^2 + 4\varepsilon^2 s_{xy}^2}}{2\varepsilon^2 s_{xy}} \quad (2.51)$$

Expandindo (2.51) para valores pequenos de  $\varepsilon$ , temos:

$$\bar{a} = \frac{s_{xy}}{s_{xx}} + (s_{xx}s_{yy} - s_{xy}^2) \frac{s_{xy}}{s_{xx}^3} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) \quad (2.52)$$

onde podemos ver que o primeiro termo corresponde ao caso em que não há incerteza em  $x$ .

A variância de  $a$  agora é dada por:

$$\sigma_a^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial a}{\partial y_i} \right)^2 \sigma_y^2 + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial a}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{\partial a}{\partial y_i} \right)^2 + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial a}{\partial x_i} \right)^2 \right] \quad (2.53)$$

Calculamos as derivadas implicitamente usando a expressão (2.45) e obtivemos:

$$\sigma_a^2 = \sigma_y^2 \frac{(\bar{a}^2 \varepsilon^2 + 1)^2 (s_{xx} + s_{yy} \varepsilon^2)}{(s_{yy} \varepsilon^2 - s_{xx})^2 + 4s_{xy}^2 \varepsilon^2} \quad (2.54)$$

o que corresponde para a incerteza de  $a$ :

$$\sigma_a = \sigma_y (\bar{a}^2 \varepsilon^2 + 1) \sqrt{\frac{s_{xx} + s_{yy} \varepsilon^2}{(s_{yy} \varepsilon^2 - s_{xx})^2 + 4s_{xy}^2 \varepsilon^2}} \quad (2.55)$$

que para pequenos  $\varepsilon$  fica:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_y}{\sqrt{s_{xx}}} + \frac{\sigma_y (3s_{xx}s_{yy} - 2s_{xy}^2)}{2s_{xx}^{5/2}} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) \quad (2.56)$$

onde o primeiro termo corresponde ao caso que não há incerteza em  $x$ .

### 2.2.2 Incertezas iguais em $x$ e $y$ : $y = ax + b$

No caso em que  $y = ax + b$ , temos:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - ax_i - b)^2}{\sigma_y^2 + a^2\sigma_x^2} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2 + a^2x_i^2 + b^2 - 2ax_iy_i - 2by_i + 2abx_i}{\sigma_y^2 + a^2\sigma_x^2} \quad (2.57)$$

Portanto:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2 + a^2x_i^2 + b^2 - 2ax_iy_i - 2by_i + 2abx_i}{\sigma_y^2(1 + a^2\varepsilon^2)} \quad (2.58)$$

Se definirmos a função

$$W(a) \equiv \frac{1}{\sigma_y^2(1 + a^2\varepsilon^2)}, \quad (2.59)$$

podemos reescrever o  $\chi^2$ :

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum_{i=1}^n W(a)(y_i^2 + a^2x_i^2 + b^2 - 2ax_iy_i - 2by_i + 2abx_i) = \\ &= W(a) [a^2s_{xx} + (2bs_x - 2s_{xy})a + s_{yy} + nb^2 - 2bs_y] \end{aligned} \quad (2.60)$$

onde agora temos as somas simples, que não envolvem incertezas:

$$s_{xx} \equiv \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad s_{xy} \equiv \sum_{i=1}^n x_iy_i, \quad s_{yy} \equiv \sum_{i=1}^n y_i^2. \quad (2.61)$$

Derivando em relação a  $b$ :

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial b} = W(a)(2nb - 2s_y + 2as_x) \quad (2.62)$$

Fazendo  $\frac{\partial \chi^2}{\partial b} = 0$ , obtemos:

$$b = \frac{s_y - as_x}{n} \quad (2.63)$$

Inserindo em  $\frac{\partial \chi^2}{\partial a}$  e igualando a zero, encontramos a equação quadrática para  $a$ :

$$a^2\varepsilon^2\delta_{xy} + a(\delta_{xx} - \varepsilon^2\delta_{yy}) - \delta_{xy} = 0, \quad (2.64)$$

onde  $\delta_{xx} = ns_{xx} - s_x^2$  como nas seções anteriores e também definimos:

$$\delta_{xy} \equiv ns_{xy} - s_x s_y, \quad \delta_{yy} \equiv ns_{yy} - s_y^2 \quad (2.65)$$

cuja solução é dada por:

$$a = \frac{\varepsilon^2\delta_{yy} - \delta_{xx} \pm \sqrt{(\varepsilon^2\delta_{yy} - \delta_{xx})^2 + 4\varepsilon^2\delta_{xy}^2}}{2\varepsilon^2\delta_{xy}} \quad (2.66)$$

Da mesma forma que no caso anterior, a solução que minimiza o  $\chi^2$  é aquela com sinal positivo na raiz:

$$\bar{a} = \frac{\varepsilon^2 \delta_{yy} - \delta_{xx} + \sqrt{(\varepsilon^2 \delta_{yy} - \delta_{xx})^2 + 4\varepsilon^2 \delta_{xy}^2}}{2\varepsilon^2 \delta_{xy}} \quad (2.67)$$

Expandindo (2.67) para valores pequenos de  $\varepsilon$ , temos:

$$\bar{a} = \frac{\delta_{xy}}{\delta_{xx}} + (\delta_{xx} \delta_{yy} - \delta_{xy}^2) \frac{\delta_{xy}}{\delta_{xx}^3} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) \quad (2.68)$$

onde podemos ver que o primeiro termo corresponde ao caso em que não há incerteza em  $x$ .

Novamente, a variância de  $a$  é dada por:

$$\sigma_a^2 = \sigma_y^2 \sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{\partial a}{\partial y_i} \right)^2 + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial a}{\partial x_i} \right)^2 \right] \quad (2.69)$$

o que resulta em:

$$\sigma_a^2 = n\sigma_y^2 \frac{(\bar{a}^2 \varepsilon^2 + 1)^2 (\delta_{xx} + \delta_{yy} \varepsilon^2)}{(\delta_{yy} \varepsilon^2 - \delta_{xx})^2 + 4\delta_{xy}^2 \varepsilon^2}. \quad (2.70)$$

o que corresponde para a incerteza de  $a$ :

$$\sigma_a = \sigma_y (1 + \bar{a}^2 \varepsilon^2) \sqrt{\frac{n (\delta_{xx} + \delta_{yy} \varepsilon^2)}{(\delta_{yy} \varepsilon^2 - \delta_{xx})^2 + 4\delta_{xy}^2 \varepsilon^2}}. \quad (2.71)$$

que para pequenos  $\varepsilon$  fica:

$$\sigma_a = \sigma_y \sqrt{\frac{n}{\delta_{xx}}} + \frac{\sigma_y n^{1/2} (3\delta_{xx} \delta_{yy} - 2\delta_{xy}^2)}{2\delta_{xx}^{5/2}} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) \quad (2.72)$$

onde o primeiro termo corresponde ao caso que não há incerteza em  $x$ .

