IFT, TM - 10/87

E L S O D R I G O F I L H O

APLICAÇÕES DE TÉCNICAS DE SUPERSIMETRIA

Dissertação de Mestrado
apresentada no
Instituto de Física Teórica

Orientador: Professor Abraham Hirsz Zimerman

São Paulo
Setembro de 1987

À

Angélica e ao Bebê.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Zimerman pelo carinho, paciência e preocupação demonstradas durante a orientação.

Ao Denis pela boa vontade e presteza na leitura e discussão da versão preliminar deste trabalho.

À Angélica pelas úteis observações gramaticais, pelo companheirismo e carinho.

Ao Prof. Valdir pelo incentivo e orientação dados no início do trabalho.

Em especial ao Nelson, com quem trabalhei na parte referente a mecânica quântica supersimétrica, se mostrando sempre bom profissional e amigo.

À Cristina, Vicente, Birinha, Norma, Marcelo e Denis pela gostosa amizade, que se traduz numa grande alegria de estarmos perto.

Ao Elso(Pai) e Beatriz pelo apoio, confiança e amor que me dedicam até hoje. Ao Alexandre pela amizade. E a Cida pelo carinho.

Aos colegas do IFT (professores, alunos e funcionários) que contribuem para formar uma atmosfera simpática e acolhedora no intuito.

À Rosane pelo paciente trabalho de datilografia.

E a FAPESP pelo importante apoio financeiro.

RESUMO. Neste trabalho nós inicialmente generalizamos os potenciais do oscilador harmônico e coulombiano ambos em dimensões arbitrárias e estudamos estes sistemas usando mecânica quântica supersimétrica. Depois, num contexto de teoria de campos, introduzimos a simetria BRST e construimos a lagrangeana padrão de Yang-Mills através do uso de supercampos, também estudamos a partícula relativista sem spin e com spin indicando a supersimetria contida em cada sistema.

ABSTRACT. Working in arbitrary dimension we generalize the harmonic oscillator and the Coulomb potentials and we study these systems using supersymmetric quantum mechanics. Then, in field theory we contruct BRST using a superfield treatment. We also study the relativistic particle without and with spin showing the supersymmetry of these systems.

Í N D I C E

APLICAÇÕES DE TÉCNICAS DE SUPERSIMETRIA

I. INTRODUÇÃO

A supersimetria surgiu por volta de 1970 e unifica, numa mesma representação, partículas de spin inteiro (bósons) e semi-inteiro (férmions). O aparecimento da supersimetria está ligado à generalização do teorema de Coleman e Mandula[16]. Este teorema afirma que a álgebra (de Lie) dos geradores dos grupos de simetria da matriz-S mais geral possível é no máximo o produto direto da álgebra de Poincaré pela álgebra correspondente às simetrias internas, ou seja, sendo P_μ e $M_{\mu\nu}$ os geradores de translação e rotação respectivamente e B_ℓ geradores de simetria interna, então P_μ e $M_{\mu\nu}$ satisfazem a álgebra de Poincaré usual e B_ℓ gera uma álgebra de Lie: $[B_\ell , B_m] = i\, c^k_{\ell m} B_k$, com $c^k_{\ell m}$ como constantes de estrutura; e ainda B_ℓ são escalares de Lorentz: $[M_{\mu\nu} , B_\ell] = 0$ e $[P_\mu , B_\ell] = 0$. A extensão supersimétrica do teorema de Coleman e Mandula é o teorema de Haag, Lopuszanski e Sohnius[17] que considera a existência de geradores fermiônicos, tornando possível a construção de uma álgebra de Lie graduada (super-álgebra) envolvendo comutadores e anticomutadores, assim a supersimetria aparece através da extensão do grupo de Poincaré realizada através de cargas anticomutantes. Considerando que estas cargas são realizadas como spinores Q^L_α e seus adjuntos $\bar{Q}^L_{\dot\alpha}$ ($L = 1,\ldots,N$; para $N = 1$ a super-álgebra é dita simples, de outra forma é dita N-extendida) temos as relações principais da supersimetria[24]:

$$[M_{\mu\nu} , Q^L_\alpha] = -\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu\alpha}{}^\beta Q^L_\beta \tag{1}$$

$$[P_\mu , Q^L_\alpha] = 0 \tag{2}$$

$$[Q^L_\alpha , \bar{Q}^M_{\dot\alpha}]_+ = -2\,\delta^{LM}\,\sigma^\mu_{\dot\alpha\alpha}\,P_\mu \tag{3}$$

onde σ^μ são as matrizes de Pauli ($\mu = 1,2,3$) mais a matriz identidade 2 x 2 ($\mu = 0$) e $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)$ com $\bar{\sigma}^{\mu\dot\alpha\alpha} = \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma_{\beta\dot\beta}{}^\mu$ ($\varepsilon^{\alpha\beta}$ são tensores antissimétricos de elevação e abaixamento dos índices spinoriais).

A supersimetria tem sido usada, basicamente, em três campos da física moderna: física nuclear, teoria de campos e em mecânica quântica ordinária, no entanto apenas em física nuclear foram observados experimentalmente exemplos de estruturas supersimétricas[23].

Em teoria de campos supersimetria tem despertado grande interesse, devido à sua conexão com grande unificação (principalmente com respeito a quantização da gravidade- "supergravidade") e o problema da hierarquia (justificativa da existência da grande diferença entre as massas dos bósons de gauge da interação fraca 10^{11} eV e a massa de Planck 10^{28} eV), mas a existência da supersimetria está ligada a existência de partículas correspondentes às conhecidas (pertencentes ao mesmo multipleto) e com estatísticas diferentes. Estas partículas, entretanto, não foram identificadas até agora na natureza. Não obstante, foram desenvolvidas determinadas técnicas para se construir teorias supersimétricas[29]. Neste trabalho vamos explorar estas técnicas, aplicando-as em problemas específicos.

Aplicaremos também supersimetria em mecânica quântica ordinária, ou seja, trabalharemos com a mecânica quântica supersimétrica, cujo formalismo é obtido tratando a teoria

quântica de campos em (1 + 0) dimensões. Assim evidenciamos uma coordenada (tempo) escrevendo as outras variáveis dinâmicas em termos dela. Esta estrutura da mecânica quântica supersimétrica está desenvolvida no apêndice A.

Na primeira parte da presente dissertação estudamos o oscilador harmônico e o problema coulombiano ambos em dimensões arbitrárias, fazendo uma ligeira generalização dos potenciais via operadores criação e destruição e usando a mecânica quântica supersimétrica construimos para cada sistema um hamiltoniano supersimétrico.

A segunda parte deste texto envolve supersimetria, ou melhor dito super-álgebra, no contexto da teoria de campos e partículas elementares. Vamos em III.1, através de técnicas de supercampos introduzir a simetria de BRST e construir a lagrangeana de Yang-Mills padrão. A simetria de BRST surgiu, historicamente, da necessidade de se introduzir campos fantasmas no processo de quantização de teorias de gauge[25]. A fixação de gauge é usada para retirar do funcional gerador contribuições de órbitas que estão relacionadas entre si por transformações de gauge. Posteriormente foi notado por Becchi, Rouet e Stora[27] e independentemente por Tyuchin que a lagrangeana total resultante deste processo de quantização era invariante por um novo tipo de transformação que foi chamada de BRST. A invariância por BRST é útil para mostrar renormalizibilidade e unitariedade em teorias de gauge, e é muitas vezes usada atualmente como princípio guia na procura de procedimentos corretos de fixação de gauge. Usaremos, ainda, esta invariância para tratar a lagrangeana de uma partícula relativista sem spin (em III.2) e com spin (em III.3) a fim de quantizar os dois sistemas.

Para a partícula sem spin desenvolveremos a lagrangeana quântica até chegar numa lagrangeana final invariante por supersimetria e análoga a obtida por G. Parisi e N. Sourlas[20] para um sistema D-dimensional de spin perto do ponto crítico em um campo magnético externo aleatório. Para partícula com spin colocamos a hamiltoniana clássica em uma forma conveniente, com os devidos vínculos e campos fantasmas e construimos o funcional gerador da teoria.

II. APLICAÇÃO DE SUPERSIMETRIA À MECÂNICA QUÂNTICA

Tratamos aqui de dois sistemas particulares: o oscilador harmônico e o problema coulombiano, ambos em dimensões arbitrárias.

II.1. OPERADORES CRIAÇÃO E DESTRUIÇÃO

1.1. Oscilador Harmônico em D dimensões

A equação radial que descreve o oscilador harmônico quântico, obtida no apêndice B, é:

$$\left\{-\frac{\hbar}{m\omega}\frac{d^2}{dR^2}+\frac{\hbar}{m\omega}\frac{\left[L+\frac{1}{2}(D-1)\right]\left[L+\frac{1}{2}(D-1)-1\right]}{R^2}+\frac{m\omega}{\hbar}R^2-\frac{2E_N}{\hbar\omega}\right\}U_{N,L}(R)=0 \tag{1}$$

onde L é o número quântico do momento angular, ω é a frequência de oscilação, $\hbar$ é a constante de Planck, m a massa do oscilador, E_N são os autovalores da energia, $U_{N,L}(R)$ são as autofunções e R é a variável radial. Lembrando da equação de autovalores:

$$H_L\, U_{N,L}(R) = E_N\, U_{N,L}(R) \tag{2}$$

obtemos a partir de (1) o hamiltoniano H_L:

$$H_L=\frac{\hbar^2}{2m}\left\{-\frac{d^2}{dR^2}+\frac{\left[L+\frac{1}{2}(D-1)\right]\left[L+\frac{1}{2}(D-1)-1\right]}{R^2}+\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}R^2\right\} \tag{3}$$

Este hamiltoniano pode ser fatorado em termos de operadores a_L e a_L^+ :

$$H_L = a_L^+ a_L + \frac{\hbar\omega}{2}(2L+D) \tag{4}$$

onde:

$$a_L = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\left\{\frac{d}{dR} + \frac{m\omega}{\hbar}R - \frac{L+\frac{1}{2}(D-1)}{R}\right\} \tag{5}$$

$$a_L^+ = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\left\{-\frac{d}{dR} + \frac{m\omega}{\hbar}R - \frac{L+\frac{1}{2}(D-1)}{R}\right\} \tag{6}$$

Estes operadores a_L e a_L^+ podem ser vistos como operadores criação e destruição - interpretados no apêndice D.

Verificamos também que:

$$H_{L+1} = a_L a_L^+ + \frac{\hbar\omega}{2}(2L+D-2) \tag{7}$$

Com base nos resultados obtidos até aqui podemos generalizar os operadores a_L e a_L^+, seguindo sugestão das referências [1] e [2]:

$$A_L = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\left\{\frac{d}{dR} + f_L(R)\right\} \tag{8}$$

$$A_L^+ = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\left\{-\frac{d}{dR} + f_L(R)\right\} \tag{9}$$

E impomos que, em analogia com (7):

$$H_{L+1} = A_L A_L^+ + \frac{\hbar\omega}{2}(2L+D-2) \tag{10}$$

Usando a forma explícito de A_L e A_L^+ e de H_{L+1} em (10), chegamos à seguinte equação diferencial:

$$f_L' + f_L^2 = \frac{\left[L+\frac{1}{2}(D-1)\right]\left[L+\frac{1}{2}(D-1)+1\right]}{R^2} + \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}R^2 - \frac{m\omega}{\hbar}(2L+D-2) \tag{11}$$

onde $f_L' = \dfrac{d f_L(R)}{dR}$; cuja solução (obtida no apêndice E) é:

$$f_L(R) = \frac{m\omega}{\hbar}R - \frac{L+\frac{1}{2}(D-1)}{R} + \phi_L(R) \tag{12}$$

sendo:

$$\phi_L(R) = \frac{R^{2L+D-1}\, e^{-\frac{m\omega}{\hbar}R^2}}{\left\{\gamma + \int_0^R d\bar{R}\; \bar{R}^{2L+D-1}\, e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\cdot\bar{R}^2}\right\}} \tag{13}$$

Para evitar que o denominador de (13) se anule para um dado R , criando assim singularidades, colocamos restrições em γ :

se ($2L+D-1$) for par:

$$\gamma > 0 \quad \text{ou} \quad \gamma < -\frac{(2L+D-2)!!}{2}\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{2L+D-1}{2}}\sqrt{\frac{\hbar\pi}{m\omega}} \tag{13.A}$$

se ($2L+D-1$) for ímpar:

$$\gamma > 0 \quad \text{ou} \quad \gamma < -\frac{1}{2}\left(\frac{2L+D-2}{2}\right)!\cdot\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{\frac{2L+D}{2}} \tag{13.B}$$

A relação de comutação entre os novos operadores A_L e A_L^+ é:

$$[A_L, A_L^+] \equiv A_L A_L^+ - A_L^+ A_L =$$

$$= m\omega^2 f_L'(R) = \frac{\hbar^2}{m}\left\{\frac{m\omega}{\hbar} + \frac{L+\frac{1}{2}(D-1)}{R^2} + \phi_L'(R)\right\} \quad (14)$$

Usando esta relação em (10) obtemos:

$$H_{L+1} = A_L^+ A_L + \frac{\hbar\omega}{2}(2L+D-2) + \frac{\hbar^2}{m}\left\{\frac{m\omega}{\hbar} + \frac{L+\frac{1}{2}(D-1)}{R^2} + \phi_L'(R)\right\} \quad (15)$$

Mas de (3), verifica-se que:

$$H_{L+1} - \frac{\hbar^2}{m}\frac{L+\frac{1}{2}(D-1)}{R^2} = H_L \quad (16)$$

Portanto (15) pode ser rescrito:

$$H_L - \frac{\hbar^2}{m}\phi_L'(R) = A_L^+ A_L + \frac{\hbar\omega}{2}(2L+D) \quad (17)$$

A expressão acima sugere a definição de um novo hamiltoniano:

$$\mathcal{H}_L = H_L - \frac{\hbar^2}{m}\phi_L'(R) \quad (18)$$

ou ainda, voltando a (17):

$$\mathcal{H}_L = A_L^+ A_L + \frac{\hbar\omega}{2}(2L+D) \quad (19)$$

Deste novo hamiltoniano obtemos os autovalores e autofunções percebendo que:

$$\mathcal{H}_L A_L^+ = \left\{ A_L^+ A_L + \frac{\hbar\omega}{2}(2L+D) \right\} A_L^+ =$$

$$= A_L^+ \left\{ A_L A_L^+ + \frac{\hbar\omega}{2}(2L+D) \right\} = A_L^+ (H_{L+1} + \hbar\omega). \qquad (20)$$

Assim se $\{U_{N,L+1}\}$ são autofunções de H_{L+1} com autovalores E_N, então $\{A_L^+ U_{N,L+1}\}$ são autofunções de $\mathcal{H}_L$ com autovalores $(E_N + \hbar\omega)$. Estas autofunções de $\mathcal{H}_L$ são ortogonais com produto escalar dado no final do apêndice B:

$$(A_L^+ U_{N,L+1}, A_L^+ U_{N',L+1}) =$$

$$= (A_L A_L^+ U_{N,L+1}, U_{N',L+1}) = \left\{ -\frac{\hbar\omega}{2}(2L+D-2) + E_N \right\} \delta_{NN'} \qquad (21)$$

Contudo o conjunto $\{A_L^+ U_{N,L+1}\}$ não contém todos os autoestados de $\mathcal{H}_L$, ou seja, não forma uma base completa do espaço de Hilbert. A_L^+ é o operador que fornece os autoestados de $\mathcal{H}_L$ a partir dos autoestados de H_{L+1}, mas neste processo perdemos o "vácuo" que é formado pelos estados de menor energia para L fixo, precisamos então obter o estado perdido $\tilde{U}_{L,L}(R)$ que completa a base e é ortogonal a todos os demais estados:

$$(\tilde{U}_{L,L}, A_L^+ U_{N,L+1}) = 0 \qquad (\text{para } \forall N) \qquad (22)$$

$$(A_L \tilde{U}_{L,L}, U_{N,L+1}) = 0 \qquad (23)$$

mas como $\{U_{N,L+1}(R)\}$ forma uma base completa, para que a igualdade acima seja verdadeira é preciso que:

$$A_L \tilde{U}_{L,L} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left\{ \frac{d}{dR} + f_L(R) \right\} \tilde{U}_{L,L}(R) = 0 \qquad (24)$$

Lembrando que para ter o elemento de volume correto na integração que definimos como produto escalar no apêndice B, precisamos retirar da solução de (24) o fator $R^{\frac{1}{2}(D-1)}$. Usando $f_L(R)$ dado em (12) achamos a solução desta equação diferencial de primeira ordem e obtemos o estado perdido:

$$\tilde{U}_{L,L}(R) = C\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}R^2}\, R^L \exp\left\{-\int_0^R \phi_L(\bar{R})\, d\bar{R}\right\}. \tag{25}$$

O rótulo do estado $\tilde{U}_{L,L}(R)$ pode ser inferido do caso unidimensional, referência [1], como sendo o estado de mais baixa energia para um dado L fixo.

Pela definição de $\tilde{U}_{L,L}(R)$ em (24), este estado tem autovalor $\frac{\hbar\omega}{2}(2L+D)$:

$$\mathcal{H}_L\, \tilde{U}_{L,L}(R) = \left[A_L^{+}A_L + \frac{\hbar\omega}{2}(2L+D)\right]\tilde{U}_{L,L}(R) = \frac{\hbar\omega}{2}(2L+D)\,\tilde{U}_{L,L}(R) \tag{26}$$

Assim generalizamos o potencial do oscilador harmônico D-dimensional achando um novo hamiltoniano, obtendo também suas autofunções e autovalores.

1.2. Problema de Coulomb em d dimensões

Trataremos aqui o problema coulombiano através de um procedimento inteiramente análogo ao usado no oscilador harmônico.

