

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

**UM ESTUDO DE FRACTAIS GEOMÉTRICOS ATRAVÉS
DE CALEIDOSCÓPIOS E SOFTWARES DE GEOMETRIA
DINÂMICA**

Flavio Roberto Gouvea

Orientador: Prof.Dr. Claudemir Murari

Dissertação de Mestrado elaborada junto
ao Curso de Pós-Graduação em
Educação Matemática – Área de
Concentração em Ensino Aprendizagem
da Matemática e seus Fundamentos
Filosóficos-Científicos, para obtenção do
Título de Mestre em Educação
Matemática.

Rio Claro (SP)
2005

516.2 Gouvea, Flávio Roberto
G719e Um estudo de fractais geométricos através de caleidoscópio
e softwares de geometria dinâmica / Flávio Roberto Gouvea. –
Rio Claro : [s.n.], 2005
259 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Claudemir Murari

1. Geometria euclidiana. 2. Geometria fractal. 3.
Caleidoscópio. 4. Softwares de geometria dinâmica. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI – Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

Comissão Examinadora

Claudemir Murari (orientador)

Geraldo Perez

Ruy Madsen Barbosa

Flavio Roberto Gouvêa (aluno)

Rio Claro, 31 de Agosto de 2005.

Resultado: _____

*“Pode o bater das asas de uma borboleta na floresta
amazônica gerar um tornado no Texas?”*

Edward Lorenz

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho e a conquista do Título de Mestre em Educação Matemática a Deus, que foi o grande responsável por esse trabalho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por ter me dado forças para prosseguir na caminhada, quando os fatos da vida me colocavam obstáculos.

Os mais sinceros agradecimentos ao meu orientador, Claudemir Murari, que nessa fase da minha vida realmente tornou-se um grande amigo e a sua esposa Lenis por colaborar com sugestões e por corrigir os erros de Português nos artigos e capítulos ligados a esse trabalho.

Ao Prof. Dr. Geraldo Perez, que tanto me ajudou no exame de qualificação, e me fez superar meus limites.

Ao Prof. Dr. Ruy Madsen Barbosa, que me ajudou através de suas publicações e conversas informais.

À Simone Aparecida Silva Gouvêa, minha esposa, pela paciência nas horas a fio em que fiquei colado nos livros ou na frente do computador. E além desta paciência, quero agradecê-la principalmente pelo compartilhamento do entusiasmo, pela motivação e pelo constante apoio que sempre me dá.

Aos meus pais, José Roberto Gouvêa e Selma Maria Razeiro Gouvêa, e minha vó Leonor Russo Razeiro, por me apoiarem em todos os momentos, mas principalmente por que me deram a educação sem a qual eu não teria chegado a lugar algum. "Vocês três são o meu grande orgulho e eu quero que tudo o que eu faça em toda a minha vida seja prova de que o pouco que vocês acham que fizeram por mim, na verdade foi muito mais do que qualquer filho no mundo poderia querer. Vocês me deram simplesmente tudo e vão estar eternamente em tudo o que eu fizer".

A meu irmão, que sempre me ajudou nas mais diversas áreas.

A meu sogro Lourival Coelho Silva e minha sogra Neusa Maria Teixeira Silva e meus cunhados e cunhadas.

Aos amigos, que me apoiaram desde o início: João Freire Leite (irmão) e família, Valtinho e família, e João Pedro Marqueze, pela amizade e pelos conselhos.

Aos grandes amigos da PGEM e a todas as pessoas que conviveram comigo nesse período de minha vida.

A todos os docentes do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, pelas contribuições e apoio.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

ÍNDICE

RESUMO	IV
ABSTRACT.....	V
INTRODUÇÃO	1
1. TRAJETÓRIA PESSOAL	1
2. A PESQUISA	1
CAPÍTULO I	5
1. A PROBLEMÁTICA	6
2. NOSSA PROPOSTA E OBJETIVOS	11
2.1 OBJETIVOS DE NATUREZA MATEMÁTICA	14
2.2 OBJETIVOS DE NATUREZA EDUCACIONAL	15
CAPÍTULO II.....	16
1. AS TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	17
2. GEOMETRIA DINÂMICA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.....	21
2.1 POTENCIALIDADE DO IGEOM.....	23
2.2 O SOFTWARE CABRI GÉOMÈTRE II E SUAS FERRAMENTAS	33
CAPÍTULO III.....	37
1. REFERENCIAL TEÓRICO	38
2. O COMPUTADOR: UMA NOVA LINGUAGEM	40
CAPÍTULO IV	45
1. UM PANORAMA HISTÓRICO DO FRACTAL.....	46
2. O QUE É UM FRACTAL?	48
2.1 ALGUMAS DIMENSÕES FRACTAIS	52
2.1.1 A curva de Koch	52
2.1.2 Variação da curva de Koch.....	53
2.1.3 Curva de Peano	53
2.1.4 A ilha de Minkowski	
2.1.5 O triângulo de Sierpinski	

2.1.6 O conjunto de Cantor.....	55
3. TIPOS DE FRACTAL.....	57
3.1 CLASSE FRACTAL GEOMÉTRICA:.....	57
3.2 CLASSE FRACTAL IFS.....	57
3.3 CLASSE FRACTAL ENL.....	58
CAPÍTULO V.....	59
1. FRACTAIS DE BASES CALEIDOSCÓPICAS.....	60
2. PAVIMENTAÇÃO DO PLANO	60
3. CALEIDOSCÓPIOS	62
3.1 BASES GERADORAS E BASES TRANSFORMADAS	63
3.2 CONSTRUÇÃO DA BASE CALEIDOSCÓPICA DA PAVIMENTAÇÃO (3,4,6,4) NO SOFTWARE iGeom.....	66
3.3 FRACTAL OBTIDO DA BASE GERADORA DA PAVIMENTAÇÃO (3,4,6,4).....	69
3.4 CONSTRUÇÃO COM RÉGUA E COMPASSO DA BASE CALEIDOSCÓPICA (4,6,12)	71
3.5 CONSTRUÇÃO DA BASE CALEIDOSCÓPICA DA PAVIMENTAÇÃO (4,6,12) NO SOFTWARE CABRI GÉOMÈTRE II.....	72
3.6 BASES PARA PAVIMENTAÇÃO DE CONFIGURAÇÃO (6,6,6).....	76
3.7 BASES PARA PAVIMENTAÇÃO DE CONFIGURAÇÃO (3,12,12).....	76
3.8 BASES ISÓSCELES PARA PAVIMENTAÇÃO DE CONFIGURAÇÃO (4,4,4).....	76
3.9 BASES ISÓSCELES PARA PAVIMENTAÇÃO DE CONFIGURAÇÃO (4,8,8).....	77
CAPÍTULO VI	80
1. METODOLOGIA DA PESQUISA: UM CAMINHO	81
2. PROCEDIMENTO METODOLÓGICO DE ENSINO	84
3. O CONTEXTO E OS PARTICIPANTES DA PESQUISA.....	86
4. PROCEDIMENTOS DA ANÁLISE	87
CAPÍTULO VII	!
1. UMA ANÁLISE DOS DADOS DA PESQUISA	!

1.1 PRIMEIRO EPISÓDIO	92
1.2 SEGUNDO EPISÓDIO	96
1.3 TERCEIRO EPISÓDIO.....	110
1.4 QUARTO EPISÓDIO.....	127
1.5 QUINTO EPISÓDIO	137
1.6 SEXTO EPISÓDIO	144
1.6.1 Um espelho	145
1.6.2 Dois espelhos.....	150
1.6.3 Três espelhos	152
1.7 SÉTIMO EPISÓDIO	153
CONCLUSÕES FINAIS	165
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	168
ANEXO I	173
ANEXO II.....	236
ANEXO III	252

RESUMO

Neste trabalho abordamos um tema pouco explorado nos cursos de graduação em Matemática, que é a Geometria Fractal, resgatando conceitos básicos da Geometria Euclidiana, utilizando caleidoscópios e softwares educacionais. Assim, foram tecidas algumas considerações a respeito da utilização de computadores na sala de aula, através de um estudo que investigou: **“Que contribuições pode trazer, para o ensino-aprendizagem de Geometria, um estudo de *Fractais Geométricos* através de *caleidoscópios* e *softwares de Geometria Dinâmica*?”**. Foram elaboradas atividades e aplicadas a alunos da Licenciatura em Matemática (do 1º e 2º semestres) da Unesp de Rio Claro, que participaram de um Curso de Extensão. A utilização de materiais diferentes do tradicional, como o caleidoscópio e o computador (este último como elemento inserido no contexto educacional), e a contextualização da Geometria contribuíram para o estabelecimento de um ambiente de aprendizagem agradável e participativo. Nosso estudo mostrou uma maneira inovadora de obterem-se fractais geométricos: *através de bases caleidoscópicas*, o que enseja um grande estudo sobre espelhos e caleidoscópios, e traz em si a oportunidade de estudarem-se muitos conceitos geométricos (reflexão, simetrias, transformações geométricas, bissetriz, mediatriz, seqüências, etc.). Apresentamos, ainda, alguns aspectos pedagógicos e matemáticos relacionados à aplicabilidade dos Fractais Geométricos no processo de construção de conceitos geométricos, por meio da interação aluno-aluno, aluno-computador e aluno-professor, tendo como pano de fundo a resolução de problemas. Dessa forma, nosso estudo proporcionou para os alunos uma maior relação com os conceitos fundamentais de Geometria Euclidiana e Geometria Fractal, além de uma alternativa metodológica inerente ao ensino da Geometria.

Palavras-chave: Geometria Euclidiana, Geometria Fractal, Caleidoscópios, Softwares de Geometria Dinâmica.

ABSTRACT

In this work we approached a theme little explored in the degree courses in Mathematics, that it is the Fractal Geometry ransoms basic concepts of the Euclidian Geometry, using kaleidoscopic and educational softwares. At his, are some woven considerations respect the use computers in the classroom, through a study that enquired: “What contributions can bring, for teaching-learning of Geometry, a study of the geometrical fractals that include kaleidoscopic and softwares of Dynamic Geometry?” Activities were elaborated and applied to students of the degree in mathematics (of the 1st and 2nd semesters) of Unesp de Rio Claro, who participated in a Course of Extension. The use of different materials from the traditional as the kaleidoscopic and computer (this last one as element inserted in the education context), and the contextualization of the Geometry contributed to the establishment of an environment of the pleasing learning and interest. Our study showed an innovator way of they be obtained fractal geometrics: through of kaleidoscopic bases, that wish a great study with mirrors and kaleidoscopic, and bring in itself the opportunity of they be studied many geometric concepts (reflection, symmetric, geometric transformations, bisector, mediate, etc). We presented, still, some pedagogic and mathematic aspects related to the applicability of Fractal Geometrics in the process of construction of geometrical concepts, through the interaction student-student, student-computer and student-teacher using as backdrop the problem solve. Of this form, our study it provided for the students a bigger relation with the basic concepts of Euclidean Geometry and Fractal Geometry, beyond inherent a methodology alternative to the teaching of Geometry.

Key-words: Euclidian Geometry, Fractal Geometry, kaleidoscopic, Softwares of Dynamic Geometry.

INTRODUÇÃO

1. TRAJETÓRIA PESSOAL

Atuando como professor de Matemática no ensino fundamental e médio da escola pública há cinco anos e, concomitantemente, nos últimos três anos, em uma escola particular do sistema anglo de ensino, ambas no município de São Paulo, tenho me defrontado com as dificuldades dos alunos para entenderem a Matemática e, em especial, a Geometria. Pesquisadores como Perez (1991), Pavanello (1993), Lorenzato (1993 e 1995) e Fainguelernt (1999) detectaram e destacaram o abandono do ensino da Geometria nas escolas.

Com essa preocupação, e considerando como pressuposto que o ato de aprender está fortemente ligado ao de ensinar, procurei aperfeiçoar meus conhecimentos sobre o ensino da Matemática com o intuito de, por um lado, questionar minha prática e, por outro, ampliar meu conhecimento no processo de ensino-aprendizagem dessa disciplina. Esta inquietação levou-me a procurar caminhos científicos que possibilitassem a compreensão dos processos de ensino-aprendizagem da Matemática. Por isso, procurei a Pós-Graduação em Educação Matemática na Unesp¹, Campus de Rio Claro.

2. A PESQUISA

Com o desenvolvimento tecnológico da sociedade, devemos repensar a maneira de ensinar Geometria Euclidiana, isto é, devemos adequar o ensino às novas tendências, procurando, assim, novas formas, novos métodos e materiais, podendo dessa forma contribuir para o processo de ensino-aprendizagem, já que a Matemática e, em especial, a Geometria Euclidiana têm apresentado índices baixíssimos nas avaliações realizadas pelo governo (como, por exemplo, SARESP, SAEB).

Portanto, propomos neste trabalho, como alternativa, uma estratégia de ensino-aprendizagem intitulada “Um estudo de fractais geométricos através de caleidoscópios e

¹ Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”

softwares de geometria dinâmica”, pois nossa intenção (objetivo) é que os alunos conheçam a Geometria Euclidiana por caminhos diferentes daqueles em que se aplicam algoritmos e exercícios rotineiros. Dessa forma, encontramos na Geometria Fractal, além de formas geométricas de extrema beleza, uma possibilidade de explorar alguns conceitos de Matemática e especialmente a Geometria Euclidiana, tais como teorema de Tales, mediatriz, bissetriz, construção de ângulos, perímetro, áreas, seqüências, etc.

Nessa perspectiva, o Fractal servirá como um incentivo, colaborador do processo de ensino-aprendizagem, além do que, através dos Fractais os alunos podem contemplar a beleza da Geometria presente na natureza e no mundo. O estudo dos Fractais também tem sido recomendado para a prática educacional por vários pesquisadores como Amorim (1994), Miller (1996), Simmt (1998), Ti-Mat nº8 (1998), Barbosa (2002), Murari & Gouvea (2004), entre outros.

Ainda inserido nessa busca e investigação, no sentido de procurar desvelar caminhos que pudessem levar a um possível redimensionando da Geometria, encontramos dois softwares de Geometria Dinâmica capazes de construir os Fractais de forma rápida, agradável e eficiente. Estes são o Cabri Géomètre II e o iGeom, os quais apresentaremos detalhadamente no capítulo II.

É nossa intenção que este trabalho de pesquisa proporcione aos professores de Matemática um auxílio para uma possível reflexão das estratégias de ensino e métodos de trabalhos através dos Fractais e softwares de Geometria Dinâmica, permitindo ao aluno, dessa forma, uma educação condizente com o desenvolvimento tecnológico da sociedade, isto é, permitindo que os alunos tenham acesso a um software de Geometria Dinâmica gratuito, que pode ser utilizado em qualquer lugar e por qualquer aluno, sem nenhum custo.

Com as perspectivas acima apresentadas, planejamos o desenvolvimento do trabalho e, concluídos os créditos recomendados pela Pós-Graduação em Educação Matemática (PGEM) e profundo estudo da bibliografia específica, foram elaboradas atividades que pudessem ser aplicadas a determinados alunos e que viessem a viabilizar a estratégia de ensino. Assim, aplicamos tais atividades num Curso de Extensão intitulado “Fractais Geométricos Através de softwares de Geometria Dinâmica”, promovido pelo Departamento de Matemática da Unesp, Campus de Rio Claro. Para

tanto, nos apoiamos no referencial teórico e no procedimento metodológico de ensino, resolução de problemas.

Para realizar esta pesquisa optamos por uma investigação qualitativa e, compiladas as informações necessárias, organizamos em capítulos, que serão apresentados como se segue:

No **Capítulo I**, descrevemos **A Problemática, Nossa Proposta e Objetivos**, com a finalidade de propiciar aos leitores uma reflexão sobre alguns aspectos da Geometria e da Informática Educacional, relacionando-os com a contextualização e a interdisciplinaridade, conforme indicam os PCNs.

No **Capítulo II**, abordamos **As Tecnologias na Educação Matemática e os Softwares de Geometria Dinâmica** (Cabri Géomètre II e iGeom), com o objetivo de dar uma visão sobre o computador no contexto escolar, numa inter-relação entre a Educação Matemática e as novas tecnologias e, em um outro momento, enfatizar o “porquê” da utilização desses softwares de Geometria Dinâmica, em especial o iGeom. Além disso, mencionamos alguns pesquisadores que trabalham com ambiente computacional, destacando elementos e fatores importantes no processo de construção do conhecimento, em contextos práticos de resolução de problemas.

No **Capítulo III**, apresentamos **O Referencial Teórico**, quando enfatizamos, também, a relação de interação entre aluno-aluno, aluno-computador e aluno-professor.

No **Capítulo IV**, discorremos sobre **Um Panorama Histórico do Fractal; O que é um Fractal? e Tipos de Fractais**, com a finalidade de esclarecer alguns pontos relacionados à aplicabilidade dos Fractais, numa perspectiva histórica, na tentativa de identificar as fases de sua evolução, ressaltando as características e os tipos de Fractais.

No **Capítulo V**, abordamos os **Fractais de Bases Caleidoscópicas**. Nesta abordagem, enfatizamos a possibilidade da construção de novos Fractais, através de bases caleidoscópicas, o que possibilita a exploração de conceitos geométricos.

No **Capítulo VI**, discutimos a **Metodologia da Pesquisa: Um Caminho, Procedimento Metodológico de Ensino, O Contexto e os Participantes da Pesquisa, e os Procedimentos de Análise**, tendo como finalidade esclarecer e embasar a descrição dos caminhos escolhidos para a análise dos dados, das atividades aplicadas nos alunos, em situações de resolução de problemas, com uma relação dialética entre as estratégias apresentadas e o referencial teórico. No decorrer deste capítulo,

apresentamos os sujeitos analisados, que eram alunos do 1º e 2º semestre (2004) de graduação da Licenciatura em Matemática da Unesp, Campus de Rio Claro.

No **Capítulo VII**, descrevemos **Uma Análise dos Dados da Pesquisa**, elucidando alguns pontos relacionados à aplicabilidade dos Fractais e softwares de Geometria Dinâmica, com a intenção de ressaltar a potencialidade desse ambiente na exploração de conceitos da Geometria Euclidiana e, ainda, fornecer aos professores de Matemática uma possibilidade de aplicação dessa estratégia de ensino na exploração e na construção de conceitos de Matemática (Geometria).

No **Capítulo VIII**, apresentamos **As Conclusões Finais** desse trabalho, possibilitando aos leitores uma reflexão sobre a sua prática pedagógica, objetivando um possível redimensionamento e uma adequação de suas teorias de ensino e métodos de trabalho com a Matemática (Geometria) e as Novas Tecnologias. Por fim, a **Bibliografia e os Anexos** utilizados na realização deste trabalho.

Capítulo I

CAPÍTULO I

1. A PROBLEMÁTICA

Neste capítulo apresentamos um estudo da literatura sobre questões relacionadas ao ensino da Geometria. Inicialmente, vamos nos referir às dificuldades de aprendizagem da mesma, no ensino fundamental, médio e superior.

Pavanello (1993) diz que

A maioria dos alunos do 1º grau [Ensino Fundamental] deixa de aprender Geometria, pois os professores das séries iniciais limitam-se, em geral, a trabalhar somente a aritmética e as noções de conjunto. O estudo de Geometria passa a ser feito – quando não é eliminado – apenas no 2º grau [Ensino Médio], com o agravante de que os alunos apresentam uma dificuldade ainda maior em lidar com as figuras geométricas e sua representação porque o Desenho Geométrico é substituído, nos dois graus do ensino, pela Educação Artística. (p.13).

Nessa mesma linha de pensamento, Lorenzato (1995) aponta alguns fatores que determinam o descaso para com a Geometria:

- a falta de conhecimentos geométricos necessários para a perfeita efetivação das suas atividades profissionais, por parte dos professores, decorrente de uma formação deficiente;
- a elevada importância que se dá ao livro didático, que apresenta o ensino de Geometria como uma coleção de definições e fórmulas sem nenhuma ligação com o cotidiano do aluno e totalmente desligado dos fatos e idéias históricas, havendo ainda, outros que apresentam apenas um número mínimo de aplicabilidade ao mundo físico. Além disso, a Geometria é quase sempre apresentada na última parte do livro, aumentando a possibilidade de não vir a ser estudada por falta de tempo letivo.
- o desconhecimento, por parte dos cursos de Licenciatura em Matemática e Pedagogia, da escola e do professor sobre a importância desse conhecimento para a vida do aluno.
- a falta de disciplinas que trabalhem a Geometria nos cursos que formam professores para atuarem no ensino básico.
- a ausência de propostas metodológicas de ensino adequadas para desenvolver no aluno, as habilidades e competências decorrentes do aprendizado da Geometria.
- a apresentação da Geometria de forma desligada da aritmética e da álgebra, como também, de outras áreas de conhecimento.
- a inversão de momentos, quando o ensino é feito partindo de situações particulares para situações gerais, quando o indicado seria o contrário.

Consideramos a Geometria como uma ferramenta para a compreensão, descrição e inter-relação com o espaço em que vivemos. A importância de aprendê-la é ressaltada por várias causas. Uma delas é que, sem estudar Geometria, os alunos acabam por não desenvolver o pensamento geométrico e o raciocínio visual e, sem essas habilidades, os alunos terão dificuldades para resolver situações que envolvam esses conhecimentos. Também poderão utilizar a Geometria como fator altamente facilitador para compreensão e resolução de questões de outras áreas do conhecimento humano. Mas, apesar de toda essa importância, Lorenzato (1993) diz que a Geometria é

[...] apresentada aridamente, desligada da realidade, não integrada com as outras disciplinas do currículo, e até mesmo não integrada as outras partes da própria Matemática, é uma lacuna a ser preenchida em nossa prática pedagógica enquanto professores de Matemática (p.4).

Dessa forma, acreditamos que sem a Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação fica reduzida e a visão da Matemática torna-se imperceptível. Fainguelernt (1995) expressa a importância da Geometria afirmando que a mesma

[...] oferece um vasto campo de idéias e métodos de muito valor quando se trata do desenvolvimento intelectual do aluno, do seu raciocínio lógico e da passagem da intuição e de dados concretos e experimentais para os processos de abstração e generalização.

A Geometria também ativa as estruturas mentais possibilitando a passagem do estágio das operações concretas para o das operações abstratas. É, portanto tema integrador entre as diversas áreas da Matemática, bem como campo fértil para os exercícios de aprender a fazer, a aprender a pensar (p.46).

Percebemos que a Geometria está em toda parte, seja no lazer, na profissão ou na comunicação; cotidianamente estamos envolvidos com a Geometria. Apesar de pesquisas psicológicas indicarem que a aprendizagem geométrica é necessária para o desenvolvimento da criança, quando olhamos a realidade em nossas escolas encontramos uma situação totalmente paradoxal. Pavanello (1993) diz ser visível o abandono do ensino da Geometria no Ensino Fundamental e Médio. Tal abandono, conseqüentemente, é refletido no ensino superior do Estado de São Paulo. Nosso próprio estudo preliminar mostra as dificuldades que os alunos universitários encontram na aquisição dos conceitos geométricos. Almeida (2003) diz que

No curso universitário da UNESP – Rio Claro, estudamos dois semestres de Geometria Euclidiana e um de Desenho Geométrico. Apesar de nosso envolvimento e interesse por essas disciplinas, tivemos dificuldades, quando então pudemos avaliar a importância do aluno receber uma boa fundamentação da Geometria nos níveis anteriores ao universitário (p. 3).

Desde Euclides, a Geometria vem sendo desenvolvida com base axiomática, onde o processo indutivo é desprezado. Contudo, a educação vem exigindo mudanças no ensino-aprendizagem da Geometria, pois esta disciplina apresentou índices baixíssimos de aproveitamento no Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (1997)- SARESP. Os resultados dessa mesma avaliação indicaram, igualmente como as anteriores, que os estudantes, freqüentemente, têm dificuldade em aplicar o conhecimento em situações de resolução de problemas.

Ainda com o objetivo de oferecer elementos adequados para avaliar a qualidade do ensino dos alunos de 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio, o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – Inep- elaborou o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica – SAEB, que é uma iniciativa brasileira no sentido de conhecer mais profundamente o nosso sistema educacional. Além de ser um dos mais amplos esforços com o intuito de coletar dados sobre a qualidade da educação no País, é, também, um dos principais sistemas de avaliação em larga escala da América Latina.

As avaliações feitas pelo SAEB e pelo Ministério da Educação e Cultura – MEC- evidenciam que o desenvolvimento dos alunos torna-se ainda mais baixo quando o tema abordado é a Geometria. Recentemente (2002), o SAEB avaliou cerca de 300 mil alunos de 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio, de 6.270 escolas públicas (Municipais e Estaduais) e particulares de todos os Estados brasileiros. Em junho de 2003, o Ministério da Educação divulgou os resultados dessa avaliação, expondo uma realidade crítica quanto ao aprendizado da Matemática durante toda a formação dos alunos, tanto no ensino fundamental quanto no médio.

O jornal Folha de S. Paulo, em 17/06/2004, divulgou que 40,1% dos alunos da 4ª série do Ensino Fundamental, 49,8% dos alunos de 8ª série e 62,3% dos alunos da 3ª série do Ensino Médio, tanto de escolas particulares quanto de escolas públicas, não sabem resolver questões de Matemática compatíveis com a série que cursam, e nem

conseguem interpretar o enunciado de uma questão para chegar ao resultado matemático.

Essas dificuldades fizeram-nos refletir sobre algumas questões. O que faz a compreensão da Geometria escolar ser uma tarefa tão difícil para a maioria? É o conteúdo da Geometria a fonte do problema? Ou é o modo como é ensinado que origina nos estudantes a incapacidade de dar sentido ao conteúdo estudado? Ou são os professores que não estão preparados para ensinar a Geometria?

Fainguelernt (1999) comenta que a Geometria é praticamente ausente na sala de aula, porque

[...] a maioria dos professores não teve acesso aos conhecimentos de Geometria necessários para a realização de sua prática pedagógica. Como não detêm esse conhecimento, a Geometria é excluída de seu plano de trabalho. O fato de o professor não saber Geometria impossibilita-o de refletir sobre a sua beleza e sua importância na formação de seus alunos (p.14).

No entanto, cada professor sabe que enfrentar esses questionamentos não é tarefa simples, nem é para ser feita solitariamente. O Parâmetro Curricular Nacional - PCN de Matemática para o Ensino Fundamental, documento do Ministério da Educação e do Desporto, é um instrumento que pretende estimular a busca coletiva de soluções para o ensino, soluções que precisam ser transformadas em ações cotidianas que efetivamente tornem os conhecimentos matemáticos acessíveis a todos os alunos.

Acreditamos que parte dos professores que estão em atividade recebeu formação precária em Geometria, influência do movimento da Matemática moderna, presente nos currículos das décadas de 60/70. Assim, se o professor não detém os conhecimentos de Geometria, ele exclui este conteúdo de seu plano de trabalho. Dessa forma, quando a formação do professor é falha, ele é induzido a dar uma importância excessiva ao livro didático. Porém, será que os livros didáticos atuais possuem uma metodologia adequada?

Para investigar tal questão, tivemos acesso a três livros didáticos de Matemática, destinados ao ensino médio e editados recentemente (a partir do ano de 2000), dos quais faremos uma breve análise tomando como foco o ensino de Geometria.

Adotamos como critério de avaliação dos livros didáticos a contextualização e a interdisciplinaridade, pois, de acordo com o PCN-EM (1999), as áreas do conhecimento

“(...) devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimento mais amplo e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. Para a área das Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologias, isto é particularmente verdadeiro, pois a crescer valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de aprender continuamente, para o que é essencial uma formação geral e não apenas um treinamento específico” (p.207).

Acreditamos que um dos pontos de partida para esse processo é tratar o conteúdo matemático de forma mais vivencial dos alunos, da escola e de sua comunidade. Isto não deve delimitar o alcance do conhecimento tratado, mas sim dar significado ao aprendizado, desde seu início, garantindo um diálogo ativo. A partir disso, é necessário e possível transcender a prática imediata e desenvolver o conhecimento. A metodologia de ensino Resolução de Problemas engloba muitos desses benefícios e o PCN+ (2002) nos relata que

Na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentação, relacionar diferentes conhecimentos e enfim, perseverar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido (p.113).

Com as perspectivas apresentadas, encontramos ainda em livros didáticos a Geometria Euclidiana sendo abordada de forma tradicional, isto é, definição, exemplos, exercícios não tratados a partir de situações-problema, como sugerem os PCN-EM.

Dessa forma, somos levados a conjecturar que o processo de ensino-aprendizagem a que está sendo submetido o aluno não faz com que ele desenvolva o raciocínio lógico, a criatividade, as habilidades, etc. Ao contrário, transforma o aluno em um objeto, no qual se armazenam informações e algoritmos, e onde o professor tudo sabe e entende, apresentando os conceitos de maneira abstrata e superficial, restando aos estudantes recorrerem à memorização de regras e procedimentos.

2. NOSSA PROPOSTA E OBJETIVOS

Diante da problemática até agora tratada, e como professor de Matemática, numa postura comprometida com os resultados, identificando nossa responsabilidade no processo de ensino-aprendizagem, pretendemos auxiliar na idéia de “concretizar o abstrato” presente na Geometria Euclidiana, naquilo que puder ser estudado através da Geometria dos Fractais. O grande desafio é a busca de opções que venham a contribuir para a superação das dificuldades encontradas por professores e alunos no ensino-aprendizagem da Geometria.

Uma das formas que Barbosa (2002) propõe é estudar as relações numéricas dos Fractais: seqüências, contagem, perímetro, áreas e volumes. Outra forma é explorar os Fractais despertando e desenvolvendo o senso estético pela visualização dos mesmos, quando o professor, no nosso entender, deve procurar levar o aluno a contemplar o belo e a descobrir a harmonia existente nos Fractais.

Iremos trabalhar com Fractais e padrões geométricos, estudando conceitos de Matemática, como por exemplo, teorema de Tales, mediatriz, bissetriz, construção de ângulos, perímetro, áreas, seqüências, etc, ao mesmo tempo em que adicionaremos novas idéias como a auto-semelhança e a dimensão Fractal, buscando possíveis intersecções entre padrões caleidoscópios e padrões Fractais.

Vale ressaltar que os assuntos acima citados fazem parte do currículo do ensino fundamental e médio, porém esses conceitos de Geometria quase sempre são apresentados de maneira equivocada, “obrigando” os alunos a “decorarem” fórmulas. Esse procedimento já vem de longo tempo, pois Perez (1991) já afirmava que havia pouco ensino de Geometria no 1º e 2º graus os quais correspondem hoje, respectivamente ao ensino fundamental e médio, e destacava ainda que faltava metodologia apropriada ao professor para que esse ensino se realizasse.

Assim, a nossa contribuição nesta coletânea de soluções seria explorar a Geometria Euclidiana através da Geometria Fractal, pois esta é capaz, dentre outras coisas, por exemplo, de descrever as formas encontradas na natureza, o que poderá suscitar nos alunos maior interesse em aprender os conteúdos estudados.

Conforme Mandelbrot (1977):

Por que a Geometria é freqüentemente descrita como “fria” e “seca”? Uma razão repousa em sua inabilidade de descrever a forma de uma nuvem, uma montanha, uma linha costeira ou uma árvore. Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, linhas não são círculos, e uma casca de árvore não é lisa, tampouco um feixe de luz viaja em linha reta. (...) Eu afirmo que muitos dos padrões da Natureza são tão irregulares e fragmentados, que, se comparados com a Geometria tradicional, exibem não somente um grau mais alto, mas um nível de complexidade completamente diferente²(p.1).

A alternativa de utilizar os Fractais no processo do ensino de Geometria pode alavancar o estudo de conteúdos que não foram apreendidos. Os Fractais são formas geométricas de extrema beleza, que possibilitam a criação de situações de aprendizagem que propiciam atividades, nas quais os alunos aplicam processos fundamentais para o desenvolvimento do conhecimento.

Mandelbrot (1977) demonstrou que linhas ou ramificação de raízes e folhas, a forma de frutos, fluxos e padrões em geral seguem equações chamadas de logísticas, que, através de um procedimento repetitivo, acabam gerando os Fractais. Assim, através deles, podem-se abordar alguns tópicos como áreas e perímetros de polígonos e volumes de poliedros, tornando-se fáceis de serem ilustrados. Por exemplo, o Fractal conhecido como "Koch Snowflake"³ apresenta perímetro infinito e área finita.

Ao descobrir esta aparente anomalia no Fractal de Koch, é possível aos alunos utilizarem a Geometria para desenvolverem as fórmulas algébricas que descrevem o crescimento do perímetro e da área desta figura. Podem, ainda, calcular o número de segmentos e o comprimento total do "Conjunto de Cantor"⁴, o que os ajudará a entender, mais tarde, o fato de este comprimento total se aproximar, mas não ser igual a zero, reforçando os conceitos estudados na disciplina de Cálculo. Em algumas investigações que fizemos, percebemos, também, correlação entre padrões caleidoscópios e Fractais. Então, pretendemos analisar melhor essas ligações e utilizar os caleidoscópios como agentes de obtenção de Fractais.

² Traduzido por nós do inglês.

³ As curvas “snowflakes” constituem-se em Fractais geométricos. Foram inicialmente utilizadas por Helge Von Koch em 1904, em seus estudos de curvas com comprimentos (perímetros) infinitos contendo uma área finita.

⁴ Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor nasceu em 1845, na cidade de São Petersburgo, Rússia. Cantor publicou em 1883 uma das mais antigas construções consideradas patológicas encontradas na literatura. Muito comumente encontram-se, também, os nomes “Poeira de Cantor” e “Polvo de Cantor”, denotando o mesmo conjunto.

Contudo, pensamos que as propriedades de auto-semelhança⁵ possam ser facilmente entendidas por alunos do ensino fundamental ao visualizarem, por exemplo, a estrutura de uma árvore. Além disso, cabe salientar a aplicabilidade do estudo dos Fractais em diversos campos da ciência e da tecnologia, da informática (técnicas de compressão de imagem e de criação de imagens virtuais), da economia (curvas das bolsas de valores), da astronomia (previsão das trajetórias futuras de planetas) e até a música já tem a sua vertente Fractal.

Porém, para construirmos os Fractais estudados, necessitamos do computador e do auxílio de softwares de Geometria Dinâmica, como o Cabri Géomètre II e o iGeom, nos quais encontramos os recursos ideais para as construções de Fractais geométricos e Fractais de bases caleidoscópicas, pois através desses softwares educacionais podem-se efetuar construções geométricas muito rapidamente e com bons resultados.

Com o estudo se processando nos laboratórios de informática e de ensino, acreditamos que alcançamos outros objetivos, implícitos no processo, como o reforço de alguns conceitos geométricos, pois na construção dos Fractais recorremos a algumas construções geométricas fundamentais, havendo interação multidisciplinar com Ciências, Desenho Geométrico, Educação Artística e Informática.

Estamos convictos de que a utilização conjunta dos Fractais, caleidoscópios e softwares de Geometria Dinâmica interferem no processo de ensino e aprendizagem, pois a construção dos Fractais no computador favorece uma melhor assimilação e entendimento de alguns conceitos de Matemática e Geometria Euclidiana.

Um dos objetivos desta pesquisa foi, também, investigar algumas implicações da utilização de computadores em ambientes de aprendizagem da Matemática, mais especificamente da Geometria Euclidiana, propiciando aos professores e pesquisadores da área um repensar sobre a sua prática pedagógica, adequando-a às novas necessidades que se impõem com o avanço da tecnologia e, dessa forma, contribuindo para um possível redimensionamento no processo de ensino-aprendizagem da Geometria Euclidiana.

Assim, elaboramos uma estratégia de ensino-aprendizagem, abordando de maneira “inovadora” alguns conceitos de Matemática e a Geometria Euclidiana através

⁵ Auto-semelhança é a simetria através das escalas, ou seja, um objeto possui auto-semelhança se apresenta sempre o mesmo aspecto em qualquer escala que seja observado.

dos Fractais e softwares de Geometria Dinâmica, buscando encontrar resposta ao questionamento principal:

“Que contribuições pode trazer, para o ensino-aprendizagem de Geometria, um estudo de *Fractais Geométricos* através de *caleidoscópios e softwares de Geometria Dinâmica*?”

Levantar estas contribuições significa, em outras palavras, elucidar aspectos matemáticos, computacionais, inerentes ao processo de exploração e construção de conceitos matemáticos em ambientes informatizados, através de resolução de problemas, caleidoscópios e Fractais. Além disso, significa, também, oferecer aos professores e pesquisadores da área elementos para uma possível reflexão e mudanças de suas estratégias de ensino e métodos de trabalho, adequando-os aos avanços tecnológicos que perpassam pela Educação Matemática.

Para responder à pergunta norteadora da nossa pesquisa, como já dissemos, elaboramos algumas atividades que foram aplicadas a alunos de um Curso de Extensão, o que nos ajudou a compreender como os Fractais, caleidoscópios e softwares de Geometria Dinâmica podem contribuir para que a aprendizagem se torne interessante e participativa.

Através de nossa “nova” estratégia pretendemos alcançar, ainda, outros objetivos:

2.1 Objetivos de natureza Matemática

- Mostrar as relações numéricas dos Fractais e seus elementos, conforme as iterações sucessivas; por exemplo, contagem, perímetro e áreas.
- Trabalhar com padrões geométricos, bissetriz, ponto médio, mediatriz, teorema de Tales, estudando os conceitos de medida, seqüências e limites, ao mesmo tempo em que se adicionam novas idéias como a auto-semelhança e a dimensão Fractal.
- Analisar algoritmos e progressões geométricas e aritméticas.
- Buscar intersecções entre alguns padrões caleidoscópios e padrões Fractais.

2.2 Objetivos de natureza educacional

- Propiciar ao professor de Matemática, instrumentos e recursos didáticos para uma integração multidisciplinar como, por exemplo, nas áreas de:

Ciências: Estudando as formas da natureza;

Desenho geométrico: Desenvolvendo as habilidades gráficas, através do manuseio de compasso e de régua.

Educação Artística: Contribuindo no desenvolvimento do senso estético, criando e colorindo Fractais.

Informática: Utilizando os softwares como auxiliares na aprendizagem, e desenvolvendo no aluno habilidade no uso dos mesmos.

Tais objetivos se justificam, se considerarmos que o professor deve oferecer condições para que os alunos possam se desenvolver, pois segundo Papert (1985):

O educador deve atuar como antropólogo. E, como tal, sua tarefa é trabalhar para entender que materiais dentre os disponíveis são relevantes para o desenvolvimento intelectual. Assim, ele deve identificar que tendências estão ocorrendo no meio em que vivemos. Uma intervenção significativa só acontece quando se trabalha de acordo com essas tendências. Em meu papel de educador-antropólogo eu vejo novas necessidades sendo geradas pela penetração dos computadores na vida das pessoas (p.50).

Dessa forma nossa proposta, neste trabalho, é apresentar uma estratégia de ensino utilizando softwares de Geometria Dinâmica e caleidoscópios para aprendizagem da Matemática. Como utilizamos softwares de Geometria Dinâmica, apresentamos no próximo capítulo as tecnologias da informação e comunicação na educação matemática.

Capítulo II

CAPÍTULO II

1. AS TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Quando debatemos o uso das tecnologias da informação e comunicação em sala de aula, temos que refletir a maneira como devemos utilizar esse “novo” agente do processo de ensino-aprendizagem, visando desenvolver a criatividade, o raciocínio e habilidades nos alunos. A tecnologia informática marca uma nova etapa na vida da sociedade, conduzindo-a a novas formas de viver, de trabalhar e de pensar. Entretanto, nas escolas e para muitos professores a informática ainda continua sendo um corpo estranho que provoca, sobretudo, um grande incômodo.

Atualmente, no Brasil, o uso da informática na Educação é uma realidade que não pode ser deixada de lado. Segundo Borba e Penteado (2001), a tecnologia informática passa a ser um “novo ator” do processo de ensino-aprendizagem que age e interfere moldando nossos pensamentos, porém não determinando-os. Nas duas últimas décadas, estudos vêm sendo realizados com o intuito de integrar o uso de tecnologia (calculadoras, computadores e softwares) ao ambiente de ensino e aprendizagem da Matemática. Alguns pesquisadores como: Balacheff e Kaput (1996), Valente (1998), Niss (1999), Miskulin (1999), Borba e Penteado (2001) possuem trabalhos nesta linha, e estão preocupados com o impacto da tecnologia na sala de aula.

Acreditamos que o uso da tecnologia possa ser útil na Educação Matemática nas mais variadas tarefas, como a resolução de problemas, atividades de investigação e modelação, e na resolução de exercícios que permitem aprofundar a compreensão de fenômenos, pois a tecnologia é capaz de fornecer imagens visuais de objetos matemáticos, facilitar a organização e análise de dados, permitindo efetuar cálculos de forma eficiente e correta. Assim, pensamos que o “poder” da tecnologia torna-se possível e necessário na Educação Matemática. Porém, pesquisas nesta área mostram, ainda, que para utilizarmos adequadamente o sistema tecnológico (hardware e software), é necessário um operador, pois, às vezes, o próprio sistema tecnológico pode torna-se um obstáculo para o aprendizado.

Nessa mesma linha de idéias D'Ambrosio (1997) diz que:

Alguns dirão: Quem manda é quem tem o hardware e o software. Não posso concordar. O hardware e o software são e continuarão sendo estúpidos, incapazes de iniciativas. (...) Assim como o hardware, o software só é operacional se houver um operador, e este é um indivíduo. Não há como remover dos seres humanos a capacidade de crítica – portanto a capacidade de resistência, tornando operacional o sistema, como aconteceu no período colonial (p.146).

Assim, espera-se que os professores acompanhem o desenvolvimento tecnológico, pois, ao nosso ver, é um fator que influencia demasiadamente na aquisição dos resultados em diversas áreas do conhecimento. Muitas escolas brasileiras ainda não estão preparando os professores e alunos para inseri-los no meio tecnológico, o que hoje não é mais elucubração, mas uma realidade que se impõe na sociedade e que devemos encarar. Desse modo, os professores devem procurar criar ambientes de aprendizagem, com recursos tecnológicos disponíveis aos alunos, utilizando uma proposta pedagógica atualizada, que leve em conta as novas tecnologias da informação e comunicação. Nesse sentido, a função do professor torna-se extremamente importante, ou seja, mediar o processo ensino-aprendizagem no contexto tecnológico requer novas formas de atuação desse professor.

Dessa forma, o papel do professor é fundamental, pois, segundo Miskulin (1999):

O ambiente, por mais rico e construtivo que seja, por si só, não é suficiente para promover contextos propícios para a construção do conhecimento. Nesse sentido, a mediação do professor desempenha um papel determinante, na medida em que o professor cria as situações desafiantes; recorta esta situação em vários problemas intermediários que possibilitam aos alunos deslocarem-se muitas vezes do problema principal, olhando-o e percebendo-o, sob uma outra perspectiva, possibilitando-lhe a busca de novos caminhos e a reavaliação constante de suas estratégias e objetivos, enfim, envolvendo-se, cada vez mais, no processo de construção do conhecimento. (p.88).

Segundo Valente (2003), para que ocorra a implantação do uso do computador na educação são necessários, basicamente, quatro ingredientes: o computador, o software educativo, o professor capacitado para usar o computador como meio educacional e o aluno.

Destes quatro ingredientes citados, o mais vulnerável, segundo Valente (2003), é a posição do professor para usar o computador como meio educacional, pois, de acordo

com Borba e Penteado (2001), na docência, independentemente do uso de Tecnologia Informática (TI), estão envolvidas as propostas pedagógicas, os recursos técnicos, as peculiaridades da disciplina que se ensina, as leis que estruturam o funcionamento da escola, os alunos, seus pais, a direção, a supervisão, os educadores de professores, os colegas professores, os pesquisadores, entre outros. Penteado (2000) afirma que:

Para explorar o potencial educacional das Tecnologias Informáticas (TI), é preciso haver mudanças na organização da escola e, particularmente no trabalho do professor (...). Quanto ao professor, as mudanças envolvem desde questões operacionais – a organização do espaço físico e a integração do velho com o novo – até questões epistemológicas, como a produção de novos significados para o conteúdo a ser ensinado. São mudanças que afetam a **zona de conforto** da prática do professor e criam uma **zona de risco** caracterizada por baixo índice de certeza e controle da situação de ensino (p.23).

Entendemos por zona de conforto o caminho onde quase tudo é conhecido, previsível e controlável, no qual não há movimento para territórios desconhecidos. A zona de risco é interpretada como um caminho que pode gerar incertezas e imprevisibilidade, tais como problemas técnicos e perguntas não esperadas. Segundo Borba e Penteado (2003), são várias as opções que podem levar um professor a enfrentar situações de risco, uma das quais é a utilização da Tecnologia Informática. Ambos acrescentam ainda:

Parece-nos que, ao caminhar em direção à zona de risco, o professor pode usufruir o potencial que a tecnologia informática tem a oferecer para aperfeiçoar sua prática profissional. Aspectos como incerteza e imprevisibilidade, geradas em um ambiente informatizado, podem ser vistos como possibilidades para o desenvolvimento: desenvolvimento do aluno, desenvolvimento do professor, desenvolvimento das situações de ensino e aprendizagem. (p.66).

Diante dessas imprevisibilidades, não podemos esperar que todos os professores queiram implementar o uso das novas tecnologias em sua prática pedagógica. Também devemos atentar às palavras de Almeida (2000), que nos diz:

muitas vezes apenas um grupo de professores tem interesse em inseri-los em sua prática e cabe a eles propor um projeto pedagógico que expresse seus interesses e necessidades. E para que o projeto inovador não se restrinja a um grupo isolado de professores idealistas, é preciso que a instituição tenha autonomia para definir prioridades e esteja

disposta a vivenciar todo o conflito inerente aos processos de mudanças (p.122).

A implementação das novas tecnologias da informação e da comunicação como recursos didáticos na educação se faz necessária, para desenvolver o processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Partimos do ponto de vista que a informática, quando adotada nas escolas, deve se integrar ao currículo, não como uma disciplina, mas como uma ferramenta, inclusive multidisciplinar, podendo os professores utilizá-la para bem realizar o seu trabalho, desenvolvendo atividades que levem a uma reflexão sobre qual a melhor forma de empregar seus recursos, analisando as características de cada disciplina, realizando a interação entre as diversas disciplinas e os recursos da informática.

Dessa forma, o computador pode se tornar um grande aliado para o desenvolvimento cognitivo dos alunos, viabilizando a realização de novos tipos de atividades e de novas formas de pensar e agir, pois não podemos nos esquecer que estar em um ambiente informatizado, que permite a realização de medidas e deformações das construções geométricas, traz mudanças no processo de aprendizagem. Pesquisadores como Borba e Penteado (2001) têm salientado que:

[...] devemos entender a informática. Ela é uma nova extensão de memória, com diferenças qualitativas em relação às outras tecnologias da inteligência e permite que a linearidade de raciocínios seja desafiada por modos de pensar, baseados na simulação, na experimentação, e em uma “nova linguagem” que envolve escrita, oralidade, imagens e comunicação instantânea. (p.46).

Contudo, cremos que o grande desafio do professor é colocar em prática o que vai ser útil, pois os efeitos da prática de hoje vão se manifestar no futuro, e, se por outro lado esta foi correta ou não, só será notado após o processo e deverá servir como subsídio para uma reflexão sobre os pressupostos teóricos que ajudarão a rever, reformular e aprimorar o saber que orienta nossa prática.

Ressaltamos que a inserção de computadores nas escolas deve ser feita com muita reflexão, pesquisa e estudo a respeito. Esperamos, também, que a política educacional possa criar possibilidades e mecanismos que possam oferecer Educação de qualidade a todos, condizente com o desenvolvimento da Ciência e da Tecnologia. Assim, o professor terá um papel fundamental, pois como educador deve “abrir a

mente” dos alunos para esse novo mundo tecnológico, que está cada vez mais presente na sociedade.

2. GEOMETRIA DINÂMICA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O termo “Geometria Dinâmica” (GD) é utilizado na Geometria praticada em computador, mantendo as conexões estabelecidas na Geometria com régua e compasso (Desenho Geométrico). Porém, esta última é “estática”. Se o aluno quiser analisar o objeto em outra disposição, terá que construir um novo objeto, enquanto que construindo no computador, através dos softwares de GD, é possível alterar objetos preservando-se suas propriedades. Por isso, podemos dizer que a GD é uma Geometria de uma construção e de vários movimentos e testes, características estas não encontradas na Geometria de régua e compasso, e que conferem à GD uma grande vantagem. A Geometria Dinâmica permite, ainda, que o aluno teste conjecturas e procure descobrir propriedades dos entes estudados.

Existe uma relativa escassez de softwares de Geometria Dinâmica adequados à realidade do ensino brasileiro. Necessitamos de contribuições para que existam mais opções disponíveis a educadores e estudantes. Muitos softwares disponíveis no mercado são resultados de traduções realizadas de softwares estrangeiros, porém são poucos grupos brasileiros dedicados à elaboração de softwares que se enquadrem à nossa realidade educacional.

A introdução do uso do computador na escola permite que o aluno tenha uma melhor preparação face ao desenvolvimento tecnológico ao seu redor e um maior entendimento sobre as limitações e capacidades da máquina, preparando-o para viver na sociedade contemporânea, já que se verifica que a tecnologia está presente nas mais diversas áreas e cresce cada vez mais.

Nessa mesma linha, Ponte (2002) diz que a informática possibilita o desenvolvimento das

capacidades de percepção de princípios, de relação interpessoal e de abertura às diversas formas da cultura contemporânea, todos eles capacidades e valores essenciais ao exercício da profissão. (p. 3 - 4).

Desta forma, encontramos o Cabri Géomètre II e o iGeom, que são softwares de Geometria Dinâmica, que podem oferecer contribuições e que se relacionam à

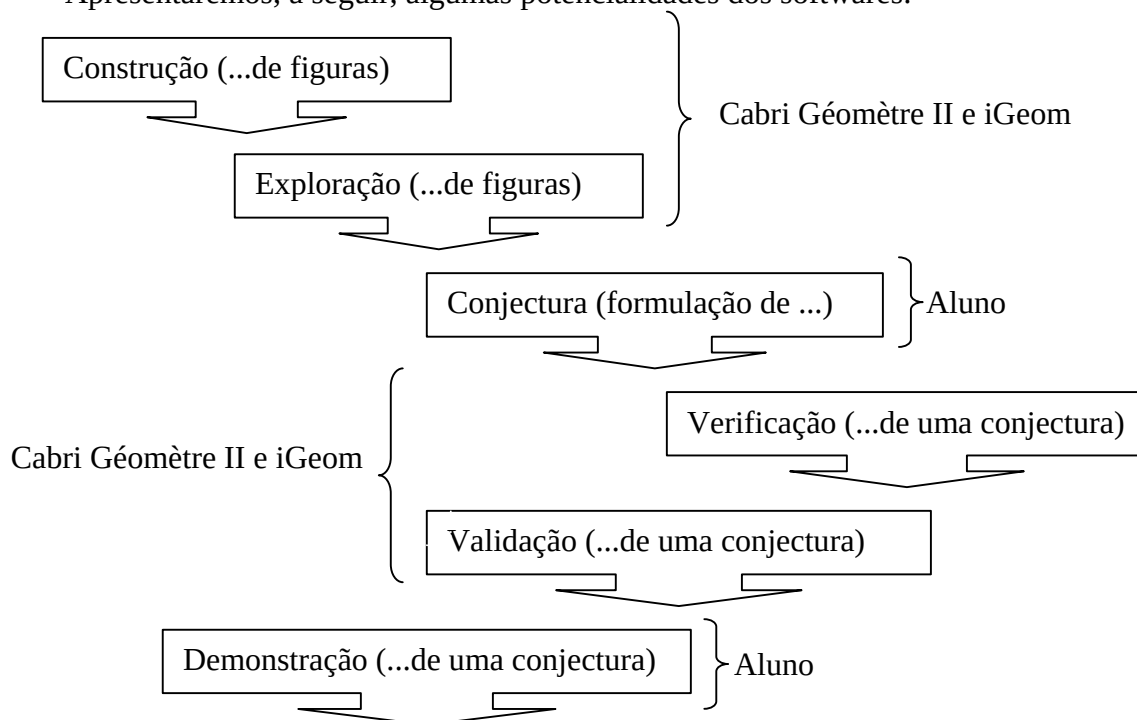
formação do aluno, desenvolvendo sua base conceitual, sua capacidade de reflexão e raciocínio, contribuindo para a formação de cidadãos mais críticos e possibilitando melhor interação com a tecnologia e as aplicações da ciência, que estão presentes na vida cotidiana.

Os softwares Cabri Géomètre II e iGeom são programas de Geometria Dinâmica capazes de efetuar construções numa linguagem muito próxima à do “lápiz-e-papel”. Eles possuem ainda uma boa interface facilitando a exploração e manipulação rápida das figuras, permitindo visualizar lugares geométricos, gravar macros, medir distâncias, ângulos e efetuar diversas construções em tempo real, etc.