Analogamente, a variância de  $b$  é dada por:

$$\sigma_b^2 = \sigma_y^2 \sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{\partial b}{\partial y_i} \right)^2 + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial b}{\partial x_i} \right)^2 \right] \quad (2.73)$$

A partir disso e da expressão para  $b$  (2.63), obtemos:

$$\sigma_b^2 = \frac{\sigma_y^2 (1 + \bar{a}^2 \varepsilon^2)}{n} + \frac{s_x^2 \sigma_a^2}{n^2} \quad (2.74)$$

que recupera a expressão de  $\sigma_b^2$  no caso que  $\sigma_x \rightarrow 0$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

A covariância entre  $a$  e  $b$  é dada por:

$$\text{cov}(a, b) = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial a}{\partial y_i} \frac{\partial b}{\partial y_i} \sigma_{y_i}^2 + \frac{\partial a}{\partial x_i} \frac{\partial b}{\partial x_i} \sigma_{x_i}^2 \right] = \sigma_y^2 \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial a}{\partial y_i} \frac{\partial b}{\partial y_i} + \varepsilon^2 \frac{\partial a}{\partial x_i} \frac{\partial b}{\partial x_i} \right] \quad (2.75)$$

Calculando, obtemos

$$\text{cov}(a, b) = -\frac{s_x \sigma_a^2}{n} \quad (2.76)$$

que recupera a expressão para a covariância quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

No Quadro 1, fazemos um resumo com as fórmulas dos ajustes analisados nesse trabalho.

Quadro 1 – Quadro-resumo dos ajustes aqui analisados. Além das quantidades já definidas no texto, definimos aqui as quantidades:  $D_1 \equiv (\varepsilon^2 s_{yy} - s_{xx})^2 + 4\varepsilon^2 s_{xy}^2$ ,  $D_2 \equiv (\varepsilon^2 \delta_{yy} - \delta_{xx})^2 + 4\varepsilon^2 \delta_{xy}^2$

<b>Modelo</b>	$\sigma_i$	$\bar{a}$	$\sigma_a^2$	
$y = ax$	$\sigma_y$	$\frac{s_{xy}}{s_{xx}}$	$\frac{\sigma_y^2}{s_{xx}}$	
$y = ax$	$\sigma_{yi}$	$\frac{s_{xy}}{S_{xx}}$	$\frac{1}{S_{xx}}$	
$y = ax + b$	$\sigma_y$	$\frac{s_{\sigma} s_{xy} - s_x s_y}{S_{xx}}$	$\frac{s_{\sigma} \sigma_y^2}{S_{xx}}$	
$y = ax + b$	$\sigma_{yi}$	$\frac{\delta_{xx}}{S_{\sigma} S_{xy} - S_x S_y}$	$\frac{\delta_{xx}}{S_{\sigma}}$	
$y = ax$	$\sigma_x, \sigma_y$	$\frac{\Delta_{xx}}{\varepsilon^2 s_{yy} - s_{xx} + \sqrt{D_1}}$	$\frac{\sigma_y^2 (\bar{a}^2 \varepsilon^2 + 1)^2 (s_{xx} + s_{yy} \varepsilon^2)}{D_1}$	
$y = ax + b$	$\sigma_x, \sigma_y$	$\frac{\Delta_{xx}}{\varepsilon^2 \delta_{yy} - \delta_{xx} + \sqrt{D_2}}$	$\frac{n \sigma_y^2 (\bar{a}^2 \varepsilon^2 + 1)^2 (\delta_{xx} + \delta_{yy} \varepsilon^2)}{D_2}$	
<b>Modelo</b>	$\sigma_i$	$b$	$\sigma_b^2$	<b>cov}(a, b)</b>
$y = ax$	$\sigma_y$	—	—	—
$y = ax$	$\sigma_{yi}$	—	—	—
$y = ax + b$	$\sigma_y$	$\frac{s_{xx} s_y - s_x s_{xy}}{S_{xx}}$	$\frac{s_{xx} \sigma_y^2}{S_{xx}}$	$-\frac{s_x \sigma_y^2}{S_{xx}}$
$y = ax + b$	$\sigma_{yi}$	$\frac{\delta_{xx}}{S_{xx} S_y - S_x S_{xy}}$	$\frac{\delta_{xx}}{S_{xx}}$	$-\frac{\delta_{xx}}{S_{xx}}$
$y = ax$	$\sigma_x, \sigma_y$	$\frac{\Delta_{xx}}{\Delta_{xx}}$	$\frac{\Delta_{xx}}{\Delta_{xx}}$	$-\frac{\Delta_{xx}}{\Delta_{xx}}$
$y = ax + b$	$\sigma_x, \sigma_y$	—	—	—
$y = ax + b$	$\sigma_x, \sigma_y$	$\frac{s_y - \bar{a} s_x}{n}$	$\frac{\sigma_y^2 (1 + \bar{a}^2 \varepsilon^2)}{n} + \frac{s_x^2 \sigma_a^2}{n^2}$	$-\frac{s_x \sigma_a^2}{n}$

### 3 METODOLOGIA

Para a realização deste trabalho foi feita uma pesquisa na literatura, com o objetivo de procurar trabalhos com dados disponíveis, onde são feitas análises estatísticas dos dados, de modo que pudéssemos aplicar nosso método estatístico e comparar as análises.

Assim, entre os artigos pesquisados, escolhemos utilizar o artigo de Ribeiro et al. (2011), sobre “Variação da densidade básica da madeira de *Toona ciliata* Roem cultivada em diferentes localidades”, onde neste estudo foram utilizadas amostras de Cedro Australiano de 4 anos de idade, vindo de três municípios na região sul de Minas Gerais. Em cada região foram coletadas 5 árvores. Após a escolha das árvores, foram retirados discos de quatro centímetros de espessura, a partir disso os discos foram transformados em cunhas, separadas em três partes: posição interna, intermediária e externa, para a estimativa da densidade básica.

Segundo este trabalho a determinação da densidade básica da madeira, foi de acordo com a norma NBR 11941-02 (ABNT, 2003), sendo assim foi utilizada uma balança com capacidade mínima de 3 kg e sensibilidade de 0,1 g.

A metodologia utilizada foi feita com o uso de métodos estatísticos, para obter ajustes mais precisos dos dados, tais como:

- a) Método dos Mínimos Quadrados;
- b) Método de Máxima Verossimilhança;
- c) Regressão Linear.

No caso de Ribeiro et al. (2011), para a aplicação dos métodos estatísticos estudados, foram utilizadas as respectivas médias das amostras, que são os principais dados fornecidos no artigo.

Também utilizamos, como um segundo exemplo de aplicação do método, uma simulação de dados pouco correlacionados, baseados nos dados de Reed (1989). Foi importante a utilização de dados muito correlacionados como no primeiro exemplo e dados pouco correlacionados como os de Reed (1989), como veremos na próxima seção.

### 3.1 Materiais

Para a realização de análises estatísticas durante a realização deste trabalho, foram utilizados alguns *softwares*:

- a) Microsoft Excel para organização dos dados;
- b) gnuplot<sup>1</sup> para cálculo numérico e plotagem.

---

<sup>1</sup> <<http://www.gnuplot.info/>>

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Escolhemos dois exemplos para aplicar a nossa análise, primeiro os dados de Ribeiro et al. (2011), onde eles estudam a variação da densidade básica de *Toona ciliata* Roem cultivada em diferentes localidades e, num segundo exemplo, uma simulação de dados tendo como base os dados de Reed (1989). Os dados são bem diferentes entre si, principalmente pelo fato de que os dados são muito correlacionados no primeiro caso e pouco correlacionados no segundo. Vamos ver como se comportam os dois casos.

### 4.1 Exemplo I - Variação da densidade básica de *Toona ciliata* com a altura

O primeiro exemplo que usamos para aplicar nossa análise vem do artigo de Ribeiro et al. (2011), onde eles estudam a variação da densidade básica de *Toona ciliata* Roem cultivada em diferentes localidades. Os dados mais completos disponibilizados nesse artigo dizem respeito à variação da densidade básica com a altura de *Toona ciliata* no município de Cana Verde. Os dados encontram-se na Tabela 1.

