

Estudos de Estabilidade no Sistema
v Andromedae A

Bárbara Celi Braga Camargo

Bárbara Celi Braga Camargo

Estudos de Estabilidade no Sistema ν Andromedae A

Dissertação de Mestrado apresentada à
Faculdade de Engenharia do Campus
de Guaratinguetá, Universidade Estadual
Paulista, para a obtenção do título de
Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Othon Cabo Winter
Co-orientador: Prof. Dr. Dietmar W. Foryta

GUARATINGUETÁ


2015

BÁRBARA CELI BRAGA CAMARGO

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
"MESTRE EM FÍSICA"

PROGRAMA: FÍSICA

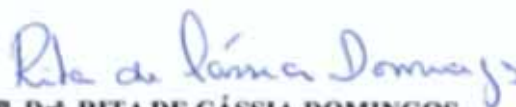
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. OTHON CABO WINTER
Orientador / UNESP/FEG



Prof. Dr. RITA DE CÁSSIA DOMINGOS
UNESP/Campus Experimental de São João da Boa Vista



Prof. Dr. ELBERT EINSTEIN NEHRER MACAU
INPE

Fevereiro de 2015

C172e	<p>Camargo, Bárbara Celi Braga Estudos de Estabilidade no Sistema <u>u Andromedae</u> A / Bárbara Celi Braga Camargo – Guaratinguetá, 2015. 63 f. : <u>il.</u> Bibliografia : f. 61-63</p> <p>Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2015. Orientador: Prof. Dr. <u>Othon Cabo Winter</u> Coorientador: Prof. Dr. <u>Dietmar William Foryta</u></p> <p>1.Astronomia 2. Perturbação (Astronomia) I. Título</p> <p style="text-align: right;">CDU 52(043)</p>
-------	--

DADOS CURRICULARES

BÁRBARA CELI BRAGA CAMARGO

NASCIMENTO 04.11.1988 – Rio de Janeiro / Brasil

FILIAÇÃO Regina Celi Braga Camargo
Carlos Alberto Camargo

2006/2012 Curso de Graduação em Bacharelado e Licenciatura em Física
Universidade Federal do Paraná - UFPR

2013/2014 Curso de Pós-Graduação em Física, Nível de Mestrado - em andamento
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá
Universidade Estadual Paulista-UNESP

Dedico este trabalho à minha família e aos meus amigos.

AGRADECIMENTOS

Com o prazo batendo à porta quase que não escrevo meus agradecimentos, pensei até em não escrever mas acho que não seria justo com quem me apoiou todo esse tempo.

Agradeço a minha família, minha mãe Regina Celi Braga Camargo (mulher batalhadora, trabalhadora em jornada dupla e tudo isso sendo linda), meu pai Carlos Alberto Camargo (físico fisiculturista, brincadeira, que manja muito), meu irmão Vítor Augusto Camargo (que me faz dar boas risadas), por me permitirem ir atrás dos meus sonhos e me apoiarem.

Aos meus avós, Sebastiana Luiza Queiroz (mulher corajosa) e Antônio Francisco de Oliveira (que alimentou minha fome por paçocas e leitura).

Aos meus avós de coração tio Zé e tia Nivelina.

Aos tios e primos Valderez, James, Jocelem e Roselane.

Aos meus orientadores Prof.Dr.Othon Cabo Winter e Prof.Dr.Dietmar William Foryta pela confiança.

Aos membros da banca pelas sugestões.

Ao meu companheiro de aventuras Gabriel Borderes Motta pelo bom coração.

As minhas amigas da graduação Isabela e Uila, que tornaram os primeiros anos da faculdade bem mais divertidos.

Aos amigos Gabriel Gulak Maia, Milene Dutra e Prof.Dr. Sérgio Camargo pelas ótimas discussões e por acrescentarem na minha formação.

As minhas amigas Heldssayane, Karina, Aline Becker, Aline Stéfanie, Vanessa Tauscheck, Tabata Soldan, Elisa Moraes e aos amigos Lucas Machado e Vitor Setem pelos anos de amizade.

Ao meu amigo Wagner Tauscheck, que mesmo não estando aqui sempre será uma inspiração para as minhas lutas.

Ao apoio emocional recebido pelos amigos Suny, Sila, Jorge, Thami, Rafael, Rúbia e Thiago.

Aos amigos Rafael Oliveira, dona Doca, seu João, seu José, dona Célia, dona Tânia Borderes e seu Fernando Motta por terem me acolhido em suas casas.

Aos colegas de pós-graduação que ajudaram a fortalecer esse trabalho.

A todos os amigos e familiares que estão por aí, é muita gente que contribui pra gente ser o que a gente é, eu levaria muito tempo pra colocar o nome de todos e como dito anteriormente, o tempo acabou.

Este trabalho contou com o suporte financeiro da
Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de
Nível Superior - **CAPES**

“Se nada ficar destas páginas, algo, pelo menos, esperamos que permaneça: nossa confiança no povo. Nossa fé nos homens e na criação de um mundo em que seja menos difícil amar”

Paulo Freire

CAMARGO, B.C.B. Estudos de Estabilidade no Sistema ν Andromedae A. 2015.
Dissertação de Mestrado (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, UNESP, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.

Resumo

O sistema ν Andromedae foi o primeiro sistema múltiplo descoberto cujo o corpo central é pertencente a sequência principal. Apesar de ser um sistema amplamente estudado seus dados ainda possuem incertezas. A detecção dos planetas que orbitam a estrela ν Andromedae A foi através do método de velocidade radial. Este método revela apenas uma faixa de possíveis valores de massas, os quais são dependentes do valor da inclinação do plano de visada. A massa do planeta ν And c , por exemplo, pode variar entre $1,9 M_J$ e $14,57 M_J$, sendo M_J a massa de Júpiter, dependendo da inclinação escolhida. Os planetas apresentam valores de excentricidade altos, o que não é explicado pela teoria de formação do sistema Solar. O quarto planeta foi previsto teoricamente em 2011, com isso, grande parte dos trabalhos realizados até agora foram considerados apenas os outros três planetas. Primeiramente realizamos uma breve revisão bibliográfica sobre as pesquisas feitas no Sistema ν Andromedae, desde a descoberta do primeiro planeta em 1997 até a previsão do quarto planeta em 2011. Separamos dois modelos para os nossos estudos. Abordamos em seguida, o estudo da perturbação secular no sistema ν Andromedae A, notamos que o modelo com massas grandes apresentam uma maior variação de excentricidade. Em sequência é apresentado um estudo sobre a estabilidade do quarto planeta em diversos cenários, mostrando que o modelo de massas pequenas tem uma maior faixa de estabilidade quando comparado ao modelo de massas grandes.

PALAVRAS-CHAVE: Sistemas extrassolares. ν Andromedae. Perturbação Secular. Estabilidade.

CAMARGO, B.C.B. Stability studies in the ν Andromedae System. 2015.

Master's degree in Physics - Engineering College of Guaratinguetá UNESP São Paulo State University, Guaratinguetá, 2015.

Abstract

The system ν Andromedae was the first multiple system discovered whose central body belongs to the main sequence. Despite to be a widely studied system your data still have uncertainties. The detection of planets orbiting the star ν Andromedae A was made using the radial velocity method. This method only give us possible values of masses, which are dependent on the value of the target plane tilt. The mass of the planet ν And c, for example, can have a mass range between $1.9M_J$ and $14.57M_J$, depending on the chosen inclination. The planets have high eccentricity values, which is not explained by the Solar System formation method. At this moment we know four planets for this system. The fourth planet was predicted theoretically in 2011, with this, the works made until now, just included three other planets. First we conducted a brief literature review on the research done about the system ν Andromedae, since the discovery of the first planet in 1997 until the fourth planet in 2011. We separate two models for our studies. We approach then the study of secular perturbation in the system ν Andromedae A, we note that the model with large masses have a greater variation of eccentricity. In sequence presents a study on the stability of the fourth planet in different scenarios, showing that the model of small masses have a greater range of stability when compared to the model of large masses.

KEYWORDS: Extrasolar Systems. ν Andromedae. Secular perturbation. Stability.

Lista de Figuras

1	SISTEMA UPSILON ANDROMEDAE. Na constelação de Andromeda temos a galáxia de Andromeda como principal objeto. A estrela ν Andromedae A está a direita. A esquerda temos uma imagem do General Stars Catalog de 60 minutos de arco de largura por 40 minutos de arco de altura centrada na estrela cuja coordenada J2000 é $\alpha = 01\text{h } 36\text{m } 47.84216\text{s}$ $\delta = +41^\circ 24' 19.6443$	2
1.1	COMPARAÇÃO DO SISTEMA ν ANDROMEDAE COM AS DISTÂNCIAS RELATIVAS AOS PLANETAS INTERNOS DO SISTEMA SOLAR (REPRODUZIDA DE CASSEN ET AL., 2005)	7
2.1	POSIÇÃO DOS VETORES \mathbf{r}_1 E \mathbf{r}_2 DAS DUAS MASSAS m_1 E m_2 , EM RELAÇÃO AO CORPO CENTRAL DE MASSA m_c	12
2.2	ELEMENTOS ORBITAIS. retirado de www.feiradeciencias.com.br em fevereiro de 2015	13
2.3	EVOLUÇÃO SECULAR DA EXCENTRICIDADE E INCLINAÇÃO DE SATURNO E JÚPITER. A esquerda são apresentados os resultados obtidos no nosso estudo. A direita os resultados publicados por Murray & Dermott (1999).	18
2.4	EVOLUÇÃO SECULAR DA EXCENTRICIDADE DOS PLANETAS DO SISTEMA 47 UMA. A figura da esquerda corresponde aos resultados que obtivemos. A figura da direita foi retirada do trabalho de Barnes & Greenberg (2006), sendo as linhas finas os resultados obtidos da teoria secular e as linhas espessas correspondentes a integração numérica.	19
2.5	EVOLUÇÃO DAS EXCENTRICIDADES PARA O MODELO DE MASSAS PEQUENAS. A evolução da excentricidade á partir da teoria secular para os planetas c (em vermelho) e d (em verde) e pela integração numérica para c (em azul) e d (em roxo)	21
2.6	VARIAÇÃO TEMPORAL DA EXCENTRICIDADE PARA O MODELO DE MASSAS PEQUENAS . Utilizando os modelos de massas pequenas aplicamos a teoria secular, cujo o resultado é apresentado a esquerda. Este resultado é compatível com os resultados encontrados por Barnes & Greenberg (2006), o qual é apresentado a direita.	22

2.7	EVOLUÇÃO SECULAR DA EXCENTRICIDADE NO MODELO DE MASSAS GRANDES. Evolução temporal da excentricidade para o planeta c em vermelho e para o planeta d em verde.	24
2.8	EVOLUÇÃO DA EXCENTRICIDADE POR INTEGRAÇÃO NUMÉRICA NO MODELO DE MASSAS GRANDES. variação temporal da excentricidade para o planeta c em azul e para o planeta d em roxo.	24
2.9	EVOLUÇÃO DA INCLINAÇÃO NO CASO SECULAR NO MODELO DE MASSAS GRANDES. Variação temporal da inclinação para o planeta c , em vermelho, e para o planeta d em verde.	25
2.10	EVOLUÇÃO DA INCLINAÇÃO POR INTEGRAÇÃO NUMÉRICA PARA OS MODELOS DE MASSAS GRANDES. variação temporal da inclinação para o planeta c , apresentado em azul, e o planeta d , apresentado em roxo.	26
2.11	A EVOLUÇÃO SECULAR UTILIZANDO OS DADOS DO MODELO DE MASSAS GRANDES: A esquerda os resultados da evolução da excentricidade dos planetas c (triângulos vermelhos) e d (cruzes azuis). A direita temos a evolução da inclinação (McArthur et al., 2010).	27
2.12	EVOLUÇÃO SECULAR DE v AND c (EM PRETO) E d (EM VERMELHO): A esquerda temos a evolução das excentricidades e a direita os resultados relativos a evolução da inclinação dos dois planetas (Barnes et al, 2010).	28
2.13	A EVOLUÇÃO DA EXCENTRICIDADE E INCLINAÇÃO PARA O MODELO DE MASSAS GRANDES COM ACHATAMENTO. A evolução da variação da excentricidade e inclinação estão apresentados em azul para o planeta c e em roxo para o planeta d	28
3.1	AMPLITUDE DE VARIAÇÃO DA EXCENTRICIDADE DE v AND c E v AND d CONFORME A VARIAÇÃO DAS MASSAS (EM MASSAS DE JÚPITER) USANDO TEORIA SECULAR. Na esquerda observamos a amplitude da excentricidade do planeta c . A figura da direita mostram os resultados relativos a d	31
3.2	AMPLITUDE DA VARIAÇÃO DA EXCENTRICIDADE A PARTIR DA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA Variação da excentricidade de v And c e v And d conforme a variação da massa (em massas de Júpiter), a partir da integração numérica. Na esquerda observamos a variação da excentricidade do planeta v And c . A figura da direita mostram os resultados relativos ao v And d	32
3.3	DIFERENÇA DE AMPLITUDE DA EXCENTRICIDADE DOS PLANETAS c E d DOS RESULTADOS SECULARES PARA OS RESULTADOS NUMÉRICOS, CONFORME A VARIAÇÃO DA MASSA (EM MASSAS DE JÚPITER). Na esquerda observamos a variação da excentricidade do planeta v And c . A figura da direita mostram os resultados relativos ao v And d	33

3.4	DIFERENÇA DA EXCENTRICIDADE DE C E D DO RESULTADO SECULAR PARA O RESULTADO NUMÉRICO, CONFORME A VARIAÇÃO DA MASSA (EM MASSAS DE JÚPITER). Na esquerda observamos a variação da excentricidade do planeta <i>v</i> And <i>c</i> . A figura da direita mostram os resultados relativos ao <i>v</i> And <i>d</i>	33
4.1	EVOLUÇÃO DE EXCENTRICIDADE PARA O MODELO DE MASSAS PEQUENAS DO SISTEMA <i>v</i> ANDROMEDAE. Variação excentricidade para <i>v</i> And <i>c</i> , <i>v</i> And <i>d</i> e <i>v</i> And <i>e</i>	35
4.2	EVOLUÇÃO DO SEMI-EIXO MAIOR PARA O MODELO DE MASSAS PEQUENAS DO SISTEMA <i>v</i> ANDROMEDAE. Evolução do semi-eixo maior para <i>v</i> And <i>c</i> , <i>v</i> And <i>d</i> e <i>v</i> And <i>e</i>	36
4.3	VARIAÇÃO DO RAIOS ORBITAL PARA O MODELO DE MASSAS PEQUENAS DO SISTEMA <i>v</i> ANDROMEDAE. Variação do raio para os planetas <i>c</i> , <i>d</i> e <i>e</i>	37
4.4	EVOLUÇÃO DE EXCENTRICIDADE PARA O MODELO DE MASSAS GRANDES DO SISTEMA <i>v</i> ANDROMEDAE. Evolução da excentricidade para <i>v</i> And <i>c</i> , <i>v</i> And <i>d</i> e <i>v</i> And <i>e</i>	38
4.5	EVOLUÇÃO DO SEMI-EIXO MAIOR PARA O MODELO DE MASSAS GRANDES DO SISTEMA <i>v</i> ANDROMEDAE. Evolução do semi-eixo maior para <i>v</i> And <i>c</i> , <i>v</i> And <i>d</i> e <i>v</i> And <i>e</i>	38
4.6	EVOLUÇÃO DO RAIOS ORBITAL PARA O MODELO DE MASSAS GRANDES DO SISTEMA <i>v</i> ANDROMEDAE. Evolução do Raio orbital para <i>v</i> And <i>c</i> , <i>v</i> And <i>d</i> e <i>v</i> And <i>e</i>	39
4.7	VARIAÇÃO DA INCLINAÇÃO PARA O MODELO DE MASSAS GRANDES DO SISTEMA <i>v</i> ANDROMEDAE. Variação da inclinação para <i>v</i> And <i>c</i> , <i>v</i> And <i>d</i> e <i>v</i> And <i>e</i>	40
4.8	TEMPO DE ESCAPE. O tempo de ejeção do sistema para o quarto planeta com diversas condições iniciais de excentricidade, semi-eixo maior (em UA) e inclinações 0°, 5°, 10°, 15° e 20°. O diagrama de cores corresponde ao tempo de ejeção em anos, estando em vermelho as condições onde os corpos são ejetados ou se mantém além do tempo total de integração de 1 milhão de anos.	41
4.9	TEMPO DE ESCAPE DO SISTEMA PARA O QUARTO PLANETA COM AS CONDIÇÕES DO MODELO DE MASSAS PEQUENAS. Temos a variação da excentricidade e semi-eixo maior (UA) com a inclinação fixada em 0°.	42

Lista de Tabelas

1.1	MODELOS DE v ANDROMEDAE A. Parâmetros correspondentes a estrela e aos planetas dos dois sistemas utilizados neste trabalho. Não será listados os parâmetros correspondentes ao planeta b	10
2.1	MASSAS E ELEMENTOS ORBITAIS DE JÚPITER E SATURNO.	18
2.2	MASSA E ELEMENTOS ORBITAIS DOS PLANETAS b E c DE 47 URSAE MAJORIS.	19
2.3	MASSAS E ELEMENTOS ORBITAIS DO MODELO UTILIZADO POR BARNES & GREENBERG (2006)	22

Sumário

Dados curriculares	i
Agradecimentos	iii
Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xi
Introdução	1
1 O Sistema ν Andromedae	4
1.1 Métodos de Detecção	4
1.2 Características dos Planetas do Sistema ν Andromedae	6
1.3 Estudos sobre a Dinâmica do Sistema	8
2 Perturbação Secular no Sistema ν Andromedae	11
2.1 Perturbação Secular do Problema de 3-Corpos	11
2.2 Testes Iniciais	17
2.3 Estudo da Teoria Secular no Sistema ν Andromedae	20
3 Estudo de Perturbação Secular em Função das Massas	30
3.1 Perturbação Secular no Sistema ν Andromedae em Função das Massas . . .	30
4 A evolução do Sistema ν Andromedae Com a Inclusão de Um Quarto Planeta	34
4.1 Estabilidade de Um Quarto Planeta nos Dois Modelos	34
4.2 Estabilidade de Um Quarto Planeta	40
Considerações Finais	44
REFERÊNCIAS	46

Introdução

Com o advento da fotografia e da espectroscopia os catálogos estelares cresceram em número de estrelas e em quantidade de propriedades físicas para caracteriza-las. Uma das estrelas do Catálogo Henry Draper, a HD 9826 é a ν -ésima estrela na constelação de Andromedae. Esta estrela desde cedo foi classificada como uma estrela de grande movimento próprio, o que significa que esta estrela é relativamente próxima do Sol, uma distância de somente 13,47 pc (1 parsec corresponde a 3,2616 anos luz). A estrela ν Andromedae A é espectralmente classificada como F8 V, ou seja, é uma estrela mais brilhante do que o Sol, com $3,57 L_{\odot}$ onde L_{\odot} corresponde a luminosidade do Sol. A partir do seu brilho estima-se a massa de $1,3 M_{\odot}$ e um raio de $1,56 R_{\odot}$, onde M_{\odot} e R_{\odot} , corresponde a massa e raio do sol, respectivamente (Butler et al., 1999; Curiel et al., 2011).