Escolhemos os softwares Cabri Géomètre II e o iGeom, pois estes possuem recursos inerentes à construção de Fractais Geométricos e Fractais de base caleidoscópicas, o que permite gravar as etapas sucessivas de uma construção, ferramenta essencial para a construção dos Fractais.

Mostraremos, através de atividades desenvolvidas com alunos no Curso de Extensão, que a utilização desses softwares mediada pelo professor e por meio de resolução de problemas, permite a criação de um ambiente favorável para que ocorra a aprendizagem.

Apresentaremos, a seguir, algumas potencialidades dos softwares:



Após a construção e exploração de figuras, os alunos puderam formular conjecturas e procuraram verificar para depois validar e, enfim, demonstrar formalmente.

Na tabela abaixo estão as principais características pedagógicas do Cabri Géomètre II e do iGeom, em relação ao lápis-e-papel.

Características	Natureza	
	Cabri Géomètre II e iGeom	Papel-e-lápis
construção de figuras	Permite...rapidamente	permite
redefinição de um objeto	Permite...rapidamente	Não é possível
deformação de uma figura	Permite	Não é possível
construção tender ao infinito	Permite	Não é possível
Visualização de lugar geométrico	Permite	não existe (ou limitada)
Movimentação da figura	Permite...rapidamente	Impossível
validação de propriedades	Existe	não existe (ou limitada)
leitura de área e perímetro de figuras	Permite (e limitada)	Permite (e limitada)

Tabela 1

Após analisarmos outros softwares de Geometria Dinâmica como, por exemplo; Geometricks, Cinderella, Dr. Geo, Geometer's SketchPad, etc., encontramos no iGeom e no Cabri Géomètre II ferramentas adequadas para a realização do nosso trabalho.

Na próxima seção apontaremos algumas das potencialidades do iGeom na construção de Fractal.

2.1 POTENCIALIDADES DO iGeom

Após realizar algumas “buscas” sobre softwares de Geometria Dinâmica encontramos o iGeom. Nessa “busca”, observamos que, à exceção do iGeom, os

softwares comerciais é que exportam *applets*⁶. Este foi o único software gratuito que encontramos com essa possibilidade. Ser gratuito (*freeware*) significa que podemos utilizá-lo sem precisar pagar, porém não temos acesso ao seu código-fonte; portanto, não podemos alterá-lo. Somente podemos usá-lo da forma como ele foi disponibilizado. Isso distingue-o de um software livre (*Free Software*), que possui seu código-fonte aberto para qualquer pessoa alterá-lo, para adequá-lo às suas necessidades, sem ter que pagar. Assim, podemos perceber que software livre e software gratuito não são a mesma coisa.

Outra vantagem do iGeom é que podemos utilizá-lo em qualquer plataforma, por ter sido desenvolvido totalmente em Java. Observe a tabela comparativa abaixo:

Software	Plataforma	Exporta Applet	Licença⁷
Cabri Géomètre II	Windows	Sim	Comercial
Geometricks	Windows	Não	Comercial
Cinderella	Linux/Windows/Mac	Sim	Comercial
Dr Geo	Linux/Windows	Não	Livre
Geometer's SketchPad	Windows	Sim	Comercial
iGeom	Linux/Windows/Mac	Sim	Livre

Tabela 2

Além da vantagem de “rodar” em qualquer plataforma, o iGeom pode ser utilizado tanto dentro do navegador (Web), o que possibilita o acesso de qualquer lugar através da Internet, como na forma de um aplicativo. O que se modifica entre as duas versões é que quando se usa o aplicativo não é necessário conexão com a Internet. Porém, isso implica na impossibilidade de envio das soluções de exercícios pela rede, mas permite que elas sejam gravadas em disco e recuperadas, posteriormente. Acrescente-se ainda, ao iGeom, a possibilidade de três tipos de armazenagens de construções:

⁶ Demonstração da solução passo a passo de exercícios de Geometria, permitindo que o aluno acompanhe a sequência das construções para resolução de um exercício, informação que é normalmente perdida na apresentação em formato impresso.

⁷ Estaremos utilizando o termo licença comercial para nos referir àquele software desenvolvido por uma empresa com o objetivo de lucrar, e licença livre desenvolvido sem fins lucrativos.

- preserva o desenho para a versão aplicativa (GEO) na forma de applet (exportar para HTML+Java) para que seja utilizada na área de desenho do iGeom.
- guarda o algoritmo que realiza a construção, na forma de script (SCR) para ser incorporada em páginas HTML.
- armazena por uma extensão do formato GEO, que permite execuções de funções (scripts). Esta versão permite o uso de script que não é permitido na versão applet, isto é, via Internet, por causa da segurança.

O software iGeom foi desenvolvido e vem sendo aperfeiçoado pelo Professor Doutor Leônidas de Oliveira Brandão, do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da USP, e alunos da iniciação científica da mesma Universidade. O software iGeom e suas ferramentas foram construídas usando uma quantidade pequena de ícones, de modo a ampliar as possibilidades, a comodidade e a praticidade para os usuários.

Conforme Brandão (2002):

De modo geral, os recursos do iGeom poderão permitir que os professores possam criar e adaptar o material didático estático, que normalmente é usado no ensino de Geometria, trazendo benefícios ao aprendizado do aluno e permitindo uma abordagem mais construtiva com exemplos interativos que ilustram o relacionamento entre os objetos geométricos.

Outra possibilidade do iGeom é a disponibilização de atividades na Internet. Esta é uma característica importante, pois com a globalização a Educação à Distância (EaD) vem ganhando força nos últimos anos, e, segundo Picanço (2001), a EaD vem ocupando lugar de destaque na sociedade atual, envolvendo um número cada vez maior de pessoas, sendo, portanto, necessário que as ações na área sejam acompanhadas de intensa reflexão. Através dessa necessidade, foram criadas ferramentas no iGeom, com o intuito de oferecer cursos à distância.

Com essa preocupação, Brandão e Isotani (2003) afirmam:

Um dos desafios que pretendemos vencer é a incorporação de recursos de comunicação no iGeom para permitir, por exemplo, que o professor obtenha informações dos exercícios que cada aluno já resolveu. Este exemplo está relacionado com um ambiente presencial de ensino, mas também podemos pensar neste processo para comunicação assíncrona, onde o aprendiz pode entrar no sistema a qualquer momento para estudar. Este é um objetivo ambicioso, pois para isso necessitaremos

desenvolver mecanismos confiáveis para avaliação de respostas ao problema proposto pelo professor, eventualmente, analisando o “conhecimento” do aluno relativo ao assunto e sugerindo alternativas/dicas para ele vencer dificuldades encontradas na tentativa de resolução do exercício.

Outro fator determinante que nos influenciou na utilização do iGeom, nesse trabalho, foi o fato deste software ser gratuito, o que promove economia de recursos. Costa (2003) publica uma matéria dizendo que o Brasil enviou, em 2003, US\$ 1,3 bilhão para os Estados Unidos em *royalties*⁸ relativos à informática. Isto porque, anualmente, o país paga taxas pelo uso de softwares de propriedade de empresas americanas. Apenas para correlacionar, no mesmo ano o orçamento do *Fome Zero*, programa social de prioridade no governo Lula⁹, ficou abaixo de US\$ 650 milhões. Isso nos leva a pensar que se os softwares utilizados fossem livres ou gratuitos, o dinheiro gasto poderia ser mais bem empregado, por exemplo, em programas educacionais dentro do país.

Algumas instituições têm experimentado grande economia utilizando softwares livres. Costa (2003) relata que a:

[...] prefeitura de São Paulo já pode comemorar a economia feita para a instalação de 80 telecentros - locais que oferecem acesso gratuito a computador e internet - na capital paulistana, todos utilizando o GNU Linux como sistema operacional. "Se a prefeitura fosse pagar licença para uso de software, seriam gastos R\$ 14 milhões. O custo de implantação de todos os centros ficou em R\$ 30 milhões. Ou seja, se fôssemos usar software proprietário, com a mesma quantia, teríamos aberto só metade das unidades", explica o coordenador de comunicação do governo eletrônico da prefeitura de São Paulo, João Cassino.

Já existem resultados de pesquisas brasileiras na área de softwares livres, mas ainda é pouco. Um bom exemplo é o Teleduc - plataforma utilizada como base para ensino à distância - desenvolvida na Unicamp (Universidade de Campinas), e que já está sendo utilizado gratuitamente por outras universidades, como a Unesp Campus Rio Claro, Universidade Federal de Alagoas, etc.

Atualmente, os governos estaduais, inclusive o de São Paulo, têm gasto muito dinheiro na compra de softwares para as escolas da rede pública como, por exemplo, o

⁸ Trata-se de uma retribuição financeira paga mensalmente pelo franqueado ao franqueador pelo uso contínuo da marca, pelo apoio permanente que o franqueado recebe.

⁹ Luis Inácio Lula da Silva, Presidente do Brasil.

Cabri Géomètre II, que é um software comercial para o uso em Geometria. Isto é inconcebível num país que possui alto índice de desemprego e déficit na área econômica.

Conforme Costa (2003), em Porto Alegre 92% da rede municipal de ensino já utiliza computadores com sistema operacional livre, pois o governo gaúcho promoveu um programa para implementação do Linux. O CD do Linux pode ser duplicado infinitamente, sem quaisquer implicações legais, pois este software é totalmente livre. Atitudes desse tipo reduzem em muito os gastos com plataformas e softwares comerciais. Essa visão de economia nos influenciou na escolha do iGeom, pois este é totalmente gratuito e está disponível na Internet através do endereço <http://www.matematica.br/iGeom>. Dessa forma, os professores não enfrentarão nenhum problema nas escolas com a compra e instalação do software iGeom, pois ele funciona na forma de *applet* na Internet. Portanto, de qualquer lugar podemos utilizar este software de Geometria Dinâmica.

As políticas educacionais tecnológicas vêm ocorrendo no país com programas como: Educom¹⁰, Formar¹¹, Proninfe¹² e o Proinfo¹³. As ações do Proinfo englobam a mobilização e a inclusão, destacando-se a informatização das escolas e a capacitação dos professores, visando uma mudança de paradigmas. Muitas escolas estão tentando implantar as novas tecnologias, mas não é tão fácil assim, pois há que se deixar uma educação totalmente baseada na transmissão de informação e passar à criação de situações que promovam a compreensão que envolva o aluno, fazendo com que ele próprio construa o seu conhecimento. Mas, para isso, é necessária atualização dos professores para que possam trabalhar com as novas mídias da comunicação e informação.

A implantação das novas tecnologias depende, fundamentalmente, do governo, dos alunos, dos professores, dos diretores e de especialistas. Os professores deverão ser mediadores do processo educativo. Portanto, o seu trabalho não poderá mais ser

¹⁰ Computador na Educação foi lançado pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC) e pela Secretaria Especial de Informação, em 1983.

¹¹ Criado dentro do Educom em 1987.

¹² Programa Nacional de Informática na Educação, lançado em 1989 pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC).

¹³ Programa Nacional de Informática na Educação criado em 1997 pelo Ministério da Educação e Cultura MEC, SEED (Secretaria Estadual de Educação à Distância) e CONSED (Conselho Nacional das Secretarias Estaduais de Educação).

concebido isoladamente, mas sim em conjunto com os colegas, a partir de propostas mais amplas que extrapolam os limites de uma disciplina dentro da sala de aula. As mudanças na escola não serão por decreto, ou acontecerão de um dia para outro. Será um processo de construção de mudanças, que deve partir de uma proposta ampla e consistente, prevendo uma articulação entre a teoria e a prática.

Acreditamos que o maior desafio para a inserção do computador na educação é a mudança de postura e formação dos administradores e professores. Essas mudanças são causadoras de fobias, incertezas e, portanto, de rejeição do desconhecido. Vencer essas barreiras certamente não será fácil, porém, se isso acontecer, teremos benefícios tanto de ordem pessoal quanto de qualidade do trabalho educacional; caso contrário, acreditamos que a escola continuará no século XVIII.

Apresentamos, na figura abaixo, as ferramentas do software de Geometria Dinâmica iGeom. As informações a seguir representam preliminares, e foram incluídas apenas para auxiliar os interessados em iniciar um processo de aprendizagem deste software. Na parte superior da tela do iGeom encontra-se a barra de menus, que contém as seguintes opções, devidamente expostas com seus comandos:

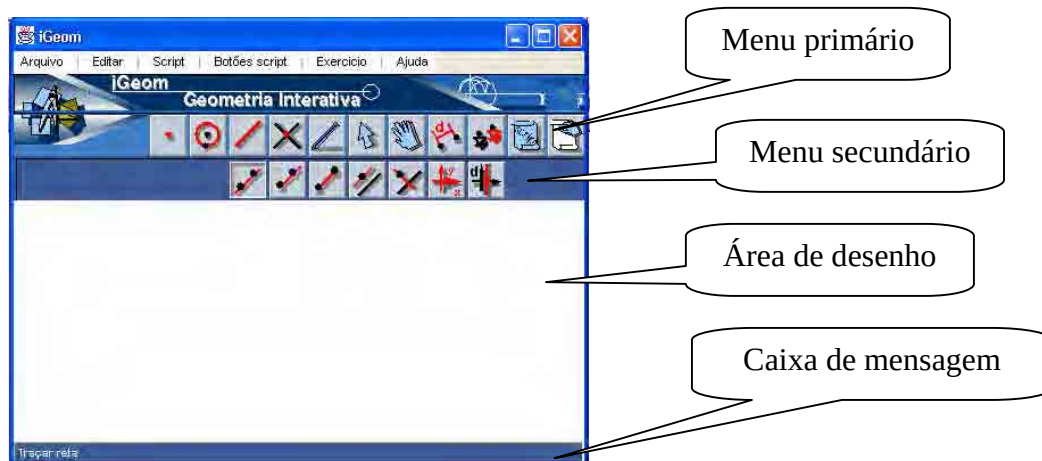


Figura 1

Arquivo: Abrir arquivo, Abrir arquivo preservando desenho, Gravar construção, Gravar como, Gravar algoritmo, Gerar applet, Exportar arquivo PostScript e exportar imagem para GIF, Sair

Editar: Esconder, Mostrar, Rastrear, Limpar tracejado, Limpar objetos, Medir distância, Medir arco, Rótulo, Grid, Eixo.

Script: Executar, Começar, Finalizar, Recorrência, Executar passo a passo.

Botão Script: Adicionar script, Remover script

Exercício: Criar Exercício, Desfazer criação, Limpar Resposta, Mostrar solução,

Ajuda: Sobre, Objetos.

A Barra de Ferramentas

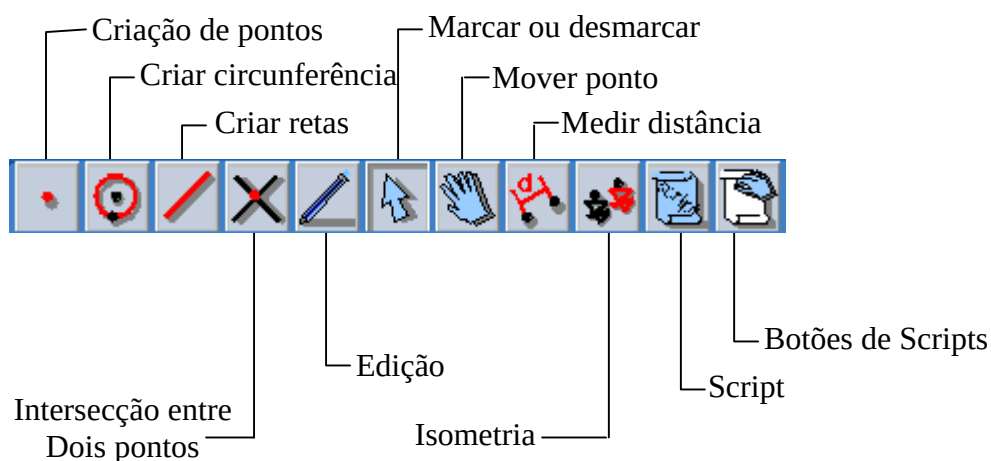


Figura 2



Se selecionar o botão mantendo o mouse pressionado sobre o ícone, aparecerão dois novos ícones:



Selecione o botão do ponto (debaixo do botão seta) com o mouse para colocar, então, o ponto na sua janela; mova o mouse e coloque o cursor onde desejar; clique no mouse, uma única vez, e o ponto é criado.



Quando um segmento de reta ou dois pontos forem selecionados, este comando colocará um ponto no ponto médio desse segmento. O ponto médio será travado, e mover-se-á somente ao ajustar-se o comprimento do segmento.



Se selecionar o botão mantendo o mouse pressionado sobre o ícone, aparecerão dois novos ícones:



Para construir uma circunferência, selecionar o botão próprio da barra de ferramentas. Clique e, mantendo pressionado o mouse, arraste o cursor afastando-se do centro. O raio da circunferência aumentará; quando alcançar o tamanho desejado libere o botão do mouse.



Cria uma circunferência definida por centro e raio; raio representado por segmento.



Se selecionar o botão mantendo o mouse pressionado sobre o ícone, aparecerão novos ícones:



Criar reta a partir de dois pontos (novos ou pré-existentes).



Criar semi-reta a partir de dois pontos (novos ou pré-existentes), o primeiro ponto será a origem.



Criar segmento a partir de dois pontos (novos ou pré-existentes).



Criar paralela à reta dada, passando por ponto também dado. Primeiro clicar na reta e depois, no ponto (se não existir o ponto, será criado um na posição).



Criar perpendicular à reta dada passando por ponto dado. Primeiro clicar na reta original e depois, no ponto (se não existir será criado um no local).



Criar eixos cartesianos, com unidade (ao mover a unidade, todas as distâncias expressas na tela são recalculadas, mantendo a proporção original com a unidade); clicar no botão para aparecerem ou desaparecerem os eixos.



Criar reta ortogonal a um dos eixos cartesianos, a partir de uma distância (qualquer medida dinâmica).



Criar ponto em interseção. Clique no primeiro objeto e depois no segundo (também funciona na forma: marcar os dois objetos que deseja interceptar e depois "clique" neste botão).



Se selecionar o botão mantendo o mouse pressionado sobre o ícone, aparecerão novos ícones:



Esconder objetos marcados. Marque todos os objetos que deseja esconder, depois clicar nesse ícone.



Mostrar todos os objetos escondidos.



Objetos com rótulo: se o botão rótulo estiver ativado (selecionado), novos objetos aparecerão com rótulos (caso contrário fica sem rótulo). Para trocar rótulo de um objeto já criado, marque o rótulo (com ) e depois clique no botão rótulo (se tiver mais que um objeto selecionado, o primeiro rótulo da lista será considerado, desmarcando os anteriores).



Cria lugar geométrico ("locus") definido por algum ponto (selecione primeiro ponto sobre objeto que definirá trajetória do "ponto alvo", depois selecione o "ponto alvo", que desenhará o "locus").



Rastrear um ponto: clicar no ícone "rastrear" e depois no ponto que deseja rastrear, serve para observar o lugar geométrico em estudo.



Remover todos os tracejados da área de desenho.



Remover algum objeto e seus dependentes. Clicar no ícone "deletar" e depois no objeto que deseja remover, mas, cuidado, pois todos os que dependerem deste também serão removidos.



Desfaz a última remoção de objeto (ou recupera todos os objetos após um "limpa tudo").



Remove todos os objetos ("limpa tudo") da área de desenho. Cuidado, esta opção remove (apaga) todos os objetos (e por enquanto não dispomos de um comando tipo "desfaz").



Marcar/Desmarcar objetos, o primeiro clique sobre um objeto marca-o e o segundo desmarca-o (se quiser marcar objetos numa região retangular, "arraste" o mouse definindo um retângulo que os "contenha" - isso funciona com qualquer botão ativado).



Arrastar objetos; clicar no objeto (soltar o botão do mouse) e mover o mouse pela área de esboço até a posição desejada; então, dar novo clique.



Se selecionar o botão mantendo o mouse pressionado sobre o ícone, aparecerão novos ícones:



Abrir calculadora para efetuar cálculos com medidas (arcos, distâncias ou outros cálculos).



Medir distância entre pontos, com a seta; marcar (com ) os pontos e depois clicar no ícone medir distância.



Medir arco (comprimento de arco), determinado por dois pontos numa mesma circunferência (marcar os dois pontos com "marcador"), ou medir ângulo determinado por três pontos, sendo o segundo o centro do mesmo (marcar com o "marcador" os 3 pontos).



Se selecionar o botão mantendo o mouse pressionado sobre o ícone, aparecerão novos ícones:



Transladar objetos geométricos (marcar primeiro os pontos, A e B, que definem a direção de translação e, a seguir, todos os objetos a serem transladados).



Refletir objetos geométricos (marcar primeiro a reta "espelho" e a seguir todos os objetos a serem refletidos).



Rotacionar objetos geométricos (marcar primeiro o arco ou ângulo de rotação, depois o centro da rotação e, por último, todos os objetos a serem rotacionados).



Se selecionar o botão mantendo o mouse pressionado sobre o ícone, aparecerão novos ícones:



Trabalhar Com Rotinas "scripts": até o momento trabalhamos apenas no editor de desenhos do iGeom; porém possibilita as rotinas, também chamadas de Script. A Janela de rotina permite que sejam gravadas todas as etapas sucessivas de uma construção, criadas a partir de um conjunto preliminar de objetos geométricos, como um programa.



Esse botão ativa a rotina, sempre que pretender-se utilizá-la. Para isso, é necessário criar e marcar os objetos iniciais. Assim, poderemos repetir a mesma construção, sempre que necessário.



Suponhamos gravada a rotina que originou uma figura geométrica a partir de um conjunto de objetos geométricos iniciais. Pretendendo que seja repetido este processo em um novo conjunto de objetos geométricos, devemos selecionar os novos objetos e pressionar o botão  (recorrência). Finalizando, deve-se carregar clicando no botão



e a rotina estará pronta para ser executada.



Anotar resposta de um exercício: primeiro marque os objetos que deseja ressaltar e depois "clique" neste botão.



Comentário em "script": anotar passo, em "script", primeiro na janela de comentários do "script" (parte de baixo), digitar seu comentário sobre o "script", depois clicar no "passo" pronto. Durante a aplicação do "script" aparecerá uma caixa de texto com seu comentário (explicativo).



Executar passo a passo: sem que a janela do gravador esteja aberta, "clique" neste botão para que os próximos "scripts" sejam interpretados passo a passo (após cada comando geométrico, abrir-se-á uma janela para permitir ao usuário continuar).



Cancelar anotação do "script", cancela a gravação/envio do "script".

2.2 O SOFTWARE CABRI GÉOMÈTRE II E SUAS FERRAMENTAS

O Software Cabri Géomètre II permite a construção e exploração de conceitos matemáticos interativamente. Jean-Marie Laborde e Franck Bellemain desenvolveram o Cabri Géomètre II no Institut d'Informatique et Mathématiques de Grenoble (IMAG), um laboratório de pesquisa da Université Joseph em Grenoble, França, em cooperação

com o Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) e a Texas Instruments. O Cabri Géomètre II é representado no Brasil, desde 1992, pela PROEM, na PUC-SP.

O nome Cabri Géomètre II foi inspirado nas palavras da língua francesa “cahier de brouillon interactif”, que significa “caderno de rascunho interativo”. Como o próprio nome indica, o usuário pode utilizá-lo como uma folha de caderno de desenho, com o objetivo de realizar construções geométricas, sendo possível investigar e explorar, de forma dinâmica, as diversas propriedades intrínsecas à construção de figuras geométricas.



Figura 3

Na parte superior da tela do software Cabri Géomètre II, temos a barra de menus que contém as respectivas opções:

Arquivo: com os comandos Novo, Abrir, Salvar, Salvar como, Recuperar, Mostrar página, Formato da impressão, Imprimir, Sair.

Editar: com os comandos Desfazer, Recortar, Copiar, Colar, Apagar, Selecionar tudo, Rever construção, Redesenhar.

Opções: com os comandos Ocultar/Mostrar atributos, Preferências, Configurações.

Ajuda: com os comandos Ajuda, Acerca do Cabri Géomètre II.

A figura abaixo mostra os 11 ícones da barra de ferramentas do software Cabri Géomètre II, com seus respectivos nomes.

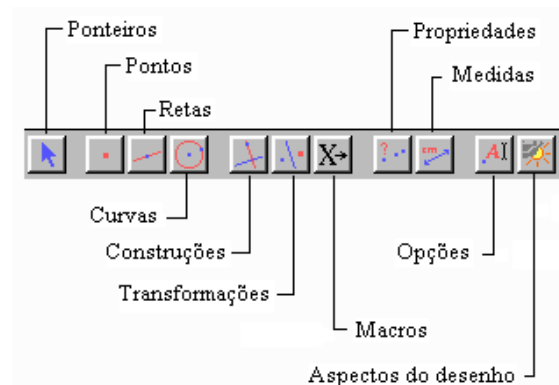


Figura 4

Cada um desses ícones ativa um sub-menu, onde se pode escolher a ferramenta desejada.

Ponteiros:

- Ponteiro
- Giro
- Rodar e Dilatar
- Dilatar/Reduzir

Pontos:

- Ponto
- Ponto sobre objetos
- Ponto de interseção

Curvas:

- Circunferência
- Arco
- Cônica

Retas:

- Reta
- Segmento
- Semi-reta
- Vetor
- Triângulo
- Polígono
- Polígono regular
- Transferência de medidas
- Lugar geométrico
- Redefinir objeto

Construções:

- Reta perpendicular
- Reta paralela
- Ponto médio
- Mediatriz
- Bissetriz
- Soma de vetores
- Compasso

Transformações:

- Simetria axial
- Simetria
- Translação
- Rotação
- Homotetia
- Inversão

Macros:

- Objetos iniciais
- Objetos finais
- Definir macro

Propriedades:

- Alinhado
- Paralelo
- Perpendicular
- Eqüidistante

Medidas:

- Distância e Comprimento
- Área
- Declive
- Medida de ângulo



- Pertence



- Coordenada e Equação



- Calculadora



- Tabela

Opções:



- Nomear



- Comentários



- Edição numérica



- Marcar ângulo



- Bloquear/desbloquear



- Traço de um objeto



- Animação



- Animação múltipla

Aspectos do desenho:



- Ocultar/Mostrar



- Colorir



- Preencher



- Espessura de traço



- Pontilhar



- Modificar aparência



- Sistema de eixos



- Novos eixos



- Grade

Acreditamos que os softwares escolhidos possibilitaram aos aluno, a ocorrência de uma aprendizagem de forma significativa e interessante, contribuindo, assim, para o acréscimo de seus conhecimentos científicos, de informática e audiovisual, quando desenvolvemos as atividades que foram experiências concretas em situações de Resolução de Problemas, as quais apresentaremos no capítulo VII, ao tratarmos da análise dos dados.

Capítulo III

CAPÍTULO III

1. REFERENCIAL TEÓRICO

Esta pesquisa foi elaborada com base em elementos teóricos fundamentados na teoria sócio-cultural de Vygotsky¹⁴, e em alguns trabalhos de pesquisadores que abordaram o tema informática na educação.

Acreditamos que a falta de interação entre aluno-aluno, aluno-computador e aluno-professor causam lacunas no processo de ensino-aprendizagem, pois conforme Belloni (1999):

As NTICs [Novas Tecnologias da Informação e Comunicação] oferecem possibilidades inéditas de interação mediatizada (professor/aluno; estudante/estudante) e de interatividade com materiais de boa qualidade e grande variedade. As técnicas de interação mediatizada criadas pelas redes telemáticas (e-mail, lista e grupos de discussão, webs, sites etc.) apresentam grandes vantagens, pois permitem combinar a flexibilidade da interação humana (com relação à fixidez dos programas informáticos, por mais interativos que sejam) com a independência no tempo e no espaço, sem por isso perder velocidade (p.59).

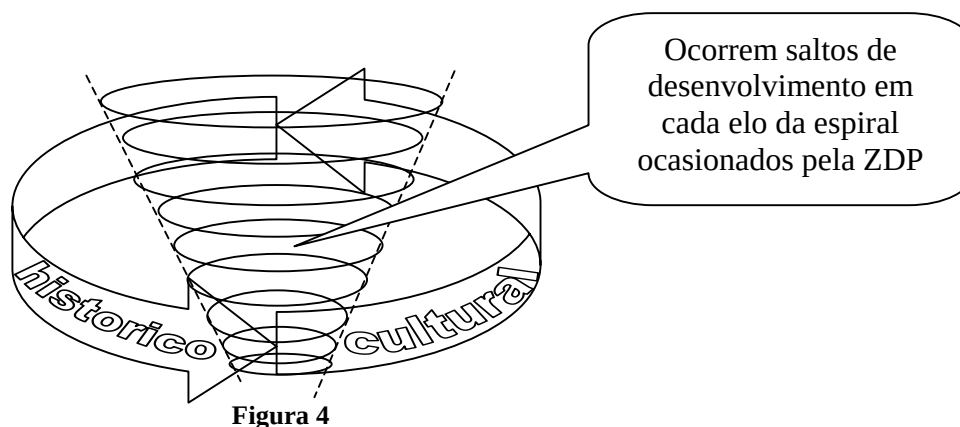
Para Vygotsky (1991), o desenvolvimento é construído como se fosse uma espiral, aparecendo dois tipos de desenvolvimentos: o natural, quando a criança já traz consigo instintos (biológicos), e o desenvolvimento cultural, o qual a criança vai construindo através da interação com o meio. Entretanto, com o tempo, esses dois tipos de desenvolvimentos se misturam.

Dessa forma, esperamos que o desenvolvimento, ocorrendo através de situações problema mediadas pelo computador, possa auto-estimular a aprendizagem, pois o computador possui linguagem e estrutura simbólica particular, como a linguagem materna natural.

Segundo Vygotsky (1991), o desenvolvimento ocorre tanto de dentro para fora quanto de fora para dentro, e para que tal ocorra é necessário que este sempre esteja em movimento, comportando-se como uma espiral (Figura 5), retornando a conhecimentos

¹⁴ Lev S. Vygotsky (1896-1934), professor e pesquisador, foi contemporâneo de Piaget e nasceu em Orsha, pequena cidade da Bielorrússia, em 17 de novembro de 1896. Viveu na Rússia e quando morreu, de tuberculose, tinha 37 anos.

anteriores e criando, assim, situações para que ocorra o desenvolvimento de um novo conhecimento.



Contudo, Vygotsky (1991) coloca que o desenvolvimento e a aprendizagem estão ligados desde o nascimento, através de um processo dialético. Para entender a relação entre desenvolvimento e aprendizagem, torna-se necessária a compreensão do conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP). Vygotsky (1991) a define como:

a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes (p.97).

A zona de desenvolvimento proximal pressupõe que experiências em duplas ou grupos contribuem para o desenvolvimento individual. A idéia de ZDP será utilizada em nosso trabalho, pois acreditamos que o desenvolvimento das situações problema em duplas e com o computador pode colaborar para o avanço da aprendizagem. Além disso, o professor também terá a função de mediar e orientar, contribuindo para o sucesso do desenvolvimento do conhecimento.

Vygotsky (1991) indica que

um aspecto essencial do aprendizado é o fato de ele criar a zona de desenvolvimento proximal; ou seja, o aprendizado desperta vários processos internos de desenvolvimento que são capazes de operar somente quando a criança interage com pessoas em seu ambiente e quando em cooperação com seus companheiros. (p.101)

Assim, entendemos que o nível de desenvolvimento mental de um aluno não pode ser determinado apenas pelo que o aluno consegue fazer sozinho. É necessário conhecer o que consegue realizar, também, com auxílio de outras pessoas. Entendemos, dessa forma, que o computador pode auxiliar no desenvolvimento do aluno, pois pesquisadores como Borba e Penteadó (2001) têm salientado que:

a informática, abre possibilidades de mudanças dentro do próprio conhecimento e que é possível haver uma ressonância entre uma dada pedagogia, uma mídia e uma visão de conhecimento (p. 43).

A Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) sugere a existência de um salto em cada momento do desenvolvimento do aluno individualmente, e tal salto não é necessariamente uniforme.

Vygotsky (1991) ressalta que são importantes as trocas interpessoais na construção do conhecimento. Assim, constatamos que a aprendizagem interativa (aluno-aluno, aluno-computador e aluno-professor) permite que o desenvolvimento avance.

O objetivo deste trabalho não é o de nos aprofundarmos na teoria histórico-cultural de Vygotsky, mas sim refletir um pouco sobre como alguns dos seus pressupostos teóricos podem auxiliar-nos a entender como o computador, associado aos softwares de Geometria Dinâmica, pode "funcionar" como mediador do processo de aprendizagem que a "nova linguagem" do computador traz.

2. O COMPUTADOR: UMA NOVA LINGUAGEM

Entendemos que a linguagem natural é muito importante para o desenvolvimento do ser humano, pois é a principal maneira que utilizamos para nos comunicar e manter relações sociais. Porém, na sociedade contemporânea utilizamos, além da linguagem natural, uma "nova linguagem" que o computador traz. Acreditamos que esta "nova linguagem" pode colaborar para o ensino-aprendizagem da Matemática, pois ela já está inserida na sociedade. Pesquisas têm mostrado que o computador, cada vez mais, se torna indispensável.

Borges Neto (1998) diz que

O computador é um instrumento excepcional que torna possível simular, praticar ou vivenciar verdades Matemáticas (podendo até sugerir conjecturas abstratas), de visualização difícil por parte daqueles que desconhecem determinadas condições técnicas, mas fundamentais à compreensão plena do que está sendo proposto (p. 149).

Outros pesquisadores estão em conformidade com Borges, tais como: Kaput (1992), Borba (2001), Valente (2002), que enfatizam a necessidade de uma reorientação pedagógica dos métodos, currículos e práticas, considerando os impactos da tecnologia. Nesse sentido, o grande desafio para o professor é redimensionar o uso do computador no ensino, incorporando-o às atividades de sala de aula. Hoje, já podemos realizar várias atividades através do computador, tais como: comunicar, pesquisar, ensinar à distância (EaD), comprar, efetuar serviços bancários, adquirir livros, namorar, etc.

Temos muitas outras atividades que podem ser realizadas com o auxílio do computador. Logo, é fácil perceber que o computador vem se tornando uma ferramenta excelente, extraordinária e atraente para o homem, já que as Novas Tecnologias da Informação e Comunicação (NTICs) trazem uma linguagem que pode “facilitar”, principalmente, as relações de ensino-aprendizagem da Matemática.

Entretanto, o que mais chama nossa atenção é a velocidade com que o computador tem ocupado espaço na sociedade nos dias atuais, sendo encontrado, praticamente, em quase todos os lugares e na maioria das escolas, nas quais a maior preocupação dos educadores é saber como conduzir as interações e usar as Novas Tecnologias da Informação e da Comunicação.

Papert (1986) vê no uso de computadores possibilidades que afetam a maneira das pessoas pensarem e, conseqüentemente, de aprenderem. Devemos entender o computador como uma "semente de mudança cultural" e reconhecer a importância da tecnologia na construção do conhecimento.

Assim sendo, acreditamos que o computador traz uma nova linguagem que pode causar transformações sociais, científicas e tecnológicas e, principalmente, no desenvolvimento da criança.

Vygotsky (1988) tinha como uma de suas preocupações as relações entre pensamento e linguagem, e a questão da mediação simbólica dos signos e as relações entre desenvolvimento e aprendizagem, analisando o desenvolvimento do homem num contexto, enfatizam a linguagem e a aprendizagem. Em cada salto do desenvolvimento,

o homem cria meios para interagir com o mundo e consigo mesmo; é o que Vygotsky chama de signo. Segundo Rego (1999):

Através dos signos, o homem pode controlar voluntariamente sua atividade psicológica e ampliar sua capacidade de atenção, memória,... pode se utilizar um sorteio para tomar uma decisão, amarrar um barbante no dedo para não esquecer um encontro, anotar na agenda, escrever um diário para não esquecer detalhes vividos, construir um mapa (p.52).

Acreditamos que é da natureza do homem criar signos e usar estímulos auxiliares. Porém, tais estímulos são diversificados, pois a cultura de cada povo faz com que o homem crie e construa o seu próprio signo.

Refletindo sobre o significado do signo e de ferramenta no desenvolvimento das funções psicológicas superiores¹⁵, podemos concluir que tanto o signo como as ferramentas estão ligadas diretamente à mediação. No entanto, diferem, pois a ferramenta é vista como um “utensílio” que o homem utiliza para transformar o externo, e o signo tem uma característica de transformar o interior do homem.

Vygotsky (1988) chamou sua teoria de histórico-cultural, dando ênfase à linguagem que está conectada aos signos formados culturalmente, que são fundamentais para o desenvolvimento do homem. A linguagem é terminante na composição do pensamento, sendo a ferramenta fundamental para a construção de conhecimentos. A linguagem é, ainda, um instrumento, pois ela atua para transformar o desenvolvimento e a estrutura das funções psicológicas superiores.

Sob este ponto de vista, os computadores e os softwares de Geometria Dinâmica (o Cabri Géomètre II e o iGeom) aparecem como uma “nova linguagem” para a aprendizagem da Geometria. Os fundamentos geométricos destes softwares são simples de serem utilizados, incentivando a exploração, enfatizando o pensar, o construir, o conjecturar, o testar, etc.

O objetivo, neste capítulo, é entender como o computador, associado ao software de Geometria Dinâmica, pode ser abordado de maneira “renovadora”, já que estar em um ambiente informatizado (que permite a efetivação de medidas e modificação das construções geométricas) traz mudanças na maneira de pensar e, conseqüentemente, no

¹⁵ Funções psicológicas superiores são funções que foram obtidas pelo homem através do aprendizado cultural. No entanto, parte dessas funções básicas transforma-se como a consciência, o planejamento e a deliberação, características exclusivas do homem. Vygotsky (1988)

processo de aprendizagem. Na sequência, utilizamos Vygotsky (1991), Miskulin (1999) e Borba (2001) para explicar tais alterações.

Vygotsky (1991), para explicar a mediação, chama a atenção para o signo (interno) e a ferramenta (externo-computador). Com o uso do computador, acreditamos que o aluno consegue interagir com o objeto, modificando-o e modificando-se a si próprio através dos signos.

Nessa perspectiva, essa “nova ferramenta” que é o computador, associada ao software de Geometria Dinâmica, dá origem à mediação, pois o aluno não tem acesso direto aos objetos matemáticos, mas acesso mediado, através do monitor do computador, aos objetos reproduzidos por meio de softwares. Deste modo, entendemos que o conhecimento se dá através da interação mediada por várias relações.

Contudo, para que a interação (aluno-computador) ocorra de maneira satisfatória, sentimos a necessidade da atuação do professor como um mediador, pois Miskulin (1999) diz que

um ambiente computacional relaciona-se com diversos aspectos tanto teóricos, como metodológicos, porém um dos aspectos fundamentais, consiste na mediação do professor (pg.88).

Porém, para que o professor atue como mediador no processo de aprendizagem, há necessidade de mudanças na sua postura. Almeida (2000) ressalta que:

o uso do computador como ferramenta de aprendizagem requer uma mudança de postura do professor, mudança esta que nem sempre é do interesse do professor, e, mesmo quando o professor demonstra optar pela mudança, esta não ocorre de imediato, mas num processo gradativo, composto de ações, reflexões e depurações (p.133).

Se o professor aceitar essas reflexões acima, terá que modificar sua prática na sala de aula. A partir das idéias de Vygotsky, acreditamos que o professor deve deixar para trás aulas tradicionais onde o professor “pensa que ensinou e o aluno pensa que aprendeu”. O professor passa a ser um mediador do processo de construção do conhecimento, provocando os alunos com situações problema e auxiliando-os a decidirem qual caminho escolher até chegar à solução. O professor pode, ainda, propor atividades em grupo, e aqueles alunos que estiverem mais adiantados poderão ajudar os demais. Desse modo, o professor estará cooperando para o desenvolvimento dos conceitos que ainda não estão solidificados e ainda colaborando para a abertura de zonas de desenvolvimento proximal.

Nossa idéia é que o professor utilize softwares de Geometria Dinâmica para mediar e desenvolver a criatividade, o senso crítico e o pensamento, podendo analisar o possível erro e fazer dele uma hipótese para buscar novas conjecturas.

Acreditamos que o computador, associado aos softwares de Geometria Dinâmica, como o Cabri Géomètre II e o iGeom, e embasados em Vygotsky, pode ser considerado como uma ferramenta cognitiva que possui a capacidade de interagir e de interferir no processo de construção de conhecimentos. Essa “nova linguagem” que o computador traz está interligada aos signos; portanto, interfere nos mecanismos mentais dos alunos, podendo alterar a forma de pensar e, por consequência, refletindo na aprendizagem. Além disso, essa “nova linguagem” pode ajudar o aluno no processo de desenvolvimento, tendo a capacidade de ajudá-lo a esclarecer e compreender possíveis erros.

Tendo por base as idéias de Vygotsky, utilizaremos o computador associado aos softwares de Geometria Dinâmica (Cabri Géomètre II e iGeom):

- como sendo uma ferramenta cognitiva, com possibilidades de interferir no processo de construção de conhecimento;
- como um sistema integrado de signos, que interfere nos mecanismos mentais do aluno, podendo provocar alterações no processo de pensamento e, conseqüentemente, repercutindo na aprendizagem.

Dessa forma, acreditamos que o aluno terá condições de refletir sobre seus possíveis erros, reestruturando seus procedimentos, suas estratégias e até seus esquemas mentais. Essa “nova linguagem” traz alguns elementos importantes (computador e professor) que, ao nosso ver, seriam, para Vygotsky, os mediadores. Nessa perspectiva, o monitor do computador passa a ser uma reprodução do significado que o pensamento do aluno produz, servindo como um ambiente onde o aluno poderá se expressar e interagir. Os softwares escolhidos permitem uma ótima exploração da Geometria, pois são de fácil manuseio, apropriados para o ensino-aprendizagem dessa disciplina em ambientes computacionais, trazendo recursos numa interface agradável, favorecendo a interação com os alunos e proporcionando significado às propriedades geométricas.

Capítulo IV

CAPÍTULO IV

1. UM PANORAMA HISTÓRICO DO FRACTAL

Benoît Mandelbrot nasceu em 20 de Novembro de 1924, em Varsóvia, capital da Polônia. Em 1936, Benoît e seus familiares foram morar na França por causa da 2ª Guerra Mundial. Este pesquisador vem de família com tradição acadêmica, o que o levou a se interessar por Matemática, influenciado pelo seu tio Szolem Mandelbrot (1899-1983), professor de Matemática no “Collège de France”.



Benoît Mandelbrot estudou no “Lycée Rolin”, em Paris. Em seguida, frequentou a École Polytechnique (1944), onde trabalhou com Paul Pierre Lévy (1886-1971) e obteve o título de Ph.D, concedido pela universidade de Paris. Depois, foi para os Estados Unidos da América para estudar em Princeton, onde teve contato com John Von Neumann¹⁶.

Mandelbrot retornou à França em 1955, onde casou-se com Aliette Kagan. Nessa época começou a trabalhar no centro Nacional de la Recherche Scientifique como professor da Matemática. Em 1957 retornou a École Polytechnique, ficando sua carreira acadêmica marcada, principalmente, entre a França e os EUA.

Em 1958, foi convidado para trabalhar na IBM¹⁷, em Nova Iorque. Em 1987, tornou-se professor de Ciências Matemáticas na Universidade de Yale e, a partir desse momento, Mandelbrot começou a questionar a Geometria Euclidiana, pois dizia que esta não evidenciava abstração aceitável para compreender a complexidade da natureza.

Mandelbrot, após ser contratado pela IBM, começou uma série de estudos, junto com outros pesquisadores que estudavam coisas do tipo: o ruído (telecomunicação) e

¹⁶Nasceu a 3 Dezembro de 1903 em Budapeste, Hungria. As suas contribuições mais importantes situam-se na área da teoria mecânica do quantum, particularmente no conceito de "anéis dos operadores" (Álgebras de Neumann) e em Matemática aplicada, principalmente, em estatística e análise numérica.

¹⁷ International Business Machines

séries de preços em economia. Tais pesquisas acabaram convergindo com as idéias iniciais de Mandelbrot, dando origem à Geometria Fractal. A *palavra* “fractal” tem origem da palavra latina “fractus”, que significa quebrado, irregular. Mandelbrot é reconhecido mundialmente como o “criador” dos Fractais. Tal reconhecimento fica marcado através das obras clássicas: *Logique, Langage et Théorie de l’ Information* (com L. Apostel e A Morf), de 1957; *Fractais: Forma, Hipóteses e Dimensão*, de 1977; *A Geometria Fractal da Natureza*, de 1982.

Um dos fatores que levou Mandelbrot a estudar e desenvolver os Fractais foi não acreditar que a obra Euclidiana dava conta de explicar todas as formas, principalmente as da natureza. Após muitos estudos, Mandelbrot criticou a Geometria Euclidiana dizendo que Euclides não se aprofundou na idéia de Dimensão, a qual considera ser muito importante para o desenvolvimento da Geometria. Embora Mandelbrot seja considerado o pai dos Fractais, estudos anteriores já mostravam idéias semelhantes.

Apresentaremos, a seguir, alguns fatos históricos que ajuntam-se com as idéias de Mandelbrot, e que acreditamos terem colaborado para o desenvolvimento de sua Geometria Fractal.

Por volta de 1870, vários trabalhos estavam sendo desenvolvidos. Porém, alguns desses trabalhos geravam figuras que saíam das características usuais da Geometria euclidiana. Entre eles, temos o de Karl Theodor Wilhelm Weierstrass¹⁸, que apresentou algumas funções contínuas, não diferenciáveis, isto é, em nenhum ponto podia-se descrever uma reta tangente à curva. Nessa mesma época, Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor¹⁹, matemático de origem Russa, estudava um processo para transformar um segmento em infinitos “pontos”. Nessa mesma linha de pensamentos, Peano²⁰ construiu uma curva que pavimentava todo o plano.

Alguns anos depois, Jules Henri Poincaré²¹, matemático e filósofo francês, estudava o sistema solar e as órbitas dos planetas. Assim, criou o que hoje conhecemos como “topologia”, dizendo que os movimentos dos planetas geravam curvas estranhas, “caóticas”, cujas órbitas jamais se tornavam periódicas e previsíveis.

Estes trabalhos possuíam idéias que deram, mais tarde, origem aos Fractais.

¹⁸ Nascido na Alemanha, em 31 outubro 1815

¹⁹ Nasceu na cidade de St. Petersburg, em 03 de março de 1845

²⁰ Giuseppe Peano, matemático e logicista italiano, nasceu em 27 de agosto de 1858, em Spinetta, um vilarejo próximo à Cuneo, cidade italiana.

²¹ Nasceu no dia 29 de abril de 1854, em Nancy, na Lorena.

2. O QUE É UM FRACTAL?

Ao analisarmos um Fractal, verificamos que, ao escolhermos qualquer parte e ampliá-la, teremos imagens idênticas ao todo. Temos, assim, fragmentos geométricos similares, que mantêm-se invariantes em qualquer escala. Esta propriedade geométrica de manter seu formato, independentemente da ampliação, denominou-se auto-similaridade. Os Fractais são formas geométricas abstratas de uma beleza incrível, com padrões complexos que se repetem infinitamente, mesmo limitados a uma área finita.

Segundo Gouvea e Murari (2004):

Podemos considerar os Fractais como formas que se caracterizam por repetir um determinado padrão (auto-similaridade). Em consequência da auto-similaridade, quando vistas através de uma lente de aumento, as diferentes partes de um Fractal se mostram similares à forma como um todo.

Os Fractais são formas geométricas abstratas de uma beleza incrível, com padrões complexos que se repetem infinitamente, mesmo limitados a uma área finita. (p.5)

Para Barbosa (2002) Mandelbrot usou, ao definir Fractal, o conceito de dimensão “*um Fractal é, por definição, um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica*” (p.18). Essa “definição” foi criticada por vários matemáticos, inclusive pelo próprio Mandelbrot.

Feder (1998) considerou como razoável uma caracterização de Mandelbrot para que não fossem excluídos alguns objetos da física considerados Fractais: “*um Fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos*”.

Falconer, que escreveu duas obras importantes sobre Fractais (1985 e 1990), sugeriu o entendimento de Fractal através de três características:

Um conjunto F é Fractal se, por exemplo:

- A dimensão Fractal, definida de alguma forma, é maior que sua dimensão topológica;
- O conjunto F pode ser expresso através de um procedimento recursivo ou iterativo;
- F possui alguma forma de “auto-similaridade”, ainda que aproximada ou estatística;

Mandelbrot (1983) exemplifica o conceito de “auto-similaridade” tendo em mente a medição de um litoral:

Quando uma baía ou península vista de um mapa com escala de 1/100.000 é reexaminada em um mapa de escala 1/10.000, sub-baías e

sub-penínsulas se tornam visíveis. Em um mapa com escala de 1/1.000, outras sub-baías, sub-penínsulas aparecem, e assim por diante.

Porém, utilizaremos nesta dissertação a definição dada por Devaney (1992):

Definição: Um conjunto S é chamado de Fractal ou auto-similar se pode ser subdividido em K subconjuntos congruentes, onde cada um pode ser ampliado por um fator constante M para produzir o conjunto S inteiro.

Para a representação de um Fractal, é necessária a criação de uma rotina que utilize uma determinada forma geométrica, fazendo-a repetir-se de forma recursiva em diferentes escalas. Para isso, utilizamos em nossa pesquisa dois softwares de Geometria Dinâmica (o iGeom e o Cabri Géomètre II).

Entendemos que o computador é um mediador muito valioso no estudo e na construção de Fractais, já que ele permite realizar, com rapidez, uma enorme quantidade de construções geométricas, e representá-las graficamente com grande precisão.

Um conceito importante da Geometria Fractal é a **Dimensão Topológica**.

Definição: Um conjunto S tem dimensão topológica 0 se todos os pontos tem arbitrariamente pequenas vizinhanças, as quais não interceptam o conjunto.

Por exemplo: Um conjunto de pontos isolados tem dimensão topológica 0 desde que cada ponto possa ser cercado por pequenas vizinhanças, cujas as fronteiras são disjuntas do conjunto.

Definição: Um conjunto S tem dimensão topológica K , se cada ponto em S tem arbitrariamente pequenas vizinhanças, cujas fronteiras encontram S num conjunto de dimensão $K-1$, onde K é o menor inteiro não negativo.

Por exemplo: Um segmento de reta no plano tem dimensão topológica 1, desde que bolas abertas no plano tenham fronteiras que encontrem o segmento em um ou dois

pontos similarmente. Uma região plana tem dimensão topológica 2 porque pontos no conjunto têm arbitrariamente pequenas vizinhanças, cujas fronteiras são de dimensão 1, como mostra a Figura 6²² abaixo:

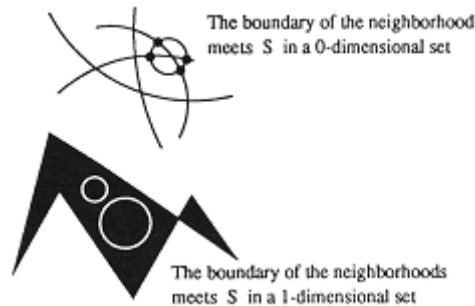


Figura 5

Sabemos que:

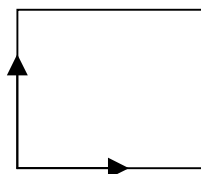
- um ponto possui dimensão zero
- uma reta dimensão um
- uma superfície plana dimensão dois
- um espaço dimensão três.

Não existe nenhuma dúvida de que uma reta é unidimensional. Mas, ingenuamente falando, um segmento também é unidimensional e as razões para isto são óbvias. Existe só uma direção linearmente independente (Li) num segmento, duas direções (Li) num quadrado (comprimento e largura), e três direções (Li) num cubo (comprimento, largura e altura).

Então, estas figuras têm dimensões 1,2 e 3, respectivamente, conforme já vimos em dimensão topológica.

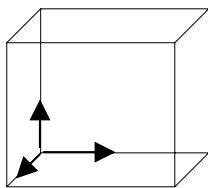
Observe:

- um segmento de reta possui dimensão topológica um 
- um quadrado possui dimensão topológica dois



²² Retirada do livro *A First in Chaotic Dynamical Systems Theory and Experiment* de DEVANEY, R. L. *A first course in chaotic dynamical Systems: theory and experiment*, second printing, 1992.