Tabela 1 – Exemplo I - Variação da densidade com a altura, no município de Cana Verde.

Altura (m)	Densidade (g/cm <sup>3</sup> )
0	0,272
1,3	0,302
2,6	0,314
3,9	0,332
5,2	0,348
6,5	0,35

Fonte: Ribeiro et al. (2011).

Uma dificuldade que encontramos nessa análise é que esses dados não apresentam incerteza, nem na variável  $x$  (altura), nem na variável  $y$  (densidade). Assim, para aplicar nossa análise, precisamos primeiro estimar as incertezas. Um método para estimar as incertezas, supondo incertezas apenas em  $y$  iguais, é descrito em Vuolo (1996) (pg. 202). Consiste no seguinte: a partir do  $\chi^2$ , podemos definir o  $\chi^2$  reduzido,  $\chi_{red}^2$ :

$$\chi_{red}^2 \equiv \frac{\chi^2}{\nu} \quad (4.1)$$

onde  $\nu = n - p$  é o número de graus de liberdade do ajuste,  $n$  é o número de dados

e  $p$  é o número de parâmetros livres. A partir dessa quantidade, podemos analisar a qualidade do ajuste. A distribuição de  $\chi_{red}^2$  indica que essa quantidade tem um valor mais provável  $\chi_{red}^2 = 1$ . Portanto, ajustes de boa qualidade possuem  $\chi_{red}^2 \approx 1$ . Além disso, ajustes que não levam em conta as incertezas são equivalentes a ajustes com incerteza  $\sigma_y = 1$ . Vamos tentar obter, então, uma incerteza corrigida,  $\sigma'_y = k\sigma_y$ , onde  $k$  é um fator de correção, de modo a obtermos  $\chi_{red}^2 = 1$ . Vamos chamar esse novo  $\chi^2$  de  $\chi^{2'}$ . Se fizermos  $\chi_{red}^{2'} = 1$  (ou  $\chi^{2'} = \nu$ ), obtemos:

$$\chi^{2'} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i - f(x_i)}{k\sigma_y} \right)^2 = \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i - f(x_i)}{\sigma_y} \right)^2 = \frac{\chi^2}{k^2} = \nu \quad (4.2)$$

onde supomos que as incertezas  $\sigma_y$  são iguais. A partir daí, podemos obter  $k$ :

$$k = \sqrt{\frac{\chi^2}{\nu}} = \sqrt{\chi_{red}^2} \quad (4.3)$$

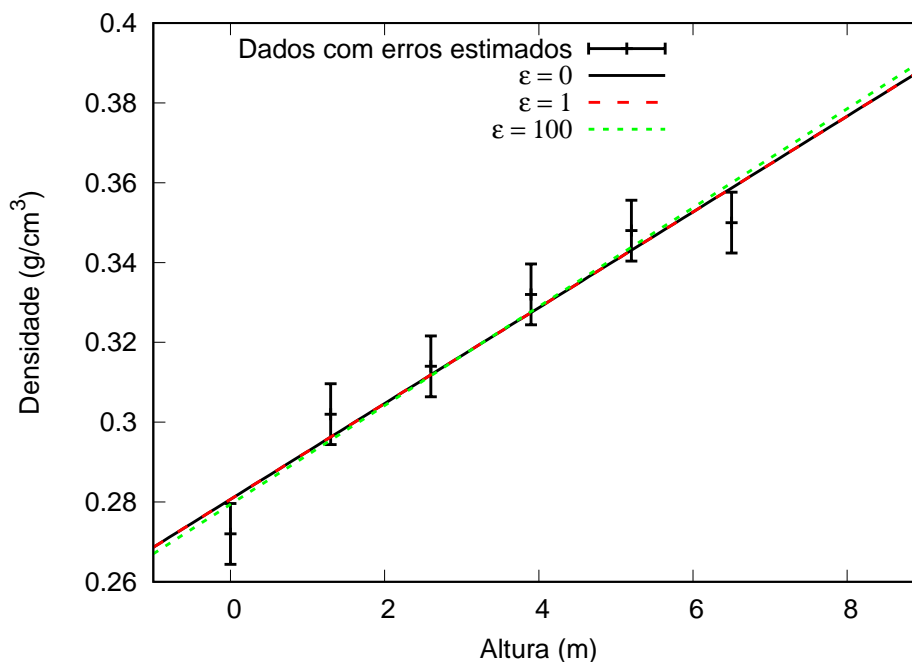
e assim obtemos uma estimativa para as incertezas  $\sigma'_y$ ,  $\sigma'_y \approx \sqrt{\chi_{red}^2}$  (pois  $\sigma_y = 1$  nesse caso). Na verdade, isso já é feito implicitamente em vários *softwares* de ajuste de reta para estimar as incertezas nos parâmetros (como no Microsoft Excel, por exemplo). Repare que, se não temos incertezas em  $x$ , os parâmetros de melhor ajuste  $a$  e  $b$  não dependem das incertezas, como mostrado na seção 2.1 e também em Vuolo (1996). Porém, as incertezas de  $a$  e  $b$  dependem das incertezas  $\sigma_y$ . No artigo de Ribeiro et al. (2011), estima-se os valores de melhor ajuste dos parâmetros, que estão corretos, se não há incerteza em  $x$ . Porém, não se estima as incertezas dos parâmetros. Isso é um grande erro, já que se tivermos grandes incertezas nos parâmetros, até mesmo a tendência inferida na análise pode não existir. No mínimo, é necessário se indicar as incertezas instrumentais se não estão disponíveis as incertezas estatísticas<sup>1</sup>.

Outro problema que existe, já que não há a indicação das incertezas, é que não sabemos o valor das incertezas  $\sigma_x$ . Como mostramos na seção 2.2, no caso em que temos incertezas em ambas variáveis, até mesmo os valores estimados de  $a$  e  $b$  variam. De fato, mostramos que os valores de melhor ajuste  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$  dependem de  $\varepsilon$ , a razão entre as incertezas  $\sigma_x/\sigma_y$ . Como não temos as incertezas  $\sigma_{xi}$ , vamos supô-las constantes,  $\sigma_{xi} = \sigma_x$  e vamos analisar as dependências  $\bar{a}(\varepsilon)$  e  $\bar{b}(\varepsilon)$  para esse ajuste. A partir das expressões encontradas na subseção 2.2.2 (Equações 2.67

<sup>1</sup>  $\sigma^2 = \sigma_{inst}^2 + \sigma_{est}^2$ , onde  $\sigma_{inst}$  é a incerteza instrumental (devida ao equipamento) e  $\sigma_{est}$  é a incerteza estatística (devida à flutuação estatística) (VUOLO, 1996).

e 2.63), plotamos a Figura 1, mostrando as retas de melhor ajuste para alguns valores de  $\varepsilon$ .

Figura 1 – Exemplo I - Dados com retas ajustadas.



Como podemos ver nessa Figura, a variação do ajuste foi muito pequena com  $\varepsilon$ . Escolhemos plotar até  $\varepsilon = 100$  porque esse seria o valor caso estimássemos as incertezas dos dados como sendo dada pelo último dígito (0,1 m para a altura e 0,001 g/cm³ para a densidade). Podemos ver essas variações também na Tabela 2.

