

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA FILHO - UNESP

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Alocação de Pólos com Realimentação da Derivada dos Estados usando LMIs

Candidato: Flávio Andrade Faria

Orientador: Prof. Dr. Edvaldo Assunção.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO” - UNESP, CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA, para preenchimento dos pré-requisitos parciais para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

23 de Dezembro de 2005



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Alocação de Pólos com Realimentação da Derivada dos Estados usando LMIs

Autor: FLÁVIO ANDRADE FARIA

Orientador: Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de MESTRE em ENGENHARIA ELÉTRICA pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO

Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO M. TEIXEIRA

Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Dr. HILTON CLEBER PIETROBOM

Divisão de Sistemas Espaciais - Instituto de Aeronáutica e Espaço - IAE - São José dos Campos

Data da realização: 23 de Dezembro de 2005.



Presidente da Comissão Examinadora
Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO

*Dedico esta dissertação à minha família,
por todo apoio, compreensão, amor e
carinho que sempre me concederam.*

Agradecimentos

Dedico meus sinceros agradecimentos:

- à Deus, por não olhar minhas faltas e me ajudar, concedendo saúde e inteligência;
- ao professor doutor Edvaldo Assunção, pela orientação e incentivo;
- ao professor doutor Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, por todo apoio e atenção;
- Prof^a. Dr^a. Neusa A. P. da Silva do Departamento de Matemática da FEIS, pela ajuda em algumas demonstrações de teoremas.
- as funcionárias da seção de pós-graduação, pelo bom atendimento;
- aos meus amigos da Pós-graduação, com quem muito aprendi;
- à CAPES, pelo apoio financeiro;

*“A leitura faz o homem completo.
A conversação o torna ágil. E o
escrever o leva a ser preciso.”*
Francis Bacon (1561–1626),
filósofo inglês.

Resumo

Este trabalho aborda técnicas de controle em sistemas lineares realimentados com a derivada dos estados. Apresenta-se uma nova técnica de alocação de pólos, de forma que a resposta do sistema em malha fechada atenda alguns índices de desempenho. O projeto para o controlador é desenvolvido na forma de LMIs. Esse tipo de projeto é mais flexível no tratamento de robustez. Porém, é bem complicado inserir restrições clássicas de índice de desempenho em LMIs. Para resolver essa situação usa-se o conceito de estabilidade regional (ou *$\mathcal{D}$ -estabilidade*) de sistemas. São apresentadas condições necessárias e suficientes para a *$\mathcal{D}$ -estabilidade* de sistemas lineares, realimentados com a derivada dos estados. Também são encontradas condições de suficiência para a *$\mathcal{D}$ -estabilidade* em sistemas com incertezas politópicas nos parâmetros. Apresenta-se a analogia que existe entre LMIs para sistemas com incertezas politópicas e LMIs para sistemas variantes no tempo. A eficiência da metodologia apresentada é avaliada através da solução de exemplos numéricos.

Abstract

This work focuses control techniques in linear systems using only state-derivative feedback. It presents new techniques for pole-placement, where the transient response of a linear system is specified by design constraints. The design of the controller is described in LMI framework. This framework is more flexible on the design of robust systems. However, it is more difficulty to incorporate classical design constraints in LMIs. The problem is solved using D-stability concept. We proposed necessary and sufficient conditions for D-stability of linear system using state derivative feedback. Are also proposed sufficient conditions to uncertain linear system and time-varying systems with bounded parameters. The validity and applicability of this approach are illustrated by examples.

Lista de Figuras

1	Região $S(\gamma, r, \theta)$	p. 21
2	Sistema Mecânico.	p. 37
3	Sistema alocado na região $S(3, 6, 45^\circ)$	p. 39
4	Entrada de controle $u(t)$ do Exemplo 1	p. 39
5	Sistema alocado na região $S(5, 8, 0^\circ)$	p. 41
6	Entrada de controle $u(t)$ do Exemplo 2	p. 41
7	Sistema alocado na região $S(5.5, 7, 30^\circ)$	p. 43
8	Entrada de controle $u(t)$ do Exemplo 3	p. 43
9	Sistema alocado na região $S(2, 30, 60^\circ)$	p. 46

Lista de Tabelas

1	Exemplo 5.1 - Localização dos pólos do sistema controlado	p. 38
2	Exemplo 5.2 - Localização dos pólos do sistema controlado	p. 41
3	Exemplo 5.3 - Localização dos pólos do sistema controlado	p. 42
4	Exemplo 5.4 - Localização dos pólos do sistema incerto	p. 45

Sumário

Introdução	p. 11
1 Conceitos iniciais	p. 15
2 Realimentação da derivada dos estados	p. 17
2.1 Realimentação em sistemas lineares e invariantes no tempo	p. 17
2.2 Condição de estabilidade: projeto do controlador	p. 18
3 Alocação de Pólos usando $\mathcal{D}$-estabilidade	p. 20
3.1 Técnicas de Projeto usando $\mathcal{D}$ -estabilidade	p. 20
3.2 Projeto de um controlador $\mathcal{D}$ -estável usando realimentação derivativa .	p. 25
4 Alocação de Pólos usando $\mathcal{D}$-estabilidade em sistemas incertos	p. 30
4.1 A $\mathcal{D}$ -estabilidade de sistemas lineares incertos	p. 30
4.2 A $\mathcal{D}$ -estabilidade em sistemas lineares variantes no tempo	p. 35
5 Exemplos Práticos	p. 36
5.1 Exemplo 1 - Sistema Mecânico	p. 36
5.2 Exemplo 2 - Alimentador para manufatura de papel	p. 38
5.3 Exemplo 3 - Sistema MIMO	p. 42
5.4 Exemplo 4 - Sistema Incerto	p. 43
Conclusões	p. 48
Referências	p. 49

Apêndice A	p. 51
A.1 Formas Hermitianas	p. 51

Introdução

O conceito de realimentação de sistemas constitui a base da Teoria de Controle Moderno e existe uma vasta literatura sobre esse assunto ((OGATA, 2000),(DORF; BISHOP, 2001),(CHEN, 1999)). As técnicas mais usadas para realimentar os sistemas são a realimentação da saída ou dos estados.

Neste texto utiliza-se uma outra forma de realimentação, que é a realimentação da derivada dos estados (realimentação derivativa).

A motivação para esse trabalho vem dos sistemas mecânicos para controle de vibrações (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004). Os sensores mais usados nestes sistemas são os acelerômetros. A partir da aceleração é possível obter a velocidade com boa precisão, porém é mais complexo obter o deslocamento. Logo os sinais usados para realimentar esses sistemas são: a aceleração e a velocidade e estes são justamente as derivadas da velocidade e da posição que podem representar os estados do sistema.

Um exemplo específico pode ser encontrado em (TRINDADE; BENJEDDOU; OHAYON, 2001) onde os autores desenvolveram controladores para um sistema de amortecimento ativo de vibrações. Primeiro eles projetaram um controlador ótimo com realimentação de estados. Como esse tipo de controlador necessita que todos os estados estejam disponíveis para a realimentação, foi necessário adicionar um observador de estados ao projeto do controlador. Porém os sinais medidos na saída do sistema são velocidades! Alternativamente, eles projetaram e aplicaram uma realimentação derivativa no sistema. Isso permitiu a implementação de um outro controlador mais simples e barato.

O uso da realimentação derivativa em sistemas lineares tem sido explorada nos últimos anos. Alguns pesquisadores procuram desenvolver métodos similares aos já existentes para a realimentação de estados, por exemplo (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004) desenvolveram uma fórmula de Ackermann generalizada para sistemas lineares (SISO) sob realimentação derivativa.

A realimentação derivativa é imprescindível para o estudo de modelos em espaço de estados generalizados (ou sistemas descritores). Um sistema descritor tem a seguinte forma:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

sendo $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ e $x(t) \in \mathbb{R}^n$.

Se a matriz E é inversível ($\det(E) \neq 0$), basta multiplicar (1) à esquerda por E^{-1} para obter

$$\dot{x}(t) = A_E x(t) + B_E u(t), \quad \text{sendo } A_E = E^{-1}A, \quad B_E = E^{-1}B.$$

Logo o comportamento do sistema (1) se torna equivalente ao comportamento de um sistema na forma padrão ($\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$).

O processo de passar o sistema (1) para o formato padrão é chamado de *processo de padronização*, sistemas em que isso é possível ($\det(E) \neq 0$) são chamados de sistemas regulares (ou padronizáveis).

O problema surge justamente quando a matriz E é singular ($\det(E) = 0$). Sistemas com essa característica também são conhecidos na literatura como *sistemas singulares*. A resposta dinâmica de um sistema singular é estruturalmente complicada tendo formas impulsivas e ausência de unicidade nas soluções. O que dificulta muito a sua manipulação.

Uma maneira de tratar sistemas singulares é com o uso da realimentação derivativa ($u = -K\dot{x}(t)$), ela permite a padronização desses sistemas alterando a estrutura da matriz ($E + BK$).

Existem muitos artigos tratando de sistemas singulares sob realimentação derivativa. Lewis e Syrmos (LEWIS; SYRMOS, 1991) obtiveram resultados teóricos abordando o problema sob o ponto de vista da teoria geométrica. Eles usaram uma equação generalizada de Lyapunov e encontraram uma técnica estável computacionalmente para manipular a *estrutura dos autovalores* (do inglês, *eigenstructure*) do sistema. Em 1992, Bunse-Gerstner, Mehrmann e Nichols (BUNSE-GERSTNER; MEHRMANN; NICHOLS, 1992) trataram os sistemas (1) para o caso contínuo e discreto. Todos os procedimentos teóricos apresentados foram desenvolvidos usando decomposição em matrizes ortogonais, o que torna os procedimentos apresentados aplicáveis computacionalmente. Em (BUNSE-GERSTNER et al., 1999) os sistemas descritores são analisados usando a forma canônica de Weierstrass e a estrutura dos autovalores do sistema. Garcia-Planas (GARCIA-PLANAS, 2003) estudou o comportamento dos sistemas singulares desenvolvendo técnicas que garantem a padro-

nização e a controlabilidade do sistema (1) sob realimentação derivativa e proporcional ($u = Lx(t) - K\dot{x}(t)$), apenas pela análise das matrizes (E, A, B) . Duan (DUAN; IRWIN; LIU, 1999) também estudou sistemas singulares sob realimentação derivativa e proporcional. Ele encontrou condições para a padronização e estabilidade de sistemas singulares através de duas LMIs (do inglês, *Linear Matrix Inequalities*). Os resultados obtidos foram estendidos para o caso em que (1) possui incertezas politópicas nos parâmetros.

A realimentação derivativa em sistemas lineares dados na forma padrão $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, é pouco usual. Neste caso a realimentação de estados já é suficiente. Porém, a realimentação derivativa representa um recurso a mais para a abordagem desses sistemas.

O objetivo deste trabalho é propor uma técnica de alocação de pólos, em sistemas lineares na forma padrão realimentados com a derivada dos estados. Em contraste aos trabalhos de (DUAN; IRWIN; LIU, 1999) e (GARCIA-PLANAS, 2003), a técnica proposta necessita apenas da realimentação derivativa ($u = -K\dot{x}(t)$). Isso permite que o projeto do controlador seja mais simples. A alocação é feita usando o conceito de $\mathcal{D}$ -estabilidade de sistemas. Existem vários artigos abordando $\mathcal{D}$ -estabilidade, um dos trabalhos pioneiros na área foi (GUTMAN; JURY, 1981), onde os autores caracterizaram diversas áreas geométricas do plano complexo através de equações polinomiais. Haddad (HADDAD; BERNSTEIN, 1992) estendeu esses resultados caracterizando regiões do plano complexo através de LMIs. Em (ARZELIER; BERNUSSOU; GARCIA, 1993) o conceito da $\mathcal{D}$ -estabilidade foi tratado como um problema de programação linear. A realimentação de estados também tem sido explorada no tratamento da $\mathcal{D}$ -estabilidade de sistemas. Em ((GARCIA; BERNUSSOU, 1995), (FURUTA; KIM, 1987)), os autores usaram a realimentação de estados para alocar os pólos em uma região circular pré-definida. Chilali e Gahinet ((CHILALI; GAHINET, 1996), (CHILALI; GAHINET; APKARIAN, 1999)) usaram o conceito de $\mathcal{D}$ -estabilidade para inserir restrições clássicas de projeto (porcentagem de overshoot, tempo de subida, tempo de estabelecimento, etc.) na modelagem de um controlador misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$.

A partir dos resultados apresentados inicialmente em (CHILALI; GAHINET, 1996), desenvolvemos uma nova técnica de alocação de pólos através de LMIs. Neste trabalho são propostas condições necessárias e suficientes para a $\mathcal{D}$ -estabilidade de sistemas lineares sob realimentação derivativa. Como os resultados são obtidos na forma da solução de LMIs, isso torna fácil a sua solução em computadores. Também são propostas condições suficientes para a $\mathcal{D}$ -estabilidade em sistemas que possuem incertezas politópicas. Exemplos numéricos são resolvidos com a metodologia proposta.