- um cubo possui dimensão topológica três

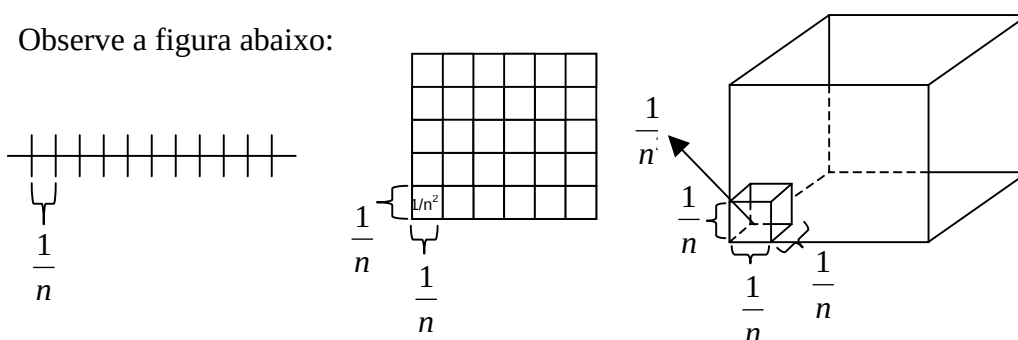


Notemos que as três figuras geométricas acima consideradas (segmento de reta, quadrado e cubo) são auto-similares, pois podem ser subdivididas em K subconjuntos congruentes, e cada um pode ser ampliado por um fator constante M para produzir o conjunto inteiro.

Podemos agora usar este fato para mostrar uma noção diferente de dimensão que estes objetos possuem.

Um segmento pode ser decomposto em $n = n^1$ partes, sendo que cada segmento é auto-similar ao todo. Assumindo n como uma escala, teremos em cada um dos segmentos exatamente $\frac{1}{n}$ do tamanho do segmento original, quando cada um multiplicado pelo fator n produzirá exatamente o segmento todo. Por outro lado, se decompormos um quadrado em partes que são $\frac{1}{n^2}$ do tamanho original, teremos que ter n^2 partes semelhantes. Similarmente, um cubo pode ser decomposto em n^3 partes, e cada uma será $\frac{1}{n^3}$ do volume original.

Observe a figura abaixo:



O expoente em cada um desses casos aponta a dimensão Fractal. Nestes simples casos é trivial encontrarmos a dimensão, verificando o expoente. Porém, para figuras mais gerais isto nem sempre é tão fácil.

Entretanto, note que podemos também calcular este expoente da seguinte forma:

Definição: Suponha que o conjunto S auto-similar pode ser dividido em N partes congruentes, sendo que cada uma das partes pode ser aumentada por um fator de m para produzir todo o conjunto S . Então, a dimensão Fractal D de S é:

O valor D tal que $N = \left(\frac{l}{m}\right)^{-D}$ em que m é o fator de contração, ou seja, o número de partes em que o segmento foi dividido, l é o comprimento do segmento e N é o número total de contrações.

Aplicando logaritmo a ambos os membros, obtemos a fórmula:

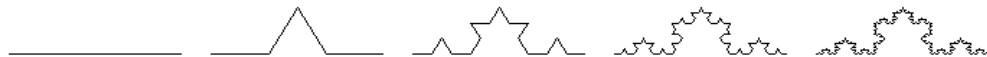
Então, $D = \frac{-\log N}{\log \left(\frac{l}{m}\right)}$

Dessa forma, quando o fator de contração for n teremos:

Segmento	Quadrado	Cubo
$D = \frac{\log n^1}{\log n} = 1$	$D = \frac{\log n^2}{\log n} = 2$	$D = \frac{\log n^3}{\log n} = 3$

2.1 Algumas Dimensões Fractais

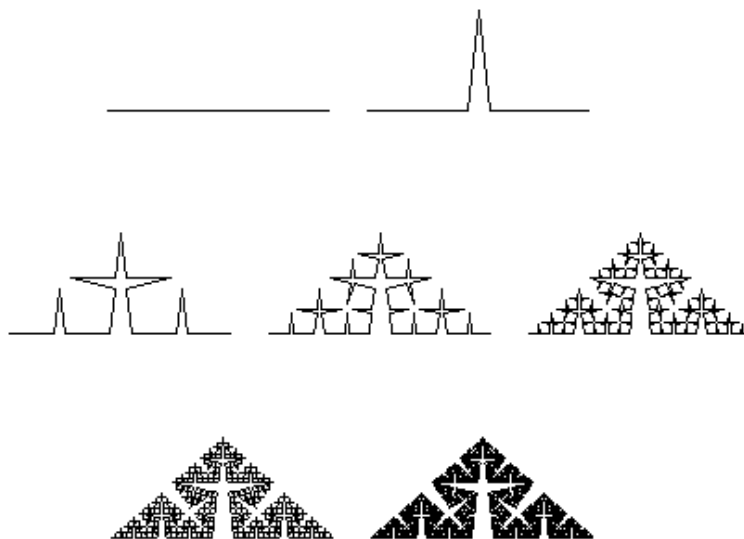
2.1.1 A Curva de Koch



$$\text{Dimensão} = \frac{-\log 4}{\log \frac{1}{3}} = \frac{-\log 4}{\log 1 - \log 3} = \frac{-\log 4}{0 - \log 3} = \frac{\log 4}{\log 3} \cong 1,262$$

O segmento inicial foi dividido em 3 segmentos iguais, sendo substituído por 4 segmentos congruentes, que chamaremos de iniciadores. Dessa forma $N = 4$ (número total de contrações) e $\frac{l}{m} = \frac{1}{3}$. Esta curva não tem derivada em nenhum dos seus pontos.

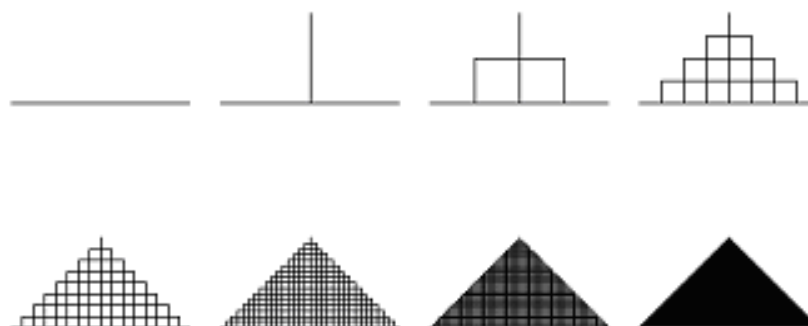
2.1.2 Variação da curva de Koch



Neste caso, cada peça tem $\frac{9}{20}$ do total (segmento).

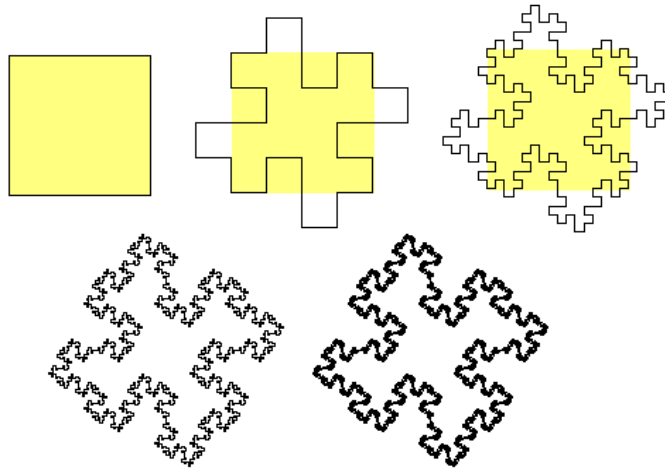
$$\text{Dimensão} = \frac{\log 4}{\log\left(\frac{20}{9}\right)} \cong 1,736$$

2.1.3 Curva de Peano



$$\text{Dimensão} = \frac{-\log 4}{\log \frac{1}{2}} = \frac{-\log 4}{\log 1 - \log 2} = \frac{-\log 4}{0 - \log 2} = \frac{\log 4}{\log 2} = 2$$

2.1.4 A Ilha de Minkowski

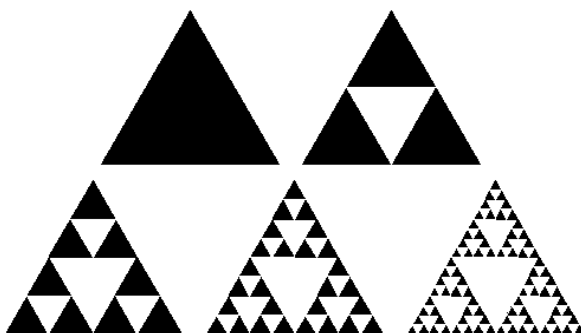


Em cada iteração o perímetro da linha aumenta (tendendo para infinito), mas a área por ela delimitada é constante.

$$\text{Dimensão} = \frac{\log 8}{\log 4} \cong 1,5$$

2.1.5 O Triângulo de Sierpinski

Este triângulo é construído da seguinte forma: Começamos marcando os pontos médios de cada um dos lados do triângulo. Em seguida, devemos unir os pontos médios por um segmento, dividindo o triângulo original em quatro novos triângulos menores e semelhantes. Retira-se o triângulo do meio e faz-se o mesmo processo em cada um dos triângulos que sobram, e assim, sucessivamente. A imagem abaixo mostra o resultado, depois de se realizar esta operação por quatro vezes.



$$\text{Dimensão} = \frac{\log 3}{\log 2} \cong 1,585$$

2.1.6 O Conjunto de Cantor

Este conjunto tem dimensão Fractal entre 0 e 1.



$$\text{Dimensão} = \frac{\log 2}{\log 3} \cong 0,631$$

Os exemplos acima apresentam auto-similaridade. Quando vistas através de uma lente de aumento, as diferentes partes de um Fractal se mostram similares à forma como um todo.

Existem os Fractais exatos, ou estritamente matemáticos, que são gerados no computador, e os Fractais naturais, cuja propriedade de auto-similaridade ocorre apenas aproximadamente.

Um exemplo de Fractal natural é a forma de um galho de árvore desfolhada, que repete sua forma nas ramificações:



Figura 6

Outro exemplo é a foto de um relâmpago, como mostrada na Figura 8, abaixo:



Figura 7

Essa propriedade de auto-similaridade quer dizer, na linguagem dos matemáticos, que uma figura Fractal é invariante em escalas. Isto é, cada pedaço mínimo de uma figura se parece, com ligeiras diferenças, com a figura completa. A consequência disto é que um matemático coloca em um computador uma equação simples, e trabalhando repetidamente sobre o mesmo padrão, o computador vai desenhar os ramos, galhos, troncos e, assim, produzir uma árvore completa. E o incrível é que, com softwares de GD, podemos simular dando origem a um Fractal exato, como mostram as figuras abaixo, quase idênticas a uma árvore e a um relâmpago real (fractais naturais).

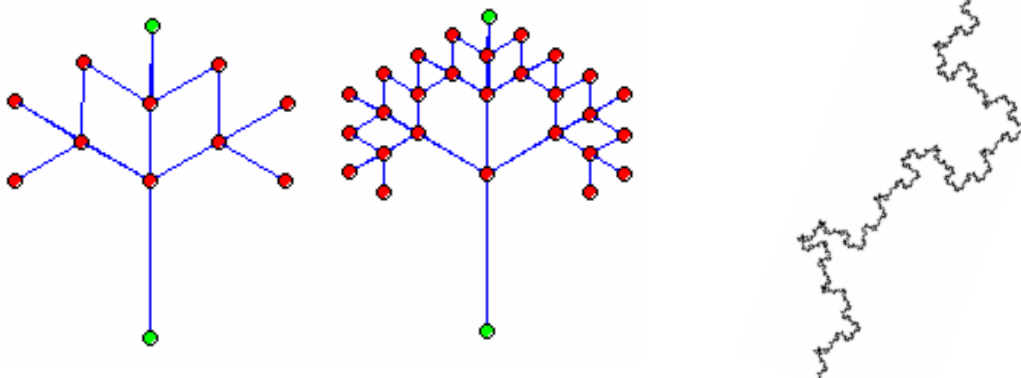
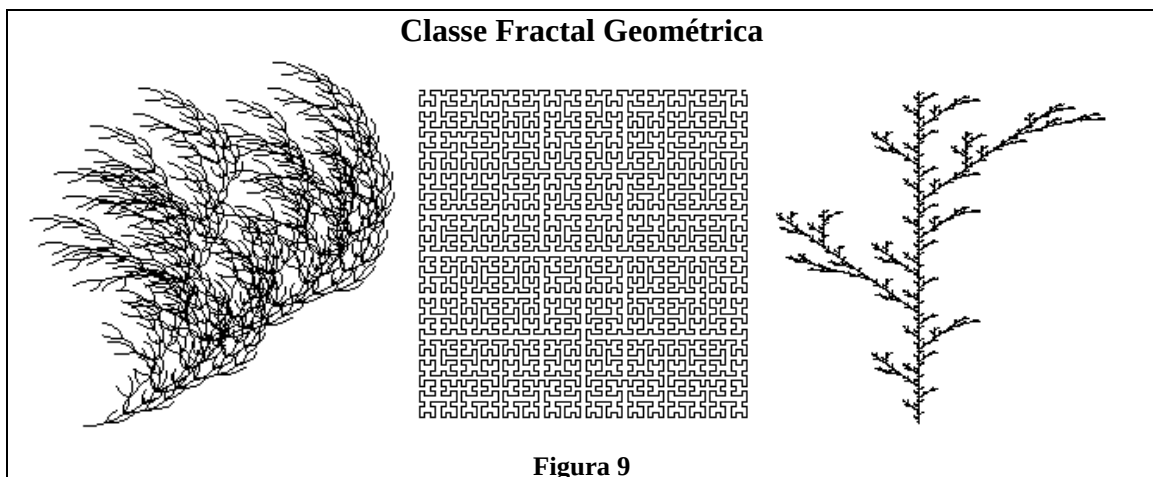


Figura 8

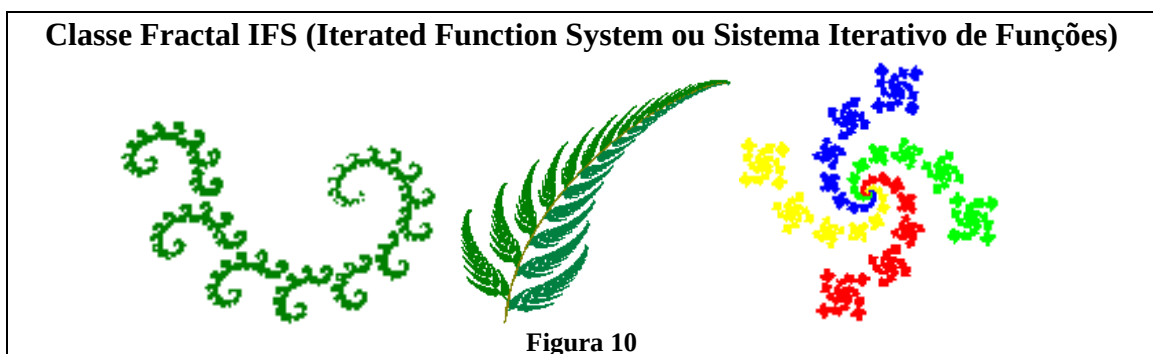
3. TIPOS DE FRACTAL

Uma das características dos Fractais, como já mencionado, é a sua construção, pois para isso é necessário um “processo recursivo”. Na construção de qualquer Fractal há a necessidade de se repetir sempre um determinado procedimento infinitamente, o que, no nosso caso, é um processo geométrico. Utilizaremos o termo “Classe Fractal” para nos referirmos a três grandes grupos que geram os Fractais. Estas classes são:

3.1 Classe Fractal Geométrica: nesta, os Fractais são construídos com objetos extremamente geométricos.

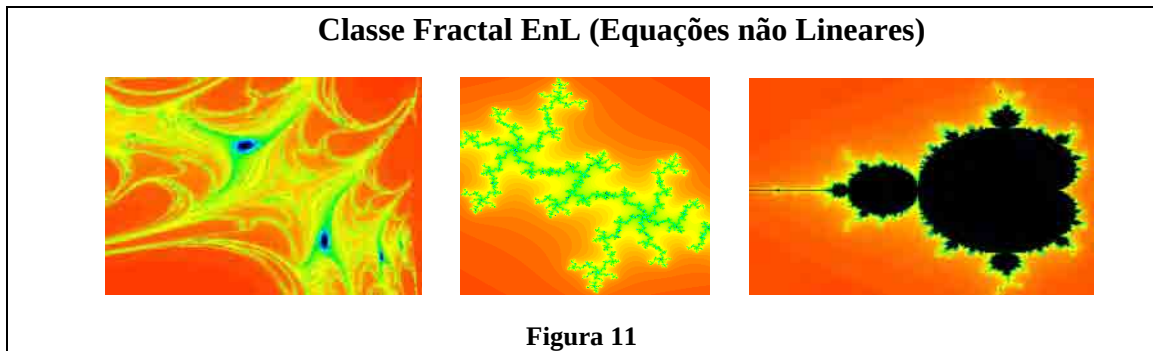


3.2 Classe Fractal IFS (Iterated Function System ou Sistema Iterativo de Funções): nesta classe os Fractais são construídos através de sistemas iterativos de funções. Para entendermos melhor esta classe são necessários alguns conhecimentos em Espaços Métricos e Topologia.



3.3 Classe Fractal EnL (Equações não Lineares): nesta classe os Fractais são construídos através de equações não lineares.

Por exemplo: $z_{n+1} = z_n^2 + c$; onde z e c são números complexos, ou na forma $f: C \rightarrow C$ definida por $f(z) = z^2 + c$.



Ressaltamos que existem alguns ambientes computacionais na Web que podem construir as três classes Fractais citadas. Para construir os exemplos mostrados, utilizamos um software chamado Fantastic Fractals 98, que pode ser adquirido gratuitamente pela Web no endereço <http://library.advanced.org/12740/>.

Lembramos que, em nosso trabalho, exploramos somente a Classe Fractal Geométrica, utilizando softwares de Geometria Dinâmica. Apresentaremos, no próximo capítulo, os Fractais de bases caleidoscópicas.

Capítulo V

CAPÍTULO V

1. FRACTAIS DE BASES CALEIDOSCÓPICAS

O objetivo desse capítulo é apresentar uma maneira de como obter “novos” Fractais através de bases caleidoscópicas. Essas bases são classificadas como *geradoras* ou *transformadas*, e correspondem a figuras que são colocadas sob o caleidoscópio para gerarem imagens. De uma base geradora podemos obter transformadas, havendo uma progressão gradativa do aumento do número de regiões de uma base para outra. Esse procedimento recursivo é que nos fornecerá os Fractais. Atividades educacionais podem ser devidamente estruturadas, as quais permitirão estudar conceitos de Geometria implícitos em todo o processo de obtenção dos Fractais.

Para um melhor entendimento dos procedimentos necessários para obtenção de Fractais, por meio de bases caleidoscópicas, há necessidade de discorrermos, a seguir, sobre alguns temas importantes como pavimentação do plano, caleidoscópios, bases geradoras e bases transformadas.

2. PAVIMENTAÇÃO DO PLANO

Para visualização de pavimentações em caleidoscópios, há necessidade de que sejam colocadas, no interior destes, figuras adequadamente construídas. Essas figuras são designadas por vários termos: *base substituível*, *base geradora*, *base transformada*, *padrão-básico*, *triângulo-básico*, *figura-base*, todos se referindo a uma região triangular ou quadrangular construída com segmentos apropriados. Definimos como “base geradora” aquela que não contém propriamente nenhuma outra base substituível, enquanto que “base transformada” é aquela base substituível que provém de uma base geradora.

Para obtermos a pavimentação de uma porção do plano por polígonos, devemos utilizar um conjunto dessas figuras, que deverão estar ajustadas de modo a não ocorrerem lacunas ou sobreposição, assim como mostra a Figura 13.

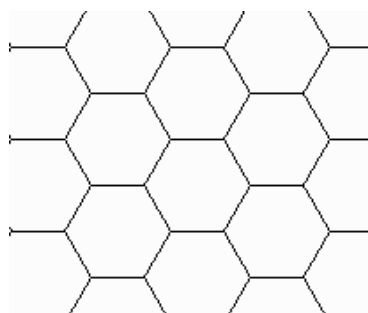


Figura 12

Os vértices dos polígonos que formam uma pavimentação são chamados de “nós”, e os segmentos de retas que têm nos extremos dois nós consecutivos de um mesmo lado do polígono são chamados de “arestas”.

Segundo Murari, Perez e Barbosa (2000), obtemos 21 arranjos de polígonos regulares em torno de um vértice. Porém, somente 11 desses arranjos pavimentam o plano, isto é, estendem-se por todo o plano. São os que formam as pavimentações de configurações:

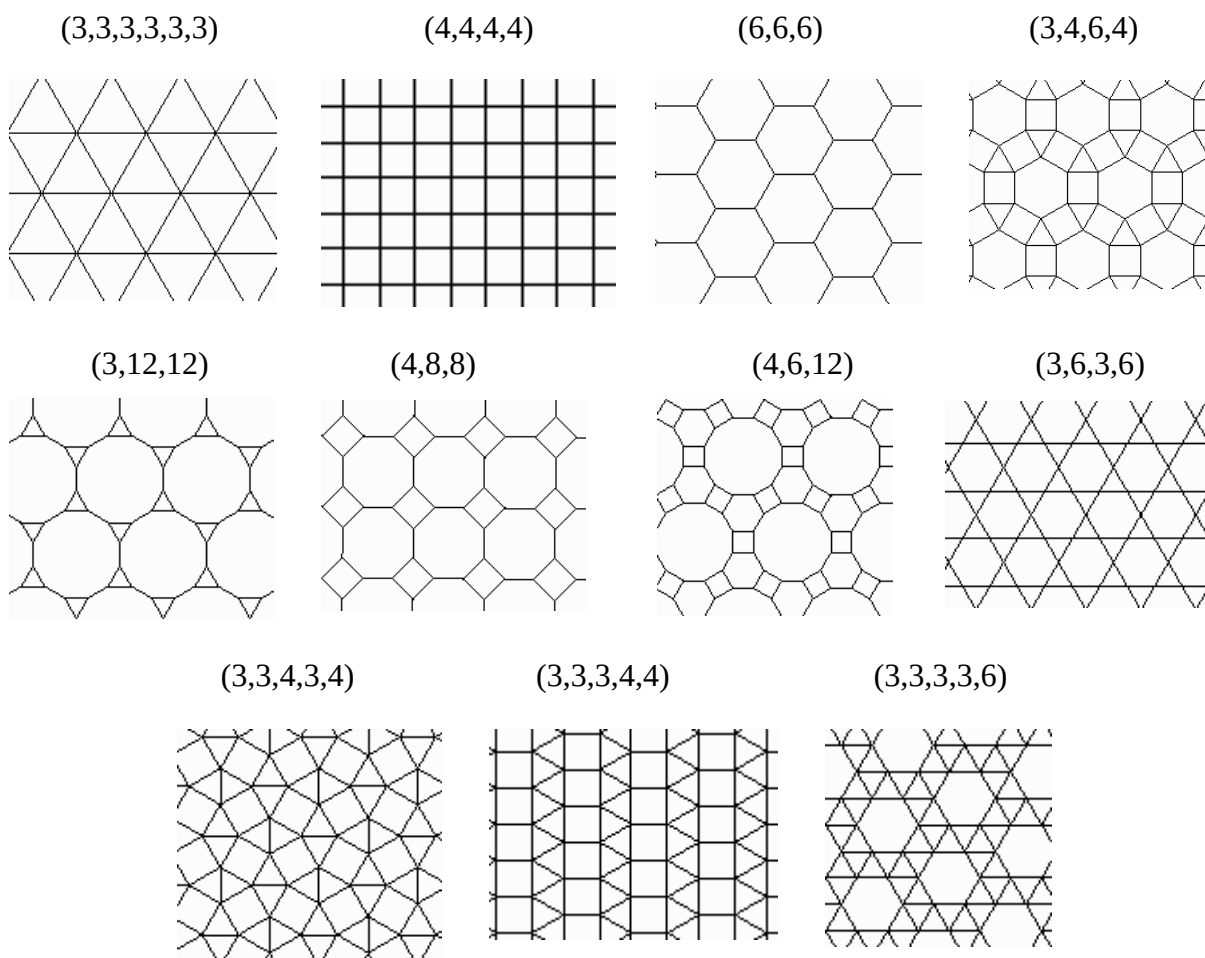


Figura 13

A notação de uma pavimentação por polígonos regulares representa os polígonos que a geram, na ordem em que aparecem ao redor dos vértices. Assim, por exemplo, a configuração (4,4,4,4) significa que em cada nó ou vértice temos quatro quadrados.

Outras pavimentações envolvem polígonos regulares distintos, como é o caso da configuração (4,6,12), cuja notação significa que ao redor de cada vértice teremos um quadrado, um hexágono regular e um dodecágono regular.

Chamaremos de 1-uniforme as pavimentações cujos vértices são rodeados pelo mesmo conjunto de polígonos (não necessariamente polígonos idênticos).

3. CALEIDOSCÓPIOS

Um conjunto de espelhos pode ser considerado como *caleidoscópio* desde que permita a obtenção repetida e perfeita de imagens. Esse termo será empregado, neste trabalho, quando fizermos referência a dois, três ou quatro espelhos planos, articulados e perpendiculares a um plano, conforme o sentido aplicado por Alspaugh (1972).

A palavra caleidoscópio é procedente etimologicamente das três palavras de origem grega, Kalos = Belo, Eidos = Formas, Skopein = Ver, ou seja, ver coisas belas.

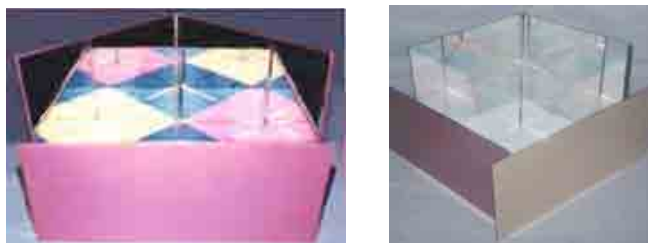


Figura 14

Os caleidoscópios educacionais são de fácil construção, cujo processo pode ser obtido em Murari (1999).

Ball e Coxeter (1987) demonstram que com três espelhos, para ângulos da forma $\frac{\pi}{n}$, há necessidade de se terem soluções inteiras e positivas na equação $\frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, onde n , p e q são inteiros diferentes de zero, para se obter a reprodução perfeita de imagens nos caleidoscópios, sendo n , p e q os quocientes de 180° pelos ângulos $\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$ dos espelhos. Como consequência, obtemos as ternas que são soluções

da equação: (3,3,3); (2,4,4); (2,3,6); então temos, respectivamente, apenas três tipos de caleidoscópios, que correspondem às formas triangulares $(60^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$, $(90^\circ, 45^\circ, 45^\circ)$ e $(90^\circ, 60^\circ, 30^\circ)$. Abaixo, apresentamos figuras de caleidoscópios educacionais individuais, apresentados por Barbosa (2001) nos ângulos citados:

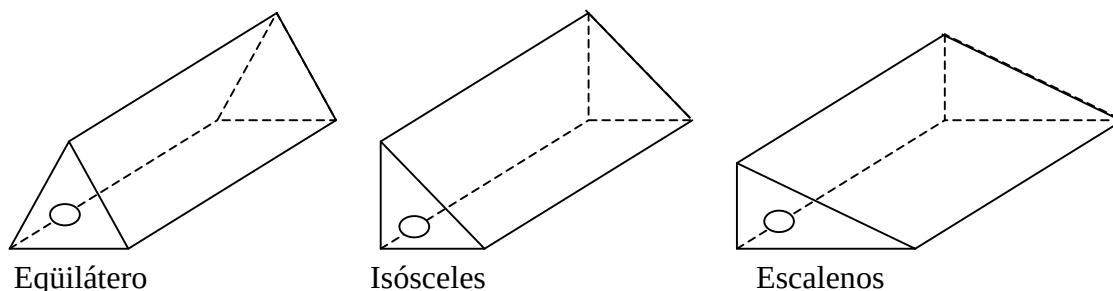


Figura 14

Entre outros objetivos, os caleidoscópios podem ser utilizados para desenvolver a percepção espacial, habilidades gráficas, estimular a criatividade, motivar o estudo e exploração de propriedades de polígonos e de simetria reflexional das transformações geométricas, ampliar o campo de atividades educacionais com relação às pavimentações de plano. Os caleidoscópios podem ser particularmente utilizados como instrumentos capazes de facilitar o estudo de pavimentações do plano. Os caleidoscópios utilizados em nossa pesquisa são aqueles formados por três espelhos.

3.1 BASES GERADORAS E BASES TRANSFORMADAS

As bases substituíveis podem ser extraídas de uma determinada porção de uma pavimentação, considerando as linhas de simetria dos polígonos que a formam. Relacionando-as (essas linhas de simetria), obtêm-se as bases geradoras e as bases transformadas.

As bases geradoras e suas transformadas, quando observadas em caleidoscópio, dão o visual da mesma pavimentação.

Segundo Murari (1999), são três os métodos de obtenção de bases:

- **Método I:**

Sabendo de antemão qual o visual a ser gerado por segmentos em relação aos ângulos dos espelhos, podemos construir a base substituível, com os segmentos apropriados, para que nas simetrias reflexionais possamos obter, através das regiões delimitadas por estes segmentos, os polígonos regulares desejados.

Quando nos utilizamos deste método, nosso objetivo é o desenvolvimento da percepção espacial por parte dos alunos, com exploração de simetrias e construções geométricas adequadas na determinação das bases.

- **Método II:**

Trabalhando, por exemplo, com três régua ou três esquadros para formação de triângulos sobre o desenho de uma pavimentação, podemos “visualizar” (descobrir) as bases substituíveis que geram esta pavimentação, pois réplicas triangulares da figura serão reproduzidas por todo o plano, contendo os mesmos segmentos da base encontrada.

Para utilização deste método, as régua que formarão os triângulos devem ser posicionadas a partir do centro dos polígonos da pavimentação em estudo; isto é, os vértices do triângulo formado pelas régua corresponderão ao centro de três polígonos, ocorrendo isto na maioria das vezes, mas não sendo uma regra geral (observar que, para algumas pavimentações, serão utilizadas quatro régua).

- **Método III:**

Kingston (1957) chama a atenção para o fato de que existem pavimentações que apresentam simetrias reflexionais em relação às mediatrizes dos lados dos polígonos.

Por este fato, Murari (1999) propõe um novo meio de obtenção de bases: para encontrá-las devemos traçar as linhas de simetria da pavimentação, que são linhas de simetria dos polígonos regulares.

Vejamos um exemplo:

Na pavimentação da Figura 17 foi utilizado o método III de configuração (3,4,6,4).

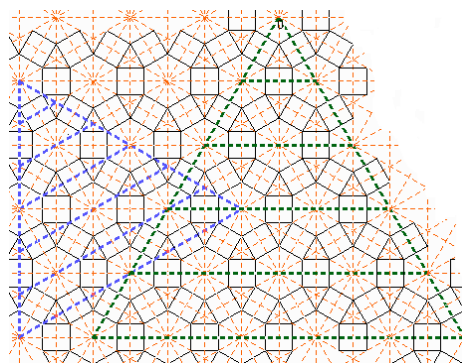


Figura 15

Os traços vermelhos são as linhas de simetria reflexional.

Observem que existem dois outros traçados: um azul e outro verde.

Eles correspondem às duas bases geradoras e suas respectivas transformadas, conforme figuras a seguir.

Bases Geradoras

1



Figura 18

2



Figura 19

Bases Transformadas

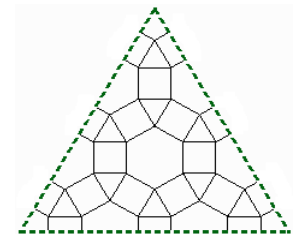
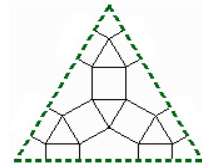
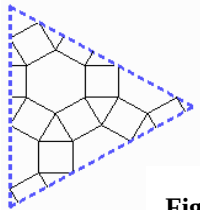
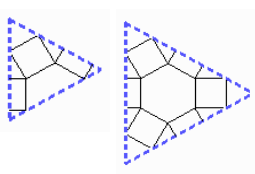


Figura 17

Como se pode ver, as bases transformadas são compostas por réplicas da base geradora. A primeira base transformada possui 4 bases geradoras; a segunda, 9; a terceira 16. Observe que, a cada “passo”, são acrescentadas 3, 5, 7, 9, 11... réplicas da base geradora ao passo anterior. Maiores detalhes podem ser obtidos em Murari (1999).

Na figura abaixo temos uma pavimentação constituída por triângulos e dodecágonos regulares, que recebe a notação (3,12,12). Ao lado, temos as bases geradoras e as bases transformadas que, nos caleidoscópios, fornecem o visual dessa pavimentação. Observe que o número anotado embaixo de cada base significa o número de regiões (ou cores) que ela possui.

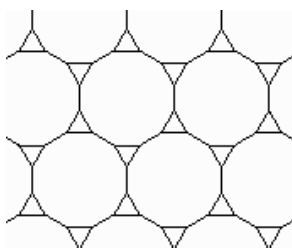


Figura 18

Bases geradoras

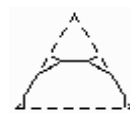


3



4

Bases transformadas



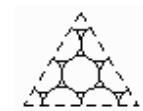
6



10



10



19

Figura 19

Observar que o tamanho das bases geradoras e transformadas devem ser iguais para produzirem pavimentação no caleidoscópio. Assim, temos que se l é a medida do lado da base geradora, então a primeira base transformada conterá quatro bases geradoras cujos lados medem $\frac{l}{2}$; a segunda base transformada terá nove bases geradoras, as quais têm lado de tamanho $\frac{l}{3}$; e assim, sucessivamente, até a n -ésima base transformada, quando o lado das bases geradoras será de tamanho $\frac{l}{n}$. Quanto ao número de regiões, em alguns casos é possível ser calculado. Em Simionato, Murari e Barbosa (2004), temos um estudo pormenorizado do assunto.

As figuras abaixo mostram a visualização da pavimentação de configuração (3,4,6,4), usando caleidoscópios eqüiláteros. Nesta pavimentação temos em cada vértice (ou nó): um triângulo, um quadrado e um hexágono e outro quadrado, todos regulares.



Figura 23



Figura 24

3.2 CONSTRUÇÃO DA BASE CALEIDOSCÓPICA DA PAVIMENTAÇÃO (3,4,6,4) NO SOFTWARE iGeom

Apresentamos os passos para a construção da base da pavimentação (3,4,6,4) no software iGeom, indicando as figuras dos ícones necessários e algumas ilustrações dos traçados geométricos que vão sendo efetuados. Inicialmente, é necessário construir um triângulo eqüilátero ABC , dentro do qual serão efetuados os segmentos que darão origem à base.

-Criar um segmento s_0 no primeiro botão  da caixa de ferramentas, para dar origem aos pontos A e B .

-Criar um segmento s_0 no primeiro botão  da caixa de ferramentas, para dar origem aos pontos A e B .

-Criar duas circunferências , uma c_0 no ponto A e outra c_1 no ponto B , com raio na medida do segmento. Para o iGeom não existe o ponto C de intersecção das duas circunferências; é preciso criá-lo. Há uma opção para isto no quarto botão  da caixa de ferramentas. Clicar em ambos os objetos e o ponto será criado.

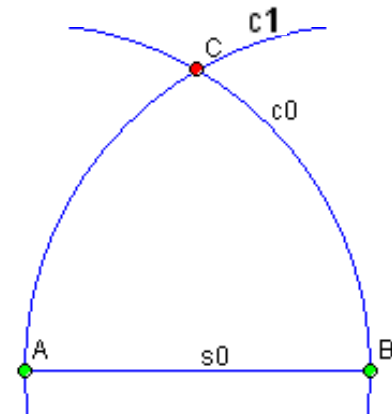


Figura 22

-Clicar no quinto botão da caixa de ferramentas  e selecionar a opção Esconder. Em seguida, clicar sobre os objetos para permanecer somente o segmento s_0 e os pontos A , B e C .

-Clicar no terceiro botão  da caixa de ferramentas e selecionar a opção segmento. Depois, clicar sobre os pontos AC e CB dando origem aos segmentos s_1 e s_2 .

-Construir uma reta perpendicular r  ao segmento s_0 , passando pelo ponto C . Para o iGeom não existe o ponto D de intersecção da perpendicular r com o segmento s_0 . Logo, é preciso criá-lo. Pra criá-lo, proceder como anteriormente descrito.

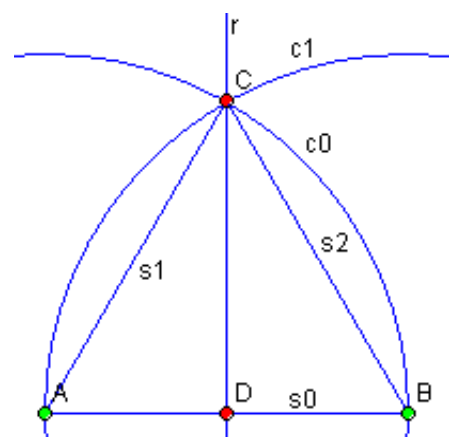


Figura 23

-Traçar a bissetriz do ângulo ADC . Para isso é necessário criar uma circunferência c_2 com centro em D , interceptando a reta r e o segmento s_0 , dando origem, respectivamente, aos pontos E e G . Em seguida, criar o ponto médio H entre E e G

- Traçar a bissetriz do ângulo ADC . Para isso é

necessário criar uma circunferência c_2 com centro em D , interceptando a reta r e o segmento s_0 , dando origem, respectivamente, aos pontos E e

G . Em seguida, criar o ponto médio H entre E

e G . Construir uma reta s passando pelos pontos D e H . A reta s interceptará o segmento s_1 .

Deverá ser criado o ponto de intersecção I , conforme já mencionado.

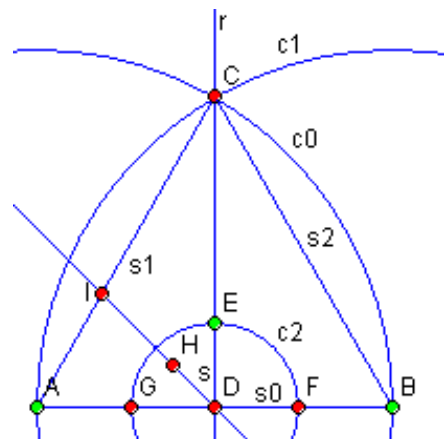


Figura 24

-Pelo ponto I baixar perpendicular ao lado AB , determinando o ponto L .

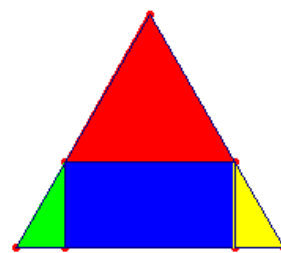
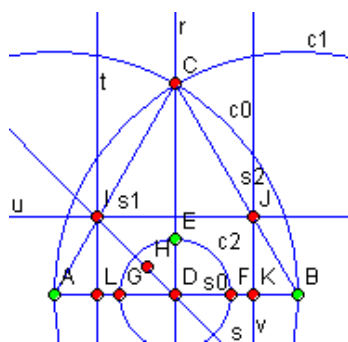
-Pelo ponto I criar paralela ao lado AB , determinando o ponto J .

-Pelo ponto J baixar perpendicular ao lado AB , determinando o ponto K .

-Criar o polígono ABC . Para isso, é necessário selecionar os respectivos pontos e em seguida clicar em . Para colorir, dar um duplo clique sobre o polígono, quando aparecerá uma janela para selecionar a cor desejada.

-Criar os polígonos $LIJK$, AIL , ICJ e JKB . Para isso, é necessário selecionar os respectivos pontos, em seguida clicar em . Para colori-los, proceder como no item anterior.

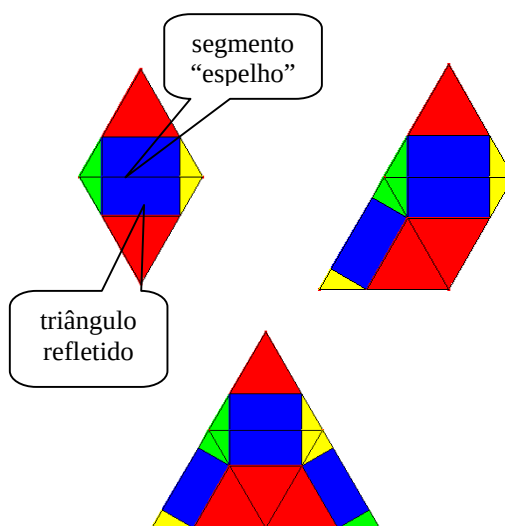
- Esconder todas as construções auxiliares , devendo permanecer apenas o que mostra a Figura 29, que é a base geradora da pavimentação de configuração $(3,4,6,4)$.



Para obtermos as bases transformadas,

devemos clicar em  para refletir os objetos geométricos. Então, devemos marcar primeiro qualquer segmento "espelho" e, em seguida, marcar todo o triângulo para ser

refletido e em seguida clicar em . Para reduzir a base, pois se l é a medida do lado da base geradora, devemos reduzir a primeira transformada que possui quatro bases geradas para $\frac{l}{2}$; a segunda base transformada que possui nove bases geradoras para $\frac{l}{3}$. Prosseguindo dessa forma, obteremos as bases transformadas.

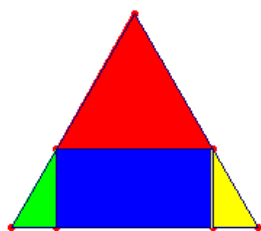


3.3 FRACTAL OBTIDO DA BASE GERADORA DA PAVIMENTAÇÃO (3,4,6,4)

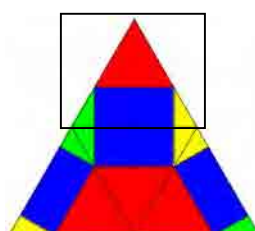
Considerando a base da pavimentação (3,4,6,4) construída na seção anterior, e fazendo iterações (bases transformadas), daremos origem a um Fractal de base caleidoscópica. A figura abaixo mostra esta seqüência. Prosseguindo nesse processo construiremos o Fractal, que é uma forma geométrica fragmentada, que pode ser subdividida em partes, e cada parte será uma cópia reduzida da forma toda que, no nosso caso, é a base geradora.

Note que a imagem contida no retângulo branco são reduções da base geradora.

Base Geradora



1ª Transformada



2ª Transformada

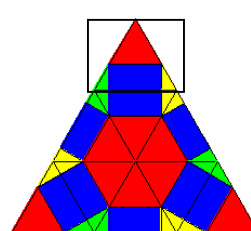


Figura 27

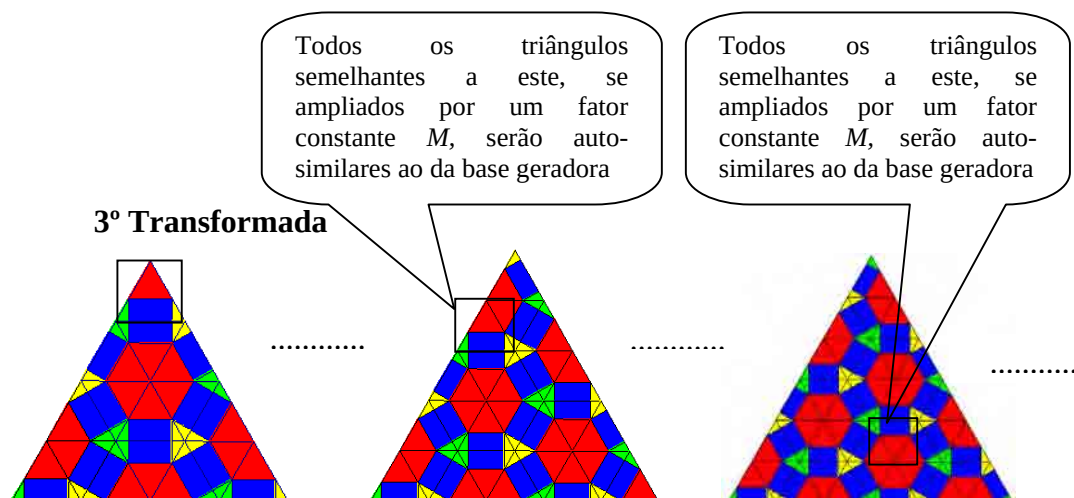


Figura 27

Vale ressaltar que os comentários acima estão em conformidade com a definição de Fractal dada por Devaney (1992).

A importância do software iGeom, como ferramenta auxiliar no ensino-aprendizagem de Geometria, está em oferecer o recurso de simetria de segmentos e polígonos, o que representa grande facilidade para a construção das bases substituíveis.

Apresentamos, a seguir, a visualização de uma pavimentação de configuração (4,6,12), usando caleidoscópios equiláteros. Nesta configuração, obtemos em cada vértice ou nó um quadrado, um hexágono regular e um dodecágono regular, conforme as Figuras 33 e 34:



Figura 33



Figura 34

Na próxima secção mostraremos a construção de algumas bases caleidoscópicas com régua e compasso e com os softwares de Geometria Dinâmica.

3.4 CONSTRUÇÃO COM RÉGUA E COMPASSO DA BASE CALEIDOSCÓPICA (4,6,12)

Para construirmos com régua e compasso esta base abaixo, que se refere à pavimentação da Figura 34, é necessário construir 3 bissetrizes da base eqüilátera.

Por D , um dos pontos médios dos lados, construir semi-retas inclinadas a 45° , determinando nas outras duas bissetrizes os pontos E e F . Baixar perpendiculares aos dois lados mais próximos da base eqüilátera. Ficam formadas quatro regiões que poderão ser coloridas com até quatro cores (x,y,k,w) . Esta base gera uma pavimentação com 2 tipos de nós, cada um com 3 cores. Ver Figura 35.

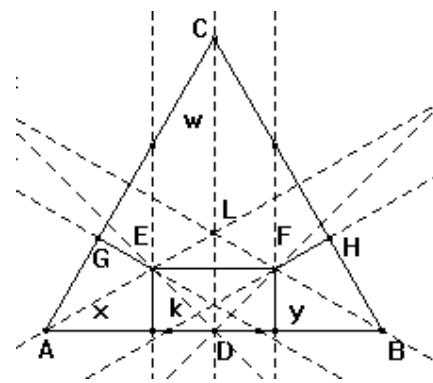


Figura 29

Todos os dodecágonos serão de cor w e todos os quadrados de cor k , enquanto os hexágonos terão cores x e y .

3.5 CONSTRUÇÃO DA BASE CALEIDOSCÓPICA DA PAVIMENTAÇÃO (4,6,12) NO SOFTWARE CABRI GÉOMÈTRE II

Apresentamos, a seguir, a construção da base que gera a pavimentação (4,6,12). Depois de construída a base, utilizaremos a função “macro” para obtermos fractal. A utilidade da “macro” surge quando há necessidade de se construir uma seqüência de construções interdependentes. A macro é útil para criar novas ferramentas que constroem objetos únicos ou executam tarefas repetitivas.

a) Construir um triângulo eqüilátero ABC .

-Criar um segmento no terceiro botão da caixa de ferramentas e nomear de AB , através do décimo botão (**Rótulo**).

-Criar duas circunferências; uma no ponto A e outra no ponto B , com raio do tamanho do segmento. Para o Cabri Géomètre II não existe o ponto de intersecção das duas circunferências, é preciso criá-lo. Há uma opção para isto no segundo botão da caixa de ferramenta (**intersecção de dois objetos**). Nomear este ponto de C .

-Clicar no décimo primeiro botão da caixa de ferramentas, selecionar a opção **Esconder/Mostrar** e, em seguida, clicar sobre os objetos, permanecendo somente os pontos A , B e C .

-Clicar no terceiro botão da caixa de ferramentas, selecionar a opção **polígono** e, em seguida, clicar sobre os pontos A , B e C .

Obs: Não utilizaremos a opção polígono regular, no terceiro botão, para a construção do triângulo eqüilátero. Se a utilizássemos, não poderíamos explorar os conceitos de Geometria implícitos na construção do triângulo eqüilátero.

b) Construir a bissetriz do ângulo BAC no quinto botão da caixa de ferramentas (ponto-bissetriz). Clicar em B , A e C ; a bissetriz do ângulo ABC clicar em A, B e C , e a bissetriz do ângulo ACB clicar e A , C e B .

c) Construir as bissetrizes dos ângulos LDA e LDB , obtendo os pontos E e F (os pontos E e F , para o Cabri, não existem, é preciso criá-los). Para isso, usar a opção no segundo botão.

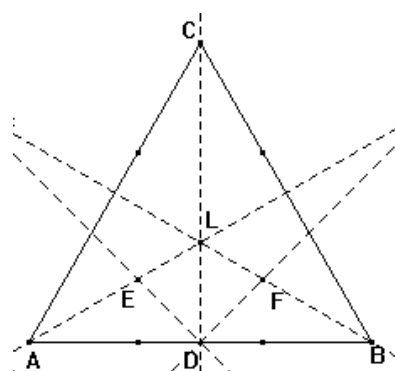


Figura 29

d) Construir retas perpendiculares (no quinto botão, reta perpendicular). Pelo ponto E traçar uma reta perpendicular ao lado AC , pelo ponto F traçar uma reta perpendicular ao lado BC , obtendo os pontos G e H , os quais devem ser criados através da opção no segundo botão (intersecção de dois objetos).

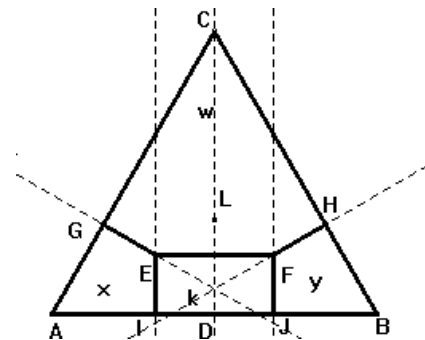


Figura 29

e) Construir retas perpendiculares (no quinto botão, reta perpendicular) pelo ponto E traçar uma reta perpendicular ao lado AB ; pelo ponto F traçar uma reta perpendicular ao lado AB obtendo os pontos I e J .

f) Construir os polígonos $AIEG$, $IEFJ$, $BHFJ$ e $CGEFH$ (no terceiro botão polígono).

g) Selecionar uma cor na paleta de cores, (na caixa de ferramentas, último botão)



para preencher cada polígono construído. Após escolher e selecionar a cor, clicar no polígono para que ele seja colorido.

h) Agora, vamos definir uma “macro” para execução do fractal. Selecionar na caixa de ferramentas **Macro**, para que ela fique disponível para uso. Selecionar **Objetos Iniciais** na caixa de ferramentas (sétimo botão). Mover o + em direção da figura até aparecer a mensagem **Este polígono** clicar para selecionar o triângulo como o objeto inicial. O objeto aparentará um contorno marcado, indicando que está selecionado. Selecionar **Objetos Finais** na caixa de ferramentas **Macro**. Mover + em direção da figura até aparecer a mensagem **Este polígono**. Clicar para selecionar os polígonos $AIEG$, $IEFJ$, $BHFJ$ e $CGEFH$ como objetos finais.

Agora, podemos definir a macro. Selecionar a ferramenta **Definir Macro** na caixa de ferramenta **Macro**. Aparecerá uma caixa de diálogos, para que seja nomeada a macro. No nosso caso, nomeamos de base (4,6,12) essa macro.

i) Selecionar na caixa de ferramentas (sexto botão), **Simetria Axial**. Mover o + em direção da figura até aparecer a mensagem **Este polígono**. Clicar para selecionar o triângulo e obter o simétrico em relação aos lados AC, BC e AB. Dessa forma, aparecerão três novos triângulos (1ª, 2ª e 3ª); ver Figura 38.

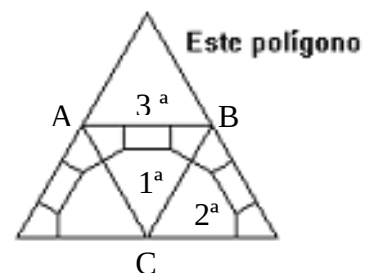


Figura 29

j) Selecionar a macro criada na caixa de ferramentas e clicar sobre os três novos triângulos.

Deste modo, suponhamos a medida do lado da base geradora igual a l , então a primeira base transformada conterá quatro bases geradoras cujos lados medem $\frac{l}{2}$ (Figura 38); a segunda base transformada terá nove bases geradoras (Figura 39), as quais têm lado de tamanho $\frac{l}{3}$; e assim, sucessivamente, até a n -ésima base transformada, quando o lado das bases geradoras será de tamanho $\frac{l}{n}$.