A estrela ν Andromedae A faz parte de um sistema binário cuja a segunda estrela, ν Andromedae B, uma anã vermelha de classificação M4.5 V está localizada a uma distância (no plano do céu) de cerca de 750 UA da estrela primária. Não há certeza sobre a distância de separação entre as duas estrelas pois o deslocamento ao longo da linha de visada entre nós e as estrelas ν Andromeda A é desconhecida, assim este valor é uma separação mínima. A binária foi descoberta em 2002, em dados coletados como parte do “Two Micron All Sky Survey”, cujo o objetivo foi um levantamento de todo o céu em três faixas de onda infravermelhos, tendo sido realizadas as observações para a pesquisa entre 1997 e 2001, em Mt. Hopkins, Arizona para os dados Hemisfério Norte e do Observatório Cerro Tololo Inter-American, Chile, para o hemisfério sul. A estrela é menos massiva e muito menos luminosa que o Sol (Lowrance et al., 2002).

A partir das observações na velocidade radial, uma oscilação de 10 m/s indicou a existência de um planeta orbitando ν Andromeda A (denotaremos apenas como ν Andromedae) identificada por Butler et al. (1997). Este planeta, que passou a ser denotado como ν Andromeda b (ν And b), é um objeto sub-jupiteriano com uma massa estimada de $0,69 M_J$, onde M_J corresponde a massa de Júpiter, orbitando muito próximo do corpo central, com um período orbital inicialmente estimado em 12 dias e posteriormente revisado para menos do que 9 dias (Butler et al., 1997).

Em 1999, Butler et al., anunciou a descoberta de mais dois planetas orbitando a estrela ν Andromedae, ν And c e ν And d, detectados através da técnica de Doppler. Esta técnica, também chamada de técnica de velocidade radial, foi a responsável por diversas detecções

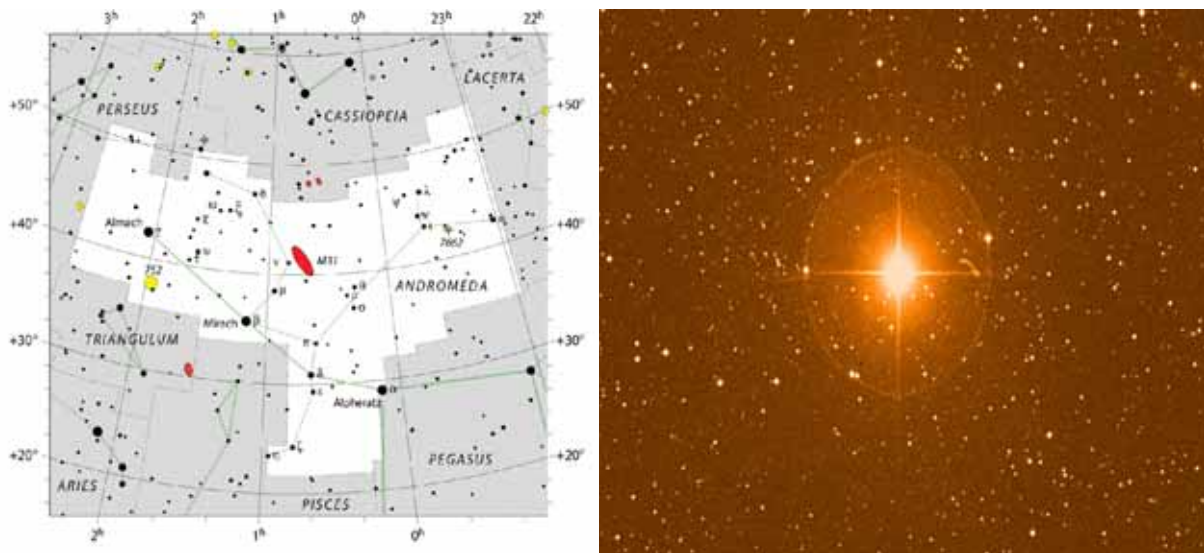


Figura 1: SISTEMA UPSILON ANDROMEDAE. Na constelação de Andromeda temos a galáxia de Andromeda como principal objeto. A estrela ν Andromedae A está a direita. A esquerda temos uma imagem do General Stars Catalog de 60 minutos de arco de largura por 40 minutos de arco de altura centrada na estrela cuja coordenada J2000 é $\alpha = 01^{\text{h}} 36^{\text{m}} 47.84216^{\text{s}}$ $\delta = +41^{\circ} 24' 19.6443''$.

de planetas, e é realizada através da medição das mudanças na componente da velocidade da estrela ao longo da linha de visada. A detecção via velocidade radial não apresenta dados de massas bem definidas aos planetas do sistema, pois no processo conseguimos apenas a massa em função da inclinação, de modo que o que é medido é $M \sin i$, onde M é a massa e i é a inclinação em relação ao plano de visada. Os valores podem estar numa faixa de valores, por exemplo, o planeta ν And c pode ter massa entre $1,9 M_{\text{J}}$ (Curiel et al., 2011) e $14,57 M_{\text{J}}$ (Barnes et al., 2010). Devido a essa disparidade nós dividimos dois grupos com base na literatura onde chamaremos de modelos de massas “grandes” e “pequenas”.

Decorre naturalmente a questão sobre a estabilidade dinâmica do sistema de planetas, pois pelo menos dois planetas tem massas maiores do que Júpiter e portanto devem interagir fortemente. Como este sistema existe, e estima-se que a estrela ν Andromedae, tenha uma idade de 3.2 bilhões de anos, de alguma maneira este sistema dinâmico deve ser estável por esta escala de tempo.

Estabelecido os dois modelos, “massas grandes” e “massas pequenas”, o objetivo deste trabalho é determinar a estabilidade dinâmica dos dois modelos mencionados levando-se em conta um quarto planeta cuja existência foi inferida por Curiel et al.(2011). Seria este sistema, de grandes massas, estável na presença deste quarto planeta? Seria o sistema com pequenas massas estável quando consideradas inclinações relativas entre as órbitas planetárias?

Além das questões relativas as massas, os planetas possuem uma grande excentricidade

cuja a origem é ainda desconhecida. Especula-se a possibilidade da interferência da estrela binária, *v* Andromedae B, ou a migração dos planetas durante a formação do sistema, porém esse estudo não fará parte do atual trabalho.

No Capítulo 1, apresentaremos uma revisão bibliográfica de trabalhos sobre as características dos planetas e a dinâmica no sistema *v* Andromedae A. Faremos também uma breve análise sobre a influência de *v* Andromedae B no sistema.

No Capítulo 2, estudaremos as perturbações seculares neste sistema, a partir da teoria encontrada no Murray & Dermott (1999). Apresentaremos os resultados referentes a dois modelos propostos para o sistema *v* Andromedae.

No Capítulo 3, estudaremos o comportamento do sistema *v* Andromedae em diversos cenários.

No Capítulo 4, discutiremos a inclusão do quarto planeta no sistema. Estudaremos as possíveis condições ideais para a estabilidade do novo corpo.

Finalizamos com uma discussão dos resultados obtidos e as possibilidades de trabalhos futuros.

Capítulo 1

O Sistema ν Andromedae

Iniciaremos este capítulo descrevendo os principais métodos de detecção de exoplanetas. Em seguida, realizaremos uma breve revisão na literatura de pesquisas realizadas no Sistema ν Andromedae. Primeiramente discutindo sobre as características dos planetas e separando os modelos para o trabalho. Na terceira seção, discutiremos os trabalhos realizados em dinâmica no sistema, nos concentrando nos trabalhos realizados em teoria secular e estabilidade, que serão os tópicos abordados nos capítulos subsequentes.

1.1 Métodos de Detecção

O método de detecção mais antigo é o astrométrico que busca medir o deslocamento geométrico da estrela (Ferraz-Mello, 2014). Porém para o caso de exoplanetas, devido as grandes distâncias, é necessário refinar os resultados utilizando outros métodos.

A maneira mais eficiente de investigar o movimento de uma estrela consiste em usar o efeito Doppler para medir a velocidade com que se desloca. Isto é feito medindo-se as variações nas posições das linhas do espectro da estrela. Esta técnica foi a responsável pela quase totalidade das descobertas feitas até a missão Kepler. A velocidade medida resulta da composição de dois movimentos: O movimento da estrela ao redor do centro de gravidade do sistema e o movimento de todo o sistema no espaço. De fato, o efeito Doppler mede a projeção sobre a linha de visada, da velocidade da estrela em relação ao observador (Ferraz-Mello, 2014).

Outra técnica importante para a busca de planetas extra-solares, é a fotometria das estrelas. Se uma estrela tem um planeta e se, em seu movimento, o planeta se interpõe entre a estrela e a Terra, ocorre uma diminuição da quantidade de luz recebida na Terra. A observação dessa diminuição repetidas vezes permite identificar sua causa como sendo o trânsito de um planeta em frente à estrela. A ocorrência do trânsito exige que o sistema tenha uma geometria particular, o plano do movimento do planeta tem que estar sendo visto de perfil. Em compensação, mesmo a diminuição da luz pelo trânsito de um planeta

como a Terra pode ser observada. Essa técnica é usada para a busca de exoplanetas a partir de satélites artificiais da Terra, como veremos a seguir (Ferraz-Mello, 2014).

A maioria das novas descobertas foram através da sonda Kepler. A Kepler consiste em um observatório espacial projetado pela NASA que tem como missão a procura por planetas extrassolares. A sonda observa as estrelas mais brilhantes do céu, e terá a duração de quatro anos, com o objetivo de detectar alguma ocultação periódica de estrelas por um de seus planetas.

Quando um planeta passa na frente de uma estrela onde a referência é um observador externo, este evento é denominado de trânsito. O trânsito de planetas produzem uma pequena alteração no brilho de uma estrela. Esta alteração deve ser absolutamente periódica se for causada por um planeta. O trânsito produzido por um mesmo planeta deverá produzir sempre a mesma alteração no brilho de uma estrela, no mesmo intervalo de tempo.

O tamanho da órbita e a dimensão do planeta poderão ser calculados a partir do seu período (quanto tempo um planeta leva para orbitar uma vez ao redor da estrela) e do nível de alteração do brilho, quando em trânsito (quanto o brilho de uma estrela enfraquece). Do tamanho da órbita do planeta e da temperatura da estrela poderão ser avaliadas as características da temperatura do planeta.

A missão Kepler até agora registrou cerca de 1019 planetas, e candidatos a planetas temos exatamente 4175 (NASA Kepler Mission, 2014).

A Space Interferometry Mission, também chamada SIM Planet Quest, é uma missão que a NASA com previsão de lançamento entre outubro de 2014 e abril de 2015. O principal objetivo de coletar medidas astrométricas das distâncias de algumas centenas de estrelas com uma precisão 100 vezes maior do que se pode fazer atualmente. Com isto, há possibilidade de determinar o brilho real das estrelas, tornando mais precisas as informações que se tem sobre suas composições químicas e evolução.

O SIM será um interferômetro composto por três telescópios. Os raios das estrelas, captados pelos três telescópios são sobrepostos de forma a interagirem entre si, resultando em um efeito físico chamado interferência e fazendo com que os três telescópios funcionem como um único, porém grande, telescópio.

A missão SIM também procurará por exoplanetas em cerca de 200 estrelas. A técnica usada será a astrometria. Usando estrelas de fundo como referência, a missão SIM será capaz de detectar pequenas perturbações periódicas na posição de cada estrela, causadas pela presença de planetas orbitando ao seu redor. Os instrumentos da missão serão suficientemente sensíveis para detectar planetas do tipo terrestre nas zonas habitáveis e planetas tipo Júpiter a grandes distâncias (NASA's Solar System Exploration, 2014).

As sondas Terrestrial Planet Finder ou TPF são um projeto de sondas espaciais não tripuladas, proposto pela Agência Espacial Estadunidense, a NASA, com a finalidade de lançar um conjunto de telescópios orbitais com o objetivo de detectar planetas como a

Terra que estejam orbitando próximo a estrelas, a fim de procurar pela existência de vida nestes planetas. Faz parte do programa Planet Quest (NASA's Solar System Exploration, 2014).

A agência Espacial Europeia tem seu próprio projeto. A sonda Darwin é projeto de sonda espacial não tripulada, com a finalidade de lançar um conjunto de telescópios orbitais com o objetivo de detectar planetas como a Terra que estejam orbitando próximo a estrelas, a fim de procurar pela existência de vida nestes planetas. O seu lançamento está previsto para depois de 2015 e a sonda deverá permanecer no Ponto lagrangiano L2.

O projeto consiste em três telescópios, cada um com 3,5 m de diâmetro. Mais quatro naves espaciais auxiliariam na junção da luz coletada por estes três telescópios, para processá-las e enviar os dados coletados para a Terra.

Estudar outros sistemas é importante para testarmos a validade universal das teorias que aplicamos ao sistema solar e a possibilidade de construção de teorias mais elaboradas para explicar a formação de sistemas e a formação da Terra, da forma como conhecemos.

1.2 Características dos Planetas do Sistema

v Andromedae

Em 1997, Butler et al., divulgaram a descoberta do primeiro planeta orbitando a estrela *v* Andromedae, o *v* Andromedae b (*v* And b). Dois anos depois é anunciado a descoberta de mais dois planetas, *v* And c e *v* And d (Butler et al., 1999).

A estrela *v* Andromedae, torna-se a primeira estrela pertencente a sequência principal a se detectar mais de um planeta em órbita.

Na figura 1.1 comparamos as distâncias encontradas para os planetas do sistema *v* Andromedae A com as distâncias relativas aos planetas mais internos do Sistema Solar (Cassen et al., 2005).

A detecção dos planetas do sistema *v* Andromedae ocorreu através da técnica de velocidade radial. O método de velocidade radial é feito medindo-se as variações nas posições das linhas do espectro da estrela. A velocidade medida resulta da composição de dois movimentos: O movimento da estrela ao redor do centro de gravidade do sistema e o movimento de todo o sistema no espaço. De fato, o efeito Doppler mede a projeção sobre a linha de visada, da velocidade da estrela em relação ao observador (Ferraz-Mello, 2014).

Devido a técnica de detecção ter incerteza nos valores relativos as massas e inclinações, os trabalhos realizados consideram diversos valores possíveis para estes parâmetros. Em nosso trabalho selecionamos os dados utilizados por Barnes et al. (2006), McArthur et al. (2010) e Curiel et al. (2011).

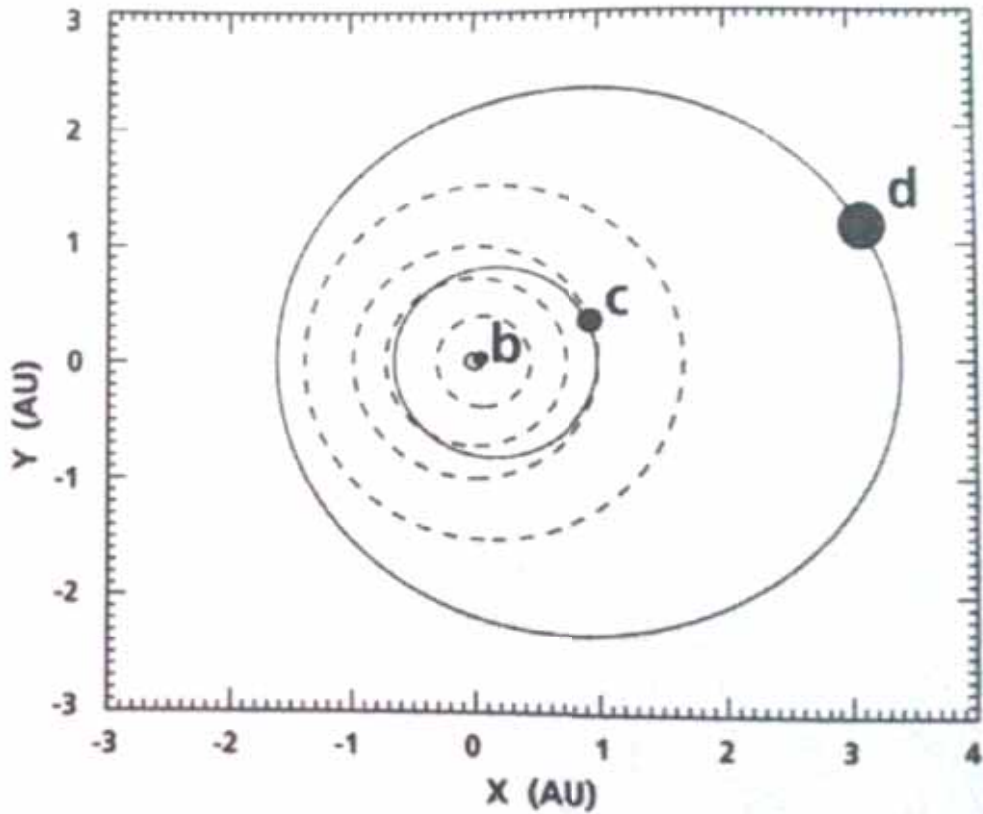


Figura 1.1: COMPARAÇÃO DO SISTEMA ν ANDROMEDAE COM AS DISTÂNCIAS RELATIVAS AOS PLANETAS INTERNOS DO SISTEMA SOLAR (REPRODUZIDA DE CASSEN ET AL., 2005)

Barnes & Greenberg (2006), utilizaram um modelo coplanar e o qual só contém os planetas ν And c e ν And d. Estes planetas apresentam massas de $1,943 M_J$ para o planeta c e $3,943 M_J$ para o planeta d, onde M_J equivale a uma massa de Júpiter. Esse sistema apresenta valores similares aos utilizados por Chavez et al. (2014), que serão apresentados mais adiante.

McArthur et al. (2010) utilizando as medidas de velocidade radial do telescópio Hobby-Eberly com os dados astrométricos obtidos pelo Hubble Space Telescope, refinaram os parâmetros orbitais e determinaram as inclinações orbitais e ângulos de posição dos nodos ascendentes das componentes de ν And c e ν And d. Com estas inclinações e usando a massa da estrela como $1,31 M_\odot$, determinaram as massas de ν And c de $13,98 M_J$, e ν And d de $10,25 M_J$. A massa encontrada para o planeta b, foi de $1,7 M_J$.

No trabalho de McArthur et al. (2010), também indicaram as inclinações de ν And c como $7,87^\circ$ e ν And d de $23,76^\circ$, e com longitudes dos nodos ascendentes inferidos de $\Omega_c = 236,853^\circ$ e $\Omega_d = 4,07^\circ$. Estas inclinações e longitudes dos nodos ascendentes permitiram a determinação da inclinação mútua (Φ), soma das inclinações dos planetas em referência ao plano das componentes dos corpos ν And c e ν And d, sendo o valor calculado de aproximadamente $29,9^\circ$ (Dvorak, 2007).

Em Curiel et al. (2011), foi utilizado uma configuração coplanar e massas pequenas.

Os valores das massas seriam de 0,69, 1,98, 4,13 e 1,06 M_J , para ν And b, ν And c, ν And d e ν And e, respectivamente. Nesse modelo coplanar a configuração permanece estável por pelo menos 1 milhão de anos. Apesar da configuração estável de Curiel et al. (2011) este modelo é restrito pois não considera possíveis inclinações do sistema.

A partir dos trabalhos discutidos nesta seção, montamos a tabela 1.1, onde separamos dois sistemas planetários que serão utilizados neste trabalho.

1.3 Estudos sobre a Dinâmica do Sistema

Por ser um dos primeiros sistemas conhecido, ν Andromedae, apresenta uma grande variedade de trabalhos sobre sua dinâmica. Em nosso trabalho selecionamos alguns estudos referentes a perturbação secular e estabilidade do sistema, pois serão os tópicos tratados nos capítulos subsequentes.