A equação radial, encontrada no apêndice C, que descreve o problema coulombiano quântico d-dimensional é:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\left[\ell+\frac{1}{2}(d-1)\right]\left[\ell+\frac{1}{2}(d-1)-1\right]}{r^2}+\frac{2me^2}{\hbar^2}\cdot\frac{1}{r}\right\}R_{n,\ell}(r)=$$

$$=E_n R_{n,\ell}(r) \tag{27}$$

onde ℓ é o número quântico do momento angular, e é o valor das cargas que se atraem, a massa da carga central é considerada infinita e m é a massa da carga orbitante, E_N são os autovalores da energia, $R_{n,\ell}(r)$ são as autofunções e r é a variável radial. Obtemos o hamiltoniano:

$$H_\ell=-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\left[\ell+\frac{1}{2}(d-1)\right]\left[\ell+\frac{1}{2}(d-1)-1\right]}{r^2}+\frac{2me^2}{\hbar^2}\frac{1}{r}\right\}, \tag{28}$$

que pode ser fatorado:

$$H_\ell=b_\ell^+ b_\ell-\frac{me^4}{2\hbar^2}\left[\ell+\frac{1}{2}(d-1)\right]^{-2} \tag{29}$$

com

$$b_\ell^+=\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\left\{-\frac{d}{dr}+\frac{me^2}{\hbar^2}\left[\ell+\frac{1}{2}(d-1)\right]^{-1}-\frac{\ell+\frac{1}{2}(d-1)}{r}\right\} \tag{30}$$

$$b_\ell=\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\left\{\frac{d}{dr}+\frac{me^2}{\hbar^2}\left[\ell+\frac{1}{2}(d-1)\right]^{-1}-\frac{\ell+\frac{1}{2}(d-1)}{r}\right\}. \tag{31}$$

Estes operadores b_ℓ e b_ℓ^+ são tratados no apêndice D e podem ser interpretados como operadores criação e destruição.

Verificamos também que:

$$H_{\ell+1} = b_\ell \, b_\ell^+ - \frac{m e^4}{2\hbar^2} \left[\ell + \frac{1}{2}(d-1) \right]^{-2} \tag{32}$$

Como feito para o ocilador harmônico, vamos generalizar os operadores b_ℓ e b_ℓ^+ definindo:

$$B_\ell = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left\{ \frac{d}{dr} + F_\ell(r) \right\} \tag{33}$$

$$B_\ell^+ = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left\{ -\frac{d}{dr} + F_\ell(r) \right\} \tag{34}$$

e impondo que:

$$H_{\ell+1} = B_\ell B_\ell^+ - \frac{m e^4}{2\hbar^2} \left[\ell + \frac{1}{2}(d-1) \right]^{-2} . \tag{35}$$

Usando as definições de B_ℓ e B_ℓ^+ e a forma explícita de $H_{\ell+1}$ obtida de (28), chegamos a seguinte equação diferencial não homogênea:

$$F_\ell' + F_\ell^2 = \frac{\left[\ell + \frac{1}{2}(d-1)\right]\left[\ell + \frac{1}{2}(d-1) + 1\right]}{r^2} - \frac{2me^2}{\hbar^2}\frac{1}{r} + \frac{m^2 e^4}{\hbar^4}\left[\ell + \frac{1}{2}(d-1)\right]^{-2} \tag{36}$$

onde $F_\ell' = \frac{d}{dr} F_\ell(r)$, cuja solução é determinada no apêndice E:

$$F_\ell = \frac{me^2}{\hbar^2}\left[\ell + \frac{1}{2}(d-1)\right]^{-1} - \frac{\ell + \frac{1}{2}(d-1)}{r} + \varphi_\ell(r) \tag{37}$$

sendo:

$$\varphi_\ell(r) = \frac{r^{2\ell+d-1} \exp\left\{-\frac{2me^2}{\hbar^2}\left[\ell+\frac{1}{2}(d-1)\right]^{-1} r\right\}}{\left\{\Gamma + \int_0^r d\bar{r}\, \bar{r}^{2\ell+d-1} \exp\left[-\frac{2me^2}{\hbar^2}\left(\ell+\frac{1}{2}(d-1)\right)^{-1} r\right]\right\}} \tag{38}$$

Para evitar o aparecimento de singularidades no denominador da expressão acima impomos:

$$\Gamma > 0 \qquad \text{ou} \qquad \Gamma < -(2\ell+d-1)!\left\{\frac{2me^2}{\hbar^2}\left[\ell+\frac{1}{2}(d-1)\right]^{-1}\right\}^{-2\ell-d} \tag{39}$$

A relação de comutação dos novos operadores é:

$$[B_\ell, B_\ell^+] \equiv B_\ell B_\ell^+ - B_\ell^+ B_\ell = \frac{\hbar^2}{m} F_\ell' = \frac{\hbar^2}{m}\left\{\frac{\ell+\frac{1}{2}(d-1)}{r^2} + \varphi_\ell'(r)\right\} \tag{40}$$

Juntando esta igualdade com (35) obtemos:

$$H_{\ell+1} = B_\ell^+ B_\ell - \frac{me^4}{2\hbar^2}\left[\ell+\frac{1}{2}(d-1)\right]^{-2} + \frac{\hbar^2}{m}\frac{\ell+\frac{1}{2}(d-1)}{r^2} + \frac{\hbar^2}{m}\varphi_\ell'(r)\,. \tag{41}$$

Mas (28) nos fornece a seguinte igualdade:

$$H_{\ell+1} - \frac{\hbar^2}{m}\frac{\ell+\frac{1}{2}(d-1)}{r^2} = H_\ell\,, \tag{42}$$

o que nos possibilita reescrever (41):

$$H_\ell - \frac{\hbar^2}{m}\varphi_\ell'(r) = B_\ell^+ B_\ell - \frac{me^4}{2\hbar^2}\left[\ell+\frac{1}{2}(d-1)\right]^{-2}. \tag{43}$$

Esta expressão sugere a definição de um novo hamiltoniano:

$$\mathcal{H}_\ell = H_\ell - \frac{\hbar^2}{m}\varphi_\ell'(r) \tag{44}$$

ou usando (43):

$$\mathcal{H}_\ell = B_\ell^+ B_\ell - \frac{m e^4}{2\hbar^2}\left[\ell + \frac{1}{2}(d-1)\right]^{-2} \tag{45}$$

Deste novo hamiltoniano podemos determinar quais são as autofunções e autovalores observando que:

$$\mathcal{H}_\ell B_\ell^+ = \left\{B_\ell^+ B_\ell - \frac{m e^4}{2\hbar^2}\left[\ell + \frac{1}{2}(d-1)\right]^{-2}\right\} B_\ell^+ =$$

$$= B_\ell^+ \left\{B_\ell B_\ell^+ - \frac{m e^4}{2\hbar^2}\left[\ell + \frac{1}{2}(d-1)\right]^{-2}\right\} = B_\ell^+ H_{\ell+1} \tag{46}$$

Assim se $\{R_{n,\ell+1}\}$ são autofunções de $H_{\ell+1}$ com autovalores E_n, então $\{B_\ell^+ R_{n,\ell+1}\}$ são autofunções de $\mathcal{H}_\ell$ também com autovalores E_n. Estas autofunções de $\mathcal{H}_\ell$ são ortogonais:

$$\left(B_\ell^+ R_{n,\ell+1}, B_\ell^+ R_{n',\ell+1}\right) =$$

$$= \left(B_\ell B_\ell^+ R_{n,\ell+1}, R_{n',\ell+1}\right) = \left[E_n + \frac{m e^4}{2\hbar^2}\left(\ell + \frac{1}{2}(d-1)\right)^{-2}\right]\delta_{nn'} \tag{47}$$

Notemos que estamos tratando o problema coulombiano exatamente como fizemos com o oscilador harmônico; assim o hamiltoniano $\mathcal{H}_\ell$ possue autoestados $\{B_\ell^+ R_{n,\ell+1}\}$ e ainda estados perdidos $\tilde{R}_{\ell+1,\ell}$ que completam o espaço de Hilbert das autofunções do novo hamiltoniano. Chegamos aos estados perdidos pela igualdade:

$$\left(\tilde{R}_{\ell+1,\ell}, B_\ell^+ R_{n,\ell+1}\right) = 0 \quad (\text{para } \forall n) \tag{48}$$

ou ainda:

$$\left(\mathcal{B}_\ell \tilde{R}_{\ell+1,\ell} , R_{n,\ell+1} \right) = 0 \tag{49}$$

Percebemos que $\tilde{R}_{\ell+1,\ell}$ são obtidos da equação diferencial abaixo (já que $\{R_{n,\ell+1}\}$ forma uma base completa), retirando o fator $r^{\frac{1}{2}(d-1)}$ que contribue para o fator de volume correto na integração que define o produto escalar (apêndice C):

$$\mathcal{B}_\ell \tilde{R}_{\ell+1,\ell} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left\{ \frac{d}{dr} + F_\ell(r) \right\} \tilde{R}_{\ell+1,\ell} = 0 \tag{50}$$

A solução desta equação, usando $F_\ell(r)$ dada em (37), é:

$$\tilde{R}_{\ell+1,\ell} = C \; e^{-\frac{me^2}{\hbar^2}\left[\ell + \frac{1}{2}(d-1)\right]^{-1} r} \; r^\ell \; e^{-\int_0^r \varphi_\ell(\bar{r})\, d\bar{r}} \tag{51}$$

O rótulo do estado perdido pode ser inferido do caso tridimensional referência [2] ou através da relação de ortogonalidade (47), pois sendo $E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2}\left[n + \frac{1}{2}(d-3)\right]^{-2}$ (apêndice C) a ortogonalidade não está bem definida para $n = \ell + 1$.

Através da igualdade (50) obtemos os autovalores para os estados perdidos:

$$\mathcal{H}_\ell \tilde{R}_{\ell+1,\ell} =$$

$$= \left\{ \mathcal{B}_\ell^+ \mathcal{B}_\ell - \frac{me^4}{2\hbar^2}\left[\ell + \frac{1}{2}(d-1)\right]^{-2} \right\} \tilde{R}_{\ell+1,\ell} = -\frac{me^4}{2\hbar^2}\left[\ell - \frac{1}{2}(d-1)\right]^{-2} \tilde{R}_{\ell+1,\ell} \tag{52}$$

Portanto $\tilde{R}_{\ell+1,\ell}$ tem autovalor: $-\frac{me^4}{2\hbar^2}\left[\ell - \frac{1}{2}(d-1)\right]^{-2}$.

Assim, como para o oscilador harmônico, generalizamos o potencial do problema coulombiano (em d dimensões) através do novo hamiltoniano (44) e resolvemos analiticamente este novo sistema obtendo suas autofunções e autovalores.

II.2. APLICAÇÃO DA MECÂNICA QUÂNTICA SUPERSIMÉTRICA

Uma construção formal da mecânica quântica supersimétrica é apresentada no apêndice A de onde extraímos a relação de anticomutação fundamental; para $N = 2$:

$$[Q, Q^+]_+ = H_{ss} \tag{53}$$

onde Q e Q^+ são os geradores da supersimetria e H_{ss} é o hamiltoniano supersimétrico

Os geradores Q e Q^+ podem ser realizados da seguinte forma:

$$Q = \alpha \sigma_- \tag{54}$$

$$Q^+ = \alpha^+ \sigma_+ \tag{55}$$

onde: $\sigma_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\sigma_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Esta realização emerge do estudo do hamiltoniano de um oscilador harmônico supersimétrico, referência [8], sendo α e α^+ operadores criação e destruição bosônicos e σ_- e σ_+ os operadores fermiônicos equivalentes representados em termos de matrizes de Pauli. A relação fundamental (53) pode ser escrita:

$$[Q, Q^+]_+ = \begin{bmatrix} \alpha^+\alpha & 0 \\ 0 & \alpha\alpha^+ \end{bmatrix} = H_{ss} \tag{56}$$

e chamaremos $H_- = \alpha\alpha^+$ de companheiro supersimétrico de $H_+ = \alpha^+\alpha$. Em termos das autofunções, Q aplicado em um autoestado de H_+ conduz a um autoestado de H_- e Q^+ atuando numa autofunção de H_- nos leva a um autoestado de H_+ :

$$Q\begin{bmatrix}\psi_+\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\\psi_-\end{bmatrix}, \qquad Q\begin{bmatrix}0\\\psi_-\end{bmatrix} = 0 \tag{57}$$

$$Q^+\begin{bmatrix}0\\\psi_-\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\psi_+\\0\end{bmatrix}, \qquad Q^+\begin{bmatrix}\psi_+\\0\end{bmatrix} = 0 \tag{58}$$

Os operadores generalizados A_L e A_L^+ do oscilador harmônico e $\mathcal{B}_\ell$ e $\mathcal{B}_\ell^+$ do problema coulombiano que foram calculados anteriormente podem ser associados aos operadores α e α^+ desta linguagem supersimétrica. Devido a clareza na interpretação dos resultados escolhemos trabalhar primeiro com os operadores não generalizados a_L e a_L^+ e b_ℓ e b_ℓ^+ , ou seja, analisamos os companheiros supersimétricos dos hamiltonianos do oscilador harmônico e do problema coulombiano em dimensões arbitrárias, a menos de constantes aditivas.

Para o oscilador harmônico temos, usando (5) e (6):

$$H_{+L} \equiv a_L^+ a_L = \frac{\hbar^2}{2m}\left\{-\frac{d^2}{dR^2} + \frac{\left[L+\frac{1}{2}(D-1)\right]\left[L+\frac{1}{2}(D-1)-1\right]}{R^2} + \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}R^2\right\} - \frac{\hbar\omega}{2}(2L+D) \tag{59}$$

H_{+L} é o próprio hamiltoniano do oscilador harmônico (3) menos o estado de mais baixa energia: $E_L = \frac{\hbar\omega}{2}(2L+D)$, os autoestados de energia são dados no apêndice B, ou melhor, H_{+L} tem o espectro igual ao do oscilador harmônico, porém deslocado de forma que o estado fundamental tenha autovalor nulo.

O companheiro supersimétrico neste caso é:

$$H_{-L} = a_L a_L^+ = \frac{\hbar^2}{2m}\left\{-\frac{d^2}{dR^2} + \frac{\left[L+\frac{1}{2}(D-1)+1\right]\left[L+\frac{1}{2}(D-1)\right]}{R^2} + \frac{\hbar^2}{m^2\omega^2}R^2\right\} - \frac{\hbar\omega}{2}(2L+D-2) \quad (60)$$

comparando o termo de momento angular, proporcional a R^{-2}, vemos que as funções de onda dos pares supersimétricos (59) e (60) estão relacionados entre si pela troca $L \longleftrightarrow L+1$. Em termos dos autovalores da energia percebemos que o espectro de H_{+L} é $2\hbar\omega n$ e de H_{-L} é $2\hbar\omega(n+1)$ com $n \geq 0$, portanto são iguais a menos do estado fundamental nulo que apenas H_{+L} possue.

No caso coulombiano, usando (30) e (31), temos:

$$H_{+\ell} \equiv b_\ell^+ b_\ell =$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m}\left\{-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\left[\ell+\frac{1}{2}(d-1)-1\right]\left[\ell+\frac{1}{2}(d-1)\right]}{r^2} - \frac{2me^2}{\hbar^2}\frac{1}{r}\right\} + \frac{me^4}{2\hbar^2}\left[\ell+\frac{1}{2}(d-1)\right]^{-2} \quad (61)$$

que corresponde ao hamiltoniano (29) menos o valor da energia mais baixa para um dado ℓ fixo: $E_{\ell+1} = -\frac{me^4}{2\hbar^2}\left[\ell+\frac{1}{2}(d-1)\right]^{-2}$ – os autovalores de energia são dados no apêndice C – aqui também o espectro é deslocado de forma a ter o estado de mais baixa energia com autovalor zero. O companheiro supersimétrico de $H_{+\ell}$ é dado por:

$$H_{-\ell} = b_\ell b_\ell^+ =$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m}\left\{-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\left[\ell+\frac{1}{2}(d-1)\right]\left[\ell+\frac{1}{2}(d-1)+1\right]}{r^2} - \frac{2me^2}{\hbar^2}\frac{1}{r}\right\} + \frac{me^4}{2\hbar^2}\left[\ell+\frac{1}{2}(d-1)\right]^{-2} \quad (62)$$

$$H_- = A_L A_L^+ \tag{64}$$

que a menos de constantes aditivas correspondem as definições (19) e (10), ou seja, o hamiltoniano generalizado está relacionado ao hamiltoniano do oscilador harmônico por supersimetria. Analisando as funções de onda obtemos:

$$Q\begin{bmatrix}\psi_+\\0\end{bmatrix} = A_L\sigma_-\begin{bmatrix}A_L^+ U_{N,L+1}\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\A_L A_L^+ U_{N,L+1}\end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix}0\\U_{N,L+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\\psi_-\end{bmatrix} \tag{65}$$

$$Q^+\begin{bmatrix}0\\\psi_-\end{bmatrix} = A_L^+\sigma_+\begin{bmatrix}0\\U_{N,L+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_L^+ U_{N,L+1}\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\psi_+\\0\end{bmatrix} \tag{66}$$

onde notamos em (65) que $A_L A_L^+ U_{N,L+1}$ difere de ψ_- por uma constante, isto pode ser controlado através da constante de normalização. Da mesma forma o problema coulombiano nos fornece:

$$H_+ = B_\ell^+ B_\ell \tag{67}$$

$$H_- = B_\ell B_\ell^+ \tag{68}$$

o que permite concluir que a menos de constantes aditivas o hamiltoniano do problema coulombiano $H_{\ell+1}$ (35) é companheiro supersimétrico do hamiltoniano generalizado $\mathcal{H}_\ell$ (45). Em termos das funções de onda os resultados são equivalentes aos apresentados acima para o oscilador harmônico.

onde percebemos, comparando o termo de momento angular (proporcional a r^{-2}) que os autoestados do par supersimétrico (59) e (60) estão relacionados pela troca de uma unidade no número quântico do momento angular $\ell \leftrightarrow \ell+1$. Analisando os espectros de energia de $H_{+\ell}$ e $H_{-\ell}$ vemos que são iguais a menos do autovalor nulo do estado de mais baixa energia para ℓ fixo que ocorre apenas para $H_{+\ell}$. Notemos que as conclusões obtidas são basicamente as mesmas a que chegamos ao estudar o oscilador harmônico.