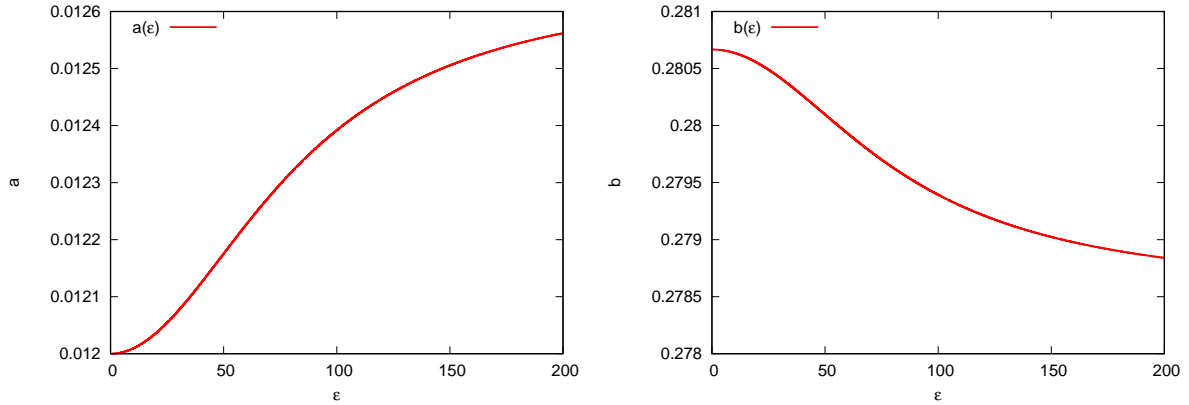
Tabela 2 – Exemplo I - Valores de  $a$  e  $b$  de melhor ajuste para alguns valores de  $\varepsilon$ .

$\varepsilon$	$a$	$b$	$\sigma_a$	$\sigma_b$
0	0,0120	0,2807	0,0014	0,0055
1	0,0120	0,2807	0,0014	0,0055
100	0,0124	0,2794	0,0015	0,0057

Os valores obtidos de  $a$  e  $b$  para  $\varepsilon = 0$  conforme descritos na Tabela 2, estão de acordo com os valores obtidos em Ribeiro et al. (2011), a saber,  $a = 0,0120$  e  $b = 0,2699$ . A pequena diferença entre o resultado obtido aqui e o resultado de Ribeiro et al. (2011) é devido ao fato de que lá foi ajustada a relação entre a densidade básica da região interna e a altura e não as médias das densidades básicas como fizemos aqui. Utilizamos as médias por serem os únicos dados disponíveis em Ribeiro et al. (2011).

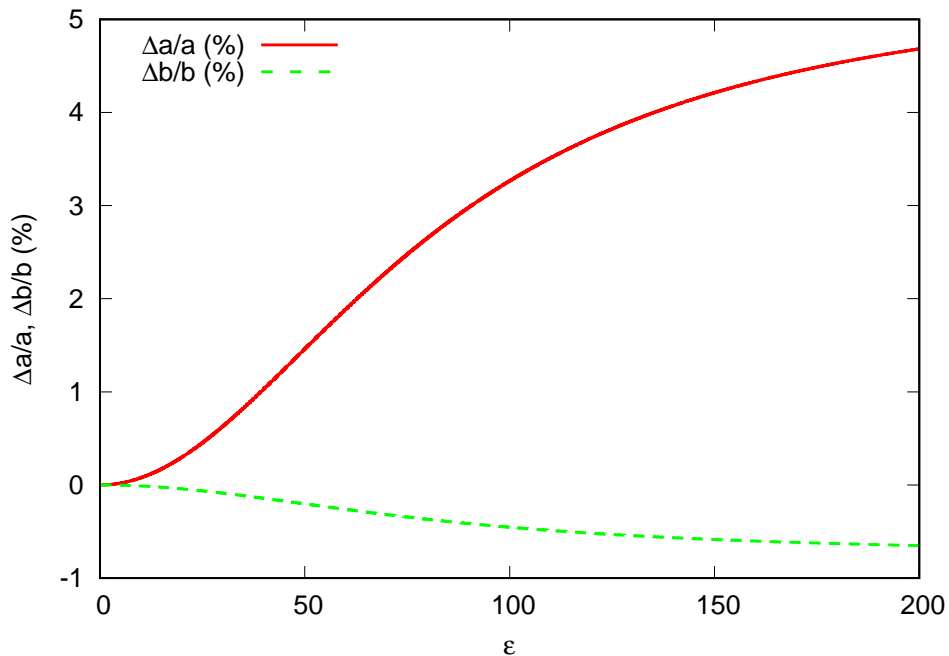
Para ficar mais clara a variação de  $a$  e  $b$  com  $\varepsilon$ , plotamos, na Figura 2 as dependências  $a(\varepsilon)$  e  $b(\varepsilon)$ .

Figura 2 – Exemplo I -  $a(\varepsilon)$  e  $b(\varepsilon)$  para os dados analisados.



Para podermos comparar diretamente as variações de  $a$  e  $b$  com  $\varepsilon$ , plotamos em uma mesma figura as variações percentuais  $\Delta a/a$  e  $\Delta b/b$ . O resultado pode ser visto na Figura 3.

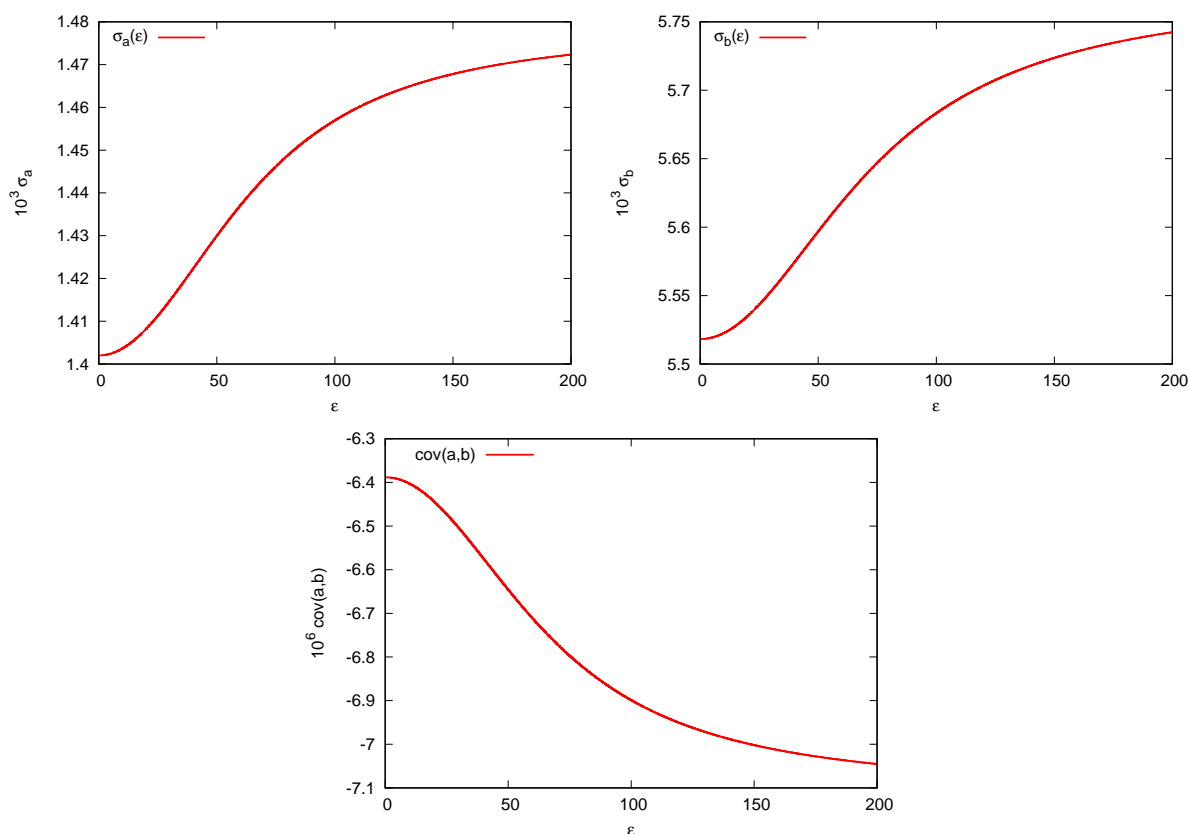
Figura 3 – Exemplo I - Variação percentual de  $a(\varepsilon)$  e  $b(\varepsilon)$  para os dados analisados.