O trabalho de McArthur et al. (2010), utiliza os dados de massas grandes com inclinação e sugere que esta configuração permaneceu estável para a integração em milhões de anos, porém pode ser instável em intervalos de tempo maiores. Neste modelo, incluíram a relatividade geral, um achatamento estelar de $J_2 = 10^{-3}$ e assumiram um raio estelar de $1,26 R_\odot$.

Curiel et al. (2011), procurando por sistemas planetários com grandes resíduos depois de subtrair os modelos de 3-corpos, descobriu que um sistema com grandes resíduos é ν Andromedae. Além disso, verificou que os resíduos mostram uma tendência da velocidade radial que sugere a presença de uma órbita de longo período adicional no sistema, ou seja, é possível a presença de um quarto planeta neste sistema planetário. A órbita do quarto planeta coincidiria com uma ilha de estabilidade a qual foi relatada por Rivera & Haghighipour (2007).

No trabalho de Curiel et al. (2011) o sistema foi integrado por pelo menos 10 milhões de anos usando o integrador híbrido do pacote Mercury (Chambers, 1999). Para a maioria das integrações, o pacote Mercury usa um integrador simpléctico misto, com um intervalo de tempo aproximadamente igual a $1/50$ do período orbital kepleriano do planeta mais próximo da estrela. Durante as passagens próximas entre dois corpos, o Mercury muda para o integrador Burlish-Stoer que tem uma maior precisão.

As simulações com 3 e 4 planetas mostrou-se estável durante 10 milhões de anos. No entanto, as simulações com 5 planetas acabou por ser instável em tempos muito curtos. O quinto planeta foi expulso depois de alguns poucos milhares de anos. Isto pode ser explicado devido à proximidade da órbita deste novo planeta (0,69 UA) com o planeta ν And d (0,83 UA), a massa muito menor deste quinto planeta em comparação com a massa de ν And d e a excentricidade '...relativamente grande de ν And d. Isto sugere que o quinto sinal encontrado nos dados não está associada a um quinto planeta do sistema (Curiel et al., 2011).

As mudanças Doppler nem sempre correspondem aos planetas. Heterogeneidades da superfície estelar, como manchas, plages (regiões brilhantes na cromosfera do Sol, normalmente encontradas perto de manchas solares), ou padrões convectivos podem quebrar a distribuição uniforme entre as aparentes mudanças de velocidade radial. Isso pode introduzir ruído nas medições de velocidade radial, que é normalmente referido como "jitter" (Curiel et al., 2011).

É importante salientar que o estudo realizado por Curiel et al. (2011) foi feita com massas pequenas e órbitas coplanares. As massas e elementos orbitais encontrados por Curiel et al. (2011) para um sistema estável foram utilizados posteriormente no trabalho de Chavez et al. (2014) no estudo de ressonâncias no sistema *Andromedae*.

Em Barnes et al. (2010), examinaram o comportamento secular do sistema através de uma simulação de N -corpos usando o pacote Mercury (Chambers, 1999) com o integrador híbrido. Os resultados mostraram que o comportamento orbital do modelo para v And c e d proposto por McArthur et al. (2010), difere bastante dos modelos orbitais identificados por estudos anteriores que não tinham conhecimento da inclinação ou massa dos planetas.

Segundo o trabalho de Barnes et al. (2010), a inclinação mútua entre v And c e v And d é substancial e oscila com uma amplitude de cerca de 10° . A estrela v Andromedae B por si só não conseguia bombear a inclinação mútua até grandes valores, mesmo que os planetas começassem com uma inclinação significativa. No entanto, ela pode ter esculpido o sistema planetário, incitando uma instabilidade que levou à ejeções de planetas anteriormente vinculado. Mesmo sem considerarem a estrela B, a dispersão planeta-planeta poderia ter levado o sistema ao estado observado. Esse processo pode facilmente reproduzir o movimento apsidal, mas a inclinação mútua até os valores observados é difícil e, provavelmente requer a remoção de um planeta com massa de $5 M_J$.

A estrela B estaria à aproximadamente 750 UA da estrela A. Para verificarmos a influência da estrela v Andromedae B, utilizamos o pacote Mercury (Chambers, 1999) com a inclusão das duas estrelas e dos planetas c e d. Utilizamos os parâmetros apresentados no trabalho de Barnes & Greenberg (2006) e integramos por 10 mil anos. Os parâmetros para a estrela B foram retirados do trabalho de Lowrance et al. (2002), onde divulgaram a descoberta da estrela B. Os resultados encontrados mostram que a estrela B não influencia na evolução dos planetas, sendo os resultados encontrados iguais aos apresentados por Barnes & Greenberg (2006), onde não é considerado a segunda estrela v Andromedae B. Como comentado em Barnes & Greenberg (2006) a estrela B pode ter contribuído para a estrutura atual do sistema, porém para verificarmos seriam necessários outros estudos que estão além do escopo deste trabalho.

Devido aos resultados que encontramos não iremos considerar a estrela B em nossos estudos. Iremos também suprimir o planeta b, pois o planeta localiza-se muito próximo da estrela v Andromedae e sua massa é bem menor comparada aos seus companheiros. Em nosso trabalho, para efetuarmos os cálculos numéricos, sempre utilizaremos o pacote

Mercury (Chambers, 1999).

Concluimos que apesar de ser um dos principais sistemas, as configurações ainda não são bem determinados, tendo uma faixa de valores possíveis de massa e de inclinações, e diversos estudos realizados em paralelos. Usaremos como base as massas pequenas, utilizadas por Curiel et al. (2011), que chamamos de "modelo de massas pequenas" e as massas grandes estudadas por McArthur et al. (2010), que denotamos como "modelo de massas grandes". A partir dos dados retirados dos artigos, estudaremos a perturbação secular em diferentes modelos e a estabilidade do sistema ν Andromedae.

Tabela 1.1: MODELOS DE ν ANDROMEDAE A. Parâmetros correspondentes a estrela e aos planetas dos dois sistemas utilizados neste trabalho. Não será listados os parâmetros correspondentes ao planeta b

Modelo		Massas Grandes ^{α}	Massas Pequenas ^{β}
M_* (M_\odot)		1,31	1,30
M_p (M_J)	c	14,57	1,981
	d	10,19	4,132
	e	-	1,059
a (UA)	c	0,861	0,8277
	d	2,703	2,5133
	e	-	5,2455
I ($^\circ$)	c	16,7	-
	d	13,5	-
	e	-	-
e	c	0,239	0,2596
	d	0,274	0,2987
	e	-	0,0053
Ω ($^\circ$)	c	295,5	-
	d	115,0	-
	e	-	-
ω ($^\circ$)	c	290,0	241,7
	d	240,8	258,8
	e	-	367,3

^{α} McArthur et al. (2010); ^{β} Curiel et al. (2011).

Capítulo 2

Perturbação Secular no Sistema ν Andromedae

Neste Capítulo abordaremos o estudo da perturbação secular no sistema ν Andromedae. Na primeira seção, iniciaremos uma revisão da teoria da perturbação secular. Em seguida, testaremos a teoria em dois sistemas conhecidos, Júpiter- Saturno e 47 Uma. Na terceira seção, utilizaremos dois modelos para o sistema ν Andromedae, onde trabalharemos apenas com os planetas ν and c e ν and d , para a aplicação da teoria secular e integração numérica. Discutiremos a eficácia e possibilidades de cada modelo comparando com os trabalhos realizados anteriormente por outros autores.

2.1 Perturbação Secular do Problema de 3-Corpos

A teoria apresentada nesta seção foi retirada dos capítulos 6 e 7 de Murray & Dermott (1999). Consideremos primeiramente o problema de 2-corpos, onde m_1 orbita um corpo primário m_c . Sabemos que o modelo de 2-corpos é integrável e os elementos orbitais a_1 (semi-eixo maior), e_1 (excentricidade), I_1 (inclinação), ϖ_1 (longitude do pericentro) e Ω_1 (longitude do nodo ascendente) da massa m_1 são constantes. Se introduzirmos um terceiro corpo de massa m_2 , então a força gravitacional mútua entre as massas m_1 e m_2 resulta em uma aceleração adicional à aceleração gerada pelo problema de 2-corpos devido ao corpo central de massa m_c . Essas acelerações adicionais das massas secundárias relativas à primária podem ser obtidas através do gradiente do potencial perturbador, também chamado de *função perturbadora*.

O termo R é a função perturbadora, a qual representa o potencial devido a massa secundária. Temos as funções perturbadoras para os corpos 1 e 2 como R_1 e R_2 respecti-

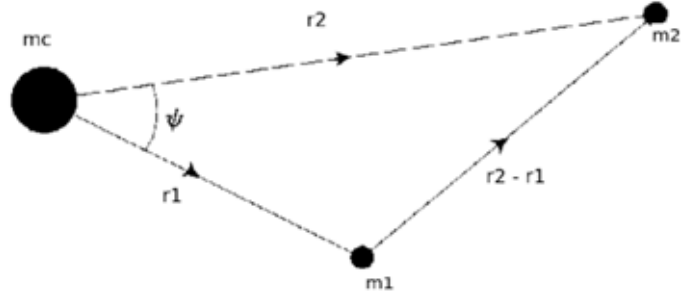


Figura 2.1: POSIÇÃO DOS VETORES \mathbf{r}_1 E \mathbf{r}_2 DAS DUAS MASSAS m_1 E m_2 , EM RELAÇÃO AO CORPO CENTRAL DE MASSA m_c .

vamente, sendo

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{G m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} - G m_2 \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_2^3}, \\ R_2 &= \frac{G m_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - G m_1 \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_1^3}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde G corresponde a constante de Gravitação. Os parâmetros r_1 e r_2 são as distâncias relativas dos corpos 1 e 2 ao corpo central (ver figura 2.1). Os termos principais das equações são chamados de termos diretos, os termos associados a escolha do sistema de coordenadas são chamados de termos indiretos. Se a origem do sistema de coordenadas for o centro de massa do sistema de 3-corpos, então os termos indiretos não aparecem.

Essa teoria pode ser utilizada para qualquer número de corpos. Pode-se também utilizar, por exemplo, o caso do potencial associado ao achatamento do corpo central.

Trataremos o caso de duas massas pontuais secundárias, denotando as massas como m_1 e m_2 e as posições relativas ao corpo central podem ser observadas na figura 2.1 como \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 onde $r_1 < r_2$. A função perturbadora pode ser escrita da forma

$$R_1 = \frac{\mu_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} - \mu_2 \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_2^3}, \quad (2.2)$$

da mesma maneira, a função perturbadora correspondente ao corpo secundário externo tem a forma

$$R_2 = \frac{\mu_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - \mu_1 \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_1^3}, \quad (2.3)$$

onde $\mu_1 = Gm_1$ e $\mu_2 = Gm_2$ e a órbita de referência tem elementos osculadores associados com $n^2 a^3 = G(m_c + m_1)$, onde n é o movimento médio e a o semi-eixo maior.

A expansão da função perturbadora fornece a dependência do potencial perturbador em função dos elementos orbitais. A variação dos elementos orbitais em função da função perturbadora é apresentada como as *Equações Planetárias de Lagrange* (Murray & Dermott, 1999). As equações de Lagrange para a variação dos elementos orbitais podem ser expressas como:

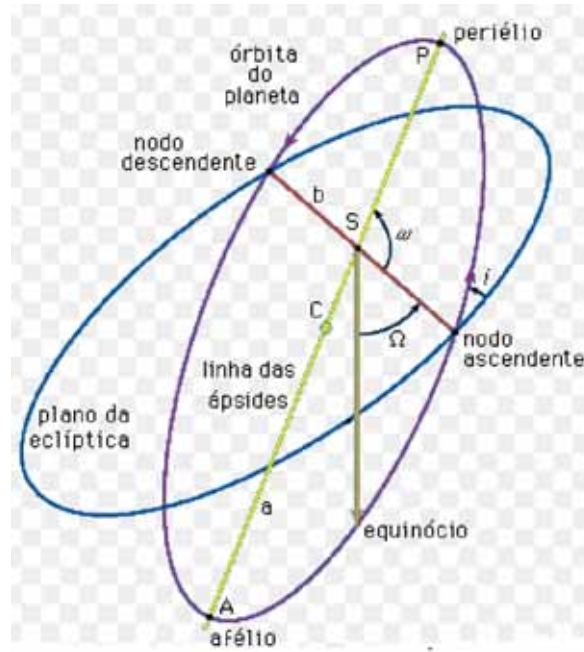


Figura 2.2: ELEMENTOS ORBITAIS. retirado de www.feiradeciencias.com.br em fevereiro de 2015

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \epsilon}, \quad (2.4)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} (1 - \sqrt{1-e^2}) \frac{\partial R}{\partial \epsilon} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \varpi}, \quad (2.5)$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\sqrt{1-e^2} (1 - \sqrt{1-e^2})}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \epsilon} + \frac{\tan 1/2 I}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial I}, \quad (2.6)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}I} \frac{\partial R}{\partial I}, \quad (2.7)$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\tan 1/2 I}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial I}, \quad (2.8)$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\tan 1/2 I}{na^2\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \epsilon} + \frac{\partial R}{\partial \varpi} \right) - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial R}{\partial \varpi}. \quad (2.9)$$

Introduzimos um ângulo adicional

$$\lambda = M + \varpi = n(t - \tau) + \varpi = nt + \epsilon, \quad (2.10)$$

onde λ é a longitude média, M é a anomalia média, ϖ é a longitude do pericentro, t é o tempo, τ é o tempo de passagem pelo pericentro e o novo ângulo ϵ denota a longitude média da época. Os elementos orbitais estão demonstrados na figura 2.2.

A variação dos elementos orbitais da massa m_2 pode ser expressa substituindo R_1 por R_2 e todos os termos sem prima são substituídos pelos com prima.

Com a introdução da função perturbadora e as equações de Lagrange temos os instrumentos para o estudo da perturbação secular.

A perturbação secular é a perturbação sofrida por um corpo que tem como característica principal uma variação de longo período. Essa perturbação é devida à influência de outros planetas ou achatamento do corpo central no corpo estudado.

A função perturbadora pode ser expandida em função de pequenos parâmetros como excentricidade, inclinação e razão de massas em séries infinitas, onde os termos individuais podem ser classificados como, secular, ressonante ou de curto período.

Consideremos os movimentos de dois planetas de massa m_1 e m_2 sob os efeitos gravitacionais mútuos e de atração com o corpo central de massa m_c , sendo m_1 e m_2 muito menores que m_c . Chamaremos R_1 e R_2 as funções perturbadoras de cada massa m_1 e m_2 .

A perturbação secular resulta da perturbação gravitacional entre m_1 , m_2 e m_c e é obtida isolando os termos da função perturbadora que independem das longitudes médias, pois as longitudes médias são parâmetros de curto período e aqui consideramos apenas os parâmetros de longo período. Também podemos excluir qualquer termo que depende somente do semi-eixo maior pois, nota-se da equação 2.4 e 2.10 a relação com a longitude média.

Para os termos de segunda ordem das excentricidades e nas inclinações (e primeira ordem nas massas), os termos da expansão não contém as longitudes médias (parâmetro de longo período), portanto são mantidos.

Utilizando as seguintes relações dos coeficientes de Laplace

$$Db_s^{(j)} = s \left(b_{s+1}^{(j-1)} - 2 \alpha b_{s+1}^{(j)} + b_{s+1}^{(j+1)} \right), \quad (2.11)$$

$$D^n b_s^{(j)} = s \left(D^{n-1} b_{s+1}^{(j-1)} - 2 \alpha D^{n-1} b_{s+1}^{(j)} + D^{n-1} b_{s+1}^{(j+1)} - 2(n-1) D^n - 2b_{s+1}^{(j)} \right). \quad (2.12)$$

onde D é o operador diferencial, $D \equiv d/d\alpha$, e os b 's correspondem aos coeficientes de Laplace.

A parte secular direta, da função perturbadora se apresenta na forma da equação:

$$\begin{aligned} R_D^{(sec)} = & + \frac{1}{8} [2 \alpha_{12} D + \alpha_{12}^2 D^2] b_{(1/2)}^{(0)} (e_1^2 + e_2^2) \\ & - \frac{1}{2} \alpha_{12} b_{(3/2)}^{(1)} (s_1^2 + s_2^2) \\ & + \frac{1}{4} [2 - 2 \alpha_{12} D - \alpha_{12}^2 D^2] b_{(1/2)}^{(1)} e_1 e_2 \cos(\varpi_1 - \varpi_2) \\ & + \alpha_{12} b_{(3/2)}^{(1)} s_1 s_2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2), \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde 1 e 2 referem-se ao corpo interno e ao corpo externo, respectivamente. $\alpha_{12} = a_1/a_2$ onde a_2 é maior que a_1 . Não há parte indireta, pois todos os termos estão relacionados a longitude média, portanto, não contribuirão para os termos seculares. No cálculo de R_1

e R_2 de $R_D^{(sec)}$, temos que considerar o fato da perturbação que R_1 sofre ser causada pelo corpo externo m_2 , enquanto que R_2 sofre uma perturbação interna causada por m_1 . As equações 2.15 e 2.16 mostram como ficam as funções perturbadoras.

$$R_1 = \frac{G m_2}{a_2} R_D^{(sec)} = \frac{G m_2}{a_1} \alpha_{12} R_D^{(sec)}, \quad (2.14)$$

$$R_2 = \frac{G m_1}{a_1} R_D^{(sec)} = \frac{G m_1}{a_2} \alpha_{12} R_D^{(sec)}. \quad (2.15)$$

Substituindo os termos encontramos as equações:

$$R_1 = n_1^2 a_1^2 \frac{m_2}{m_c + m_1} \left[\begin{aligned} & + \frac{1}{8} \alpha_{12}^2 b_{3/2}^{(1)} e_1^2 \\ & - \frac{1}{8} \alpha_{12}^2 b_{3/2}^{(1)} I_1^2 \\ & - \frac{1}{4} \alpha_{12}^2 b_{3/2}^{(2)} e_1 e_2 \cos(\varpi_1 - \varpi_2) \\ & + \frac{1}{4} \alpha_{12}^2 b_{3/2}^{(1)} I_1 I_2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2) \end{aligned} \right], \quad (2.16)$$

$$R_2 = n_2^2 a_2^2 \frac{m_1}{m_c + m_2} \left[\begin{aligned} & \frac{1}{8} \alpha_{12}^2 b_{3/2}^{(1)} e_2^2 \\ & - \frac{1}{8} \alpha_{12}^2 b_{3/2}^{(1)} I_2^2 \\ & - \frac{1}{4} \alpha_{12}^2 b_{3/2}^{(2)} e_1 e_2 \cos(\varpi_1 - \varpi_2) \\ & + \frac{1}{4} \alpha_{12}^2 b_{3/2}^{(1)} I_1 I_2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2) \end{aligned} \right]. \quad (2.17)$$