Esperávamos conseguir um mapeamento entre os dois problemas quânticos tratados aqui via operadores criação e destruição, não conseguimos realizar tal intento, no entanto no apêndice F apresentamos um mapeamento entre as autofunções do oscilador harmônico em D dimensões e do problema coulombiano em d dimensões.

Em três dimensões o problema coulombiano supersimétrico permite uma interessante interpretação física desenvolvida no apêndice G, que nos leva a relacionar dentro de determinadas condições (desprezando interação entre elétrons e movimento de recúo do núcleo atômico) o hamiltoniano H_{+0} $(\ell=0)$ com os orbitais s do átomo de hidrogênio e seu companheiro supersimétrico H_{-0} com os orbitais s do átomo de lítio com dois elétrons no orbital $1s$.

Passamos agora aos operadores generalizados. No caso do oscilador harmônico:

$$H_+ = A_\ell^+ A_\ell \tag{63}$$

III. APLICAÇÃO DE SUPER-ÁLGEBRAS EM TEORIA DE CAMPOS

Estudamos nesta parte do trabalho os tópicos: simetria BRST num contexto de supercampos, sistema de uma partícula sem spin e com spin-ambos com introdução de campos fantasmas.

III.1. SUPERCAMPOS E SIMETRIA BRST

Inicialmente vamos construir a lagrangeana de Yang-Mills com termo de Fixação de Gauge usando a simetria BRST[10]. A lagrangeana de partida é portanto:

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4g} F_{\mu\nu} \cdot F^{\mu\nu} \tag{69}$$

onde: $F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + (A_\mu \times A_\nu)^a$, A^a_μ são os campos de gauge, $F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu} \tau^a$, τ^a são os geradores do grupo de gauge (de Lie): $[\tau^a, \tau^b] = f^{abc} \tau^c$, com constante de estrutura f^{abc}; nesta notação: $(a \times b)^a = f^{abc} a^b b^c$. Como o grupo de gauge que aparece é um grupo de Lie compacto ele possui algumas propriedades importantes, destacamos a identidade de Jacobi e a total antissimetria da constante de estrutura. A lagrangeana (69) é invariante por transformações de gauge, infinitesimalmente:

$$\delta A^a = (D_\mu \varepsilon)^a = \partial_\mu \varepsilon^a + f^{abc} A_{\mu a} \varepsilon_b \tag{70}$$

onde D_μ definido acima é a derivada covariante.

A transformação de BRST (δ_B) para o campo de gauge A_μ é obtida substituindo o parâmetro infinitesimal da trans

formação de gauge $\varepsilon(x)$ por $\lambda c(x)$ onde λ é um número de Grassmann e $c(x)$ tem caráter fermiônico e é chamado campo fantasma, portanto a transformação de BRST de A^a_μ é:

$$\lambda\, \delta_B A^a_\mu = (D_\mu \lambda c)^a = \lambda\, (D_\mu c)^a \tag{71}$$

Impondo que esta transformação seja nilpotente: $\delta_B^2 A^a_\mu = \delta_B(\delta_B A^a_\mu) = 0$, que é uma propriedade das transformações de BRST, obtemos como se transforma o campo fantasma:

$$\delta_B c^a = -\frac{1}{2}\,(c \times c)^a \tag{72}$$

Para fixar o gauge precisamos introduzir na teoria mais dois campos: o anti-fantasma $\bar{c}_a(x)$ com caráter fermiônico e o campo bosônico $B_a(x)$, de forma que sejam construídas as seguintes transformações nilpotentes:

$$\delta_B \bar{c}_a = i\, B_a \tag{73}$$

$$\delta_B B_a = 0 \tag{74}$$

Dadas as transformações de BRST podemos introduzir um gerador Q_B destas transformações definido por:

$$\lambda\, \delta_B(*) = [\, i\lambda Q_B\, ,\, * \,] \tag{75}$$

este gerador sendo nilpotente obedece a relação de anticomutação:

$$[Q_B, Q_B]_+ = 0 \tag{76}$$

O princípio de simetria por BRST postula que os estados físicos são invariantes por BRST, ou seja;

$$Q_B \,|\, \text{físico}\rangle = 0 \tag{77}$$

Assim qualquer operador da forma $\delta_B(*)$ terá autovalor nulo quando aplicado a algum estado físico. Portanto podemos adicionar a lagrangeana um operador deste tipo sem alterar o conteúdo físico da teoria. Vamos usar esta propriedade para adicionar a lagrangeana de partida ($\mathcal{L}_0$) termos de fixação de gauge $\mathcal{L}_{FG}$ e de fantasmas de Faaddev-Popov $\mathcal{L}_{FP}$. Outra propriedade a ser considerada na construção destes termos é a conservação do número de fantasmas, este número quântico é $+1$ para fantasmas e -1 para anti-fantasmas, assim como $\mathcal{L}_0$ tem número de fantasmas zero também exigimos isto para $\mathcal{L}_{FG}$ e $\mathcal{L}_{FP}$. Obedecendo às condições acima escrevemos:

$$\mathcal{L}_{FG} + \mathcal{L}_{FP} = -i\,\delta_B(\bar{c}_a f^a) \tag{78}$$

onde f^a é a função de fixação de gauge: uma função arbitrária dos campos da teoria com número de fantasmas igual a zero. Separando os termos de (78) obtemos:

$$\mathcal{L}_{FG} = B_a f^a \tag{79}$$

$$\mathcal{L}_{FP} = i\,\bar{c}_a\,\delta f^a \tag{80}$$

Usualmente escolhemos o gauge:

$$f_a = \partial^\mu A_{\mu a} + \frac{1}{2}\alpha B_a \,, \tag{81}$$

de forma que:

$$\mathcal{L}_{FG} = B_a \left(\partial_\mu A^a_\mu + \frac{1}{2}\alpha B^a \right) \tag{82}$$

$$\mathcal{L}_{FP} = i\, \bar{c}_a \partial^\mu (D_\mu c)^a \tag{83}$$

isto nos leva a uma densidade de lagrangeana total:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{FG} + \mathcal{L}_{FP} =$$

$$= -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + B_a \partial_\mu A^{\mu a} + \frac{1}{2}\alpha B_a B^a + i\, \bar{c}_a \partial^\mu (D_\mu c)^a . \tag{84}$$

Podemos ainda rearranjar os termos desta lagrangeana fazendo uma integração por partes na ação: $A = \int dx^4 \mathcal{L}$ e desprezando termos da superfície:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu \partial^\mu B - i\, \partial_\mu \bar{c}\, D^\mu c + \frac{1}{2}\alpha B B . \tag{85}$$

Esta lagrangeana também possui invariância por anti-BRST notada por Curci e Ferrari (referência [26]), cujas transformações $\delta_{\bar{B}}$ são encontradas trocando-se os campos fantasmas por anti-fantasmas e vice-versa, ou seja:

$$\lambda\, \delta_{\bar{B}} A_\mu = [\, i\lambda \bar{Q}_B , A_\mu] = \lambda D_\mu \bar{c} \tag{86}$$

$$\lambda\, \delta_B \bar{c} = [\, i\lambda \bar{Q}_B , \bar{c}] = -\lambda \frac{1}{2} \bar{c} \times \bar{c} \tag{87}$$

$$\lambda \delta_{\bar{B}} c = [i \lambda \bar{Q}_B , c] = \lambda i \bar{B} \tag{88}$$

$$\lambda \delta_{\bar{B}} \bar{B} = [i \lambda \bar{Q}_B , \bar{B}] = 0 \tag{89}$$

onde $\bar{Q}_B$ é o gerador de anti-BRST e o campo $\bar{B}$ deve satisfazer a igualdade:

$$B + \bar{B} - i c \times \bar{c} = 0 . \tag{90}$$

Como vimos o procedimento usado aqui nos levou a construção da lagrangeana padrão de Yang-Mills com o gauge fixado e termo de Faddev-Popov. Permitiu-nos também identificar as transformações de BRST e anti-BRST que mantêm esta lagrangeana invariante. O que faremos a seguir é recuperar estes resultados através do formalismo de supercampos, seguindo o tratamento dado por Bonora e Tonin na referência [11].

Trabalharemos num super-espaço de dimensão (4 + 2), com as quatro coordenadas ordinárias do espaço-tempo x_μ ($\mu = 0,1,2,3$) e duas coordenadas grassmannianas θ e $\bar{\theta}$, neste super-espaço introduzimos os supercampos:

$$\phi_\mu(x,\theta,\bar{\theta}) = A_\mu(x) + \theta \bar{R}_\mu(x) + \bar{\theta} R_\mu(x) + i \theta \bar{\theta} S_\mu(x) \tag{91}$$

$$\eta(x,\theta,\bar{\theta}) = c(x) + i \theta \bar{B}(x) + i \bar{\theta} r(x) + i \theta \bar{\theta} s(x) \tag{92}$$

$$\bar{\eta}(x,\theta,\bar{\theta}) = \bar{c}(x) + i \theta \bar{r}(x) + i \bar{\theta} B(x) + i \theta \bar{\theta} \bar{s}(x) \tag{93}$$

onde $\phi_\mu(x,\theta,\bar\theta)$ tem caráter bosônico, $\eta(x,\theta,\bar\theta)$ e $\bar\eta(x,\theta,\bar\theta)$ tem caráter fermiônico. Usando estes super-campos definimos a conexão:

$$\omega = \phi_\mu dx^\mu + \eta\, d\bar\theta + \bar\eta\, d\theta \tag{94}$$

e a curvatura:

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega] = d\omega + \omega\wedge\omega \tag{95}$$

onde $\phi_\mu = \phi_\mu^a \tau^a$, $\eta = \eta^a \tau^a$, $\bar\eta = \bar\eta^a \tau^a$ e d é a derivada exterior no super-campo:

$$d = \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right) dx_\mu + \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right) d\theta + \left(\frac{\partial}{\partial\bar\theta}\right) d\bar\theta \tag{96}$$

Assumimos que a conexão ω é tal que a curvatura é nula na direção θ e $\bar\theta$, ou seja, $\Omega = \phi_{\mu\nu}\, dx^\mu\wedge dx^\nu$. Esta suposição é plausível se lembrarmos que a conexão fornece informações sobre as interações dos campos da teoria. Com esta hipótese obtemos condições sobre as componentes dos super-campos (encontradas no apêndice H):

$$R_\mu(x) = D_\mu c(x) \tag{97}$$

$$\bar R_\mu(x) = D_\mu \bar c(x) \tag{98}$$

$$S_\mu(x) = D_\mu B(x) - i D_\mu c(x) \times \bar c(x) \tag{99}$$

$$r(x) = \frac{1}{2}\, i\, c(x) \times c(x) \tag{100}$$

$$\bar r(x) = \frac{1}{2}\, i\, \bar c(x) \times \bar c(x) \tag{101}$$

$$s(x) = \bar{B}(x) \times c(x) \tag{102}$$

$$\bar{s}(x) = -B(x) \times \bar{c}(x) \tag{103}$$

$$B(x) + \bar{B}(x) - i\, c(x) \times \bar{c}(x) = 0 \tag{104}$$

e a parte da curvatura diferente de zero é:

$$\phi_{\mu\nu} = \frac{1}{2} F(x) + f(x, \theta, \bar{\theta}) \tag{105}$$

As relações de (97) a (104) indicam que os campos independentes são apenas quatro: $A_\mu(x)$, $B(x)$, $c(x)$ e $\bar{c}(x)$.

Visando obter a lagrangeana de Yang-Mills escrevemos a seguinte lagrangeana em termos dos supercampos:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{g^2} \phi_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu} + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} \frac{\partial}{\partial\theta} (\phi_\mu \phi^\mu) - \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial\bar{\eta}}{\partial\bar{\theta}} \frac{\partial\bar{\eta}}{\partial\theta} - \frac{1}{2} \beta \frac{\partial\eta}{\partial\theta} \frac{\partial\eta}{\partial\theta} \tag{106}$$

e definimos a ação no superespaço:

$$A = \int \theta\bar{\theta}\, d\theta\, d\bar{\theta}\, dx^4\, \mathcal{L} \tag{107}$$

Assim somente termos independentes de θ e $\bar{\theta}$ na lagrangeana darão contribuições a teoria e estes termos devido ao fator ($\theta\bar{\theta}$) da ação são invariantes por translações nas variáveis de Grassmann. Vamos então determiná-los, escrevendo $\mathcal{L}$ (196) em componentes:

$$\phi_\mu \phi^{\mu\nu}\Big|_{\substack{\text{independente}\\ \text{de } \theta \text{ e } \bar\theta}} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{108}$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\,\phi_\mu \phi^\mu\Big|_{\substack{\text{independente}\\ \text{de } \theta \text{ e } \bar\theta}} = -A_\mu \partial^\mu B - i\,\partial_\mu \bar c\, D^\mu c \tag{109}$$

$$\frac{\partial\bar\eta}{\partial\bar\theta}\frac{\partial\bar\eta}{\partial\bar\theta}\Big|_{\substack{\text{independente}\\ \text{de } \theta \text{ e } \bar\theta}} = -\bar B^2 \tag{110}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial\theta}\frac{\partial\eta}{\partial\theta}\Big|_{\substack{\text{independente}\\ \text{de } \theta \text{ e } \bar\theta}} = -B^2 \tag{111}$$

das expressões acima apenas (109) não é imediata e é desenvolvida no final do apêndice H, portanto a lagrangeana (106) assume forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu \partial^\mu B - i\,\partial_\mu \bar c\, D^\mu c + \frac{\alpha}{2} B B + \frac{\beta}{2} \bar B \bar B \tag{112}$$

que é idêntica a lagrangeana de Yang-Mills (85) exceto pelo termo proporcional a β , mas em geral usamos $\beta = 0$.

As translações nas variáveis θ e $\bar\theta$ deixam (107) invariante e estão relacionadas (como veremos a seguir) com transformações de anti-BRST e BRST, respectivamente. Façamos então uma translação em $\bar\theta$: $\bar\theta \to \bar\theta + \bar\lambda$. Esta transformação no supercampo $\phi_\mu(x,\theta,\bar\theta)$ resulta em:

$$\phi_\mu(x,\theta,\bar\theta+\bar\lambda) = A_\mu + \bar\lambda R_\mu + \theta[R_\mu + i\,\bar\lambda S_\mu] + \bar\theta R_\mu + i\theta\bar\theta S_\mu \tag{113}$$

aplicada a $\eta(x,\theta,\bar\theta)$:

$$\eta(x,\theta,\bar\theta+\bar\lambda) = c + i\bar\lambda r + i\theta(\bar B + \bar\lambda s) + i\bar\theta r + i\theta\bar\theta s \tag{114}$$

e em $\bar{\eta}(x,\theta,\bar{\theta})$:

$$\bar{\eta}(x,\theta,\bar{\theta}+\bar{\lambda}) = \bar{c} + i\,\bar{\lambda}\mathcal{B} + i\,\theta(\bar{r}+\bar{\lambda}\bar{s}) + i\bar{\theta}\mathcal{B} + i\,\theta\bar{\theta}\bar{s} \qquad (115)$$

Comparando as expressões acima com (91), (92) e (93) observamos como a translação em $\bar{\theta}$ afeta cada componente do supercampo. Assim os campos de interesse (aqueles que são independentes) se transformam:

$$\delta A_\mu(x) = \bar{\lambda} R_\mu(x) = \bar{\lambda}\, D_\mu c(x) \qquad (116)$$

$$\delta \mathcal{B}(x) = 0 \qquad (117)$$

$$\delta c(x) = i\,\bar{\lambda}\,\bar{r}(x) = -\frac{1}{2}\,\bar{\lambda}\, c(x) \times c(x) \qquad (118)$$

$$\delta \bar{c}(x) = i\,\bar{\lambda}\,\mathcal{B}(x)\,. \qquad (119)$$

As transformações dos outros campos são recuperados usando as quatro expressões acima em adição com as condições dadas de (97) a (104); convém não esquecer que elas também podem ser obtidas diretamente de (113), (114) e (115).

Agora vejamos qual efeito da translação em θ: $\theta \to \theta + \lambda$ nos supercampos:

$$\phi_\mu(x,\theta+\lambda,\bar{\theta}) = A_\mu + \lambda\bar{R}_\mu + \theta R_\mu + \bar{\theta}(R_\mu - i\lambda S_\mu) + i\,\theta\bar{\theta}\, S_\mu \qquad (120)$$

$$\eta(x,\theta+\lambda,\bar{\theta}) = c + i\,\lambda\bar{\mathcal{B}} + i\,\theta\bar{\mathcal{B}} + i\,\theta(r-\lambda s) + i\,\theta\bar{\theta}\, s \qquad (121)$$

$$\bar{\eta}(x,\theta+\lambda,\bar{\theta}) = \bar{c} + i\,\lambda\bar{r} + i\,\theta\bar{r} + i\bar{\theta}(\mathcal{B}-\lambda\bar{s}) + i\,\theta\bar{\theta}\,\bar{s} \qquad (122)$$

Da mesma forma feita para translação de $\bar{\theta}$, vamos comparar as expressões acima com (91), (92) e (93) e obter como cada campo independente é afetado:

$$\delta A_\mu(x) = \lambda \bar{R}_\mu(x) = \lambda D_\mu \bar{c}(x) \tag{123}$$

$$\delta \bar{B}(x) = 0 \tag{124}$$

$$\delta \bar{c}(x) = i\lambda \bar{\pi}(x) = -\frac{1}{2}\, \bar{c}(x) \times \bar{c}(x) \tag{125}$$

$$\delta c(x) = i\lambda \bar{B}(x) \tag{126}$$

aqui preferimos considerar $\bar{B}(x)$ como campo independente ao invés de $B(x)$ - esta escolha é possível devido a relação (104). Para obtermos as transformações dos outros campos basta usar as relações acima e as dadas de (97) a (104).