O texto se apresenta estruturalmente da seguinte forma:

- Capítulo 1: Apresenta conceitos matemáticos básicos, necessários ao desenvolvimento teórico.
- Capítulo 2: Introduz o uso da realimentação das derivadas de estados em sistemas lineares. Encontra condições necessárias e suficientes para que sistemas lineares sob realimentação derivativa sejam assintoticamente estáveis.
- Capítulo 3: Discute técnicas de controle usando $\mathcal{D}$ -estabilidade e encontra condições necessárias e suficientes para que sistemas lineares sob realimentação derivativa sejam $\mathcal{D}$ -estáveis.
- Capítulo 4: Estende os resultados obtidos no Capítulo 3 e encontra condições suficientes para que sistemas que possuem incertezas politópicas sejam $\mathcal{D}$ -estáveis. Apresenta condições para a $\mathcal{D}$ -estabilidade em sistemas lineares variantes no tempo com parâmetros limitados.
- Capítulo 5: Testa a eficiência da metodologia proposta resolvendo exemplos numéricos através de simulação em microcomputadores.

1 Conceitos iniciais

Para a obtenção dos resultados desejados usa-se ao longo do texto várias operações matriciais. Muitas dessas operações já são bem conhecidas da Álgebra Linear, porém em alguns momentos é necessário o uso de propriedades mais específicas da Álgebra Matricial. Abaixo citamos algumas dessas propriedades. Todas as demonstrações são omitidas e maiores informações são encontradas em ((GRAHAM, 1981),(MEYER, 2000)).

Dadas as matrizes $A_{m \times n}$ e $B_{p \times q}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pq} \end{bmatrix}.$$

Definimos como *produto de Kronecker* (*KRON*) entre A e B ($A \otimes B$) a seguinte matriz bloco

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}, \quad A \otimes B \text{ é de ordem } mp \times nq. \quad (1.1)$$

O produto de Kronecker verifica as seguintes propriedades:

1. O produto de Kronecker é um operador bilinear

$$A \otimes (\alpha B) = (\alpha A) \otimes B = \alpha(A \otimes B), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

2. Propriedade distributiva à esquerda e à direita

$$(A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C),$$

$$A \otimes (B + C) = (A \otimes B) + (A \otimes C).$$

3. Associativa

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C).$$

4. Não é comutativo

$$A \otimes B \neq B \otimes A.$$

5. Verifica produto de matrizes em matrizes de dimensões adequadas

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD).$$

6. A transposição não inverte a ordem das matrizes no produto de Kronecker

$$(A \otimes B)' = A' \otimes B'.$$

7. Quando A e B possuem posto completo, a inversa do produto de Kronecker de A e B é dada por

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

Neste trabalho será útil o seguinte resultado de operação elementar entre matrizes.

Lema 1. *Dada a matriz $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não simétrica ($M \neq M'$) tem-se*

$$M + M' < 0 \Leftrightarrow M < 0.$$

Prova: Considere a forma quadrática de M dada por

$$v'Mv < 0, \quad \forall v \neq 0.$$

Como essa expressão é um número real, tem-se que

$$v'Mv = (v'Mv)' = v'M'v < 0 \Leftrightarrow$$

$$v'Mv + v'M'v < 0 \Leftrightarrow$$

$$v'(M + M')v < 0 \Leftrightarrow M + M' < 0.$$

■

2 *Realimentação da derivada dos estados*

2.1 Realimentação da derivada dos estados em sistemas lineares e invariantes no tempo

Considere o sistema na forma padrão controlável linear e invariante no tempo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.1)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$.

Sistemas lineares na forma padrão tem a propriedade de que para toda condição inicial x_0 , existe uma única solução $x(t)$, à qual $x(t_0) = x_0$.

De (DUAN; IRWIN; LIU, 1999) e (GARCIA-PLANAS, 2003) tem-se que sempre existe uma matriz constante $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de modo que ao realimentar (2.1) com a derivada dos estados,

$$u = -K\dot{x}(t), \quad (2.2)$$

o sistema em malha fechada fica com a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = Ax(t) - BK\dot{x}(t) &\Leftrightarrow (I + BK)\dot{x}(t) = Ax(t) \Leftrightarrow \\ \dot{x}(t) &= (I + BK)^{-1}Ax(t), \end{aligned} \quad (2.3)$$

sendo a matriz $(I + BK)$ inversível.

Se $\det(A) \neq 0$, ou seja, A não tem autovalores na origem, então é possível garantir a estabilidade assintótica do sistema (2.3) usando uma matriz K apropriada (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004). A próxima seção apresenta condições necessárias e suficientes para a existência dessa matriz.

2.2 Condição de estabilidade: projeto do controlador

O estudo da estabilidade de (2.3) é realizado verificando a existência de uma função de Lyapunov ((OGATA, 2000),(DORF; BISHOP, 2001),(CHEN, 1999)) para o sistema.

Como o sistema (2.3) é linear, então o objetivo é procurar por uma matriz simétrica $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ verificando as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} V(x(t)) = x'(t)Px(t) > 0, \forall x(t) \neq 0 \Leftrightarrow \\ P > 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\dot{V}(x(t)) < 0, \forall x(t) \neq 0. \quad (2.5)$$

O próximo teorema, proposto nessa dissertação, verifica as condições de existência de uma matriz P satisfazendo (2.4) e (2.5).

Teorema 1. *Suponha que o sistema (2.1) não tem pólos na origem (ou, $\det(A) \neq 0$). O sistema (2.3) é assintoticamente estável se e somente se, existe uma matriz Q simétrica e uma matriz Y satisfazendo o seguinte conjunto de LMIs.*

$$AQ + QA' + AY'B' + BY'A' < 0, \quad (2.6)$$

$$Q > 0.$$

Prova: (Suficiência) Suponha que existem Q e Y satisfazendo (2.6).

Defina $K = YQ^{-1}$. Fazendo a substituição de variável $Q = P^{-1}$ tem-se $Y = KP^{-1}$. Substituindo Q e Y em (2.6) obtém-se

$$\begin{aligned} AP^{-1} + P^{-1}A' + A(KP^{-1})'B' + BKP^{-1}A' < 0 \Leftrightarrow \\ A(P^{-1} + P^{-1}K'B') + (P^{-1} + BKP^{-1})A' < 0 \Leftrightarrow \\ AP^{-1}(I + BK)' + (I + BK)P^{-1}A' < 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Aplicando o Lema 1 em (2.7) chega-se em

$$(I + BK)P^{-1}A' < 0,$$

de onde conclui-se que $(I + BK)$ é inversível e ainda que $\det(A) \neq 0$ (satisfazendo a condição de hipótese). Agora multiplique (2.7) à esquerda por $P(I + BK)^{-1}$ e à direita por $[(I + BK)']^{-1}P$ e obtenha

$$\begin{aligned}
P(I + BK)^{-1} \{AP^{-1}(I + BK)' + (I + BK)P^{-1}A'\} [(I + BK)']^{-1} P < 0 &\Leftrightarrow \\
P(I + BK)^{-1} A + A' [(I + BK)']^{-1} P < 0. &\quad (2.8)
\end{aligned}$$

Multiplicando (2.8) à esquerda por $x'(t)$, à direita por $x(t)$ e aplicando a igualdade (2.3) chega-se em

$$\begin{aligned}
x'(t) \left\{ P(I + BK)^{-1} A + A' [(I + BK)']^{-1} P \right\} x(t) < 0 &\Leftrightarrow \\
x'(t) P \left\{ (I + BK)^{-1} A x(t) \right\} + \left\{ x'(t) A' [(I + BK)^{-1}]' \right\} P x(t) < 0 &\stackrel{(2.3)}{\Leftrightarrow} \\
x'(t) P \dot{x}(t) + \dot{x}'(t) P x(t) < 0. &\quad (2.9)
\end{aligned}$$

Note que a equação (2.9) é equivalente a função $\dot{V}(x(t))$ para o sistema (2.3). Por hipótese tem-se que $Q > 0 \Rightarrow Q^{-1} = P > 0$. Daí segue que, se as LMIs (2.6) são factíveis, então existe uma matriz P satisfazendo as condições de Lyapunov (2.4) e (2.5) em relação ao sistema (2.3). Portanto quando as LMIs (2.6) são factíveis, o sistema (2.3) é assintoticamente estável para $K = YP$.

(Necessidade) Suponha que existe uma matriz K tal que o sistema (2.3) é assintoticamente estável. Pela teoria de Lyapunov existe uma matriz P simétrica real verificando as desigualdades (2.4) e (2.5). Logo a desigualdade (2.8) é factível. Portanto existem matrizes $Q = Q' > 0$ e Y satisfazendo as LMIs (2.6).

■

Pelo Teorema 1 conclui-se que o estudo da estabilidade assintótica do sistema (2.3) é equivalente ao estudo da factibilidade das LMIs (2.6). Isso facilita o estudo de estabilidade do sistema, pois LMIs quando factíveis são facilmente resolvidas através de softwares de programação matemática. Dentre os quais citamos o *MATLAB* (GAHINET et al., 1995) que é o mais usado e o *LMISol* (OLIVEIRA; FARIAS; GEROMEL, 1997) que é gratuito.

Se as LMIs (2.6) são factíveis, uma matriz K que estabiliza o sistema (2.3) é dada por

$$K = YQ^{-1}, \quad (2.10)$$

sendo Y e Q soluções de (2.6).

3 Alocação de Pólos usando $\mathcal{D}$ -estabilidade

3.1 Técnicas de Projeto usando $\mathcal{D}$ -estabilidade

Na prática somente a estabilização do sistema (2.3) não é suficiente, pois a maioria dos projetos de controle precisam atender índices de desempenho ((OGATA, 2000),(DORF; BISHOP, 2001)). Esses índices são comumente passados como grandezas no domínio do tempo e tem o objetivo de controlar a resposta transitória do sistema. Os índices de desempenho mais comuns são: *Tempo de subida t_s* , *Porcentagem de overshoot (ou, máximo valor de ultrapassagem) $PO\%$* e *Tempo de estabelecimento t_e* .

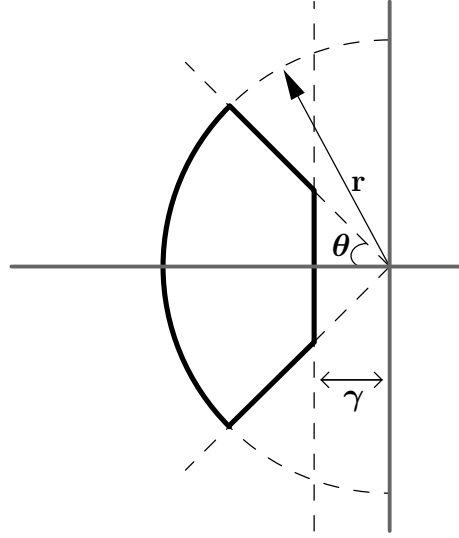
Em sistemas de segunda ordem os índices de desempenho podem ser representados em função da frequência natural não-amortecida ω_n e do coeficiente de amortecimento ζ ((OGATA, 2000),(DORF; BISHOP, 2001)).

Considere as seguintes substituições de variáveis (CHILALI; GAHINET, 1996): $r = \omega_n$, $\zeta = \cos(\theta)$ e $\gamma = \zeta\omega_n$. Então o conjunto $S(\gamma, r, \theta)$ de números complexos $x + yj$ que satisfazem os índices de desempenho, é dado por:

$$S(\gamma, r, \theta) = \left\{ \begin{array}{ll} x < -\gamma < 0, & \text{Representa um semi-plano à esquerda da reta} \\ & \text{vertical passando pelo ponto } (-\gamma, 0); \\ |x + yj| < r, & \text{Representa um disco centrado na origem} \\ & \text{de raio } r; \\ \tan(\theta)x < -|y|, & \text{Restrição que limita o argumento } \theta \text{ dos} \\ & \text{elementos do conjunto.} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

A região $S(\gamma, r, \theta)$ pode ser vista na Figura 1.

Uma vez caracterizada a região de interesse no plano complexo, o próximo passo é alocar todos os pólos do sistema (2.3) nessa região.

Figura 1: Região $S(\gamma, r, \theta)$.

Definição 1. Dada uma matriz A quadrada e uma região $\mathcal{D}$ no lado esquerdo do plano complexo, A é dita $\mathcal{D}$ -estável se todos os autovalores de A pertencem a $\mathcal{D}$.