Como podemos ver nessa Figura, o parâmetro  $a$  pode variar positivamente até  $\sim 5\%$  para  $\varepsilon = 200$  e  $b$  varia negativamente até  $\sim 1\%$ . E quanto às incertezas? Como elas dependem de  $\varepsilon$ ? Primeiramente, para analisar a variação das incertezas com  $\varepsilon$ , não podemos simplesmente fixar a incerteza  $\sigma_y$  no valor obtido para  $\varepsilon = 0$  e

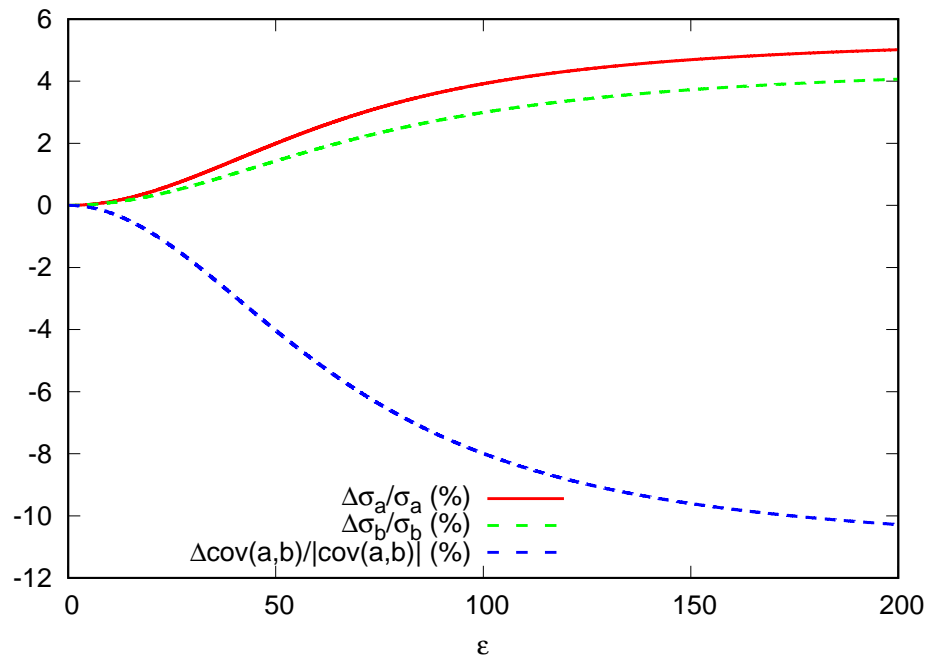
ir aumentando  $\varepsilon$ . Isso aumentaria a incerteza total, o que diminuiria o  $\chi_{red}^2$  e portanto, pioraria a qualidade do ajuste. Para analisar a variação das incertezas com  $\varepsilon$ , portanto, exigimos sempre que o ajuste fosse de boa qualidade, ou seja, impusemos  $\chi_{red}^2 = 1$  para cada valor de  $\varepsilon$ , o que pode ser obtido reescalando as incertezas  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  com o fator de correção  $k$  (Equação 4.3) conforme variamos  $\varepsilon$ . Usamos, então, as Equações (2.71), (2.74) e (2.76) corrigidas pelo fator  $k$ . O resultado pode ser visto na Figura 4.

Figura 4 – Exemplo I -  $\sigma_a(\varepsilon)$ ,  $\sigma_b(\varepsilon)$  e  $cov(a, b)$  para os dados analisados.



Como podemos ver nessa figura,  $\sigma_a$  e  $\sigma_b$  aumentam com  $\varepsilon$ , enquanto a  $cov(a, b)$  diminui (aumenta em módulo). Vamos comparar diretamente as três variações plotando as variações percentuais na Figura 5.

Figura 5 – Exemplo I - Variação percentual de  $\sigma_a(\varepsilon)$ ,  $\sigma_b(\varepsilon)$  e  $\text{cov}(a,b)(\varepsilon)$  para os dados analisados.



Como podemos ver nessa figura,  $\sigma_a$  varia até 5% em comparação com o caso em que não há incertezas em  $x$ ,  $\sigma_b$  varia 4% e  $\text{cov}(a,b)$  varia  $\sim 10\%$ .

#### 4.2 Exemplo II - Simulação de dados pouco correlacionados

No segundo exemplo que usamos para aplicar nossa análise, tomamos como base os dados de Reed (1989). Nessa referência, eles analisam como segundo exemplo, dados pouco correlacionados e com grandes incertezas. Porém, o foco de Reed (1989) é estudar um método semi-analítico para incertezas variáveis em ambas coordenadas. Como aqui estudamos apenas incertezas fixas em  $x$  e  $y$ , tomamos uma média das incertezas daquele trabalho com o intuito apenas de testar o método para o caso em que os dados são espalhados, pouco correlacionados. Os dados encontram-se na Tabela 3.

Tabela 3 – Exemplo II - Dados simulados com baixa correlação.

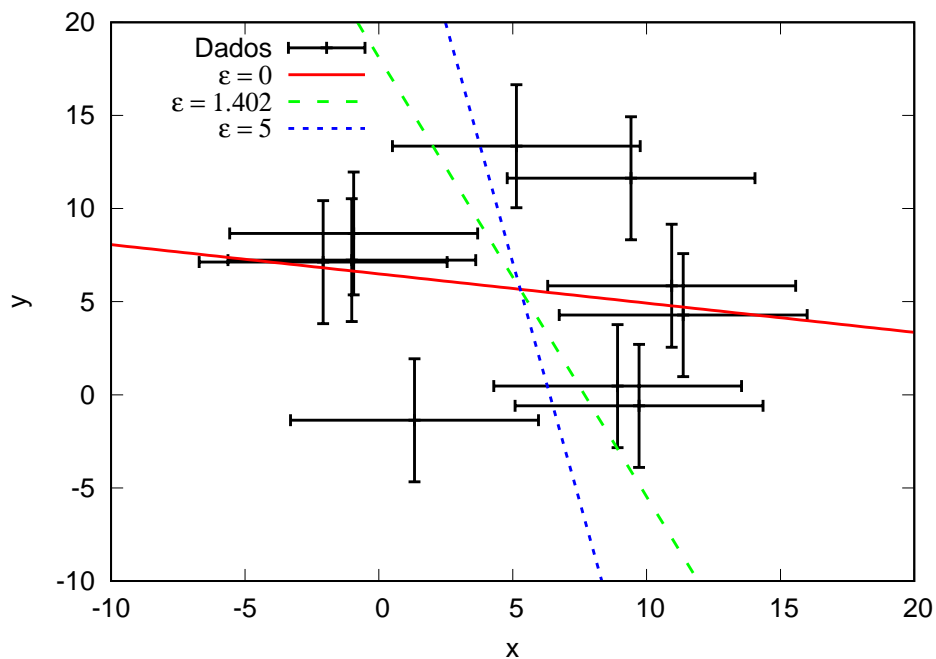
$x$	$\sigma_x$	$y$	$\sigma_y$
1,333	2,469	-1,367	0,297
-1,009	6,363	7,232	4,672
9,72	6,045	-0,593	2,014
-2,079	4,061	7,124	0,022
8,92	5,325	0,468	6,868
-0,938	5,865	8,664	2,834
10,94	3,993	5,854	4,647
5,138	3,787	13,35	4,728
11,37	3,693	4,279	2,274
9,421	4,687	11,63	4,659

Fonte: Reed (1989).