Analisando os resultados obtidos neste tratamento com supercampos recuperamos a lagrangeana de Yang-Mills com fixação de gauge e fantasmas (112); também obtivemos as transformações de BRST que são reproduzidas (relações 116 a 119) através da translação na variável $\bar{\theta}$ e as transformações de anti-BRST que surgem como translação na variável θ (relações 123 a 126). Dentro desta visão há uma super-álgebra básica responsável pelas simetrias de BRST e anti-BRST e os geradores de BRST Q_B e anti-BRST $\bar{Q}_B$ podem ser realizados como geradores de translação nas variáveis de Grassmann do superespaço:

$$i\, Q_B = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \tag{127}$$

$$i\,\bar{Q}_B = \frac{\partial}{\partial\theta} \tag{128}$$

Trabalhamos aqui com translações nas variáveis θ e $\bar{\theta}$ (a ação 107 é invariante por tais transforamções); por questão de completeza apresentamos no apêndice I um breve estudo das rotações neste super-espaço[13].

III.2. PARTÍCULA RELATIVISTA NUM ESPAÇO CURVO-SEM SPIN

Com base no trabalho de A. Neveu e P. West [14], vamos estudar o sistema clássico de uma partícula sem spin movendo-se em uma linha de universo curva, usando a simetria de BRST quantizaremos este sistema e analisaremos a simetria da lagrangeana final (158).

A lagrangeana clássica[15]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\dot{x}^{\mu}\dot{x}_{\mu}\frac{1}{\alpha_0} - m^2\alpha_0 \tag{129}$$

onde $x^{\mu}(\tau)$ é a posição e $\alpha_0(\tau)$ é a métrica interna do caminho percorrido, descreve o movimento de uma partícula relativística livre de massa m numa linha de universo curvo, pois reproduz resultados esperados, por exemplo, tomando $\alpha_0(\tau)$ constante obtemos das equações de movimento que $\ddot{x}^{\mu}(\tau) = 0$. Esta lagrangeana é invariante por reparametrização em τ, ou seja, é invariante pela transformação (desenvolvida no apêndice J):

$$\delta x^{\mu} = \varepsilon\frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \varepsilon\cdot\dot{x}^{\mu} \tag{130}$$

$$\delta\alpha_0 = \frac{d}{d\tau}\,(\varepsilon\alpha_0) \tag{131}$$

Por questão de conveniência vamos redefinir a métrica interna:

$$\alpha_0(\tau) = e^{w(\tau)} \tag{132}$$

Assim a lagrangeana (129) é escrita:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\,\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu e^{-w} - m^2 e^{w} \tag{133}$$

Desta lagrangeana determinamos os momentos canonicamente conjugados a $x_\mu(\tau)$ e $w(\tau)$:

$$p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{1}{2}\,\dot{x}_\mu e^{-w} \tag{134}$$

$$\pi_w = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{w}} = 0 \tag{135}$$

esta última expressão nos fornece um vínculo:

$$\phi_1 : \pi_w = 0 \tag{136}$$

Para determinar vínculos secundários (apêndice L) precisamos do hamiltoniano: $H_T = H_0 + \lambda_1 \phi_1$, sendo que com $H_0 = \dot{x}^\mu p_\mu - \mathcal{L} = 2p^2 e^{w} - p^2 e^{w} + m^2 e^{w} = e^{w}(p^2+m^2)$ obtemos:

$$H_T = e^{w}\,(p^2+m^2) + \lambda_1 \pi_w \tag{137}$$

Assim:

$$\dot{\phi}_1 = \{\phi_1, H_T\}_{PP} = -e^{\omega}(p^2+m^2) \tag{138}$$

portanto há um vínculo secundário:

$$\phi_2 : \; e^{\omega}(p^2+m^2) = 0. \tag{139}$$

Não existem outros vínculos, pois agora temos:

$$\dot{\phi}_1 = \{\phi_1, H_T\}_{PP} \approx 0 \tag{140}$$

$$\dot{\phi}_2 = \{\phi_2, H_T\}_{PP} \approx 0 \; . \tag{141}$$

Estes vínculos são de primeira classe:

$$\{\phi_1, \phi_1\}_{PP} = 0 \tag{142}$$

$$\{\phi_2, \phi_2\}_{PP} = 0 \tag{143}$$

$$\{\phi_1, \phi_2\}_{PP} = -\phi_2 \approx 0 \tag{144}$$

onde: "≈ 0" significa que o vínculo é imposto após o cálculo dos parênteses de Poisson.

O vínculo ϕ_1 quando introduzido na teoria quebra a simetria por reparametrização (fixa o gauge). Vamos então introduzir campos fantasmas usando a simetria BRST, visando quantizar este sistema. O método usado é basicamente o dado na referência [19] e indicado no final do apêndice L ,

acrescido de alguns detalhes.

O gerador de BRST é obtido através dos vínculos ϕ_1 e ϕ_2 multiplicados por campos fantasmas:

$$Q_0 = c\, e^{w}(p^2 + m^2) + e^{w}\, \pi_{\bar{c}}\, \pi_w \tag{145}$$

c é o campo fantasma e $\pi_{\bar{c}}$ é o momento canonicamente conjugado ao anti-fantasma $\bar{c}$ que é colocado para que os dois termos do gerador tenham mesmo número de fantasmas (+1), o fator e^{w} no segundo termo de Q_0 é colocado porque não altera significamente o vínculo ϕ_1 que pode ser substituido por $e^{w}\pi_w = 0$. No entanto os parênteses de Poisson: $\{Q_0, Q_0\}_{PP}$ são diferentes de zero, isto corresponde a que o gerador não é nilpotente. Adicionamos então a Q_0 um termo extra:

$$Q = Q_0 - e^{w}\, c\, \pi_c\, \pi_{\bar{c}} =$$

$$= e^{w}\, c\, (p^2 + m^2 - \pi_c\, \pi_{\bar{c}}) + e^{w}\, \pi_{\bar{c}}\, \pi_w \tag{146}$$

e obtemos assim que:

$$\{Q, Q\}_{PP} = 0 \tag{147}$$

Procuramos um hamiltoniano invariante por BRST e encontramos:

$$\mathcal{H} = e^{w}(p^2 + m^2 - \pi_c\, \pi_{\bar{c}}) \tag{148}$$

que possui esta propriedade*:

$$\delta \mathcal{H} = \{\lambda Q, \mathcal{H}\}_{PP} = 0 \tag{149}$$

Para quantizar este sistema fazemos: $\{\ ,\ \}_{PP} \rightarrow [\ ,\ ]_{\pm}$, ou seja, substituimos os parênteses de Poisson por relações de comutação (variáveis bosônicas) ou de anticomutação (variáveis fermiônicas). As variáveis resultantes podem ser representadas pelos seguintes operadores:

$$x^\mu \rightarrow \hat{x}^\mu\ ,\quad p^\mu \rightarrow -i\frac{\partial}{\partial x_\mu}\ ,\quad w \rightarrow \hat{w}\ ,\quad \Pi_w \rightarrow -i\frac{\partial}{\partial w},$$

$$c \rightarrow \hat{c}\ ,\quad \Pi_c \rightarrow -i\frac{\partial}{\partial c}\ ,\quad \bar{c} \rightarrow \hat{\bar{c}}\ ,\quad \Pi_{\bar{c}} \rightarrow -i\frac{\partial}{\partial \bar{c}}.$$

Trabalharemos agora com estes operadores, embora sem usar o símbolo "^".

O hamiltoniano (148) em termos dos operadores quânticos é:

$$\mathcal{H} = e^w\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2 + \frac{\partial}{\partial c}\frac{\partial}{\partial \bar{c}}\right] \tag{150}$$

Procuramos, usando este hamiltoniano, escrever uma ação que nos leve a equação de Schrödinger. Definimos então:

$$A = \int dz\, d\tau\, \chi^*(z,\tau)\left\{i\frac{\partial}{\partial \tau} - \mathcal{H}\right\}\chi(z,\tau) \tag{151}$$

---

*O gerador Q (146) e o hamiltoniano (148) são compatíveis com as expressões gerais dadas no apêndice L, onde $\eta^1 = \Pi_{\bar{c}}$, $\eta^2 = c$, $\rho^1 = \bar{c}$ e $\rho^2 = \Pi_c$, os vínculos são $\Delta_1 = e^w \Pi_w$ e $\Delta_2 = e^w(p^2 + m^2)$ e a função arbitrária ψ igual a zero.

onde $z=(x^\mu, w, \bar{c}, c)$ e τ é o tempo próprio da partícula. Esta ação produz através do método variacional o resultado esperado.

Vamos introduzir a variável $\alpha = e^{-w}$:

$$dz = dx\, d\bar{c}\, dc\, dw = -\frac{1}{\alpha}\, dx\, d\bar{c}\, dc\, d\alpha \tag{152}$$

e usar a transformada de Fourier das funções $\chi(z,\tau)$:

$$\chi(\alpha) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dy^-\, e^{i\alpha y^-}\, \tilde{\chi}(y^-) \tag{153}$$

Segundo Neveu e West[14] podemos interpretar a coordenada α como sendo o resíduo do comprimento da corda para partícula pontual e y^- o seu momento canonicamente conjugado. Assim a ação (151) fica (ver apêndice J):

$$A = -\frac{1}{4\pi^2}\int dx\, d\bar{c}\, dc\, d\tau\, dy^-\, \tilde{\chi}^*\left\{\eta^{\hat{\mu}\hat{\nu}}\frac{\partial}{\partial y^{\hat{\mu}}}\frac{\partial}{\partial y^{\hat{\nu}}} - m^2 - \frac{\partial}{\partial c}\frac{\partial}{\partial \bar{c}}\right\}\tilde{\chi} \tag{154}$$

onde: $\hat{\mu}$ e $\hat{\nu}$ possuem valores entre 0 e $D+1$:

$$\eta^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \hat{\mu}\neq\hat{\nu} \\ 1 & \text{se } \hat{\mu}=\hat{\nu}\neq D+1 \\ -1 & \text{se } \hat{\mu}=\hat{\nu}=D+1 \end{cases} \quad , \quad y^{\hat{\mu}} = \begin{cases} x^{\hat{\mu}} & \text{se } 0\leq\hat{\mu}\leq D-1 \\ -\frac{1}{2}y^- + \frac{1}{2}\tau & \text{se } \hat{\mu}=D \\ +\frac{1}{2}\tau - \frac{1}{2}y^- & \text{se } \hat{\mu}=D+1 \end{cases}$$

Expandindo a função $\tilde{\chi}(x^\mu, \bar{c}, c, y^-)$ em termos dos fantasmas:

$$\tilde{\chi} = \varphi + c\,\Psi + \bar{c}\,\bar{\Psi} + c\bar{c}\,W \tag{155}$$

e integrando em dc e $d\bar{c}$ chegamos a:

$$A = -\frac{1}{4\pi^2}\int dx\, d\tau\, dy^- \Big\{ \varphi(-\Delta+m^2)W - \psi(-\Delta+m^2)\bar{\psi} +$$

$$+ \bar{\psi}(-\Delta+m^2)\psi + W(-\Delta+m^2)\varphi - W^2 \Big\} \tag{156}$$

onde $\Delta = \eta^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \frac{d}{dy^{\hat{\mu}}}\frac{d}{dy^{\hat{\nu}}}$. Finalmente fazendo uma integração por partes e desprezando termos de superfície a ação é escrita na forma:

$$A = -\frac{1}{4\pi^2}\int dx\, d\tau\, dy^- \Big\{ 2W(-\Delta+m^2)\varphi + 2\bar{\psi}(-\Delta+m^2)\psi - W^2 \Big\} \tag{157}$$

que nos permite definir a lagrangeana do nosso sistema:

$$\mathcal{L}_R = W(-\Delta+m^2)\varphi + \bar{\psi}(-\Delta+m^2)\psi - \frac{W^2}{2} \tag{158}$$

Esta lagrangeana é a mesma obtida por G. Parisi e N. Sourlas na referência [20] onde foi notado que $\mathcal{L}_R$ é invariante pela transformação supersimétrica global:

$$\delta\varphi = -\bar{a}\,\varepsilon_{\hat{\mu}} x^{\hat{\mu}}\psi \tag{159}$$

$$\delta W = 2\bar{a}\,\varepsilon_{\hat{\mu}} \partial^{\hat{\mu}}\psi \tag{160}$$

$$\delta\psi = 0 \tag{161}$$

$$\delta\bar{\psi} = \bar{a}\left(\varepsilon_{\hat{\mu}} x^{\hat{\mu}} W + 2\,\varepsilon_{\hat{\mu}}\partial^{\hat{\mu}}\varphi\right) \tag{162}$$

onde $\bar{a}$ é um número anticomutante infinitesimal e $\varepsilon_{\hat{\mu}}$ um vetor

constante. Podemos verificar esta invariância calculando a variação da lagrangeana:

$$\delta \mathcal{L}_R = \delta W(-\Delta+m^2)\varphi + W(-\Delta+m^2)\delta\varphi + \delta\bar{\psi}(-\Delta+m^2)\psi +$$

$$+ \bar{\psi}(-\Delta+m^2)\delta\psi - W\delta W =$$

$$= 2\bar{a}\,\varepsilon_{\hat{\mu}}\partial^{\hat{\mu}}\psi(-\Delta+m^2)\varphi + W(-\Delta+m^2)(-a\,\varepsilon_{\hat{\mu}}x^{\hat{\mu}}\psi) +$$

$$+ \bar{a}\,(\varepsilon_{\hat{\mu}}x^{\hat{\mu}}W + 2\,\varepsilon_{\hat{\mu}}\partial^{\hat{\mu}}\varphi)(-\Delta+m^2)\psi - W\,2\,\bar{a}\,\varepsilon_{\hat{\mu}}\partial^{\hat{\mu}}\psi =$$

$$= -2\bar{a}\,\varepsilon_{\hat{\mu}}(\partial^{\hat{\mu}}\psi)\Delta\varphi - \bar{a}\,2\,\varepsilon_{\hat{\mu}}(\partial^{\hat{\mu}}\varphi)\Delta\psi + 2\bar{a}\,\varepsilon_{\hat{\mu}}(\partial^{\hat{\mu}}\psi)m^2\varphi + 2\bar{a}\,\varepsilon_{\hat{\mu}}(\partial^{\hat{\mu}}\varphi)m^2\psi +$$

$$+ \bar{a}\,\varepsilon_{\hat{\mu}}x^{\hat{\mu}}Wm^2\psi - Wm^2\bar{a}\,\varepsilon_{\hat{\mu}}x^{\hat{\mu}}\psi + W\bar{a}\,\varepsilon_{\hat{\mu}}\Delta x^{\hat{\mu}}\psi - \bar{a}\,\varepsilon_{\hat{\mu}}x^{\hat{\mu}}W\Delta\psi - 2\bar{a}\,\varepsilon_{\hat{\mu}}(\partial^{\hat{\mu}}\psi)W \tag{163}$$

Nesta última expressão percebemos que os três últimos termos se cancelam e os dois primeiros diferem entre si por um termo de superfície que pode ser feito igual a zero pelas condições de contorno. Consequentemente obtemos:

$$\delta \mathcal{L}_R = 2\bar{a}\,m^2\,\varepsilon_{\hat{\mu}}\partial^{\hat{\mu}}(\psi\varphi) \tag{164}$$

que é uma divergência total, confirmando a invariância predita.

III.3. PARTÍCULA RELATIVISTA COM SPIN

Tratamos aqui do sistema composto de uma partícula com spin, implementamos BRST e construimos o funcional gerador através da prescrição dada no apêndice L.