Gutman e Jury (GUTMAN; JURY, 1981) caracterizaram a $\mathcal{D}$ -estabilidade de diversas regiões do plano complexo através de regiões polinomiais. Um dos principais resultados apresentados foi:

Lema 2. Uma matriz $A_{n \times n}$ é $\mathcal{D}$ -estável se e somente se, existe uma matriz $Q_{n \times n}$ simétrica tal que

$$\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n c_{kl} A^k Q (A')^l < 0, \quad Q > 0, \quad (3.2)$$

com $c_{lk} = c_{kl} \in \mathbb{R}$.

Prova: Ver em (GUTMAN; JURY, 1981).

■

Infelizmente os resultados de Gutman não são de caráter geral e assim a região $S(\gamma, r, \theta)$ não pode ser representada desta forma.

A $\mathcal{D}$ -estabilidade pode ser caracterizada através de LMIs ((CHILALI; GAHINET, 1996), (CHILALI; GAHINET; APKARIAN, 1999)).

Definição 2. Uma região $\mathcal{D}$ do plano complexo é chamada de região LMI (do inglês, LMI region), se existem matrizes reais L e H tais que

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : f_{\mathcal{D}}(z) < 0\}; \quad f_{\mathcal{D}}(z) = L + zH + (zH)^* = L + zH + \bar{z}H', \quad (3.3)$$

sendo L uma matriz simétrica, z uma variável complexa, $\bar{z}$ o conjugado complexo de z e $(zH)^*$ a matriz conjugada transposta de zH . A função $f_{\mathcal{D}}$ é chamada de *função característica* da região $\mathcal{D}$.

Observação 1. Note que apesar da função característica $f_{\mathcal{D}}(z)$ ser complexa, o conjunto imagem dessa função pertence ao espaço das matrizes hermitianas, pois

$$f_{\mathcal{D}}^*(z) = (L + zH + \bar{z}H')^* = L^* + z^*H^* + \bar{z}^*(H')^* = L + \bar{z}H' + zH = f_{\mathcal{D}}(z).$$

Como todos os autovalores de uma matriz hermitiana são reais (CHEN, 1984), então os resultados das formas quadráticas podem ser aplicados na função $f_{\mathcal{D}}(z)$. Mais detalhes são encontrados no Apêndice A.

Portanto uma região LMI é uma região do plano complexo representada por uma LMI em z e $\bar{z}$.

Observação 2. Uma importante característica das regiões LMI, é que elas são simétricas em relação ao eixo real do plano complexo, ou seja,

$$f_{\mathcal{D}}(\bar{z}) = L + \bar{z}H + (\bar{z}H)^* = L + \bar{z}H + zH' = \overline{L + zH + \bar{z}H'} = \overline{f_{\mathcal{D}}(z)}.$$

Chilali e Gahinet (CHILALI; GAHINET, 1996) desenvolveram uma extensão do resultado de Gutman para regiões LMI, e caracterizaram a estabilidade de regiões LMI da seguinte forma:

Lema 3. Uma matriz $A_{n \times n}$ real é $\mathcal{D}$ -estável se e somente se, existem matrizes reais $Q_{n \times n}$, L e H , sendo Q e L matrizes simétricas, tais que,

$$M_{\mathcal{D}}(A, Q) = L \otimes Q + H \otimes (AQ) + H' \otimes (AQ)' < 0, \quad Q > 0. \quad (3.4)$$

Prova: A demonstração é feita usando autovalores. Das propriedades dos autovalores temos que se λ_i é autovalor de A , então λ_i é autovalor de A' , isto é,

$$A'v_i = \lambda_i v_i \Leftrightarrow v_i^* A = \bar{\lambda}_i v_i^*. \quad (3.5)$$

sendo $v_i \neq 0$ autovetor da matriz A' .

Supondo que existe uma matriz Q satisfazendo (3.4), multiplique a expressão à esquerda por $(I \otimes v_i^*)$ e à direita por $(I \otimes v_i)$,

$$\begin{aligned} \{I \otimes v_i^*\} (L \otimes Q + H \otimes (AQ) + H' \otimes (AQ)') \{I \otimes v_i\} &< 0 \Leftrightarrow \\ L \otimes v_i^* Q v_i + H \otimes v_i^* A Q v_i + H' \otimes v_i^* Q A' v_i &< 0 \stackrel{(3.5)}{\Leftrightarrow} \\ L \otimes v_i^* Q v_i + H \otimes v_i^* \bar{\lambda}_i Q v_i + H' \otimes v_i^* Q \lambda_i v_i &< 0 \Leftrightarrow \\ L \otimes v_i^* Q v_i + H \otimes \bar{\lambda}_i v_i^* Q v_i + H' \otimes \lambda_i v_i^* Q v_i &< 0. \end{aligned}$$

Como $v_i^* Q v_i$ é um escalar, decorre da Propriedade 1 de Kronecker que

$$\begin{aligned} L \otimes v_i^* Q v_i + H \otimes \bar{\lambda}_i v_i^* Q v_i + H' \otimes \lambda_i v_i^* Q v_i &< 0 \Leftrightarrow \\ (v_i^* Q v_i) (L \otimes 1 + H \otimes \bar{\lambda}_i + H' \otimes \lambda_i) &< 0 \stackrel{v_i^* Q v_i > 0}{\Leftrightarrow} \\ L \otimes 1 + H \otimes \bar{\lambda}_i + H' \otimes \lambda_i &< 0. \end{aligned}$$

Aplique a operação do conjugado complexo na expressão e obtenha

$$\begin{aligned} \overline{L \otimes 1 + H \otimes \bar{\lambda}_i + H' \otimes \lambda_i} &< 0 \Leftrightarrow \\ L \otimes 1 + H \otimes \lambda_i + H' \otimes \bar{\lambda}_i &< 0 \stackrel{KRON}{\Leftrightarrow} \\ L + \lambda_i H + \bar{\lambda}_i H' &< 0 \stackrel{Def. 2}{\Leftrightarrow} f_{\mathcal{D}}(\lambda_i) < 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Note que a demonstração exibe uma equivalência entre a região $M_{\mathcal{D}}(A, Q)$ e a função $f_{\mathcal{D}}$ aplicada nos autovalores da matriz A . Uma demonstração mais completa para esse Teorema pode ser encontrada em (CHILALI; GAHINET, 1996, apêndice pag. 366).

■

Observação 3. Se a matriz A é $\mathcal{D}$ -estável, a expressão $M_{\mathcal{D}}(A, Q)$ é equivalente a função $f_{\mathcal{D}}(\lambda_i) < 0, \forall i$, sendo λ_i os autovalores da matriz A . A relação de equivalência entre a LMI (3.4) e a função característica (3.6) é da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q \sim 1, \\ AQ \sim \lambda_i, \\ QA' \sim \bar{\lambda}_i. \end{array} \right. \tag{3.7}$$

Um resultado importante relacionando conjuntos $M_{\mathcal{D}}(A, Q)$ é:

Corolário 1. *A é simultaneamente $\mathcal{D}_1$ -estável e $\mathcal{D}_2$ -estável se e somente se,*

$$M_{\mathcal{D}_1}(A, Q) < 0 \text{ e } M_{\mathcal{D}_2}(A, Q) < 0.$$

Prova: ver em (CHILALI; GAHINET, 1996).

O resultado do Corolário 1 é muito importante, pois ele diz que pode-se estudar regiões convexas simétricas complicadas do plano através de regiões LMI mais simples. Usando o Corolário 1 na região $S(\gamma, r, \theta)$ chega-se no seguinte resultado (CHILALI; GAHINET, 1996).

Lema 4. *O sistema (2.1) é $S(\gamma, r, \theta)$ -estável se e somente se, existe uma matriz Q simétrica verificando o seguinte conjunto de LMIs:*

$$AQ + QA' + 2\gamma Q < 0, \quad (\text{I})$$

$$\begin{bmatrix} -rQ & AQ \\ QA' & -rQ \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{II})$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(AQ + QA') & \cos(\theta)(AQ - QA') \\ \cos(\theta)(QA' - AQ) & \sin(\theta)(AQ + QA') \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{III})$$

$$Q > 0. \quad (\text{IV})$$

Prova: Ver em ((CHILALI; GAHINET, 1996),(ARZELIER; BERNUSSOU; GARCIA, 1993)).

■

Note que a LMI (III) pode ser descrita de forma equivalente usando propriedades do produto de Kronecker ((ARZELIER; BERNUSSOU; GARCIA, 1993),(CHILALI; GAHINET, 1996)),

$$(W \otimes AQ) + (W \otimes AQ)' < 0, \quad (\text{III.b})$$

$$\text{sendo } W = \begin{bmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix}.$$

A LMI (I) representa o semi-plano à esquerda da reta vertical que passa pelo ponto $(-\gamma, 0)$, $\gamma > 0$, a LMI (II) representa um disco centrado na origem com raio r e a LMI (III) representa a região interna ao cone com vértice na origem limitado pelas semi-retas com coeficientes angulares $\tan(\theta)$ e $\tan(-\theta)$ (ver Figura 1).

Nesta seção foram apresentados resultados a respeito da $\mathcal{D}$ -estabilidade da matriz A na região $S(\gamma, r, \theta)$. A próxima seção descreve técnicas de controle usando a realimentação derivativa.

3.2 Projeto de um controlador $\mathcal{D}$ -estável usando realimentação derivativa

Esta seção apresenta condições necessárias e suficientes para que sistemas (2.1) sejam $S(\gamma, r, \theta)$ -estáveis sob realimentação derivativa. O objetivo é encontrar uma matriz K que torne o sistema (2.3) $S(\gamma, r, \theta)$ -estável. O próximo teorema resolve esse problema.

Teorema 2. *Suponha que (2.1) não tem pólos na origem ($\det(A) \neq 0$). O sistema (2.3) é $S(\gamma, r, \theta)$ -estável se e somente se, existe uma matriz Q simétrica e uma matriz Y satisfazendo o seguinte conjunto de LMIs:*

$$\begin{bmatrix} AQ + QA' + BYA' + AY'B' & Q + BY \\ Q + Y'B' & -\frac{Q}{2\gamma} \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{V})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{r}{2}(A^{-1}(Q + BY) + (Q + BY)'(A^{-1})') & -Q \\ -Q & \frac{r}{2}(A^{-1}(Q + BY) + (Q + BY)'(A^{-1})') \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{VI})$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(AQ + QA' + BYA' + AY'B') & \cos(\theta)[AQ + AY'B' - (QA' + BYA')] \\ \cos(\theta)[QA' + BYA' - (AQ + AY'B')] & \sin(\theta)(AQ + QA' + BYA' + AY'B') \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{VII})$$

$$Q > 0. \quad (\text{VIII})$$

Prova: Para a demonstração do teorema usa-se a seguinte substituição de variáveis:

$$Y = KQ. \quad (3.8)$$

A demonstração do teorema é realizada em três partes, uma para cada LMI.

Parte i) (Suficiência) Supondo (V) factível, aplique o complemento de Schur ((BOYD et al., 1994), (ASSUNÇÃO; TEIXEIRA, 2001)) no sentido inverso na LMI (V) e obtenha

$$AQ + QA' + BYA' + AY'B' + (Q + BY) [2\gamma Q^{-1}] (Q + BY)' < 0, \quad (3.9)$$

substitua Y pela expressão (3.8)

$$\begin{aligned} A(Q + BKQ)' + (Q + BKQ)A' + (Q + BKQ) [2\gamma Q^{-1}] (Q + BKQ)' &< 0 \Leftrightarrow \\ AQ(I + BK)' + (I + BK)QA' + (I + BK)Q [2\gamma Q^{-1}] Q(I + BK)' &< 0 \Leftrightarrow \\ AQ(I + BK)' + (I + BK)QA' + (I + BK) [2\gamma Q] (I + BK)' &< 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

A expressão (3.9) é equivalente a LMI do Teorema 1 com taxa de decaimento γ (BOYD et al., 1994). Então da prova de suficiência do Teorema 1 segue que a matriz $(I + BK)$ é inversível. Daí multiplique (3.10) à esquerda por $(I + BK)^{-1}$ e à direita por $[(I + BK)^{-1}]'$ para obter

$$QA' [(I + BK)^{-1}]' + (I + BK)^{-1}AQ + 2\gamma Q < 0, \quad (3.11)$$

e substitua $(I + BK)^{-1}A$ por A_N

$$A_NQ + QA'_N + 2\gamma Q < 0. \quad (3.12)$$

Quando a LMI (V) é factível, o sistema (2.3) com $K = YQ^{-1}$ satisfaz a desigualdade (I).

(Necessidade) Suponha que existe K tal que o sistema (2.3) é $S(\gamma, r, \theta)$ -estável, então (2.3) satisfaz a desigualdade (I), isto é, $A_NQ + QA'_N + 2\gamma Q < 0$. Como foi visto, se isso ocorre então a LMI (V) é factível.