A partir dessas incertezas, fizemos médias simples e obtivemos  $\sigma_x = 4,629$  e  $\sigma_y = 3,302$ . São esses os valores que usamos nessa análise. Esses valores fornecem  $\varepsilon = 1,402$ . Esse será o valor central da nossa análise. Porém, como nossa intenção aqui é demonstrar como o ajuste depende das incertezas em  $x$  e  $y$ , analisaremos também a variação do ajuste com  $\varepsilon$  para valores em torno desse valor central.

A partir das expressões encontradas na subseção 2.2.2 (Equações 2.67 e 2.63), plotamos a Figura 6, mostrando as retas de melhor ajuste para alguns valores de  $\varepsilon$ .

Figura 6 – Exemplo II - Dados com retas ajustadas.



Como podemos ver nessa Figura, a variação do ajuste com  $\varepsilon$  foi muito grande. Podemos ver essas variações para alguns valores de  $\varepsilon$  também na Tabela 4.

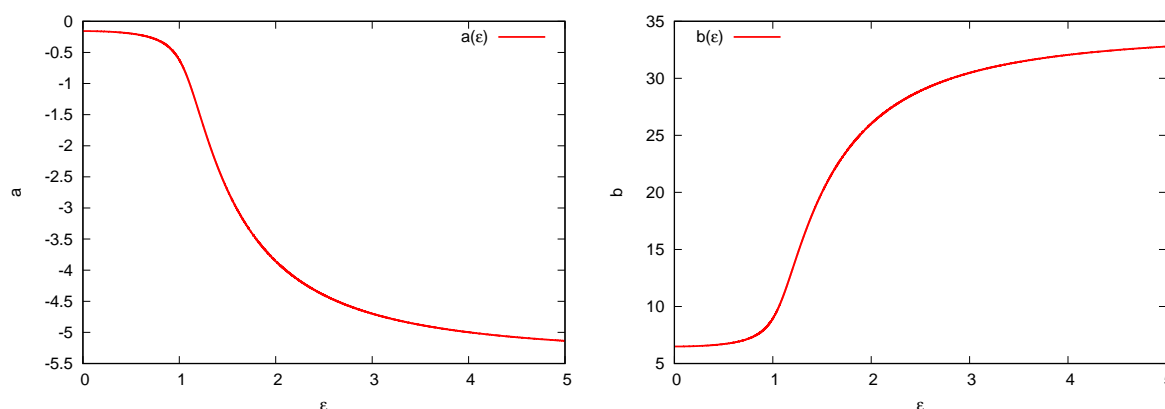
Tabela 4 – Exemplo II - Valores de  $a$  e  $b$  de melhor ajuste para alguns valores de  $\varepsilon$ .

$\varepsilon$	$a$	$\sigma_a$	$b$	$\sigma_b$
0	-0,16	0,32	6,5	2,4
1,4	-2,4	6,0	18	32
5	-5	11	33	57

O valor obtido de  $a$  para  $\varepsilon = 0$  conforme descrito na Tabela 4, está de acordo com o valor obtido em Reed (1989), a saber,  $a = -0,157$ . O autor desse artigo não disponibiliza o valor obtido para  $b$ . Também não podemos comparar nossos resultados para  $\varepsilon \neq 0$  com o resultado obtido naquele artigo, pois Reed (1989) utiliza incertezas variáveis para os seus dados. De fato, Reed (1989) chega a obter  $a$  positivo no melhor ajuste, o que também demonstra a grande dependência dos valores de melhor ajuste com as incertezas nesse caso.

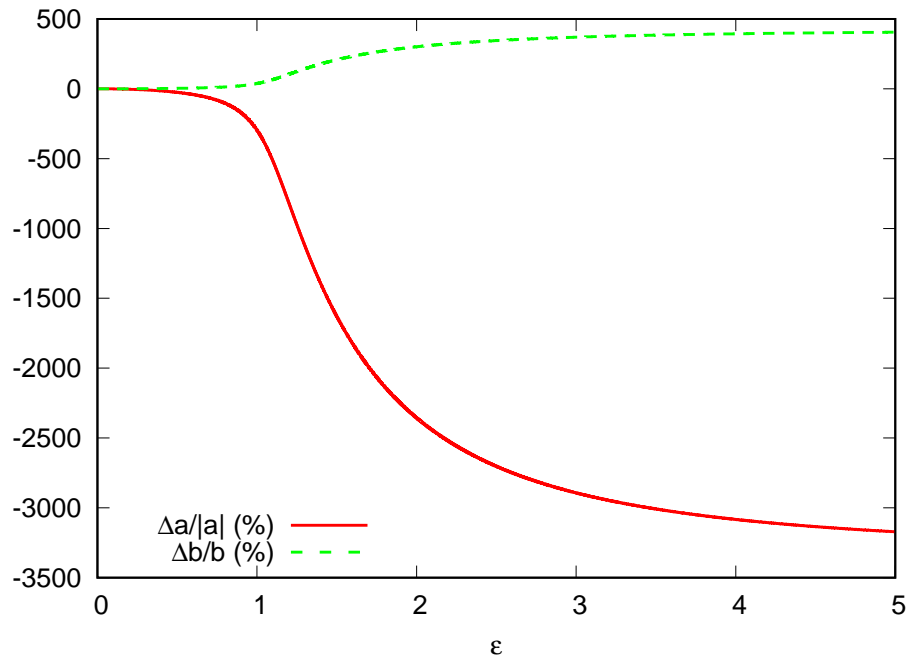
Para ficar mais clara a variação de  $a$  e  $b$  com  $\varepsilon$ , plotamos, na Figura 7 as dependências  $a(\varepsilon)$  e  $b(\varepsilon)$ .

Figura 7 – Exemplo II -  $a(\varepsilon)$  e  $b(\varepsilon)$  para os dados analisados.