A ação que nos interessa pode ser construída a partir da lagrangeana livre:

$$\mathcal{L} = p^{\mu}\dot{x}_{\mu} + \frac{i}{2}\left(\dot{\theta}^{\mu}\theta_{\mu} + \dot{\theta}_5\theta_5\right) \tag{165}$$

de onde obtemos os momentos conjugados:

$$\pi_{\theta_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}^{\mu}} = \frac{i}{2}\theta_{\mu} \tag{166}$$

$$\pi_{\theta_5} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_5} = \frac{i}{2}\theta_5 \tag{167}$$

Das expressões acima estabelecemos os vínculos:

$$\chi_{\mu} = \pi_{\theta^{\mu}} - \frac{i}{2}\theta_{\mu} = 0 \tag{168}$$

$$\chi_5 = \pi_{\theta_5} - \frac{i}{2}\theta_5 = 0 \tag{169}$$

que são de segunda classe:

$$\{\chi_i, \chi_j\}_{PP} = i\,\delta_{ij} \tag{170}$$

Não aparecem vínculos secundários aqui, pois a condição de consistência:

$$\{\chi_i, H_T\}_{PP} \approx 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, 5) \tag{171}$$

com $H_T = H_0 + \lambda_i\chi_i$ nos leva à nulidade dos multiplicados de Lagrange λ_i. Seguindo o tratamento de Dirac[21], in

troduzimos novos parênteses de Poisson (parênteses de Dirac) baseado nos vínculos de segunda classe χ_i. Eliminamos assim as variáveis π_{θ_μ} e π_{θ_5} da teoria e introduzimos as relações (definidas no apêndice L):

$$\{\theta^\mu, \theta^\nu\}^* = i\eta^{\mu\nu} \tag{172}$$

$$\{\theta_5, \theta_5\}^* = i \tag{173}$$

$$\{x^\mu, p^\nu\}^* = \eta^{\mu\nu} \tag{174}$$

Para tratar corretamente a nível clássico a partícula relativista com spin, inclusive entender o número correto de graus de liberdade fermiônicos, vamos nos basear nas suas conhecidas equações quânticas. Usaremos então a equação de Dirac:

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi = 0 \tag{175}$$

que implica na equação de Klein-Gordon:

$$(-\Box^2 + m^2)\psi = 0 \tag{176}$$

onde γ^μ são as matrizes de Dirac, $\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ e ψ são as funções de onda da partícula com spin. Intoduzimos nas expressões acima os operadores:

$$\hat{\theta}^\mu = \frac{i}{\sqrt{2}}\ \gamma_5\gamma^\mu \tag{177}$$

$$\hat{\theta}_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \gamma_5 \tag{178}$$

$$\hat{p}_\mu = -i\frac{d}{dx^\mu} \tag{179}$$

obtemos assim:

$$(\hat{\theta}^\mu \hat{p}_\mu + m\,\hat{\theta}_5)\,\psi = 0 \tag{180}$$

$$(\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu + m^2)\,\psi = 0, \tag{181}$$

estes operadores obedecem as seguintes relações:

$$[\hat{\theta}^\mu, \hat{\theta}^\nu]_+ = -\eta^{\mu\nu} \tag{182}$$

$$[\hat{\theta}_5, \hat{\theta}_5]_+ = -1 \tag{183}$$

$$[\hat{x}^\mu, \hat{p}_\nu] = i\,\delta^\mu{}_\nu \tag{184}$$

Em termos clássicos formulamos a teoria com variáveis clássicas bosônicas x^μ e p^μ e fermiônicas reais θ^μ e θ_5 que satisfazem relações envolvendo os parênteses de Dirac:

$$\{\theta^\mu, \theta^\nu\}^* = i\,\eta^{\mu\nu} \tag{185}$$

$$\{\theta_5, \theta_5\}^* = i \tag{186}$$

$$\{x^\mu, p^\mu\}^* = \eta^{\mu\nu} \tag{187}$$

definimos também vínculos clássicos decorrentes de (180) e (181):

$$\tau_1 = \theta^\mu p_\mu + m\,\theta_5 = 0 \tag{188}$$

$$\tau_2 = p^2 + m^2 = 0 \tag{189}$$

Estes vínculos são de primeira classe:

$$\{\tau_1, \tau_1\}^* = i\,\tau_2 \tag{190}$$

$$\{\tau_2, \tau_2\}^* = 0 \tag{191}$$

$$\{\tau_1, \tau_2\}^* = 0 \tag{192}$$

e podem ser introduzidos com multiplicadores de Lagrange apropriados na lagrangeana (165):

$$A_0 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\dot{x}^\mu p_\mu + \frac{i}{2}(\dot{\theta}^\mu \theta_\mu + \dot{\theta}_5 \theta_5) - N(p^2+m^2) - iM(p^\mu \theta_\mu + m\theta_5) \right] +$$

$$+ \frac{i}{2}\left[\theta^\mu(\tau_1)\,\theta_\mu(\tau_2) - \theta_5(\tau_1)\,\theta_5(\tau_2) \right] \tag{193}$$

onde temos cinco coordenadas anticomutantes reais, variáveis de Grassmann θ_μ e θ_5, além das quatro coordenadas comutantes ordinárias x^μ temos também dois multiplicadores de Lagrange: M de caráter fermiônico e N bosônico. O termo de superfície é necessário para que possamos colocar condições de contorno adequadas; não podemos fixar as variáveis grassmannianas nos extremos τ_1 e τ_2, pois são duas condições de contorno para uma mesma equação diferencial de primeira ordem (equação de movimento de θ^μ e θ_5). Podemos

escrever o spin em termos destas variáveis de Grassmann e obter suas propriedades importantes, como por exemplo, a sua lei de conservação para partícula livre, invariância por translação e observância a álgebra do grupo de Lorentz. Esta lagrangeana é estudada por Galvão e Teitelboim[18].

Percebemos que o vínculo $\mathcal{G}_1$ é gerador de uma supersimetria global:

$$\delta_s x^\mu = \{x^\mu, i\lambda \mathcal{G}_1\}^* = \lambda \theta^\mu \tag{194}$$

$$\delta_s \theta^\mu = \{\theta^\mu, i\lambda \mathcal{G}_1\}^* = \lambda p^\mu \tag{195}$$

$$\delta_s \theta_5 = \{\theta_5, i\lambda \mathcal{G}_1\}^* = \lambda m \tag{196}$$

Voltando a ação (193) e considerando os multiplicadores de Lagrange M e N como variáveis dinâmicas. Obtemos mais dois vínculos de primeira classe relacionados com seus momentos canonicamente conjugados:

$$\mathcal{G}_3 : \pi_M = 0 \tag{197}$$

$$\mathcal{G}_4 : \pi_N = 0 \tag{198}$$

estes vínculos não geram vínculos secundários e obtemos agora a relação:

$$\{\mathcal{G}_r, \mathcal{G}_s\}^* = \mathcal{G}_t U^t_{rs} \tag{199}$$

onde U^t_{rs} é igual a i se $t=2$ e $r=s=1$ e zero caso con

trário.

Seguindo o método descrito no apêndice L construimos o gerador de BRST:

$$Q_0 = c(p^2+m^2) + a(\theta^\mu p_\mu + m\theta_5) - \frac{i}{2}\pi_c a^2 + \pi_{\bar{c}}\pi_N + \pi_{\bar{a}}\pi_M \tag{200}$$

onde temos um fantasma bosônico a e um fermiônico c, dois anti-fantasmas: $\bar{a}$ (bosônico) e $\bar{c}$ (fermiônico) e seus momentos canonicamente conjugados:

$$\{c, \pi_c\}^* = 1 \tag{201}$$

$$\{\bar{c}, \pi_{\bar{c}}\}^* = 1 \tag{202}$$

$$\{a, \pi_a\}^* = 1 \tag{203}$$

$$\{\bar{a}, \pi_{\bar{a}}\}^* = 1 . \tag{204}$$

O aparecimento de fantasmas bosônicos é resultado de termos vínculos de caráter fermiônico na teoria. π_M e π_N obedecem as relações:

$$\{M, \pi_M\}^* = 1 \tag{205}$$

$$\{N, \pi_N\}^* = 1 . \tag{206}$$

Introduzindo a função:

$$\Psi = -N\pi_c + iM\pi_a \tag{207}$$

determinamos o hamiltoniano:

$$\mathcal{H}_0 = -\{\Psi, Q_0\}^* = N(p^2+m^2) + iM(\theta^\mu p_\mu + m\theta_5) + \pi_c\pi_{\bar{c}} - i\pi_a\pi_{\bar{a}} + M\pi_{\bar{c}}a \quad (208)$$

Este hamiltoniano pode ser escrito numa forma mais conveniente através da mudança de escala: $\bar{c} \to \frac{1}{N}\bar{c}$ e $\bar{a} \to \frac{1}{N}\bar{a}$; para manter as relações canônicas: $\pi_{\bar{c}} \to N\pi_{\bar{c}}$ e $\pi_{\bar{a}} \to N\pi_{\bar{a}}$. Com esta transformação o gerador (200) é reescrito:

$$Q = c(p^2+m^2) + a(\theta^\mu p_\mu + m\theta_5) - \frac{i}{2}\pi_c a^2 + N\pi_{\bar{c}}\pi_N + N\pi_{\bar{a}}\pi_M + M\pi_{\bar{c}}\pi_M \quad (209)$$

onde o último termo é acrescentado para que a relação: $\{Q,Q\}^* = 0$ seja satisfeita. E obtemos o hamiltoniano:

$$\mathcal{H} = N(p^2+m^2+\pi_c\pi_{\bar{c}} - i\pi_a\pi_{\bar{a}}) + iM(\theta^\mu p_\mu + m\theta_5 - ia\pi_c - \pi_{\bar{c}}\pi_a) \quad (210)$$

a invariância por BRST está assegurada:

$$\{Q, \mathcal{H}\}^* = 0 \quad (211)$$

Este hamiltoniano também é invariante pelas transformações supersimétricas (194), (195) e (196) quando trabalhamos na concha de massa $(\mathcal{G}_2 = 0)$:

$$\{\mathcal{G}_1, \mathcal{H}\}^* = 0 \quad (212)$$

Podemos então escrever a ação para o nosso sistema, incluindo fantasmas:

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left\{ \dot{x}^\mu p_\mu + \frac{i}{2}\left(\dot{\theta}^\mu \theta_\mu + \dot{\theta}_5 \theta_5\right) + \dot{N}\pi_N - \dot{M}\pi_M - \dot{c}\pi_c - \dot{\bar{c}}\pi_{\bar{c}} + \right.$$

$$\left. + \dot{a}\pi_a + \dot{\bar{a}}\pi_{\bar{a}} - N\left(p^2 + m^2 + \pi_c\pi_{\bar{c}} - i\pi_a\pi_{\bar{a}}\right) - iM\left(\theta^\mu p_\mu + m\theta_5 - i\pi_c a - \pi_{\bar{c}}\pi_a\right)\right\} +$$

$$+ \frac{i}{2}\left[\theta^\mu(\tau_1)\,\theta_\mu(\tau_2) - \theta_5(\tau_1)\,\theta_5(\tau_2)\right] \tag{213}$$

e com ela determinamos o funcional gerador:

$$K = \int \left[\mathcal{D}x\, \mathcal{D}p\, \mathcal{D}\theta_\mu\, \mathcal{D}\theta_5\, \mathcal{D}N\, \mathcal{D}\pi_N\, \mathcal{D}M\, \mathcal{D}\pi_M\, \mathcal{D}c\, \mathcal{D}\pi_c\, \mathcal{D}\bar{c}\, \mathcal{D}\pi_{\bar{c}}\, \mathcal{D}a\right.$$

$$\left. \mathcal{D}\pi_a\, \mathcal{D}\bar{a}\, \mathcal{D}\pi_{\bar{a}}\right] e^{iA} \tag{214}$$

Nesta expressão a integração em $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}\pi_N$ nos fornece $\delta(\dot{N})$, cu seja, N é constante no tempo τ e a integração funcional em $\int_0^\infty \mathcal{D}N$ nos fornece um termo proporcional a $\frac{1}{p^2+m^2+\pi_c\pi_{\bar{c}} - i\pi_a\pi_{\bar{a}}}$. Por sua vez, a integração sob o outro multiplicador de Lagrange M e seu momento π_M, que tem caráter fermiônico, resulta num termo proporcional a $(\theta^\mu p_\mu + m\theta_5 - i\pi_c a - \pi_{\bar{c}}\pi_a)$. Obtemos também que:

$$\int \mathcal{D}p\, \mathcal{D}x\, e^{i\int_{\tau_1}^{\tau_2} \dot{x}_\mu p^\mu d\tau} = \int \mathcal{D}p\, \mathcal{D}x\, e^{i\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[\frac{d}{d\tau}(x^\mu p_\mu) - x^\mu \dot{p}_\mu\right] d\tau} =$$

$$= \int \mathcal{D}p\, e^{i\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[\frac{d}{d\tau}(x^\mu p_\mu)\right] d\tau}\, \delta(\dot{p}) = \int \mathcal{D}p\, e^{ip_\mu\left[x^\mu(\tau_1) - x^\mu(\tau_2)\right]},$$

um resultado análogo é obtido integrando nos fantasmas $c, \bar{c}$ e $\bar{a}$. Finalmente, colocamos o funcional gerador(215)

na forma:

$$K = \int \mathcal{D}p^\mu \mathcal{D}\theta^\mu \mathcal{D}\theta \mathcal{D}\pi_c \mathcal{D}\pi_{\bar{c}} \mathcal{D}a \mathcal{D}\pi_a \mathcal{D}\pi_{\bar{a}} \frac{\theta^\mu p_\mu + m\theta_5 - i\pi_c a - \pi_{\bar{c}}\pi_a}{p^2 + m^2 + \pi_c\pi_{\bar{c}} - i\pi_a\pi_{\bar{a}}}$$

$$e^{ip_\mu[x^\mu(\tau_1) - x^\mu(\tau_2)] - i[c(\tau_1) - c(\tau_2)]\pi_c - i[\bar{c}(\tau_1) - \bar{c}(\tau_2)]\pi_{\bar{c}} + [\bar{a}(\tau_1) - \bar{a}(\tau_2)]\pi_{\bar{a}} +}$$

$$e^{i\int_{\tau_1}^{\tau_2}[-\frac{1}{2}(\dot{\theta}^\mu\theta_\mu + \dot{\theta}_5\theta_5) + a\pi_a]d\tau - \frac{1}{2}[\theta^\mu(\tau_1)\theta_\mu(\tau_2) - \theta(\tau_1)\theta(\tau_2)]} \tag{215}$$

Este resultado para o funcional gerador nos permite identificar parcialmente o propagador da teoria: $\frac{\theta^\mu p_\mu + m\theta_5 - i\pi_c a - \pi_{\bar{c}}\pi_a}{p^2 + m^2 + \pi_{\bar{c}}\pi_c - i\pi_a\pi_{\bar{a}}}$. H. Aratyn et al[22] chegaram também a este resultado de forma mais completa, fazendo inclusive a integração no campo a que deixamos indicada.

Uma continuação natural deste trabalho é determinar a simetria do hamiltoniano (211). O termo proporcional a N possui uma simetria tipo Parisi - Sourlas[20] (discutida no ítem sobre a partícula escalar) estudada por R. Gatto et al na referência [30], mas a determinação da simetria do termo proporcional a M por não nos ser óbvia requer maior atenção.

IV. CONCLUSÃO

Tratamos aqui de alguns problemas específicos onde uma supersimetria ou, melhor dito, uma superálgebra aparece. Na mecânica quântica ordinária (parte II) vimos que há potenciais que embora diferentes podem ser relacionados entre si por supersimetria. Em teoria de campos identificamos, com o uso do formalismo de supercampos, uma super-álgebra reponsável pela invariância BRST(ítem III.1); também estudamos dois sistemas isolados: a partícula relativista sem spin (III.2) onde chegamos a uma lagrangeana invariante por uma supersimetria e a partícula relativista com spin (III.3) cujo hamiltoniano final também possuia invariância por uma supersimetria quando tratado na concha de massa. Estes resultados nos permitem concluir que embora as evidências experimentais até agora nos levem a descartar a existência de partículas supersimétricas, a supersimetria é um conceito bastante útil podendo ser aplicado em vários contextos diferentes (mesmo dentro de teoria de campos) como os expostos neste trabalho.

Apêndice A

Mecânica Quântica Supersimétrica

Formalmente construimos a mecânica quântica supersimétrica[8] com $N=1$ fazendo a extensão da variável tempo (t) para um novo supertempo que envolve uma variável de Grassmann θ (anticomutante) somada a t.

Sabemos que a energia de uma sistema é conservada se a lagrangeana é invariante por translações temporais, onde o elemento diferencial dt é invariante. De modo análogo podemos definir um elemento de linha diferencial no super-espaço (t, θ) de forma que seja invariante por transformações de supersimetria. Assim $dt - i\theta d\theta$ = invariante é essencialmente a única escolha possível envolvendo duas variáveis de Grassmann (θ e $d\theta$). O imaginário i é colocado para impor que o elemento de linha seja real, lembrando que o complexo conjugado de duas variáveis de Grassmann reais α e β é dado por $(\alpha\beta)^* = \beta\alpha = -\alpha\beta$.

Podemos perceber que sob transformações do tipo:

$$\begin{aligned} \theta &\to \theta' = \theta + \varepsilon \\ t &\to t' = t + i\varepsilon\theta \end{aligned} \tag{A-1}$$

o elemento de linha do super-espaço permanece invariante com ε sendo a variável de Grassmann que parametriza esta transformação de coordenadas supersimétrica.

Agora definimos no super-espaço (t, θ) um supercampo escalar real $\Phi(t, \theta)$ que expandido em série de

Taylor em potências de θ é escrito:

$$\Phi(t,\theta) = q(t) + i\,\theta\,\psi(t) \tag{A-2}$$

convém lembrar que potências maiores de θ não aparecem, pois $\theta^2 = 0$.

Pela expansão acima vemos que o supercampo $\Phi(t,\theta)$ possui uma variável fermiônica $\psi(t)$, além da variável posição bosônica $q(t)$.

Uma transformação de supersimetria (A-1) acarreta numa mudança no supercampo:

$$\delta\Phi = \Phi(t',\theta') - \Phi(t,\theta) =$$

$$= q(t + i\,\varepsilon\theta) + i\,(\theta + \varepsilon)\,\psi(t + i\,\varepsilon\theta) - q(t) - i\,\theta\,\psi(t) =$$

$$= q(t) + i\,\varepsilon\theta\,\dot{q} + i\,\theta\,\psi(t) + i\,\varepsilon\,\psi(t) - q(t) - i\,\theta\,\psi(t) = i\,\varepsilon\,\psi - i\,\theta\,\varepsilon\,\dot{q}\,. \tag{A-3}$$

Fazendo uma correspondência entre a transformação nas supercoordenadas (t , θ) e uma variação nas componentes do supercampo, $q(t)$ e $\psi(t)$: $\delta\Phi = \delta q(t) + i\,\theta\,\delta\psi(t)$, chegamos a:

$$\begin{aligned} \delta q(t) &= i\,\varepsilon\,\psi(t) \\ \delta\psi(t) &= -\varepsilon\,\dot{q}(t) \end{aligned} \tag{A-4}$$

Esta transformação relaciona variáveis bosônicas com fermiônicas e vice-versa.

Reescrevemos (A-3) numa forma mais usual:

$$\delta\Phi = \varepsilon\,Q\,\Phi \tag{A-5}$$

onde Q é o gerador de supersimetria e tem a forma:

$$Q = \frac{\partial}{\partial \theta} - i\,\theta \frac{\partial}{\partial t} \qquad \text{(A-6)}$$

Esta expressão para Q pode ser checada:

$$\delta \Phi = \varepsilon Q \Phi = \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - i\,\theta \frac{\partial}{\partial t} \right) (q + i\,\theta \psi) = -i\,\theta \varepsilon q + i\,\varepsilon \psi = \text{A-3}$$

lembrando que para variáveis de Grassmann: $\frac{\partial}{\partial \theta} 1 = 0$ e $\frac{\partial}{\partial \theta} \theta = 1$.

Quando aplicamos Q ao supercampo $\Phi\ (t, \theta)$ duas vezes obtemos a derivada temporal de $\Phi(t, \theta)$ e ao associarmos o hamiltoniano H à derivada temporal: $H = i \frac{\partial}{\partial t}$, chegamos a relação de anticomutação fundamental: $[Q, Q]_+ = 2H$.