Parte ii) (Suficiência) Supondo a LMI (VI) factível, substitua Y pela expressão (3.8) para obter

$$\begin{bmatrix} \frac{r}{2} (A^{-1}(Q + BKQ) + (Q + BKQ)'(A^{-1})') & -Q \\ -Q & \frac{r}{2} (A^{-1}(Q + BKQ) + (Q + BKQ)'(A^{-1})') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} (A^{-1}(I + BK)Q + Q(I + BK)'(A^{-1})') & -Q \\ -Q & \frac{r}{2} (A^{-1}(I + BK)Q + Q(I + BK)'(A^{-1})') \end{bmatrix} < 0. \quad (3.13)$$

Da suficiência da Parte i) tem-se que $(I + BK)$ é inversível e usando a hipótese do teorema ($\det(A) \neq 0$), conclui-se que a matriz $A_N = (I + BK)^{-1}A$ é inversível, logo $A_N^{-1} = A^{-1}(I + BK)$. Usando esse fato em (3.13) chega-se em

$$\begin{bmatrix} \frac{r}{2} (A_N^{-1}Q + Q(A'_N)^{-1}) & -Q \\ -Q & \frac{r}{2} (A_N^{-1}Q + Q(A'_N)^{-1}) \end{bmatrix} < 0. \quad (3.14)$$

Da Álgebra sabe-se que se λ_i é autovalor de A_N , então $\frac{1}{\lambda_i}$ é autovalor de A_N^{-1} , sendo $\lambda_i = x + yj$ não nulo.

Usando essa propriedade e a relação de equivalência (3.7) em (3.14) conclui-se que

$$\begin{bmatrix} \frac{r}{2} \left(\frac{1}{\lambda_i} + \frac{1}{\bar{\lambda}_i} \right) & -1 \\ -1 & \frac{r}{2} \left(\frac{1}{\lambda_i} + \frac{1}{\bar{\lambda}_i} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} \right) & -1 \\ -1 & \frac{r}{2} \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} \right) \end{bmatrix} < 0,$$

ou,

$$\begin{bmatrix} -\left(\frac{rx}{x^2+y^2}\right) & 1 \\ 1 & -\left(\frac{rx}{x^2+y^2}\right) \end{bmatrix} > 0. \quad (3.15)$$

Observe que a matriz (3.15) é real, logo podemos estudar a positividade da matriz usando a propriedade dos menores principais ((CHEN, 1999),(MEYER, 2000)). Daí

$$(a) \quad \frac{-rx}{x^2+y^2} > 0 \Leftrightarrow -rx > 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

e

$$(b) \quad \frac{r^2x^2}{(x^2+y^2)^2} - 1 > 0 \Leftrightarrow r^2x^2 > (x^2+y^2)^2.$$

Analisando o item (b) pode-se concluir que

$$b.1) \quad \text{Se } r \geq |x|,$$

$$r^2r^2 \geq r^2x^2 > (x^2+y^2)^2 \Leftrightarrow r^2r^2 > (x^2+y^2)^2 \Leftrightarrow$$

$$(r^2)^2 > (x^2+y^2)^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 < r^2.$$

$$b.2) \quad \text{Se } r < |x|,$$

$$x^2x^2 > r^2x^2 > (x^2+y^2)^2 \Leftrightarrow x^2x^2 > (x^2+y^2)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x^2)^2 > (x^2+y^2)^2 \Leftrightarrow x^2 > x^2+y^2. \quad (\text{Absurdo!})$$

Logo pelos itens (b.1) e (b.2) a LMI (VI) é factível se e somente se,

$$x^2+y^2 < r^2. \quad (3.16)$$

Portanto quando a LMI (VI) é factível, o sistema (2.3) com $K = YQ^{-1}$ satisfaz a desigualdade (II).

(Necessidade) Suponha que existe K tal que o sistema (2.3) é $S(\gamma, r, \theta)$ -estável, então (2.3) satisfaz a LMI (II), ou seja, os autovalores do sistema satisfazem a desigualdade (3.16). Logo a LMI (VI) é factível.

Parte iii) Para a demonstração da LMI (VII) usa-se as propriedades do produto de Kronecker. Suponha que (VII) é factível, daí segue que

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(AQ + QA' + BYA' + AY'B') & \dots \\ \cos(\theta)[QA' + BYA' - (AQ + AY'B')] & \dots \\ \dots & \cos(\theta)[AQ + AY'B' - (QA' + BYA')] \\ \dots & \text{sen}(\theta)(AQ + QA' + BYA' + AY'B') \end{bmatrix} = \\
 & \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(AQ + AY'B') & \cos(\theta)(AQ + AY'B') \\ -\cos(\theta)(AQ + AY'B') & \text{sen}(\theta)(AQ + AY'B') \end{bmatrix} + \\
 & \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(QA' + BYA') & -\cos(\theta)(QA' + BYA') \\ \cos(\theta)(QA' + BYA') & \text{sen}(\theta)(QA' + BYA') \end{bmatrix} < 0 \quad \xLeftrightarrow{KRON} \\
 & \left\{ \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \end{bmatrix} \otimes (AQ + AY'B') \right\} + \\
 & \left\{ \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \end{bmatrix} \otimes (QA' + BYA') \right\} < 0 \quad \xLeftrightarrow{eq(III,b)} \\
 & W \otimes (AQ + AY'B') + W' \otimes (QA' + BYA') < 0 \quad \Longleftrightarrow \\
 & W \otimes [A(Q + Y'B')] + W' \otimes [(Q + BY)A'] < 0,
 \end{aligned}$$

sendo $W = \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \end{bmatrix}$.

Substituindo Y pela expressão (3.8) chega-se em

$$\begin{aligned}
 & W \otimes [A(Q + QK'B')] + W' \otimes [(Q + BKQ)A'] < 0 \Leftrightarrow \\
 & W \otimes [AQ(I + BK)'] + W' \otimes [(I + BK)QA'] < 0,
 \end{aligned}$$

e multiplicando à esquerda por $(I \otimes (I + BK)^{-1})$ e à direita por $(I \otimes [(I + BK)']^{-1})$ tem-se que

$$\begin{aligned}
 & \{I \otimes (I + BK)^{-1}\} (W \otimes [AQ(I + BK)']) \{I \otimes [(I + BK)']^{-1}\} \\
 & + \{I \otimes (I + BK)^{-1}\} (W' \otimes [(I + BK)QA']) \{I \otimes [(I + BK)']^{-1}\} < 0. \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

Aplicando a Propriedade 5 de $KRON$ na expressão (3.17) chega-se em

$$W \otimes (I + BK)^{-1}AQ + W' \otimes [(I + BK)^{-1}AQ]' < 0, \quad (3.18)$$

e substitua $(I + BK)^{-1}A = A_N$ para obter

$$W \otimes (A_N Q) + W' \otimes (Q A_N') < 0. \quad (3.19)$$

Aplicando a Propriedade 6 de *KRON* na expressão (3.19) conclui-se que

$$(W \otimes A_N Q) + (W \otimes A_N Q)' < 0. \quad (3.20)$$

Assim, se a LMI (VII) é factível o sistema (2.3) com $K = YQ^{-1}$ satisfaz a desigualdade (III), e vice-versa.

Portanto as LMIs (V), (VI), (VII) e (VIII) são factíveis se e somente se, o sistema (2.3) satisfaz as desigualdades (I), (II), (III) e (IV). Daí pelo Lema 4 o sistema (2.3) é $S(\gamma, r, \theta)$ -estável e um controlador K que resolve o problema é dado por

$$K = YQ^{-1}. \quad (3.21)$$

sendo Q e Y soluções das LMIs (V), (VI), (VII) e (VIII).

Com isso conclui-se a demonstração do teorema. ■

O Teorema 2 projeta controladores K para sistemas lineares sob realimentação derivativa, usando LMIs. Com isso pode-se facilmente testar a eficiência do método através de simulação em microcomputadores. O próximo capítulo apresenta resultados similares para o caso em que o sistema (2.3) é incerto.

4 Alocação de Pólos usando $\mathcal{D}$ -estabilidade em sistemas incertos

4.1 $\mathcal{D}$ -estabilidade de sistemas lineares incertos sob realimentação derivativa

Em problemas reais é comum os parâmetros do sistema não serem fixos, mas sim pertencentes a um intervalo de valores conhecidos. Isso ocorre por diversos fatores. Os mais comuns são:

- Os parâmetros do sistema são obtidos empiricamente, e então cada valor medido possui uma porcentagem de erro.
- O sistema é afetado por influências externas presentes no ambiente ao qual ele pertence.

Independente de qualquer motivo, sistemas com essa característica são chamados de *sistemas incertos* e podem ser modelados usando combinação convexa (BOYD et al., 1994).

Considere um sistema controlável linear e invariante no tempo que possui incertezas politópicas, descrito por

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^p \alpha_i A_i x(t) + \sum_{j=1}^q \beta_j B_j u(t), \quad (4.1)$$

e

$$\begin{aligned} \alpha_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, p, & \sum_{i=1}^p \alpha_i &= 1, \\ \beta_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, q, & \sum_{j=1}^q \beta_j &= 1, \end{aligned} \quad (4.2)$$

sendo p a quantidade de vértices do politopo em A , q a quantidade de vértices do politopo em B e α_i, β_j números reais para quaisquer i, j .

O próximo teorema trata das condições de estabilidade desses sistemas sob realimentação derivativa.

Teorema 3. *Suponha que as matrizes A_i não tem pólos na origem ($\det(A_i) \neq 0, \forall i$), então o sistema (4.1) sob realimentação derivativa ($u = -K\dot{x}(t)$), é assintoticamente estável se existe uma matriz Q simétrica e uma matriz Y tais que*

$$QA'_i + A_iQ + B_jYA'_i + A_iY'B'_j < 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q, \quad (4.3)$$

$$Q > 0.$$

Se as LMIs (4.3) são factíveis, então um controlador K é dado por (3.21).

Prova: Suponha que existem Q e Y satisfazendo o teorema, então multiplique (4.3) por $\alpha_i\beta_j$ e obtenha

$$\begin{aligned} \alpha_i\beta_jQA'_i + \alpha_i\beta_jA_iQ + \alpha_i\beta_jB_jYA'_i + \alpha_i\beta_jA_iY'B'_j &< 0 \Leftrightarrow \\ \beta_jQ\alpha_iA'_i + \beta_j\alpha_iA_iQ + \beta_jB_jY\alpha_iA'_i + \alpha_iA_iY'\beta_jB'_j &< 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

sendo $i = 1, \dots, p$ e $j = 1, \dots, q$. Somando todas as expressões (4.4) chega-se em

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^q \beta_jQ \sum_{i=1}^p \alpha_iA'_i + \sum_{j=1}^q \beta_j \sum_{i=1}^p \alpha_iA_iQ + \sum_{j=1}^q \beta_jB_jY \sum_{i=1}^p \alpha_iA'_i + \sum_{i=1}^p \alpha_iA_iY' \sum_{j=1}^q \beta_jB'_j &< 0 \stackrel{(4.2)}{\Leftrightarrow} \\ Q \sum_{i=1}^p \alpha_iA'_i + \sum_{i=1}^p \alpha_iA_iQ + \sum_{j=1}^q \beta_jB_jY \sum_{i=1}^p \alpha_iA'_i + \sum_{i=1}^p \alpha_iA_iY' \sum_{j=1}^q \beta_jB'_j &< 0, \end{aligned}$$

Apenas para facilidade de notação substitua $\hat{\mathbf{A}} = \sum_{i=1}^p \alpha_iA_i$ e $\hat{\mathbf{B}} = \sum_{j=1}^q \beta_jB_j$, logo

$$\begin{aligned} Q\hat{\mathbf{A}}' + \hat{\mathbf{A}}Q + \hat{\mathbf{B}}Y\hat{\mathbf{A}}' + \hat{\mathbf{A}}Y'\hat{\mathbf{B}}' &< 0 \Leftrightarrow \\ (Q + \hat{\mathbf{B}}Y)\hat{\mathbf{A}}' + \hat{\mathbf{A}}(Q + Y'\hat{\mathbf{B}}') &< 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Aplicando o Lema 1 em (4.5) conclui-se que $(Q + \hat{\mathbf{B}}Y)\hat{\mathbf{A}}' < 0$, logo as matrizes $(Q + \hat{\mathbf{B}}Y)$ e $\hat{\mathbf{A}}$ são inversíveis. Agora multiplique (4.5) à esquerda por $(Q + \hat{\mathbf{B}}Y)^{-1}$ e à direita por $(Q + Y'\hat{\mathbf{B}}')^{-1}$, para obter

$$\hat{\mathbf{A}}'(Q + Y'\hat{\mathbf{B}}')^{-1} + (Q + \hat{\mathbf{B}}Y)^{-1}\hat{\mathbf{A}} < 0.$$

Faça a substituição de variáveis $Q = P^{-1}$ e $Y = KP^{-1}$,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}}'(P^{-1} + P^{-1}K'\hat{\mathbf{B}}')^{-1} + (P^{-1} + \hat{\mathbf{B}}K P^{-1})^{-1}\hat{\mathbf{A}} &< 0 \Leftrightarrow \\ \hat{\mathbf{A}}'(I + K'\hat{\mathbf{B}}')^{-1}P + P(I + \hat{\mathbf{B}}K)^{-1}\hat{\mathbf{A}} &< 0 \Leftrightarrow \\ \left[P(I + \hat{\mathbf{B}}K)^{-1}\hat{\mathbf{A}}\right]' + P(I + \hat{\mathbf{B}}K)^{-1}\hat{\mathbf{A}} &< 0.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Multiplique a equação (4.6) à esquerda por $x'(t)$ e à direita por $x(t)$

$$x'(t) \left\{ \left[P(I + \hat{\mathbf{B}}K)^{-1}\hat{\mathbf{A}}\right]' + P(I + \hat{\mathbf{B}}K)^{-1}\hat{\mathbf{A}} \right\} x(t) < 0, \quad (4.7)$$

sendo $x(t) \neq 0$ um vetor coluna.