Utilizando novas variáveis para agrupar os termos semelhantes, podemos denotar nossa função como

$$R_j = n_j a_j^2 \left[\begin{aligned} & \frac{1}{2} A_{jj} e_j^2 + A_{jk} e_1 e_2 \cos(\varpi_1 - \varpi_2) \\ & + \frac{1}{2} B_{jj} I^2 + B_{jk} I_1 I_2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2) \end{aligned} \right], \quad (2.18)$$

onde $j = 1, 2$, $k = 2, 1$ ($j \neq k$), e

$$A_{jj} = +n_j \frac{1}{4} \frac{m_k}{m_c + m_j} \alpha_{12} \bar{\alpha}_{12} b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{12}), \quad (2.19)$$

$$A_{jk} = -n_j \frac{1}{4} \frac{m_k}{m_c + m_j} \alpha_{12} \bar{\alpha}_{12} b_{3/2}^{(2)}(\alpha_{12}), \quad (2.20)$$

$$B_{jj} = -n_j \frac{1}{4} \frac{m_k}{m_c + m_j} \alpha_{12} \bar{\alpha}_{12} b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{12}), \quad (2.21)$$

$$B_{jk} = +n_j \frac{1}{4} \frac{m_k}{m_c + m_j} \alpha_{12} \bar{\alpha}_{12} b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{12}), \quad (2.22)$$

onde $\bar{\alpha}_{12} = \alpha_{12}$ se $j = 1$ (uma perturbação externa) e $\bar{\alpha}_{12} = 1$ se $j = 2$ (uma perturbação interna). Pela definição, os coeficientes de Laplace são dados por

$$b_{3/2}^{(1)}(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \psi \, d\psi}{(1 - 2\alpha \cos \psi + \alpha^2)^{3/2}}, \quad (2.23)$$

$$b_{3/2}^{(2)}(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\psi \, d\psi}{(1 - 2\alpha \cos \psi + \alpha^2)^{3/2}}, \quad (2.24)$$

Considerando apenas os termos de mais baixa ordem em excentricidade e inclinação nas equações de Lagrange 2.4-2.9, podemos derivar uma forma aproximada das equações para a variação temporal dos elementos orbitais originais:

$$\begin{aligned} \dot{e}_j &= -\frac{1}{n_j a_j^2 e_j} \frac{\partial R_j}{\partial \varpi_j}, \\ \dot{\varpi}_j &= +\frac{1}{n_j a_j^2 e_j} \frac{\partial R_j}{\partial e_j}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_j &= -\frac{1}{n_j a_j^2 I_j} \frac{\partial R_j}{\partial \Omega_j}, \\ \dot{\Omega}_j &= +\frac{1}{n_j a_j^2 I_j} \frac{\partial R_j}{\partial I_j}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Denotando novas variáveis como:

$$\begin{aligned} h_j &= e_j \sin \varpi_j, \\ k_j &= e_j \cos \varpi_j, \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} p_j &= I_j \sin \Omega_j, \\ q_j &= I_j \cos \Omega_j. \end{aligned} \quad (2.28)$$

As novas variáveis tem a vantagem de evitar singularidades que são inerentes das equações 2.26 e 2.27 para valores pequenos de excentricidade e inclinação. Podemos reescrever a função perturbadora com as novas variáveis, de forma que

$$\begin{aligned} R_j &= n_j a_j^2 \left[\frac{1}{2} A_{jj} (h_j^2 + k_j^2) + A_{jk} (h_j h_k + k_j k_k) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} B_{jj} (p_j^2 + q_j^2) + B_{jk} (p_j p_k + q_j q_k) \right]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

As equações de movimento 2.25 e 2.26 nestas novas variáveis adquirem a forma:

$$\begin{aligned}\dot{h}_j &= +\frac{1}{n_j a_j^2} \frac{\partial R_j}{\partial k_j}, \\ \dot{k}_j &= -\frac{1}{n_j a_j^2} \frac{\partial R_j}{\partial h_j},\end{aligned}\tag{2.30}$$

$$\begin{aligned}\dot{p}_j &= +\frac{1}{n_j a_j^2} \frac{\partial R_j}{\partial q_j}, \\ \dot{q}_j &= -\frac{1}{n_j a_j^2} \frac{\partial R_j}{\partial p_j}.\end{aligned}\tag{2.31}$$

Por fim, poderemos reduzir o problema da perturbação secular a dois grupos desacoplados de problemas de autovalores. As soluções serão dadas por

$$\begin{aligned}h_j &= \sum_{i=1}^2 e_{ij} \sin (g_i t + \beta_i), \\ k_j &= \sum_{i=1}^2 e_{ij} \cos (g_i t + \beta_i),\end{aligned}\tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}p_j &= \sum_{i=1}^2 I_{ij} \sin (f_i t + \gamma_i), \\ q_j &= \sum_{i=1}^2 I_{ij} \cos (f_i t + \gamma_i).\end{aligned}\tag{2.33}$$

onde as frequências g_i e f_i ($i = 1, 2$) são autovalores referentes a matriz correspondente aos elementos formados pelas relações 2.19 e 2.20. Os termos e_{ij} e I_{ij} são as componentes correspondentes aos autovalores da matriz correspondentes aos elementos resultantes das equações 2.21 e 2.22. As fases β_i e γ_i são as amplitudes dos autovetores e são determinados através das condições iniciais. As soluções descritas nas equações 2.32 e 2.33, são a solução secular clássica de *Laplace – Lagrange* do problema secular.

2.2 Testes Iniciais

A teoria da perturbação secular, apresentada na seção anterior, foi utilizada como base para a montagem de um código computacional. O teste inicial foi feito com o Sistema Solar utilizando os planetas Júpiter e Saturno.

Integramos o sistema por 200 mil anos utilizando as condições iniciais, apresentadas na tabela 2.1 para compararmos com os resultados obtidos por Murray & Dermott (1999).

Tabela 2.1: MASSAS E ELEMENTOS ORBITAIS DE JÚPITER E SATURNO.

Planeta	Júpiter	Saturno
$M_p (M_J)$	1,00	0,30
a (UA)	5,202	9,555
e	0,047	0,057
ω ($^\circ$)	13,98	88,72
I ($^\circ$)	1,306	2,487
Ω ($^\circ$)	100,03	113,13

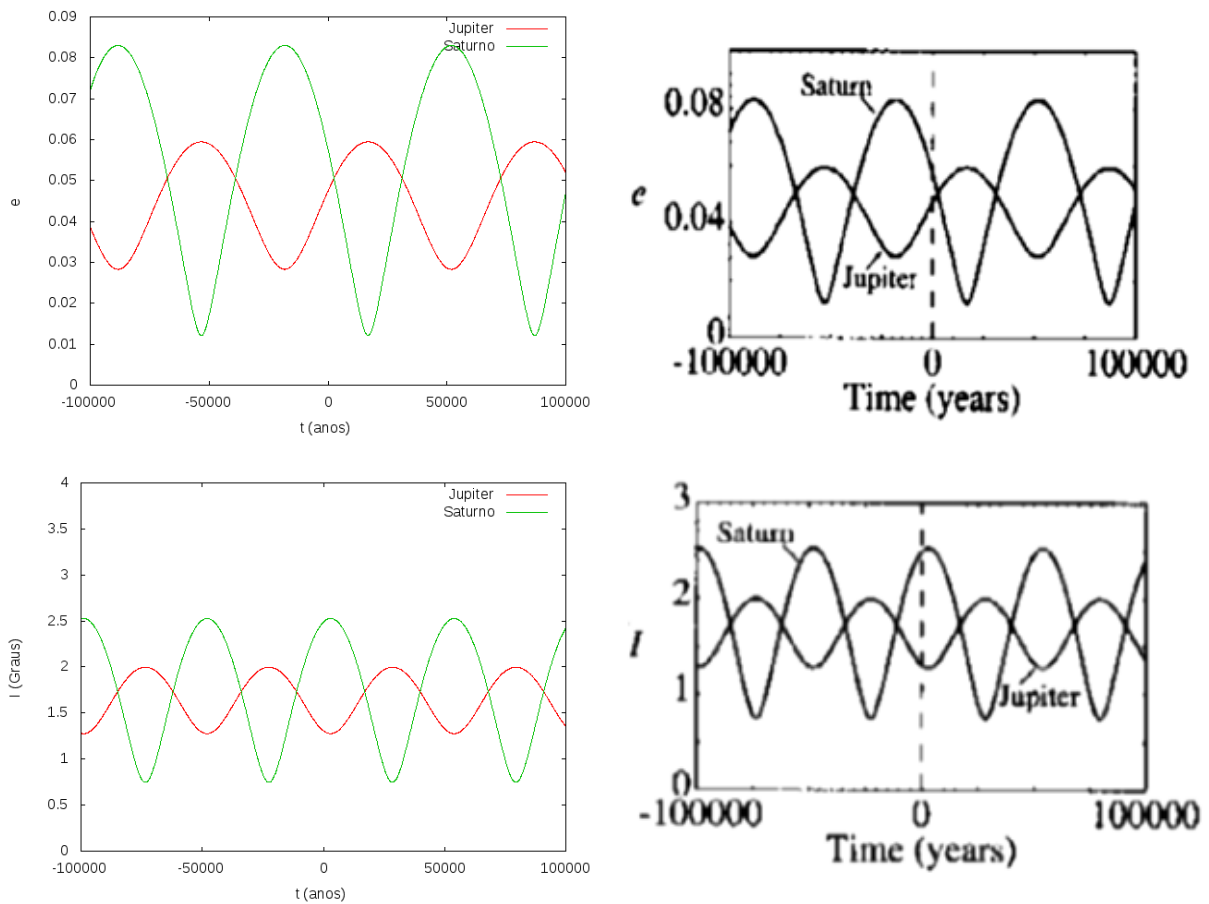


Figura 2.3: EVOLUÇÃO SECULAR DA EXCENTRICIDADE E INCLINAÇÃO DE SATURNO E JÚPITER. A esquerda são apresentados os resultados obtidos no nosso estudo. A direita os resultados publicados por Murray & Dermott (1999).

A figura 2.3 mostra a evolução temporal da excentricidade e inclinação de Júpiter (linha vermelha) e Saturno (linha verde), derivada da solução secular. A diferença de fase implica que a excentricidade máxima de Júpiter coincide com a excentricidade mínima de

Saturno e assim reciprocamente.

Os resultados encontrados estão de acordo com os apresentados em Murray & Dermott (1999). O mesmo acontece com a evolução temporal da inclinação dos dois planetas.

O segundo teste foi feito com o sistema 47 Ursae Majoris. A estrela 47 Ursae Majoris (47 UMa) é similar ao Sol, com massa de $1,03 M_{\odot}$ e está situada na constelação Ursa Maior. Em 2002, dois planetas foram descobertos orbitando a estrela. Em 2010 foi confirmada a existência do terceiro planeta 47 Uma d (Butler et al, 1996; Fisher et al, 2002).

Em nossos teste utilizamos os planetas 47 UMa b e 47 UMa c, com os dados apresentados na tabela 2.2. Note que não é apresentado inclinação na tabela 2.2 pois se trata de um caso coplanar.

Tabela 2.2: MASSA E ELEMENTOS ORBITAIS DOS PLANETAS *b* E *c* DE 47 URSAE MAJORIS.

Planeta	b	c
$M_p (M_J)$	2,54	0,76
a (UA)	2,09	3,73
e	0,061	0,005
ω ($^{\circ}$)	171,8	127,0

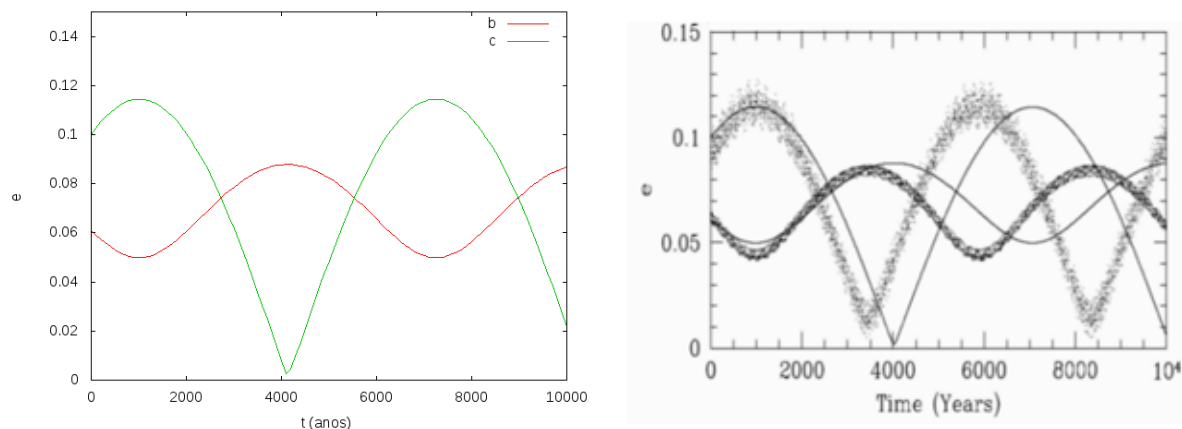


Figura 2.4: EVOLUÇÃO SECULAR DA EXCENTRICIDADE DOS PLANETAS DO SISTEMA 47 UMA. A figura da esquerda corresponde aos resultados que obtivemos. A figura da direita foi retirada do trabalho de Barnes & Greenberg (2006), sendo as linhas finas os resultados obtidos da teoria secular e as linhas espessas correspondentes a integração numérica.

Os resultados mostrados na figura 2.4, corroboram os encontrados por Barnes & Greenberg (2006) em seu modelo analítico para a perturbação secular. O planeta b é apresentado em vermelho e o planeta c em verde.

Nos resultados encontrados por Barnes & Greenberg (2006) a integração numérica apresenta uma defasagem do resultado secular, com uma maior amplitude e frequência, isso ocorre devido a consideração dos elementos de curto período na integração numérica.

Com os dois teste iniciais de acordo com os resultados encontrados na literatura e mostrando a eficácia do programa elaborado com base na teoria secular adotada, na próxima seção estudaremos a aplicação da teoria secular no sistema ν Andromedae.

2.3 Estudo da Teoria Secular no Sistema ν Andromedae

Como discutido no capítulo 1, há uma faixa de valores possíveis de massa e inclinação para os planetas do sistema ν Andromedae, devido a detecção via velocidade radial. No capítulo 1 separamos dois modelos principais, retirados da literatura, o modelo de "massas grandes" e o modelo de massas pequenas, para o estudo da teoria secular.

Os dados referentes a cada modelo estão apresentados na tabela 1.1.

Modelo de Massas Pequenas

O modelo de massas pequenas consiste num sistema formado a partir dos dados retirados do trabalho de Chavez et al. (2014), sendo suas principais características planetas com massas pequenas e sistema coplanar.

Utilizando o programa para teoria secular, utilizado da seção anterior, com os elementos correspondentes a este modelo, obtivemos a perturbação resultante da interação dos planetas c e d entre si.

Na Figura 2.5, apresentamos os resultados referentes às evoluções das excentricidades dos planetas c e d . O planeta d (linha verde) possui maior massa e uma excentricidade com menor amplitude quando comparável ao planeta c (linha vermelha).

As frequências são similares nos dois casos mostrando uma correlação entre os movimentos dos dois planetas. Vemos um comportamento similar ao encontrado na figura 2.3, isto é, uma diferença de fase que implica na excentricidade máxima de um dos planetas coincidindo com a excentricidade mínima do outro, e assim reciprocamente.

Para comparar com o resultado da teoria secular, integramos numericamente o modelo de massas pequenas.

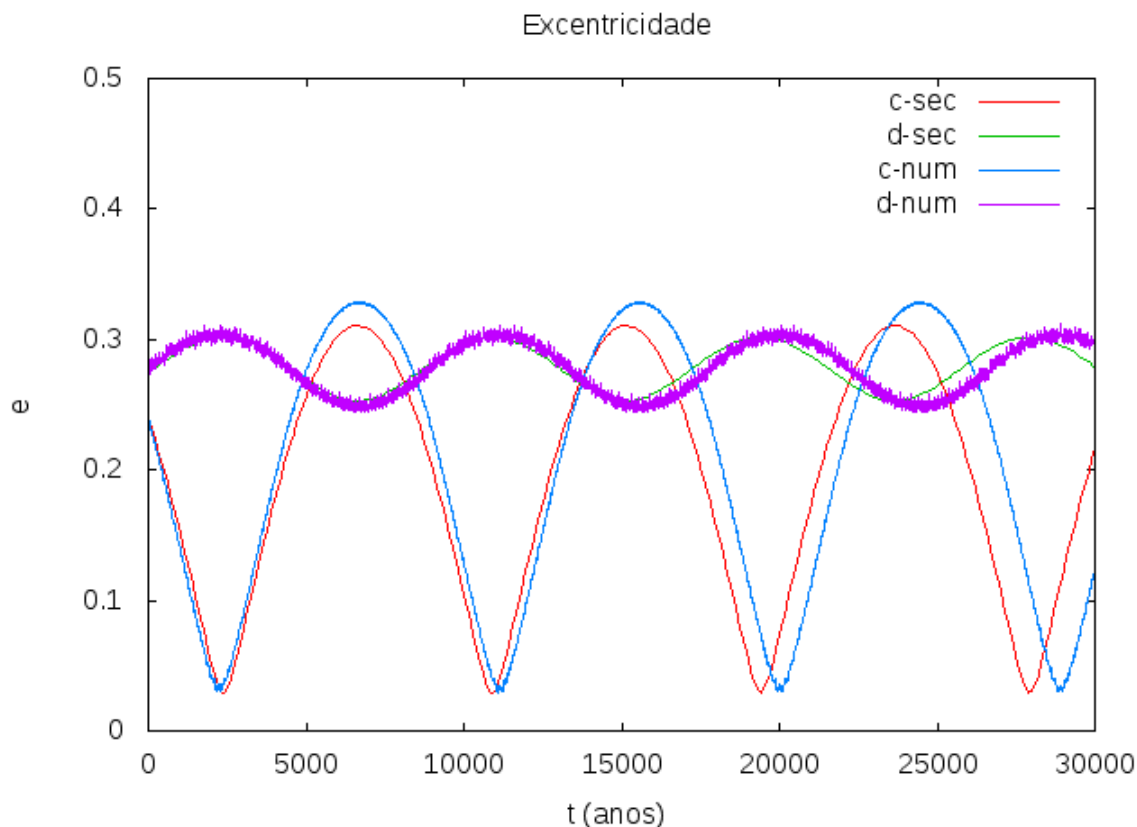


Figura 2.5: EVOLUÇÃO DAS EXCENTRICIDADES PARA O MODELO DE MASSAS PEQUENAS. A evolução da excentricidade á partir da teoria secular para os planetas c (em vermelho) e d (em verde) e pela integração numérica para c (em azul) e d (em roxo)

Nota-se que os resultados tanto do planeta c (em azul) quanto de d (em roxo) são muito similares. O modelo numérico do planeta c apresenta uma amplitude um pouco maior que o resultado da teoria secular. O planeta d apresenta frequências secundárias no caso da integração numérica. Essas diferenças ocorrem pois na teoria secular consideramos apenas elementos de longo período enquanto na integração numérica são considerados os elementos de curto e longo período, resultando nessas pequenas discrepâncias nos resultados obtidos.

Na revisão bibliográfica, encontramos um estudo de perturbação secular feita por Barnes & Greenberg (2006) para o sistema ν Andromedae. O modelo utilizado pelos autores é muito similar ao modelo de massas pequenas. Barnes & Greenberg (2006), utilizaram um modelo coplanar e o qual só contém os planetas ν And c e ν And d. Estes planetas apresentam massas de $1,943 M_J$ para o planeta c e $3,943 M_J$ para o planeta d, os outros elementos estão apresentados na tabela 2.3.