Tudo que fizemos até agora é válido para $N = 1$. No caso de $N = 2$ o super-espaço é formado por duas variáveis de Grassmann independentes (θ_1, θ_2) além do tempo ordinário t. O elemento de linha invariante é: $dt - i\,\theta_1 d\theta_1 - i\,\theta_2 d\theta_2$. Este elemento fica invariante sob a seguinte transformação de coordenadas:

$$\begin{aligned} \theta_1 &\rightarrow \theta_1' = \theta_1 + \varepsilon_1 \\ \theta_2 &\rightarrow \theta_2' = \theta_2 + \varepsilon_2 \\ t &\rightarrow t' = t + i\,\varepsilon_1 \theta_1 + i\,\varepsilon_2 \theta_2 \end{aligned} \qquad \text{(A-7)}$$

Podemos introduzir aqui variáveis complexas:

$$\theta = \sqrt{\frac{1}{2}}\,(\theta_1 - i\,\theta_2) \quad \text{e} \quad \theta^+ = \sqrt{\frac{1}{2}}\,(\theta_1 + i\,\theta_2) \qquad \text{(A-8)}$$

De maneira análoga á feita para $N = 1$, definimos um supercampo escalar real $\Phi(t, \theta, \theta^+)$ e pelo mesmo raciocínio

chegamos a:

$$Q = \frac{\partial}{\partial \theta^+} + i \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{e} \quad Q^+ = \frac{\partial}{\partial \theta} + i \theta^+ \frac{\partial}{\partial t} \tag{A-9}$$

A relação de anticomutação fundamental é:

$$[Q, Q^+]_+ = 2H \tag{A-10}$$

Apêndice B

Equação Radial do Oscilador Harmônico em D dimensões

A equação que descreve o oscilador harmônico quântico é:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+\frac{1}{2}m\omega^2R^2\right]\psi = E_N\psi \qquad \text{(B-1)}$$

onde m é a massa do oscilador, ω sua frequência e E_N os autovalores da energia. Para separar a parte radial vamos escrever a função de onda ψ como o produto de duas funções, uma referente a parte radial e outra a parte angular dada pelos harmônicos esféricos Y_L :

$$\psi(\vec{R}) = \bar{U}_{N,L}(R)\; Y_L(\theta_1,\dots,\theta_{D-1}) \qquad \text{(B-2)}$$

Usando propriedade dos harmônicos esféricos[4]:

$$\nabla^2\bar{U}_{N,L}Y_L = Y_L\left[\frac{d^2}{dR^2}+\frac{D-1}{R}\frac{d}{dR}-\frac{L(L+D-2)}{R^2}\right]\bar{U}_{N,L} \qquad \text{(B-3)}$$

em (B-1) e dividindo o resultado por $-\frac{\hbar\omega}{2}Y_L$ chegamos:

$$\left\{\frac{\hbar}{m\omega}\frac{d^2}{dR^2}+\frac{\hbar}{m\omega}\frac{D-1}{R}\frac{d}{dR}-\frac{\hbar}{m\omega}\frac{L(L+D-2)}{R^2}-\frac{m\omega}{\hbar}R^2+\frac{2E_N}{\hbar\omega}\right\}\bar{U}_{N,L}(R)=0 \qquad \text{(B-4)}$$

Fazendo agora a mudança de variável:

$$X=\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{-\frac{1}{2}}R\,. \qquad \text{(B-5)}$$

As derivadas são expressas em termos da nova variável X :

$$\frac{d}{dR} = \frac{dX}{dR}\frac{d}{dX} = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2}\frac{d}{dX} \tag{B-6}$$

$$\frac{d^2}{dR^2} = \frac{m\omega}{\hbar}\frac{d^2}{dX^2} \, . \tag{B-7}$$

Introduzindo também a notação:

$$E_N = \frac{1}{2}\hbar\omega K \tag{B-8}$$

podemos reescrever (B-4) da seguinte forma:

$$\left\{\frac{d^2}{dX^2} + \frac{D-1}{X}\frac{d}{dX} - \frac{L(L+D-2)}{X^2} - X^2 + K\right\}\bar{U}_{N,L}(X) = 0 \tag{B-9}$$

Vamos retirar da expressão acima a derivada de primeira ordem para conseguir isto redefinimos a função de onda:

$$\bar{U}_{N,L}(X) = X^{-\frac{1}{2}(D-1)}\, U_{N,L}(X) \tag{B-10}$$

assim:

$$\frac{d}{dX}\left[X^{-\frac{1}{2}(D-1)}\, U_{N,L}(X)\right] = -\frac{1}{2}(D-1)\, X^{-\frac{1}{2}(D+1)}\, U_{N,L}(X) + X^{-\frac{1}{2}(D-1)}\frac{d}{dX}U_{N,L}(X) \tag{B-11}$$

$$\frac{d^2}{dX^2}\left[X^{-\frac{1}{2}(D-1)}\, U_{N,L}(X)\right] =$$

$$= -\frac{1}{4}(D^2-1)\, X^{-\frac{1}{2}(D-3)}\, U_{N,L}(X) - (D-1)\, X^{-\frac{1}{2}(D-1)}\frac{d}{dX}U_{N,L}(X) + X^{-\frac{1}{2}(D-1)}\frac{d^2}{dX^2}U_{N,L}(X) \tag{B-12}$$

Fazendo esta substituição em (B-9) e dividindo o resultado por $\left[- X^{\frac{1}{2}(D-1)}\right]$ obtemos:

$$\left\{-\frac{d^2}{dX^2}+\frac{\left[L+\frac{1}{2}(D-1)\right]\left[L+\frac{1}{2}(D-1)-1\right]}{X^2}+X^2-K\right\} U_{N,L}(X)=0 \qquad \text{(B-13)}$$

A solução desta equação é encontrada na referência [5]:

$$U_{N,L}(X)=C(N,L,D)\,X^L\,\exp\left\{-\frac{X^2}{2}\right\}\,L^{(L+\frac{D}{2}-1)}_{\frac{N}{2}-\frac{L}{2}}(X^2), \qquad \text{(B-14)}$$

$L^{(L+\frac{D}{2}-1)}_{\frac{N}{2}-\frac{L}{2}}(X^2)$ são os polinômios associados de Laguerre e $C\,(N,L,D)$ é a constante de normalização; o produto escalar entre funções de onda nos nossos cálculos está subentendido ser:

$$(U_{N,L},U_{N',L})=\int U^{+}_{N,L}(X)\,U_{N',L}(X)\,X^{(D-1)}dX \qquad \text{(B-15)}$$

Também obtemos o espectro de energia:

$$E_N=\frac{\hbar\omega}{2}\,(2N+D) \qquad \text{(B-16)}$$

sendo que $N=2n+L\ (n=0,1,2\ldots)$.

Voltando a escrever em termos de R a equação (B-13) chegamos a equação (1) usada no texto:

$$\left\{-\frac{\hbar}{m\omega}\frac{d^2}{dR^2}+\frac{\hbar}{m\omega}\frac{\left[L+\frac{1}{2}(D-1)\right]\left[L+\frac{1}{2}(D-1)-1\right]}{R^2}+\frac{m\omega}{\hbar}R^2-\frac{2E_N}{\hbar\omega}\right\}U_{N,L}(R)=0 \qquad \text{(B-17)}$$

Apêndice C

Equação radial do problema coulombiano em d dimensões

Partindo da equação de Schrödinger para o potencial de Coulomb:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{r}\right]\psi = E_n\psi \qquad \text{(C-1)}$$

onde: cada carga atrativa tem valor e, a partícula central é considerada com massa infinita e m é a massa da partícula orbitante, E_n são os autovalores da energia. Para chegar a equação radial vamos, a exemplo do que fizemos no apêndice B, decompor a função de onda ψ em uma parte radial e em outra angular dada pelos harmônicos esféricos Y_ℓ :

$$\psi(\vec{r}) = \bar{R}_{n,\ell}(r)\, Y_\ell(\theta_1, \ldots, \theta_{d-1}) \qquad \text{(C-2)}$$

Usando a propriedade dos harmônicos esféricos (igualdade B-3) em (C-1) e dividindo o resultado por $-\frac{\hbar^2}{2m}Y_\ell$ obtemos:

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{d-1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+d-2)}{r^2} + \frac{2me^2}{\hbar^2}\frac{1}{r} + \frac{2mE_n}{\hbar^2}\right\}\bar{R}_{n\ell}(r) = 0 \qquad \text{(C-3)}$$

Fazendo a mudança da variável:

$$x = \frac{2me^2}{\hbar^2 k}\, r \qquad \text{(C-4)}$$

onde k é tirado da igualdade $E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 k^2}$, as derivadas

são escritas em termos da variável x da seguinte forma:

$$\frac{d}{dr} = \frac{dx}{dr}\frac{d}{dx} = \frac{2me^2}{\hbar^2 k}\frac{d}{dx} \tag{C-5}$$

$$\frac{d^2}{dr^2} = \left(\frac{2me^2}{\hbar^2 k}\right)^2 \frac{d^2}{dx^2} \tag{C-6}$$

e (C-3) pode ser escrito:

$$\left\{\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d-1}{x}\frac{d}{dx} - \frac{l(l+d-2)}{x^2} + \frac{k}{x} - \frac{1}{4}\right\} \bar{R}_{n,l}(x) = 0 \tag{C-7}$$

Vamos agora retirar a derivada de primeira ordem da equação acima:

$$\bar{R}_{n,l}(x) = x^{-\frac{1}{2}(d-1)} R_{n,l}(x) \tag{C-8}$$

assim:

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\frac{1}{2}(d-1)} R_{n,l}(x)\right] = -\frac{1}{2}(d-1)\, x^{-\frac{1}{2}(d+1)} R_{n,l}(x) + x^{-\frac{1}{2}(d-1)}\frac{d}{dx}R_{n,l}(x) \tag{C-9}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[x^{-\frac{1}{2}(d-1)} R_{n,l}(x)\right] =$$

$$= -\frac{1}{4}(d^2-1)\, x^{-\frac{1}{2}(d-3)} R_{n,l}(x) - (d-1)\, x^{-\frac{1}{2}(d-1)}\frac{d}{dx}R_{n,l}(x) + x^{-\frac{1}{2}(d-1)}\frac{d^2}{dx^2}R_{n,l}(x) \tag{C-10}$$

fazendo a substituição acima em (C-7) e dividindo o resultado por $x^{-\frac{1}{2}(d-1)}$ obtemos:

$$\left\{\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\left[l+\frac{1}{2}(d-1)\right]\left[l+\frac{1}{2}(d-1)-1\right]}{x^2} + \frac{k}{x} - \frac{1}{4}\right\} R_{n,l}(x) = 0 \tag{C-11}$$

A solução de (C-11) é encontrada na referência [5]:

$$R_{n,\ell}(x) = c(n,\ell,d)\ \exp\left\{-\frac{x}{2}\right\}\ x^{\ell}\ L_{n-\ell-1}^{(2\ell+d-2)}(x) \qquad \text{(C-12)}$$

onde $L_{n-\ell-1}^{(2\ell-d-2)}(x)$ são polinômios associados de Laguerre e $c(n,\ell,d)$ é a constante de normalização; a exemplo do produto dado para o oscilador harmônico o produto escalar entre funções de onda é:

$$(R_{n,\ell}, R_{n',\ell'}) = \int R_{n,\ell}^{+}(x)\, R_{n',\ell'}(x)\, x^{d-1}\, dx \qquad \text{(C-13)}$$

O espectro de energia encontrado aqui é:

$$E_n = -\frac{m e^4}{2\hbar^2}\left[n + \frac{1}{2}(d-3)\right]^{-2} \qquad \text{(C-14)}$$

sendo $n = n_r + \ell + 1$ ($n_r = 0, 1, 2 \ldots$).

Colocando a equação (C-11) em termos da variável r (C-4) chegamos à equação (27) usada no texto:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\left[\ell+\frac{1}{2}(d-1)\right]\left[\ell+\frac{1}{2}(d-1)-1\right]}{r^2} + \frac{2me^2}{\hbar^2}\frac{1}{r}\right\}R_{n,\ell}(r) = E_n R_{n,\ell}(r) \qquad \text{(C-15)}$$

Apêndice D

Interpretação dos operadores a_L e a_L^+ , b_ℓ e b_ℓ^+

Considerando o problema do oscilador harmônico obtivemos no texto as equações (4) e (7):

$$H_L = a_L^+ a_L + \frac{\hbar\omega}{2}(2L+D) \tag{D-1}$$

$$H_{L+1} = a_L a_L^+ + \frac{\hbar\omega}{2}(2L+D-2) \tag{D-2}$$

As equações de autovalores para estes hamiltonianos são:

$$H_L\, U_{2n+L,L}(R) = E_{2n+L,L}\, U_{2n+L,L}(R) \tag{D-3}$$

$$H_{L+1} U_{2n+L+1,L+1}(R) = E_{2n+L+1,L+1}\, U_{2n+L+1,L+1}(R) \tag{D-4}$$

onde já assumimos que $N = 2n + L$.

Usando as igualdades (D-1) e (D-3) constatamos que:

$$a_L a_L^+ a_L U_{2n+L,L}(R) = a_L \left\{ H_L - \frac{\hbar\omega}{2}(2L+D) \right\} U_{2n+L,L}(R) =$$

$$= a_L \left\{ E_{2n+L,L} - \frac{\hbar\omega}{2}(2L+D) \right\} U_{2n+L,L}(R) =$$

$$= \left\{ E_{2n+L,L} - \frac{\hbar\omega}{2}(2L+D) \right\} a_L U_{2n+L,L}(R) \tag{D-5}$$

mas através de (D-2) e (D-4) obtemos:

$$a_L a_L^+ U_{2n'+L+1,L+1}(R) = \left\{ E_{2n'+L+1,L+1} - \frac{\hbar\omega}{2}(2L+D-2) \right\} U_{2n'+L+1,L+1}(R) \quad \text{(D-6)}$$

Assim, comparando (D-5) com (D-6) podemos associar:

$$a_L U_{2n+L,L} = U_{2n'+L+1,L+1} \quad \text{(D-7)}$$

$$E_{2n+L,L} = E_{2n'+L+1,L+1} + \hbar\omega \quad \text{(D-8)}$$

Como indicado no apêndice B: $E_{2n+L,L} = \frac{1}{2}\hbar\omega(4n+2L+D)$, concluímos a partir de (D-8) que:

$$n' = n-1 \quad \text{(D-9)}$$

e com esta relação em (D-7):

$$a_L U_{2n+L,L} = U_{2n+L-1,L+1} \quad \text{(D-10)}$$

Analisando este resultado, percebemos que o operador a_L atua sobre a função de onda fazendo com que n diminua uma unidade e L aumenta também uma unidade. A interpretação que daremos a este operador é que a_L é o operador destruição do número quântico n ($n \rightarrow n-1$) e como consequência da relação entre energias o número quântico do momento angular L aumenta uma unidade. É claro que podemos interpretar a_L de maneira diferente, como operador criação de L e devido a relação entre energias n diminue uma unidade, mas como estamos trabalhando com a equação radial do oscilador harmônico onde a dependência angular foi retirada,

vamos preferir a primeira interpretação.

Agora multiplicando a^{+}_{L} à esquerda da equação (D-6) temos:

$$a^{+}_{L} a_{L} a^{+}_{L} U_{2n'+L+1,L+1}(R) = \left\{ E_{2n'+L+1,L+1} - \frac{\hbar\omega}{2}(2L+D-2) \right\} a^{+}_{L} U_{2n'+L+1,L+1}(R) \quad \text{(D-11)}$$

por outro lado (D-1) e (D-3) nos fornece:

$$a_{L} a^{+}_{L} U_{2n+L,L}(R) = \left\{ E_{2n+L,L} - \frac{\hbar\omega}{2}(2L+D) \right\} U_{2n+L,L}(R) \quad \text{(D-12)}$$

Estas igualdades (D-11) e (D-12) nos permitem associar:

$$a^{+}_{L} U_{2n'+L+1,L+1}(R) = U_{2n+L,L}(R) \quad \text{(D-13)}$$

$$E_{2n'+L+1,L+1} + \hbar\omega = E_{2n+L,L} \quad \text{(D-14)}$$

Usando a expressão dos autovalores da energia em (D-14) chegamos a relação:

$$n' = n - 1 \quad \text{(D-15)}$$

que aplicada em (D-13) resulta em:

$$a^{+}_{L} U_{2n+L-1,L+1}(R) = U_{2n+L,L}(R) \quad \text{(D-16)}$$

A partir de (D-16) podemos interpretar a^{+}_{L} como o perador criação do número quântico n ($n \rightarrow n+1$) e através da relação entre energias o número quântico do momento

angular L diminue uma unidade.

Partindo para o problema coulombiano procederemos de maneira análoga ao que foi desenvolvido para o oscilador. As equações (29) e (32) obtidas no texto são:

$$H_\ell = b_\ell^+ b_\ell - \frac{m e^4}{2\hbar^2}\left[\ell + \frac{1}{2}(d-1)\right]^{-2} \tag{D-17}$$

$$H_{\ell+1} = b_\ell b_\ell^+ - \frac{m e^4}{2\hbar^2}\left[\ell + \frac{1}{2}(d-1)\right]^{-2} \tag{D-18}$$

onde temos para estes hamiltonianos as equações de autovalores:

$$H_\ell \, R_{n_r+\ell+1,\ell}(r) = E_{n_r+\ell+1,\ell} \, R_{n_r+\ell+1,\ell}(r) \tag{D-19}$$

$$H_{\ell+1} \, R_{n_r+\ell+1,\ell+1}(r) = E_{n_r+\ell+1,\ell+1} R_{n_r+\ell+1,\ell+1}(r) \tag{D-20}$$

onde assumimos que $n = n_r + \ell + 1$.