Note que a equação (4.7) é justamente a função $\dot{V}(x(t))$ para uma função de Lyapunov do tipo $V(x(t)) = x'(t)Px(t)$, $P > 0$ simétrica, associada ao sistema (4.1) sob a realimentação $u(t) = -K\dot{x}(t)$. Portanto de (4.7) conclui que se existem matrizes Q e Y satisfazendo (4.3), o sistema (4.1) em malha fechada é assintoticamente estável e um controlador K que estabiliza o sistema é $K = YQ^{-1}$.

■

O Teorema 3 trata exclusivamente da estabilidade assintótica de sistemas (4.1). Porém como já foi dito, a simples estabilidade nem sempre é suficiente. O nosso interesse agora é estudar a $\mathcal{D}$ -estabilidade dos sistemas (4.1) na região $S(\gamma, r, \theta)$. O teorema abaixo aborda esse assunto.

Teorema 4. *Suponha que as matrizes A_i não tem pólos na origem ($\det(A_i) \neq 0$, $\forall i$), então o sistema (4.1) sob realimentação derivativa é $S(\gamma, r, \theta)$ -estável se existe uma matriz Q simétrica e uma matriz Y tais que*

$$\begin{bmatrix} A_i Q + Q A_i' + B_j Y A_i' + A_i Y' B_j' & Q + B_j Y \\ Q + Y' B_j' & -\frac{Q}{2\gamma} \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{IX})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{r}{2} ((Q + B_j Y) A_i' + A_i (Q + B_j Y)') & -A_i Q A_k' \\ -A_i Q A_k' & \frac{r}{2} ((Q + B_j Y) A_i' + A_i (Q + B_j Y)') \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{X})$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(A_i Q + Q A_i' + B_j Y A_i' + A_i Y' B_j') & \cos(\theta)[A_i Q + A_i Y' B_j' - (Q A_i' + B_j Y A_i')] \\ \cos(\theta)[Q A_i' + B_j Y A_i' - (A_i Q + A_i Y' B_j')] & \sin(\theta)(A_i Q + Q A_i' + B_j Y A_i' + A_i Y' B_j') \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{XI})$$

$$Q > 0, \quad (\text{XII})$$

sendo $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$ e $k = 1, \dots, p$.

Prova: Suponha que existem Q e Y satisfazendo (IX),(X), (XI) e (XII). Então da demonstração do Teorema 3 e de (IX) segue que

$$\det \left(I + \sum_{j=1}^q \beta_j B_j K \right) \neq 0.$$

Por facilidade de notação usa-se quando necessário as seguintes substituições de variáveis

$$\hat{\mathbf{A}} = \sum_{i=1}^p \alpha_i A_i, \quad \hat{\mathbf{B}} = \sum_{j=1}^q \beta_j B_j, \quad \hat{\mathbf{A}}_N = \left(I + \sum_{j=1}^q \beta_j B_j K \right)^{-1} \sum_{i=1}^p \alpha_i A_i. \quad (4.8)$$

A demonstração do teorema é feita na mesma ordem usada no Teorema 2.

Parte i) Aplique o complemento de Schur ((BOYD et al., 1994),(ASSUNÇÃO; TEIXEIRA, 2001)) no sentido inverso na LMI (IX) e obtenha

$$A_i Q + Q A_i' + B_j Y A_i' + A_i Y' B_j' + (Q + B_j Y) [2\gamma Q^{-1}] (Q + B_j Y)' < 0.$$

De (4.2) segue que $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$ e $\sum_{j=1}^q \beta_j = 1$, logo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \alpha_i A_i Q + Q \sum_{i=1}^p \alpha_i A_i' + \sum_{j=1}^q \beta_j B_j Y \sum_{i=1}^p \alpha_i A_i' + \sum_{i=1}^p \alpha_i A_i Y' \sum_{j=1}^q \beta_j B_j' \\ + \left(Q + \sum_{j=1}^q \beta_j B_j Y \right) [2\gamma Q^{-1}] \left(Q + \sum_{j=1}^q \beta_j B_j Y \right)' \stackrel{(4.8)}{=} \\ \hat{\mathbf{A}} Q + Q \hat{\mathbf{A}}' + \hat{\mathbf{B}} Y \hat{\mathbf{A}}' + \hat{\mathbf{A}} Y' \hat{\mathbf{B}}' + (Q + \hat{\mathbf{B}} Y) [2\gamma Q^{-1}] (Q + \hat{\mathbf{B}} Y)' < 0, \end{aligned}$$

daí, substitua Y pela expressão (3.8)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}(Q + \hat{\mathbf{B}} K Q)' + (Q + \hat{\mathbf{B}} K Q) \hat{\mathbf{A}}' + (Q + \hat{\mathbf{B}} K Q) [2\gamma Q^{-1}] (Q + \hat{\mathbf{B}} K Q)' < 0 \Leftrightarrow \\ \hat{\mathbf{A}} Q (I + \hat{\mathbf{B}} K)' + (I + \hat{\mathbf{B}} K) Q \hat{\mathbf{A}}' + (I + \hat{\mathbf{B}} K) [2\gamma Q] (I + \hat{\mathbf{B}} K)' < 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

multiplique (4.9) à esquerda por $(I + \hat{\mathbf{B}} K)^{-1}$ e à direita por $[(I + \hat{\mathbf{B}} K)']^{-1}$

$$Q \hat{\mathbf{A}}' \left[(I + \hat{\mathbf{B}} K)^{-1} \right]' + (I + \hat{\mathbf{B}} K)^{-1} \hat{\mathbf{A}} Q + 2\gamma Q < 0, \quad (4.10)$$

substitua $(I + \hat{\mathbf{B}} K)^{-1} \hat{\mathbf{A}} = (I + \sum_{j=1}^q \beta_j B_j K)^{-1} \sum_{i=1}^p \alpha_i A_i = \hat{\mathbf{A}}_N$

$$\hat{\mathbf{A}}_N Q + Q \hat{\mathbf{A}}_N' + 2\gamma Q < 0. \quad (4.11)$$

Portanto, se (IX) é factível (4.1) em malha fechada satisfaz (I).

Parte ii) Multiplique a expressão (X) por $(\sum_{i=1}^p \alpha_i) (\sum_{k=1}^p \alpha_k) \left(\sum_{j=1}^q \beta_j \right)$ e obtenha

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc} \frac{r}{2} (\sum_{i=1}^p \alpha_i) (\sum_{k=1}^p \alpha_k) \left(\sum_{j=1}^q \beta_j \right) [(Q + B_j Y) A'_i + A_i (Q + B_j Y)'] & \dots & \\ & - (\sum_{i=1}^p \alpha_i) (\sum_{k=1}^p \alpha_k) \left(\sum_{j=1}^q \beta_j \right) A_i Q A'_k & \dots \\ \dots & & - (\sum_{i=1}^p \alpha_i) (\sum_{k=1}^p \alpha_k) \left(\sum_{j=1}^q \beta_j \right) A_i Q A'_k \\ \dots & \frac{r}{2} (\sum_{i=1}^p \alpha_i) (\sum_{k=1}^p \alpha_k) \left(\sum_{j=1}^q \beta_j \right) [(Q + B_j Y) A'_i + A_i (Q + B_j Y)'] & \end{array} \right] < 0 \Leftrightarrow \\
 & \left[\begin{array}{ccc} \frac{r}{2} \left[(Q + \sum_{j=1}^q \beta_j B_j Y) \sum_{i=1}^p \alpha_i A'_i + \sum_{i=1}^p \alpha_i A_i (Q + \sum_{j=1}^q \beta_j B_j Y)' \right] & \dots & \\ & - (\sum_{i=1}^p \alpha_i A_i) Q (\sum_{k=1}^p \alpha_k A'_k) & \dots \\ \dots & & - (\sum_{i=1}^p \alpha_i A_i) Q (\sum_{k=1}^p \alpha_k A'_k) \\ \dots & \frac{r}{2} \left[(Q + \sum_{j=1}^q \beta_j B_j Y) \sum_{i=1}^p \alpha_i A'_i + \sum_{i=1}^p \alpha_i A_i (Q + \sum_{j=1}^q \beta_j B_j Y)' \right] & \end{array} \right] < 0 \stackrel{(4.8)}{\Leftrightarrow} \\
 & \left[\begin{array}{ccc} \frac{r}{2} \left((Q + \hat{\mathbf{B}} Y) \hat{\mathbf{A}}' + \hat{\mathbf{A}} (Q + \hat{\mathbf{B}} Y)' \right) & - \hat{\mathbf{A}} Q \hat{\mathbf{A}}' & \\ & - \hat{\mathbf{A}} Q \hat{\mathbf{A}}' & \frac{r}{2} \left((Q + \hat{\mathbf{B}} Y) \hat{\mathbf{A}}' + \hat{\mathbf{A}} (Q + \hat{\mathbf{B}} Y)' \right) \end{array} \right] < 0. \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

Pela demonstração do Teorema 3 e da Parte i) segue que $\hat{\mathbf{A}}$ é inversível, daí multiplique (X) à esquerda por $\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{A}}^{-1} \end{bmatrix}$ e à direita por $\begin{bmatrix} (\hat{\mathbf{A}}')^{-1} & 0 \\ 0 & (\hat{\mathbf{A}}')^{-1} \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cc} \hat{\mathbf{A}}^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{A}}^{-1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} \frac{r}{2} \left((Q + \hat{\mathbf{B}} Y) \hat{\mathbf{A}}' + \hat{\mathbf{A}} (Q + \hat{\mathbf{B}} Y)' \right) & \dots & \\ & - \hat{\mathbf{A}} Q \hat{\mathbf{A}}' & \dots \\ \dots & & - \hat{\mathbf{A}} Q \hat{\mathbf{A}}' \\ \dots & \frac{r}{2} \left((Q + \hat{\mathbf{B}} Y) \hat{\mathbf{A}}' + \hat{\mathbf{A}} (Q + \hat{\mathbf{B}} Y)' \right) & \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} (\hat{\mathbf{A}}')^{-1} & 0 \\ 0 & (\hat{\mathbf{A}}')^{-1} \end{array} \right] = \\
 & \left[\begin{array}{ccc} \frac{r}{2} \left(\hat{\mathbf{A}}^{-1} (Q + \hat{\mathbf{B}} Y) + (Q + \hat{\mathbf{B}} Y)' (\hat{\mathbf{A}}')^{-1} \right) & -Q & \\ & -Q & \frac{r}{2} \left(\hat{\mathbf{A}}^{-1} (Q + \hat{\mathbf{B}} Y) + (Q + \hat{\mathbf{B}} Y)' (\hat{\mathbf{A}}')^{-1} \right) \end{array} \right] < 0, \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, p \quad \forall j = 1, 2, \dots, q.$$

A expressão (4.13) é equivalente a expressão (VI) em $\hat{\mathbf{A}}$ e $\hat{\mathbf{B}}$, logo pela demonstração de *suficiência* da Parte ii) do Teorema 2 segue que existe uma matriz $K = YQ^{-1}$ tal que os autovalores do sistema (4.1) pertencem a um disco centrado na origem de raio r . Portanto quando a LMI (X) é factível o sistema (4.1) em malha fechada satisfaz a desigualdade (II).

Parte iii) Usando (4.2) na LMI (XI) chega-se em uma expressão equivalente à LMI (VII) em $\hat{\mathbf{A}}$ e $\hat{\mathbf{B}}$. Daí a demonstração da LMI (XI) é similar a prova de *suficiência* de (VII). De onde conclui-se que

$$(W \otimes \hat{\mathbf{A}}_N Q) + (W \otimes \hat{\mathbf{A}}_N Q)' < 0. \quad (4.14)$$

Assim, se a LMI (XI) é factível o sistema (4.1) em malha fechada satisfaz a desi-

gualdade (III).