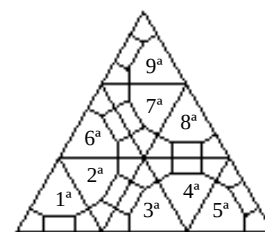


Figura 29

Repetir o processo de simetria axial e macro quantas vezes quiser (tender ao infinito). Conseqüentemente, obteremos o Fractal dividindo o “triângulo base” formador das bases transformadas, conforme o número de réplicas a serem colocadas em seu interior.

Vamos considerar a base (4,6,12) para fazermos iterações (bases transformadas), dando origem a um Fractal.

A construção dessas bases foi realizada através do software Cabri Géomètre II, como mostramos anteriormente. Notar que a imagem contida no retângulo branco são reduções da base geradora.

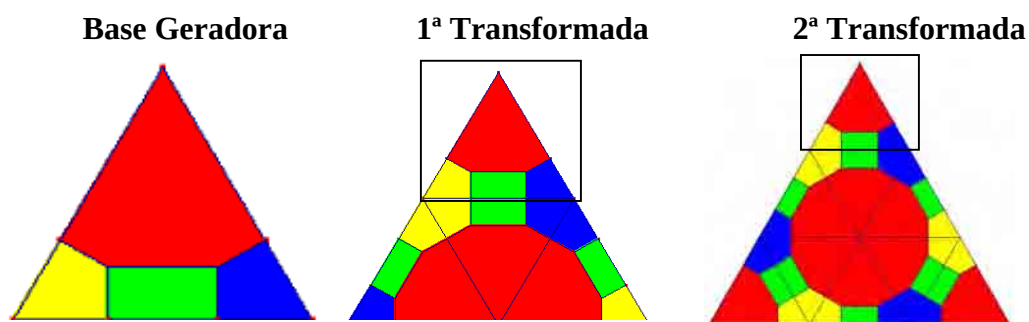


Figura 29

Se continuarmos assim, progressivamente, construindo bases transformadas, obteremos um Fractal que é uma forma geométrica fragmentada que pode ser subdividida em partes, e cada parte será uma cópia reduzida da forma toda, que no nosso caso é a base geradora.

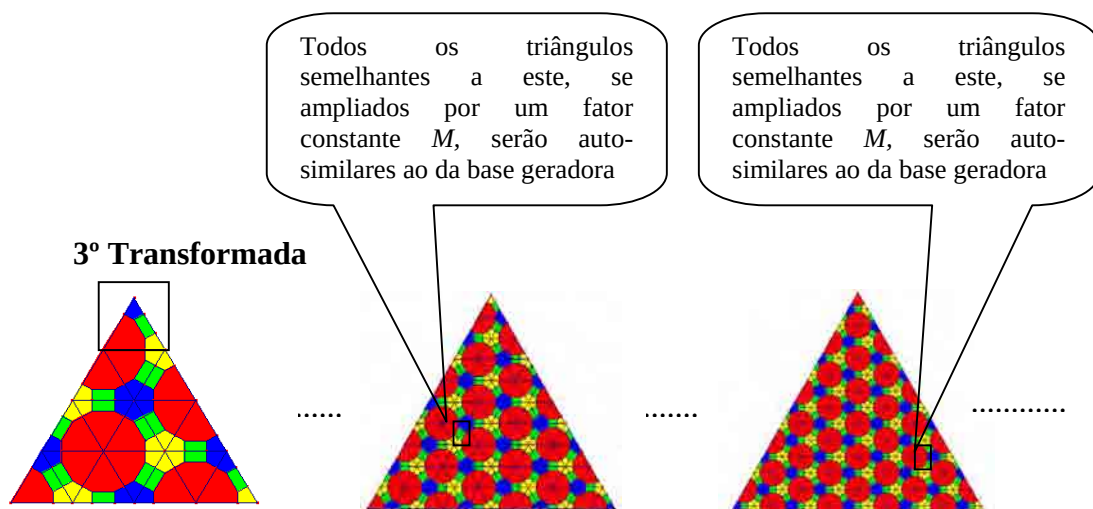


Figura 29

Logo, para obtermos um Fractal da base (4,6,12) basta considerarmos a auto-similaridade. Assim, quando obtemos um número n de bases transformadas, qualquer que seja o triângulo retirado da base transformada será semelhante à base geradora. Portanto, conseguiremos obter Fractais através das bases transformadas de pavimentações que podem ser visualizadas em caleidoscópio. A base geradora seria o iniciador do Fractal; as subseqüentes são as bases transformadas que vão gerar os Fractais.

Mostraremos abaixo mais dois exemplos de Fractais obtidos de bases caleidoscópicas:

3.6 BASES PARA PAVIMENTAÇÃO DE CONFIGURAÇÃO (6,6,6)

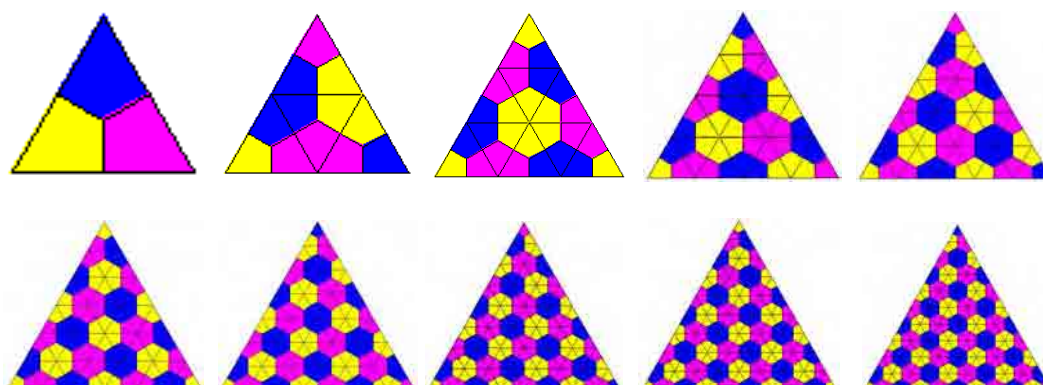


Figura 30

3.7 BASES PARA PAVIMENTAÇÃO DE CONFIGURAÇÃO (3,12,12)

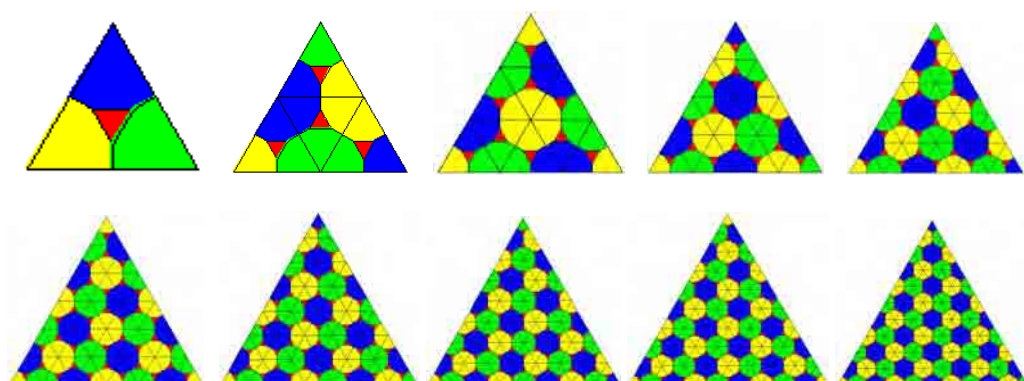
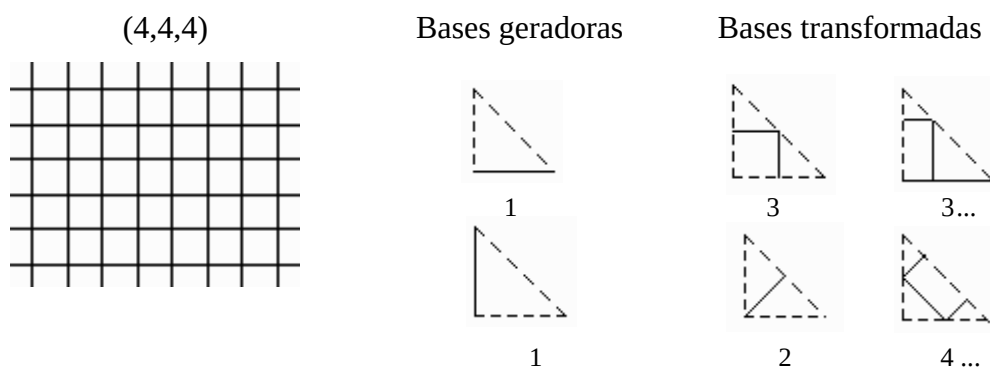


Figura 31

A seguir, faremos uma amostra das bases geradoras e algumas transformadas das pavimentações de configuração 1-uniforme através da base triângulo isósceles.

3.8 BASES ISÓSCELES PARA PAVIMENTAÇÃO DE CONFIGURAÇÃO (4,4,4)



Fractal da primeira base transformada

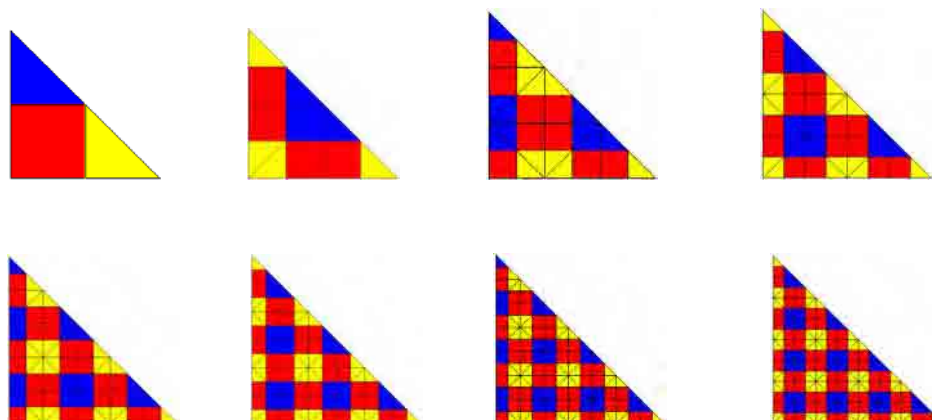
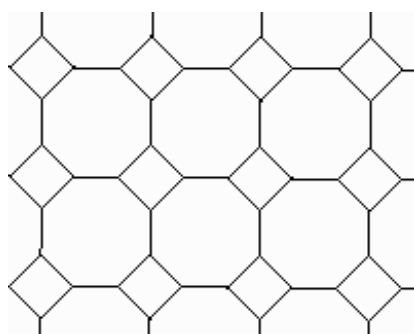


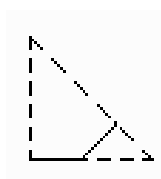
Figura 32

3.9 BASES ISÓSCELES PARA PAVIMENTAÇÃO DE CONFIGURAÇÃO (4,8,8)

(4,8,8)

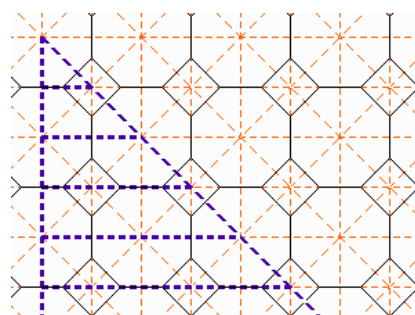


Base geradora

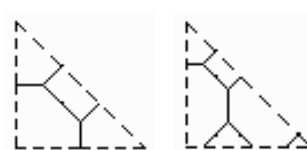


2

Algoritmo



Bases transformadas



4

6

...

A seguir apresentamos um Fractal da primeira base transformada

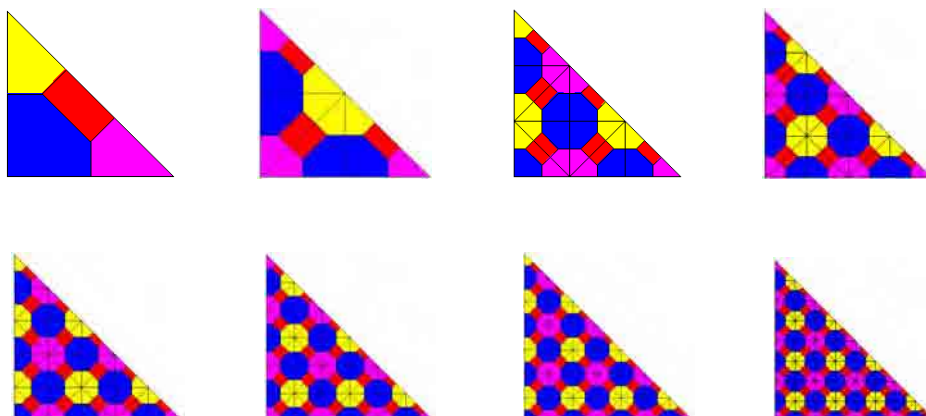


Figura 33

As construções através de régua e compasso, de todas as bases geradoras das pavimentações 1-uniforme, foram feitas por Murari (1999). Ressaltamos a importância dos softwares Cabri Géomètre II e do iGeom, como ferramentas auxiliares no ensino-aprendizagem de Geometria, por oferecerem o recurso de simetria de segmentos e polígonos, o que representa grande facilidade para a construção das bases substituíveis. À medida que passamos de uma base transformada para outra, intensifica-se o grau de dificuldade nas construções com régua e compasso, além de se ter aumentada a margem de imprecisão dos desenhos. Porém, com o Cabri Géomètre II e o iGeom, a construção é facilitada, e também podemos utilizar macro, que é um recurso que possibilita memorizar uma seqüência de construções que podem ser reproduzidas instantaneamente. Esta seqüência de construções é chamada de macro-construção ou script.

Como o objetivo, neste capítulo, é construir Fractais de base caleidoscópica, abordando de maneira inovadora alguns conceitos de Geometria através dos caleidoscópios e softwares de Geometria Dinâmica, não podemos esquecer que estar em um ambiente informatizado, que permite a realização de medidas e deformações das construções geométricas, traz mudanças no processo de aprendizagem.

Desse modo, acreditamos que existem mudanças significativas no modo de pensar dos indivíduos, quando estes produzem conhecimento utilizando uma nova mídia, como o computador. Logo, entendemos que softwares de Geometria Dinâmica, como o Cabri Géomètre II e o iGeom, associados aos caleidoscópios e Fractais, podem colaborar para o ensino-aprendizagem de conceitos de Geometria.

Como a Geometria Euclidiana é de vital importância para a formação cultural e intelectual do educando, acreditamos que atividades utilizando caleidoscópios, softwares de Geometria Dinâmica e Fractais se configuram num eficiente veículo de transmissão de conceitos dessa Geometria, de uma forma atraente, de modo que contemple e atenda a interdisciplinaridade (Desenho Geométrico, Desenho Artístico e Geometria Euclidiana) e promova uma melhor compreensão dos conteúdos matemáticos.

Capítulo VI

CAPÍTULO VI

1. METODOLOGIA DA PESQUISA: UM CAMINHO

Apresentamos nesse capítulo a metodologia da pesquisa, o procedimento metodológico de ensino que foi utilizado na coleta dos dados, o contexto, os participantes da pesquisa e o processo de análise.

A fim de encontrarmos respostas para nossa pergunta: “Que contribuições pode trazer, para o ensino-aprendizagem de Geometria, um estudo de *Fractais Geométricos* através de *caleidoscópios* e *softwares de Geometria Dinâmica*?”, elaboramos um Curso de Extensão intitulado “*Fractais Geométricos Através de Softwares de Geometria Dinâmica*”, no qual os participantes desenvolviam as atividades em dupla, e que relataremos com mais detalhes no capítulo VII.

Para responder a essa pergunta, foi necessário compreendermos como os estudantes se relacionavam no ambiente de realização desse Curso de Extensão. Portanto, havia a necessidade de analisarmos as atividades desenvolvidas pelos alunos com profundidade, prestando atenção em todas as interações entre computador-aluno, aluno-aluno e aluno-professor.

Perante o questionamento acima, optamos por uma metodologia de pesquisa qualitativa, tendo como procedimento metodológico de ensino a resolução de problemas. A opção de trabalhar com duplas se justifica com base na Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) de Vygotsky, e também em Benedetti (2003), o qual explica que as interações

[...] entre estudantes podem proporcionar discussões diferentes daquelas que existiriam apenas com um aluno e com o pesquisador; a linguagem dos educandos, ao trabalharem em conjunto, pode-se tornar mais rica, não apenas para a coleta de dados, [...] mas também para possíveis aprendizagens que podem ocorrer durante os trabalhos do grupo (p. 56).

Bogdan & Biklen (1986, p.11-13) apresentam cinco características básicas que uma pesquisa qualitativa deve ter:

1. a pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento;
2. os dados coletados são predominantemente descritivos;
3. a preocupação com o processo é muito maior do que com o produto;
4. o “significado” que as pessoas dão à sua vida é foco de atenção especial pelo pesquisador;
5. a análise dos dados tende a seguir um processo intuitivo.

No tocante à **primeira das características** de uma pesquisa qualitativa listadas acima, temos que, no nosso caso, os dados para nossa investigação foram coletados no próprio recinto de realização do Curso de Extensão, constituindo-se ambiente natural os laboratórios de informática e de ensino, onde alunos do 1º ano de licenciatura em Matemática da Unesp de Rio Claro, SP, realizaram as atividades, através das quais emergiram os conceitos geométricos implícitos na resolução dos problemas, e cujo processo de estudo e trabalho foi nossa fonte direta de dados. Durante a evolução da investigação, buscávamos novas indagações e novas questões para o desenvolvimento do trabalho, pois, segundo Alves-Mazzotti (2004, p.160), “o pesquisador é o principal sujeito da investigação”.

A **segunda característica** apontada por Bogdan & Biklen (1986) diz que os dados coletados devem ser predominantemente descritivos. Quanto a essa particularidade, esclarecemos que os dados foram obtidos através das gravações dos diálogos dos alunos, notas feitas pelos mesmos em fichas, e o diário de campo do pesquisador, cujas informações eram descritas e reorganizadas (quando necessário), sendo direcionadas à pergunta diretriz. Foi dessa forma que capturamos as observações que julgamos importantes e verificamos a multiplicidade de conceitos geométricos revelados na resolução dos problemas, cujo assunto abordaremos com maiores detalhes no capítulo VII. A maneira como coletamos os dados está em conformidade com as recomendações de Bogdan e Biklen (1991) quando afirmam que:

...os dados recolhidos são de forma de palavras ou imagens e não de números. Os resultados escritos da investigação contêm citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação. Os dados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo,

fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registros oficiais (p. 48).

É importante relatar que nossa postura durante o Curso de Extensão caracterizou-se como observador participante, interagindo com os alunos de forma bastante natural, para não interferir na pesquisa. Neste sentido, Alves Mazzotti e Gewansznarjder (2001) dizem que:

Na observação participante, o pesquisador se torna parte da situação observada, interagindo por longos períodos com os sujeitos, buscando partilhar o seu cotidiano para sentir o que significa estar naquela situação. (p. 166).

A **terceira característica** fica clara em nossa pesquisa, pois estamos preocupados com o processo, visto que durante a resolução dos problemas emergiram os conceitos matemáticos necessários para a realização da atividade. Dessa forma, não estávamos preocupados com a resposta final (produto) e sim com o desenvolvimento (processo).

A **quarta característica** refere-se à atenção especial que o pesquisador deve ter com o “significado” atribuído aos objetos culturalmente construídos e com o significado das palavras utilizadas. Com o trabalho em dupla e com o auxílio do computador, acreditamos que os significados atribuídos aos objetos, através das interações entre computador–aluno, aluno-aluno e aluno-professor, propiciaram a criação da zona de desenvolvimento proximal, quando os alunos deram seus próprios significados aos objetos.

A **quinta característica** diz que a análise dos dados tende a seguir um processo intuitivo. Em nossa pesquisa, os dados seguiram exatamente este encaminhamento, pois os procedimentos de análise foram surgindo durante toda a sua realização, buscando resposta à nossa pergunta ““Que contribuições pode trazer, para o ensino-aprendizagem de Geometria, um estudo de *Fractais Geométricos* através de *caleidoscópios* e *softwares de Geometria Dinâmica*?””.

Ressaltamos que não nos preocupamos em confirmar algumas de nossas conjecturas à priori, mas sim buscávamos compreender os fatos da maneira mais natural como eles ocorriam. Não tínhamos nenhuma categoria pré-estabelecida para realizarmos a análise dos dados, porém sabíamos que não estávamos isentos de qualquer tipo de pré-conceito.

Apresentamos, na próxima seção, o procedimento metodológico de ensino, que foi um processo auxiliar em nossa investigação.

2. PROCEDIMENTO METODOLÓGICO DE ENSINO

Nossa postura se diferenciou da usual, realizada em sala de aula tradicional, onde o professor leciona através de aulas expositivas e sequenciais contidas em um determinado manual didático, explicando um conteúdo e passando exercícios para os alunos resolverem em sala de aula.

Nossa proposta pedagógica na realização do Curso de Extensão foi diferente da mencionada acima, pois as atividades propostas, relacionadas com algumas formas da natureza e realizadas no laboratório de ensino e no laboratório de informática, consistiram em um dos fatores que a diferenciaram do trabalho realizado na sala de aula tradicional, que puderam influenciar no aprendizado. Por isso mesmo, a realização do Curso de Extensão intitulado “Fractais Geométricos Através de Softwares de Geometria Dinâmica”, por meio de resolução de problemas, de certa forma, pode provocar insegurança nos alunos, pois trabalhávamos num ambiente computacional em duplas, sempre com situações problemas que puderam permitir a interação e o envolvimento com as situações mediadas pelo computador e professor.

Nossa metodologia de ensino caracterizou-se, em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado na “resolução de problemas” nos laboratórios de ensino e de informática, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise das sessões de ensino geradas através de situações problema. Propusemos, em nossas atividades de resolução de problemas, situações que puderam permitir o desenvolvimento da criatividade, podendo o aluno apresentar suas idéias matemáticas e conjecturas, desenvolvendo, assim, o seu raciocínio. Este processo pôde levar o aluno a uma maior compreensão das situações, ao reconhecimento das conexões entre as suas idéias e à reorganização do seu conhecimento. Deste modo, os alunos puderam desempenhar um papel mais ativo.

A nossa opção pela Resolução de Problemas, como procedimento metodológico de ensino, está baseada em Onuchic (1999), que afirma:

Na abordagem de Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, o aluno tanto aprende Matemática resolvendo problemas como aprende Matemática para resolver problemas. O ensino da Resolução de Problemas não é mais um processo isolado. Nessa metodologia o ensino é fruto de um processo mais amplo, um ensino que se faz por meio da Resolução de Problemas. (p. 210-211)

Além disso, esta mesma autora diz que é fundamental relacionar a Matemática a um amplo número ou a uma variedade de contextos, pois dessa forma a compreensão do aluno aumentará: *“a razão mais importante para esse tipo de ensino é a de ajudar os alunos a compreenderem os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro do trabalho feito em cada unidade temática”* Onuchic (1999), p.208.

A visão de Onuchic e Allevato (2004) é de que o ensino-aprendizagem de Matemática no contexto da Resolução de Problemas constitui um caminho onde *“devem-se fazer conexões entre os diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos”* (p 220). Portanto, quando o aluno relaciona um problema a um grande número de conceitos matemáticos implícitos no mesmo, pode-se gerar uma melhor condição para que exista a construção do conhecimento.

Nessa perspectiva, acreditamos que o professor deve ser um mediador do processo de construção da aprendizagem, pois o professor deve criar situações problemas que envolvam os alunos e alimentem os processos de resolução que surgirem. Essa proposta nos levou a acreditar que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolverem, o que os leva a trabalharem para desenvolver estratégias de resolução.

Van de Walle (2001) diz que:

ensinar Matemática através da Resolução de Problemas não significa, simplesmente, apresentar um problema, sentar-se e esperar que uma mágica aconteça. O professor é responsável pela criação e manutenção de um ambiente matemático motivador e estimulante em que a aula deve transcorrer. (apud Onuchic & Allevato 2004, p. 221).

Assim sendo, a Resolução de Problemas assume novas dimensões, que requerem do professor e dos alunos novas estratégias, novos processos cognitivos, modelos abertos em busca de soluções e finalizações de tarefas.

Considerando a Geometria como um assunto importante para a formação Matemática dos alunos, cabe aos professores a responsabilidade de viabilizar esse processo por meio de metodologias alternativas.

Ressaltamos que a Resolução de Problemas foi para nós um procedimento metodológico para o ensino de Geometria, no qual os alunos puderam desenvolver estratégias para resolver as questões propostas nas atividades, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas.

3. O CONTEXTO E OS PARTICIPANTES DA PESQUISA

O Curso de Extensão intitulado “*Fractais Geométricos Através de Softwares de Geometria Dinâmica*” foi realizado com 13 alunos do 1ª ano do curso de Licenciatura em Matemática da Unesp, Campus de Rio Claro. A escolha dessa turma se justificou pelo fato desses alunos terem concluído o Ensino Médio recentemente, pois pesquisas apontam que alunos do 1ª ano da universidade ainda mostram dificuldades quando o tema tratado é Geometria, como já foi abordado no capítulo I.

Além desse motivo, desejando que a construção do conhecimento geométrico e as potencialidades dos softwares iGeom e do Cabri Géomètre II fossem mais abrangentes, optamos por alunos que estivessem estudando a disciplina de Geometria Euclidiana I.

A negociação para a realização do curso foi feita no dia 22 de setembro de 2004, na sala de aula dos alunos. Decidimos, juntamente com eles, que o curso aconteceria às terças-feiras das, 14:00h às 18:00h, iniciando-se em 19 de outubro de 2004 e terminando em 13 de dezembro de 2004. Apesar das especificações de dia e horário, na ocorrência de algum imprevisto estaríamos livres para proceder as alterações necessárias.

Explicamos aos alunos que o curso fazia parte de um trabalho de pesquisa visando a elaboração de uma dissertação de mestrado. Por isso, seriam efetuadas gravações dos diálogos dos alunos e seriam tiradas algumas fotos.

Para melhor organização da pesquisa, vamos chamar de episódio cada encontro realizado durante o Curso de Extensão. A fim de representar a análise efetuada, foram

selecionados alguns desses episódios, os quais serão apresentados no capítulo VII, com o intuito de responder à pergunta diretriz: “Que contribuições pode trazer, para o ensino-aprendizagem de Geometria, um estudo de *Fractais Geométricos* através de *caleidoscópios* e *softwares de Geometria Dinâmica*?”. Isto porque, Borba (2002):

Perguntas que norteiam uma pesquisa e a metodologia escolhida para a mesma andam juntas (...). No sentido mais amplo, adotado por mim, metodologia engloba os procedimentos e a visão do que é conhecimento (p. 139).

Com essa perspectiva, procuramos descrever e analisar os dados coletados através do Curso de Extensão, à luz do referencial teórico, de modo que surgiram conclusões e generalizações.

4. PROCEDIMENTOS DA ANÁLISE

Nessa seção, apresentaremos os procedimentos da análise dos dados coletados no desenvolvimento dessa pesquisa.

Após o término de cada episódio, anotávamos todos os elementos pertinentes à pesquisa e analisávamos as situações que se repetiam com frequência e que nos chamavam a atenção, identificando regularidades e padrões de conduta na resolução dos problemas, o que pôde nos levar ao estabelecimento de conjecturas nas ações dos alunos. Tanto o comportamento dos alunos quanto as intervenções do pesquisador foram anotados e analisados.

O Curso de Extensão representou um estudo, no qual o trabalho dos alunos foi observado do início ao fim, durante sete semanas. Ao iniciar o curso, estávamos temerosos por não saber se os alunos se envolveriam ou não com os problemas propostos; mas, no decorrer do tempo, este temor foi se dissipando em razão da preocupação e do interesse dos participantes em desenvolverem as atividades, apesar de as situações problema não serem bem definidas (abertas), ao contrário da maioria das atividades realizadas por eles nas escolas.

O registro dos dados foi feito através de gravações, fichas preenchidas pelos alunos e diário de campo. As gravações continham os diálogos realizados entre os alunos e o professor (pesquisador) nas aulas de laboratório, durante as atividades de resolução de problemas, com a utilização do computador. Os problemas resolvidos eram

entregues pelos alunos ao professor (pesquisador) servindo, também, como fonte de dados.

Um diário de campo foi elaborado após cada observação, constituindo-se num relato escrito do que o investigador ouviu, viu e pensou durante e após a coleta de dados. Nele tínhamos idéias, reflexões, impressões e percepções, bem como padrões que emergiram dos dados. Segundo Bogdan e Biklen (1991), "as notas de campo são fundamentais para a observação participante" (p.150).

De acordo com Alves-Mazzotti (2004) os dados das

Pesquisas qualitativas tipicamente geram um enorme volume de dados que precisam ser organizados e compreendidos. Isto se faz através de um processo continuado em que se procura identificar dimensões, categorias, tendências, padrões, relações, desvendando-lhes o significado. Este é um processo complexo, não-linear, que implica um trabalho de redução, organização e interpretação dos dados que se inicia já na fase exploratória e acompanha toda a investigação. À medida que os dados vão sendo coletados, o pesquisador vai procurando tentativamente identificar temas e relações, construindo interpretações e gerando novas questões e/ou aperfeiçoando as anteriores, o que, por sua vez, o leva a buscar novos dados, complementares ou mais específicos, que testem suas interpretações, num processo de 'sintonia fina' que vai até a análise final. (p. 170).

Durante o Curso de Extensão, onde realizamos a coleta dos dados, não tínhamos definido nenhum tipo de categoria para utilizarmos e verificarmos, já que não procurávamos informações que confirmassem algumas teorias pré-estabelecidas, mas sim procurávamos compreender os acontecimentos da maneira como eles ocorriam.

Em seguida, reuníamos-nos com nosso orientador, o qual também participou do Curso de Extensão, para as discussões nelas apresentávamos a pré-análise já feita, e o orientador lia e fazia seus comentários, ponderando a respeito da pertinência do que havia sido escrito e dando sugestões sobre pontos que não havíamos percebido. Após a reunião, reformulávamos a análise de acordo com a discussão realizada.

Nesse sentido, Lincoln e Guba (1985) trazem a idéia da análise indutiva dos dados. Segundo esses autores,

[...] o investigador não trabalha, especificamente, nem com teorias nem com variáveis a priori; espera-se que elas sejam emergentes a partir da investigação. Os dados acumulados no campo devem assim ser analisados indutivamente (isto é, a partir de unidades em estado bruto específicas de informação em direção a categorias mais claras de

informação) a fim de definir hipóteses funcionais locais ou questões que podem ser perseguidas.²³ (p. 203)

Durante a análise de dados do Curso de Extensão, utilizamos a teoria de Vygotsky (1991), Borba (2001) e Miskulin (1999), a qual será abordado no próximo capítulo.

²³ Tradução de: ... the investigator typically does not work with either a priori theory or variables; these are expected to emerge from the inquiry. Data accumulated in the field thus must be analyzed inductively (that is, from specific, raw units of information to subsuming categories of information) in order to define local working hypotheses or questions that can be followed up.

Capítulo VII

CAPÍTULO VII

1. UMA ANÁLISE DOS DADOS DA PESQUISA

Ressaltamos que, para respondermos o questionamento principal “Que contribuições pode trazer, para o ensino-aprendizagem de Geometria, um estudo de *Fractais Geométricos* através de *caleidoscópios* e *softwares de Geometria Dinâmica*?” , como já dissemos, elaboramos algumas atividades, que analisaremos a seguir, que nos ajudaram a compreender como os Fractais, Caleidoscópios e Softwares de Geometria Dinâmica podem contribuir para a aprendizagem.

Assim temos como objetivos:

Natureza Matemática

- Mostrar as relações numéricas dos Fractais e seus elementos, conforme as iterações sucessivas; por exemplo, contagem, perímetro e áreas.
- Trabalhar com padrões geométricos, bissetriz, ponto médio, mediatriz, teorema de Tales, estudando os conceitos de medida, seqüências e limites, ao mesmo tempo em que se adicionam novas idéias como a auto-semelhança e a dimensão Fractal.
- Analisar algoritmos e progressões geométricas e aritméticas.
- Buscar intersecções entre alguns padrões caleidoscópios e padrões Fractais.

Natureza educacional

- Propiciar ao professor de Matemática, instrumentos e recursos didáticos para uma integração multidisciplinar como, por exemplo, nas áreas de:

Ciências: Estudando as formas da natureza;

Desenho geométrico: Desenvolvendo as habilidades gráficas, através do manuseio de compasso e de régua.

Educação Artística: Contribuindo no desenvolvimento do senso estético, criando e colorindo Fractais.

Informática: Utilizando os softwares como auxiliares na aprendizagem, e desenvolvendo no aluno habilidade no uso dos mesmos.

Para sabermos se alcançamos os objetivos da pesquisa, estabelecidos no Curso de Extensão intitulado “*Fractais Geométricos Através de Softwares de Geometria Dinâmica*”, documentamos todos os encontros com fichas, nas quais os alunos faziam suas anotações, e gravamos o áudio de 80% das aulas. No final do curso, além das anotações, tínhamos cerca de 22 horas de áudio.

1.1 PRIMEIRO EPISÓDIO

No primeiro episódio do curso estávamos muito apreensivos, pois os alunos fariam prova de Cálculo I no dia seguinte, o que poderia ocasionar a falta dos mesmos para estudarem para essa prova. Além disso, a professora dessa disciplina marcou uma aula de reposição no horário das 13:00 às 14:00h, o que poderia ser, também, um impedimento para os alunos comparecerem ao curso. Mas, para nossa surpresa, tivemos a presença de treze alunos que se mostraram bastante entusiasmados para participar do curso. Sendo assim, iniciamos os trabalhos um pouco atrasados, por volta das 14:15h, pois os alunos tiveram que se deslocar da sala de Cálculo I para o laboratório de informática (LIEM)²⁴, que fica aproximadamente 200m de distância.

Começamos o curso com uma conversa informal com a turma com a qual iríamos trabalhar, com a finalidade de deixarmos bem claro o objetivo, a metodologia e a dinâmica do Curso de Extensão. Além disso, procuramos conhecer cada aluno e já tentar estreitar as relações de amizade e confiança.

Após os primeiros 20 minutos do curso, percebemos que os alunos estavam ansiosos por conhecer o conteúdo a ser estudado. Apresentamos, então, as três classes de Fractais a seguir, ressaltando que nosso estudo se restringiria à primeira delas. A apresentação dessas três classes de Fractais foi realizada através de um programa chamado Fantastic Fractals 98, que pode ser adquirido gratuitamente pela Web no endereço <http://library.advanced.org/12740/>. São estas as classes de Fractais:

²⁴ Laboratório de informática em Educação Matemática da Unesp de Rio Claro, SP.

- classe Fractal Geométrica: nesta, os Fractais são construídos com objetos extremamente geométricos.
- classe Fractal EnL (Equações não Lineares)
- classe Fractal IFS (Iterated Function System ou Sistema Iterativo de Funções): nesta classe os Fractais são construídos através de sistemas iterativos de funções. Para entendermos melhor esta classe é necessário algum conhecimento em Espaços Métricos e Topologia.

Classe Fractal Geométrica nesta os Fractais são construídos com objetos extremamente geométricos.

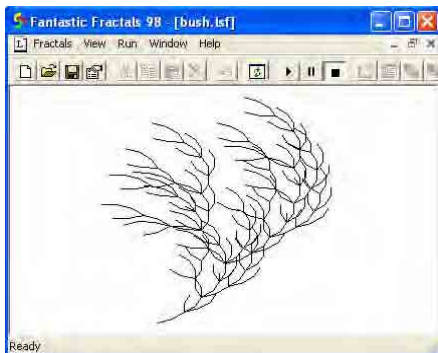


Figura 34

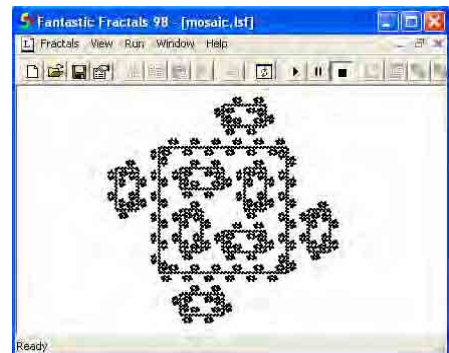


Figura 35

Classe Fractal EnL (Equações não Lineares).



Figura 36

Classe Fractal IFS (Iterated Function System ou Sistema Iterativo de Funções).

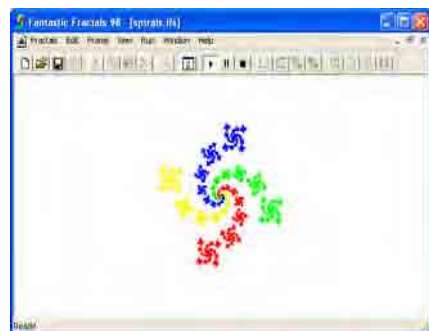


Figura 37

O primeiro contato com os Fractais, por meio desse programa, foi bastante interessante, e os alunos se mostraram encantados com as formas geométricas tão belas

e ricas, através das quais podem-se aprender muitos conceitos matemática. Transcrevemos as falas de quatro alunos:

“Nossa que legal, é muito bonito, deve ter muita geometria aí”.

“Isso é Fractal? Estranho mais bonito”.

“Bacana !!!”.

“Nossa”.



Figura 38

Vale ressaltar que os PCNs discutem o processo educativo e destacam a observação e a visualização acrescentando que é por meio da visualização que os alunos poderão desenvolver o senso estético, espacial, comparar e desenhar formas que sejam capazes de estabelecer relações, reconhecer importantes conceitos e propriedades geométricas.

Os trabalhos de Martos (2002) e Pataki (2003) mostram que as geometrias não-euclidianas ainda não encontraram espaço nos currículos escolares e dessa forma acabam sendo desconhecidas pelos alunos e professores.

Depois de apresentar os Fractais, distribuímos as fichas 1 e 2 (Anexo I), que investigavam os dados dos alunos, e a página 2, que continha perguntas sobre alguns conceitos de Geometria. Através destas fichas pudemos notar que os alunos não possuíam muitos conhecimentos sobre softwares de Geometria Dinâmica, pois haviam tido contato com os mesmos apenas ao cursarem as disciplinas de Geometria Euclidiana I e Geometria Elementar, quando utilizaram o Cabri Géomètre II e o Geometricks.

As respostas a seguir confirmam esta afirmação.

* Conheci este curso, um pouco, do software
CABRI II, o/ o profº Geraldo Garcia (Geometria Elementar) e
o/ a profª Rosana Mishulin (Geometria Euclidiana I).

e. Você conhece algum software de Geometria Dinâmica?

CABRI II : GEOMETRICKS.

e. Você conhece algum software de Geometria Dinâmica?

Cabri II e Geometricks

Durante o primeiro episódio, tentamos perceber quais dos alunos possuíam alguns conhecimentos que julgamos necessários para o desenvolvimento do curso. Então, formamos as duplas juntando alunos que já possuíam algum tipo de conhecimento básico de Geometria, tais como mediana, ponto médio, bissetriz, manuseio dos softwares e etc, com aqueles que não mostravam tais conhecimentos. Formaram-se então cinco duplas e um trio. A organização do trabalho em duplas baseia-se no referencial teórico.

Existem pelo menos **dois níveis de desenvolvimento** identificados por Vygotsky: **um real**, já adquirido ou formado, que determina o que aluno já é capaz de fazer por si próprio, e **um potencial**, ou seja, a capacidade de aprender com outra pessoa. A aprendizagem interage com o desenvolvimento, produzindo abertura nas **zonas de desenvolvimento proximal**.

Como os participantes já possuíam conhecimentos básicos do software Cabri Géomètre II, passamos para o software iGeom, o qual era desconhecido para eles. Deste modo, ficamos até o término do primeiro episódio conhecendo a interface do iGeom e construindo algumas figuras geométricas.

1.2 SEGUNDO EPISÓDIO

No segundo episódio, para nosso contentamento, tivemos a presença dos trezes participantes do episódio anterior. Desta forma, continuamos nossas atividades com o iGeom, distribuindo no início da aula uma apostila desse softwares por nós²⁵ elaborada (Anexo II), com o intuito de melhorar o entendimento da interface do iGeom.

Após a realização das atividades desta apostila, distribuímos a próxima página, que tinha como objetivo relacionar objetos com figuras geométricas.

Aproximadamente 90% das respostas foram as seguintes:

1) Procure e anote algumas formas geométricas presentes na sala de aula, e associa-as a figuras geométricas euclidianas conhecidas.

Nº	Objetos Observados	Figuras Associadas
1	Lousa	Retângulo
2	Computador	Quadrado e Retângulo
3	Mouse	Elipse
4	Janela	Retângulo
5	Griz	Cilindro
6	Direx	Circunferência

Ao terminarem o preenchimento da página dessa tabela, entregamos a atividade seguinte, que solicitava aos alunos relacionarem objetos observáveis nas ruas, parques, calçadas, etc., com figuras euclidianas conhecidas; grande parte das respostas apontaram as seguintes associações:

²⁵ Flavio Roberto Gouvea e Prof. Dr. Claudemir Murari.

Repetir o processo anterior observando agora áreas como (ruas, calçadas, casas, parques, etc.), e associá-las a figuras euclidianas conhecidas.

Nº	Objetos observados	Figuras associadas
1	pneu de carro	circunferência
2	casa	cubo
3	pedro	paralelepípedo
4	bola	esfera
5	pipa (papagaio)	losango
6	porta	cilindro

Após preencherem essas duas listas de objetos e suas respectivas associações com figuras euclidianas, pedimos que os alunos relatassem suas conclusões. Algumas das respostas obtidas são apresentadas abaixo. Porém, em virtude de os alunos utilizarem lápis nas respostas, as imagens escaneadas ficam prejudicadas, razão pela qual, logo após as imagens foram transcritos os relatos. Esse procedimento se repetirá toda vez que apresentarmos as respostas manuscritas.

Acho que é necessário o aparecimento de uma nova geometria porque a Euclidiana não dá conta de explicar tudo.

Acho que é necessário o aparecimento de uma nova geometria porque a Euclidiana não dá conta de explicar tudo.

Relate: Com algumas modificações podemos aproximar os objetos a formas geométricas como por exemplo podemos considerar um pedro como sendo um paralelepípedo.

Com algumas modificações podemos aproximar os objetos a formas geométricas como por exemplo podemos considerar um prédio como sendo um paralelepípedo.

Relate:

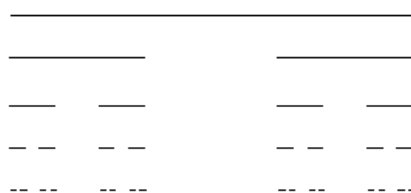
Conseguimos fazer muitas associações entre as figuras geométricas e os objetos que observamos tanto em uma praça quanto em uma sala de aula. Na maioria das vezes fazemos aproximações. Observamos que existe uma predominância de cubos, paralelepípedos, quadrados e retângulos nas formas.

Conseguimos fazer muitas associações entre as figuras geométricas e os objetos que observamos tanto em uma praça quanto em uma sala de aula. Na maioria das vezes fazemos aproximações. Observamos que existe uma predominância de cubos, paralelepípedos, quadrados e retângulos nas formas.

Através das respostas acima, acreditamos que os alunos conjecturavam, possivelmente, o surgimento de um novo conceito de geometria, que julgamos ser o conceito de Geometria Fractal. Dessa forma, pensamos ter atingido nosso objetivo, pois essas atividades tinham a finalidade de suscitar nos alunos a possibilidade da existência de uma nova geometria, sem definir nada sobre ela.

Logo em seguida, distribuimos a atividade posterior, que tinha o objetivo de introduzir a idéia de Fractal, Dimensão Fractal, e explorar conceitos como: relação numérica, reta perpendicular, paralela, teorema de Tales, seqüência e seqüência monótona.

Atividade: Observe esse segmento de reta abaixo, que obedece a regras algorítmicas.



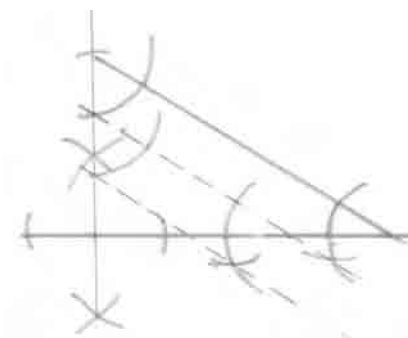
a. Como varia o comprimento dos segmentos do Conjunto de Cantor com as iterações? Considere o segmento inicial $[0,1]$.

Identifique a lei de formação de cada valor, em cada coluna.

b. Construa com régua e compasso

c. Verifique se a sequência do item (a) é monótona.

Ponderando que os alunos já haviam compreendido os conceitos geométricos implícitos no processo de construção do conjunto de Cantor, solicitamos-lhes que construíssem o conjunto de Cantor com régua e compasso. Entretanto, durante a construção os alunos se mostraram desanimados, pois a construção com régua e compasso é muito cansativa pelo fato de repetir o mesmo processo várias vezes. Dessa forma, os alunos só dividiram o segmento inicial em três partes (teorema de Tales), como mostramos ao lado:



d. Para onde tendem as medidas do Conjunto de Cantor?

e. Qual é a dimensão do Conjunto de Cantor²⁶?

Ajudamos os alunos a construírem o Fractal chamado de Conjunto de Cantor, utilizando o iGeom e o Cabri Géomètre II, pois era a primeira construção Fractal dos alunos com esses softwares, havendo a necessidade de uma maior orientação.

Mostraremos, a seguir, a construção do Fractal Conjunto de Cantor feita pelos alunos, através do iGeom.



Figura 39

²⁶ Georg Cantor foi um matemático alemão da Universidade de Halle, onde realizou trabalhos importantes nos fundamentos de matemática, que hoje chamamos de Teoria dos Conjuntos.

- criar o segmento AB , selecionar o botão com o mouse. Para colocar o ponto na sua janela, mover o mouse, colocar o cursor onde desejar e clicar uma única vez. Arraste o mouse criando o segmento desejado; clique novamente e o ponto do segmento será criado.

- clicar em *scripts* (aparecerá *janela de rotinas*) , pois até o momento trabalhamos apenas no editor de desenhos do iGeom. A janela de rotina permite gravar todas as etapas sucessivas de uma construção criadas, a partir de um conjunto preliminar de objetos geométricos, como um programa.

-criar uma reta perpendicular passando por A . Clique em , depois no segmento AB , onde será criada a perpendicular. Leve-a até o ponto A e clique. Assim será criada a reta perpendicular.

-construir uma circunferência . Clicar em A e arrastar o cursor sobre a reta perpendicular. Quando alcançar o raio desejado, liberar o botão do mouse para criar a circunferência com ponto C de intersecção  com a reta perpendicular. Repetir o processo, agora com centro da circunferência em C e raio AC , obtendo a outra circunferência com ponto D de intersecção  com a reta perpendicular. Repetir o processo, agora com o centro da circunferência em D e raio CD , obtendo a outra circunferência com ponto E de intersecção  com a reta perpendicular. Assim, formam-se três pontos sobre a reta perpendicular. Ver Figura 52.

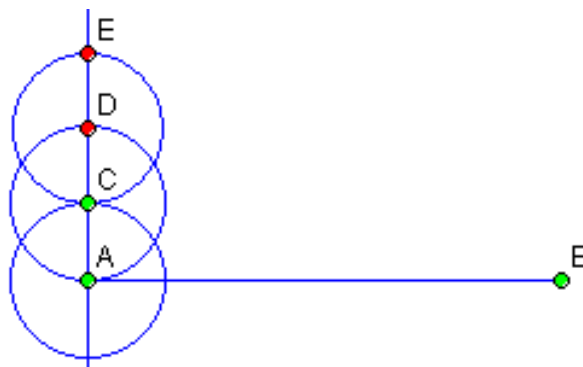


Figura 40

-criar uma segmento  EB .

- criar uma reta paralela  ao segmento EB passando pelo ponto D . Criar o ponto E de intersecção  com segmento AB . Repetir o processo, criando uma reta paralela  ao segmento DE . Criar o ponto F de intersecção  com segmento AB . Repetir novamente o processo, e criar uma reta paralela  ao segmento EF . Criar o ponto G de intersecção  com segmento AB .

-depois esconder objetos , marcar os objetos deixando somente os pontos A, B, F e G . Ver Figura 53.

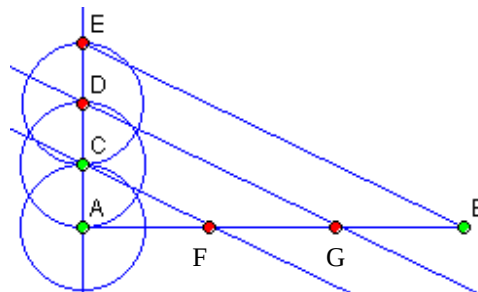


Figura 40

-criar dois segmentos AF e GB .
 - após esta construção devemos ter gravada a rotina, a partir de um conjunto de objetos geométricos iniciais. Pretendendo que seja repetido este processo a um novo conjunto, isto é, com o mesmo tipo de objetos, basta selecionar nesta seqüência o ponto A , segmento AF e o ponto F , e pressionar o botão *recorrência* . Depois selecionar nesta seqüência o ponto F , segmento GB e o ponto B e pressionar o botão *recorrência*  finalizando.

Deve-se carregar a rotina clicando no botão “script” , a qual estará pronta para ser executada.

- após esta construção devemos ter gravada a rotina, a partir de um conjunto de objetos geométricos iniciais.

-pretendendo que seja repetido este processo a um novo conjunto, devemos criar um novo segmento e selecionar *ponto segmento ponto* e depois clicar no botão .

ativando a rotina. Assim, poderemos repetir a mesma construção, sempre que necessário. Aparecerá uma janela de profundidade, que é o nível de iteração (repetição) que irá ocorrer. Digite o número de profundidade ou iterada. Sugerimos que digite a seqüência: 1, 2, 3 e 4.

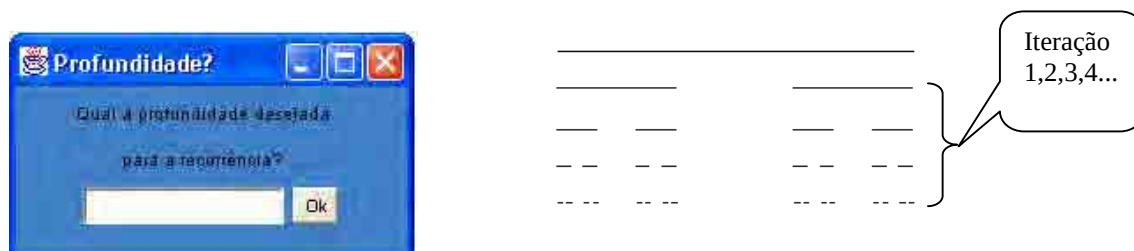


Figura 41

A janela azul, que aparece acima perguntando: *Qual a profundidade desejada para a recorrência?*, significa o número de iteração ou nível desejado para construção do Fractal.

Após a construção, alguns grupos mediram os segmentos através da opção  (medir distância entre pontos) do iGeom podendo, dessa forma, observar a relação existente entre o comprimento dos segmentos.

CONSTRUÇÃO DO CONJUNTO DE CANTOR COM O CABRI GÉOMÈTRE II

-criar o segmento , nomeando-o de AB (décimo botão **Rótulo**). Para criar o segmento na sua janela, mover o mouse, colocar o cursor onde desejar e clicar uma única vez. Arrastar o mouse criando o segmento desejado, clicar novamente, e o ponto do segmento será criado.

-criar uma reta perpendicular passando por A. Clicar em , depois no segmento AB onde será criada a perpendicular. Leve-a até o ponto A e clicar. Assim, será criada a reta perpendicular.

-construir uma circunferência . Clicar em A e arrastar o cursor sobre a reta perpendicular. Quando alcançar o raio desejado, liberar o botão do mouse para criar a circunferência com ponto C de intersecção  com a reta perpendicular. Repetir o processo, agora com o centro da circunferência em C e raio AC, obtendo a outra circunferência com ponto D de intersecção  com a reta perpendicular. Repetir o processo, agora com o centro da circunferência em D e raio CD, obtendo a outra circunferência com ponto E de intersecção  com a reta perpendicular. Obteremos, assim, três pontos sobre a reta perpendicular. Ver Figura 55.

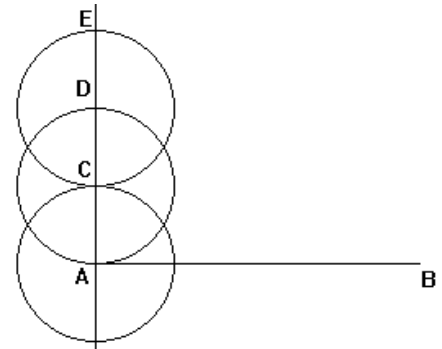


Figura 42

-criar um segmento  EB.