Usando (D-17) e (D-19) podemos escrever:

$$b_\ell b_\ell^+ b_\ell R_{n_r+\ell+1,\ell}(r) = b_\ell \left\{ H_\ell + \frac{m e^4}{2\hbar^2}\left[\ell + \frac{1}{2}(d-1)\right]^{-2} \right\} R_{n_r+\ell+1,\ell}(r) =$$

$$= b_\ell \left\{ E_{n_r+\ell+1,\ell} + \frac{m e^4}{2\hbar^2}\left[\ell + \frac{1}{2}(d-1)\right]^{-2} \right\} R_{n_r+\ell+1,\ell}(r) =$$

$$= \left\{ E_{n_r+\ell+1,\ell} + \frac{m e^4}{2\hbar^2}\left[\ell + \frac{1}{2}(d-1)\right]^{-2} \right\} b_\ell R_{n_r+\ell+1,\ell}(r) \, , \tag{D-21}$$

mas de (D-18) e (D-20) temos:

$$b_\ell b_\ell^+ R_{n_r'+\ell+2,\ell+1}(r) =$$

$$= \left\{ E_{n_r'+\ell+2,\ell+1} + \frac{m e^4}{2\hbar^2} \left[\ell + \frac{1}{2}(d-1) \right]^{-2} \right\} R_{n_r'+\ell+2,\ell+1}(r) \qquad \text{(D-22)}$$

Comparando (D-21) com (D-22) associamos:

$$b_\ell R_{n_r+\ell+1,\ell}(r) = R_{n_r'+\ell+2,\ell+1}(r) \qquad \text{(D-23)}$$

$$E_{n_r+\ell+1,\ell} = E_{n_r'+\ell+2,\ell+1} \qquad \text{(D-24)}$$

Vimos no apêndice C (igualdade (C-14)) que $E_{n_r+\ell+1,\ell} = -\frac{m e^4}{2\hbar^2}\left[n_r+\ell+1+\frac{1}{2}(d-3)\right]^{-2}$. Esta expressão em (D-24) resulta que:

$$n_r = n_r' + 1 \qquad \text{(D-25)}$$

assim podemos reescrever (D-23):

$$b_\ell R_{n_r+\ell+1,\ell}(r) = R_{n_r+\ell+1,\ell+1}(r) \qquad \text{(D-26)}$$

Notemos que a ação de b_ℓ nos autoestados $R_{n,\ell}(r)$ não altera os níveis de energia: $E_{n,\ell} = E_{n,\ell+1}$. Analisando (D-26), podemos interpretar b_ℓ como operador criação do número quântico do momento angular ℓ ($\ell \rightarrow \ell+1$). Por outro lado, como estamos trabalhando apenas com a equação radial, podemos entender b_ℓ como sendo o operador destruição do

número quântico n_r e pela imposição da relação entre energias o número quântico ℓ aumenta uma unidade, mantendo $n = n_r + \ell + 1$ fixo.

Multiplicando agora (D-22) por b_ℓ^+ à esquerda temos:

$$b_\ell^+ b_\ell b_\ell^+ \mathcal{R}_{n_r'+\ell+2,\,\ell+1}(r) =$$

$$= \left\{ E_{n_r'+\ell+2,\ell+1} + \frac{m e^4}{2\hbar^2}\left[\ell + \frac{1}{2}(d-1)\right]^{-2} \right\} b_\ell^+ \mathcal{R}_{n_r'+\ell+2,\ell+1}(r), \qquad \text{(D-27)}$$

temos também usando (D-17) e (D-19):

$$b_\ell^+ b_\ell \mathcal{R}_{n_r+\ell+1,\ell}(r) = \left\{ E_{n_r+\ell+1} + \frac{m e^4}{2\hbar^2}\left[\ell + \frac{1}{2}(d-1)\right]^{-2} \right\} \mathcal{R}_{n_r'+\ell+2,\ell+1}(r). \qquad \text{(D-28)}$$

Destas duas igualdades retiramos as seguintes associações:

$$b_\ell^+ \mathcal{R}_{n_r'+\ell+2,\ell+1}(r) = \mathcal{R}_{n_r+\ell+1,\ell}(r) \qquad \text{(D-29)}$$

$$E_{n_r'+\ell+2,\ell+1} = E_{n_r+\ell+1,\ell} \qquad \text{(D-30)}$$

Usando a expressão dos autovalores da energia em (D-30) obtemos:

$$n_r = n_r' + 1 \qquad \text{(D-31)}$$

o que nos permite reescrever (D-29):

$$b_\ell^+ R_{n_r+\ell+1,\,\ell+1}(r) = R_{n_r+\ell+1,\,\ell}(r) \qquad \text{(D-32)}$$

Assim, podemos entender b_ℓ^+ como operador destruição do momento angular; ou alternativamente pensar que b_ℓ^+ é operador criação do número quântico n_r ($n_r \longrightarrow n_r + 1$) e para manter o nível de energia inalterado acrescentamos uma unidade ao número quântico ℓ .

Apêndice E

Determinação das funções f_L e F_R

Neste apêndice vamos resolver duas equações diferenciais usadas no texto: (11) e (36). A primeira delas é:

$$f_L' + f_L^2 = \frac{\left[L+\frac{1}{2}(D-1)\right]\left[L+\frac{1}{2}(D-1)+1\right]}{R^2} + \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}R^2 - \frac{m\omega}{\hbar}(2L+D-2) \,. \qquad \text{(E-1)}$$

Uma solução particular desta equação é extraída dos operadores a_L e a_L^+ (dados por (5) e (6)):

$$f_{L_p} = \frac{m\omega}{\hbar}R - \frac{L+\frac{1}{2}(D-1)}{R} \,. \qquad \text{(E-2)}$$

A solução geral é:

$$f_L = f_{L_p} + \phi_L(R) \qquad \text{(E-3)}$$

onde $\phi_L(R)$ é obtida substituindo (E-3) em (E-1), o que nos leva a:

$$\phi_L'(R) + \frac{2m\omega}{\hbar}R\,\phi_L(R) - 2\frac{L+\frac{1}{2}(D-1)}{R}\phi_L(R) + \phi_L^2(R) = 0 \,, \qquad \text{(E-4)}$$

é conveniente reeescrever esta equação em termos de uma outra função Y_L tal que:

$$\phi_L = \frac{1}{Y_L} \qquad \text{(E-5)}$$

Fazendo esta substituição em (E-4) e multiplicando o resultado por Y_L^2 :

$$-Y_L' + \frac{2mw}{\hbar} R\, Y_L - \frac{2L+D-1}{R} Y_L + 1 = 0 . \qquad \text{(E-6)}$$

Para chegar a Y_L , primeiro resolvemos a equação homogênea:

$$-Y_{LH}' + \frac{2mw}{\hbar} R\, Y_{LH} - \frac{2L+D-1}{R} Y_{LH} = 0 , \qquad \text{(E-7)}$$

ou seja,

$$\frac{Y_{LH}'}{Y_{LH}} = \frac{2mw}{\hbar} R - \frac{2L+D-1}{R} \qquad \text{(E-8)}$$

que integrada nos fornece:

$$\ln Y_{LH} = -(2L+D-1) \ln R + \frac{mw}{\hbar} R^2 + \text{constante} \qquad \text{(E-9)}$$

ou numa forma melhor:

$$Y_{LH} = N\, R^{-2L-D+1}\, e^{\frac{mw}{\hbar} R^2} \qquad \text{(E-10)}$$

Agora a função Y_L pode ser encontrada impondo que N dependa da variável R e substituindo em (E-6) obtemos:

$$N'(R)\, R^{-2L-D+1}\, e^{\frac{mw}{\hbar} R^2} - 1 = 0 , \qquad \text{(E-11)}$$

ou seja,

$$N(R) = \gamma + \int_0^R d\bar{R}\, \bar{R}^{2L+D-1}\, e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\bar{R}^2} \tag{E-12}$$

onde γ é a constante de integração. Finalmente escrevemos f_L :

$$f_L = f_{L_p} + \frac{1}{N(R)\, Y_{L_H}} = \frac{m\omega}{\hbar} R - \frac{L+\frac{1}{2}(D-1)}{R} + \frac{R^{2L+D-1}\, e^{-\frac{m\omega}{\hbar}R^2}}{\left\{\gamma + \int_0^R d\bar{R}\, \bar{R}^{2L+D-1}\, e^{-\frac{m\omega}{\hbar}R^2}\right\}} \tag{E-13}$$

Outra equação diferencial a ser resolvida é:

$$F_\ell' + F_\ell^2 = \frac{\left[\ell+\frac{1}{2}(d-1)\right]\left[\ell+\frac{1}{2}(d-1)+1\right]}{r^2} - \frac{2me^2}{\hbar^2}\frac{1}{r} + \frac{m^2e^4}{\hbar^4}\left[\ell+\frac{1}{2}(d-1)\right]^{-2} \tag{E-14}$$

Os operadores b_ℓ e b_ℓ^+ dados no texto (31) e (32) nos fornecem uma solução particular da equação acima:

$$F_{\ell_p} = \frac{me^2}{\hbar^2}\left[\ell + \frac{1}{2}(d-1)\right]^{-1} - \frac{\ell+\frac{1}{2}(d-1)}{r} \tag{E-15}$$

A solução geral será por sua vez:

$$F_\ell = F_{\ell_p} + \varphi_\ell(r) \tag{E-16}$$

onde $\varphi_\ell(r)$ é obtida substituido (E-16) em (E-14):

$$\varphi_\ell'(r) + 2\left\{\frac{me^2}{\hbar^2}\left[\ell + \frac{1}{2}(d-1)\right]^{-1} - \frac{\ell+\frac{1}{2}(d-1)}{r}\right\}\varphi_\ell(r) + \varphi_\ell^2(r) = 0 \tag{E-17}$$

Fazendo a seguinte substituição:

$$\varphi_\ell(r) = \frac{1}{W_\ell} \tag{E-18}$$

na expressão acima e multiplicando o resultado por $-W_\ell^2$ chegamos a:

$$W_\ell' - \frac{2me^2}{\hbar^2}\left[\ell + \frac{1}{2}(d-1)\right]^{-1} W_\ell - \frac{2\ell+d-1}{r} W_\ell - 1 = 0 \tag{E-19}$$

Para determinar W_ℓ vamos primeiro obter a solução da equação homogênea:

$$W_{\ell_H}' - \frac{2me^2}{\hbar^2}\left[\ell + \frac{1}{2}(d-1)\right]^{-1} W_{\ell_H} + \frac{2\ell+d-1}{r} W_{\ell_H} = 0 \tag{E-20}$$

ou rearranjado os termos nesta expressão:

$$\frac{W_{\ell_H}'}{W_{\ell_H}} = \frac{2me^2}{\hbar^2}\left[\ell + \frac{1}{2}(d-1)\right]^{-1} - \frac{2\ell+d-1}{r} \tag{E-21}$$

Assim integrando (E-21) chegamos em:

$$\ln W_{\ell_H}' = -(2\ell+d-1)\ln r + \frac{2me^2}{\hbar^2}\left[\ell + \frac{1}{2}(d-1)\right]^{-1} + \text{constante} \tag{E-22}$$

portanto:

$$W_{\ell_H} = N\, r^{-2\ell-d+1}\, e^{\frac{2me^2}{\hbar^2}\left[\ell + \frac{1}{2}(d-1)\right]^{-1} r} \tag{E-23}$$

Como feito anteriormente, vamos impor que N dependa da

Apêndice F

Mapeamento entre oscilador harmônico e problema coulombiano em dimensões arbitrárias

Vamos aqui apresentar um mapeamento, baseado na referência [3], via função de onda entre os problemas quânticos do oscilador harmônico D-dimensional e coulombiano d-dimensional.

As autofunções do oscilador harmônico indicadas no apêndice B são:

$$U_{N,L}(X) = C(N,L,D)\, X^{L} \exp\left\{-\frac{X^2}{2}\right\} L_{\frac{N}{2}-\frac{L}{2}}^{\left(L+\frac{D}{2}-1\right)}(X) \tag{F-1}$$

a constante de normalização é encontrada em [3]:

$$C(N,L,D) = R_0^{-\frac{D}{2}} \left[2\Gamma\left(\frac{1}{2}N - \frac{L}{2} + 1\right)\right]^{\frac{1}{2}} \left[\Gamma\left(\frac{N}{2} + \frac{L}{2} + \frac{D}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{F-2}$$

onde $R_0 = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{\frac{1}{2}}$, $X = \frac{R}{R_0}$ e Γ indica o uso das funções gama.

Por outro lado a solução para o problema coulombiano indicada no apêndice C é:

$$R_{n,\ell}(x) = c(n,\ell,d) \exp\left\{-\frac{x}{2}\right\} x^{\ell} L_{n-\ell-1}^{(2\ell+d-2)}(x) \tag{F-3}$$

com constante de normalização também dada em [3] ou calculada em [4]:

$$c(n,l,d) = r_0^{-\frac{1}{2}} \left[n + \frac{1}{2}(d-3)\right]^{-\frac{d+1}{2}} \left[\Gamma(n-l)\right]^{\frac{1}{2}} \left[2\Gamma(n+l+d+2)\right]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{(F-4)}$$

onde $r_0 = \dfrac{\hbar^2}{2me^2}$ e $x = \dfrac{r}{r_0\left[n + \frac{1}{2}(d-3)\right]}$.

Podemos agora estabelecer uma relação direta entre as autofunções $U_{N,L}(X)$ e $R_{nl}(x)$, mapeando as variáveis da seguinte forma:

$$x = X^2 \quad \text{(F-5)}$$

e impondo que:

$$D = 2d-2$$

$$N = 2n-2 \quad \text{(F-6)}$$

$$L = 2l$$

Assim verificamos que:

$$U_{N,L}(X) = \Lambda_0 \, R_{n,l}(x) \quad \text{(F-7)}$$

onde Λ_0 pode ser determinado analiticamente,usando (F-5) e as condições (F-6):

$$\Lambda_0 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{R_0^{2d-2}}{r_0^d \left[n + \frac{1}{2}(d-3)\right]^{d+1}} \right\} \quad \text{(F-8)}$$

Conseguimos, assim, o mapeamento entre as autofunções dos

dois sistemas tratados. Convém mencionar que o mapeamento entre o problema coulombiano tridimensional e o oscilador harmônico quadridimensional é bem conhecido na literatura (referência [6]).

Apêndice G

Problema coulombiano supersimétrico a três dimensões

O hamiltoniano que descreve o problema coulombiano tridimensional é [7]:

$$H = \frac{\hbar}{2m}\left\{-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2me^2}{\hbar}\frac{1}{r}\right\} \tag{G-1}$$

com autovalores de energia:

$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2} \tag{G-2}$$

onde $n = n_r + l + 1$ ($n_r = 0, 1, 2 \ldots$).

Obtivemos no texto o par de hamiltoniano supersimétrico para o problema coulombiano em d dimensões (expressões (59) e (60)). Vamos ver como ficam estas expressões para $d = 3$:

$$H_{+l} = \frac{\hbar^2}{2m}\left\{-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2me^2}{\hbar}\frac{1}{r}\right\} + \frac{me^4}{2\hbar^2}(l+1)^{-2} \tag{G-3}$$

$$H_{-l} = \frac{\hbar^2}{2m}\left\{-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{(l+1)(l+2)}{r^2} - \frac{2me^2}{\hbar}\frac{1}{r}\right\} + \frac{me^4}{2\hbar^2}(l+1)^{-2} \tag{G-4}$$

Os resultados gerais para uma dimensão arbitrária ainda são válidos, ou seja, percebemos que H_{+l} é análogo ao hamiltoniano (G-1) com autovalores de energia redefinidos de forma

que para ℓ fixo o estado de mais baixa energia tenha autovalor nulo, $H_{-\ell}$ tem espectro igual a $H_{+\ell}$ a menos deste estado de energia nula e finalmente, o termo proporcional a r^2 indica que as funções de onda estão relacionadas pela troca $\ell \to \ell+1$.

Considerando o caso particular em que $\ell = 0$ (orbitais s) podemos associar[9] H_{+0} aos níveis s do átomo de hidrogênio com autovalores de energia redefinimos de forma que valha zero para $n = 1$. Assim, H_{-0} descreve um sistema com orbital 1s "removido", ou seja, fisicamente esta situação corresponde aos níveis s do átomo de lítio quando dois de seus elétrons estão no orbital 1s. Nesta interpretação temos que supor que há ausência de interação entre elétrons e que o elétron de valência esteja suficientemente longe do caroço central para que o potencial efetivo seja coulombiano gerado por uma única carga. Portanto, nesta aproximação os níveis s do átomo de lítio podem ser interpretados como companheiros supersimétricos dos níveis s do átomo de hidrogênio.

Os dados experimentais disponíveis apresentados na tabela I (pag. 76) mostram que à luz da interpretação acima a supersimetria na natureza é quebrada, como seria de se esperar tendo em vista as condições exigidas para que ela seja exata.

Outras relações entre níveis atômicos de energia podem ser encontradas através da supersimetria, por exemplo, para $\ell = 1$ podemos associar H_{+1} ao boro ($1s^2 2s^2 np^1$, $n \geq 3$) e H_{-1} ao alumínio ($1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 np^1$, $n \geq 4$).

n	H(ns^1)	Li ($1s^2$ ns^1)
8-9	0,0360	0,0416
6-7	0,0808	0,0980
4-5	0,245	0,329
3-4	0,533	0,781
2-3	1,52	2,72

TABELA I - Diferenças de energia (em unidade de 10^4 cm^{-1}) referentes ao hidrogênio e lítio (referência [9]).

Apêndice H

Cálculos com supercampos

Vamos obter explicitamente a curvatura ($\Omega = d\omega + \omega\wedge\omega$) e chegar às expressões (97) a (104) pela imposição de que ela tenha a forma: $\phi_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu$.