Portanto quando as LMIs (IX), (X), (XI) e (XII) são factíveis, o sistema (4.1) sob realimentação derivativa satisfaz as desigualdades (I), (II), (III) e (IV). Então pelo Lema 4 o sistema (4.1) em malha fechada é $S(\gamma, r, \theta)$ -estável e uma das soluções para o controlador K é

$$K = YQ^{-1}.$$

sendo Q e Y soluções das LMIs (IX), (X), (XI) e (XII). ■

4.2 A $\mathcal{D}$ -estabilidade em sistemas lineares variantes no tempo

Considere um sistema linear variante no tempo dado por

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (4.15)$$

sendo $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Embora os parâmetros das matrizes $A(t)$ e $B(t)$ do sistema (4.15) variem no tempo, em problemas práticos é comum esses parâmetros estarem limitados por um politopo, isto é, $\eta_{1_{ij}} \leq a_{ij}(t) \leq \eta_{2_{ij}}$ e $\mu_{1_{ij}} \leq b_{ij}(t) \leq \mu_{2_{ij}}$, $\forall i, j = 1, \dots, n$. sendo $\eta_{1_{ij}}$, $\eta_{2_{ij}}$, $\mu_{1_{ij}}$ e $\mu_{2_{ij}} \in \mathbb{R}$ valores conhecidos. Com isso tem-se que o tratamento do sistema (4.15) é equivalente ao tratamento de sistemas (4.1) que possuem incertezas em todos os parâmetros do sistema (BOYD et al., 1994). Logo podemos estudar a $\mathcal{D}$ -estabilidade desse sistema usando o Teorema 4. O seguinte teorema enuncia esse resultado formalmente.

Teorema 5. *Suponha que o sistema (4.15) possui parâmetros $A(t)$ e $B(t)$ limitados dentro de um politopo. Então o sistema (4.15) é $S(\gamma, r, \theta)$ -estável sob realimentação derivativa se existem matrizes Q e Y satisfazendo o Teorema 4.*

Prova: Substituindo as matrizes $A(t)$ e $B(t)$ pela expressão (4.8) a demonstração segue de maneira similar a demonstração do Teorema 4.

5 Exemplos Práticos

Neste capítulo é testada a eficiência da metodologia proposta resolvendo por simulação alguns exemplos práticos. Para resolver os exemplos foi utilizado o software MATLAB (GAHINET et al., 1995). Exibimos as soluções encontradas para as matrizes Q , Y e K usando a metodologia proposta e verificamos a $S(\gamma, r, \theta)$ -estabilidade do sistema em malha fechada através da análise dos autovalores. Os parâmetros γ , r e θ são escolhidos de forma aleatória apenas com o intuito de testar a metodologia, a única exceção ocorre no Exemplo 2, onde resolvemos um problema com restrições de projeto. Plotamos a resposta do sistema no tempo e a entrada de controle $u(t) = -K\dot{x}(t)$ para avaliar o esforço de controle usado nos sistemas.

5.1 Exemplo 1 - Sistema Mecânico

Considere o sistema mecânico para controle de vibrações, mostrado na Figura 2.

O problema é representado matematicamente pelo seguinte sistema de equações diferenciais (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_1-k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{-b_1-b_2}{m_1} & \frac{b_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{-k_2}{m_2} & \frac{b_2}{m_2} & \frac{-b_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{m_1} \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} u(t), \quad (5.1)$$

sendo k_1 e k_2 coeficientes de elasticidade das molas, b_1 e b_2 são os coeficientes de amortecimento, $x_1(t)$ e $x_2(t)$ representam o deslocamento vertical dos corpos m_1 e m_2 respectivamente. O vetor de estados é dado por $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) & x_4(t) \end{bmatrix}'$, sendo $\dot{x}_1(t) = x_3(t)$, $\dot{x}_2(t) = x_4(t)$.

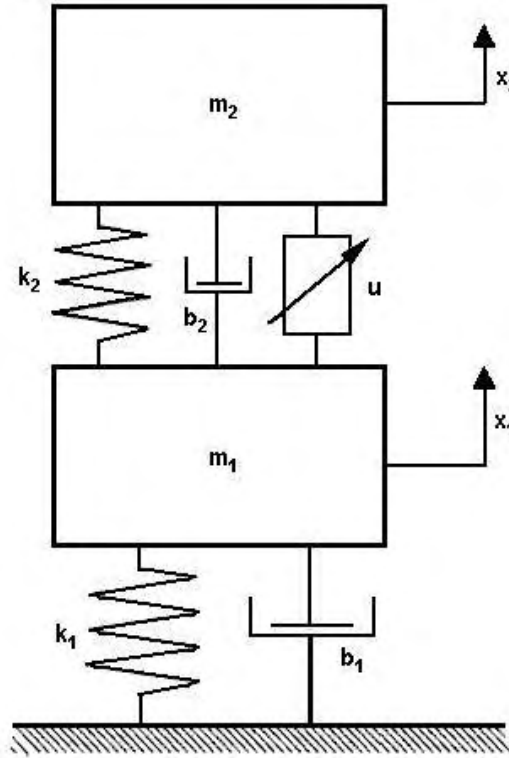


Figura 2: Sistema Mecânico.

Para resolver o problema foram usados os seguintes valores nos parâmetros do problema: $m_1 = 100\text{kg}$, $m_2 = 10\text{kg}$, $k_1 = 360\text{kN/m}$, $k_2 = 36\text{kN/m}$, $b_1 = 70\text{Ns/m}$, $b_2 = 50\text{Ns/m}$. Adotou-se o valor de $\gamma = 3$ para a taxa de decaimento, $r = 6$ para o raio do disco, $\theta = 45^\circ$ para as assíntotas, $x(0) = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.15 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$ para a condição inicial e saída do sistema igual a

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$$

As soluções encontradas usando o Teorema 2 foram

$$Q = \begin{bmatrix} 6.4323 \times 10^{-7} & -0.0005 & -3.143 \times 10^{-6} & 0.0039 \\ -0.0005 & 1.2059 & 0.0012 & -5.174 \\ -3.1433 \times 10^{-6} & 0.0012 & 1.8464 \times 10^{-5} & -0.0154 \\ 0.0039 & -5.174 & -0.0154 & 30.535 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} -0.6388 & 7.7257 \times 10^3 & -3.4455 & -2.0495 \times 10^4 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\det(I + BK) = 2.7861 \times 10^4 \neq 0$$

A matriz $K = YQ^{-1}$ desejada é:

$$K = \begin{bmatrix} -4.5729 \times 10^7 & 2.7069 \times 10^4 & -2.7014 \times 10^6 & 8.4643 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

São exibidos abaixo em uma tabela os módulos e argumentos dos pólos do sistema controlado (2.3).

Tabela 1: Pólos do sistema controlado e sua localização no plano complexo

Pólos do sistema controlado	Módulo	Argumento ($135^\circ - 225^\circ$)
$\lambda_1 = -4.8965 + 1.1978j$	5.0409	166.25°
$\lambda_2 = -4.8965 - 1.1978j$	5.0409	-166.25°
$\lambda_3 = -3.3694 + 2.6369j$	4.2786	141.95°
$\lambda_4 = -3.3694 - 2.6369j$	4.2786	-141.95°

A resposta da simulação do sistema (5.1) alocado na região $S(3, 6, 45^\circ)$ e a evolução da entrada $u(t) = -K\dot{x}(t)$ podem ser vistas nas Figuras 3 e 4. Pela Tabela 1 verifica-se que o sistema atende a todas as especificações necessárias.

5.2 Exemplo 2 - Alimentador para manufatura de papel

O processo do alimentador (*headbox* (DORF; BISHOP, 2001, pp. 529)) é usado na manufatura de papel para transformar o fluxo de pasta de um jato de 2cm e, em seguida, aspergi-lo sobre uma esteira de malha. Para se obter uma qualidade desejável do papel, a pasta deve ser distribuída o mais uniformemente possível sobre a esteira e a relação entre a velocidade do jato e da esteira, chamada de **relação jato/esteira**, deve ser mantida.

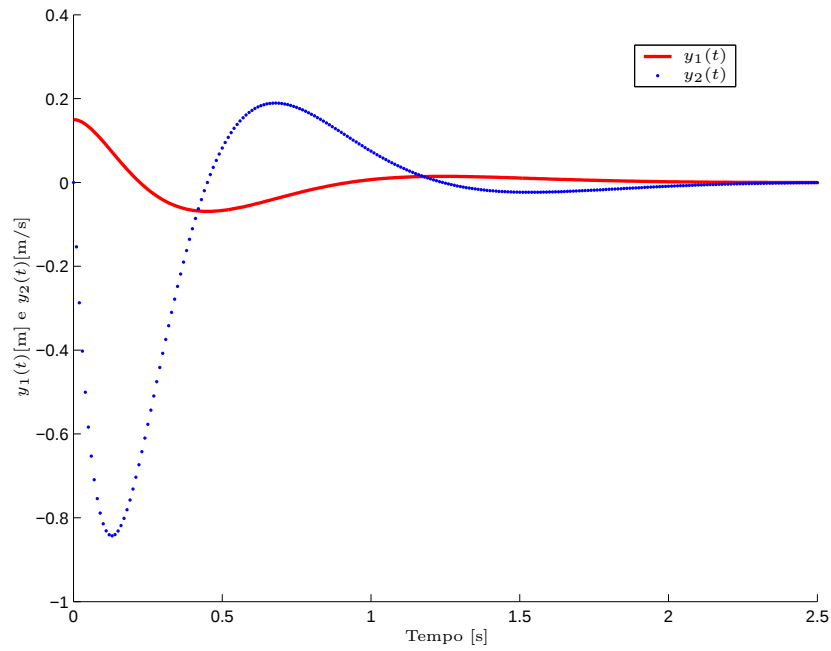


Figura 3: Sistema alocado na região $S(3, 6, 45^\circ)$.

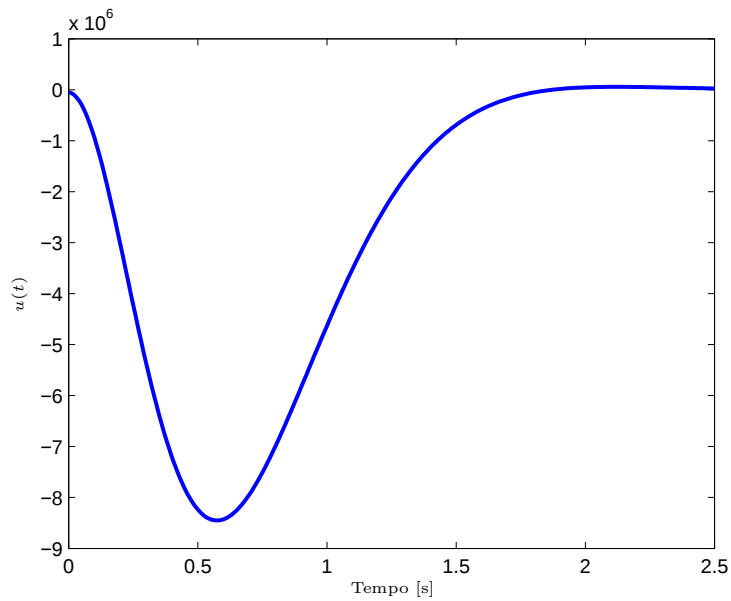


Figura 4: Entrada de controle $u(t) = -K\dot{x}(t)$.

Uma das principais variáveis é a pressão do nível de líquido mais a pressão do ar que é bombeado dentro do alimentador. Como o alimentador pressurizado é um sistema extremamente dinâmico e acoplado, o controle manual seria difícil de manter e poderia resultar na degradação das propriedades das folhas de papel.

O modelo em espaço de estados de um alimentador típico, linearizado em torno de um ponto de equilíbrio particular, é dado por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0.8 & 0.02 \\ -0.02 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.05 & 1 \\ 0.001 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde x_1 é o nível do líquido e x_2 é a pressão. As entradas de controle são: corrente na bomba u_1 e abertura da válvula u_2 .

O objetivo é projetar um sistema que tenha equação característica com raízes reais negativas de magnitude maior que cinco.

Vamos obter os valores γ , r e θ , à partir dos índices de desempenho exigidos. Como o projeto requer raízes reais, isso implica em $\theta = 0^\circ$. As raízes devem ter magnitude maior que cinco ($\gamma > 5$), daí

$$\cos(\theta) = \zeta \Leftrightarrow \zeta = \cos(0) = 1.$$

$$\gamma = \zeta\omega_n \Rightarrow \omega_n = \frac{\gamma}{\zeta} = 5,$$

$$r = \omega_n > 5,$$

Daí tome $\gamma = 5$, $r = 8$ e $\theta = 0^\circ$, considere a condição inicial $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}'$.