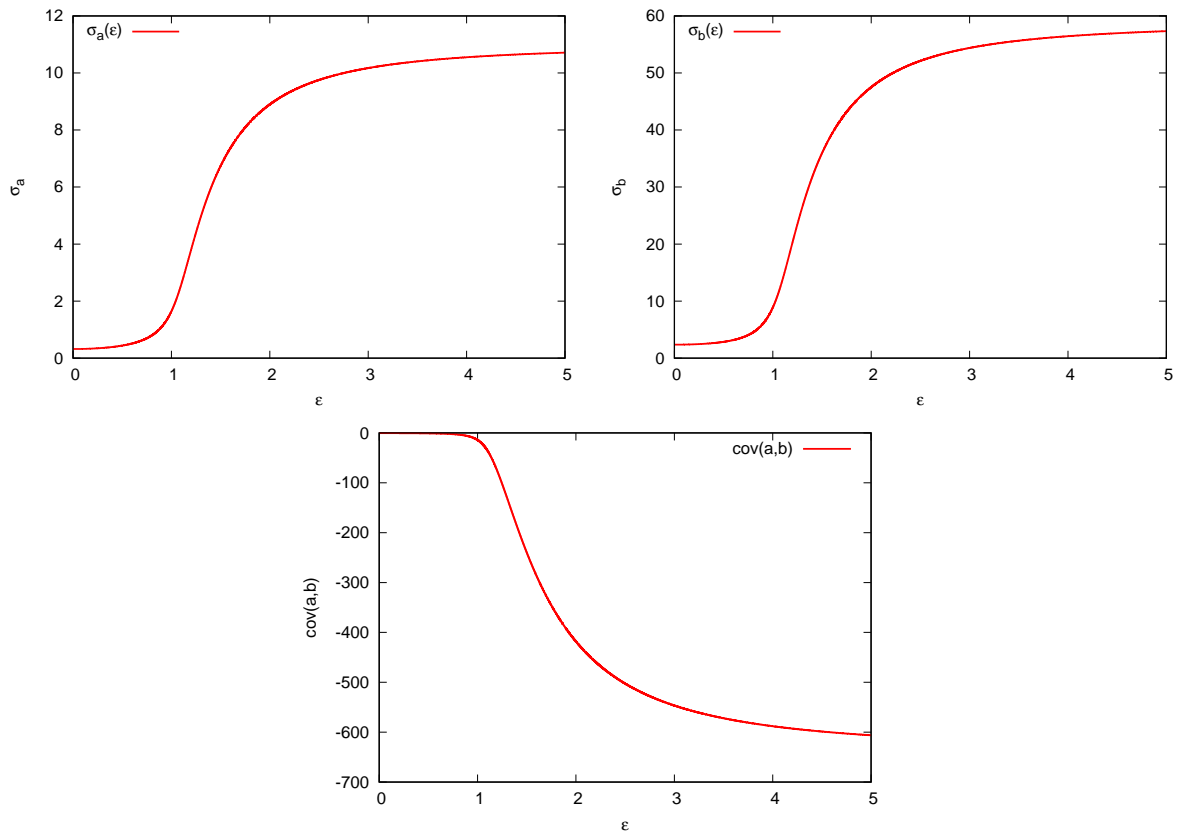
Para podermos comparar diretamente as variações de  $a$  e  $b$  com  $\varepsilon$ , plotamos em uma mesma figura as variações percentuais  $\Delta a/a$  e  $\Delta b/b$ . O resultado pode ser visto na Figura 8.

Figura 8 – Exemplo II - Variação percentual de  $a(\varepsilon)$  e  $b(\varepsilon)$  para os dados analisados.



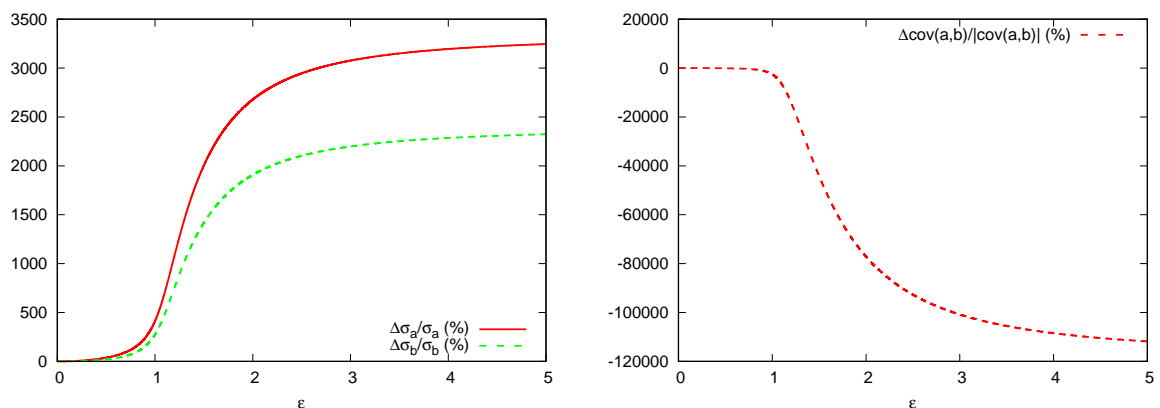
Como podemos ver nessa Figura, o parâmetro  $a$  pode variar negativamente até  $\sim 3000\%$  para  $\varepsilon = 5$  e  $b$  varia positivamente até  $\sim 500\%$ . Variações enormes, ainda mais se compararmos com o exemplo anterior. Para determinar a dependência das incertezas com  $\varepsilon$ , usamos as Equações (2.71), (2.74) e (2.76). O resultado pode ser visto na Figura 9.

Figura 9 – Exemplo II -  $\sigma_a(\varepsilon)$ ,  $\sigma_b(\varepsilon)$  e  $\text{cov}(a, b)$  para os dados analisados.



Como podemos ver nessa figura,  $\sigma_a$  e  $\sigma_b$  aumentam com  $\varepsilon$ , enquanto a  $\text{cov}(a, b)$  diminui (aumenta em módulo). Também temos variações enormes. Vamos comparar diretamente as três variações plotando as variações percentuais na Figura 10.

Figura 10 – Exemplo II - Variação percentual de  $\sigma_a(\varepsilon)$ ,  $\sigma_b(\varepsilon)$  e  $\text{cov}(a, b)(\varepsilon)$  para os dados analisados.



Como podemos ver nessa figura,  $\sigma_a$  varia até  $\sim 3000\%$  em comparação com o caso em que não há incertezas em  $x$ ,  $\sigma_b$  varia  $\sim 2500\%$ . Já  $\text{cov}(a, b)$  foi colocada

em uma figura à parte, à direita na Figura 10, pois chega a variar negativamente até ~ 120.000%!

## 5 CONCLUSÃO

Analisamos o ajuste de reta buscando soluções analíticas para os parâmetros de melhor ajuste, tendo como base o Método dos Mínimos Quadrados. Revisamos os casos de ajuste de reta em que a incerteza na variável  $x$  pode ser desprezada, comuns na literatura. Revisamos a literatura para o caso de ajuste de reta em que as incertezas em ambas variáveis devem ser consideradas, desenvolvendo analiticamente as soluções dos casos em que as incertezas são iguais ponto a ponto. Aplicamos o método estudado a dois casos de ajuste de reta, no primeiro, envolvendo dados muito correlacionados e no segundo, envolvendo dados pouco correlacionados.

Do nosso estudo, podemos tirar algumas conclusões:

- a) enquanto no caso em que não há incertezas em  $x$  os parâmetros  $a$  e  $b$  de melhor ajuste da reta não dependem das incertezas, no caso em que as incertezas em  $x$  não podem ser desprezadas, mas são iguais ponto a ponto, os parâmetros  $a$  e  $b$  dependem da razão  $\varepsilon = \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ ;
- b) assim como no caso em que  $\sigma_x = 0$ , as incertezas dos parâmetros  $a$  e  $b$  e covariância dependem das incertezas dos dados;
- c) nos casos analisados, se os dados são muito correlacionados (bem alinhados), a dependência com  $\varepsilon$  é fraca;
- d) nos casos analisados, se os dados são pouco correlacionados (dispersos), a dependência com  $\varepsilon$  é forte.

Por esses motivos e pelos casos estudados no texto, recomendamos:

- a) sempre indicar todas as incertezas disponíveis, sejam estatísticas e/ou instrumentais;
- b) desprezar as incertezas em  $x$  apenas se  $\sigma_x \ll \sigma_y$  ou se os dados são bem alinhados e com boa qualidade de ajuste ( $\chi_{red}^2 \approx 1$ );
- c) **nunca** desconsiderar todas incertezas dos dados, caso contrário, os parâmetros ajustados não possuem significância estatística.