- criar uma reta paralela  ao segmento EB passando pelo ponto D. Criar o ponto E de intersecção  com segmento AB. Repetir o processo, agora para criar uma reta paralela  ao segmento DE. Criar o ponto F de intersecção  com segmento AB. Repetir o processo novamente, e criar uma reta paralela  ao segmento EF. Criar o ponto G de intersecção  com segmento AB. Ver Figura 56.

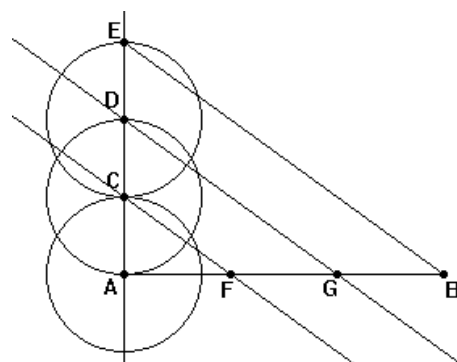


Figura 43

-depois esconder objetos , marcar os objetos deixando somente o segmento AB e os pontos F e G .

-criar dois segmentos AF e GB .

-após esta construção devemos criar a “macro”, ou seja, gravar as construções já realizadas, repetindo o processo a um novo conjunto, isto é, com o mesmo tipo de objetos, a partir de um novo conjunto de objetos.

-clique em  e selecione objetos iniciais. Em seguida, clique no segmento AB . Depois, esconda o segmento AB .

-clique novamente em  e selecione objetos finais e clique no segmento AF e GB . Em seguida, clique no botão  para definir a macro; agora é só executar. Para isso, é necessário clicar em  e selecionar o nome do arquivo definido. Assim, poderemos repetir a mesma construção sempre que necessário, clicando nos segmentos AF e GB .

Desse modo, novos segmentos serão criados. Ver Figura 57.

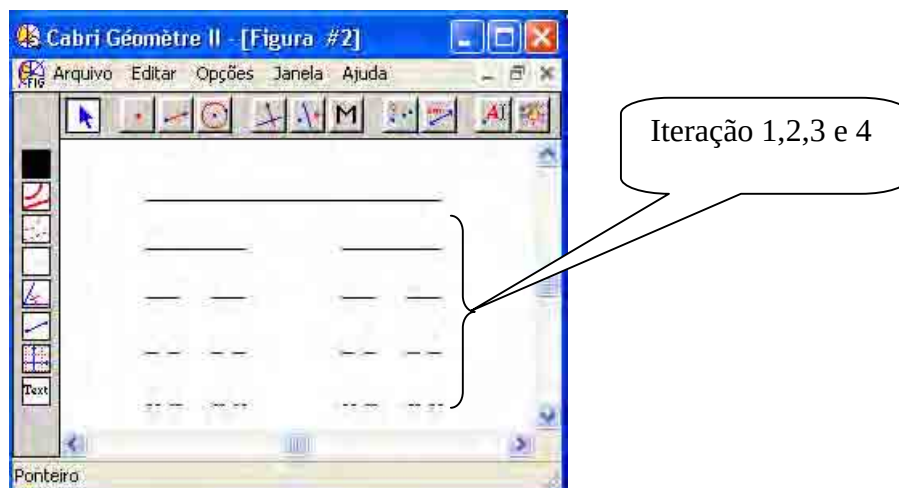


Figura 43

Segundo Borba (2001), a utilização do computador foi importante, pois foi através dele que os alunos puderam visualizar e analisar a imagem. Dessa forma o computador foi um “novo ator” do processo de aprendizagem, já que foi através dele que os alunos puderam questionar alguns conceitos, relações e propriedades geométricas, como destacamos a seguir.

Após a construção do Conjunto de Cantor com os softwares, os alunos questionavam o fato de o segmento inicial possuir dimensão um. Mas, à medida que o número de iterações tendia para o infinito, o tamanho do segmento tendia a zero. Através desse comentário dos alunos, conjecturamos ter sido introduzida a noção de dimensão Fractal, pois na n -iteração não teremos um segmento (dimensão topológica um) nem um ponto (dimensão zero); logo, ficou clara a existência de uma dimensão entre zero e um.

Nesta oportunidade, levantamos a questão sobre a existência de um outro tipo de dimensão, já que eles “diziam” que em cada iteração o segmento diminuía, como pode ser observado nas Figuras 54 e 57. Refletindo sobre este questionamento, os alunos responderam que a imagem gerada pelo computador levava à suposição de que a figura deveria ter dimensão entre $[0,1]$. A potencialidade dos softwares, que possibilitou um número elevado de iterações, levou os alunos a perceberem que o segmento tendia a zero, fazendo com que construíssem uma nova noção de dimensão.

Nesse momento, explicamos o que é “Dimensão Fractal”, realizando, assim, a *institucionalização* que, segundo Brousseau (1987), é estabelecer um caráter de objetividade e universalidade do conhecimento. O saber tem assim uma função de referência cultural, que supera o contexto pessoal e localizado. O professor seleciona questões essenciais para a apropriação de um saber formal a ser incorporado pelo aluno. A institucionalização não pode ser feita muito cedo, pois senão interromperá a construção do significado, impedindo a construção do conhecimento pelo próprio aluno.

Ressaltamos que no término de cada episódio procuramos realizar a institucionalização. Após a realização desta pelo professor, o sujeito poderá armazenar o novo conhecimento, podendo utilizar o “novo” saber em outras situações problema.

PROBLEMA INTERMEDIÁRIO

Como pudemos ver, ao construir o Conjunto de Cantor com os softwares de Geometria Dinâmica, exploramos conceitos implícitos no processo de construção como: Reta Perpendicular, Paralela, Teorema de Tales, Seqüência e Seqüência Monótona. Após esse procedimento, deveriam ser respondidos três questionamentos:

- 1) Como varia o comprimento dos segmentos do Conjunto de Cantor com as iterações?
- 2) Verifique se a sequência do item (a) é monótona.
- 3) E para onde tendem as medidas do Conjunto de Cantor?



Figura 44

Nas respostas a estas questões, os alunos “diziam” que sempre seriam obtidos segmentos com um tamanho três vezes menor do que o menor da iteração anterior. Abaixo, mostramos algumas conclusões dos alunos.

- a. Como varia o comprimento dos segmentos do Conjunto de Cantor com as iterações?

Sempre varia de $\frac{2}{3}$ cada segmento anterior, ou melhor, sempre o dobro de segmentos anteriores com tamanhos de $\frac{1}{3}$ do anterior.

Sempre varia de $\frac{2}{3}$ cada segmento anterior, ou melhor, sempre o dobro de segmentos anteriores com tamanhos de $\frac{1}{3}$ do anterior.

Em cada divisão, ele dividi o segmento em 3 partes utilize apenas duas delas, ou seja, utilize $\frac{2}{3}$ do segmento.

Em cada divisão, ele dividi o segmento em 3 partes e utiliza apenas duas delas, ou seja, utiliza $\frac{2}{3}$ do segmento.

Em cada iteração, o segmento é dividido em 3 partes iguais e é escondida a 2ª parte (aquela

Em cada iteração, o segmento é dividido em 3 partes iguais e é escondida a 2ª parte (aquela

Através das respostas do primeiro questionamento, pudemos observar que os alunos perceberam que iriam obter, sempre, segmentos com um tamanho três vezes menor do que o menor da iteração anterior. Assim os alunos concluíram que, se considerarmos o primeiro segmento igual a 1 unidade de medida, teremos, na n -ésima iteração, segmento do tipo $\left(\frac{1}{3}\right)^n$, pois os softwares utilizados permitem que os alunos realizem várias iterações.

Através da conclusão acima pudemos perceber que estávamos em conformidade com Miskulin (1999, p.40), pois a tecnologia possibilita novas formas de comunicar e disseminar o conhecimento, já que:

a Educação inserida no cenário tecnológico, desempenha uma função fundamental na criação de estruturas que levem em conta as novas maneiras de gerar e disseminar o conhecimento...

Após relatarmos como variam os segmentos do Conjunto de Cantor, pedimos para registrarem o comprimento de cada segmento, o número de segmentos e o comprimento total. Dessa forma, os alunos preencheram as tabelas como as exemplificadas a seguir:

Iteração	Comprimento de cada segmento	Numero de segmentos	Comprimento total
0	1	1	1
1	$[0, \frac{1}{3}] [\frac{2}{3}, 1]$	2	$\frac{2}{3}$
2	$[0, \frac{1}{9}] [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] [\frac{8}{9}, 1]$	4	$(\frac{2}{3})^2$
3	$[0, \frac{1}{27}] [\frac{2}{27}, \frac{1}{9}] [\frac{2}{9}, \frac{7}{27}] [\frac{8}{27}, \frac{1}{3}] [\frac{2}{3}, \frac{19}{27}] [\frac{20}{27}, \frac{7}{9}] [\frac{22}{27}, \frac{8}{9}] [\frac{26}{27}, 1]$	8	$(\frac{2}{3})^3$
4	$(\frac{2}{3})^4$	16	$(\frac{2}{3})^4$
5	$(\frac{2}{3})^5$	32	$(\frac{2}{3})^5$
6	$(\frac{2}{3})^6$	64	$(\frac{2}{3})^6$
7	$(\frac{2}{3})^7$	128	$(\frac{2}{3})^7$
8	$(\frac{2}{3})^8$	256	$(\frac{2}{3})^8$
9	$(\frac{2}{3})^9$	512	$(\frac{2}{3})^9$
n	$(\frac{2}{3})^n$	2^n	$(\frac{2}{3})^n$

comprimento de cada segmento: $\frac{1}{3^n}$ $\Rightarrow$ comprimento total: $\frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
 número de segmentos: 2^n

comprimento de cada segmento = $\frac{1}{3^n}$

número de segmentos 2^n

$\Rightarrow$ comprimento total: $\frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Iteração	Comprimento de cada segmento	Numero de segmentos	Comprimento total
0	1	1	1
1	$\frac{1}{3}$	2	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{1}{9}$	4	$\frac{4}{9}$
3	$\frac{1}{27}$	8	$\frac{8}{27}$
4	$\frac{1}{81}$	16	$\frac{16}{81}$
5	$\frac{1}{3^5}$	32	$\frac{32}{3^5}$
6	$\frac{1}{3^6}$	64	$\frac{64}{3^6}$
7	$\frac{1}{3^7}$	128	$\frac{128}{3^7}$
8	$\frac{1}{3^8}$	256	$\frac{256}{3^8}$
9	$\frac{1}{3^9}$	512	$\frac{512}{3^9}$
n	$\frac{1}{3^n}$	2^n	$\frac{2^n}{3^n}$

As tabelas apresentadas comprovam que os alunos foram capazes de, através de uma imagem gerada pelo computador, perceberem que existem três seqüências: uma que relaciona o comprimento de cada segmento $\left(\frac{1}{3}\right)^n$; a segunda, que mostra o número de segmentos 2^n ; e a terceira, que apresenta o comprimento total $\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Porém, até esse momento os alunos não tinham notado que as seqüências obtidas eram Progressões Geométricas de razão $\frac{1}{3}$, 2 e $\frac{2}{3}$.

Dessa forma pudemos perceber que estávamos em conformidade com Miskulin (1999), pois o computador, neste caso, foi um mediador do processo de conhecimento, já que os sujeitos refletiram e chegaram a essa conclusão porque os softwares de Geometria Dinâmica utilizados, o iGeom e o Cabri Géomètre II, possibilitaram que os alunos mudassem a maneira de pensar, pois a GD possibilitou que fizessem um número elevado de iterações e percebessem que o tamanho do segmento tendia a zero.

O segundo questionamento tinha o objetivo de introduzir a idéia de seqüência monótona.

Assim, perguntamos aos alunos o que poderíamos dizer da seqüência $\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Seria essa seqüência monótona? Algumas das respostas obtidas foram:

É monótona decrescente

É monótona decrescente

Sim, pois neste sempre o mesmo procedimento; é monótona

decrescente.

Sim, pois existe sempre o mesmo procedimento, é monótona decrescente.

Sim, é monótona decrescente

Sim, é monótona decrescente.

Os alunos perceberam que a seqüência era monótona decrescente, e à medida que o número de iteração aproximava-se do infinito, a sucessão tendia para o infinito.

As interações dos alunos com o computador propiciaram a exploração de conceitos, desenvolvendo as atividades pelo método de resolução de problemas, o que acreditamos ter sido essencial para a construção do conhecimento. Entretanto, esse processo não é simples de ser realizado. Essa interação precisa ser mediada pelo professor, que deve conhecer os softwares de Geometria Dinâmica e ainda conhecer teorias do conhecimento para que os sujeitos possam se desenvolver.

Tal interação possibilita aos alunos inserirem-se em contextos de resolução de problemas. Dessa forma, o aluno não segue etapas pré-definidas, isto é, sempre volta a questões anteriores, reformulando suas estratégias.

Segundo Vygotsky (1991), isso se deve à inclusão de um fator mediador, o signo (interface dos softwares), que representa ou faz lembrar o objeto real, concreto. Os signos orientam a atenção e a memória, organizam os estímulos e dão origem às funções psicológicas superiores, presentes apenas nos seres humanos.

Assim o professor, que é um mediador do processo de conhecimento, deve propiciar aos alunos situações que possam envolvê-los, podendo gerar, dessa forma, aspectos que possam contribuir para auxiliar na busca da solução do problema.

Notamos, através dos registros anteriores dos alunos, que os conceitos pretendidos na atividade dois foram alcançados, pois os alunos foram capazes de relacionar conceitos matemáticos no Conjunto de Cantor. Notaram que, ao considerar o primeiro segmento com 1 unidade de medida, teremos na n -ésima iteração um segmento na forma de $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ e, ainda, compreenderam que a soma dos comprimentos dos segmentos da seqüência com n iteração é igual ao a seqüência anterior, somada ao número de novos segmentos 2^n , multiplicada pelo comprimento deste segmento $\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Logo, o comprimento total é $\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Dessa forma, perceberam que a seqüência formada pelo conjunto de Cantor é monótona decrescente e que, à medida que o número de iteração aproxima-se do infinito, a seqüência tende a 0, além de terem utilizado conceitos de Geometria Euclidiana para a construção do Fractal.

1.3 TERCEIRO EPISÓDIO

O terceiro episódio do curso de extensão ocorreu no dia 16 de novembro, depois de 15 dias do anterior, pois neste intervalo tivemos feriado (dois de novembro) e a semana de estudos da matemática (nove de novembro), da qual os alunos participaram. Nesse episódio contamos com a presença de seis alunos, os quais permaneceram até o fim do curso. Acreditamos que a ausência dos outros alunos se deveu ao distanciamento entre uma aula e outra.

Dessa forma, iniciamos o episódio com a atividade 3, que tinha o objetivo de introduzir conceitos de Dimensão Fractal, Ponto Médio, Ângulo, Seqüência, Seqüência Monótona e Convergência, pois esses conceitos estão implícitos no processo de construção do galho de árvore (Figura 61).

O intuito era relacionar imagens do dia-a-dia dos alunos com problemas que poderiam ser significativos para eles. Agindo assim, acreditamos que os alunos se interessaram pelas situações, o que os levou a gerarem e criarem um conjunto de regras

e métodos necessários à descoberta e à resolução do problema. Deste modo, os alunos não seguem etapas pré-definidas, reformulam constantemente suas estratégias, definem e redefinem seus procedimentos, inserindo-se então na investigação, ao procurarem por possíveis e prováveis soluções. As situações problemas criadas neste trabalho poderão contribuir e ajudar o professor para que este se comporte como um mediador do processo de aprendizagem, levando o aluno a enxergar o problema principal sob diferentes perspectivas, possibilitando, dessa forma, depararem-se com aspectos mais familiares, os quais poderão auxiliar na busca da resposta ao questionamento principal: “Que contribuições pode trazer, para o ensino-aprendizagem de Geometria, um estudo de *Fractais Geométricos* através de *caleidoscópios* e *softwares de Geometria Dinâmica*?”

A atividade subsequente apresentava a imagem de um galho de árvore (Figura 59). Explicamos que muitos matemáticos procuram entender e compreender os fenômenos que ocorrem na natureza. Pedimos que observassem a imagem abaixo:



Figura 45

Em seguida, solicitamos que relatassem com suas palavras o que haviam observado na foto acima e quais conceitos geométricos poderiam estar relacionados na imagem do galho de árvore. A seguir, algumas respostas:

A dimensão dessa foto está entre 1 e 2 pois isso não se reduz nem a uma reta, e nem ocupa o plano todo.
Podemos ver que é utilizado bastante o conceito de ponto médio.

8

A dimensão dessa foto está entre 1 e 2 pois isso não se reduz nem a uma reta, e nem ocupa o plano todo.

Podemos ver que é utilizado bastante o conceito de ponto médio.

Sobre a dimensão dessa foto posso observar que é entre 1 e 2.
Os conceitos usados são, pto médio, divisão de ângulos, ...

Sobre a dimensão dessa foto posso observar que estará entre 1 e 2.

Os conceitos usado são, pto médio, divisão de ângulo, ...

Posso observar que a árvore tem dimensão entre 1 e 2 pois não chega a ocupar todo o plano.
Existe a relação de vetor.

Posso observar que a árvore tem dimensão entre 1 e 2 pois não chega a ocupar todo o plano.

Existe a relação de vetor.

Após a apresentação da foto acima, pedimos para os alunos relatarem, com as suas próprias palavras, o que observaram e quais conceitos geométricos estão relacionados no foto (Figura 57).

Há várias semelhanças em suas manifestações, bem como algumas proporcionalidades, os conceitos geométricos que estão relacionados são: a ideia de PONTO MÉDIO e Translação (transportar um dos ângulos).

Há uma simetria em suas ramificações, bem como uma proporcionalidade; os conceitos geométricos que estão relacionados são: a idéia de PONTO MÉDIO e translação (transportar um dado ângulo).

Os conceitos cotidianos apresentados na cultura do trabalho podem caracterizar-se como elementos necessários para a apropriação dos conceitos científicos, possibilitando assim aberturas de novas zonas de desenvolvimento proximal. Consideramos pertinente a esta dissertação o conceito de mediação, explorado por Vygotsky (1991), que inclui a intervenção de um elemento intermediário nas relações do sujeito com o mundo. Este elemento mediador (computador) utiliza-se de sistemas simbólicos para permitir ao sujeito, através de interações sociais, de influências culturais, de instrumental disponível, e em contato com a realidade e o contexto dinâmico e em constante evolução, em que se insere, adquirir habilidades, valores, atitudes, e desenvolver as “funções pedagógicas culturalmente organizadas e especificamente humanas” (p. 76).

Analizando as respostas acima, através dos conceitos de Vygotsky podemos perceber que o conceito de dimensão Fractal foi apreendido, já que 80% dos alunos comentaram que a dimensão deveria estar entre 1 e 2. Ainda perceberam que o galho de árvore possuía conceitos geométricos, isto é, para sua construção precisaríamos, por exemplo, localizar os pontos médios dos segmentos e construir ângulos bem determinados.

Nesse momento, pedimos para os alunos construírem o galho da árvore com régua e compasso e relatarem quais conceitos geométricos estavam relacionados nessa construção. Para isso, foi necessário medir, com o transferidor, os ângulos que os galhos da árvore formavam. As respostas indicaram que estes ângulos estavam em torno de 60°.

A foto a seguir ilustra esse procedimento.

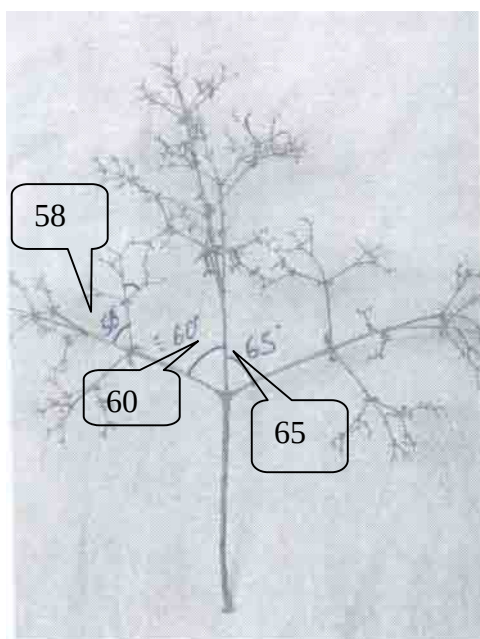
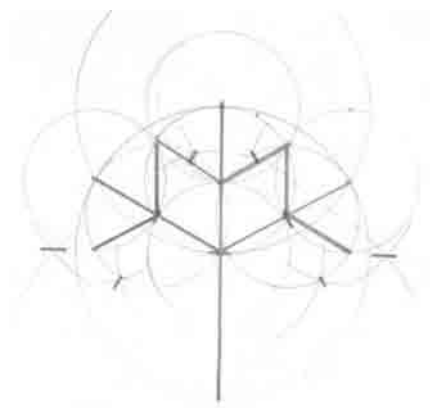


Figura 46



Figura 47

Após a construção com régua e compasso como mostra a figura a seguir



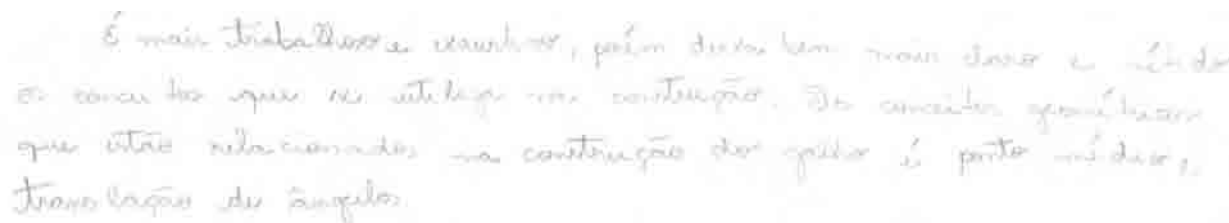
Os alunos assim se expressaram:

Realmente a construção com régua e compasso é exaustiva. Os conceitos de ângulo, ponto médio, "simetria por consequência".

Realmente a construção com régua e compasso é exaustiva. Os conceitos de ângulo, ponto médio, "simetria por consequência".

A construção com régua e compasso, por ser muito repetitiva a construção torna-se cansativa, e vou ficando com ideias impressionantes. Foram utilizados o conceito de ponto médio e construção de ângulo de 60° .

A construção com régua e compasso, por ser muito repetitiva a construção torna-se cansativa, e vai ficando com certas impressões. Foram utilizados os conceitos de ponto médio e construção de ângulo de 60°.



É mais trabalhoso e exaustivo, porém deixa bem mais claro e nítido os conceitos que se utiliza na construção. Os conceitos geométricos que estão relacionados na construção do galho é ponto médio, translação de ângulos.

É mais trabalhoso e exaustivo, porém deixa bem mais claro e nítido os conceitos que se utiliza na construção. Os conceitos geométricos que estão relacionados na construção do galho é ponto médio e translação de ângulos.

Através dos relatos acima, acreditamos que os alunos perceberam a necessidade da utilização de um software de Geometria Dinâmica, pois as construções geométricas são muito repetitivas. Assim, surge a necessidade da utilização de um ambiente mais “poderoso” e “eficiente” para explorar e compreender conceitos de Geometria Fractal e euclidiana, propiciando ao aluno a construção da figura geométrica através das ações de recorrência do iGeom e da macro do Cabri Géomètre II.

Segundo Borba (2001, pg 47), “*não há apenas uma justaposição de técnicas e seres humanos, como se a primeira apenas se juntasse aos últimos. Há uma interação entre humanos e não humanos de forma que aquilo que é um problema com uma determinada tecnologia passa a ser uma mera questão na presença de outra*”. Dessa forma, os softwares de Geometria Dinâmica tornam-se um recurso importante para os professores trabalharem com a Geometria Fractal e Euclidiana.

A construção geométrica do galho da árvore é possível de ser feita tanto no iGeom como no Cabri Géomètre II, podendo o aluno trabalhar com conceitos de Geometria Fractal e Euclidiana, de forma simples e concisa, sem as demasiadas construções.

PROBLEMA INTERMEDIÁRIO

Com o objetivo de envolver os alunos na busca de estratégias e soluções adequadas que possibilitassem a construção e investigação do Fractal, surgiu um problema intermediário: **como construir os ângulos de 60°** (com o iGeom ou Cabri Géomètre II) a um segmento vertical? No processo de resolução desse problema intermediário, os alunos levantaram a hipótese de que para construir os ângulos 60° deveriam imaginar um triângulo equilátero na composição do problema.

Achamos importante mencionar, nesse momento, que as estratégias utilizadas pelos alunos para construírem o galho foram consideradas adequadas, já que estas exigem dos alunos algumas construções geométricas já relatadas.

Após reflexões e discussões a respeito dos ângulos dos galhos, os alunos concluíram que esta maneira seria apropriada, pois solucionaria o problema. Durante a construção do galho de árvore com os softwares de Geometria Dinâmica, os alunos tiveram algumas dificuldades. As dúvidas mais comuns eram sobre **como executar o “script” e a “macro”**, isto é, onde e quando deveriam “cliquear” para conseguirem o que queriam. Essas dificuldades já eram esperadas. Primeiro pelo próprio computador, uma vez que muitos alunos tinham trabalhado pouco com os softwares de Geometria Dinâmica. Segundo, porque aquele momento era ainda o terceiro episódio do curso. Por isso, essa atividade também tinha o caráter de adaptar os alunos ao uso dos softwares, de modo que nosso trabalho posterior pudesse fluir sem maiores problemas.

Outro problema era entender quais seriam os **objetos iniciais e finais no Cabri Géomètre II, e qual seria o objeto de dependência do iGeom**, isso para construirmos a macro ou script. Os alunos refletiram sobre os programas computacionais e discutiram conosco sobre qual elemento deveria ser “inicial ou dependente” para a construção do galho, para que esta construção obedecesse às características de um Fractal, ou seja, as partes serem auto-similares ao todo. Chegaram à conclusão de que os objetos “iniciais ou dependentes” deveriam ser o segmento vertical (maior), pois a partir desse segmento derivam-se os outros ramos da árvore. Após essa conclusão, prosseguimos nosso trabalho, construindo o galho da árvore com o iGeom.

Apresentamos a seguir maiores detalhes dessa construção, explicando como executar o script e outras funções do iGeom.

CONSTRUÇÃO DO GALHO DE ÁRVORE COM O SOFTWARE iGeom

- criar dois pontos A e B , selecionar o botão do ponto com o mouse. Para colocar o ponto na sua janela, mover o mouse, colocar o cursor onde desejar e clicar uma única vez; o ponto é criado.

- clicar em *scripts* (aparecerá *janela de rotinas*) , pois até o momento trabalhamos apenas no editor de desenhos do iGeom. A janela de rotina permite gravar toda as etapas sucessivas de uma construção, criadas a partir de um conjunto preliminar de objetos geométricos, como um programa.

-criar *segmento* s_0 a partir de A e B , depois, criar o *ponto médio* C do segmento AB (s_0) , selecionando o segmento ou os dois pontos. O ponto médio será travado e mover-se-á somente ao ajustar-se o comprimento do segmento.

-construir duas *circunferências* c_0 e c_1 . Clicar em A e arrastar o cursor afastando-se do centro. Quando alcançar o ponto C , liberar o botão do mouse para criar a circunferência c_0 . Repetir o processo, agora com o centro da circunferência em C e raio BC , obtendo a circunferência c_1 . Obteremos dois pontos de intersecção

-criar ponto em intersecção , clicar primeiro em uma circunferência e depois na outra (também funciona na forma: marque os dois objetos que desejar interceptar e depois "clique" neste botão) criando os pontos D e E .

-criar dois segmentos  s_1 e s_2 . Depois esconder objetos , marcar todos os objetos que desejar esconder $A, B, C, D, E, s_1, s_2, c_0$ e c_1 (rótulos).

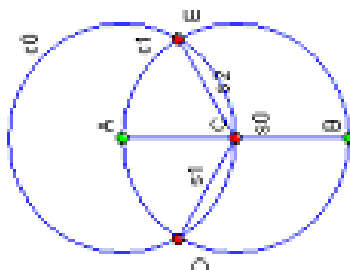


Figura 48

- após esta construção devemos ter gravada a rotina, a partir de um conjunto de objetos geométricos iniciais. Pretendendo que seja repetido este processo a um novo conjunto, isto é, com o mesmo tipo de objetos, basta selecionar cada par de pontos D,C ; A,C ; E,C e pressionar o botão *recorrência* , finalizando. Deve-se carregar a rotina, clicando no botão “script” , e a mesma estará pronta para ser executada.

- O botão  ativa a rotina. Para isso, é necessário criar e marcar os objetos iniciais. No nosso caso, criar dois pontos e selecioná-los e depois clicar no botão. Assim, poderemos repetir a mesma construção, sempre que necessário. Aparecerá uma janela de profundidade que é o nível de iteração (repetição) que irá ocorrer. Digite o número de profundidade ou iterada. Sugerimos que digite 1 e depois 2.

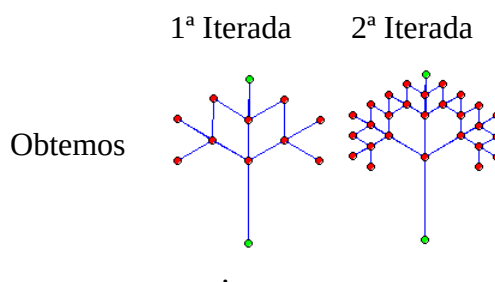
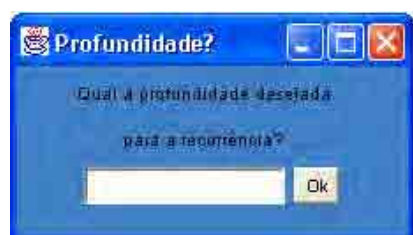


Figura 49

A janela azul que aparece acima perguntando. *Qual a profundidade desejada para a recorrência?* significa o número de iteração ou nível desejado para construção do Fractal.

CONSTRUÇÃO DO GALHO DE ÁRVORE COM O SOFTWARE CABRI GÉOMÈTRE II

- criar o segmento AB , selecionar o botão do ponto com o mouse. Para colocar o ponto na sua janela, mover o mouse, colocar o cursor onde desejar e clicar uma única vez, o ponto é criado. Em seguida, arrastar o mouse e criar um outro ponto. Dessa forma, cria-se o segmento.

-criar o *ponto médio* C do segmento AB , selecionando o segmento. O ponto médio será criado e mover-se-á somente ao ajustar-se o comprimento do segmento.

-construir duas *circunferências* . Clicar em A e arrastar o cursor afastando-se do centro.

Quando alcançar o ponto C , liberar o botão do mouse para criar a circunferência. Repetir o processo, agora com o centro da circunferência em C e raio BC , obtendo a circunferência. Assim, temos dois pontos de intersecção entre as circunferências.

-criar os pontos de intersecção . Clicar primeiro em uma circunferência, e depois na outra; os pontos D e E serão criados.

-criar três segmentos  CD , CE e AC . Ver Figura 64.

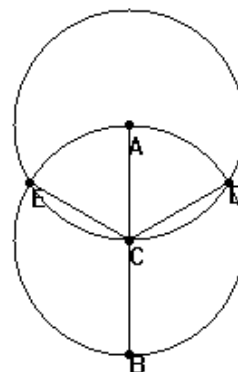


Figura 50

- marcar as circunferências  e esconder.

-após esta construção, devemos criar a “macro”, isto é, gravar as construções já realizadas, repetindo o processo a um novo conjunto, isto é, com o mesmo tipo de objetos, a partir de um novo conjunto de objetos.

-clicar em  e selecionar “objetos iniciais”. Em seguida, clicar no segmento AB . Clicar novamente em , selecionar “objetos finais” e clicar nos segmentos AC , CD e CE .

-devemos carregar a macro clicando no botão  e, em seguida, definir macro. Definida a macro, ela estará pronta para ser executada. Para isso, é necessário clicar em  e selecionar o nome do arquivo definido. Assim, poderemos repetir a mesma construção, sempre que necessário, clicando nos segmentos AC , CD e CE e depois nos novos segmentos criados.

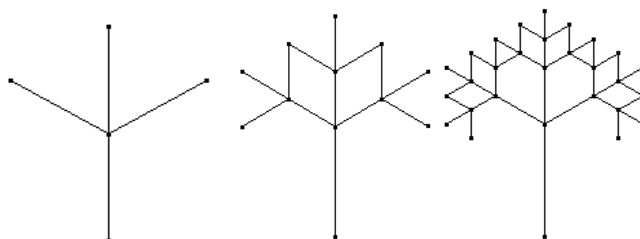


Figura 51

Após a construção da árvore com ambos os softwares, fizemos um questionamento: qual seria o número de segmentos em relação às iterações ? A construção do Fractal não concentra-se somente na representação plana do objeto na tela, mas sim na exploração dos conceitos geométricos implícitos em todo o processo de construção.

Como os alunos construíram o galho de árvore através da régua e compasso, e também por meio dos softwares de Geometria Dinâmica, foi possível aos alunos trabalharem com conceitos geométricos sem a excessiva axiomatização das fórmulas, dos algoritmos “acabados” e, ainda, sem a grande abstração da Geometria, apresentada freqüentemente no ensino tradicional. Desse modo, assinala-se que os professores podem utilizar, também, o ambiente computacional visando à exploração dos conceitos geométricos e, ainda, explorar com seus alunos conceitos de Geometria Fractal, seqüência, limite, entre outros conteúdos relacionados à Geometria Euclidiana.

Com relação à resposta da questão sobre a evolução e relação do número de segmentos e iterações, temos que, observando a imagem gerada pelo computador, os alunos puderam contar quantos segmentos haviam na primeira iterada e nas subseqüentes, concluindo que o número de segmentos crescia conforme registrado na tabela abaixo, ao tempo em que fizeram deduções sobre a progressão do número de segmentos, as quais também são transcritas em seguida:

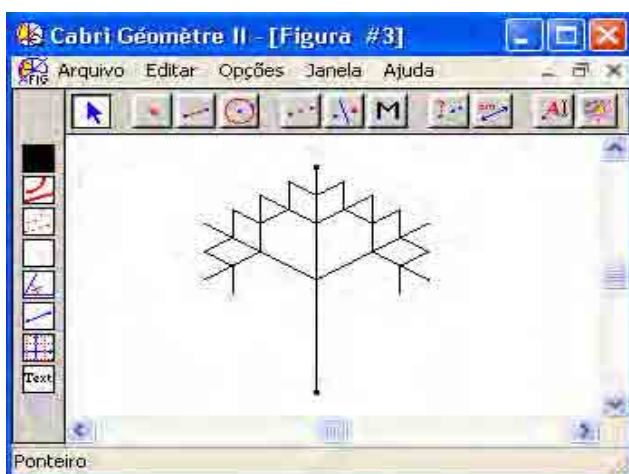


Figura 52

Iteração	Número de segmento	
1ª	1	3^0
2ª	3	3^1
3ª	9	3^2
4ª	27	3^3
...	...	

O que podemos dizer sobre o número de segmentos em relação às iterações?

O n.º de segmentos se comportam numa progressão geométrica de razão 3.

O nº de segmentos se comportam numa progressão geométrica de razão 3.

Que os segmentos se comportam com a característica de uma progressão geométrica, sempre se multiplica por 3 neste exemplo.

Que os segmentos se comportam com a característica de uma progressão geométrica; sempre se multiplica por 3 neste exemplo.

O número de segmentos em relação as iterações são PG nº. = 3^{n-1} segmento

O número de segmentos em relação as iterações são PG nº. = 3^{n-1} segmento

O número de segmentos é igual a 3^{n-1} sendo n o número de iterações, esse número se comporta como uma PG de razão 3.

O número de segmento é igual a 3^{n-1} sendo n o numero de interada, esse número se comporta como uma PG de razão 3.

Através dos registros efetuados podemos afirmar, interpretando as idéias de Miskulin (1999), que o computador foi um mediador do processo de aprendizagem, pois os alunos concluíram, através da imagem gerada pelo computador, que a seqüência do número de segmentos em relação a cada figura, em função do número de iterações, caracterizava-se como uma Progressão Geométrica (P. G) de razão 3, além de notarem, também, que na n -ésima iterada teriam 3^{n-1} , sendo n o número de iteração. Isso nos leva a inferir que os alunos aprenderam o conceito de seqüência geométrica.

Após isso, questionamos os alunos sobre a seqüência ser limitada e convergente. Esse questionamento tinha a finalidade de levar os alunos a refletirem se toda seqüência limitada é convergente e se toda seqüência convergente é limitada, pois iríamos introduzir a idéia de um teorema da análise matemática, discutido a seguir. Após os alunos refletirem, concluíram que para uma seqüência ser limitada ela precisava ter limite e ser convergente, significando tender a um número. Perceberam, também, que

uma seqüência só é convergente se existir um limite. Ainda, para fomentar a discussão e aumentar o raciocínio, perguntamos: Será que existe uma seqüência que seja limitada e não seja convergente?

Alguns alunos responderam imediatamente que não; outros, porém, responderam afirmativamente. Então, perguntamos qual seria essa seqüência? Pensaram um pouco e apontaram ser a $\left(\frac{3}{4}\right)^n$. Porém, logo em seguida perceberam que a resposta não estava correta. Prosseguindo, indagamos: o que uma seqüência precisa ter para ser limitada? Em resposta os alunos afirmaram que para ser limitada a seqüência precisava ser restringida, para não variar.

Ainda restava saber se tal “seqüência limitada era convergente”. Apesar de os alunos já terem estudado seqüência em anos anteriores, eles afirmavam que nunca haviam pensado nisso. Intencionalmente não fizemos a demonstração do teorema que diz: *Toda seqüência monótona e limitada é convergente*, porque pretendíamos que fossem progredindo em suas reflexões, para chegarem às conclusões corretas.

Assim, solicitamos aos pares que pensassem em uma seqüência que não apresentasse grande alteração. Após 15 minutos, para nossa surpresa, uma dupla respondeu: “a seqüência do tipo $(-1)^n$ é limitada e não converge. Ela não é do tipo $(-1, 1, -1, 1, \dots)$?”.

Os alunos mostravam-se ansiosos por saber se a resposta estava correta. Então, esclarecemos que a seqüência do tipo $(-1)^n$ é limitada, porém não converge, já que ser “limitada” não é condição suficiente para uma seqüência convergir. Ser limitada é uma condição “necessária”, mas não é suficiente para a seqüência convergir. Para ilustrar essa explicação apresentamos, na lousa, duas seqüências do tipo:

a) $x_n = \frac{1}{2} \left(1 + (-1)^{n+1} \right)$

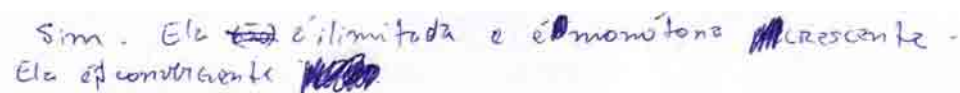
b) $x_n = \sin^2 \left(n \frac{\pi}{2} \right)$

Essas duas seqüências são do tipo $(1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ chamadas de *não monótona, limitada e não convergente*. Com esses dois exemplos, os alunos compreenderam claramente que ser “limitada” não é condição suficiente para convergir. Essa afirmação se justifica ao considerarmos as próximas transcrições, referentes às respostas ao

problema proposto. Tal questionamento propiciou a construção do conceito de seqüência convergente e limitada, conceito esse importante na análise matemática.

Retornando para a situação problema, os alunos falavam que a seqüência formada pelo número de segmentos (galhos da árvore) era monótona crescente, além de notarem que à medida que o número de iterações aproximava-se do infinito, a sucessão tendia para o infinito.

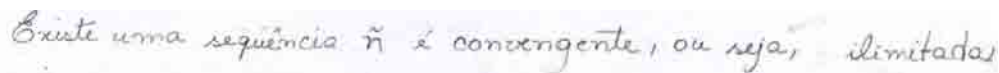
Assim sendo, perceberam que os galhos da árvore dependiam do número de iterações, concluindo que se tivéssemos infinitas delas, teríamos infinitos galhos. Porém, somente uma dupla respondeu que a seqüência era limitada convergente. Acreditamos que tal resposta se deveu ao fato de pensarem que a seqüência convergia para o infinito, supondo que o infinito fosse um número.



Sim. Ela ~~é~~ é ilimitada e é monótona crescente. Ela é convergente

Sim. Ela é ilimitada e é monótona crescente.

Ela é ã convergente.



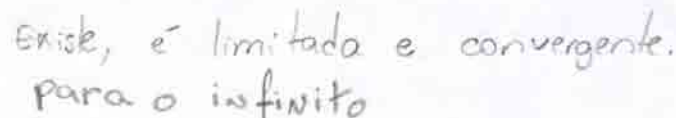
Existe uma seqüência ã é convergente, ou seja, ilimitada

Existe uma seqüência ã é convergente, ou seja ilimitada.



Existe uma seqüência pois é uma PG, é ilimitada e não converge

Existe uma seqüência pois é uma PG; é ilimitada e não convergente.



Existe, é limitada e convergente.
para o infinito

Existe é limitada e convergente para o infinito

Nesta ocasião, pedimos para os alunos estudarem o comprimento dos segmentos do Fractal, pois queríamos introduzir a noção de limite.

Os alunos perceberam, rapidamente, que os segmentos obtidos têm tamanho duas vezes menor do que o menor da iteração anterior; isto é, a medida dos galhos

diminuía $\frac{1}{2}$ em cada iteração. Assim, concluíram que a medida dos galhos tende para zero, o que os induziu a pensar na idéia de limite.

Dessa forma, falamos para os alunos considerarem o segmento maior igual a uma unidade de medida, para, assim, perceberem que os segmentos teriam na n -ésima iteração $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, sendo n o número de iteração, caracterizando-se numa Progressão Geométrica (P.G) de razão $\frac{1}{2}$. Abaixo, as conclusões apresentadas:

O comprimento dos segmentos vai se dividindo ao meio. Formará uma PG de razão $\frac{1}{2}$.

O comprimento dos segmentos vai se dividindo ao meio. Formará uma PG de razão $\frac{1}{2}$

Multiplica-se por $\frac{1}{2}$ a medida do segmento p/ se obter o comprimento do próximo segmento.

Multiplica-se por $\frac{1}{2}$ a medida do segmento p/ se obter o comprimento do próximo segmento.

O comprimento dos segmentos decrescem em progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

O comprimento dos segmentos decrescem em progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

Os alunos resolveram este problema buscando soluções próprias, criando estratégias, levantando hipóteses de possíveis seqüências e testando-as matematicamente. Avançando, perguntamos sobre o que aconteceria com a soma dos comprimentos dos segmentos da seqüência com n iteração.

Após algumas análises, os alunos afirmaram que o comprimento total do fractal era $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$, com razão $\frac{3}{2}$ caracterizando-se numa Progressão Geométrica. Isso se verificou nas respostas abaixo transcritas:

j. Faça um estudo do comprimento total da seqüência com n iterações.

$$\left(3^{n-1}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$(3^{n-1}) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

Nº de seg. 3^{n-1} $\cdot$ *comp. seg.* $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

$$3^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

É uma progressão geométrica de razão $\frac{3}{2}$.

É uma progressão geométrica de razão $\frac{3}{2}$

Podemos afirmar que o comprimento total da sequência com n iterações é uma PG de razão $\frac{3}{2}$.

Podemos afirmar que o comprimento total da sequência²⁷ com n iterações é uma PG de razão $\frac{3}{2}$

$3^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$
↪ nº de segmentos *↪ comprimento dos segmentos*

$3^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$
 $\downarrow$ $\downarrow$
 nº de segmento $\hookrightarrow$ comprimento das segmentos

É uma progressão geométrica de razão $\frac{3}{2}$.

É um progressão geométrica de razão $\frac{3}{2}$

²⁷ Cabe ressaltar que ao utilizar o termo *comprimento da sequência*, os alunos estavam se referindo ao comprimento dos segmentos.

Os alunos relataram que a soma dos comprimentos dos segmentos da seqüência com n iteração era igual a seqüência anterior, somada ao número de novos segmentos 3^{n-1} , multiplicada pelo comprimento deste segmento $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; logo, chegaram ao comprimento total $(3^{n-1}) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, ou seja $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$.

Com esses resultados, percebemos que o potencial da Geometria Dinâmica, por seu aspecto interativo, possibilitou aos alunos criarem suas próprias estratégias de resolução de problemas, desenvolverem sua criatividade, ao mesmo tempo em que se envolveram em um processo de construção de conceitos matemáticos.

Para que isto ocorra, segundo Vygotsky (1991) é importante que o professor atue exatamente na distância que há:

entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente dos problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes. p. 112).

Muitos alunos comentaram que nunca haviam trabalhado com seqüência de outra maneira, ou envolvendo outra parte da matemática (no caso geometria), a não ser naquelas listas de exercícios repetitivos, quando era solicitado que fosse determinado este ou aquele termo, sabendo isso ou aquilo, ou ainda, dados os termos, determinar a razão, etc.

Também acharam, muito interessante encontrarmos Progressões Geométricas ao analisarmos um determinado galho de árvore.

A linguagem da tecnologia informática possibilita uma “nova” maneira do aluno aprender “novas” habilidades, de assimilar “novos” conceitos, de avaliar “novas” situações, de lidar com o inesperado, exercitando a criatividade.

Para Miskulin (1999), o computador abre a oportunidade que permite enriquecer o ambiente de aprendizagem, e apresenta-se como um meio de pensar e ver o mundo, utilizando-se da imagem que pode gerar. Esta imagem gerada pelo computador envolve um pensar dinâmico, onde tempo, velocidade e movimento passam a ser os novos aliados no processo de aprendizagem, permitindo que professores e alunos desenvolveram seu pensamento de forma lógica e crítica e sua criatividade através do despertar da curiosidade. São novas percepções e estímulos, próprios desta linguagem

de signos, símbolos e imagens que o computador traz, que permitem ao aluno desenvolver habilidades.

Em um novo episódio, após orientarmos os alunos sobre a construção da atividade, os deixamos livres para que explorassem o iGeom e o Cabri Géomètre II, já que possuíam um conhecimento razoável dos softwares. Pedimos apenas que anotassem todos os experimentos nas fichas, para nossa análise à posteriori.

1.4 QUARTO EPISÓDIO

No quarto episódio, a atividade tinha o objetivo de explorar conceitos que já foram abordados em situações problema anteriores, tais como: Dimensão Fractal, Ponto Médio, Ângulo, Seqüência, Seqüência Monótona e Convergência, pois esses conceitos estavam implícitos no desenvolvimento da atividade. Como já mencionado na atividade anterior, nossa finalidade foi relacionar imagens que faziam parte do dia-a-dia dos alunos, com problemas que pudessem ser significativos para eles, a fim de provocar um maior envolvimento dos alunos, levando-os a investigarem a situação problema. Assim, apresentamos a foto de um relâmpago (Figura 67), que apresenta características de Fractal.

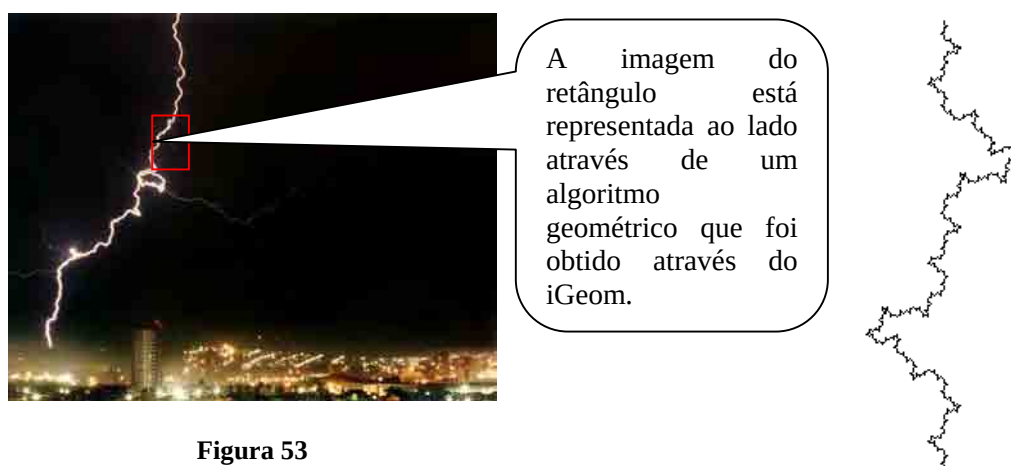


Figura 53

Vale ressaltar que as potencialidades do ambiente tecnológico na exploração de conceitos geométricos, no processo de transformação de imagens naturais em formas geométricas, são uma característica inerente ao iGeom e ao Cabri Géomètre II, pois

estes possibilitam que as construções geométricas, através do script e macro, sejam rápidas e agradáveis.

Após a observação feita pelos alunos, da foto acima, pedimos que construíssem o Fractal através do iGeom. Seguiram os seguintes passos para essa construção.

- criar o segmento AB .
- clicar em *scripts* (aparecerá *janela de rotinas*) .
- criar uma reta perpendicular passando por A .
- construir uma circunferência  com centro em A e ponto C de intersecção  com a reta perpendicular. Repetir por cinco vezes o processo, (1) com centro da circunferência em C e raio AC , obtendo a outra circunferência com ponto D de intersecção  com a reta perpendicular (2) centro da circunferência em D e raio CD , obtendo a outra circunferência com ponto E de intersecção  com a reta perpendicular (3) centro da circunferência em E e raio DE , obtendo a outra circunferência com ponto F de intersecção  com a reta perpendicular (4) centro da circunferência em F e raio EF , obtendo a outra circunferência com ponto H de intersecção  com a reta perpendicular (5) centro da circunferência em H e raio FH , obtendo a outra circunferência com ponto  de intersecção com a reta perpendicular. Assim, formam-se cinco pontos (C,D,E,F e H) sobre a reta perpendicular . Ver Figura 68.

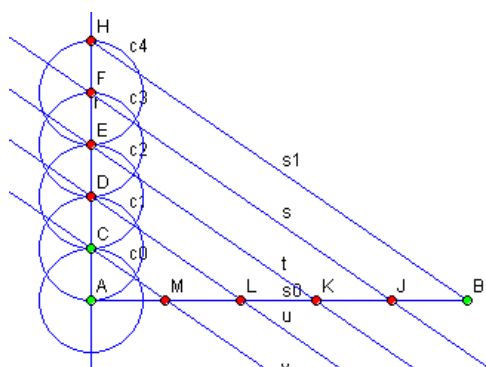


Figura 54

- criar um segmento  HB .
- criar uma reta paralela  ao segmento HB passando pelo ponto F . Criar o ponto J de intersecção  com o segmento AB . Repetir o processo, criando uma reta paralela  ao segmento FJ passando por E . Criar o ponto K de intersecção  com segmento AB . Repetir novamente o processo, e criar uma reta paralela  ao segmento EK passando por D . Criar o ponto L de intersecção  com segmento AB . Repetir ainda mais uma vez o processo, e criar uma reta paralela  ao segmento DL passando por C . Criar o ponto M de intersecção  com segmento AB . Assim, formam-se cinco pontos sobre a reta perpendicular.
- depois, esconder objetos , marcar os objetos deixando somente os pontos A, M, L, K, J e B .
- criar três segmentos AM , LK , e JB .
- construir uma circunferência . Clicar em M e arrastar o cursor até o ponto A , isto é, AM . Repetir o processo, criando mais três circunferências  de centro L e raio LM , de centro K e raio KL e a de centro J e raio JK .
- Criar o ponto N e O de intersecção  entre as circunferências, como mostra a Figura 69.

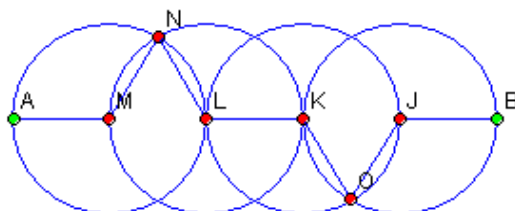


Figura 55

- depois esconder objetos , marcar os objetos deixando somente os segmentos AM, MN, NL, LK, KO, OJ e JB .

- após esta construção devemos ter gravada a rotina, a partir de um conjunto de objetos geométricos iniciais. Pretendendo que seja repetido este processo a um novo conjunto, isto é, com o mesmo tipo de objetos, basta selecionar nesta seqüência o seguinte:

- o ponto A , segmento AM e o ponto N e pressionar o botão *recorrência* .
 - o ponto N , segmento NL e o ponto L e pressionar o botão *recorrência* .
 - o ponto L , segmento LK e o ponto K e pressionar o botão *recorrência* .
 - o ponto K , segmento KO e o ponto O e pressionar o botão *recorrência* .
 - o ponto O , segmento OJ e o ponto J e pressionar o botão *recorrência* .
 - o ponto J , segmento JB e o ponto B e pressionar o botão *recorrência* .
- finalizando.