As soluções encontradas usando o Teorema 2 foram

$$\begin{aligned} Q &= \begin{bmatrix} 8.1715 \times 10^5 & -3.5174 \times 10^3 \\ -3.5174 \times 10^3 & 5.0358 \times 10^5 \end{bmatrix}, \\ Y &= \begin{bmatrix} 6.0941 \times 10^6 & -5.0359 \times 10^8 \\ -1.0188 \times 10^6 & 2.5181 \times 10^7 \end{bmatrix} \text{ e} \\ \det(I + BK) &= 1.0244 \times 10^{-5} \neq 0 \end{aligned}$$

Matriz K encontrada:

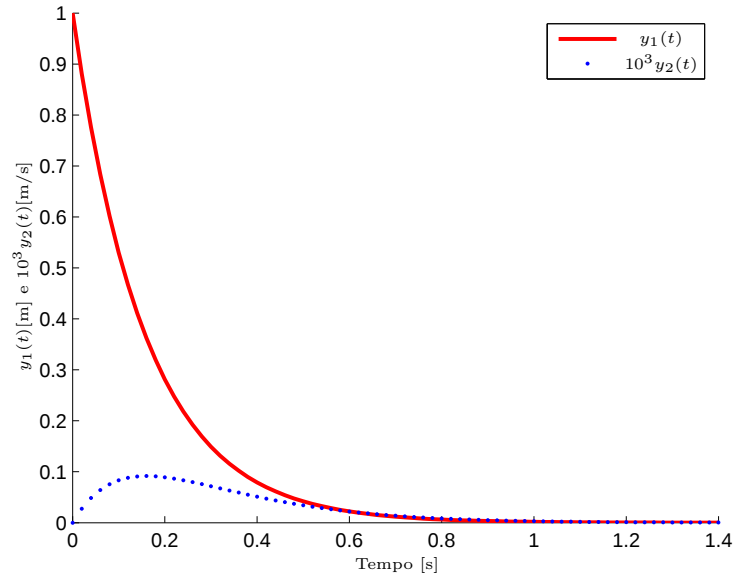
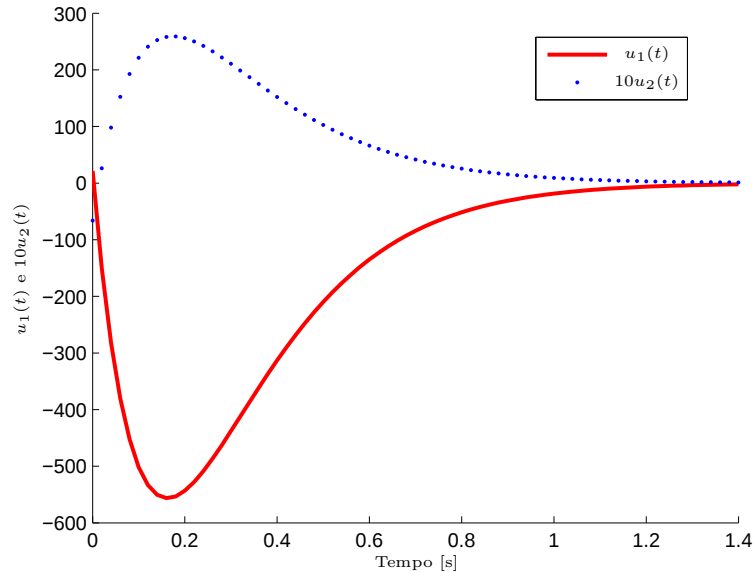
$$K = \begin{bmatrix} 3.1533 & -1000 \\ -1.0315 & 49.997 \end{bmatrix}$$

A Tabela 2 exhibe os módulos e argumentos dos pólos do sistema controlado.

A resposta da simulação do sistema (5.2) alocado na região $S(5, 8, 0^\circ)$ e a evolução da entrada $u(t) = -K\dot{x}(t)$ podem ser vistas nas Figuras 5 e 6.

Tabela 2: Pólos do sistema controlado e sua localização no plano complexo

Pólos do sistema controlado	Módulo	Argumento
$\lambda_1 = -6.3426$	6.3426	180°
$\lambda_2 = -6.1566$	6.1566	180°

Figura 5: Sistema alocado na região $S(5, 8, 0^\circ)$.Figura 6: Entrada de controle $u(t) = -K\dot{x}(t)$.

O sistema (5.2) realimentado pela matriz K obtida satisfaz os índices de desempenho exigidos. A alocação dos pólos pode ser devidamente verificada pela Tabela 2.

5.3 Exemplo 3 - Sistema MIMO

Considere o sistema MIMO dado pelas matrizes abaixo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

O problema é resolvido adotando os seguintes valores para as restrições de projeto: $\gamma = 5.5$, $r = 7$ e $\theta = 30^\circ$. A resposta do sistema no tempo é avaliada usando $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$ para a condição inicial.

Usando o Teorema 2 encontra-se os seguintes resultados.

$$Q = \begin{bmatrix} 32.81 & -16.98 & 1.4096 \\ -16.98 & 14.469 & 3.7474 \\ 1.4096 & 3.7474 & 3.8704 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} -37.794 & 19.458 & -1.5315 \\ 24.84 & -21.81 & -6.2507 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\det(I + BK) = -0.0715 \neq 0.$$

Matriz K :

$$K = \begin{bmatrix} -1.4367 & -0.4996 & 0.6113 \\ 0.3585 & -0.8471 & -0.9255 \end{bmatrix}$$

A Tabela 3 exibe os módulos e argumentos dos pólos do sistema.

Tabela 3: Pólos do sistema controlado e sua localização no plano complexo

Pólos do sistema controlado	Módulo	Argumento ($150^\circ - 210^\circ$)
$\lambda_1 = -5.9439 + 2.1742j$	6.3291	159.91°
$\lambda_2 = -5.9439 - 2.1742j$	6.3291	-159.91°
$\lambda_3 = -6.284$	6.284	180°

A resposta da simulação do sistema e a entrada $u(t) = -K\dot{x}(t)$ podem ser vistas nas Figuras 7 e 8.

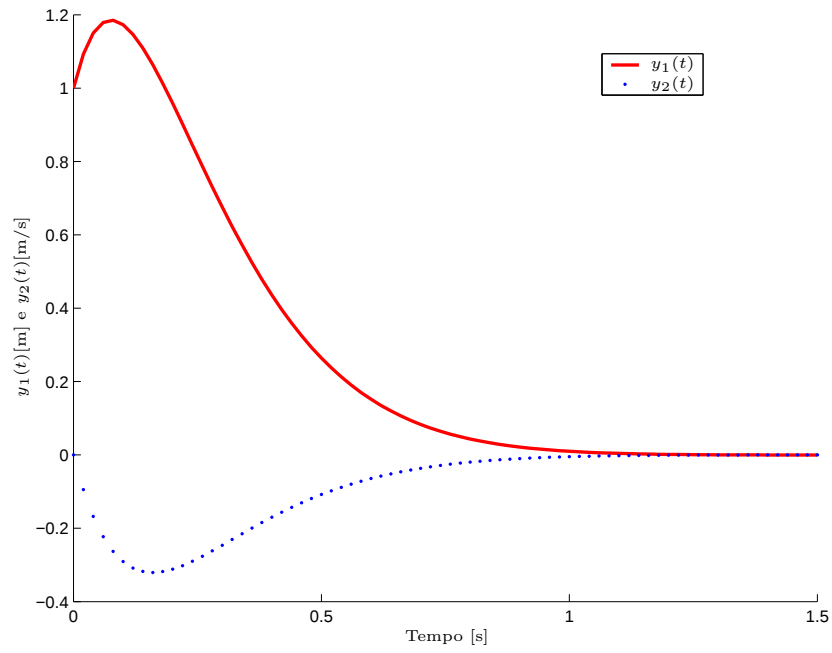


Figura 7: Sistema alocado na região $S(5.5, 7, 30^\circ)$.

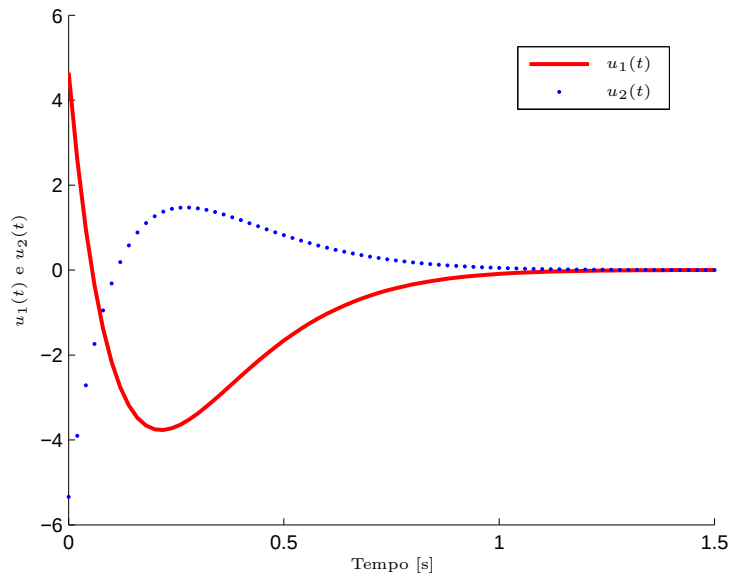


Figura 8: Entrada de controle $u(t) = -K\dot{x}(t)$.

5.4 Exemplo 4 - Sistema Incerto

Considere o sistema incerto dado pelas matrizes abaixo

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

sendo $0.8 \leq a \leq 1.2$, $5.4 \leq b \leq 6.4$ e $0 \leq c \leq 1$.

- Os vértices do politopo em A são:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5.4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} 1.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5.4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 6.4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, & A_4 &= \begin{bmatrix} 1.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 6.4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- Os vértices do politopo em B são:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observação 4. O Teorema (4) parte da hipótese de que as matrizes A_i (vértices do politopo) são inversíveis. Essa é uma verificação simples de se realizar no MATLAB, porém o que se faz na prática é tentar resolver o problema. Se o sistema incerto em análise não satisfaz a condição de hipótese, então o conjunto de LMIs do Teorema (4) é infactível.

O problema é resolvido usando os valores $\gamma = 2$, $r = 30$ e $\theta = 60^\circ$.

As soluções encontradas usando o Teorema (4) foram

$$\begin{aligned} Q &= \begin{bmatrix} 3.3571 \times 10^{-4} & -7.999 \times 10^{-7} & 2.4511 \times 10^{-4} & -2.9879 \times 10^{-6} \\ -7.9997 \times 10^{-7} & 1.9059 \times 10^{-6} & 2.3615 \times 10^{-7} & 4.6217 \times 10^{-6} \\ 2.4511 \times 10^{-4} & 2.3615 \times 10^{-7} & 1.8705 \times 10^{-4} & -1.4994 \times 10^{-7} \\ -2.9879 \times 10^{-6} & 4.6217 \times 10^{-6} & -1.4994 \times 10^{-7} & 8.0498 \times 10^{-5} \end{bmatrix}, \\ Y &= \begin{bmatrix} -3.7158 \times 10^{-4} & 9.6039 \times 10^{-7} & -2.6362 \times 10^{-4} & 3.8361 \times 10^{-6} \\ 2.1946 \times 10^{-6} & -4.1708 \times 10^{-6} & -1.9999 \times 10^{-7} & -1.4384 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matriz K :

$$K = \begin{bmatrix} -1.8315 & -0.3983 & 0.9912 & 4.3883 \times 10^{-3} \\ 1.6209 \times 10^{-3} & -2.0382 & -6.6943 \times 10^{-4} & -0.0616 \end{bmatrix}$$

A Tabela 4 exibe os pólos e suas propriedades.