## REFERÊNCIAS

ABNT. **NBR 11941-02 - Determinação da densidade básica em madeira**. [S.l.: s.n.], 2003.

BRUZZONE, H.; MORENO, C. When errors in both coordinates make a difference in the fitting of straight lines by least squares. **Measurement Science and Technology**, IOP Publishing, v. 9, n. 12, p. 2007, 1998.

CECCHI, G. C. Error analysis of the parameters of a least-squares determined curve when both variables have uncertainties. **Measurement Science and Technology**, IOP Publishing, v. 2, n. 12, p. 1127, 1991.

REED, B. C. Linear least-squares fits with errors in both coordinates. **American Journal of Physics**, AAPT, v. 57, n. 7, p. 642–646, 1989.

REED, B. C. Erratum: “linear least-squares fits with errors in both coordinates” [am. j. phys. 57, 642–646 (1989)]. **American Journal of Physics**, American Association of Physics Teachers, v. 58, n. 2, p. 189–189, 1990.

REED, B. C. Linear least-squares fits with errors in both coordinates. ii: Comments on parameter variances. **American Journal of Physics**, AAPT, v. 60, n. 1, p. 59–62, 1992.

RIBEIRO, A. d. O. et al. *Variação da densidade básica da madeira de toona ciliata roem cultivada em diferentes localidades*. Instituto de Pesquisas e Estudos Florestais, 2011.

VUOLO, J. H. **Fundamentos da Teoria de Erros**. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.

YORK, D. Least-squares fitting of a straight line. **Canadian Journal of Physics**, NRC Research Press, v. 44, n. 5, p. 1079–1086, 1966.

## APÊNDICE A – JUSTIFICATIVA GEOMÉTRICA DA EXPRESSÃO PARA O $\chi^2$ NO CASO DE AJUSTE DE RETA COM ERROS EM AMBAS VARIÁVEIS

Neste Apêndice, buscaremos uma justificativa geométrica para a expressão utilizada para o  $\chi^2$  do ajuste de reta no caso em que há erros em ambas variáveis, Eq. (2.33). Para iniciar, apresentaremos a dedução da distância de um ponto à reta (subseção A.1), que servirá como base para a nossa demonstração de que o  $\chi^2$  representa a distância quadrática mínima ponderada pelas incertezas à reta de melhor ajuste (subseção A.2).

### A.1 Caso sem desvio padrão

Seja a distância de um ponto  $P = (x_P, y_P)$  a um ponto  $(x, y)$  da reta  $r$  descrita por  $y = ax + b$  dado por

$$D(P, r) = \sqrt{(x_P - x)^2 + (y_P - ax - b)^2}.$$

A distância do ponto  $P$  à reta é determinada pelo ponto  $(x, y)$  da reta que fornece a menor das distâncias acima. Para encontrá-la, vamos analisar a variação de  $D$  em função de  $x$ . Note que

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dx} &= -\frac{x_P - x + a(y_P - ax - b)}{D} = 0 \iff \\ x &= \frac{x_P + a(y_P - b)}{1 + a^2} \end{aligned}$$

e portanto

$$y = ax + b = \frac{ax_P + a^2(y_P - b)}{1 + a^2} + b = \frac{a(x_P + ay_P) + b}{1 + a^2}.$$

A distância mínima  $D_{\min}(P, r)$  então será

$$\begin{aligned} D_{\min}^2(P, r) &= a^2 \left( \frac{ax_P + b - y_P}{1 + a^2} \right)^2 + \left( \frac{ax_P + b - y_P}{1 + a^2} \right)^2 = \frac{(ax_P + b - y_P)^2}{1 + a^2} \iff \\ D_{\min}(P, r) &= \frac{|ax_P + b - y_P|}{\sqrt{1 + a^2}} \end{aligned}$$

Essa distância, que é a menor distância de um ponto  $P$  a um ponto qualquer da reta  $r$ , é definida como a distância de  $P$  a  $r$ .

## A.2 Caso com desvio padrão

Ao ajustar uma reta aos dados, estamos interessadas na reta que tenha a menor distância aos pontos, mas como, em geral, cada ponto tem sua incerteza, essa distância deve ser ponderada pelas incertezas. Para determinar se a expressão para o  $\chi^2$  realmente fornece a menor distância da reta ajustada aos pontos ponderada pelas incertezas, vamos usar o mesmo procedimento da subseção anterior. Começemos, então, por definir a distância entre pontos ponderada pelas incertezas.

Vamos definir a distância de um ponto  $P = (x_P, y_P)$  à reta  $r$  descrita por  $y = ax + b$  com a dependência do erro associado as medições. Tomemos um ponto  $A = (x, y) \in r$ . A distância ponderada pelos erros de  $P$  a  $A$  pode ser definida por

$$D_\sigma(P, A) = \sqrt{\left(\frac{x_P - x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y_P - y}{\sigma_y}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{x_P - x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y_P - ax - b}{\sigma_y}\right)^2}.$$

A distância à reta pode ser determinada minimizando-se a expressão acima, ou seja, encontrando-se um ponto da reta que minimize. A variação com relação a  $x$  será

$$\begin{aligned} \frac{dD_\sigma}{dx} &= -\frac{\frac{x_P - x}{\sigma_x^2} + a\left(\frac{y_P - ax - b}{\sigma_y^2}\right)}{D_\sigma} = 0 \iff \\ x &= \frac{x_P\sigma_y^2 + a\sigma_x^2(y_P - b)}{\sigma_y^2 + a^2\sigma_x^2} \end{aligned}$$

de modo que o valor mínimo de  $D_\sigma(P, A)$ , que definirá  $D_\sigma(P, r)$  será

$$\begin{aligned} D_\sigma^2(P, r) &= a^2\sigma_x^2\left(\frac{y_P - ax_P - b}{\sigma_y^2 + a^2\sigma_x^2}\right)^2 + \sigma_y^2\left(\frac{y_P - ax_P - b}{\sigma_y^2 + a^2\sigma_x^2}\right)^2 = \frac{(y_P - ax_P - b)^2}{\sigma_y^2 + a^2\sigma_x^2} \iff \\ D_\sigma(P, r) &= \frac{|y_P - ax_P - b|}{\sqrt{\sigma_y^2 + a^2\sigma_x^2}}. \end{aligned}$$

E assim conclui-se que

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n D_{\sigma_i}^2(P_i, r) = \sum_{i=1}^n \frac{(y_P - ax_P - b)^2}{\sigma_{yi}^2 + a^2\sigma_{xi}^2}.$$

E então minimizando essa quantidade em relação aos parâmetros  $a$  e  $b$ , encontramos a reta que minimiza a soma das distâncias quadráticas ponderadas pelas incertezas aos pontos experimentais. Entendemos que é mais simples minimizar a soma de distâncias quadráticas, em vez das distâncias, pois dessa forma evita-se os módulos, que possuem derivadas descontínuas.

É claro que existem fortes argumentos estatísticos para a escolha da expressão do  $\chi^2$ , como aqueles apresentados em Vuolo (1996), mas esses argumentos se

limitam aos casos em que se considera apenas incerteza em  $y$ . Quando há incerteza em  $x$ , há uma certa ambiguidade na escolha da expressão do  $\chi^2$  e com essa dedução geométrica, justificamos o método que utilizamos.