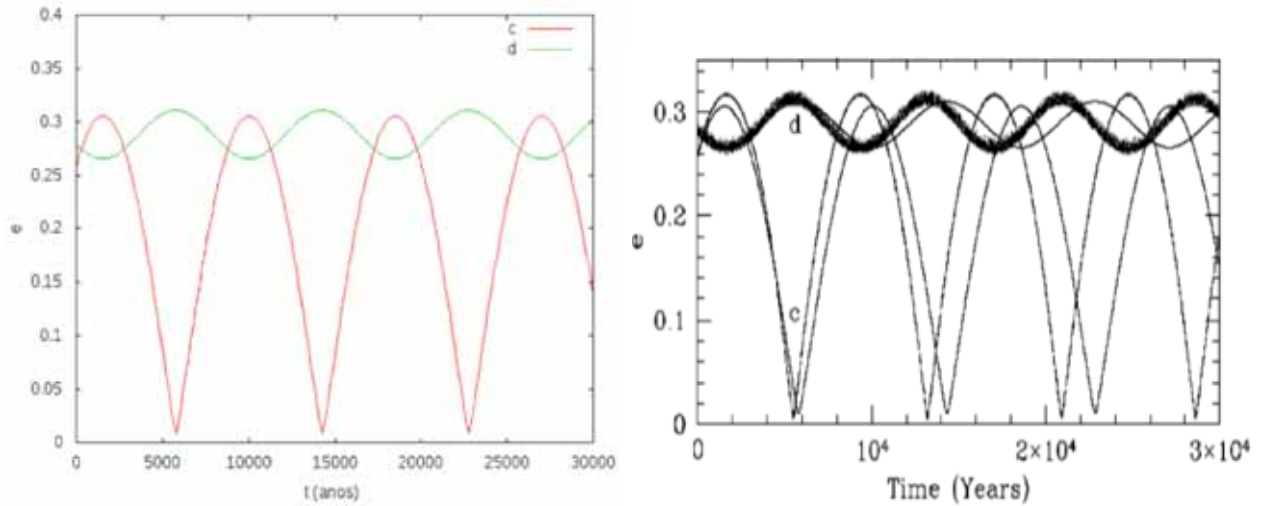


Figura 2.6: VARIAÇÃO TEMPORAL DA EXCENTRICIDADE PARA O MODELO DE MASSAS PEQUENAS . Utilizando os modelos de massas pequenas aplicamos a teoria secular, cujo o resultado é apresentado a esquerda. Este resultado é compatível com os resultados encontrados por Barnes & Greenberg (2006), o qual é apresentado a direita.

Nas figuras 2.6 apresentamos os resultados encontrados por Barnes & Greenberg (2006) à direita, e os encontrados no nosso estudo secular à esquerda.

Barnes & Greenberg (2006) apresentaram as linhas correspondentes tanto aos resultados da teoria secular, quanto aos resultados da integração numérica que, como verificamos, são muito próximos. Em nossos resultados, o planeta d (linha verde) possui maior massa e uma excentricidade com menor amplitude quando comparável ao planeta c (linha vermelha).

Nota-se, na tabela 2.3. que os elementos orbitais são muito similares aos encontrados no modelo de massas pequenas, porém essas diferenças parecem contribuir para uma diferença de fase nas excentricidades dos planetas quando comparamos as figuras 2.6 e 2.5.

Tabela 2.3: MASSAS E ELEMENTOS ORBITAIS DO MODELO UTILIZADO POR BARNES & GREENBERG (2006) .

Planeta	c	d
$M_p (M_J)$	1,943	3,943
a (UA)	0,825	2,54
e	0,258	0,279
ω ($^\circ$)	250,2	287,9

Modelo de Massas Grandes

O modelo de massas grandes tem como características principais grandes massas e inclinações. O modelo é formado pelas massas e elementos orbitais do modelo de massas grandes, apresentados na tabela 1.1.

A figura 2.7 corresponde aos resultados referentes à perturbação secular, do planeta c em vermelho e do planeta d verde. Nota-se uma amplitude maior para o planeta c mesmo sendo mais massivo que o planeta d . O modelo apresenta grandes frequências para ambos os corpos.

Para compararmos os resultados da perturbação secular, realizamos a integração numérica do modelo. Na figura 2.8 apresentamos os resultados para o planeta c em azul e o planeta d em roxo.

A integração numérica leva em consideração tanto os elementos de longo período quanto o de curto período. Já a perturbação secular apenas considera os elementos de longo período.

Notamos que os resultados da integração numérica e os resultados da perturbação secular, para o modelo de massas grandes, apresentam semelhanças. É visível que o modelo de massas grandes parece mais complexo comparados ao modelo de massas pequenas.

A existência das diversas frequências adicionais comparadas ao modelo de massas pequenas, podem ser atribuída aos valores de massa que apresentam ambos os corpos no modelo de massas grandes, porém verifica-se que a amplitude e a frequência permanecem próximas nos dois casos, secular e numérico, para ambos os planetas.

Os resultados numéricos apresentam outras frequências associadas a variação de excentricidades no caso dos dois planetas, este resultado é devido a consideração dos elementos de curto período.

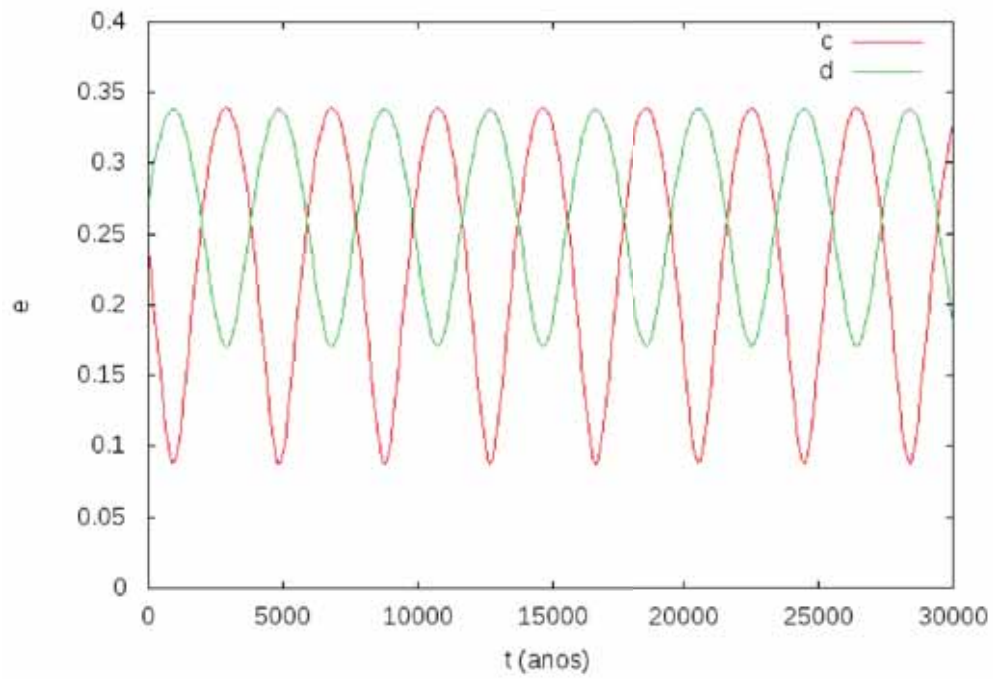


Figura 2.7: EVOLUÇÃO SECULAR DA EXCENTRICIDADE NO MODELO DE MASSAS GRANDES. Evolução temporal da excentricidade para o planeta c em vermelho e para o planeta d em verde.

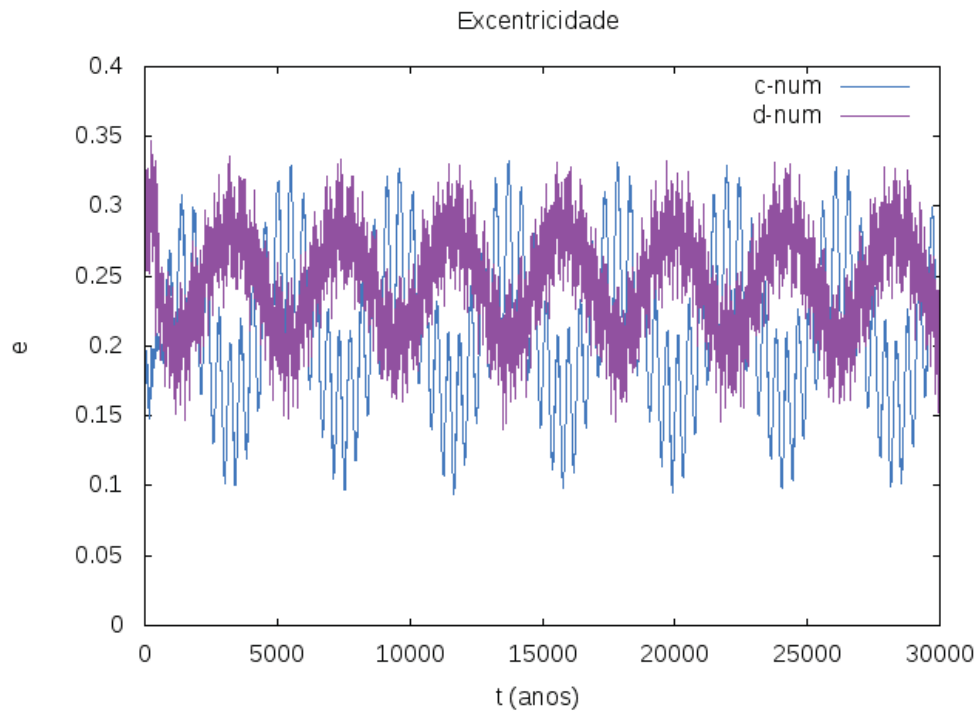


Figura 2.8: EVOLUÇÃO DA EXCENTRICIDADE POR INTEGRAÇÃO NUMÉRICA NO MODELO DE MASSAS GRANDES. variação temporal da excentricidade para o planeta c em azul e para o planeta d em roxo.

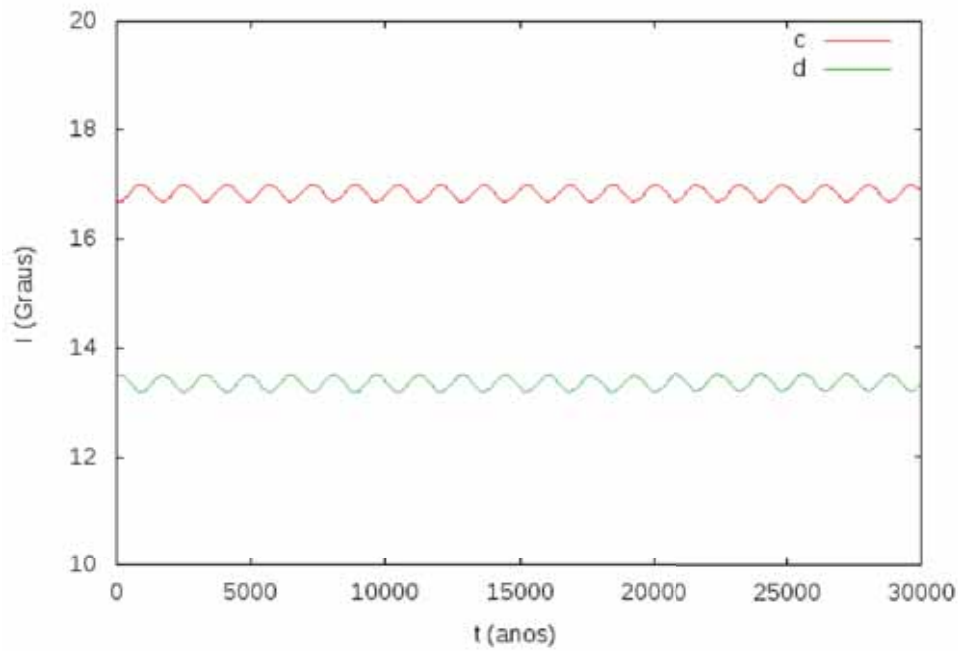


Figura 2.9: EVOLUÇÃO DA INCLINAÇÃO NO CASO SECULAR NO MODELO DE MASSAS GRANDES. Variação temporal da inclinação para o planeta c , em vermelho, e para o planeta d em verde.

A evolução temporal da inclinação possui uma frequência constante e baixa amplitude. Nota-se que os resultados da teoria secular (figura 2.9) é semelhante aos resultados da integração numérica (figura 2.10), porém mais bem comportado.

A evolução da inclinação por integração numérica apresenta maior amplitude comparada ao resultado secular, apesar disso a inclinação do planeta c permanece na faixa entre, aproximadamente, 17° e 20° . O planeta d apresenta amplitude na faixa entre 12° e 16° .

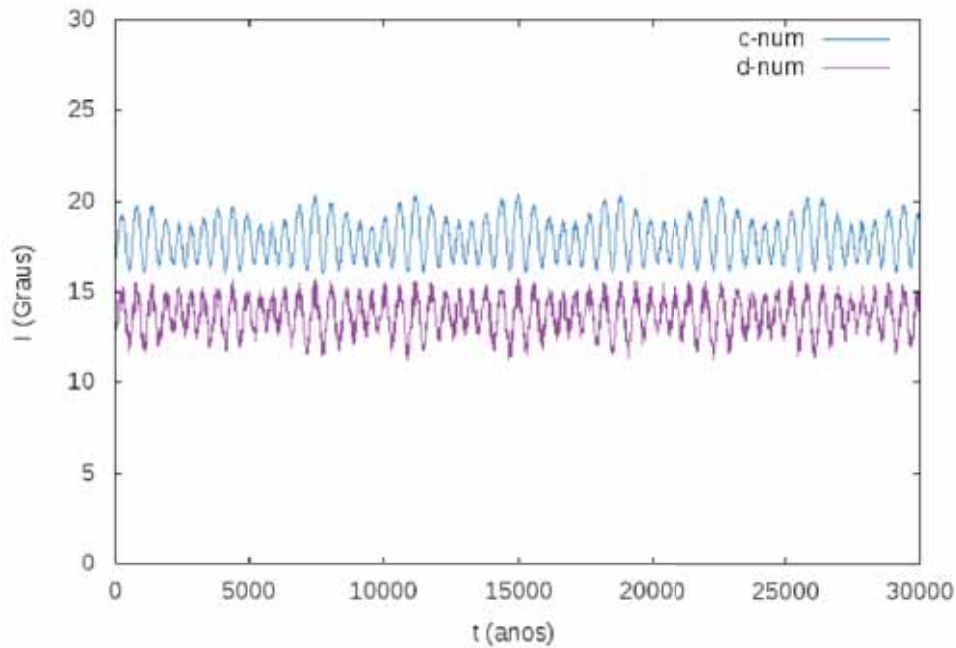


Figura 2.10: EVOLUÇÃO DA INCLINAÇÃO POR INTEGRAÇÃO NUMÉRICA PARA OS MODELOS DE MASSAS GRANDES. variação temporal da inclinação para o planeta *c*, apresentado em azul, e o planeta *d*, apresentado em roxo.

No trabalho de McArthur et al. (2010) realizou-se uma integração numérica para o modelo de massas grandes. Os resultados encontrados, figura 2.11, não são compatíveis aos encontrados na nossa pesquisa. Nota-se também uma distribuição dos pontos por todo o intervalo de excentricidade entre 0.1 e 0.4, por todo o tempo de integração.

A evolução da inclinação obtida para *v* And *d*, varia entre 4° e 32° , uma variação bem maior da encontrada nos nossos resultados (figura 2.10), onde o planeta *d* varia entre aproximadamente 13° e 16° .

É importante salientar que as condições referentes a estrela foram diferentes em McArthur et al. (2010) da utilizada em nosso trabalho. Em nossos estudos não consideramos relatividade e o achatamento do corpo central, de valor J_2 igual a 10^{-3} no trabalho de McArthur et al. (2010).

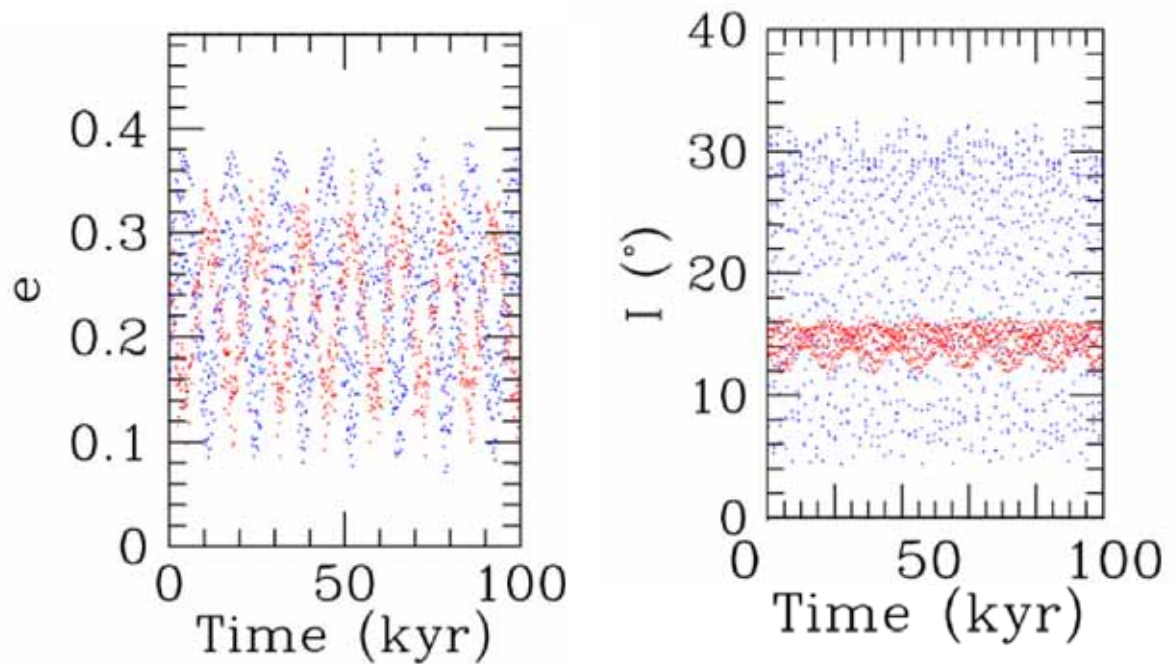


Figura 2.11: A EVOLUÇÃO SECULAR UTILIZANDO OS DADOS DO MODELO DE MASSAS GRANDES: A esquerda os resultados da evolução da excentricidade dos planetas *c* (triângulos vermelhos) e *d* (cruzes azuis). A direita temos a evolução da inclinação (McArthur et al., 2010).

No trabalho de Barnes et al. (2011), figura 2.12, são apresentados os resultados obtidos para o modelo de massas grandes. Foram utilizados as mesmas condições que o trabalho de McArthur et al. (2010). Nota-se uma discrepância nos resultados que encontramos, figura 2.8, para os resultados apresentados, pelos dois autores, figuras 2.11 e 2.12.

O trabalho de Barnes et al. (2011) apresenta os resultados mas não há uma discussão das causas destes.

A excentricidade e a inclinação em Barnes et al. (2011) estão distribuídos de forma mais uniforme do que a encontrada por McArthur et al (2010), estando a inclinação de *v* And *d* confinada entre 13° e 15° , como em nosso caso.

Nota-se, tanto em nossos resultados como os de Barnes et al. (2011), que o planeta *c* apresenta uma maior variação de excentricidade comparado ao planeta *v* And *d*, mesmo a massa do corpo interno (*v* And *c*) sendo maior, e esperando-se uma menor variação de excentricidade, como acontece no caso de massas pequenas onde o corpo externo (*v* And *d*) possui maior massa e tem menor variação na excentricidade. Além das massas maiores a diferença entre os dois casos seria a posição relativa do corpo mais massivo. Aparentemente a resultante das forças aplicadas em *c*, no modelo de massas grandes, é mais expressiva quando comparada ao modelo de massas pequenas, provavelmente devido a discrepância de valores de massas dos planetas.