Tabela 4: Pólos do sistema controlado

Sistema	Pólos do sistema controlado	Módulo	Argumento ($120^\circ - 240^\circ$)
A_1, B_1	$\lambda_1 = -8.9759$	8.9759	180°
	$\lambda_2 = -2.8524$	2.8524	180°
	$\lambda_3 = -2.7556 + 0.3285j$	2.7751	173.2°
	$\lambda_4 = -2.7556 - 0.3285j$	2.7751	-173.2°
A_1, B_2	$\lambda_1 = -8.7797$	8.7797	180°
	$\lambda_2 = -3.2005$	3.2005	180°
	$\lambda_3 = -2.6205 + 0.32849j$	2.641	172.86°
	$\lambda_4 = -2.6205 - 0.32849j$	2.641	-172.86°
A_2, B_1	$\lambda_1 = -3.488 + 5.3276j$	6.3678	123.21°
	$\lambda_2 = -3.488 - 5.3276j$	6.3678	-123.21°
	$\lambda_3 = -2.6827 + 0.31137j$	2.7007	173.38°
	$\lambda_4 = -2.6827 - 0.31137j$	2.7007	-173.38°
A_2, B_2	$\lambda_1 = -3.4529 + 5.3516j$	6.3688	122.83°
	$\lambda_2 = -3.4529 - 5.3516j$	6.3688	-122.83°
	$\lambda_3 = -2.6728 + 0.32281j$	2.6922	173.11°
	$\lambda_4 = -2.6728 - 0.32281j$	2.6922	-173.11°
A_3, B_1	$\lambda_1 = -15.081$	15.081	180°
	$\lambda_2 = -2.135$	2.135	180°
	$\lambda_3 = -2.6723 + 0.34127j$	2.694	172.72°
	$\lambda_4 = -2.6723 - 0.34127j$	2.694	-172.72°
*** Continua na próxima página ... ***			

Sistema	Pólos do sistema controlado	Módulo	Argumento ($120^\circ - 240^\circ$)
A_3, B_2	$\lambda_1 = -14.905$	14.905	180°
	$\lambda_2 = -2.1407$	2.1407	180°
	$\lambda_3 = -2.6826 + 0.28923j$	2.6982	173.85°
	$\lambda_4 = -2.6826 - 0.28923j$	2.6982	-173.85°
A_4, B_1	$\lambda_1 = -6.0958 + 3.2888j$	6.9264	151.65°
	$\lambda_2 = -6.0958 - 3.2888j$	6.9264	-151.65°
	$\lambda_3 = -2.6852 + 0.30954j$	2.703	173.42°
	$\lambda_4 = -2.6852 - 0.30954j$	2.703	-173.42°
A_4, B_2	$\lambda_1 = -6.0491 + 3.3951j$	6.9367	150.7°
	$\lambda_2 = -6.0491 - 3.3951j$	6.9367	-150.7°
	$\lambda_3 = -2.6715 + 0.32323j$	2.691	173.1°
	$\lambda_4 = -2.6715 - 0.32323j$	2.691	-173.1°

Pela Tabela 4 os pólos do sistema em malha fechada atendem a todas as especificações da região $S(2, 30, 60^\circ)$.

A localização dos pólos de todos os vértices do sistema em malha fechada é vista na Figura 9.

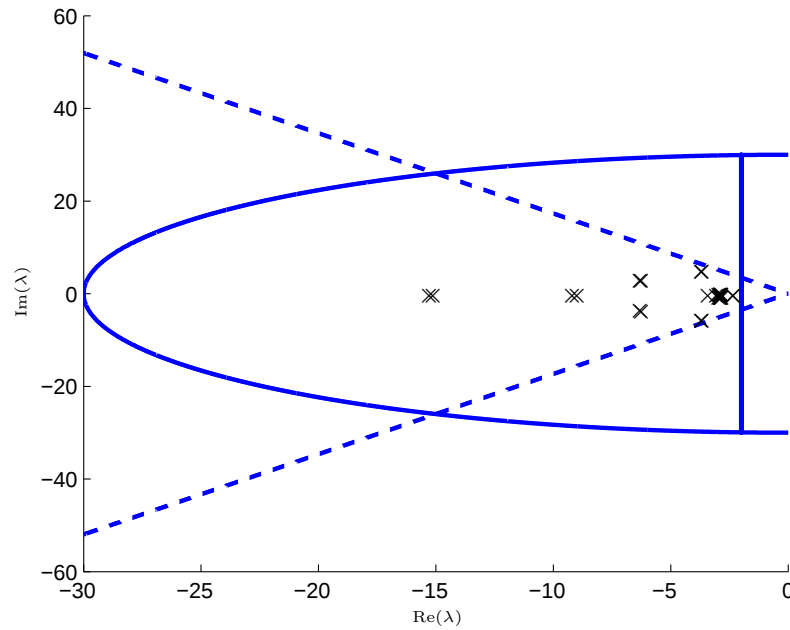


Figura 9: Sistema alocado na região $S(2, 30, 60^\circ)$.

Os pólos do sistema em malha fechada pertencem a região de interesse, mas um fato que deve ser considerado é que o módulo do maior autovalor encontrado $\lambda_{max} = 15.081$, é pouco mais da metade que o valor do raio usado $r = 30$. Para valores menores de r o problema é infactível. Logo para resolver problemas incertos usando as LMIs do Teorema (4) é necessário usar valores “grandes” para r . Uma possível justificativa para esse fato está no grande número de LMIs a serem resolvidas. Neste simples exemplo que possui duas incertezas em A e uma em B , foram necessárias a resolução de 48 LMIs.

Conclusões

A técnica de alocação de pólos apresentada, representa uma nova ferramenta para o uso da realimentação da derivada dos estados. Em sistemas lineares na forma padrão, a realimentação da derivada dos estados é uma opção a mais para o projetista, sendo que em determinados sistemas ela pode baratear o custo da implementação do projeto. Os resultados apresentados também resolvem sistemas descritores que possuem a matriz E inversível, no caso em que a matriz E é singular são necessárias condições adicionais para garantir a padronização e estabilização dos sistemas descritores usando realimentação da derivada dos estados. Não é possível estabilizar um sistema que possui pólos na origem usando a realimentação da derivada dos estados. Neste caso se for interessante ao projeto deve-se usar a realimentação derivativa e proporcional. O uso da $\mathcal{D}$ -estabilidade oferece mais flexibilidade no projeto de alocação de pólos, pois dispensa a necessidade de se alocar os pólos do sistema em um determinado ponto. Basta fazer o mapeamento dos índices de desempenho na região $S(\gamma, r, \theta)$. O uso de LMIs para representar a região $S(\gamma, r, \theta)$ torna fácil o tratamento de sistemas com incertezas politópicas e a simulação de sistemas em microcomputadores.

Sugestão para trabalhos futuros:

- Usar um critério de otimização para a obtenção do controlador K .
- Estudo de sistemas singulares;
- Estudo de sistemas não-lineares,
Exemplo: Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno;
- Síntese de regiões LMI mais simples que atendam os índices de desempenho.

Referências

- ABDELAZIZ, T. H. S.; VALÁŠEK, M. Pole-placement for siso linear systems by state-derivative feedback. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, v. 151, n. 4, p. 377–385, 2004.
- ARZELIER, D.; BERNUSSOU, J.; GARCIA, G. Pole assignment of linear uncertain systems in a sector via a lyapunov-type approach. *IEE Trans. Autom. Control*, v. 38, n. 7, p. 1128–1131, 1993.
- ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. Projeto de sistemas de controle via lmis usando o matlab. In: BALTHAZAR, J. et al. (Ed.). *Aplicações em Dinâmica e Controle*. [S.l.]: Associação Brasileira de Ciências Mecânicas (ABCM), Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC), 2001. p. 350–368.
- BOYD, S. et al. *Linear matrix inequalities in systems and control theory*. 2nd. ed. Philadelphia: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994. (SIAM studies in applied mathematics, v. 15). Disponível em: <<http://www.stanford.edu/~boyd/lmibook/>>. Acesso em: 10 Ago. 2005.
- BUNSE-GERSTNER, A. et al. Feedback design for regularizing descriptor systems. *Linear Algebra and its Applications*, n. 299, p. 119–151, Agosto 1999.
- BUNSE-GERSTNER, A.; MEHRMANN, V.; NICHOLS, N. Regularization of descriptor systems by derivative and proportional state feedback. *SIAM journal on matrix analysis and applications*, v. 13, n. 1, p. 46–67, Janeiro 1992.
- CHEN, C. *Linear system theory and design*. New York: CBS(College Publishing), 1984. (HRW series in electrical and computer engineering).
- CHEN, C. *Linear system theory and design*. 3rd. ed. New York: Oxford, 1999. (The Oxford series in electrical and computer engineering).
- CHILALI, M.; GAHINET, P. H_∞ design with pole placement constraints: An lmi approach. *IEE Trans. Autom. Control*, v. 41, n. 3, p. 358–367, 1996.
- CHILALI, M.; GAHINET, P.; APKARIAN, P. Robust pole placement in lmi regions. *IEE Trans. Autom. Control*, v. 44, n. 12, p. 2257–2270, 1999.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. *Sistemas de controle modernos*. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC(Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.), 2001.
- DUAN, G. R.; IRWIN, G. W.; LIU, G. P. Robust stabilization of descriptor linear systems via proportional-plus-derivative state feedback. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 1999, San Diego. *Proceedings of the 1999 American Control Conference*. San Diego: American Automatic Control Council, 1999. p. 1304–1308.

- FURUTA, K.; KIM, S. B. Pole assignment in a specified disk. *IEE Trans. Autom. Control*, AC-32, n. 5, p. 423–427, 1987.
- GAHINET, P. et al. *LMI control toolbox - For use with Matlab*. [S.l.], 1995. Disponível em: <<http://www.mathworks.com/>>. Acesso em: 10 Ago. 2005.
- GARCIA, G.; BERNUSSOU, J. Pole assignment for uncertain systems in a specified disk by state feedback. *IEE Trans. Autom. Control*, v. 40, n. 1, p. 184–190, 1995.
- GARCIA-PLANAS, M. Regularizing generalized linear systems by means a derivative feedback. In: PHYSICS AND CONTROL, 2003. *Physcon 2003 Proceedings*. St. Petersburg: IEEE. Proceedings, 2003. p. 1134–1140.
- GRAHAM, A. *Kronecker product and matriz calculus with applications*. Chichester: Ellis Horwood, 1981.
- GUTMAN, S.; JURY, E. I. A general theory for matrix root-clustering in subregions of the complex plane. *IEE Trans. Autom. Control*, AC-26, n. 4, p. 853–863, 1981.
- HADDAD, W. M.; BERNSTEIN, D. S. Controller design with regional pole constraints. *IEE Trans. Autom. Control*, v. 37, n. 1, p. 54–69, 1992.
- LEWIS, F.; SYRMOS, V. A geometric theory for derivative feedback. *IEE Trans. Autom. Control*, v. 36, n. 9, p. 1111–1116, 1991.
- MEYER, C. D. *Matrix analysis and applied linear algebra*. Philadelphia: SIAM Studies in Applied Mathematics, 2000. Disponível em: <<http://www.matrixanalysis.com/DownloadChapters.html>>. Acesso em: 10 Ago. 2005.
- OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC(Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.), 2000.
- OLIVEIRA, M. C. de; FARIAS, D. P.; GEROMEL, J. C. *LMISol, User's guide*. UNICAMP, Campinas-SP, Brasil, 1997. Disponível em: <<http://www.dt.fee.unicamp.br/~mauricio/software.html>>. Acesso em: 10 Ago. 2005.
- TRINDADE, M. A.; BENJEDDOU, A.; OHAYON, R. Piezoelectric active vibration control of damped sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration*, v. 246, n. 4, p. 653–677, 2001.

APÊNDICE A

As informações contidas neste capítulo tem o objetivo de apresentar conceitos teóricos que foram usados no desenvolvimento da dissertação e que atualmente não são abordados nos livros clássicos de Teoria de Controle ((OGATA, 2000),(DORF; BISHOP, 2001),(CHEN, 1999)).

A.1 Formas Hermitianas

Chamamos de *forma hermitiana* (CHEN, 1984, pp. 412-413) das variáveis complexas $x_1, \dots, x_n$, ao valor real obtido pelo seguinte polinômio

$$\sum_{i,j}^n m_{ij} \bar{x}_i x_j, \quad (\text{A.1})$$

Ou pela seguinte forma matricial

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \dots & \bar{x}_n \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \triangleq x^* M x \quad (\text{A.2})$$

sendo $\bar{x}$ o conjugado complexo de x , x^* o conjugado transposto de x e m_{ij} números complexos tais que $m_{ij} = \bar{m}_{ji}$, $\forall i, j$.

Como a forma hermitiana $x^* M x$ é um número real, decorre que

$$\begin{aligned} x^* M x &= (x^* M x)^* = x^* M^* x \Leftrightarrow \\ x^* M x - x^* M^* x &= 0 \Leftrightarrow \\ x^* (M - M^*) x &= 0 \Leftrightarrow \\ M - M^* &= 0 \Leftrightarrow M = M^* \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

sendo M^* a matriz conjugada transposta de M .

Logo toda matriz complexa que satisfaz (A.3) é chamada de *matriz hermitiana*.

O próximo teorema caracteriza os autovalores de uma matriz hermitiana.

Teorema 6. *Todos os autovalores de uma matriz hermitiana são reais.*

Prova: Seja e autovetor da matriz M em relação ao autovalor λ . Agora considere a forma hermitiana de M , e^*Me , daí decorre que

$$e^*Me = e^*\lambda e = \lambda(e^*e) = \lambda||e||^2.$$

Por hipótese tem-se que $e^*Me \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda||e||^2 \in \mathbb{R}$. Mas $||e||^2$ é um número real positivo, portanto $\lambda \in \mathbb{R}$.

■

Observação 5. *Todos os resultados existentes para as formas quadráticas podem ser estendidos para as formas hermitianas.*

Para mais informações consulte (CHEN, 1984, pp. 412-413;565-568).