Deve-se carregar a rotina clicando no botão “script” , e a mesma estará pronta para ser executada.

- após esta construção devemos ter gravada a rotina, a partir de um conjunto de objetos geométricos iniciais.

-pretendendo que seja repetido este processo a um novo conjunto, devemos criar um novo segmento e selecionar *ponto segmento ponto* e depois clicar no botão  ativando a rotina. Assim, poderemos repetir a mesma construção, sempre que necessário. Aparecerá uma janela de profundidade, que é o nível de iteração (repetição) que irá ocorrer. Digite o número de profundidade ou iterada. Sugerimos que digite 0, depois 1 e 2.

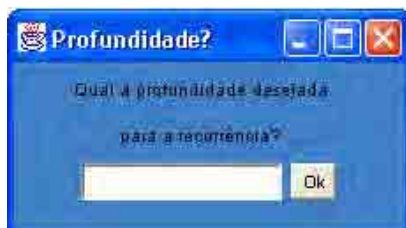
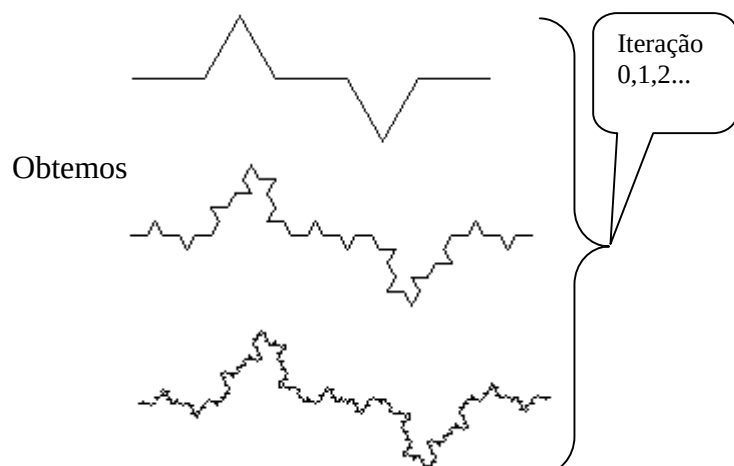


Figura 56



Em prosseguimento, a questão sobre o número de lados, isto é, como variava o número de lados com as iterações, os alunos não encontraram dificuldades para responder esta questão, e as respostas se assemelharam às duas mostradas abaixo.

Iteração	Número de lados
1ª	6
2ª	$6 \cdot 2$
3ª	$42 \cdot 4 = 168$
4ª	$252 \cdot 4 = 1008$
...	...

$$6 \cdot 2^{n-1}$$

Iteração	Número de lados
1ª	6
2ª	42
3ª	252
4ª	...
...	...

$$6 \cdot 7^{n-1}$$

A cada nova iteração, cada lado dá origem a 6 novos lados.

Quanto à análise do número de segmentos em relação às iterações, as respostas obtidas foram:

O número de segmentos aumenta e seu tamanho diminui conforme as iterações tendem ao infinito.

O número de segmentos aumenta e seu tamanho diminui conforme as iterações tendem ao infinito.

Quanto maior o número de iteração menor o tamanho do segmento.

Quanto maior o número de iteração menor o tamanho do segmento.

Quanto maior o número de iterações, menor será o comprimento do segmento. Tende a zero o comprimento destes segmentos conforme aumenta-se as iterações, aumenta-se o número de segmentos.

Quanto maior o número de iterações, menor será o comprimento do segmento. Tende a zero o comprimento destes segmentos conforme aumenta-se as iterações, aumenta-se o número de segmentos.

Através dos relatos anteriores pudemos observar que os alunos perceberam que o número de lados de cada figura aumentava em função do número de iterações; isso leva à idéia de seqüência crescente. Para melhor entendermos o que os alunos estavam pensando, perguntamos: Será que existe uma seqüência? Se existir, esta é limitada ou não? É convergente? Essas perguntas foram feitas para que os alunos percebessem algumas características da seqüência.

Ressaltamos que fazíamos tais questionamentos para tentarmos atuar na zona de desenvolvimento proximal.

Após os alunos dialogarem entre si, chegaram às conclusões listadas abaixo:

Sim, existe uma sequência de P.G com razão 7. A sequência não é limitada, nem convergente.

Sim, existe uma seqüência de P.G com razão 7. A seqüência não é limitada, nem convergente

Sim, é ilimitada, monotona, crescente. Não é convergente

Sim, é ilimitada, monótona, crescente. Não convergente

Sim, é uma PG (progressão geométrica) de razão 7 ILIMITADA. Não é convergente, não tende a um número

Sim, é uma PG (progressão geométrica) de razão 7 ilimitada não é convergente, não tende a um número

Das respostas encontradas, podemos deduzir que os alunos perceberam que o número de lados de cada figura, em função do número de iterações, caracterizava uma progressão geométrica (PG) que pode ser definida por um termo geral $L_n = 6 \cdot 7^{n-1}$.

Foi possível perceber, também, que entenderam que a seqüência era monótona crescente, e que à medida que o número de iteração aproximava-se do infinito a sucessão tendia para o infinito. Dessa forma, concluíram que a seqüência era ilimitada não convergente. Isso nos deixou satisfeitos, pois o objetivo da atividade foi atingido. Quando questionamos, por exemplo, quantos lados tinha a curva na décima iteração, perceberam que a seqüência tendia para o infinito, e a resposta era quase imediata, e foi assim grafada:

$$6 \cdot 7^9 \quad 6 \cdot 7^9 \quad 6 \times 7^{10-1} = \boxed{6 \times 7^9}$$

A pergunta sobre o que acontecia com o comprimento dos lados da curva em relação às iterações foi apressadamente respondida porque durante a construção do

Fractal os alunos já tinham percebido que a medida do segmento era dividida em 5 partes. Logo, concluíram conforme anotado nas tabelas abaixo:

Iteração	Medida dos lados
1ª	$\frac{1}{5}$
2ª	$(\frac{1}{5})^2$
3ª	$(\frac{1}{5})^3$
4ª	$(\frac{1}{5})^4$
...	...

Iteração	Medida dos lados
1ª	$\frac{1}{5}$
2ª	$\frac{1}{25}$

$$(\frac{1}{5})^{n-1}$$

Quanto ao que poder-se-ia dizer sobre o número de lados em relação às iterações, abaixo temos exemplos de respostas dadas:

a cada iteração o segmento se divide em 5 e quanto mais as iterações aumentam as medidas de cada lado diminui tendendo a zero.

A cada iteração o segmento se divide em 5 e quando mais as iterações aumentam as medidas de cada lado diminui tendendo a zero.

Cada segmento será subdividido em 5 partes

Cada segmento será subdividido em 5 partes

Que a cada iteração, cada lado é dividido em 5 novas partes (lados). A cada iteração ocorrida, a medida dos lados diminui.

Que a cada iteração, cada lado é dividido em 5 novas partes (lados). A cada iteração ocorrida, a medida dos lados diminui.

Pelas respostas apresentadas, acreditamos que os alunos perceberam que a medida dos lados de cada figura em função das iterações era uma PG e podia ser escrita da seguinte forma: $M_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$. Eles compararam com a sequência anterior e observaram que esta sequência era monótona decrescente, e que quando o número de

iteração se aproximava do infinito a sucessão tendia para 0. Perguntamos: se a seqüência $\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ era monótona, para onde tendia a medida de cada lado da curva?

Os alunos responderam esta questão simplesmente observando as imagens ou analisando a seqüência, concluindo que era monótona, e que a medida de cada lado da curva tendia para zero.

Sim Sim Sim, é monótona
zero

Aqui, fazemos um parêntese para registrar um momento interessante: os alunos analisaram as seqüências anteriores e, discutindo sobre os conceitos geométricos das figuras, concluíram que nos Fractais geométricos sempre irão ter progressões geométricas. Nesse momento, interrompemos e lançamos a questão: será que sempre teremos PGs?.

Por volta de 70% dos alunos responderam que sim. Acreditamos que esta conclusão se deveu ao fato de que, até o momento, não haviam tido experiência com outros tipos de Fractais. Então, informamos que este questionamento seria respondido no decorrer do curso.

Em seguida, questionamos como variava o comprimento da curva em função do número de iterações. Observando a soma dos comprimentos dos segmentos da seqüência com n iterações, o que poderíamos afirmar?

Os alunos discutiram as indagações e pouco tempo depois uma dupla pediu licença para apresentar o desenvolvimento abaixo:

Considerando o segmento inicial igual a 1, como ele foi dividido em 5 partes iguais temos $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 1$.

Na 1ª iterada teremos um segmento maior que 1, pois dividimos o segmento em cinco partes; tiramos 2 e acrescentamos 4, cada uma com $\frac{1}{5}$. Assim, teremos:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{7}{5} = 1,4$$

Para calcularmos o comprimento, precisamos do número total de segmentos e o tamanho de cada segmento em função da iteração. O número de segmentos já temos, que é $6 \cdot 7^{n-1}$, é só multiplicar pelo tamanho dos segmentos $\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$; assim, teremos:

$$6 \cdot 7^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \left(\frac{7}{5}\right)^{n-1} \cdot 6$$

$$6 \cdot 7^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 6 \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^{n-1}$$

$$6 \cdot 7^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \left(\frac{7}{5}\right)^{n-1} \cdot 6$$

$$6 \cdot 7^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 6 \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^{n-1}$$

Não é?

E como as duas seqüências anteriores são PGs, essa também será uma PG.

Algumas das outras respostas foram:

Que a seqüência continua sendo uma P.G, agora no caso com razão 7/5.

Que a seqüência continua sendo uma P.G, agora no caso co, razão 7/5.

Continua sendo uma P.G.

Continua sendo uma P.G.

Continua sendo uma PG (progressão geométrica), de razão $\frac{7}{5}$.

Continua sendo uma PG (progressão geométrica), de razão $\frac{7}{5}$.

Ainda perceberam que a seqüência não converge, pois esta cresce indefinidamente. Observe:

não converge
não convergente

Ela não converge

Ela não converge

Não converge a seqüência anterior

Não converge a seqüência anterior

Em seguida, perguntamos para os alunos: qual a dimensão do segmento inicial de uma unidade de medida?

Os alunos responderam: “um”. Então, advertimos: mas na n -ésima iterada o segmento parece uma curva. Após essa consideração, os alunos pensaram um pouco e depois responderam: “Ah então deve ter dimensão entre um e dois, pois não é mais segmento nem cobre o plano, e como o segmento foi dividido em 5 partes, temos o fator de contração igual $\frac{1}{5}$, tendo o número de partes igual a 7”.

Traduzindo para uma linguagem matemática, temos:

$$D = \frac{-\log N}{\log \frac{1}{m}} = \frac{-\log 7}{\log \frac{1}{5}} = \frac{-\log 7}{\log 1 - \log 5} = \frac{-\log 7}{-\log 5} = \frac{\log 7}{\log 5} = 3$$

Qual a dimensão desse fractal:

$$D = \frac{-\text{Log}}{\log \frac{1}{m}} = \frac{-\text{Log } 7}{\log \frac{1}{5}} = \frac{-\text{Log } 7}{\log 1 - \log 5} = \frac{-\text{Log } 7}{-\log 5} = \frac{\text{Log } 7}{\log 5} \approx 1.2$$

$$D = \frac{-\log N}{\log \frac{1}{m}} = \frac{-\log 7}{\log \frac{1}{5}} = \frac{-\log 7}{\log 1 - \log 5} = \frac{\log 7}{\log 5} \approx \frac{0.895}{0.698} \approx 1.2$$

A exploração dessa e das outras atividades trazem consigo a aplicação de conceitos que possibilitam reavaliações e reajustes de estratégias, propiciando, aos alunos dessa maneira, uma possível compreensão, dos conceitos matemáticos envolvidos. Segundo Miskulin (1999), os softwares de Geometria Dinâmica (iGeom e o Cabri Géomètre II) contribuem para a construção do conhecimento. Entretanto, mesmo que eles possuam uma interface fácil e agradável, eles não têm o poder de construir o conhecimento, pois a construção do conhecimento passa pela evolução cultural do ambiente em que vive um indivíduo, compartilhando com seus pares atividades de criar e recriar coisas.

De acordo com as idéias de Vygotsky (1991), o computador é um instrumento que potencializa esses processos, em razão das condições de interatividade que ele permite e pela possibilidade de manipulação rápida das figuras, permitindo visualizar as figuras geométricas de vários ângulos, gravar macros, medir distâncias e efetuar diversas construções em tempo real, etc. Mas, para conseguir atingir a meta de construir conhecimento, ele precisa ser modelado por princípios que contemplem como se compõem e como estão distribuídas as regras de uma determinada comunidade, como agem seus indivíduos, e quais são os papéis por eles

representados, para entender se o que é concebido como aprendizado por uma determinada comunidade está condizente com aquilo que está sendo disponibilizado pelo computador. Deve-se conhecer também a forma como estão disponíveis as ferramentas que proporcionam esta nova interface de aprendizado, juntamente com a visão de como os indivíduos de tal comunidade interagem na atividade que objetiva o aprendizado.

Dessa forma, nossa abordagem pretendeu estudar e descrever os procedimentos dos alunos, cujas elaborações se efetuaram em contextos práticos e comuns. Destacamos a interação entre o aluno-computador, ou seja, os encadeamentos, os cortes de ações, a atribuição de significação às tarefas, as escolhas dos instrumentos de conhecimentos postos em ação e o controle e a pertinência das ações, a fim de contribuir para a resolução do problema.

1.5 QUINTO EPISÓDIO

Nesse episódio, apresentamos a atividade e pedimos para observarem o Fractal abaixo, que obedece às regras algorítmicas, ou seja, pode ser analisado e traduzido pela linguagem Fractal.

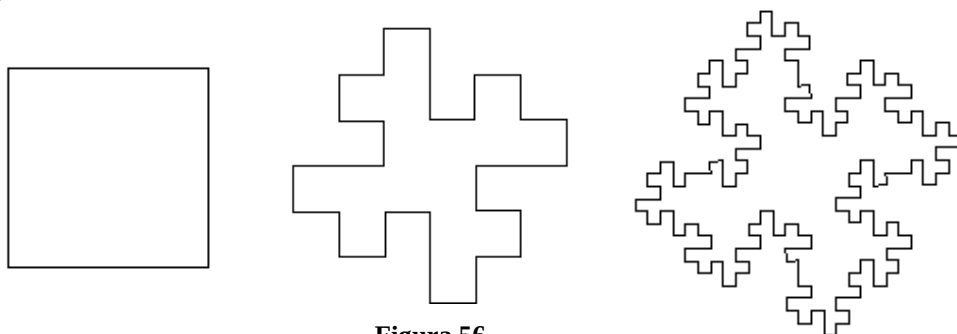


Figura 56

Em seguida, pedimos para os alunos construírem o Fractal acima com régua e compasso, ao que replicaram:

“Ah professor, isso vai demorar muito, não dá”

“Professor, a gente sabe que até dá para construir com régua e compasso, mas não podemos construir direto nos softwares?”.

Considerando essas falas, podemos confirmar a percepção dos alunos da necessidade da utilização de um software de GD na construção dos Fractais. Assim, pedimos para eles construírem o Fractal com os softwares de Geometria Dinâmica (Cabri Géomètre II e iGeom).

A estratégia utilizada pelos alunos para a construção do Fractal através dos softwares foi correta do ponto de vista matemático, e as representações obtidas expressaram fielmente as características desse Fractal.

Os procedimentos computacionais utilizados pelos alunos colaboraram para o desenvolvimento de conceitos geométricos, o que acreditamos ser para os professores uma “nova” forma de se ensinar Geometria.

Após a construção, pedimos para os alunos investigarem a variação do número de segmentos com as iterações. Os alunos chegaram à conclusão de que, em cada nova iteração, cada lado dava origem a 4 novos lados. Devido à similaridade das respostas, apresentamos, abaixo, apenas duas delas:

Iteração	Número de segmentos
1ª	4
2ª	$4 \cdot 8 = 32$
3ª	$4 \cdot 8^2$
4ª	$4 \cdot 8^3$
...	

Iteração	Número de segmentos
1ª	4
2ª	32
3ª	256
4ª	2048
...	

$$4 \cdot 8^{n-1}$$

Os alunos perceberam que o número de lados de cada figura, em função do número de iterações, caracteriza uma progressão geométrica (P.G) que pode ser definida por um termo geral.

$$L_n = 4 \cdot 8^{n-1}$$

Isso porque diziam que:

O número de segmentos aumenta na razão de 8.

O número de segmentos aumenta na razão de 8.

Aumenta com uma razão de 8.

Aumenta com uma razão de 8.

Em seguida, perguntamos: Será que existe uma seqüência? Se existir, esta é limitada ou não? É convergente? Essas perguntas foram feitas para que os alunos percebessem que existem algumas características na seqüência. Após dialogarem entre si, os alunos chegaram à seguinte conclusão:

*Sim, existe uma seqüência, mas não é limitada
não é convergente*

Sim, existe uma seqüência, mas não é limitada não é convergente

*Sim, a seqüência é uma P.G. não está limitada nem,
é convergente, pois ela só tende a crescer.*

Sim, a seqüência é uma P.G. não limitada nem é convergente, pois ela só tende a crescer.

Esta questão foi somente para reforçar os conceitos obtidos nas atividades anteriores. Observamos, então, que os alunos não tinham mais, aparentemente, dificuldades em analisar as seqüências e facilmente concluíram se estas eram convergentes, limitadas, crescentes, decrescentes, etc.

Em continuação, indagamos aos alunos sobre o comprimento dos segmentos da Ilha de Minkowski com as iterações. A resposta foi rápida, pois como já mencionado, os alunos pareciam não mais ter dificuldade de observar uma figura Fractal e perceber o que estava acontecendo nela. Logo, obtivemos respostas como as abaixo:

Iteração	Medida dos segmentos
1ª	$(\frac{1}{4})^0$ ou 1
2ª	$(\frac{1}{4})^1$
3ª	$(\frac{1}{4})^2$
4ª	$(\frac{1}{4})^3$
...	...

Iteração	Medida dos segmentos
1ª	$\frac{1}{4}^0$
2ª	$\frac{1}{4}^1$
3ª	$\frac{1}{4}^2$
4ª	$\frac{1}{4}^3$
...	...

Os alunos notaram que os lados de cada nova figura eram 4 vezes menores do que os da figura anterior. Assim, foi possível aos alunos perceberem que a medida dos lados de cada figura, em função das iterações, era uma PG, que pode ser escrita da seguinte forma:

Diminuem a uma razão de $\frac{1}{4}$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

Diminuem a uma razão de $\frac{1}{4}$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

Tende a zero, pois diminui a razão de $\frac{1}{4}$.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

Tende a zero, pois diminui a razão de $\frac{1}{4}$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

Observando as imagens ou analisando a seqüência, os alunos notaram que a medida de cada lado da curva tendia para zero. Também perceberam que a seqüência era monótona decrescente, e que quando o número de iteração se aproximava do infinito, a sucessão tendia para 0. Esta observação ressalta o conceito de monotocidade abordado nas atividades anteriores.

Verifique se a seqüência do item anterior é monótona.

Sim

Verifique se a seqüência do item anterior é monótona.

É uma seqüência monótona (se repete sempre a mesma coisa)

Após a introdução do conceito de monotocidade, perguntamos aos alunos sobre o perímetro da ilha. Os alunos responderam rapidamente que a seqüência será $P_n = (4 \cdot 8^{n-1}) \cdot 4^{n-1}$, pois já tinham percebido, nas atividades anteriores, que para encontrar o perímetro do Fractal bastava multiplicar o número de segmentos pelo tamanho dos segmentos, ou seja:

$$4 \times 8^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 4 \times \left(\frac{8}{4}\right)^{n-1} = 4 \times (2)^{n-1}$$

$$\boxed{\text{Nº de lados}} \times \boxed{\text{comprimento dos lados}}$$

$$(4 \cdot 8^{n-1}) \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \boxed{4 \cdot (2)^{n-1}}$$

Em seguida, questionamos se os alunos sabiam relacionar o perímetro do Fractal com a sua área com n iterações, e qual a conclusão disso. Os alunos ficaram pensativos. Para responder a este questionamento, analisaram alguns dos procedimentos por eles já utilizados e concluíram (após 15 minutos, aproximadamente) que:

O perímetro aumenta, embora o comprimento dos segmentos diminua a cada iteração.

O perímetro aumenta, embora o comprimento dos segmentos diminua a cada iteração.

O perímetro vai crescendo, tende ao infinito.

O perímetro vai crescendo, tende ao infinito.

Embora tivessem percebido que o perímetro aumentava infinitamente, eles não conseguiram relacionar o perímetro com a área. Para mediarmos o desenvolvimento dessa questão, pedimos para os alunos construírem a 2ª e a 3ª iterada da ilha Minkowski e indagamos sobre o número de novos quadrados existentes em cada iteração, a área total dos novos quadrados e a área da ilha. Assim, pedimo-lhes que considerassem a área do primeiro quadrado igual a uma unidade de medida. Em seguida, questionamos sobre o que acontecia com a área da ilha de Minkowski. Apresentamos, abaixo, as respostas dessas questões:

1ª iterada

- Surgem quantos novos quadrados.

4

- Qual a área total da ilha?

$$1 + \frac{1}{4}$$

1ª iterada

- Surgem quantos novos quadrados.

→ 4 novos quadrados

- Qual a área total da ilha?

$$1 + \frac{1}{4} = \frac{4+1}{4} = \frac{5}{4}$$

2ª iterada

- Quantos novos quadrados temos?

$$4 \times 3 = 12 \rightarrow \text{novos quadrados}$$

2ª iterada

- Quantos novos quadrados temos?

12

Qual a área de cada novo quadrado? Qual a área de cada novo quadrado?

$$A = \left(\frac{1}{16} \times \frac{1}{16} \right) = \left(\frac{1}{16} \right)^2$$

$$\frac{1}{16^2}$$

• Qual a área total da ilha?

$$A_{T1} = 1 + \frac{1}{4} + 12 \cdot \left(\frac{1}{16} \right)^2$$

Qual a área total da ilha?

$$\frac{12}{16^2} + \frac{1}{4} + 1$$

3ª iterada

• Quantos novos quadrados aparecem?

$$36$$

3ª iterada

$$4$$

• Quantos novos quadrados aparecem?

$$12 \times 3 = 36 \rightarrow \text{novos quadrados}$$

Qual a área de cada novo quadrado?

$$\left(\frac{1}{16^3} \right)$$

Qual a área de cada novo quadrado?

$$A = \left(\frac{1}{16} \right)^3$$

Qual a área total dos novos quadrados?

$$36 \cdot \left(\frac{1}{16^3} \right)$$

Qual a área total dos novos quadrados?

$$A_T = 36 \left(\frac{1}{16} \right)^3$$

Qual a área total da ilha de Minkowski?

$$\frac{3}{16} + \frac{1}{4} + 1 + \left(36 \cdot \frac{1}{(16)^3} \right)$$

Qual a área total da ilha de Minkowski?

$$A_{T1} = 1 + \frac{1}{4} + 12 \cdot \left(\frac{1}{16} \right)^2 + 36 \cdot \left(\frac{1}{16} \right)^3 = 1 + \frac{1}{4} + 3 \cdot 4 \left(\frac{1}{16} \right)^2 + 3^3 \cdot 4 \left(\frac{1}{16} \right)^3$$

Calcule o limite da soma dos n primeiros termos. Qual a sua conclusão?

$$1 + \frac{1}{4} + 3 \cdot 4 \left(\frac{1}{16}\right)^2 + 3^2 \cdot 4 \left(\frac{1}{16}\right)^3 + \dots = 2,3056640625$$

$$1 + 0,25 + 12 \cdot (0,0625)^2 + 9 \cdot 4 (0,0625)^3$$

$$1 + 0,25 + 0,00390625 + 36 \cdot (0,000244140625)$$

Após ampla discussão do problema e análise conjunta dos alunos sobre a relação da área e perímetro do Fractal, atingimos os resultados satisfatórios, confirmados pelas respostas anteriores, nos quais constatamos que eles conseguiram perceber que a área da ilha Minkowski tendia para 1,3, enquanto que o perímetro crescia indefinidamente.

É importante enfatizar que esses resultados matemáticos emergiram da interação do professor, alunos e computador, e que as situações problema foram trabalhadas pelos alunos, propiciando uma verdadeira compreensão de seus significados. Portanto, resultados como os descritos anteriormente evidenciam as potencialidades do ambiente computacional, associado aos softwares de Geometria Dinâmica Cabri Géomètre II e iGeom, no desenvolvimento de conceitos matemáticos e geométricos. Em outras palavras, em uma situação problema aparentemente simples, podem-se explorar e construir, de maneira concisa, conceitos matemáticos geralmente trabalhados e apresentados de forma abstrata no ensino tradicional e nos livros didáticos.

Nessa ocasião, levantou-se a questão sobre a dimensão do Fractal da ilha Minkowski.

Para encontrar a solução, os alunos valeram-se dos procedimentos por eles utilizados anteriormente, e concluíram que o Fractal deveria possuir dimensão entre 1 e 2, pois o mesmo não cobria todo o plano.

Para estabelecer a relação da dimensão do Fractal, cada aluno refletiu e realizou cálculos matemáticos, concluindo que a dimensão era:

Qual a dimensão desse fractal?

$$D = \frac{-\log N}{\log \frac{1}{m}} = \frac{-\log 8}{\log \frac{1}{4}} = \frac{-\log 8}{\log 4 - \log 1} = \frac{\log 8}{\log 4} = \frac{3 \log 2}{2 \log 2} =$$

29

1. Qual a dimensão desse fractal?

$$D = - \frac{\log N}{\log \frac{1}{m}} = - \frac{\log 8}{\log \frac{1}{4}} = - \frac{\log 8}{\log 1 - \log 4} = \frac{\log 8}{\log 4}$$

Assim sendo, o conhecimento da dimensão Fractal e a compreensão desse conceito puderam ser acessíveis aos alunos através do ambiente computacional, já que este propiciou-lhes a descrição geométrica das formas Fractais, através das ações sucessivas (script e macro) do iGeom e do Cabri Géomètre II. Essa descrição geométrica é intrínseca aos softwares. Nesse contexto, o computador, através do iGeom e do Cabri Géomètre II, pode ser concebido como um mediador do processo de conhecimento.

Pensando assim, nossa estratégia de ensino de Geometria Euclidiana e Fractal tem fundamentalmente a posição de que a tecnologia pela tecnologia, aplicada à educação, não é por si só um instrumento de construção do conhecimento. Portanto, há a necessidade de incorporação cultural do computador, que refletindo os conceitos de Vygotsky (1988, p.81) e pensando nas novas tecnologias, ele, o computador, é equivalente a ferramentas ou signos, que mediante um processo sistêmico - essencialmente dinâmico – possibilita a interação e a mediação do processo de conhecimento.

1.6 SEXTO EPISÓDIO

Para introduzirmos as pavimentações de base caleidoscópica, desenvolvemos atividades (Anexo III) introdutórias com um, dois e três espelhos. As atividades com os espelhos, desenvolvidas neste trabalho, são resultado de parte de uma pesquisa desenvolvida por Barbosa²⁸, Murari²⁹ e Perez³⁰, que estudam estratégias de ensino utilizando caleidoscópios, jogos e softwares de Geometria Dinâmica, para aprendizagem de Geometria, abordando temas como simetrias (reflexão, rotação e

²⁸ Doutor em Matemática, Professor Titular (apos.) / UNESP, docente aglutinador de pesquisa, IMESC, Catanduva.

²⁹ Doutor em Educação Matemática, Professor do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, Rio Claro/SP.

³⁰ Doutor em Educação, Professor do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, Rio Claro/SP.

translação), polígonos regulares, construções geométricas, pavimentações do plano, seqüências numéricas, etc.

Para darmos início às atividades, distribuímos as fichas para os grupos, além do material utilizado (espelhos, caleidoscópios, transferidores e compassos), com o objetivo de explorar conceitos como: a reflexão de pontos e figuras, eixo de simetria reflexional e figuras com estrutura simétrica reflexional, procurando assim subsídios para responder ao questionamento principal “Que contribuições pode trazer, para o ensino-aprendizagem de Geometria, um estudo de *Fractais Geométricos* através de *caleidoscópios* e *softwares de Geometria Dinâmica*?”.

As atividades foram desenvolvidas no laboratório de ensino do departamento de Matemática da Unesp, campus de Rio Claro.

Neste episódio apresentamos primeiramente os caleidoscópios com o a intenção de despertar o interesse nos alunos. Vale ressaltar que não fizemos uma profunda análise das atividades com um, dois e três espelhos, pois nossa intenção é explorar os conceitos geométricos implícitos na construção das bases caleidoscópicas e suas transformadas que geram um Fractal.

1.6.1 UM ESPELHO

Os grupos receberam um espelho medindo 10cm por 15cm, aproximadamente, além da ficha com as respectivas tarefas.

Para darmos início, começamos a trabalhar com reflexões de pontos e figuras, com o objetivo de que os alunos descobrissem onde estava o eixo de simetria utilizando o espelho (atividade I).

Observando a seguir as figuras, como utilizar o espelho para obter as Figuras 73 e 75, a partir das figuras 72 e 74, respectivamente?

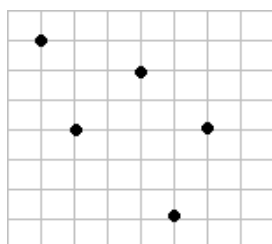


Figura 72

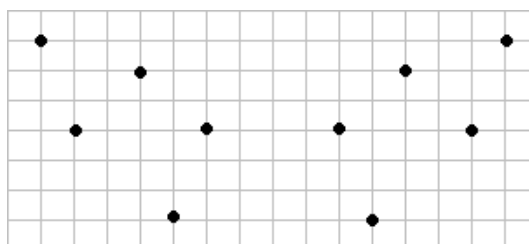


Figura 73

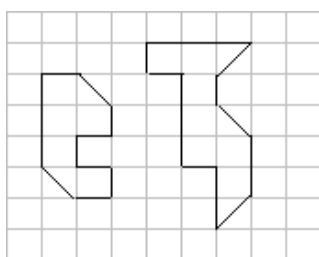


Figura 74

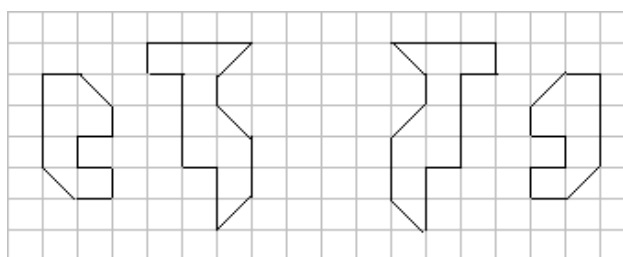


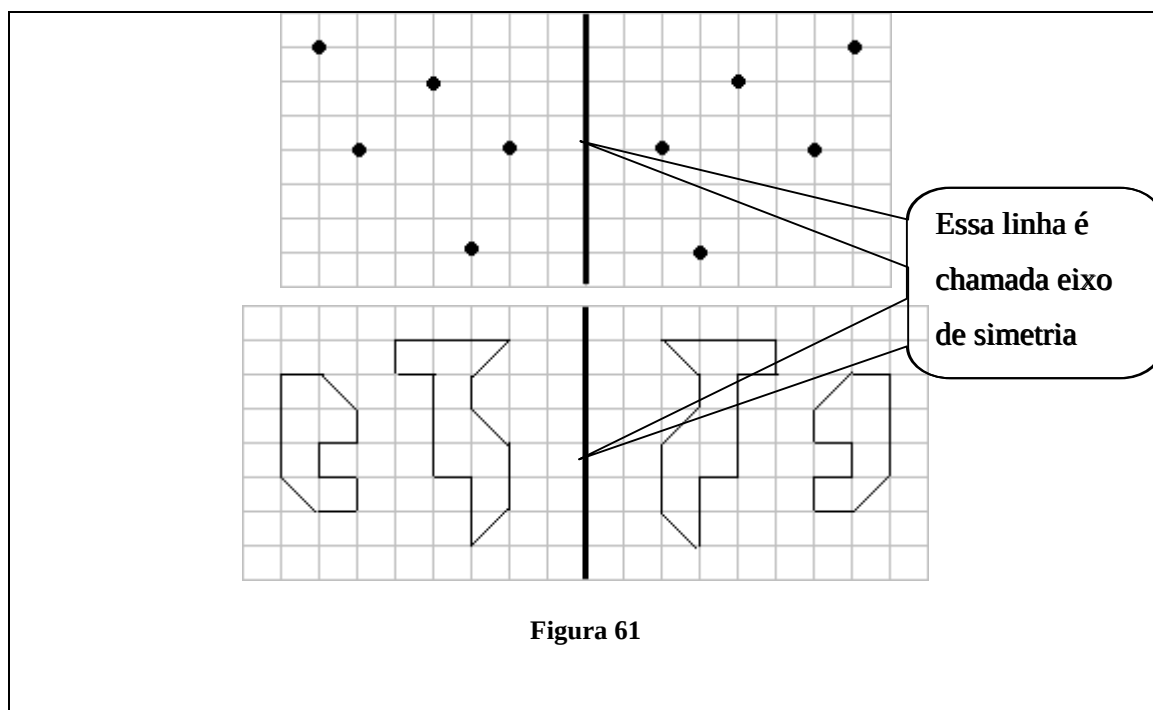
Figura 75

Atividade I

Os grupos fizeram vários movimentos com o espelho, por exemplo, os grupos colocaram o espelho à esquerda, à direita, acima, abaixo etc.

Após aproximadamente três minutos, todos os grupos chegaram à solução correta. Ver Figura 76.

Para obtermos as figuras 73 e 75 a partir das figuras 72 e 74, respectivamente, bastava colocar o espelho sobre a linha apropriada. Vejamos a seguir:



Nessa ocasião, fizemos a institucionalização do conceito de “*eixo de simetria reflexional*”.

Ainda para assimilação do conceito de simetria reflexional distribuímos a atividade II.

No quadriculado abaixo, marque um eixo de simetria e desenhe figuras e suas reflexões.

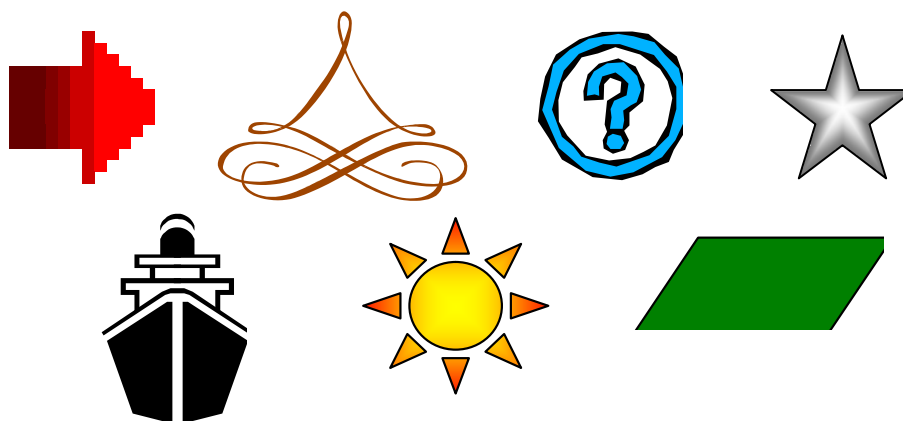
Atividade II

Os grupos, em sua maioria, dividiram o retângulo da atividade II ao meio, o que caracteriza o entendimento do conceito de eixo de simetria, que equidista da figura original e de sua imagem. Dessa forma desenharam figuras e procuraram o eixo de simetria.

Através desta atividade, pudemos constatar que os alunos entenderam o conceito de eixo de simetria.

Na próxima atividade foram dadas as figuras e pedimos para os alunos encontrarem os eixos de simétrica (atividade III).

Utilizando um espelho, descubra todos os eixos de simetria das figuras que os possuem.



Atividade III

Todos os grupos representaram os eixos de simetria da atividade III da seguinte forma. Ver Figura 77.

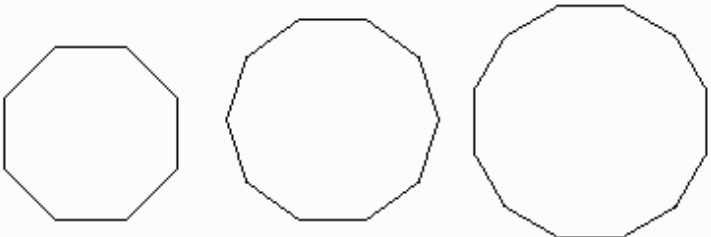


Figura 62

A seguir entregamos a atividade IV para os grupos, com o objetivo de explorar os eixos de simetria dos polígonos regulares desenhados na ficha.

Abaixo estão desenhados alguns polígonos regulares. Descubra todos os eixos de simetria de cada um e registre na tabela a seguir.





Número de lados								
Número de eixos								

Atividade IV

Após o término da atividade, os grupos tinham percebido que o número de eixos de simetria coincide com o número de lados do polígono regular. Ver Figura 78.

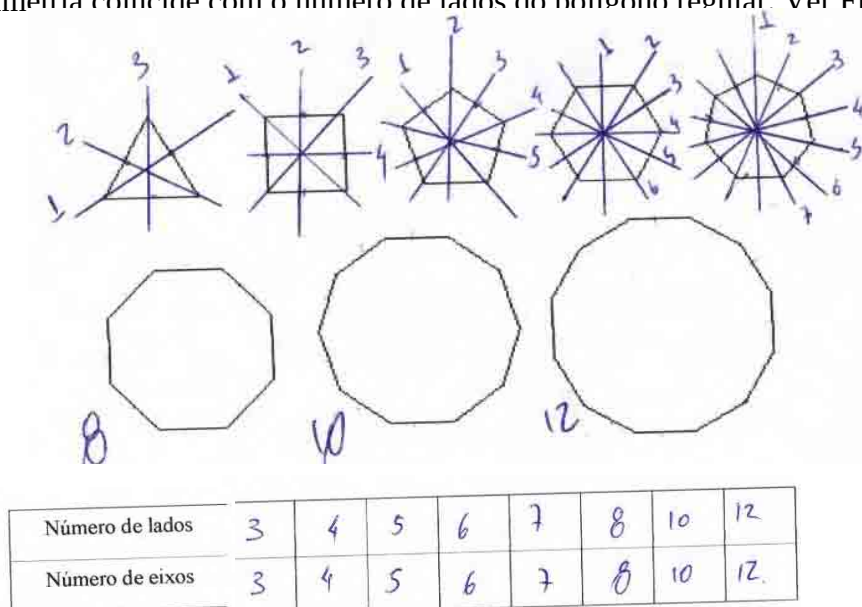


Figura 62

Após as atividades apresentadas, passamos a trabalhar com dois espelhos, os quais podem ser utilizados de duas maneiras: articulados ou não (paralelos).

1.6.2 DOIS ESPELHOS

Com o objetivo de desenvolver as noções de *orientação* e *translação*, trabalhamos com dois espelhos paralelos:

Coloque um espelho sobre cada uma das linhas, de modo que as faces espelhadas fiquem frente a frente. Observe que os espelhos ficaram paralelos. Entre eles, coloque o sólido dado. Descreva o resultado.		

Atividade V

O sólido a que a atividade se referia era um prisma triangular feito de isopor (Figura 79).

Esse prisma, quando colocado entre os espelhos, gera dois tipos de imagens que vão se alternando infinitamente: uma com a mesma orientação do prisma e outra com orientação invertida em relação à original (Figura 80).



Figura 63



Figura 64

Nossa intenção na utilização de dois espelhos articulados é resgatar algumas propriedades dos polígonos regulares.

Na atividade seguinte, foram distribuímos para os grupos faixas de papel colorido e um caleidoscópio de dois espelhos, o qual chamamos de **diedro**.

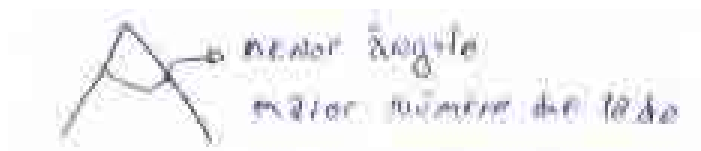
Assim utilizando as faixas de papel, perguntamos para os alunos como visualizar no diedro de espelhos polígonos regulares como triângulo equilátero, quadrado, hexágono regular, entre outros.

Dessa forma, pedimos para os grupos colocarem as faixas de papel embaixo do caleidoscópio e visualizarem a imagem.

A seguir, destacamos alguns comentários dos alunos:

*Menor ângulo do caleidoscópio
maior o número de lados dos polígonos*

Menor ângulo do caleidoscópio maior o número de lados dos polígonos



menor ângulo

maior número de lados

Os alunos gostaram muito desta atividade, fato que os levou a fazerem várias movimentações concluindo que, para visualizar um quadrado, bastava abrir o diedro (caleidoscópio) num ângulo de 90° e para o hexágono, 60° , como mostram respectivamente as Figuras 81 e 82:



Figura 65



Figura 66

No término da atividade, os alunos compreenderam que quanto maior a abertura do diedro menor o número de lados. Atingido o objetivo da atividade, passamos para o estudo com três espelhos.

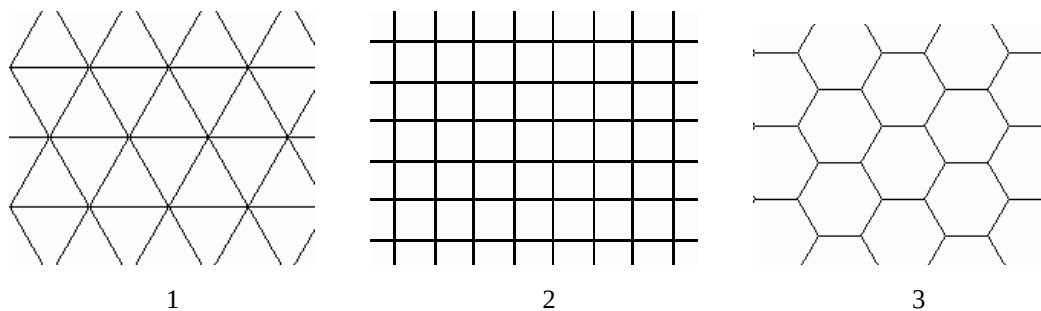
1.6.3 TRÊS ESPELHOS

Como pretendíamos explorar a pavimentação do plano via caleidoscópios, a atividade IX foi elaborada com o objetivo de familiarizar os alunos com a descoberta e construção de bases substituíveis.

Para a atividade IX, foram distribuídos:

- um caleidoscópio modificado;
- canudinhos;
- uma folha com um triângulo equilátero pontilhado desenhado, cujos lados mediam 22 cm cada;
- uma folha com um triângulo isósceles retângulo pontilhado desenhado, cujos lados mediam 22 cm cada cateto e 31,1 cm (aproximadamente) a hipotenusa;
- uma ficha de trabalho, como a que se segue:

Utilizando os canudinhos, tente visualizar essas pavimentações no caleidoscópio de três espelhos.



Atividade IX

Duas duplas conseguiram rapidamente a visualização da pavimentação 1 e 3. Para isso colocaram um canudinho junto a um dos espelhos, conseguindo então visualizar a pavimentação 3. Imediatamente tomaram mais dois canudinhos e, dispondo-os junto aos espelhos restantes, visualizaram assim a pavimentação 1.

Uma outra dupla, para obtenção da pavimentação $(3,3,3,3,3,3)$, dispôs um canudinho como mostra a Figura 83.



Figura 67

Em seguida os alunos colocaram os canudinhos sobre o triângulo isósceles retângulo, para tentar visualizar a pavimentação por quadrados. As respostas dos grupos foram as mesmas em relação às pavimentações anteriores. Ver Figura 84.

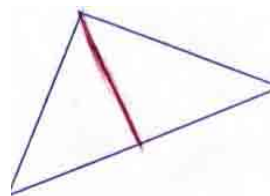


Figura 68

Concluído esse estudo introdutório com um, dois e três espelhos, começamos a explorar as atividades das bases substituíveis, utilizadas para visualização de pavimentações em caleidoscópios. No próximo episódio mostraremos a construção das bases caleidoscópicas que geraram os Fractais.

1.7 SÉTIMO EPISÓDIO

Neste novo episódio, desenvolvemos as atividades nos laboratórios de ensino com o objetivo de apresentar uma “nova” maneira de construir Fractais através de base caleidoscópica, visando estimular no aluno o interesse pela aprendizagem da Geometria.



Figura 69

Vale ressaltar que em Murari (1999) encontramos todo um estudo sobre as bases geradoras e transformadas das pavimentações de configuração 1-uniforme, inclusive como construí-las utilizando régua e compasso.

Apresentamos aos alunos a seguinte imagem e perguntamo-lhes: será que estas imagens gerarão um Fractal quando tenderem para o infinito?

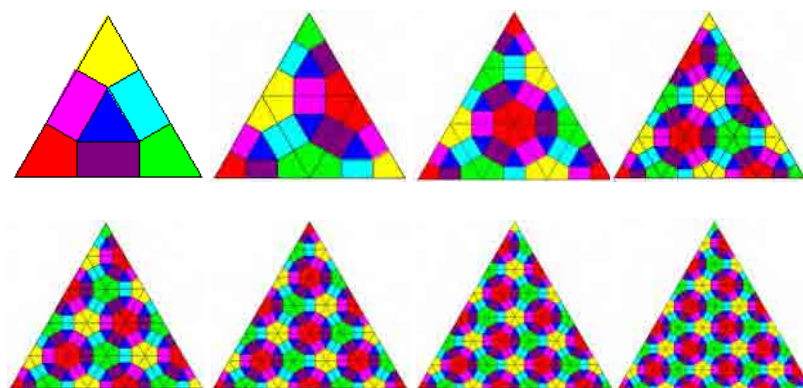


Figura 70

Após algumas análises e discussões entre as duplas, chegaram à seguinte conclusão:

Sim, pois todas imagens tem a mesma forma (reconhecimento)

Sim, pois todas imagens tem a mesma forma. (recorrência)

Acho que é um fractal, a primeira repete na outras

Acho que é um Fractal, a primeira repete na outras.

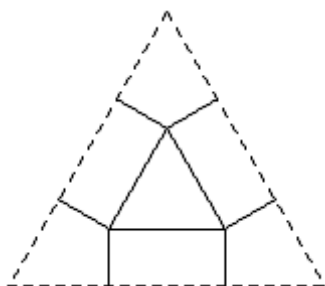
Podemos observar através dos relatos acima que os alunos perceberam que as bases transformadas geram Fractais. Foi possível perceber, ainda, que os alunos estavam tentando utilizar a definição de Fractal:

Um conjunto S é chamado de Fractal ou auto-similar se pode ser subdividido em K subconjuntos congruentes, onde cada um pode ser ampliado por um fator constante M para produzir o conjunto S inteiro.

Em seguida, pedimos para os alunos observarem a base caleidoscópica abaixo, que obedece às regras algorítmicas, ou seja, pode ser analisada e gerar um Fractal

através da construção de uma base caleidoscópica, que colocada no caleidoscópio gera uma pavimentação do plano.

Atividade: Construção da base caleidoscópica.



- a. Construir com régua e compasso a base acima

Os alunos iniciaram o processo de construção da figura acima, e depois de algum tempo pediram para construir a base com os softwares de GD, pois diziam que:

... com os softwares os erros podem ser consertados rapidamente enquanto com a régua e compasso é muito ruim, pois temos que ficar apagando, o que é muito cansativo.

Considerando que já haviam compreendido os conceitos geométricos implícitos no processo de construção da base solicitada, após quase a totalidade da figura ser construída com régua e compasso, permitimos que alguns alunos fizessem a atividade no computador. Porém, três alunos fizeram a base com régua e compasso. Apresentamos, abaixo, apenas o trabalho de um aluno.

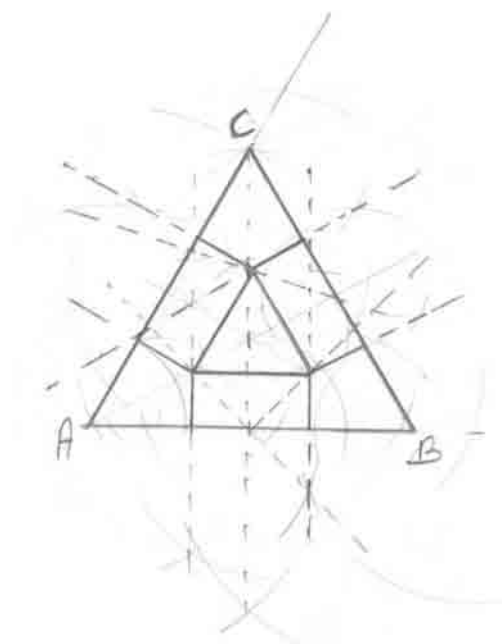


Figura 71

A foto abaixo mostra os alunos construindo a base solicitada através dos softwares de Geometria Dinâmica:



Figura 72

Os alunos construíram a base tanto no iGeom quanto no Cabri Géomètre II. Apresentamos abaixo os passos utilizados pelos alunos no Cabri Géomètre II.

- construir um triângulo equilátero de vértices A , B e C ,
- traçar as bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$, determinando P em BC e M em AB .
- bissetriz do ângulo $\hat{AMC}$, determinando R na interseção com a bissetriz de $\hat{A}$.
- reta perpendicular por R , determinando S em AB .
- segmento RS e seu simétrico $R'S'$ em relação a CM . Segmento RR' .
- simétricos RD e TF de RS e $R'S'$, respectivamente, em relação a AP . Segmento RT .
- simétricos TF' e $R'D'$ de TF e RD , respectivamente, em relação a CM . Segmento TR' .
- esconder todas as construções auxiliares, como mostra a Figura 90.

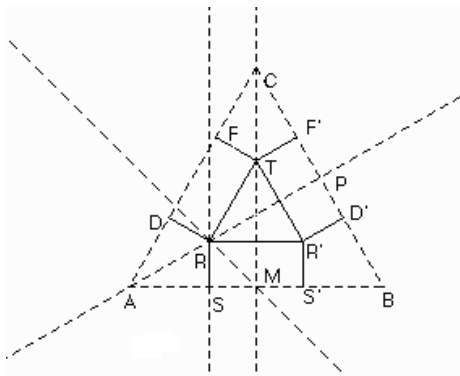


Figura 73

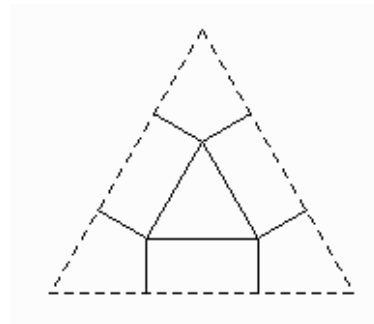
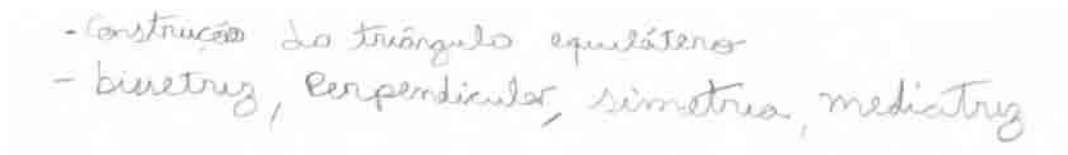


Figura 74

Em seguida pedimos para relatarmos com quais conceitos de Geometria trabalharam nessa construção. Basicamente, as respostas foram as mostradas abaixo:



- construção do triângulo equilátero
- bissetriz, Perpendicular, simetria, mediatriz

Após a construção da base no computador, voltamos para o laboratório de ensino para visualizarmos a base que tínhamos construído. Entretanto, como sabíamos de antemão que não seria possível imprimir a base no laboratório de informática, levamos algumas bases já impressas, para serem visualizadas nos caleidoscópios.



Figura 75

Os alunos se mostraram encantados com a visualização da base no caleidoscópio, pois este fornece visuais magníficos e particulares, contribuindo, dessa forma, para despertar nos alunos interesse em participar dos trabalhos.

Com o intuito de relacionar as bases caleidoscópicas com seqüência, perguntamos para os alunos:

Será que existe uma seqüência em relação ao numero de regiões? Se existir, esta é limitada ou não? E qual é a seqüência?

Após refletirem sobre esse questionamento, os alunos contaram quantas regiões cada base possuía e obtiveram a seguinte resposta:

$$\begin{array}{l} 1^{\circ} = 7 \\ \hline 2^{\circ} = 19 \\ \hline 3^{\circ} = 37 \end{array}$$

Pedimos para os alunos discutirem com os colegas sobre a existência de uma relação matemática que fosse capaz de fornecer o número de regiões da n -ésima iteração.