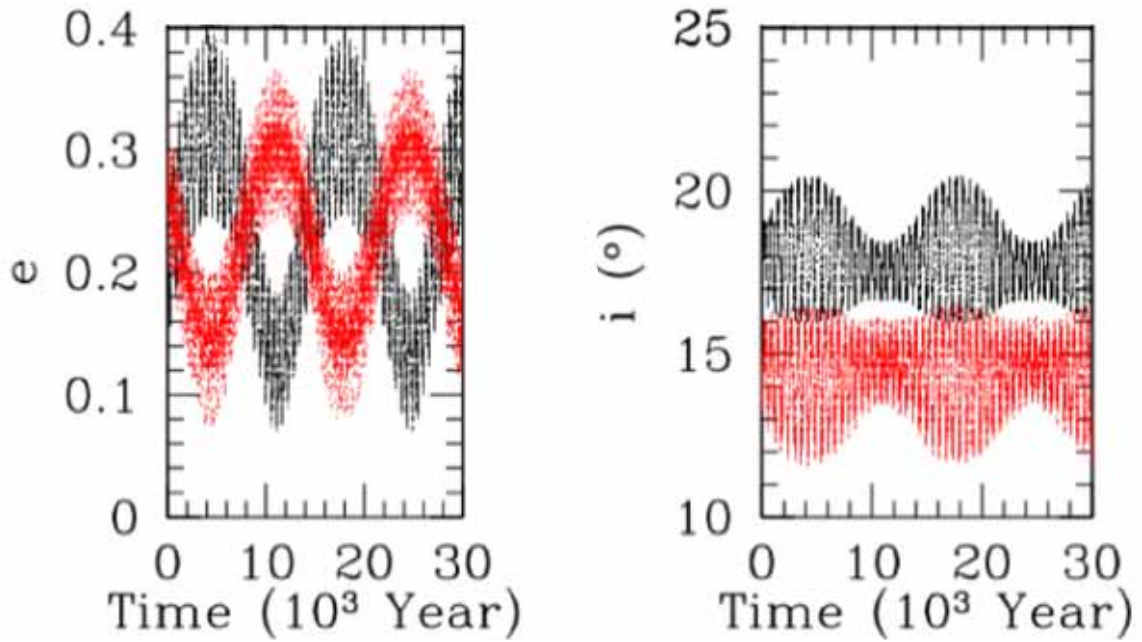


Figura 2.12: EVOLUÇÃO SECULAR DE v AND c (EM PRETO) E d (EM VERMELHO): A esquerda temos a evolução das excentricidades e a direita os resultados relativos a evolução da inclinação dos dois planetas (Barnes et al, 2010).

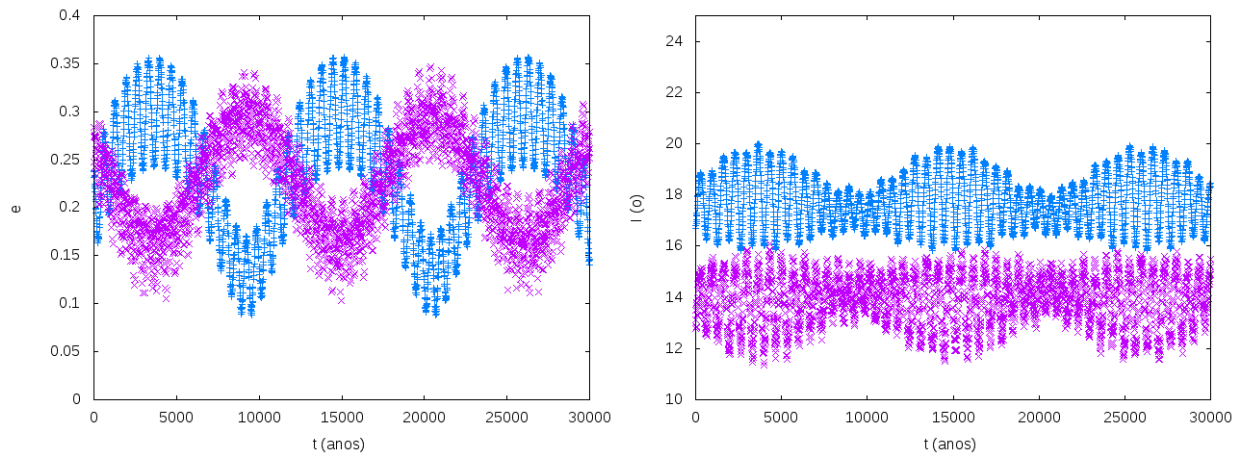


Figura 2.13: A EVOLUÇÃO DA EXCENTRICIDADE E INCLINAÇÃO PARA O MODELO DE MASSAS GRANDES COM ACHATAMENTO. A evolução da variação da excentricidade e inclinação estão apresentados em azul para o planeta c e em roxo para o planeta d

Nossos resultados apresentam grandes diferenças dos verificados em Barnes et al. (2011). Um dos motivos que podem ter gerado essas diferenças pode ter sido a consideração do achatamento que é utilizada tanto em Barnes et al. (2011) quanto em McArthur et al. (2010).

Para comparar com os resultados dos dois autores citados, integramos numericamente o modelo utilizando o achatamento de 10^{-3} para v Andromedae.

Nota-se na figura 2.13 que os nossos resultados apresentam uma diferença de frequência da encontrada em Barner et al. (2011), porém os resultados são mais similares e bem comportados dos encontrados anteriormente nas figuras 2.8 e 2.10.

Analisando os dois casos apresentados, notamos que a teoria secular utilizada foi satisfatória para descrever o sistema v Andromedae mesmo com a grande diferença entre as massas dos dois modelos. Nos dois casos a integração numérica apresenta pequenas variações mas não significativas para desqualificar a teoria utilizada. Notou-se também uma grande interferência no sistema com a consideração do achatamento da estrela.

Capítulo 3

Estudo de Perturbação Secular em Função das Massas

No capítulo anterior realizamos uma análise da perturbação secular em dois modelos, "massas grandes" e "massas pequenas". Vimos que o modelo de "massas grandes" apresenta um comportamento caótico, sendo explicado apenas pelo valor das massas dos planetas. Nesse capítulo faremos um estudo da perturbação secular para diferentes massas no cenário do sistema ν Andromedae. Para comparar os resultados relativos ao programa de perturbação secular, fizemos também a integração numericamente. Com os resultados obtidos poderemos verificar os cenários mais estáveis para este sistema.

3.1 Perturbação Secular no Sistema ν Andromedae em Função das Massas

No capítulo anterior introduzimos e testamos a eficácia da teoria secular para descrever o sistema ν Andromedae. Verificamos que no modelo de massas grandes os resultados encontrados corroboram a integração numérica e os resultados de Barnes et al (2011).

Para analisarmos o comportamento dos corpos no sistema ν Andromedae, testamos os planetas ν And c e ν And d variando suas massas de $1 M_J$ a $16 M_J$, com passo de $1 M_J$. Os outros elementos foram retirados da tabela 1.1 e mantidos constantes.

É necessário destacar que no trabalho de Chaves et al. (2014), os autores relatam a possibilidade de uma ressonância apsidal entre os planetas c e d . Em nosso estudo não iremos considerar essa ressonância, o que pode gerar uma divergência nos resultados analíticos.

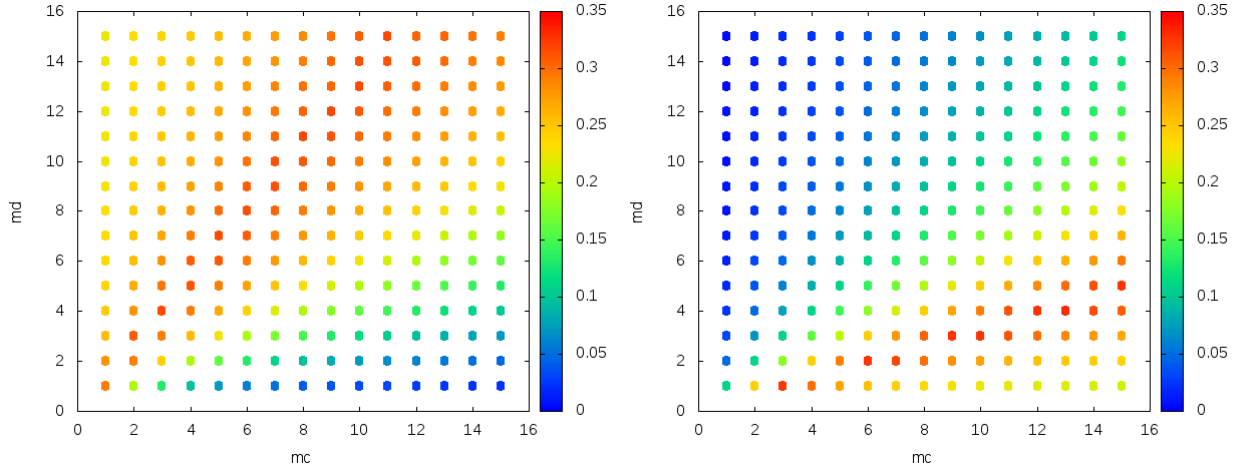


Figura 3.1: AMPLITUDE DE VARIAÇÃO DA EXCENTRICIDADE DE v AND c E v AND d CONFORME A VARIAÇÃO DAS MASSAS (EM MASSAS DE JÚPITER) USANDO TEORIA SECULAR. Na esquerda observamos a amplitude da excentricidade do planeta c . A figura da direita mostram os resultados relativos a d .

O primeiro caso testado foi o da teoria secular para o sistema v Andromedae com inclinação, pelo tempo de 30 mil anos. Variando as massas uma a uma rodamos nosso programa e encontramos a evolução de excentricidade de cada caso. Nas figuras de 3.1 apresentamos as massas dos planetas nos eixos x e y , e na paleta de cores temos a variação de excentricidade para o planeta c e d , respectivamente.

Esses resultados possibilitam a visualização dos pontos próximos aos modelos estudados no capítulo anterior.

Nota-se uma simetria em ambas as figuras, à esquerda para o planeta c e à direita para o planeta d . Em vermelho é apresentado as maiores variações de excentricidade.

Verificamos que o planeta d (mais externo) apresenta menor variação de excentricidade, esse resultado pode ser comparado com o modelo de massas grandes onde verificamos que o planeta externo, mesmo quando tem massas menor que o planeta interno, sofre menos perturbação na evolução da excentricidade.

Os resultados referentes ao modelo com inclinações foram os mesmos. Isto ocorre, pois na teoria secular adotada a inclinação não está acoplada a excentricidade.

Para comparação, integramos numericamente o sistema pelo mesmo intervalo de tempo dos resultados seculares, 30 mil anos.

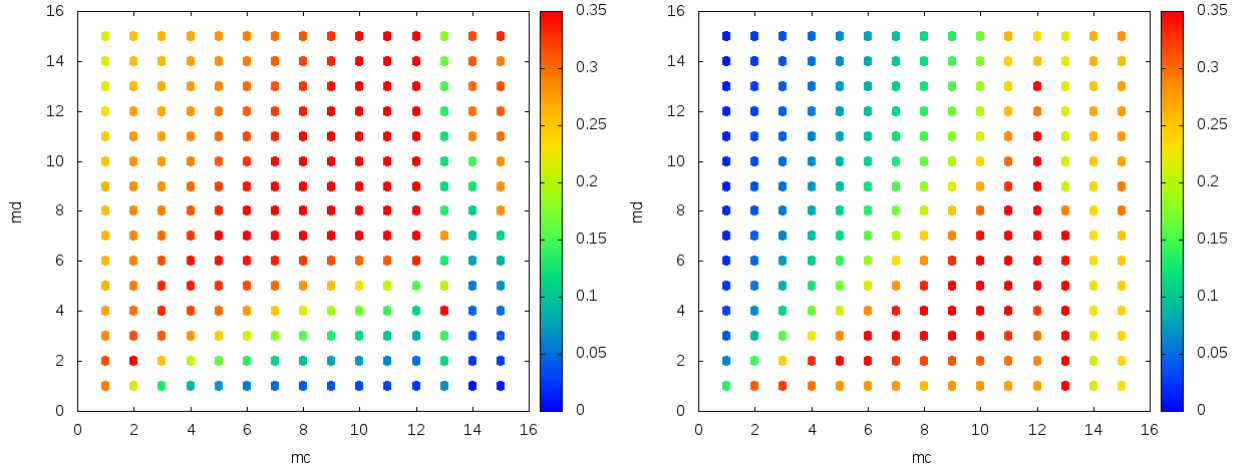


Figura 3.2: AMPLITUDE DA VARIAÇÃO DA EXCENTRICIDADE A PARTIR DA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA Variação da excentricidade de v And c e v And d conforme a variação da massa (em massas de Júpiter), a partir da integração numérica. Na esquerda observamos a variação da excentricidade do planeta v And c . A figura da direita mostram os resultados relativos ao v And d .

Nas figuras de 3.2, apresentamos a amplitude de variação de excentricidade dos planetas c e d para a integração numérica. Os resultados apresentam similaridades porém há pontos conflitantes aos resultados da perturbação secular. Assim como dito no capítulo anterior, a integração numérica leva em consideração elementos de curto período que pode modificar o resultado dos obtidos para perturbação secular.

Para termos uma visão geral dos resultados, calculamos a diferença entre os resultados da integração numérica e da perturbação secular, ou seja, $\Delta e_{num} - \Delta e_{sec}$, onde Δe_{num} corresponde a variação de excentricidade na integração numérica e Δe_{sec} a variação de excentricidade no resultado secular.

Os resultados são apresentados nas figuras 3.3 e 3.4.

Na figura 3.3 apresentamos as diferenças de excentricidades dos planetas c , a esquerda, e d , a direita, dos resultados numéricos para os resultados da perturbação secular. Nota-se que para o planeta c existe um ponto com diferença de aproximadamente 0.4 (em laranja). Para o planeta d , verifica-se dois pontos em vermelho (variação de 0.5 ou mais na excentricidade), esses dois pontos estão também na linha correspondente a massa de v And c de $13 M_J$.

As figuras em 3.4 correspondem aos mesmos resultados de 3.3, porém o gráfico apresenta menor escala para a excentricidade. Desta maneira podemos analisar com maior precisão a variação da excentricidade de outros pontos. Aparentemente muitos casos apresentam uma diferença maior ou igual a 0.1 (em vermelho), este resultado corresponde a um valor alto. Nota-se que os pontos em vermelho estão mais próximos aos valores correspondentes a grandes massas, onde há maior interação gravitacional entre os corpos e pode interferir em seus movimentos.

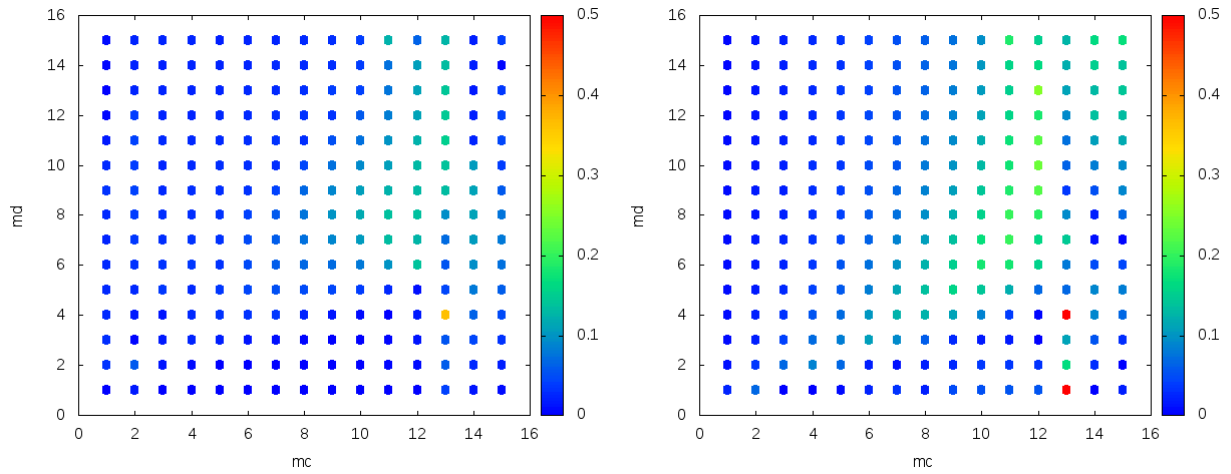


Figura 3.3: DIFERENÇA DE AMPLITUDE DA EXCENTRICIDADE DOS PLANETAS C E D DOS RESULTADOS SECULARES PARA OS RESULTADOS NUMÉRICOS, CONFORME A VARIAÇÃO DA MASSA (EM MASSAS DE JÚPITER). Na esquerda observamos a variação da excentricidade do planeta v And c. A figura da direita mostram os resultados relativos ao v And d.

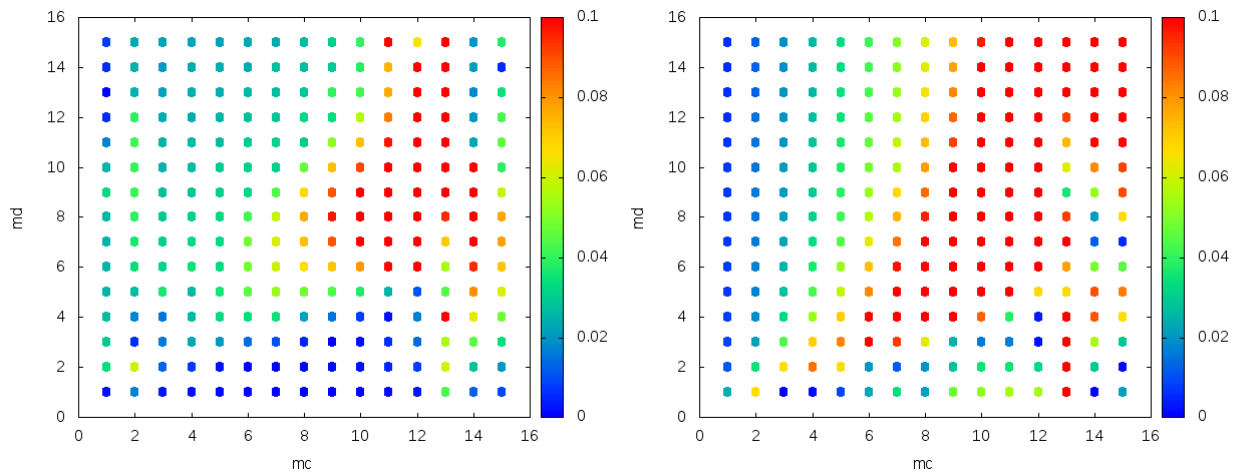


Figura 3.4: DIFERENÇA DA EXCENTRICIDADE DE C E D DO RESULTADO SECULAR PARA O RESULTADO NUMÉRICO, CONFORME A VARIAÇÃO DA MASSA (EM MASSAS DE JÚPITER). Na esquerda observamos a variação da excentricidade do planeta v And c. A figura da direita mostram os resultados relativos ao v And d.

Com os resultados apresentados neste capítulo, podemos verificar o comportamento de corpos com diferentes massas no sistema v Andromedae e verificar as características necessárias para que o sistema tenha estabilidade.

Esta análise pode proporcionar posições relativas e massas possíveis para sistemas estáveis similares ao apresentado.

Capítulo 4

A evolução do Sistema ν Andromedae Com a Inclusão de Um Quarto Planeta

Uma questão importante para o estudo do comportamento do sistema é a possibilidade do quarto planeta. Neste capítulo estudaremos o comportamento do quarto planeta, previsto por Curiel et al. (2011), em diferentes cenários. Na primeira seção estudaremos o comportamento do quarto planeta nos dois modelos propostos na tabela 1.1. Na segunda seção analisaremos cenários com diferentes elementos orbitais para o quarto planeta.