Nesse momento os alunos iniciaram a discussão, tentando encontrar uma relação que explicasse o aumento do número de regiões. Refletindo sobre as idéias de Borba

(2001), podemos perceber que realmente o computador propiciou que os alunos fizessem várias iterações e notassem a sequência, pois a construção da base no computador é fácil e rápida, porque os softwares utilizados permitem a utilização de macro e recorrência. Dessa forma, o computador foi um mediador do processo de conhecimento, modificando e reorganizando a maneira de pensar dos alunos. Entretanto, vale ressaltar que apesar de ser perfeitamente possível a construção da base com régua e compasso, este processo é muito cansativo e gera imperfeições, pois repete-se várias vezes o mesmo procedimento.

Como os alunos já tinham estudado outros Fractais (episódios anteriores) e naquele momento tinham percebido que o aumento do número de regiões das bases se comportava na forma de uma PG, tentaram relacionar o Fractal de base caleidoscópica com a PG. Porém, depois de algum tempo perceberam que as iterações da base não eram PG nem PA, pois não era possível encontrar nenhuma razão que caracterizasse essa sequência. Deixamos que esta discussão perdurasse por volta de 15 minutos.

Após esse período, interferimos e pedimos para que os alunos fizessem a diferença entre a segunda e a primeira base, terceira e segunda, e assim sucessivamente.

Obtivemos as seguintes respostas

$1^{\circ} = 7$	$2^{\circ} - 1^{\circ} = 19 - 7 = 12$
$2^{\circ} = 19$	$3^{\circ} - 2^{\circ} = 37 - 19 = 18$
$3^{\circ} = 37$	$4^{\circ} - 3^{\circ} = x - 37 = 24$

$$\begin{aligned} a_0 &= 7 \\ a_1 &= 19 \\ a_2 &= 37 \\ a_3 &= 61 \\ 19 - 7 &= 12 \\ 37 - 19 &= 18 \\ x - 37 &= 24 \Rightarrow x = 61 \end{aligned}$$

Sim, existe uma sequência. É uma sequência ILIMITADA.

Sim, existe uma sequência. É uma sequência ILIMITADA

Sim, existe uma sequência, e essa é uma PA.

Sim, existe uma sequência, e essa é uma PA.

Sim, existe uma sequência ilimitada.

Sim, existe uma seqüência ilimitada

Nessa ocasião questionamos: mas, essa PA não aparece no primeiro momento, é necessário fazer a diferença entre os números de região. O que isso caracteriza?

De repente, surge a seguinte resposta:

Uma sub P.A.

Uma sub P. A.

Diante dessa resposta, esclarecemos que não era esse o nome dado a uma PA dessa forma. Após alguns questionamentos, uma dupla respondeu.

uma P.A. de segunda ordem

uma P.A. de segunda ordem

*É uma P.A. de segunda ordem
de razão 06.*

É uma P.A de segunda ordem de razão 06.

Não fizemos com os alunos a demonstração da PA do segundo grau³¹. Porém, falamos que para as pavimentações, cujas “cores” ou “regiões” em suas bases crescem conforme uma PA de segundo grau, é possível saber quantas regiões a serem coloridas terá a n -ésima base transformada através desta fórmula:

$$a_n = n \cdot (a_1 - a_0) + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (a_2 - 2 \cdot a_1 + a_0)}{2} + a_0$$

onde a_0 é o número de cores da base geradora e a_1 e a_2 , da primeira e da segunda bases transformadas, respectivamente. Em seguida, perguntamos: quantas regiões terá a 5ª iterada do Fractal?

$$a_5 = \frac{5(19-7) + 5(5-1) \cdot (37 - 2 \cdot 19 + 7)}{2} + 7$$

$$a_5 = 127$$

representação do

$$a_5 = 5 \cdot (19 - 7) + \frac{5(5-1) \cdot (37 - 2 \cdot 19 + 7)}{2} + 7$$

$$a_5 = 127$$

Os alunos falaram que acharam interessante existir Progressões Aritméticas do segundo grau em bases caleidoscópicas que geram Fractais.

Ainda perceberam que a seqüência não converge, pois esta cresce indefinidamente.

Não é uma seqüência convergente

Não é uma seqüência convergente

Não é convergente

Não é convergente

Após essas conclusões perguntamos sobre a dimensão desse Fractal. Ficamos contentes com as respostas, pois foram imediatas:

Tem dimensão 2, pois cobre o plano.

Tem dimensão 2, pois cobre o plano.

dimensão 2

dimensão 2

Como já dissemos, muitas pavimentações do plano podem ser visualizadas em caleidoscópios utilizando padrões geometricamente construídos, que chamamos bases substituíveis geradoras e/ou transformadas.

As regiões formadas no interior destas bases podem ser coloridas, fazendo com que a pavimentação visualizada se torne mais interessante do ponto de vista matemático

e educacional. Quanto mais regiões, mais cores. As bases transformadas possuem um número cada vez maior destas regiões, como pudemos observar nos itens anteriores.

Um método que nos permite descobrir a quantidade de cores a ser utilizada numa base transformada, para algumas pavimentações é a aplicação da fórmula do termo geral de uma PA de segundo grau. Porém, é necessário ter a certeza de que as diferenças entre dois termos consecutivos da sequência de cores formam uma PA.

No episódio seguinte continuamos com as construções de outras bases caleidoscópicas (Anexo I), que geravam Fractais. As fotos a seguir comprovam a intensa participação dos alunos nas atividades.



Figura 92



Figura 93

Podemos afirmar que esse estudo de Fractais através de bases caleidoscópicas proporcionou aos alunos uma nova possibilidade de aprendizagem dos conteúdos geométricos envolvidos nas construções gráficas como, por exemplo, simetria, bissetriz, teorema de Tales, ponto médio, mediatriz, sequência, etc. Acreditamos que a aprendizagem através da construção do Fractal de base caleidoscópica foi significativa, considerando os conceitos geométricos implícitos em todo o processo de obtenção dos Fractais, pois o uso de material diferente do habitual, como o caleidoscópio, contribuiu para a interdisciplinaridade, como por exemplo, desenho geométrico (na construção das bases); educação artística (harmonia na coloração dos objetos) e informática, estabelecendo-se um ambiente de aprendizagem agradável e participativo, além da introdução da Geometria Fractal.

Segundo Vygotsky (1991), isso se deve à inserção de um fator mediador, o signo (caleidoscópio e os softwares de Geometria Dinâmica), que representa ou faz lembrar o objeto real, concreto, isto é, os signos dirigirem a atenção e a memória, organizam os

estímulos e dão origem às funções psicológicas superiores, presentes apenas nos seres humanos.

De acordo ainda com Vygotsky (1991), o processo de aprendizagem ocorre de forma organizada através da mediação. Segundo Duarte (1996), quando interpretamos a teoria de Vygotsky o professor assume o papel de mediador, atuando na zona de desenvolvimento proximal, isto é, o professor deve ajudar o aluno a efetivar um desenvolvimento que não conseguir atingir sozinho.

Capítulo VIII

CONCLUSÕES FINAIS

O objetivo deste nosso trabalho foi contribuir para o ensino-aprendizagem de Geometria, através de um estudo sobre Fractais Geométricos, que incluiu caleidoscópios e softwares de Geometria Dinâmica como o Cabri-Géomètre II (comercial) e o iGeom (este gratuito e não tão disseminado e utilizado), tendo a Resolução de Problemas como procedimento metodológico de ensino.

Dessa forma, efetuamos uma análise sobre atividades desenvolvidas num curso de extensão, à luz do Referencial Teórico, e procuramos investigar, através da Tecnologia da Informação e Comunicação na Educação Matemática, quais contribuições um estudo estruturado dessa maneira poderia trazer para o ensino-aprendizagem de Geometria.

Assim sendo, criamos possibilidades de os alunos refletirem sobre a existência de uma outra Geometria, a Fractal. A utilização de materiais diferentes do tradicional, como o caleidoscópio e o computador (este último no sentido de inclusão, fazendo mesmo parte do contexto educacional), e a contextualização da Geometria, estudando elementos que fazem parte da vida comum do estudante (como um galho de árvore ou um relâmpago, por exemplo), contribuíram para o estabelecimento do processo de aprendizagem.

Pudemos perceber que os caleidoscópios, por fornecerem visuais magníficos, através das bases caleidoscópicas, puderam contribuir para despertar no aluno o interesse em participar das atividades, conseqüentemente o entendimento dos conceitos inerentes. Assim notamos que a seqüência de atividades (Anexo I) e a maneira progressiva com que foram tratados os conteúdos permitiram afirmar que os conceitos estudados foram compreendidos. Aqueles que, nas discussões, pareciam-nos ainda um tanto obscuros, insistíamos em debatê-los tentando nos aproximar da zona de desenvolvimento proximal do aluno para erradicar as dúvidas.

Nosso estudo mostrou uma maneira diferente da tradicional de obterem-se fractais geométricos: *através de bases caleidoscópicas*. Nesse sentido, nosso trabalho caracteriza-se como o *pioneiro* na apresentação desse tipo de fractal, e traz consigo a conjuntura favorável para que se realize um profundo estudo sobre caleidoscópio, o qual envolve conceitos

matemáticos importantes como simetrias e reflexão, entre outros. Também oportunizamos uma nova estratégia de ensino-aprendizagem, cujo estudo pode se desenvolver conjuntamente nos laboratórios de ensino e de informática, resgatando o uso de régua e compasso e, ao mesmo tempo, utilizando a tecnologia informática, tão essencial em nossa sociedade atual.

Os resultados apresentados no capítulo VII nos permitem asseverar que o conceito de Geometria Fractal foi apreendido pelos alunos, ressaltando que as atividades proporcionaram habilidades no uso dos softwares iGeom e Cabri Géomètre II, além de alguns conceitos da Geometria Euclidiana. Dessa forma, voltando a atenção ao questionamento principal de nossa pesquisa, podemos dizer que um estudo de Fractais Geométricos que inclui caleidoscópios e softwares da Geometria Dinâmica trouxe muitas contribuições para o conhecimento dos conteúdos abordados, haja vista que os alunos desenvolveram as atividades de maneira progressiva, recorrendo, muitas vezes, a conceitos estudados em situações anteriores, e ocorrendo sempre interação entre aluno-computador, aluno-aluno e aluno-professor. Tal interação pode ser percebida através das fichas e dos diálogos estabelecidos entre eles.

Através da análise das atividades à luz do referencial teórico com base em Vygotsky, Borba e Miskulin, pudemos notar que através dos mediadores (computador, professor) houve a construção de conceitos intuitivos sobre limites, finitos, infinitos, progressões, leis de formação, etc. Assim, as atividades exploradas se mostraram totalmente adequadas e se constituíram em preliminares para os conteúdos que serão tratados posteriormente, de maneira formal, na graduação. Mesmo sem a formalização desses conteúdos, os alunos tiveram ótimo aproveitamento nas atividades.

Acreditamos que o computador traz uma “nova linguagem” que pode contribuir para suscitar o conhecimento, pois segundo Borba (2001), o computador pode organizar ou reorganizar nosso próprio pensamento. Dessa forma, utilizando as idéias de Vygotsky, podemos dizer que o computador se constitui como meio entre o objeto e a atividade humana. Assim, o uso de estratégias mediadas (professor e computador) pode possibilitar a fundamentação de novos conceitos não apenas para ajudar o aluno a se relacionar com a situação problemas apresentada, mas para produzir importantes efeitos nas relações internas

e funcionais das estruturas superiores, isto é, na construção de novas generalizações, assim o computador e o professor desempenharam um papel determinante, na medida em que o professor cria situações desafiantes, através dos Fractais, Caleidoscópios e os softwares de Geometria Dinâmica o que possibilitou os alunos um repensar de seus pontos de vistas, e motivou muitos deles a reelaborarem os conceitos implícitos nas construções dos Fractais.

Podemos dizer, ainda, que a Geometria Fractal pode ser perfeitamente inserida nos currículos escolares (ensino fundamental e médio), cujo conteúdo poderá despertar nos alunos interesse em aprendê-lo.

Isso pode ser constatado pela própria opinião dos alunos, quando declaram que “*a Geometria Fractal tem relação com a Geometria Euclidiana*” e que “*nunca tinham pensado na relação de dimensão euclidiana e dimensão fractal*” ou ainda, que o fato de “*um galho de árvore poder ter geometria, é muito interessante*”.

Não podemos esquecer que os bons resultados se justificam, também, pelo fato de termos utilizado a resolução de problemas como procedimento metodológico de ensino, levando o aluno a pensar e desafiando-o a ir além. As situações-problema criadas nesse trabalho tiveram por objetivo propiciar aos alunos a construção de conceitos matemáticos. Desta forma, acreditamos que a mediação feita tanto pelo professor, como por um colega que se encontra em um estágio de desenvolvimento mais avançado, seria extremamente eficaz para o surgimento de zonas de desenvolvimento proximal.

Além disso, quisemos mostrar que, trabalhando com os softwares de Geometria Dinâmica (iGeom e o Cabri Géomètre II) na construção e na representação de imagens da natureza, em processos de resolução de problemas, foi possível conseguir, além dos resultados matemáticos, uma mudança no pensamento dos alunos quando inseridos nesse ambiente que se mostra como um meio “poderoso” e eficiente para explorar e compreender conceitos de Geometria Euclidiana e Fractal.

Para finalizar, gostaria de salientar que os resultados foram bastante proveitosos, e esperamos que eles redundem em contribuições e reflexões para professores e pesquisadores em Educação Matemática, interessados em diversificar sua prática pedagógica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, P.N. **Educação Lúdica** – técnicas e jogos pedagógicos. São Paulo: Loyola, 2000.

ALSPAUGH, C. A. Kaleidoscope Geometry. In: Arithmetic Teacher, 17, p.116 - 117, reprinted In: **Readings in Geometry from the Arithmetic Teacher**, N.C.T.M, ed. 3, 1972.

ALVES-MAZZOTTI, A. J. O Planejamento de Pesquisas Qualitativas. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O Método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa**. São Paulo: Editora Pioneira, 2004.

AMORIM, I. (1994). **Caos e fractais na aula de matemática?** Em A. Vieira, E. Veloso e L. Vicente (Eds.), Actas do ProfMat 94. Lisboa: IIE. p.59-72

BALACHEFF, N; KAPUT, J. Computer-**Based Environments in Mathematics**. En International Handbook of Mathematical Education, Bishop, A. et al (eds), Kluwer Academic Publishers. p. 469-501, 1996.

BALL, R; COXETER, M.C.H. **Mathematical Recreations and Essays**. Univ. Toronto, 1974, republication by Dover, N.Y., 1987.

BARBOSA, R. M. **Descobrendo a geometria fractal para a sala de aula**. Belo Horizonte: Autentica, 2002.

BARBOSA, R. M. **Descobrendo Padrões em Mosaicos**. São Paulo: Atual, 1993.

BARBOSA, R.M. **Determinação do Número de Imagens para Espelhos Planos**. Atividades Pedagógicas, 1957. p. 45-48.

BELLONI, M. L. **Educação a Distância**. Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, Campinas. São Paulo. 1999.

BENEDETTI, F. **Funções, software gráfico e coletivos pensantes**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, 2003.

BOGDAN, R.C.; BIKLEN, S.K. In: LÜDKE, M.; ANDRÊ, M.E.D.A. **Pesquisa em Educação: Abordagens qualitativas**. Ed. Pedagógica e Universitária. 1986.

BOGDAN, R.C.; BIKLEN, S.K. **Investigação Qualitativa em Educação: Uma Introdução à Teoria dos Métodos**. Portugal: Porto. 1991.

BORBA, M.C, PENTEADO, M.G. (Org.). **A informática em ação:** formação de professores, pesquisa e extensão. São Paulo: Olho d' Água, p.23-34, 2000.

BORBA, M.C.; PENTEADO, M.G. **Informática e Educação Matemática.**(Coleção Tendências em Educação Matemática). Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

BORGES NETO, H. **A informática na escola e o professor.** Fortaleza: FAGED/UFC, 1998.

BRANDÃO, L. O. **Algoritmos e Fractais com programas de Geometria Dinâmica,** Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n 49, p. 27-34, 2002.

BRANDÃO, L. O.; SEIJI, I. **Uma ferramenta para ensino de Geometria Dinâmica na Internet:** iGeom. In: CONGRESSO DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE COMPUTAÇÃO (SBC); IX WORKSHOP SOBRE INFORMÁTICA NA ESCOLA - XXIII, 2003.

BRASIL, Ministério da Educação. **Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Médio. Brasília, 1999.

BRASIL, Ministério de Educação e Cultura. PCN+ **Ensino Médio:** Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: SEMTEC, 2002.

BRASIL, Ministério de Educação e Cultura. **Seminário Nacional do ensino médio.** Brasília. MEC/INEP, outubro 1999.

BROSSEAU, Guy. **Theory of didactical situations in mathematics.** Dordrecht: Kluwer, 1997.

CABRI GÉOMÈTRE II – MANUAL PARA MACINTOSH Y MS-DOS. Texas Instruments Instructional Communications, [s.n.t.].

COSTA R. Disponível em:
<http://www.universiabrasil.net/pesquisa_bibliotecas/materia.jsp?id=2295 2003> Acessado em: 18 de maio de 2003.

COXETER, H.S.M. **Introduction to Geometry.** New.York: John Wiley, 1961.

D'Ambrosio, U.**Transdisciplinaridade.** São Paulo: Athenas, 1997.

DAFFER, P.G.O; CLEMENS, R.S. **Geometry:** an Investigative Approach.bMarlo Park, Addison-Wesley, 1977.

DEVANEY, R. L. **A first course in chaotic dynamical Systems**: theory and experiment, 2n ed. 1-Redwood City. Addison-Wesley, 1992.

DUARTE, Newton. **Educação escolar**: teoria do cotidiano e a escola de Vigotski Campinas: Autores Associados, 1996.

FAINGUELERNT, E.K. **Educação Matemática**: Representação e Construção em Geometria. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

FALCONER, K. J. **Fractal Geometry**: Mathematical Foundations and Applications, New York.: Willey, 1990.

FALCONER, K. J. **The Geometry of Fractals Sets**. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

FEDER, J. **Fractals**, New York.: Plenum, 1988.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar**. 3. ed. Rio de Janeiro: Record, 1997.

GOUVEA, F. R. **Fractais Geométricos de Base Caleidoscópica em um software gratuito**. In: CONFERENCIA ARGENTINA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA (CAREM), 4, Buenos Aires, 07 a 09 de outubro de 2004.

GOUVEA, F.R; MURARI, C. **Fractais de bases caleidoscópicas**. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 8, 2004, Recife-PE.

KAPUT, J. Technology and Mathematics Education. In: Grows D. (Ed.) **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. 2004.

LINCOLN, Y.S; GUBA, E. G. **Naturalistic Inquiry**. Beverly Hills: Sage Publications, 1985.

LINDQUIST, M.M; SHULTE, A.P. (Org.). **Aprendendo e Ensinando Geometria**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

LORENZATO, S. Os porques Matemáticos dos alunos e as Respostas dos Professores, **Proposição**, vol. 10, Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, Campinas, 1993.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **Educação em Revista**, São Paulo, ano 3, n. 4, p. 4 –13, 1995.

LOURENÇO, M.L. **Cabri Géomètre II** – introdução e atividades. Catanduva: FAFICA, 2000.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M.E.D.A. **Pesquisa Qualitativa em Educação**: Abordagens Qualitativas. São Paulo, Editora. Pedagógica e Universitária, 1986.

MANDELBROT, B. **Objetos Fractais**. Lisboa: Gradiva, 1998.

MANDELBROT, B. **The Fractal Geometry of Nature**. 3. ed. New York: W.H Freeman, 1983.

MANDELBROT, B: **Fractals: Form, Chance and Dimension**. San Francisco: W. H. Freeman, 1977.

MARTOS, Z.G. **Geometrias não euclidianas**: uma proposta metodológica para o ensino de geometria no ensino fundamental. 2002. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

MILLER, J. R., L. A; JOYCE, R. L. Knight, King. R. M. Forest roads and landscape structure in the southern Rocky Mountains. *Landscape Ecology*.n. 11, p.15-27, 1996.

MISKULIN, R. G. S. **Concepções Teórico-Metodológicas sobre a Introdução e a Utilização de Computadores no Processo Ensino/Aprendizagem da Geometria**, Tese (Doutorado), Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, 1999.

MURARI, C. Brincando, colorindo e aprendendo com o caleidoscópio equilátero em pavimentações de configuração (3,3,3,3,3,3). **A Educação Matemática em Revista**, São Paulo, ano 3, p.31-38, 1995.

MURARI, C. **Ensino-Aprendizagem de Geometria nas 7ª e 8ª séries, via caleidoscópios**. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

MURARI, C. Um caleidoscópio educacional modificado para trabalho em grupo. **Revista de Educação Matemática**, ano 3, n. 2, p.11-15, mar. 1995.

MURARI, C., PEREZ, G. **Atividades educacionais de Geometria, com um, dois e três espelhos – caleidoscópio**. In: IV EPEM/SBEM - PUC/SP, Janeiro/96, **Anais**: 348.

MURARI, C.; MARTINS, R.A.; ALMEIDA, S.T. Obtenção de bases substituíveis para caleidoscópio no Cabri Géomètre II. In: Workshop – Informática Aplicada à Educação, UNIARA – SBEM – SP, **Resumos**, Agosto 2000, p.41.

MURARI, C.; PEREZ, G. A Geometria na ótica do caleidoscópio. **Revista Educação e Matemática**, São Paulo, p.43-50, dez. 1999.

MURARI, C.; PEREZ, G.; BARBOSA, R.M. Caleidoscópios educacionais: coloraciones múltiples. **Revista de Didáctica de las Matemáticas** – Las tareas matemáticas, Barcelona, n. 27, p.7-20, 2000.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org). **Educação Matemática** - pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, p. 213-231, 2004.

ONUCHIC, L.R., Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas, In BICUDO, M. A. V. (org.). Pesquisas em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. São Paulo: Editora da UNESP, 1999 pp.207.

PAPERT, S. **Constructionism**: a new opportunity for elementary science education. Massachusetts: Institute of Technology. The Epistemology and Learning Group, 1996. Proposta para a National Science Foundation.

PAPERT, S. **Logo**: Computadores e Educação. Tradução. J. A. Valente, B. Bitelman e A. V. Ripper. São Paulo: Brasiliense, 1985.

PATAKI. I. **Geometria esférica para a formação de professores**: uma proposta interdisciplinar. 2003. 214 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo 2003.

PAVANELLO, R. N. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências. Revista Zetetiké, Campinas, ano 1, n. 1, p. 7-17. UNICAMP, 1993.

PENTEADO, Miriam. G. Novos Atores, Novos Cenários: Discutindo a Inserção dos Computadores na Profissão Docente. In BICUDO, M. A. V. (org.). Pesquisas em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. São Paulo: Editora da UNESP, 1999, pp. 297-313.

PEREZ, G. **Pressupostos e reflexões teóricos e metodológicos da pesquisa participante no ensino de geometria para as camadas populares**. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, Campinas, 1991.

PICANÇO, A. A. **Educação a distância**: Solução ou novos desafios? Disponível em: <<http://www.anped.org.br/24/T1624543278171.DOC>> Acesso em : 20 mar 2004.

PONTE, J.P. A vertente profissional da formação inicial de professores de Matemática. **Educação Matemática em Revista**, ano 9, n. 11-A, abril, 2002.

REGO, T. C. **Vygotsky**: uma perspectiva histórico-cultural da educação. Petrópolis: Vozes, 1999.

SANTOS, I. C.; RODRIGUES, J. A. Fractais em Sala de aula. **TI-MAT número 8**. Revista sobre o ensino da matemática com actividades para as aulas.

SIMMT, E.; DAVIS. B. **Fractal Cards**: A Space for Exploration in Geometry and Discrete Mathematics: **The Mathematics Teacher**, v 91, n. 2, February 1998.

SIOMIONATO, S.T.A.; MURARI, C.; BARBOSA, R.M. Número de Regiões ou colorações em bases caleidoscópicas para pavimentações do plano. **Revista Interciência – Ciências Exatas**, Catanduva, ano 4, n. 2, p.85-99, 2004.

VALENTE, J. A. Análise dos diferentes tipos de softwares usados na educação. In: Encontro Nacional do PROINFO, 3.1998, Pirenópolis. 1998.

VALENTE, J.A. Mudanças na sociedade, mudanças na educação: o fazer e o compreender. In. VALENTE, J. A. (Org.). **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas: NIED/UNICAMP, 1999.

VYGOTSKY, L S. **A Formação Social da Mente**. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo, Martins Fontes, 1988.

Anexo I

Anexo I: MODELO DAS FICHAS DE ATIVIDADES PARA A PROPOSTA DE SITUAÇÕES DE ENSINO

Coordenadores:



Nome: _____

Prof. Dr. Claudemir Murari
Prof. Flavio Roberto Gouvêa

Dados:

- a. Idade
- b. As escolas onde cursou o ensino fundamental e médio eram públicas ou particulares?
- c. Você estudou geometria no ensino fundamental e/ou no médio?
- d. A geometria estudada em níveis anteriores tem auxiliado no curso superior?
- e. Você conhece algum software de Geometria Dinâmica?
- f. Você já teve algum tipo de contato com a Geometria Fractal?

Nome: _____

Alguns conceitos de Geometria

- a. Você saberia a definição de dimensão? Exemplifique
- b. Você conhece outro tipo de definição de dimensão?
- c. Será que existe alguma outra que você não relacionou no item anterior?
- d. Será que toda “linha” que une dois pontos, pode ser mensurada?

Nome: _____

Atividades de Geometria

1) Procure e anote algumas formas geométricas presentes na sala de aula, e associa-as a figuras geométricas euclidianas conhecidas.

Nº	Objetos Observados	Figuras Associadas
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Nome: _____

Repetir o processo anterior observando agora áreas como (ruas, calçadas, casas, parques, etc.), e associá-las a figuras euclidianas conhecidas.

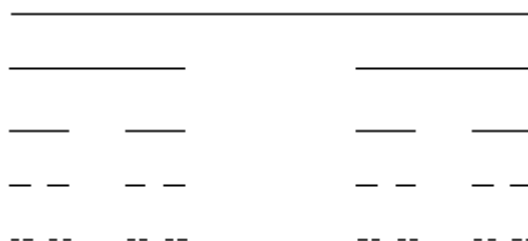
Nº	Objetos observados	Figuras associadas
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Com essas duas lista é possível tirarmos algumas conclusões?

Relate:

2. Observe esse segmento de reta abaixo, que obedece a regras algorítmicas.

Nome: _____



a. Como varia o comprimento dos segmentos do Conjunto de Cantor com as iterações?

Considere o segmento inicial $[0,1]$.

Identifique a lei de formação de cada valor, em cada coluna.

Iteração	Comprimento de cada segmento	Numero de segmentos	Comprimento total
0	1	1	1
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
N			

b. Verifique se a seqüência do item (a) é monótona?

Nome: _____

c. Para onde tende as medidas do Conjunto de Cantor?

O que é um Fractal?

Ao analisarmos um fractal, verificamos que ao escolhermos determinadas partes e ampliando-as, são idênticas ao todo, temos assim fragmentos geométricos similares repetindo-se de tal forma, que mantêm-se invariantes em qualquer escala, a esta propriedade geométrica de manter seu formato independentemente da ampliação, denominou-se auto-similaridade.

Definição: Um conjunto S é chamado de fractal ou auto-similar se pode ser subdividido em K subconjunto congruente, onde cada pode ser ampliado por um fator constante M para produzir o conjunto S inteiro.

Para a representarmos um fractal geométrico, necessitamos criar uma rotina, que utilize uma determinada forma geométrica, fazendo-a repetir-se de forma recursiva em diferentes escalas. Para isso utilizaremos dois softwares de Geometria Dinâmica (iGeom e Cabri Géomètre II).

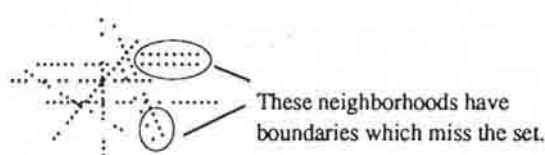
Entendemos que o computador é um mediador muito valioso no estudo e na construção de fractais já que ele nos permite realizar com rapidez uma enorme quantidade de construções geométricas e representá-las graficamente com grande precisão, dando-nos ainda a possibilidade de facilmente observarmos na figura as implicações da alteração de algumas construções.

Um conceito importante da geometria fractal é a **dimensão topológica**.

Nome: _____

Definição: Um conjunto S tem dimensão topológica 0 se todos os pontos tem arbitrariamente pequenos “vizinhos” dos quais não interceptam o conjunto.

Por exemplo: Pontos dispersos isolados tem dimensão topológica 0 desde que cada ponto pode ser cercado por pequenos “vizinhos” arbitrariamente, dos quais as fronteiras são disjuntos do conjunto conforme a figura abaixo:



Definição: Um conjunto S tem dimensão topológica K , se cada ponto em S tem arbitrariamente pequenos “vizinhos” cujas fronteiras encontram S num conjunto de dimensão $K-1$, onde K é o menor inteiro não negativo.

Por exemplo: Um segmento de reta no plano tem dimensão topológica 1 desde que as bolas abertas no plano tem fronteiras que encontram o segmento em um ou dois pontos similarmente, uma região plana tem dimensão topológica 2 porque, pontos no conjunto tem arbitrariamente pequenos vizinhos dos quais são fronteiras de uma dimensão, como mostra a figura abaixo:

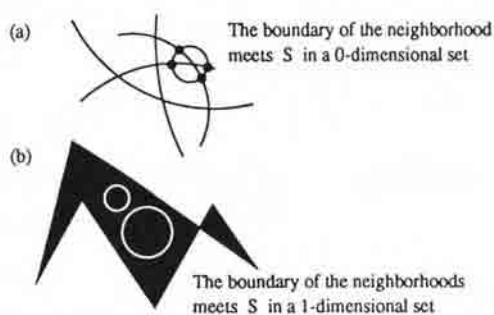


Fig. 14.11 A set with topological dimension (a) 1, (b) 2.

Após as definições sobre dimensão topológica podemos dizer que o número de vetores linearmente independentes de um espaço é um número real que encontra “quantidade de plano, ou espaço” que ocupa um fractal.

Dessa forma:

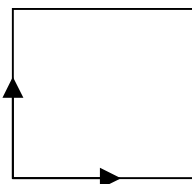
Nome: _____

- um ponto possui dimensão zero
- uma reta dimensão um
- uma superfície plana dimensão dois
- um espaço dimensão três.

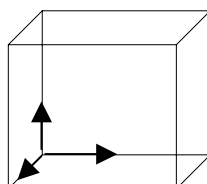
Não existe nenhuma questão que uma reta é unidimensional. Porém ingenuamente falando, as razões para isto são óbvias. Existe só uma direção linearmente independente, o quadrado possui duas direções (comprimento e largura), e três direções num cubo (comprimento, largura e altura). Então estas figuras têm dimensão 1, 2 e 3 respectivamente.

Observe as figuras abaixo:

- um segmento de reta possui dimensão topológica um 
- um quadrado possui dimensão topológica dois



- um cubo possui dimensão topológica três



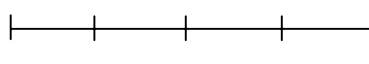
Dimensão Fractal

A dimensão de um fractal é o valor D tal que $N = \left(\frac{1}{r}\right)^{-D}$ em que r é o fator de contração que o gera e N é o número total de contrações.

$$\text{Então, } D = \frac{-\log N}{\log \left(\frac{1}{r}\right)}$$

Através dessa relação podemos perceber que a geometria euclidiana é um caso particular da geometria fractal.

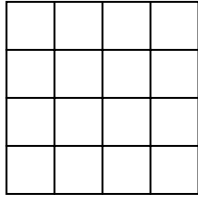
A seguir mostraremos alguns exemplos.



Qual a dimensão topológica desse segmento? (use a relação acima)

Nome: _____

N= _____ r = _____ D=



Qual a dimensão topológica desse quadrado?

N= _____ r = _____ D=

d. Dessa forma qual é a dimensão do Conjunto de Cantor¹?

3. Atividade: Muitos matemáticos procuram entender e compreender os fenômenos que ocorrem na natureza. Vamos observar a imagem abaixo:



Relate com a suas palavras o que você observou na foto acima e quais conceitos geométricos estão relacionados nesta foto de um galho de árvore?

¹ Georg Cantor foi um matemático alemão da Universidade de Halle, onde realizou trabalhos importantes nos fundamentos de matemática que hoje chamamos de Teoria dos Conjuntos.

Nome: _____

a. Vamos tentar construir o galho da árvore da pagina anterior com régua e compasso ?
É possível? Mas antes, meça com o transferidor ou com o compasso quais ângulos são formados pelos galhos da árvore.

Relate o que você observou na construção com régua e compasso? Quais conceitos geométricos estão relacionados na construção deste galho de árvore?

Nome: _____

b. Vamos construir agora a mesma figura com os softwares de geometria dinâmica (Cabri e iGeom)?

Relate o que você observou na construção da figura com os softwares de geometria dinâmica.

c. Investigue a evolução do número de segmentos e registre os valores que obteve na tabela abaixo.

Iteração	Número de segmento
1 ^a	
2 ^a	
3 ^a	
4 ^a	
...	...

O que podemos dizer sobre o número de segmentos em relação às iterações?

d. Encontre uma fórmula que permita calcular o número de segmentos da n-ésima iterada.

e. Existe uma sequência ? Se existir, esta é limitada ou não? É convergente?

f. Quantos galhos terá a figura na n-ésima iteração?

Nome: _____

g. Faça agora um estudo sobre o comprimento dos segmentos.

Iteração	Comprimento dos segmentos
1 ^a	
2 ^a	
3 ^a	
4 ^a	
...	...

O que ocorre com o comprimento dos segmentos em cada iteração?

h. Tente encontrar uma fórmula que permita calcular o número de segmentos da n -ésima iterada.

i. Para onde tende a medida dos galhos?

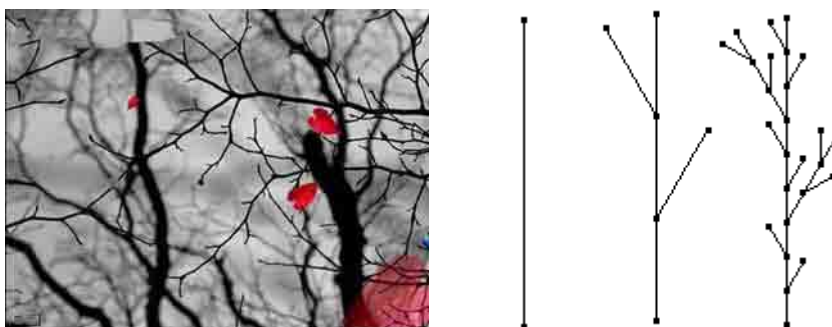
j. Faça um estudo da sequência com n iterações.

Observando a sequência com n iterações, o que podemos afirmar?

Nome: _____

1. Calcule a dimensão do fractal (árvore)?

4. Observe a imagem abaixo a esquerda de um galho de árvore a direita um galho construído com software. Ele reproduz o elemento fractal que obedece a regras algorítmicas, ou seja, pode ser analisado e traduzido pela linguagem fractal.



a. Construir com régua e compasso os possíveis galhos de árvore da figura acima. Mas, antes, medir com o transferidor ou com o compasso qual ângulo forma os galhos da árvore.

Relate o que você observou nesta construção com régua e compasso. Quais conceitos geométricos estão relacionados nesta construção?

b. Construa agora os mesmos galhos com os softwares de geometria dinâmica.

Nome: _____

Relate o que você observou na construção com o software. Então, qual seria a finalidade do Cabri e do iGeom na construção do fractal?

c. Investigue a evolução do número de segmentos e registre os valores que obteve na tabela abaixo.

Iteração	Número de segmentos
1 ^a	
2 ^a	
3 ^a	
4 ^a	
...	...

O que podemos dizer sobre o número de segmentos em relação às iterações?

d. Existe uma sequência ? Se existir, esta é limitada ou não? É convergente?

e. Tente encontrar uma fórmula que permita calcular o número de segmentos para a n-ésima iteração.

f. Quantos galhos (fractal)  teremos na 7^a iterada?

Nome: _____

g. Faça agora um estudo sobre o comprimento dos segmentos.

Iteração	Comprimento dos segmentos
1 ^a	
2 ^a	
3 ^a	
4 ^a	
...	...

h. O que ocorre com o comprimento dos segmentos em relação a cada iteração?

i. Considerando o primeiro segmento com comprimento igual a 1, temos que na n -ésima iteração o segmento será igual:

j. Quantos galhos de árvore fractal teremos na 9^a iteração?

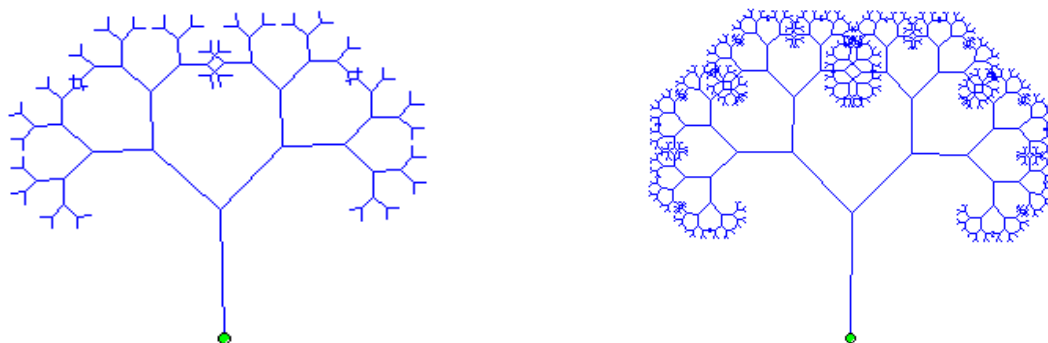
l. Estude a seqüência total.

Observando a seqüência com n iterações, o que podemos afirmar?

m. Qual a dimensão desse fractal?

Nome: _____

4.1. Observe a imagem à abaixo de uma árvore construída com os softwares que reproduz o elemento fractal que obedece a regras algorítmicas, resolva as mesmas questões da atividade anterior.



- a. Construir com régua e compasso os possíveis galhos de árvore da figura acima. Mas, antes, medir com o transferidor ou com o compasso qual ângulo forma os galhos da árvore.

Relate o que você observou nesta construção com régua e compasso. Quais conceitos geométricos estão relacionados nesta construção?

- b. Construa agora os mesmos galhos com os softwares de geometria dinâmica. Relate o que você observou na construção com o software. Então, qual seria a finalidade do Cabri e do iGeom na construção do fractal?

Nome: _____

c. Investigue a evolução do número de segmentos e registre os valores que obteve na tabela abaixo.

Iteração	Número de segmentos
1 ^a	
2 ^a	
3 ^a	
4 ^a	
...	...

O que podemos dizer sobre o número de segmentos em relação às iterações?

d. Existe uma sequência ? Se existir, esta é limitada ou não? É convergente?

e. Tente encontrar uma fórmula que permita calcular o número de segmentos para a n-ésima geração.

f. Quantos galhos (fractal) teremos na 8^a iterada?

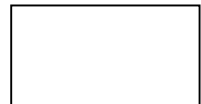
g. Faça agora um estudo sobre o comprimento dos segmentos.

Iteração	Comprimento dos segmentos
1 ^a	
2 ^a	
3 ^a	
4 ^a	
...	...

Nome: _____

h. O que ocorre com o comprimento dos segmentos em relação a cada iteração?

i. Considerando o primeiro segmento com comprimento igual a 1, temos que na n -ésima iteração o segmento será igual:



j. Quantos galhos de árvore fractal teremos na 9ª iteração?

l. Estude a sequência.

Observando a sequência com n iterações, o que podemos afirmar?

m. Qual a dimensão desse fractal?

5. Atividade: Frequentemente, os livros trazem as medidas exatas da costa de um litoral.

- Como foi obtido esse número pelos técnicos?
- Qual será o método usado para obter essa medida?
- Será que foi levado em conta todos os acidentes (irregularidades) da costa?
- A medida obtida por outros técnicos é sempre a mesma?

Nome: _____

- Será que se medíssemos a costa de um litoral através de uma foto ou de um mapa, usando uma determinada escala, teríamos as mesmas medidas que se considerássemos a medida de mínimos detalhes, como por exemplo, o perímetro das rochas?

Veja um exemplo:

Vamos supor que precisamos medir a costa do litoral da foto abaixo, entre os pontos assinalados.



Será que existe algum algoritmo que permite uma aproximação da medida da costa da foto acima?

- a. Vamos aproximar o tamanho da costa do litoral, entre os pontos assinalados, através de um fractal chamado curva de Von Kock.

Vamos construir a curva de Von Kock através da régua e compasso.



Nome: _____

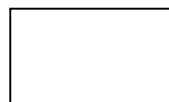
Encontre a recorrência ou macro desse fractal nos softwares de geometria dinâmica:

Relate quais conceitos geométricos estão relacionados na construção dessa figura?

b. Como varia o número de lados em relação às iterações?

Em cada nova iteração, cada lado dá origem à _____ novos lados.

Iteração	Número de segmentos
1 ^a	
2 ^a	
3 ^a	
4 ^a	
...	...



O que podemos dizer sobre o número de segmentos em relação às iterações?

c. Existe uma sequência ? Se existir, esta é limitada ou não? É convergente?

d. Quantos lados tem a curva de koch na 5^a iterada?

e. Como varia o comprimento dos segmentos da curva Von Kock com as iterações?

Nome: _____

Iteração	Medida dos lados
1 ^a	
2 ^a	
3 ^a	
4 ^a	
...	...

O que podemos dizer sobre a medida dos lados em relação às iterações?

f. Verifique se a sequência do item anterior é monótona.

g. Para onde tende a medida de cada segmento da curva?

h. Como varia o perímetro da curva de Von Kock em função do número de iterações?

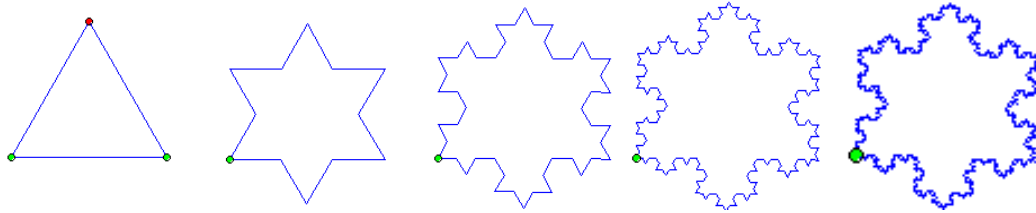
Observando a sequência com n iterações, o que podemos afirmar?

i. Para onde converge a sequência do item anterior?

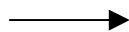
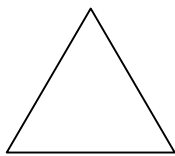
Observe agora a ilha de Von Kock

Nome: _____

O que podemos dizer em relação à sequência abaixo.

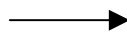
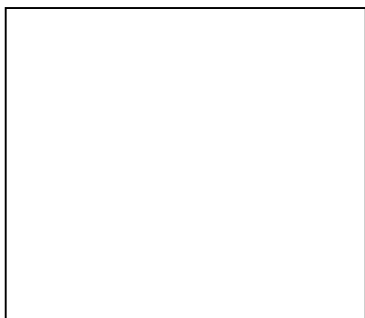


j. Considere que a área do primeiro triângulo é igual a 1 unidade de medida. O que ocorre com a área da ilha de Von Kock?



Área total: 1 unidade de medida

Desenhe a mão livre a primeira iterada



1ª iterada

- Surgiram quantos triângulos?
- Qual a área total dos novos triângulos?
- Qual a área total da ilha?

Desenhe a mão livre a segunda iterada



2ª iterada

- Quantos novos triângulos surgem?
- Qual a área de cada novo triângulo?

- Qual a área total dos novos triângulos?

Nome: _____

3ª iterada

- Quantos novos triângulos novos surgiram?
- Qual a área de cada novo triângulo?
- Qual a área total dos novos triângulos?
- Qual a área total da ilha de Von Kock?

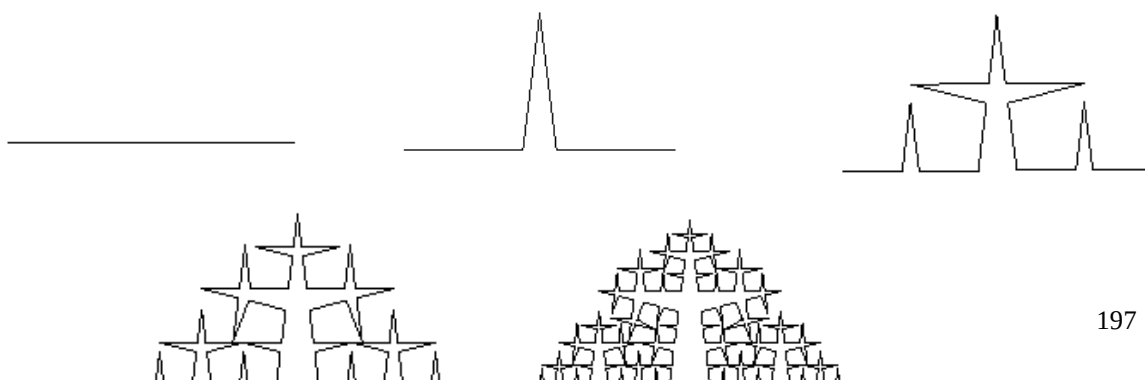
1. Calcule o limite da soma dos n primeiros termos.

Nome: _____

O que podemos dizer sobre a área e o perímetro da ilha Von Koch.

m. Qual a dimensão da ilha de Von Koch?

6. Observe o fractal abaixo, que obedece a regra algorítmica do fractal de Von Koch (modificado).





Nome: _____

a. Qual a variação do número de segmento com relação às iterações?

Iteração	Número de segmentos
1 ^a	
2 ^a	
3 ^a	
4 ^a	
...	...

O que podemos dizer sobre o número de segmentos em relação às iterações?

b. Será que existe uma sequência ? Se existir, esta é limitada ou não? É convergente?

c. Como varia o comprimento dos segmentos da curva Von Kock (modificada) com as iterações?

Nome: _____

Iteração	Medida dos lados
1 ^a	
2 ^a	
3 ^a	
4 ^a	
...	...

Os lados de cada nova curva é _____ vezes _____ que a da curva anterior.

O que podemos dizer sobre o número de segmento em relação às iterações ?

d. Verifique se a seqüência do item anterior é monótona.

e. Para onde tende a medida de cada lado da curva?

f. Como varia o perímetro da curva de Von Kock (modificada) em função do número de iterações?

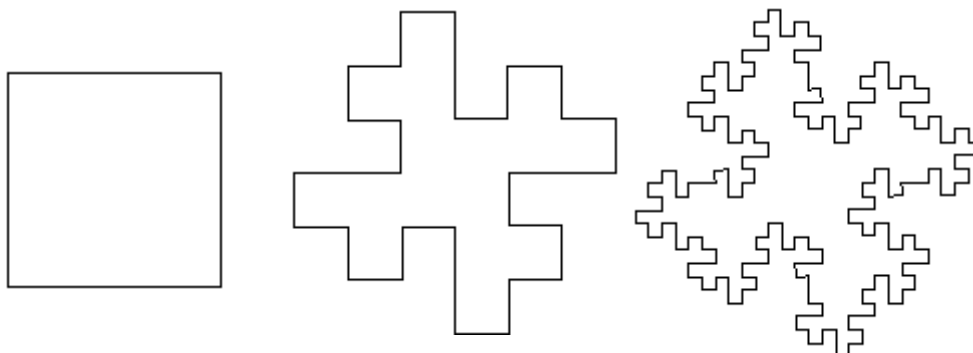
Observando a seqüência com n iterações, o que podemos afirmar?

g. Para onde converge à seqüência do item anterior?

h. Qual a dimensão desse fractal?

7. Observe o fractal abaixo: ele obedece a alguma regra algorítmica? Pode ser analisado e traduzido por uma linguagem fractal a ilha de Minkowski?

Nome: _____



a. Construa com régua e compasso o fractal acima e diga quais conceitos geométricos estão relacionados nesta construção?

b. Construa a ilha de Minkowski com os softwares de geometria dinâmica (Cabri e iGeom) e encontre a recorrência ou macro.

c. Como varia o número de segmentos com as iterações?

Nome: _____

Iteração	Número de segmentos
1 ^a	
2 ^a	
3 ^a	
4 ^a	
...	

O que podemos dizer sobre o número de segmentos em relação às iterações?

d. Será que existe uma sequência ? Se existir, esta é limitada ou não? É convergente?

e. Quantos lados tem a ilha de Minkowski?

f. Como varia o comprimento dos segmentos da ilha de Minkowski com as iterações?

Iteração	Medida dos segmentos
1 ^a	
2 ^a	
3 ^a	
4 ^a	
...	...

O que podemos dizer sobre o número de lados em relação às iterações?

g. Verifique se a sequência do item anterior é monótona.

h. Para onde tende a medida de cada lado da curva?

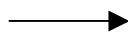
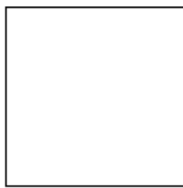
Nome: _____

i. Como varia o perímetro da ilha de Minkowski em função do número de iterações?

Observando a sequência com n iterações o que podemos afirmar?

j. Para onde converge a sequência do item anterior?

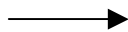
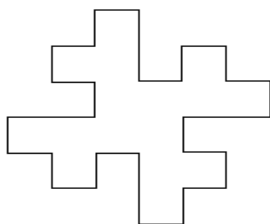
l. Considere que a área do primeiro quadrado é 1 unidade. A área da ilha de Minkowski também cresce indefinidamente?



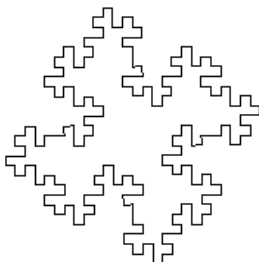
Área total do quadrado igual a 1 unidade de medida

1ª iterada

- Surgem quantos novos quadrados.



- Qual a área total dos novos quadrados?
- Qual a área total da ilha?



2ª iterada

- Quantos novos quadrados temos?

Nome: _____

3ª iterada

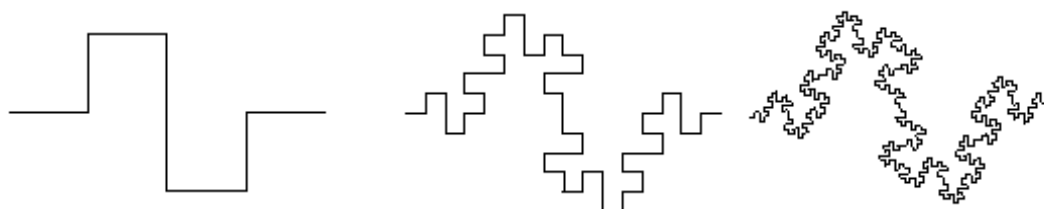
- Quantos novos quadrados aparecem?
- Qual a área de cada novo quadrado?
- Qual a área total dos novos quadrados?
- Qual a área total da ilha de Minkowski?

m. Calcule o limite da soma dos n primeiros termos. Qual a sua conclusão?

n. Qual a dimensão desse fractal?

Nome: _____

8. Observe o fractal abaixo: será que ele obedece a uma regra algorítmica? Pode ser analisado e traduzido por uma linguagem fractal.



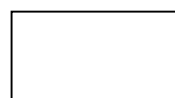
a. Construa com régua e compasso o fractal acima

b. Como varia o número de segmentos em relação às iterações?

Iteração	Número de segmentos
1 ^a	
2 ^a	
3 ^a	
4 ^a	
...	...

O lado de cada iteração dá origem a _____ novos lados.

O que podemos dizer sobre o número de segmentos em relação às iterações?



Nome: _____

c. Existe uma sequência ? Se existir, esta é limitada ou não? É convergente?

d. Como varia o comprimento dos segmentos da curva com as iterações?

Iteração	Medida dos lados
1 ^a	
2 ^a	
3 ^a	
...	...

O que podemos dizer sobre o número de segmentos em relação às iterações?

e. Verifique se a sequência do item anterior é monótona.

f. Como varia o perímetro da curva, em função do número de iterações?

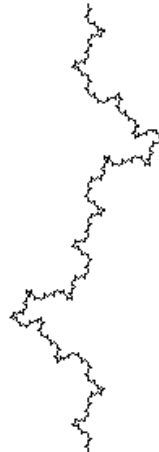
Observando a sequência com n iterações, o que podemos afirmar?

g. Para onde converge a sequência do item anterior?

h. Qual a dimensão desse fractal?