4.1 Estabilidade de Um Quarto Planeta nos Dois Modelos

A possibilidade de um quarto planeta foi estudado por alguns autores. O trabalho desenvolvido em Curiel et al. (2011), apresentou a possível existência de um quarto planeta no sistema ν Andromedae.

No trabalho de McArthur et al. (2010), há um estudo sobre a presença de um quarto planeta, mas descartam essa possibilidade devido aos resultados encontrados para o modelo utilizado por eles (com massas grandes e inclinações), porém não fazem um estudo aprofundado do comportamento do quarto planeta que será apresentado em seguida.

Para testarmos a viabilidade desse quarto planeta, denotado como planeta e , trabalharemos com dois modelos, que foram apresentados anteriormente na tabela 1.1.

Lembrando que negligenciamos nos estudos anteriores, o planeta mais interno, b , de massa de $0,5 M_J$, devido a sua grande proximidade com a estrela.

Modelo de massas pequenas

O modelo de massas pequenas foi proposto no trabalho de Curiel et al. (2011), e tem como característica massas pequenas e órbitas coplanares.

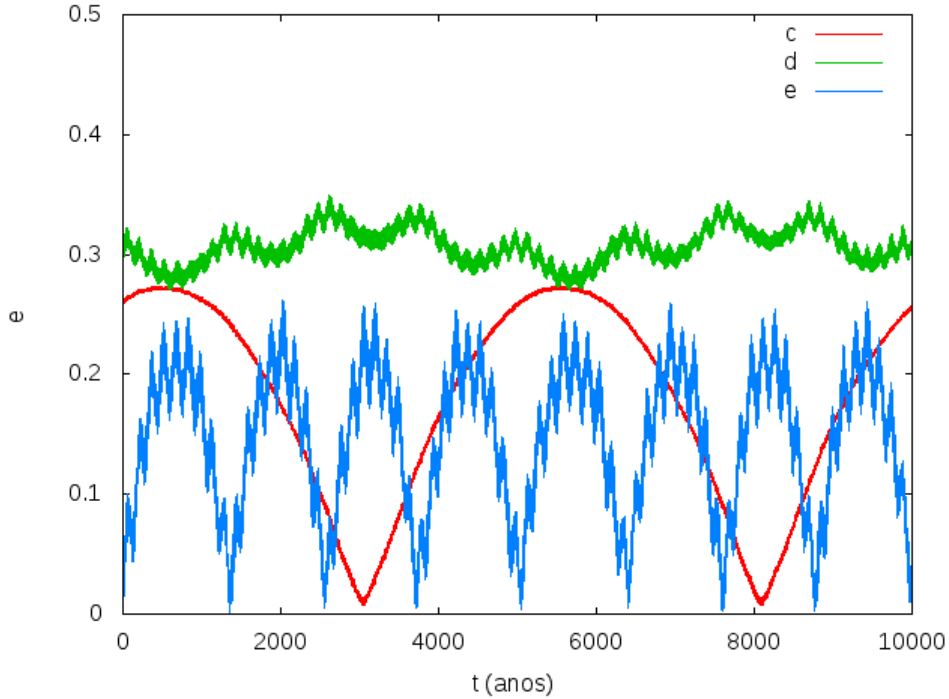


Figura 4.1: EVOLUÇÃO DE EXCENTRICIDADE PARA O MODELO DE MASSAS PEQUENAS DO SISTEMA ν ANDROMEDAE. Variação excentricidade para ν And c , ν And d e ν And e .

Para testarmos a evolução do quarto planeta nesse sistema, integramos numericamente utilizando o integrador Burlish-Stoer. Os resultados apresentados em Curiel et al. (2011) foram gerados a partir do pacote Mercury (Chambers, 1999) com a utilização do integrador híbrido.

No trabalho de Curiel et al. (2011) não são apresentados gráficos para a evolução de excentricidade e semi-eixo maior. Segundo os autores, seus resultados mostraram estabilidade neste sistema por pelo menos 10 mil anos.

O intervalo de integração para o nosso trabalho também foi de 10 mil anos. Na figura 4.1, apresentamos a evolução das excentricidades dos planetas c (em vermelho), d (em verde) e e (em azul), no modelo de massas pequenas.

Nota-se grandes amplitudes para o planeta c que apresenta um Δe (variação de excentricidade) de aproximadamente 0,25 e o planeta e apresenta um Δe de aproximadamente 0,2. O planeta d apresenta uma baixa amplitude, comparada aos outros corpos, variando menos de 0,05.

Notamos a existência de pelo menos duas frequências, uma de curto e outra de longo período. Os períodos longos são próximos a 5 mil anos para o planeta c e d e de aproximadamente mil anos para o planeta e .

As frequências secundárias, presentes em todos os três planetas, são resultados dos elementos de curto período que são considerados na integração numérica.

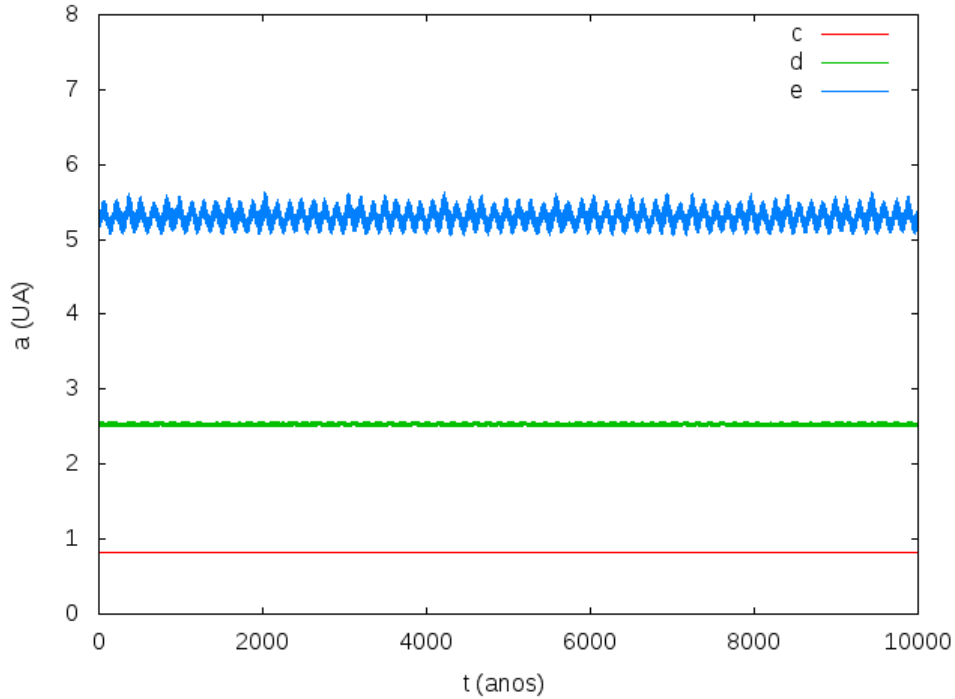


Figura 4.2: EVOLUÇÃO DO SEMI-EIXO MAIOR PARA O MODELO DE MASSAS PEQUENAS DO SISTEMA ν ANDROMEDAE. Evolução do semi-eixo maior para ν And c , ν And d e ν And e .

A evolução da excentricidade é bem comportada indicando um certo grau de estabilidade do sistema.

Na figura 4.2 apresentamos a evolução do semi-eixo maior para os três planetas estudados. Notamos baixas amplitudes de variação e a existência de frequências secundárias, que a princípio não influenciam no panorama geral da evolução do semi-eixo maior.

Não há ejeção de nenhum planeta e os semi-eixos maiores não apresentam grandes variações.

Notamos tanto na figura 4.2, que apresenta a evolução dos semi-eixos, quanto na figura 4.3, que apresenta a evolução do raio orbital dos planetas, que os planetas apresentam evoluções bem comportadas.

Na figura 4.3 notamos que o planeta e possui uma maior variação de raio orbital, isso se deve por sua massa que é menor que as dos outros planetas, sofrendo uma forte influência, principalmente do corpo d que está mais próximo, e da distância maior do corpo central.

O planeta d mostra uma grande faixa de variação de aproximadamente 3,5 UA. O planeta d apresenta uma massa 4 vezes maior do planeta e e sua distância do corpo central é de aproximadamente 2,5 UA. O planeta c é o corpo com menor variação de raio orbital, não passando de uma largura de 1 UA, sendo sua massa de quase $2 M_J$.

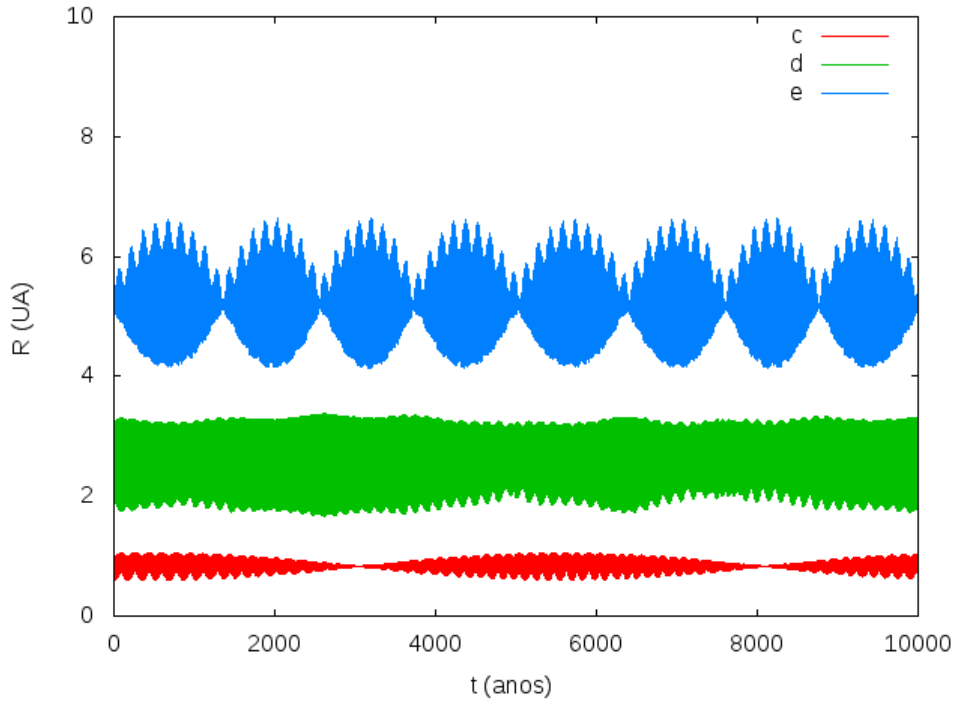


Figura 4.3: VARIACÃO DO RAIOS ORBITAL PARA O MODELO DE MASSAS PEQUENAS DO SISTEMA ν ANDROMEDAE. Variação do raio para os planetas c , d e e .

Neste modelo consideramos todos os planetas no mesmo plano.
 Trataremos a seguir o modelo de "massas grandes".

Modelo de massas grandes

O modelo de massas grandes, tem como características principais, planetas com grandes massas e inclinações.

Na integração numérica utilizamos os mesmos parâmetros do modelo anterior mas com os elementos e massas referentes a este modelo, encontrados na tabela 1.1.

Os resultados estão apresentados nas figuras 4.4, 4.5, 4.6 e 4.7.

Na figura 4.4 apresentamos a evolução de excentricidade para c (em vermelho), d (em verde) e e (em azul).

Nota-se que, a evolução da excentricidade dos três planetas apresentam um comportamento altamente irregular.

Apesar do comportamento caótico ao longo de toda a integração, as excentricidades dos planetas c e d ficaram confinadas a valores inferiores a 0,4.

No caso do planeta e os valores variam abruptamente em menos de 2 mil anos, atingindo excentricidade igual a 1 e sendo ejetado do sistema.

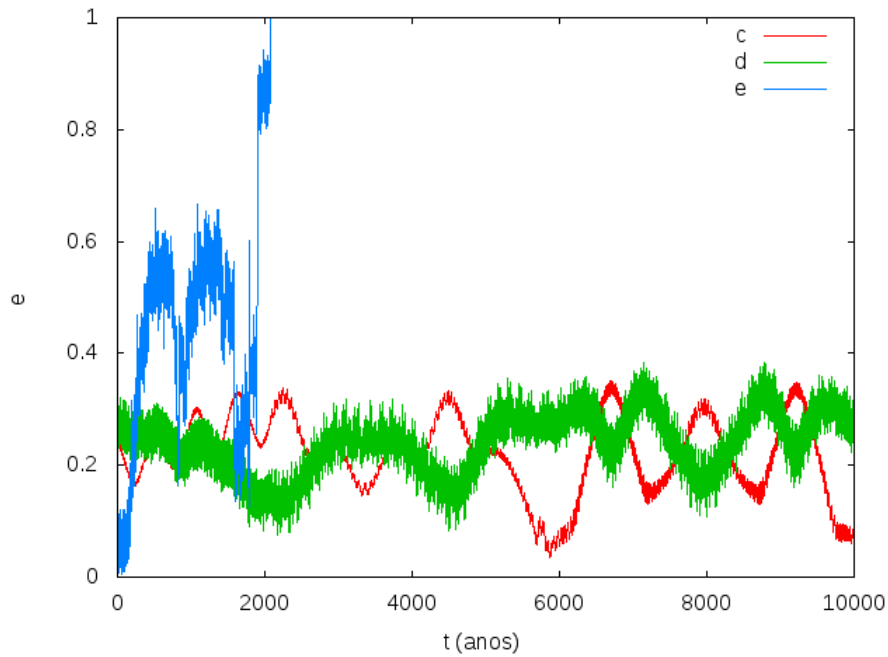


Figura 4.4: EVOLUÇÃO DE EXCENTRICIDADE PARA O MODELO DE MASSAS GRANDES DO SISTEMA ν ANDROMEDAE. Evolução da excentricidade para ν And c , ν And d e ν And e .

Neste sistema, como podemos ver na figura 4.5, não há estabilidade para o planeta e com os elementos orbitais utilizados. Em aproximadamente 2 mil anos, há um grande aumento no semi-eixo maior do planeta e , indicando uma ejeção do sistema.

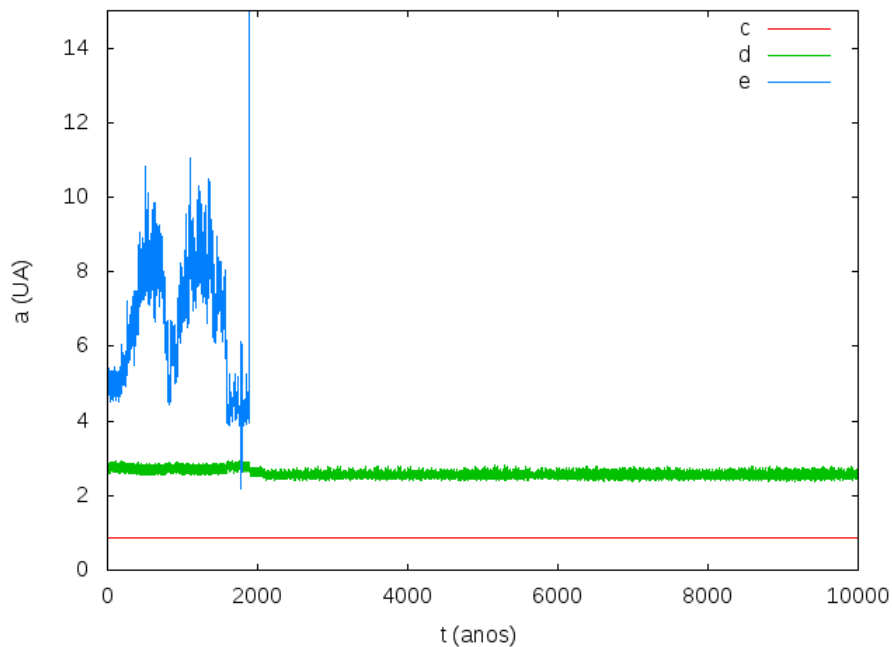


Figura 4.5: EVOLUÇÃO DO SEMI-EIXO MAIOR PARA O MODELO DE MASSAS GRANDES DO SISTEMA ν ANDROMEDAE. Evolução do semi-eixo maior para ν And c , ν And d e ν And e .

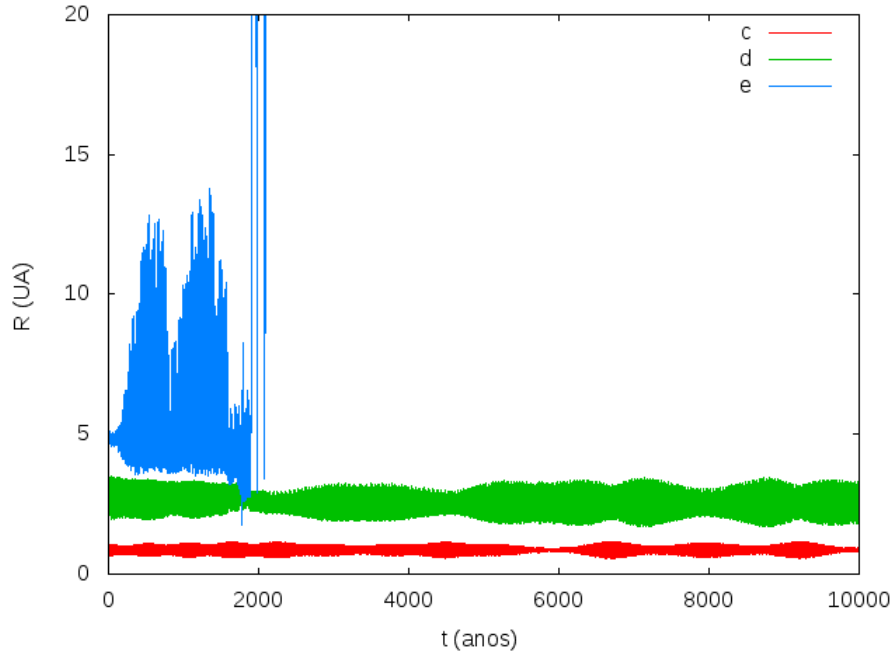


Figura 4.6: EVOLUÇÃO DO RAIOR ORBITAL PARA O MODELO DE MASSAS GRANDES DO SISTEMA *v* ANDROMEDAE. Evolução do Raio orbital para *v* And *c*, *v* And *d* e *v* And *e*.

Na figura 4.6 verificamos a evolução do raio orbital para os três planetas. Nota-se que próximo a 2 mil anos de integração, o corpo *e* atravessa a órbita do corpo *d*, que por sua vez apresenta um aumento no valor do raio neste momento devido a interferência do planeta *e*.

Na figura 4.7 apresentamos a evolução da inclinação referente a cada planeta. Diferentemente do modelo de massas pequenas, este modelo apresenta planetas com inclinações.

Para o planeta *e* não atribuímos uma inclinação inicial. Notamos que o comportamento apresentado é caótico e o planeta *e* apresenta um aumento em sua inclinação de maneira que o gráfico não mostrou o máximo chega a aproximadamente 170° , apresentando um movimento retrógrado antes da ejeção.

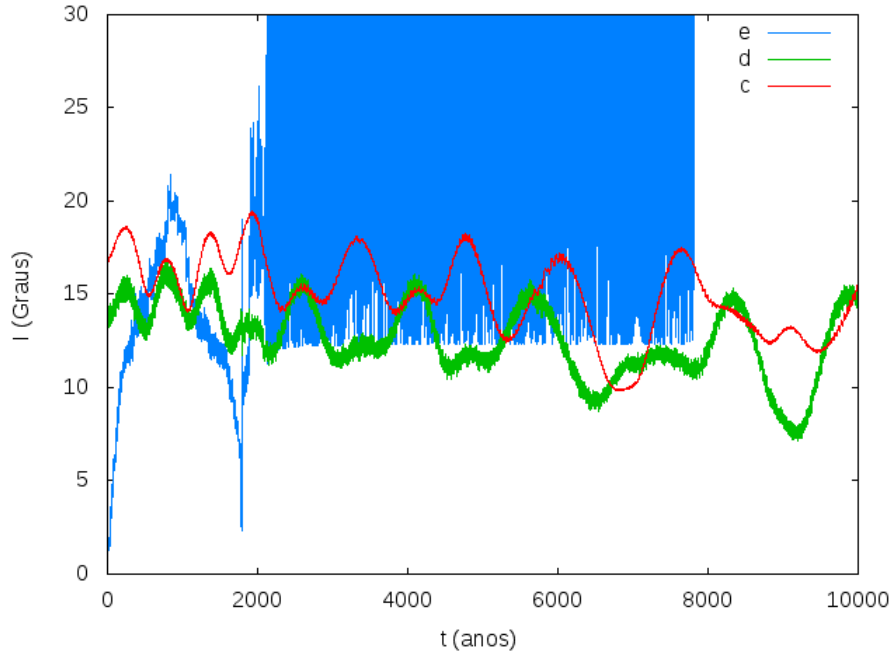


Figura 4.7: VARIAÇÃO DA INCLINAÇÃO PARA O MODELO DE MASSAS GRANDES DO SISTEMA *v* ANDROMEDAE. Variação da inclinação para *v* And *c*, *v* And *d* e *v* And *e*.

Com os resultados encontrados, este modelo mostra-se pouco provável para o sistema *v* Andromedae, considerando apenas os 10 mil anos de integração.

4.2 Estabilidade de Um Quarto Planeta

No trabalho de Curiel et al. (2011), foi identificaram um quarto planeta para o sistema *v* Andromedae. O modelo utilizado foi o modelo de massas grandes apresentado na tabela 1.1, onde notamos que as massas dos planetas *v* And *c* e *v* And *d* são mínimas.

Na pesquisa de Chavez et al. (2014), apresentam uma possível ressonância entre os planetas *d* e *e*, com os dados retirados de Curiel et al. (2011). Não iremos levar em consideração essa ressonância em nosso trabalho, podendo ter uma discrepância entre o sistema real.

Em nossa pesquisa, exploramos o modelo de grandes massas com a inclusão do quarto planeta. Realizando o estudo atribuindo diversos valores para os elementos orbitais do quarto planeta e integramos numericamente o sistema por 1 milhão de anos.

Uma possível condição para a instabilidade do modelo de massas grandes, apresentado na seção anterior, pode ser devido aos valores de inclinação atribuídos ao planeta *e*.

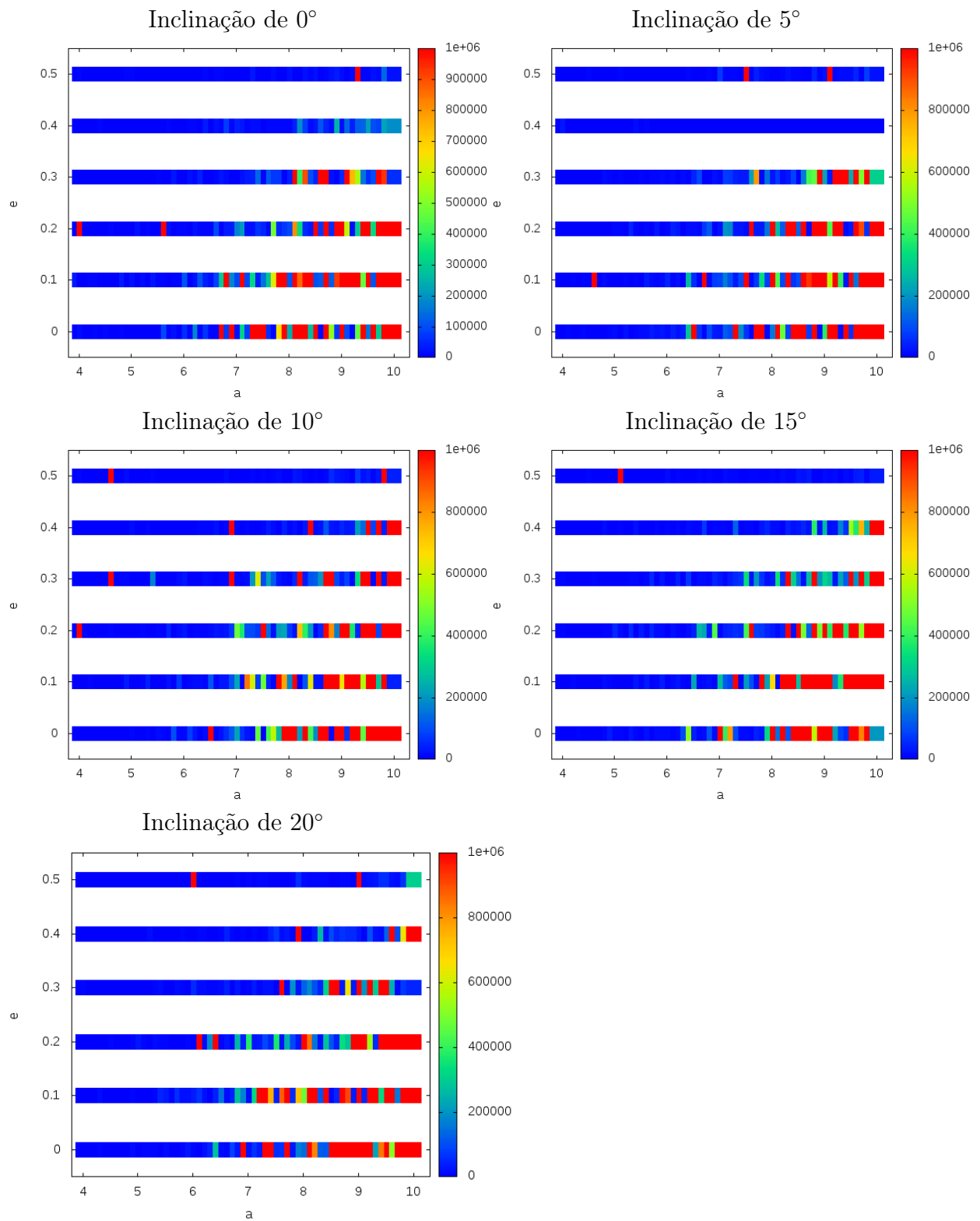


Figura 4.8: TEMPO DE ESCAPE. O tempo de ejeção do sistema para o quarto planeta com diversas condições iniciais de excentricidade, semi-eixo maior (em UA) e inclinações 0° , 5° , 10° , 15° e 20° . O diagrama de cores corresponde ao tempo de ejeção em anos, estando em vermelho as condições onde os corpos são ejetados ou se mantém além do tempo total de integração de 1 milhão de anos.

A massa utilizada para o quarto planeta foi de $1 M_J$, este valor é próximo ao encontrado por Curiel et al.(2011) e utilizado no modelo de massas pequenas, de $1,059 M_J$.

Na figura 4.8 apresentamos o tempo de escape para o v And e, conforme a variação da excentricidade, do semi-eixo maior e de inclinação. As condições iniciais que não resultaram na ejeção (em vermelho) indica as condições para a estabilidade do quarto planeta pelo tempo de integração de 1 milhão de anos.

Notamos que em todos os casos considerados em 4.8, para o sistema ter mais chances de estabilidade, o semi-eixo maior do planeta deve ser maior que 7 UA, salvo em alguns casos particulares como uma eventual ressonância com os outros planetas.

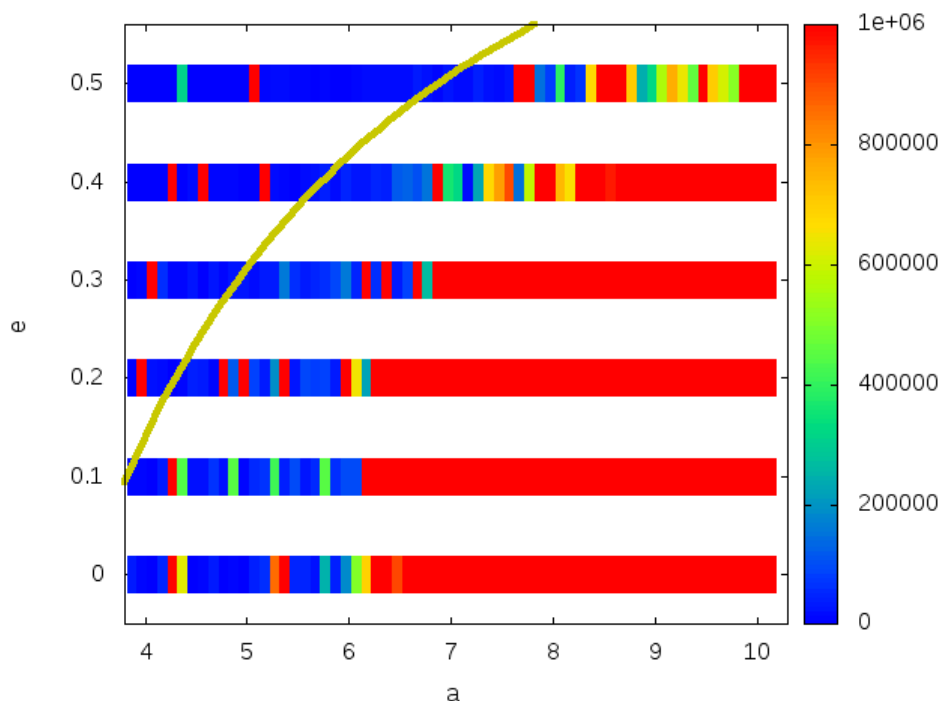


Figura 4.9: TEMPO DE ESCAPE DO SISTEMA PARA O QUARTO PLANETA COM AS CONDIÇÕES DO MODELO DE MASSAS PEQUENAS. Temos a variação da excentricidade e semi-eixo maior (UA) com a inclinação fixada em 0° .

A figura 4.9 apresenta as condições de estabilidade para o caso do modelo de massas pequenas do sistema v Andromedae. A curva apresentada foi obtida calculando os valores de semi-eixo maior e excentricidade do planeta e que tenham o pericentro igual à distância do apocentro do planeta d , ou seja,

$$p = a (1 - e^2), \quad (4.1)$$

sendo o valor de p , neste caso, igual a 3,443622 UA.

Esta curva apresenta as posições relativas a órbita do planeta "d". A região acima da curva está na região interna à órbita de "d". No caso há instabilidade quando o quarto

planeta se aproxima das condições próximas a curva. Nota-se que quanto mais próximo da curva mais rápida é a ejeção do planeta "e".

Como vemos na figura há algumas condições para estabilidade do planeta "e" próximo á curva, essas condições podem apresentar uma ressonância entre os planetas, o que evitaria encontros próximos entre eles.

O modelo apresenta uma grande faixa de estabilidade, que está denotada em vermelho, abaixo desta faixa todas as condições são estáveis. Nota-se que após aproximadamente 6 UA até 10 UA há estabilidade por pelo menos 1 milhão de anos. De fato, quanto maior a distância do quarto corpo dos outros planetas, maior a probabilidade de ser estável, pois podemos considerar o sistema como um problema de dois corpos (*v* And e o corpo central), cuja a solução é bem comportada.

Considerações Finais

A descoberta de múltiplos planetas orbitando a estrela ν Andromedae foi de grande impacto científico, pois foi o primeiro sistema múltiplo com uma estrela pertencente a sequência principal.

O método utilizado para a detecção foi via velocidade radial, o qual não atribui valores exatos para os elementos orbitais e massas dos planetas detectados. Devido a essas incertezas vários trabalhos foram realizados no sistemas porém com cenários muito distintos.

Neste trabalho foi analisado a dinâmica do sistema ν Andromedae com diferentes condições iniciais.

Na revisão bibliográfica notamos dois grupos distintos de pesquisas que utilizaram o sistema ν Andromedae com elementos orbitais e massas discordantes. Pelo método utilizado em ν Andromedae para a detecção (via velocidade radial) do sistema, possibilitou uma faixa de valores onde estaria concentrada as massas dos corpos encontrados. Por essa razão os dois modelos seriam aceitos dentro da comunidade científica.

Realizou-se uma breve análise da influência da binária ν Andromedae B no nosso sistema. Encontramos que, devido a grande distância que a binária se encontra do sistema, sua influência é negligenciável.

Estudamos o comportamento dos planetas c e d devido a perturbação secular e comparamos com os resultados por integração numérica e com os encontrados na literatura. Notou-se que o modelo utilizado por Chavez et al.(2014) tem uma estrutura mais bem comportada devido as massas pequenas e um sistema coplanar.

O modelo de "massas grandes"apresentou discrepâncias quando comparadas a bibliografia. A ausência do achatamento e da relatividade em nossos estudos podem ter gerado as divergências encontradas.

Com o problema das massas sendo essencial para a solução do sistema, estudamos o comportamento dos corpos c e d com diferentes massas. Notou-se uma simetria nos resultados e uma diferença entre os planetas internos e externos mesmo quando consideramos as mesmas massas, ou seja, a posição relativa do corpo influencia na sua evolução tanto quanto a sua massa.

Para finalizarmos, verificamos a estabilidade de um quarto planeta, previsto por Curiel et al. (2011) em diferentes cenários. Estudamos a possibilidade de um quarto planeta, no modelo de massas grandes com inclinação e encontramos as posições mais estáveis para o

novo planeta. Em geral, as posições em todos os cenários estavam acima de 7 UA.

Comparamos os resultados com o modelo de massas pequenas, onde o quarto planeta permanece estável e fizemos uma análise deste resultado com as condições relativas a órbita do planeta *d*.

Em trabalhos futuros, pode-se introduzir o achatamento da estrela para o estudo da teoria secular do sistema. A teoria secular para o quarto planeta também pode ser estudada.

Estudos considerando as ressonâncias do sistema podem ser realizados.

REFERÊNCIAS

BARNES, R., GREENBERG, R. Extrasolar Planetary System Near A Secular Separatrix. The Astrophysical Journal, 638:478-487. 2006

BARNES, R., GREENBERG, R., QUINN, T. R., MCARTHUR, B. E., BENEDICT, G. F. Origin and Dynamics of the Mutually Inclined Orbits of ν Andromedae c and d. The Astrophysical Journal, Volume 726, Issue 2, article id. 71, 7 pp. 2011.

BUTLER, R.B., MARCY, G.W., FISHER, D.A., BROWN, T.M., CONTOS, A.R., KORZENNIK, S.G., NESENSEN, P., NOYES, R.W. Evidence for Multiple Companions to ν Andromedae. The Astrophysical Journal, Volume 526, Issue 2, pp. 916-927. 1999.

BUTLER, R.P.; MARCY, G.W. A Planet Orbiting 47 Ursae Majoris. Astrophysical Journal Letters v.464, p.L153. 1996.

BUTLER, R.P., MARCY, G.W., HAUSER, E.W.H., SHIRTS, P. Three New “51 Pegasi-Type” Planets. The Astrophysical Journal, Volume 474, Issue 2, pp. L115-L118. 1997.

CASSEN, P., GUILLOT, T., QUIRRENBACH, A. Extrasolar Planets. Editora Springer. 2005.

CHAMBERS, J. E. A Hybrid Symplectic Integrator that Permits Close Encounters between Massive Bodies. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 304, 793. 1999.

CHAVEZ, C.E., REYES-RUIZ, M., ACEVES, H. Dynamical Analysis of the 3:1 Resonance in the ν Andromedae System. EPSC-DPS Joint Meeting 2011, France. [http : //meetings.copernicus.org/epsc – dps2011](http://meetings.copernicus.org/epsc-dps2011), p.1820.2014

CURIEL, S., CANTÓ, J., GEORFIEV, L., CHÁVEZ, C. E., POVEDA, A. A Fourth Planet Orbiting ν Andromedae. Astronomy and Astrophysics, Volume 525, id.A78, 5 pp. 2011.

DEVORAK R. Extrasolar Planets: Formation, Detection and Dynamics. Editora Wiley-VCH. 2007

FERRAZ-MELLO, S. Planetas Extra-Solares. Disponível em:
<http://www.astro.iag.usp.br/sylvio/exoplanets/>. Acesso em: Junho de 2014.

FISHER, D.A.; MARCY, G.W.; BUTLER, R.P.; LAUGHLIN, G.; VOGT, S.S. A Second Planet Orbiting 47 Ursae Majoris. *The Astrophysical Journal*, Volume 564, Issue 2, pp. 1028-1034. 2002

FUHRMAN, K., PFEIFFER, M.J., BERNKOPF, J. F- and G-type stars with planetary companions: ν Andromedae, ρ^1 Cancri, τ Bootis, 16 Cygni and ρ Coronae Borealis. *Astronomy and Astrophysics*, v.336, p.942-952. 1998.

GREGORY, P.C.; FISCHER, D.A. A Bayesian periodogram finds evidence for three planets in 47 Ursae Majoris. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 403, Issue 2, pp. 731-747. 2010.

HARRINGTON, J., HANSEN, B.M., LUSZCZ, S.H., SEAGER, S., DEMING, D., MENOU, K., CHO, J., RICHARDSON, J. The Phase-Dependent Infra-Red Brightness of The Extrasolar Planet ν Andromedae b. *Science*, Volume 314, Issue 5799, pp. 623-626. 2006.

LAUGHLIN, G., ADAMS, F.C. Stability And Chaos In The ν Andromedae Planetary System. *The Astrophysical Journal*, Volume 526, Issue 2, pp. 881-889. 1999.

LISSAUER, J. J. Three planets for Upsilon Andromedae. *Nature*, Volume 398, Issue 6729, pp. 659. 1999.

LOWRANCE, P.J, KIRPATRICK, J.D., BEICHMAN, C.A. A Distant Stellar Companion In The ν Andromedae System. *The Astrophysical Journal*, Volume 572, Issue 1, pp. L79-L81. 2002.

MAYOR, M., QUELOZ, D. A Jupiter-mass companion to a solar-type star. *Nature* 378, 355 – 359. 1995.

MCARHTUR, B.E., BENEDICT, G.F., BARNES, R., MARTIOLI, E., KORZENNIK, S., NELAN, E., BUTLER, R.P. New Observational Constraints On The ν Andromedae System With Data From The Hubble Space Telescope And Hobby-Eberly Telescope. *The*

Astrophysical Journal, 715:1203-1220. 2010.

MURRAY, C.D., Dermott, S.F. Solar System Dynamics. Cambridge University Press. 1999.

NASA'S KEPLER MISSION. Disponível em: [http : //kepler.nasa.gov/](http://kepler.nasa.gov/). Acesso em : Junho de 2014.

NASA'S SOLAR SYSTEM EXPLORATION. Disponível em:
[http : //solarsystem.nasa.gov/missions/](http://solarsystem.nasa.gov/missions/). Acesso em : Junho de 2014.

RIVERA, E.; HAGHIGHIPOUR, N. On the stability of test particles in extrasolar multiple planet systems. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. Volume 374, pp. 599-613. 2007.