Nome: _____

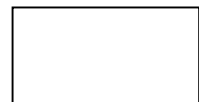
9. Observe a imagem abaixo:



a. Encontre a recorrência ou macro existente nesse fractal nos softwares de geometria dinâmica.

b. Como varia o número de lados com as iterações?

Iteração	Número de lados
1 ^a	
2 ^a	
3 ^a	
4 ^a	
...	...



A cada nova iteração, cada lado dá origem a _____ novos lados.

O que podemos dizer sobre o número de segmentos em relação às iterações?

c. Será que existe uma seqüência ? Se existir, esta é limitada ou não? É convergente?

d. Quantos lados tem a curva na décima iteração?

Nome: _____

e. Como varia o comprimento dos lados da curva em relação às iterações?

Iteração	Medida dos lados
1 ^a	
2 ^a	
3 ^a	
4 ^a	
...	...

O que podemos dizer sobre o número de lados em relação às iterações?

f. Verifique se a sequência do item anterior é monótona.

g. Para onde tende a medida de cada lado da curva?

h. Como varia o perímetro da curva em função do número de iterações?

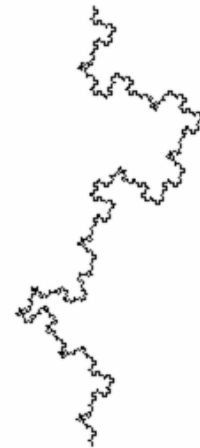
Observando a sequência com n iterações, o que podemos afirmar?

i. Para onde converge a sequência do item anterior?

j. Qual a dimensão desse fractal?

Nome: _____

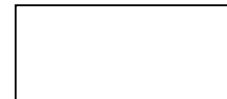
10. Repita o mesmo procedimento agora com esse fractal.



a. Encontre a recorrência ou macro existente nesse fractal nos softwares de geometria dinâmica.

b. Como varia o número de segmentos com relação às iterações?

Iteração	Número de segmentos
1 ^a	
2 ^a	
3 ^a	
4 ^a	
...	...



A cada nova iteração temos cada lado dando origem a _____ novos lados.

O que podemos dizer sobre o número de segmentos em relação às iterações?

c. Será que existe uma sequência ? Se existir, esta é limitada ou não? É convergente?

Nome: _____

d. Como varia o comprimento dos lados da curva em relação às iterações?

Iteração	Medida dos lados
1 ^a	
2 ^a	
3 ^a	
4 ^a	
...	...

Os lados de cada nova figura é _____ vezes _____ que a da figura anterior.

O que podemos dizer em relação às iterações?

e. Verifique se a seqüência do item anterior é monótona

f. Como varia o perímetro da curva em função do número de iteração?

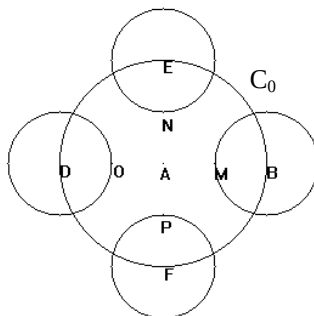
Observando a seqüência com n iterações, o que podemos afirmar?

g. Qual a dimensão desse fractal?

Nome: _____

11. Atividade: Construção da circunferência fractal

Dado dois pontos A e B e uma circunferência C_0 , com centro A e passando por B, construir quatro novas circunferências centradas nos pólos de C_0 e com raio metade da primeira.



a. Construir com régua e compasso o 1^a nível fractal e dizer quais conceitos geométricos observou nesta construção.

b. Encontre a recorrência ou macro do fractal

Nome: _____

c. Qual a relação entre os raios das circunferências? E qual será o número de circunferências em cada iteração?

Iteração	Comprimento do raio
1 ^a	
2 ^a	
3 ^a	
4 ^a	
...	...

d. Qual a equação para, dado n , determinar o número de circunferências que se obtém com n interações repetidas.

Iteração	número de circunferências
1 ^a	
2 ^a	
3 ^a	
4 ^a	
...	...

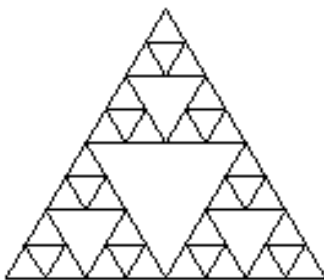
Nome: _____

e. Procure descobrir para onde tende a figura formada com um número cada vez maior de iterações. Existe uma sequência? Se existir, esta é limitada ou não? Converge para onde?

f. Procurar formalizar o diâmetro do fractal. Prove que é um _____, pois seus diâmetros encontram-se em 90° e ambos tem mesmo comprimento igual _____, onde r é o raio de C_0 . Assim temos que o diâmetro que é:

Nome: _____

12. Atividade: Vamos construir um fractal chamado triângulo de Sierpinsky e observar suas relações:



a. Construir com régua e compasso o fractal (triângulo de Sierpinsky) acima e dizer quais conceitos geométricos observou nesta construção.

b. Encontre a recorrência ou macro do fractal (triângulo de Sierpinsky).



Nome: _____

c. Supondo que a área do triângulo inicial é igual a 1 unidade de medida, prove que, à medida que aumenta o número de transformações, a área do triângulo de Sierpinsky tende para _____.

Desenhe a mão livre a primeira iteração

- Qual a área do novo triângulo?
- Qual a área total do triângulo ?

Desenhe a mão livre a 2ª iteração.

- Aparecem quantos novos triângulos?
- Qual a área de cada um dos novos triângulos?
- Qual a área total dos novos triângulos?
- Qual a área total do triângulo de Sierpinsky?

Nome: _____

Desenhe a mão livre a terceira iteração do triângulo de Sierpinsky:

- Quantos novos triângulos aparecem?
- Qual a área de cada novo triângulo?
- Qual a área total dos novos triângulos?
- Qual a área total dos triângulos?
- Qual a área total do triângulo de Sierpinsky?

Podemos, então dizer, que a área dos novos triângulos é:

Nome: _____

d. Calculando o limite da soma dos n primeiros termos, obtemos...

As áreas dos novos triângulos tendem para _____. A área do triângulo de Sierpinsky é _____. Logo, a diferença entre a área dos novos triângulos e área do triângulo de Sierpinsky tende para _____.

e. Exprima, em função da iteração n , a área A_n do menor triângulo da construção do triângulo de Sierpinsky.

f. Para que valor tende a área dos triângulos “invertidos” no triângulo de Sierpinsky?

g. Mostre que a área do triângulo de Sierpinsky tende para _____, e o perímetro total dos triângulos tende para _____.

Vamos considerar o perímetro igual a 1 unidade de medida do primeiro triângulo:

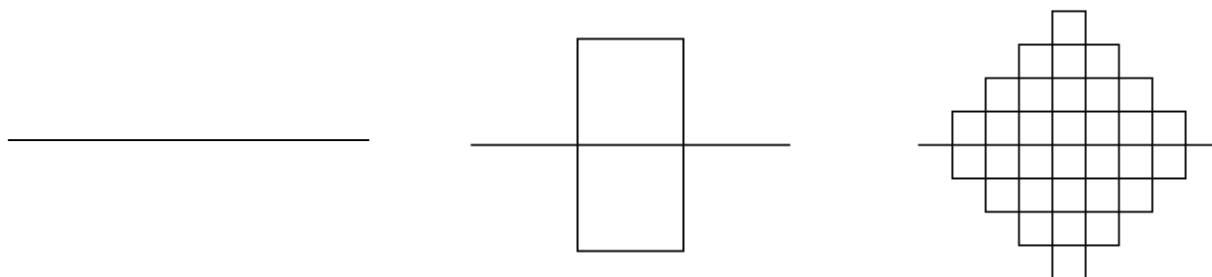
1ª iterada	1
2ª iterada	
3ª iterada	

h. Qual a dimensão desse fractal?

Nome: _____

13. Atividade: Construção da curva de Peano

A curva de Peano, apresentada em 1890, é um fractal muito interessante. Observe a seqüência das figuras abaixo e investigue:



a. Construir com régua e compasso o fractal acima e dizer quais conceitos geométricos observou nesta construção:

b. Encontre a recorrência ou macro do fractal de Peano.

Nome: _____

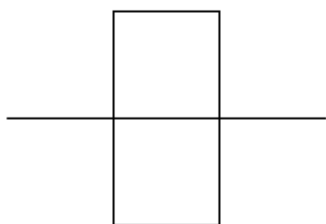
c. Investigue para onde tende a figura formada com número cada vez maior de interações.

d. Qual o perímetro do fractal de Peano em função do número de iterações?

e. Considere que o comprimento inicial seja 1 unidade de medida.

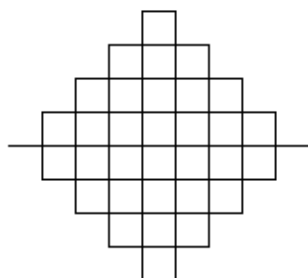
_____ → Considere o segmento igual a 1 unidade de medida

1ª iterada



- Surgem quantos quadrados?
- Qual a área de cada quadrado?
- Qual a área total da curva de Peano?

2ª iterada



- Surgem quantos novos quadrados?
- Qual a área de cada quadrado?
- Qual a área total desse fractal?

Nome: _____

3ª iterada

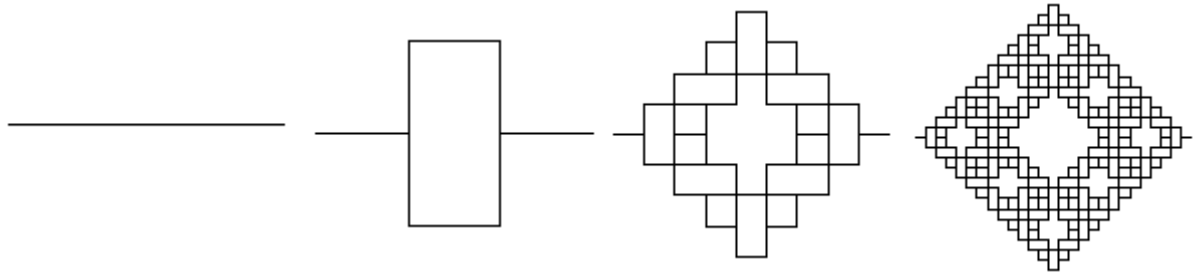
- Surgem quantos novos quadrados?
- Qual a área de cada novo quadrado?
- Qual a área total desse fractal?

f. Para que valor tende a área da curva de Peano?

g. Qual a dimensão desse fractal?

Nome: _____

14. O Carpet de Sierpinsky é outro fractal muito interessante. Observe a sequência das figuras abaixo e investigue as possíveis relações:



a. Encontrar a recorrência ou macro com os softwares de geometria dinâmica e dizer quais conceitos geométricos observa na construção desse fractal.

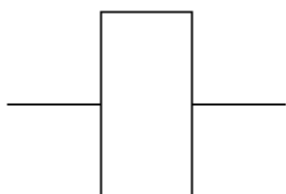
b. Investigue para onde tende a figura formada com o número cada vez maior de interações.

c. Qual o perímetro do Carpet de Sierpinsky em função do número de iterações?

Nome: _____

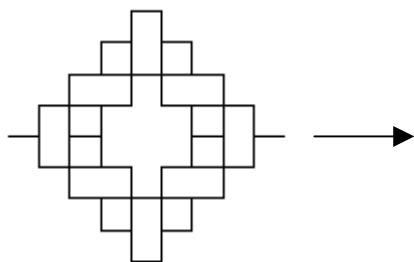
d. Considere que o comprimento inicial seja igual 1 unidade de medida.

_____ → Considere o segmento igual a 1 unidade de medida



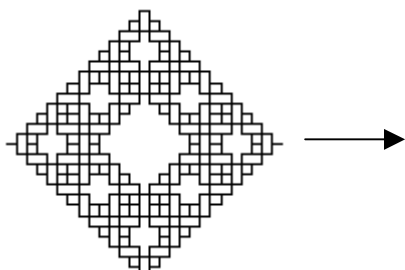
1ª iterada

- Surge _____
- Qual a área total da figura _____



2ª iterada

- Surge _____
- Qual a área de cada _____
- A área total do fractal é:

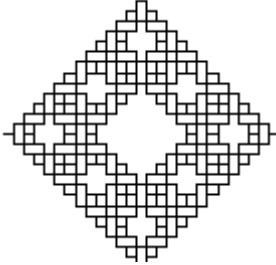


3ª iterada

- Surge _____
- Qual a área de cada _____
- A área total do fractal é:

Nome: _____

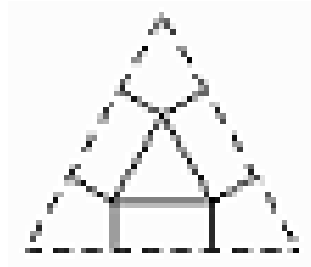
e. Para qual valor tende a área dos quadrados do Carpet Sierpinsky?



f. Para qual valor tende a área do Carpet Sierpinsky?

Nome: _____

15. Atividade: Construção da base caleidoscópica.



a. Construir com régua e compasso a base acima.

Relate quais conceitos de geometria euclidiana você observou nessa construção.

b. Construir a mesma base nos softwares de geometria dinâmica.

Nome: _____

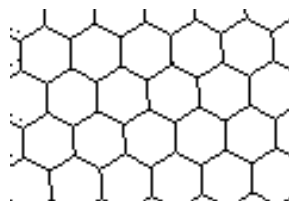
c. Será que existe uma sequência em relação ao número de regiões? Se existir, esta é limitada ou não? E qual é a sequência?

d. Converge para onde?

e. Encontre a dimensão fractal

Nome: _____

16. Atividade: Vamos investigar a foto abaixo:



a. Encontre uma base triangular, caleidoscópica que gere os hexágonos? (Desenha a mão).

b. Construir esta base com régua e compasso

c. Construir a mesma base nos softwares de geometria dinâmica

d. Quantas regiões terão na 4ª e 7ª iterada do fractal? Veja, primeiro, como se dá o aumento das regiões.

Nome: _____

e. Será que existe uma sequência? Se existir, esta é limitada ou não?

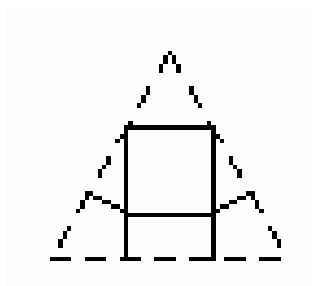
f. Converge para onde?

g. Encontre a dimensão fractal ?

17. Atividade: Construção da base caleidoscópica



Nome: _____



a. Construir com régua e compasso a base acima.

b. Construir a mesma base nos softwares de geometria dinâmica.

Nome: _____

c. Após a construção da base geradora, faça a primeira, a segunda e a terceira iterada com os softwares de geometria dinâmica.

d. Existe uma sequência em relação ao número de regiões? Se existir, qual é ela?

Vejamos, primeiro, como se dá o aumento das regiões da base.

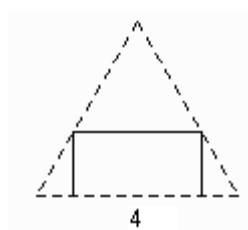
e. É limitada ou não?

f. Converge para onde?

g. Encontre a dimensão fractal.

18. Atividade: Construção da base caleidoscópica.

Nome: _____



a. Construir com régua e compasso a base acima.

b. Construir a mesma base nos softwares de geometria dinâmica.

Nome: _____

c. Após a construção da base geradora, faça a primeira, a segunda e a terceira iterada com os softwares de geometria dinâmica.

d. Existe uma sequência em relação ao número de regiões? Se existir, qual é a sequência?

Vejamos, primeiro, como se dá o aumento das regiões da base.

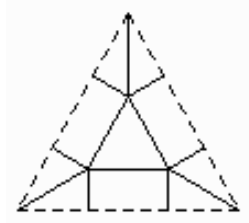
e. Quantas regiões terão na 15ª e 21ª iterada?

f. Existe uma sequência? Esta é limitada ou não?

g. Converge para onde?

Nome: _____

19. Atividade: Construção da base caleidoscópica .



- a. Construir com régua e compasso a base acima.
- b. Construir a mesma base nos softwares de geometria dinâmica.
- c. Existe uma sequência? Se existir, esta é limitada ou não?

Nome: _____

d. Quantas regiões terão na 11ª e 18ª iterada?

f. Converge para onde?

Nome: _____

20. Após terem analisado e construído alguns fractais, construir o seu próprio fractal.

Nome: _____

Relatório Final

No primeiro dia de aula foi entregue um questionário inicial, para ser preenchido e devolvido nesse dia. Se você não o fez, solicite-o e preencha agora.

a. O que você achou da aprendizagem da geometria euclidiana através da geometria dos fractais e softwares de geometria dinâmica?

b. Os softwares de geometria dinâmica utilizados no curso contribuíram para sua aprendizagem?

c. Após a realização do curso, o que é dimensão para você?

d. Hoje, após fazer o curso quais as dimensões que você conhece?

e. Você utilizaria em sua prática docente as atividades propostas no curso?

f. Que tipo de ajuda o software ofereceu para você na resolução de problemas

g. Escolha uma ou mais das alternativas abaixo e discorra sobre ela(s). Caso não se identifique com nenhuma delas, faça seu próprio comentário.

Nome: _____

Com relação aos conceitos geométricos, você pode afirmar que este curso:

1. *esclareceu temas que não haviam sido assimilados em estudos anteriores, ou*
2. *propiciou aprendizagem de temas não estudados anteriormente, ou ainda*
3. *representou um reforço aos conhecimentos sobre os conceitos geométricos que já possuía.*

Anexo II

Anexo II: APOSTILA DO SOFTWARE iGeom

APRESENTAÇÃO

Essa apostila foi elaborada com o objetivo exclusivo de ser um apoio didático para o aluno em sala de aula, no desenvolvimento de construções geométricas com um software de geometria dinâmica chamado *iGeom*. Este software vem sendo desenvolvido pelo Prof. Dr. Leônidas de Oliveira Brandão e alunos da iniciação científica, do Instituto de Matemática e Estatística da USP, São Paulo.

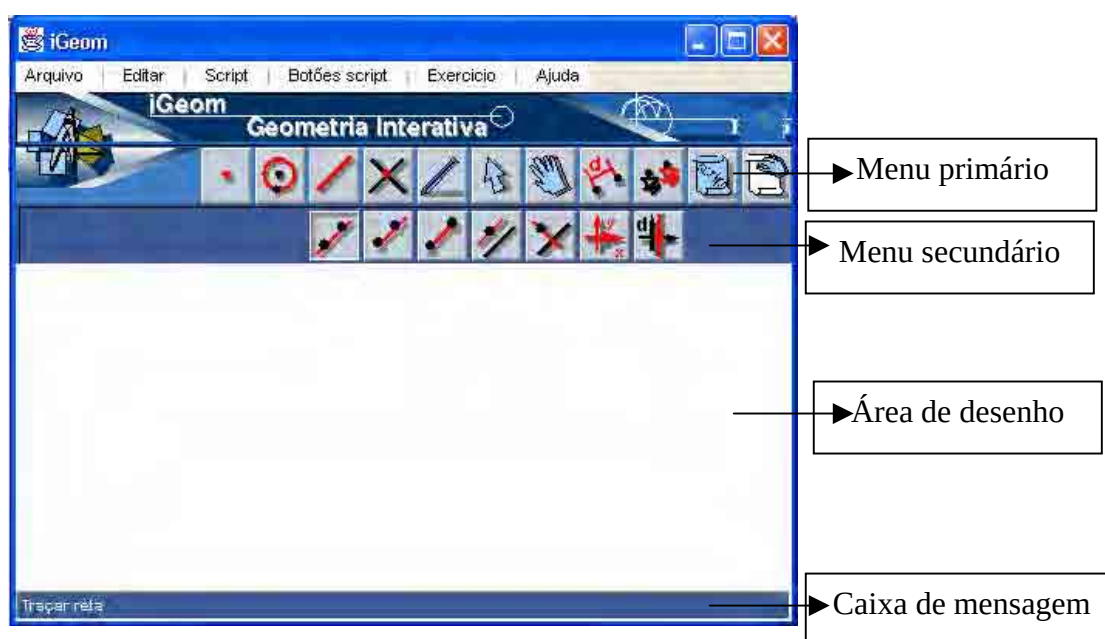
Foram elaboradas atividades, cujas construções são todas executadas no software *iGeom*, que representa um mediador auxiliar no processo de aprendizagem.

Finalmente, tivemos como intenção colaborar com o ensino-aprendizagem de conceitos geométricos, teóricos e práticos, dos alunos da licenciatura da UNESP de Rio Claro, futuros professores de Matemática, e estimulá-los, quando em exercício, a tornarem suas aulas interativas e dinâmicas.

Os organizadores.

O *iGeom* é um software de geometria dinâmica totalmente gratuito, que está disponível na Internet através do endereço <http://www.matematica.br/igeom>. Dessa forma, os professores não terão problemas quanto à aquisição e instalação do software *iGeom* nas escolas onde trabalham, pois este funciona na forma de *applets*¹ na Internet. Portanto, de qualquer lugar poderão utilizar este software de geometria dinâmica.

Na parte superior da tela do *iGeom*, encontra-se a barra de menus, que contém as seguintes opções, devidamente expostas com seus comandos:



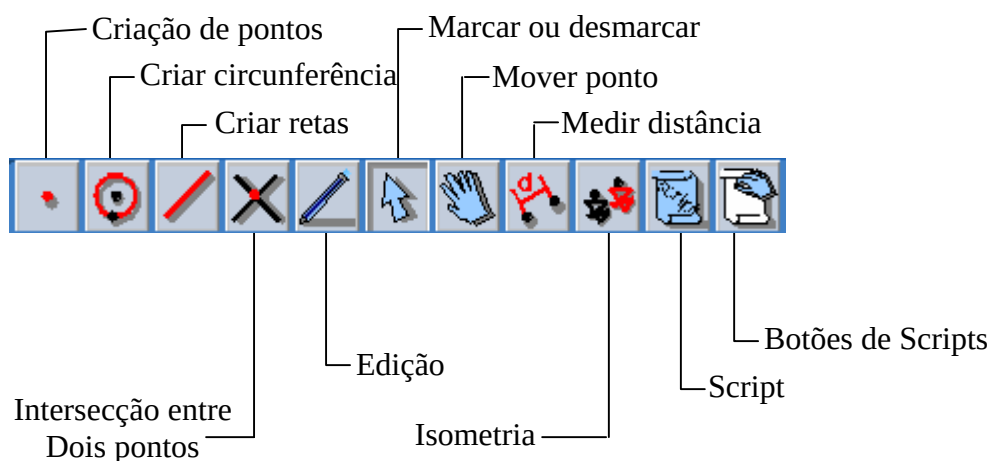
- **Arquivo:** Abrir arquivo, Abrir arquivo preservando desenho, Gravar construção, Gravar como, Gravar algoritmo, Gerar applet, Exportar arquivo: exporta arquivo para PostScript e exporta imagem para GIF, Sair.
- **Editar:** Esconder, Mostrar, Rastrear, Limpar tracejado, Limpar objetos, Medir distancia, Medir arco, Rotulo, Grid, Eixo.
- **Script:** Executar, Começar, Finalizar, Recorrência, Executar passo-a-passo.
- **Botão Script:** Adicionar script, Remover script.
- **Exercício:** Criar Exercício, Desfazer criação, Limpar Resposta, Mostrar solução.

¹ Demonstração da solução passo-a-passo de exercícios de geometria, permitindo que o aluno acompanhe a seqüência das construções para resolução de um exercício, informação que é normalmente perdida na apresentação em formato impresso.

- **Ajuda:** Sobre, Objetos.

Observe que este trabalho pretende apenas auxiliar os interessados em iniciar um processo de aprendizagem do software acima citado.

A Barra de Ferramentas



Se seleccionar o botão mantendo o mouse pressionado sobre o ícone, aparecerão dois novos ícones:



Selecione o botão do ponto (debaixo do botão seta) com o mouse para colocar, então, o ponto na sua janela; mova o mouse e coloque o cursor onde desejar; clique no mouse, uma única vez, e o ponto é criado.



Quando um segmento de reta ou dois pontos forem selecionados, este comando colocará um ponto no ponto médio desse segmento. O ponto médio será travado, e mover-se-á somente ao ajustar-se o comprimento do segmento.



Se seleccionar o botão mantendo o mouse pressionado sobre o ícone, aparecerão dois novos ícones:



Para construir uma circunferência, selecione o botão próprio da barra de ferramentas. Clique, e mantendo pressionado o mouse, arraste o cursor afastando-se do

centro. O raio da circunferência aumentará; quando alcançar o tamanho desejado libere o botão do mouse.



Cria uma circunferência definida por centro e raio; raio representado por segmento.



Se selecionar o botão mantendo o mouse pressionado sobre o ícone, aparecerão novos ícones:



Criar reta a partir de dois pontos (novos ou pré-existentes).



Criar semi-reta a partir de dois pontos (novos ou pré-existentes), o primeiro ponto será a origem.



Criar segmento a partir de dois pontos (novos ou pré-existentes).



Criar paralela à reta dada, passando por ponto também dado. Primeiro clique na reta e depois, no ponto (se não existir o ponto, será criado um na posição).



Criar perpendicular à reta dada passando por ponto dado. Primeiro clique na reta original e depois, no ponto (se não existir será criado um no local).



Criar eixos cartesianos, com unidade (ao mover a unidade, todas as distâncias expressas na tela são recalculadas, mantendo a proporção original com a unidade); clique no botão para aparecerem ou desaparecerem os eixos.



Criar reta ortogonal a um dos eixos cartesianos, a partir de uma distância (qualquer medida dinâmica).



Criar ponto em interseção. Clique no primeiro objeto e depois no segundo (também funciona na forma: marque os dois objetos que deseja interceptar e depois "clique" neste botão).



Se selecionar o botão mantendo o mouse pressionado sobre o ícone, aparecerão novos ícones.



Esconder objetos marcados. Marque todos os objetos que deseja esconder, depois clique nesse ícone.



Mostrar todos os objetos escondidos.



Objetos com rótulo: se o botão rótulo estiver ativado (selecionado), novos objetos aparecerão com rótulos (caso contrário, ficam sem rótulo). Para trocar rótulo de um objeto já criado, marque o rótulo (com ) e depois clique no botão rótulo (se tiver mais que um objeto selecionado, o primeiro rótulo da lista será considerado, desmarcando os anteriores).



Cria lugar geométrico ("locus") definido por algum ponto (selecione primeiro ponto sobre objeto que definirá trajetória do "ponto alvo", depois selecione o "ponto alvo", que desenhará o "locus").



Rastrear um ponto: clique no ícone "rastrear" e depois no ponto que deseja rastrear, serve para observar o lugar geométrico em estudo.



Remover todos os tracejados da área de desenho.



Remover algum objeto e seus dependentes. Clique no ícone "deletar" e depois no objeto que deseja remover, mas cuidado, pois todos os que dependerem deste também serão removidos.



Desfaz a última remoção de objeto (ou recupera todos os objetos após um "limpa tudo").



Remove todos objetos ("limpa tudo") da área de desenho, cuidado, esta opção remove (apaga) todos os objetos (e por enquanto não dispomos de um comando tipo "desfaz").



Marcar/Desmarcar objetos, o primeiro clique sobre um objeto marca-o e o segundo desmarca-o (se quiser marcar objetos numa região retangular, "arraste" o mouse definindo um retângulo que os "contenha" - isso funciona com qualquer botão ativado).



Arrastar objetos, clique no objeto (solte o botão do mouse) e mova o mouse pela área de esboço até a posição desejada; então, dê novo clique.



Se selecionar o botão mantendo o mouse pressionado sobre o ícone, aparecerão novos ícones.



Abrir calculadora para efetuar cálculos com medidas (arcos, distâncias ou outros cálculos).



Medir distância entre pontos, com a seta, marque (com ) os pontos e depois clique no ícone medir distância.



Medir arco (comprimento de arco), determinado por dois pontos numa mesma circunferência (marque os dois pontos com "marcador"), ou medir ângulo determinado por três pontos, sendo o segundo o centro do mesmo (marque com o "marcador" os 3 pontos).



Se selecionar o botão mantendo o mouse pressionado sobre o ícone, aparecerão novos ícones.



Transladar objetos geométricos (marque primeiro os pontos, A e B, que definem a direção de translação e a seguir, todos os objetos a serem transladados).



Refletir objetos geométricos (marque primeiro a reta "espelho" e a seguir todos os objetos a serem refletidos).



Rotacionar objetos geométricos (marque primeiro o arco ou ângulo de rotação, depois o centro da rotação e por último todos os objetos a serem rotacionados).



Se selecionar o botão mantendo o mouse pressionado sobre o ícone, aparecerão novos ícones.



Trabalhar Com Rotinas “scripts”: até o momento trabalhamos apenas no editor de desenhos do IGeom; porém possibilita as rotinas, também chamadas de Script. A Janela de rotina permite que se grave todas as etapas sucessivas de uma construção, criadas a partir de um conjunto preliminar de objetos geométricos, como um programa.



Esse botão ativa a rotina, sempre que pretender. Para isso, é necessário criar e marcar os objetos iniciais. Assim, poderemos repetir a mesma construção, sempre que necessário.



Suponhamos gravada a rotina que originou uma figura geométrica a partir de um conjunto de objetos geométricos iniciais. Pretendendo que seja repetido este processo em um novo conjunto de objetos geométricos, devemos selecionar os novos objetos e pressionar o botão  (RECORRENCIA). Finalizando, deve-se carregar clicando no



botão e a rotina estará pronta para ser executada.



Anotar resposta de um exercício, primeiro marque os objetos que deseja ressaltar e depois "clique" neste botão.



Comentário em "script": anotar passo, em "script", primeiro na janela de comentários do "script" (parte de baixo), digite seu comentário sobre o "script", depois clique no "passo" pronto Durante a aplicação do "script" aparecerá uma caixa de texto com seu comentário (explicativo).



Executar passo a passo: sem que a janela do gravador esteja aberta, "clique" neste botão para que os próximos "scripts" sejam interpretados passo a passo (após cada comando geométrico, abrirá uma janela para o usuário permitir continuar).



Cancelar anotação do "script", cancela a gravação/envio do "script".

ATIVIDADES

Objetivo: Familiarizar os Professores com os menus do programa *iGeom*

Assunto: Baricentro de um triângulo

Atividade 1

a) Crie um triângulo ABC. Clicar em  três pontos não alinhados; em seguida crie os segmentos  AB, BC e CA.

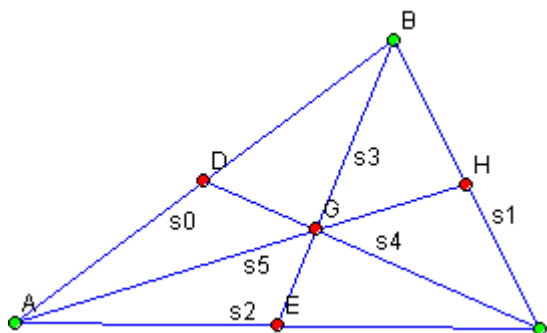
b) Obtenha o ponto médio  D de AB e, a seguir, crie o segmento AD. O segmento AD recebe o nome de mediana do triângulo relativa ao vértice C.

c) Obtenha o ponto médio  E de AC e, a seguir, crie a mediana relativa ao vértice B do triângulo, dando origem à mediana BE.

d) Obtenha a intersecção  G das medianas AD e BE.

e) Obtenha o ponto médio  H de BC e, a seguir, crie a terceira mediana AH.

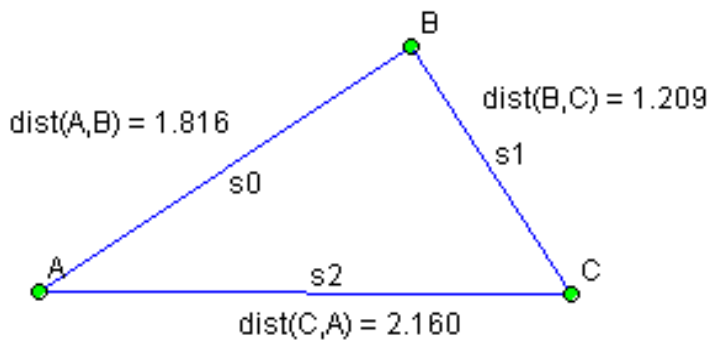
f) Movimente A, B ou C para verificar que as três medianas passam pelo mesmo ponto. Este ponto recebe o nome de baricentro.



Assunto: Triângulo escaleno, triângulo isósceles e triângulo equilátero.

Atividade 2

- a) Crie um triângulo  ABC.
- b) Meça  os lados AB, BC e AC, clicar em AB, BC e AC.
- c) Verifique se o triângulo é escaleno.
- d) Movimente o ponto A de modo que o triângulo se torne isósceles de base BC ($AB=AC$).
- e) Movimente o ponto A de modo que o triângulo se torne equilátero ($AB=AC=BC$).

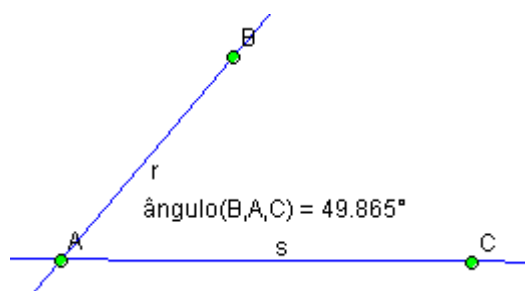


Assunto: Ângulo agudo, ângulo obtuso e ângulo reto

Atividade 3

- a) Crie três pontos  A, B e C não alinhados.
- b) Crie a reta  passando por A e B.
- c) Crie a reta  passando por A e C.
- d) Marcar o ângulo BAC; clicar  em B, A e C. O segundo ponto clicado deverá ser sempre o vértice do ângulo.
- e) Movimente B, de modo que o ângulo se torne agudo (a medida menor que 90°).

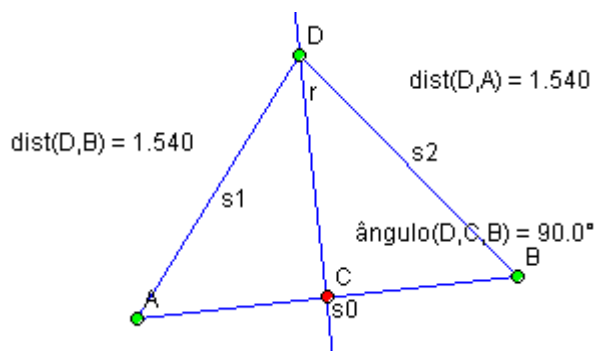
- f) Movimente B, de modo que o ângulo se torne reto (a medida igual a 90°).
- g) Movimente B, de modo que o ângulo se torne obtuso (a medida maior que 90°).



Assunto: Mediatriz de um segmento

Atividade 4

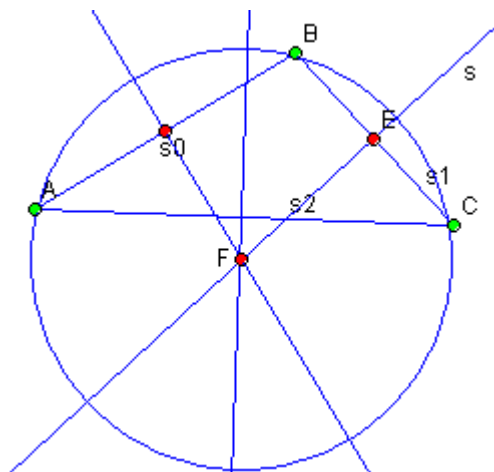
- a) Crie  um segmento AB.
- b) Construa a mediatriz; para isto, construa o ponto médio  de AB; em seguida, clicar sobre o segmento; aparecerá  a perpendicular; clique em D para travá-la.
- c) Considere um ponto  P sobre a mediatriz.
- d) Marque o ângulo  DCB, clique nessa ordem, pois assim será medido o vértice C.
- e) Meça  os segmentos AD e BD.
- f) Movimente o ponto A.
- g) Movimente o ponto D sobre a reta e observe as medidas de AD e BD.



Assunto: Circuncentro de um triângulo

Atividade 5

- a) Crie um triângulo  ABC.
- b) Construa a mediatriz  do lado AB.
- c) Construa a mediatriz  do lado BC.
- d) Obtenha a intersecção  F das duas mediatrizes.
- e) Construa a mediatriz  do lado AC. Movimente um dos pontos A, B ou C para observar que as mediatrizes dos lados do triângulo passam sempre pelo ponto F. Este ponto recebe o nome de circuncentro.
- f) Crie uma circunferência  de centro F e raio FA; clique primeiro em F e depois em A.
- g) Movimente A ou B ou C para verificar que a circunferência é circunscrita ao triângulo.



Assunto: Triângulo acutângulo, obtusângulo e retângulo.

Atividade 6

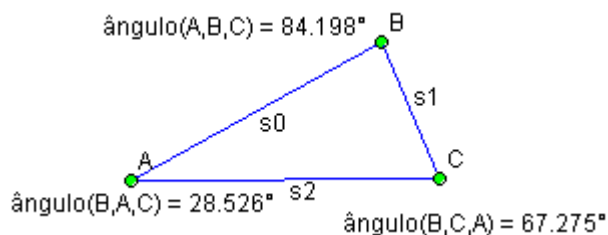
a) Crie um triângulo  ABC.

b) Meça os ângulos  ABC, BCA e BAC.

c) Verifique se o triângulo é acutângulo (todas as medidas dos ângulos menores que 90°).

d) Movimente um dos vértices do triângulo de modo que o triângulo se torne obtusângulo (a medida de um dos ângulos deverá ser maior que 90°).

e) Movimente um dos vértices do triângulo de modo que o triângulo se torne retângulo (a medida de um dos ângulos deverá ser igual a 90°).



Assunto: Bissetriz de um ângulo

Atividade 7

a) Crie três pontos  A, B e C não alinhados.

b) Crie a reta  que passa por A e B.

c) Crie a reta  que passa por A e C.

d) Construa a bissetriz do ângulo BAC; para construir a bissetriz, será necessário construir uma circunferência  qualquer, pelo ponto A, interceptando o triângulo em dois pontos; crie a intersecção  (E, D) da circunferência com o triângulo; a seguir,

crie o ponto médio G por ED; construa uma semi-reta  passando por A G; assim encontraremos a bissetriz.

e)Obtenha um ponto  H sobre a bissetriz.

f)Meça  os ângulos BAH e HDA.

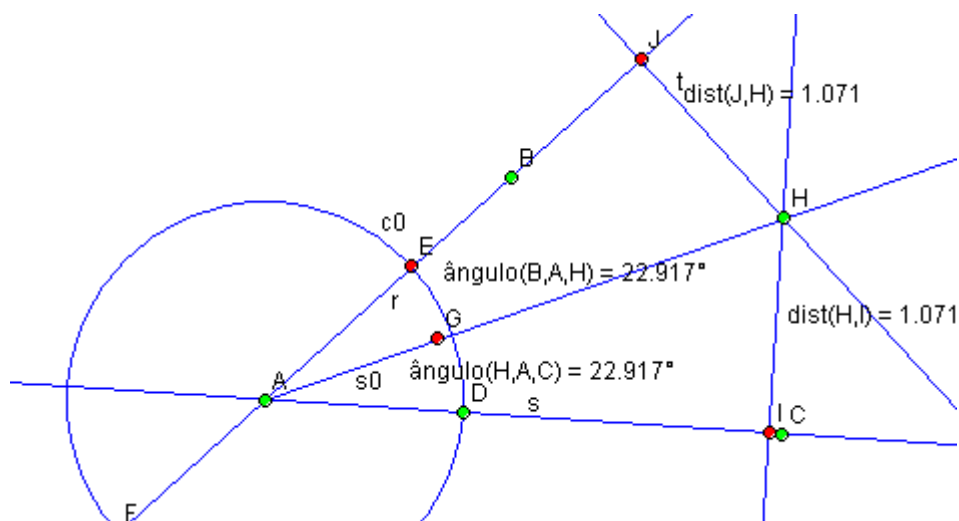
g)Movimente o ponto B e observe os ângulos BAH e HDA.

h)Pelo ponto I trace uma reta perpendicular  à reta AC, obtendo o ponto de intersecção  I dessas duas retas.

i)Pelo ponto H trace uma reta perpendicular  à reta AC, obtendo o ponto de intersecção  J dessas duas retas.

j)Meça  os segmentos JH e HI.

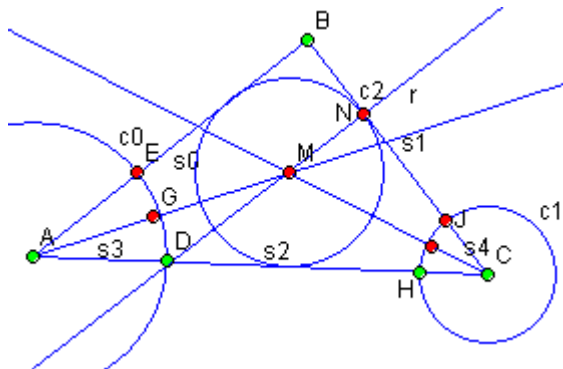
k)Movimente o ponto H e observe as medidas JH e HI.



Assunto: Incentro de um triângulo

Atividade 8

- a) Construa um triângulo  ABC.
- b) Construa a bissetriz do ângulo ABC.
- c) Construa a bissetriz do ângulo BCA.
- d) Obtenha a intersecção  M das duas bissetrizes.
- e) Construa a bissetriz do outro ângulo e observe que elas se interceptam no mesmo ponto. Este ponto recebe o nome de incentro.
- f) Apague com a borracha  as três bissetrizes deixando apenas o ponto M.
- g) Agora vamos construir uma circunferência  de centro M e que esteja inscrita no triângulo. Pelo ponto M trace uma reta perpendicular  ao lado BC do triângulo. Seja N o ponto de intersecção. Construa uma circunferência  de centro M e raio MN.



Assunto: Ortocentro de um triângulo

Atividade 9

a) Crie um triângulo  ABC

b) Pinte de vermelho o triângulo, marcando os pontos ABC e clicando sobre  para criar o polígono. Em seguida, dê um duplo clique sobre o polígono e selecione a cor vermelha.

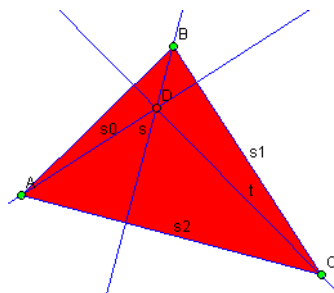
c) Pelo ponto A trace uma reta perpendicular  a BC. Clique em BC e em seguida clique em A.

d) Pelo ponto C trace uma reta perpendicular  a AB. Clique em AB e em seguida clique em C.

e) Crie o ponto D que é a intersecção  dessas retas.

f) Movimente um dos pontos A, B ou C para verificar que as duas retas passam pelo mesmo ponto D. Este ponto recebe o nome de **ortocentro** do triângulo.

g) Movimente um dos pontos A, B ou C e observe a posição do ortocentro em relação ao triângulo.



Anexo III

**Anexo III: MODELO DAS FICHAS DE ATIVIDADES PARA O
CALEIDOSCÓPIO**

ATIVIDADES

UM ESPELHO

Observando as figuras abaixo, como utilizar o espelho para obter as figuras 2 e 4 a partir das figuras 1 e 3, respectivamente?

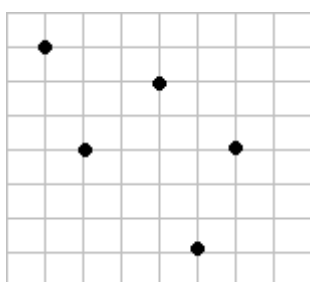


fig. 1

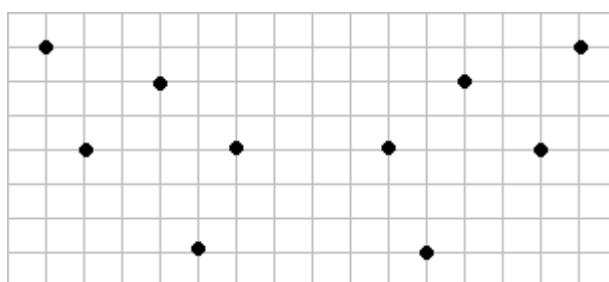


fig. 2

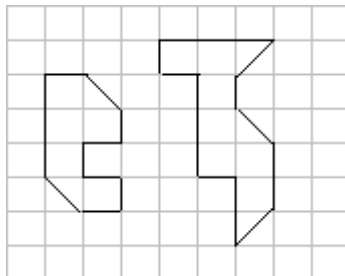


fig. 3

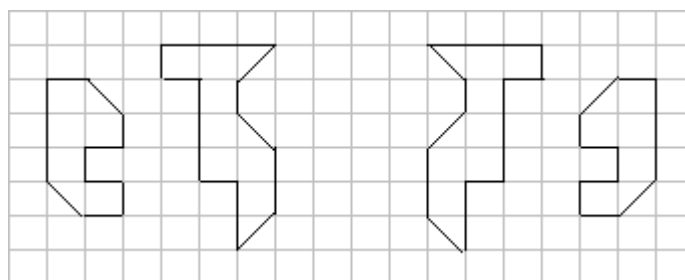
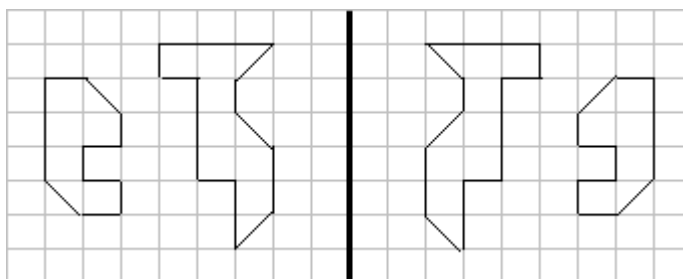
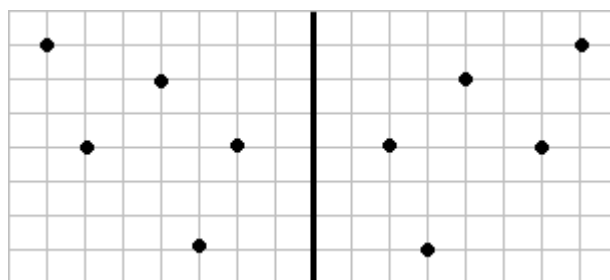


fig. 4

Atividade I

Para obtermos as figuras 2 e 4 a partir das figuras 1 e 3, respectivamente, bastava colocar o espelho sobre a linha apropriada. Vejamos:



Essa linha é chamada ***eixo de simetria reflexional***.

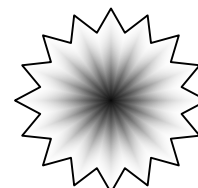
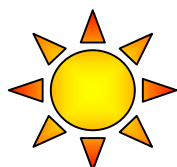
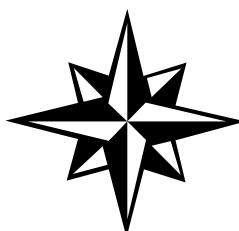
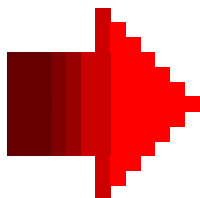
Ainda para assimilação do conceito de simetria reflexional, demos a seguinte atividade, que foi resolvida com muita criatividade:

No quadriculado abaixo, marque um eixo de simetria e desenhe figuras e suas reflexões.



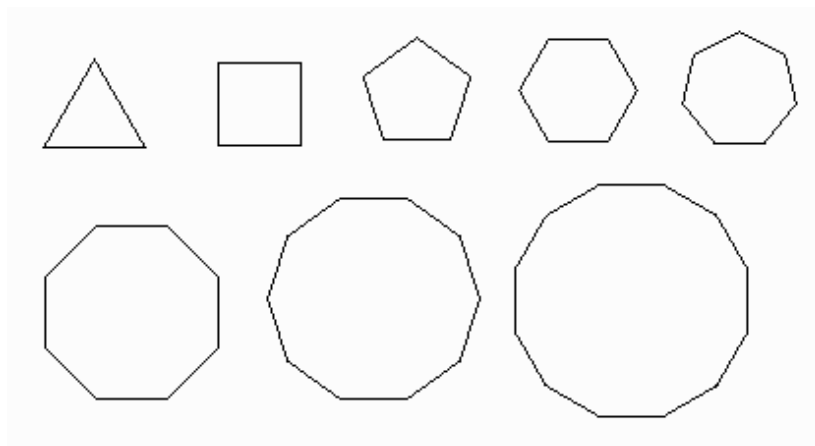
Atividade II

Utilizando um espelho, descubra todos os eixos de simetria das figuras que os possuem.



Atividade III

Abaixo estão desenhados alguns polígonos regulares. Descubra todos os eixos de simetria de cada um e registre na tabela.



Número de lados								
Número de eixos								

DOIS ESPELHOS

Com o objetivo de desenvolver as noções de *orientação* e *translação*, trabalhamos com dois espelhos paralelos na seguinte atividade:

Coloque um espelho sobre cada uma das linhas, de modo que as faces espelhadas fiquem frente a frente. Observe que os espelhos ficaram paralelos. Entre eles, coloque o sólido dado. Descreva o resultado.



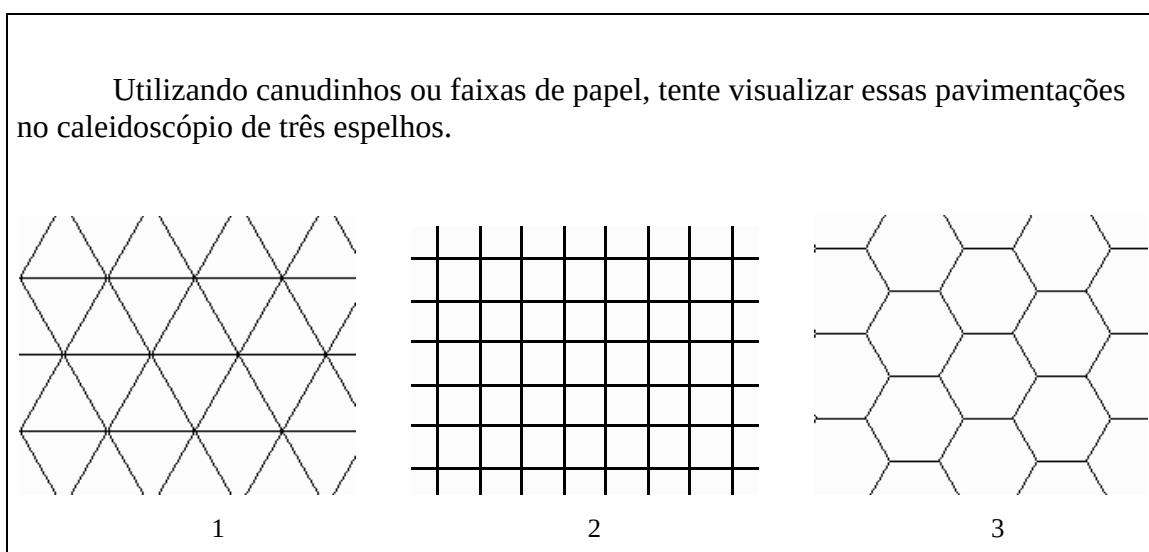
Atividade V

Utilizando os canudinhos, o palito ou as faixas de papel, como visualizar no diedro de espelhos polígonos regulares como triângulo equilátero, quadrado, hexágono regular, entre outros?

TRÊS ESPELHOS

Como pretendíamos trabalhar com pavimentação do plano via caleidoscópios, a atividade IX foi elaborada com o objetivo de familiarizar os alunos com descoberta e construção de bases substituíveis.

- ➔ um caleidoscópio modificado;
- ➔ canudinhos plásticos, faixas de papel;
- ➔ uma folha com um triângulo eqüilátero pontilhado desenhado, cujos lados mediam 22 cm cada;
- ➔ uma folha com um triângulo isósceles retângulo pontilhado desenhado, cujos lados mediam 22 cm cada cateto e 31,1 cm (aproximadamente) a hipotenusa;
- ➔ uma ficha de trabalho, como a que se segue:



Construção das bases

Os grupos receberam:

- ➔ régua e compasso;
- ➔ uma folha com um triângulo eqüilátero pontilhado desenhado, cujos lados mediam 22 cm cada;

- ➔ uma folha com um triângulo isósceles retângulo pontilhado desenhado, cujos lados mediam 22 cm cada cateto e 31,1 cm (aproximadamente) a hipotenusa;
- ➔ e uma ficha como a seguinte

Quando esses canudinhos ou faixas de papel são colocados entre os espelhos de forma que se consiga visualizar a pavimentação desejada, estamos construindo uma **base**.

Como você construiria, geometricamente, as bases para visualizar as pavimentações da atividade anterior? (utilizar as folhas com triângulos pontilhados).