Calculamos $d\omega$ separadamente:

$$d\omega = \left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) dx^\mu + \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) d\theta + \left(\frac{\partial}{\partial \bar\theta}\right) d\bar\theta\right\}\left(\phi_\nu\, dx^\nu + \eta\, d\bar\theta + \bar\eta\, d\theta\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\mu} dx^\mu\, \phi_\nu\, dx^\nu + \frac{\partial}{\partial x^\mu} dx^\mu\, \eta\, d\bar\theta + \frac{\partial}{\partial x^\mu} dx^\mu\, \bar\eta\, d\theta +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \theta} d\theta\, \phi_\nu\, dx^\nu + \frac{\partial}{\partial \theta} d\theta\, \eta\, d\bar\theta + \frac{\partial}{\partial \theta} d\theta\, \bar\eta\, d\theta +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \bar\theta} d\bar\theta\, \phi_\nu\, dx^\nu + \frac{\partial}{\partial \bar\theta} d\bar\theta\, \eta\, d\bar\theta + \frac{\partial}{\partial \bar\theta} d\bar\theta\, \bar\eta\, d\theta \qquad \text{(H-1)}$$

Usando as definições dos supercampos dadas no texto (91), (92) e (93), cada termo da expressão acima pode ser expandido:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} dx^\mu\, \phi_\nu\, dx^\nu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} dx^\mu \left(A^a_\nu + \theta \bar R^a_\nu + \bar\theta R^a_\nu + i\theta\bar\theta S^a_\nu\right) \tau^a\, dx^\nu =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(A^a_\nu + \theta \bar R^a_\nu + \bar\theta R^a_\nu + i\theta\bar\theta S^a_\nu\right) \tau^a\, dx^\mu \wedge dx^\nu \qquad \text{(H-2)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} dx^\mu\, \eta\, d\theta = \frac{\partial}{\partial x^\mu} dx^\mu \left(c^a + i\theta \bar B^a + i\bar\theta r^a + i\theta\bar\theta s^a\right) \tau^a\, d\bar\theta =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(c^a + i\theta \bar B^a + i\bar\theta r^a + i\theta\bar\theta s^a\right) \tau^a\, dx^\mu \wedge d\theta \qquad \text{(H-3)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} dx^\mu \bar{\eta} d\theta = \frac{\partial}{\partial x^\mu} dx^\mu (\bar{c}^a + i\theta\bar{r}^a + i\bar{\theta}\bar{B}^a + i\theta\bar{\theta}\bar{s}^a)\tau^a d\theta =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\bar{c}^a + i\theta\bar{r}^a + i\bar{\theta}\bar{B}^a + i\theta\bar{\theta}\bar{s}^a)\tau^a dx^\mu \wedge d\theta \qquad \text{(H-4)}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} d\theta \, \Phi_\nu dx^\nu = \frac{\partial}{\partial\theta} d\theta (A^a_\nu + \theta\bar{R}^a_\nu + \bar{\theta}R^a_\nu + i\theta\bar{\theta}S^a_\nu)\tau^a dx^\nu =$$

$$= (\bar{R}^a_\nu + i\bar{\theta}S^a_\nu)\tau^a d\theta \wedge dx^\nu \qquad \text{(H-5)}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} d\theta \, \eta d\bar{\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta} d\theta (c^a + i\theta\bar{B}^a + i\bar{\theta}r^a + i\theta\bar{\theta}s^a)\tau^a d\bar{\theta} =$$

$$= (-i\bar{B}^a - i\bar{\theta}s^a)\tau^a d\theta \wedge d\bar{\theta} \qquad \text{(H-6)}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} d\theta \, \bar{\eta} d\theta = \frac{\partial}{\partial\theta} d\theta (\bar{c}^a + i\bar{\theta}B^a + i\theta\bar{r}^a + i\theta\bar{\theta}\bar{s}^a)\tau^a d\theta =$$

$$= (-i\bar{r}^a - i\bar{\theta}\bar{s}^a)\tau^a d\theta \wedge d\theta \qquad \text{(H-7)}$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} d\bar{\theta} \, \Phi_\nu dx^\nu = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} d\bar{\theta}(A^a_\nu + \theta\bar{R}^a_\nu + \bar{\theta}R^a_\nu + i\theta\bar{\theta}S^a_\nu)\tau^a dx^\nu =$$

$$= (R^a_\nu - i\theta S^a_\nu)\tau^a d\bar{\theta} \wedge dx^\nu \qquad \text{(H-8)}$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} d\bar{\theta} \, \eta d\bar{\theta} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} d\bar{\theta}(c^a + i\theta\bar{B}^a + i\bar{\theta}r^a + i\theta\bar{\theta}s^a)\tau^a d\bar{\theta} =$$

$$= (-ir^a + i\theta s^a)\tau^a d\bar{\theta} \wedge d\bar{\theta} \qquad \text{(H-9)}$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar\theta}\, d\bar\theta\,\bar\eta\, d\theta = \frac{\partial}{\partial\bar\theta}\, d\bar\theta\,(\bar c^a + i\theta\bar\pi^a + i\bar\theta B^a + i\theta\bar\theta\bar s^a)\,\tau^a\, d\bar\theta =$$

$$= (-iB^a + i\theta\bar s^a)\,\tau^a\, d\bar\theta\wedge d\theta\,. \qquad \text{(H-10)}$$

Desenvolvendo agora o produto $\omega\wedge\omega$ obtemos:

$$\omega\wedge\omega = (\phi^a dx^\mu + \eta^a d\bar\theta + \bar\eta^a d\theta)\tau^a(\phi^b_\nu dx^\nu + \eta^b d\bar\theta + \bar\eta^b d\theta)\,\tau^b =$$

$$= \Big\{ \phi^a_\mu dx^\mu\, \phi^b_\nu dx^\nu + \phi^a_\mu dx^\mu \eta^b d\bar\theta + \phi^a_\mu dx^\mu \bar\eta^b d\theta +$$

$$+ \eta^a d\bar\theta\, \phi^b dx^\nu + \eta^a d\bar\theta\, \eta^b d\bar\theta + \eta^a d\bar\theta\, \bar\eta^b d\theta + \bar\eta^a d\theta\, \phi^b_\nu dx^\nu +$$

$$+ \bar\eta^a d\theta\, \eta^b d\bar\theta + \bar\eta^a d\theta\, \bar\eta^b d\theta \Big\}\, \tau^a\tau^b\,. \qquad \text{(H-11)}$$

Cada termo desta expressão pode ser expandido nos campos componentes:

$$\phi^a_\mu dx^\mu\, \phi^b_\nu dx^\nu\, \tau^a\tau^b = \phi^a_\mu \phi^b_\nu\, \tau^a\tau^b\, dx^\mu\wedge dx^\nu =$$

$$= (A^a_\mu + \theta\bar R^a_\mu + \bar\theta R^a_\mu + i\theta\bar\theta S^a_\mu)(A^b_\nu + \theta\bar R^b_\nu + \bar\theta R^b_\nu + i\theta\bar\theta S^b_\nu)\,\tau^a\tau^b dx^\mu\wedge dx^\nu =$$

$$= \Big[A^a_\mu A^b_\nu + A^a_\mu\theta\bar R^b_\nu + A^a_\mu\bar\theta R^b_\nu + A^a_\mu i\theta\bar\theta S^b_\nu + \theta\bar R^a_\mu A^b_\nu + \bar\theta R^a_\mu A^b_\nu +$$

$$+ \theta\bar R^a\bar\theta R^b + \bar\theta R^a\theta\bar R^b + i\theta\bar\theta S^a A^b\Big]\,\tau^a\tau^b\, dx^\mu\wedge dx^\nu \qquad \text{(H-12)}$$

$$\phi^a_\mu dx^\mu \eta^b d\bar\theta\, \tau^a \tau^b = \phi^a_\mu \eta^b \tau^a \tau^b\, dx^\mu d\bar\theta =$$

$$= (A^a_\mu + \theta \bar R^a_\mu + \bar\theta R^a_\mu + i\theta\bar\theta S^a_\mu)(c^b + i\theta \bar B^b + i\bar\theta r^b + i\theta\bar\theta s^b)\tau^a\tau^b dx^\mu_\wedge d\bar\theta =$$

$$= \Big[A^a_\mu c^b + A^a_\mu i\theta B^b + A^a_\mu i\theta r^b + A^a_\mu i\theta\bar\theta s^b + \theta \bar R^a_\mu i\bar\theta r^b + \bar\theta R^a_\mu i\theta \bar B^b +$$

$$+ \theta \bar R^a_\mu c^b + \bar\theta R^a_\mu c^b + i\theta\bar\theta S^a_\mu c^b\Big]\tau^a\tau^b dx^\mu_\wedge d\bar\theta \qquad \text{(H-13)}$$

$$\phi^a dx^\mu \bar\eta^b d\theta\, \tau^a\tau^b = \phi^a_\mu \bar\eta^b \tau^a\tau^b\, dx^\mu_\wedge d\theta =$$

$$= (A^a_\mu + \theta \bar R^a_\mu + \bar\theta R^a_\mu + i\theta\bar\theta S^a_\mu)(\bar c^b + i\theta r^b + i\bar\theta B^b + i\theta\bar\theta s^b)\tau^a\tau^b dx^\mu_\wedge d\theta =$$

$$= \Big[A^a_\mu \bar c^b + A^a_\mu i\theta \bar r^b + A^a_\mu i\bar\theta B^b + A^a_\mu i\theta\bar\theta s^b + \theta \bar R^a_\mu \bar c^b + \theta \bar R^a_\mu i\bar\theta B^b +$$

$$+ \bar\theta R^a_\mu i\theta \bar r^b + \bar\theta R^a_\mu \bar c^b + i\theta\bar\theta S^a_\mu \bar c^b\Big]\tau^a\tau^b dx^\mu_\wedge d\theta \qquad \text{(H-14)}$$

$$\eta^a d\bar\theta\, \phi^b dx^\nu \tau^a\tau^b = \eta^a \phi^b_\nu \tau^a\tau^b\, d\theta_\wedge dx^\nu =$$

$$= (c^a + i\theta \bar B^a + i\bar\theta r^a + i\theta\bar\theta s^a)(A^a_\nu + \theta \bar R^a_\nu + \bar\theta R^a_\nu + i\theta\bar\theta S^a_\nu)\tau^a\tau^b d\bar\theta_\wedge dx^\nu =$$

$$= \Big[c^a A^b_\nu + c^a \theta \bar R^b_\nu + c^a \bar\theta R^b_\nu + c^a i\theta\bar\theta S^b_\nu + i\theta \bar B^a A^b_\nu + i\theta \bar B^a \bar\theta R^b_\nu +$$

$$+ i\theta r^a A^b_\nu + i\bar\theta r^a \theta R^b_\nu + i\theta\bar\theta s^a A^b_\nu\Big]\tau^a\tau^b d\bar\theta_\wedge dx^\nu \qquad \text{(H-15)}$$

$$\eta^a d\bar{\theta}\, \eta^b d\bar{\theta}\, \tau^a \tau^b = \eta^a(-\eta^b)\, \tau^a \tau^b\, d\bar{\theta}\wedge d\bar{\theta} =$$

$$= -(c^a + i\theta\bar{B}^a + i\bar{\theta}r^a + i\theta\bar{\theta}s^a)(c^b + i\theta\bar{B}^b + i\bar{\theta}r^b + i\theta\bar{\theta}s^b)\tau^a\tau^b d\bar{\theta}\wedge d\bar{\theta} =$$

$$= \Big[-c^a c^b - c^a i\theta B^b - c^a i\bar{\theta} r^b - c^a i\theta\bar{\theta} s^b - i\theta\bar{B}^a c^b +$$

$$+ \theta\bar{B}^a\bar{\theta} r^b - i\bar{\theta} r^a c^b + \bar{\theta} r^a \theta\bar{B}^b - i\theta\bar{\theta} s^a c^b\Big]\tau^a\tau^b d\bar{\theta}\wedge d\bar{\theta} \qquad \text{(H-16)}$$

$$\eta^a d\bar{\theta}\, \bar{\eta}^b d\theta\, \tau^a \tau^b = \eta^a(-\bar{\eta}^b)\, \tau^a \tau^b\, d\bar{\theta}\wedge d\theta =$$

$$= -(c^a + i\theta\bar{B}^a + i\bar{\theta}r^a + i\theta\bar{\theta}s^a)(\bar{c}^b + i\theta\bar{r}^b + i\bar{\theta}B^b + i\theta\bar{\theta}\bar{s}^b)\tau^a\tau^b d\bar{\theta}\wedge d\theta =$$

$$= \Big[-c^a\bar{c}^b - c^a i\theta\bar{r}^b - c^a i\bar{\theta}B^b - c^a i\theta\bar{\theta}\bar{s}^b - i\theta\bar{B}^a\bar{c}^b + \theta\bar{B}^a\bar{\theta}B^b -$$

$$- i\theta\bar{r}^a\bar{c}^b + \bar{\theta} r^a\theta r^b - i\theta\bar{\theta} s^a\bar{c}^b\Big]\tau^a\tau^b d\bar{\theta}\wedge d\theta \qquad \text{(H-17)}$$

$$\eta^a d\theta\, \phi^b_\nu dx^\nu\, \tau^a\tau^b = \bar{\eta}^a\phi^b_\nu\, \tau^a\tau^b\, d\bar{\theta}\wedge dx^\nu =$$

$$= (\bar{c}^a + i\theta\bar{r}^a + i\bar{\theta}B^a + i\theta\bar{\theta}\bar{s}^a)(A^b_\nu + \theta\bar{R}^b_\nu + \bar{\theta}R^b_\nu + i\theta\bar{\theta}S^b_\nu)\tau^a\tau^b d\theta\wedge dx^\nu =$$

$$= \Big[\bar{c}^a A^b_\nu + \bar{c}^a\theta\bar{R}^b_\nu + \bar{c}^a\bar{\theta}R^b_\nu + c^a i\theta\bar{\theta}S^b_\nu + i\theta\bar{r}^a A^b_\nu +$$

$$+ i\theta\bar{r}^a\bar{\theta}R^b_\nu + i\bar{\theta}B^a A^b_\nu + i\bar{\theta}B^a\bar{\theta}R^b_\nu + i\theta\bar{\theta}\bar{s}^a A^b_\nu\Big]\tau^a\tau^b d\theta\wedge dx^\nu \qquad \text{(H-18)}$$

$$\bar{\eta}^a d\theta\, \eta^b d\bar{\theta}\, \tau^a \tau^b = \bar{\eta}^a(-\eta^b)\tau^a\tau^b\, d\theta \wedge d\bar{\theta} =$$

$$= -(\bar{c}^a + i\theta\bar{\pi}^a + i\bar{\theta}\mathcal{B}^a + i\theta\bar{\theta}\bar{s}^a)(c^b + i\theta\mathcal{B}^b + i\bar{\theta}\pi^b + i\theta\bar{\theta}s^b)\tau^a\tau^b d\theta \wedge d\bar{\theta} =$$

$$= \Big[-\bar{c}^a c^b - c^a i\theta\bar{\mathcal{B}}^b - \bar{c}^a i\bar{\theta}\pi^b - \bar{c}^a i\theta\bar{\theta}s^b - i\theta\bar{\pi}^a c^b + \theta\bar{\pi}^b\bar{\theta}\pi^a -$$

$$- i\bar{\theta}\mathcal{B}^a c^b + \bar{\theta}\mathcal{B}^a\theta\bar{\mathcal{B}}^b - i\theta\bar{\theta}s^a c^b\Big]\tau^a\tau^b\, d\theta \wedge d\bar{\theta} \qquad \text{(H-19)}$$

$$\bar{\eta}^a d\theta\, \bar{\eta}^b d\theta\, \tau^a\tau^b = \bar{\eta}^a(-\bar{\eta}^b)\tau^a\tau^b\, d\theta \wedge d\theta =$$

$$= -(\bar{c}^a + i\theta\bar{\pi}^a + i\bar{\theta}\mathcal{B}^a + i\theta\bar{\theta}s^a)(\bar{c}^b + i\theta\bar{\pi}^b + i\bar{\theta}\mathcal{B}^b + i\theta\bar{\theta}\bar{s}^b)\tau^a\tau^b d\theta \wedge d\theta =$$

$$= \Big[-\bar{c}^a\bar{c}^b - \bar{c}^a i\theta\bar{\pi}^b - \bar{c}^a i\bar{\theta}\mathcal{B}^b - \bar{c}^a i\theta\bar{\theta}\bar{s}^b - i\theta\bar{\pi}^a\bar{c}^b + \theta\bar{\pi}^a\bar{\theta}\mathcal{B}^b -$$

$$- i\bar{\theta}\mathcal{B}^a\bar{c}^b + \bar{\theta}\mathcal{B}^a\theta\bar{\pi}^b - i\theta\bar{\theta}\bar{s}^a\bar{c}^b\Big]\tau^a\tau^b\, d\theta \wedge d\theta \qquad \text{(H-20)}$$

Assumindo que a curvatura Ω é nula nas direções θ e $\bar{\theta}$ vamos obter as relações entre os campos componentes pela definição (95):

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega \qquad \text{(H-21)}$$

Isolando a parte desta expressão proporcional a $d\theta \wedge d\theta$, ou seja, usando (H-7) e (H-20) e impondo que ela seja nula obtemos:

$$(-i\bar{\pi}^a - i\bar{\theta}\bar{s}^a)\zeta^a = -\Big[-\bar{c}^b\bar{c}^c - \bar{c}^b i\theta\bar{\pi}^c - \bar{c}^b i\bar{\theta}\mathcal{B}^c -$$

$$-\bar{c}^b i\theta\bar{\theta}\bar{s}^c - i\theta\bar{\pi}^b\bar{c}^c + \theta\bar{\pi}^b\bar{\theta}\mathcal{B}^c - i\bar{\theta}\mathcal{B}^b\bar{c}^c + \bar{\theta}\mathcal{B}^b\theta\bar{\pi}^c -$$

$$-i\theta\bar{\theta}\bar{s}^b\bar{c}^c\Big]\zeta^b\zeta^c \qquad \text{(H-22)}$$

Os termos de ordem zero em θ e $\bar{\theta}$ desta equação fornecem:

$$-i\bar{\pi}^a\zeta^a = \bar{c}^b\bar{c}^c\zeta^b\zeta^c, \qquad \text{(H-23)}$$

antissimetrizando o segundo membro obtemos:

$$\bar{\pi}^a\zeta^a = \frac{i}{2}\left(\bar{c}^b\bar{c}^c\zeta^b\zeta^c - \bar{c}^c\bar{c}^b\zeta^b\zeta^c\right)$$

os índices mudos podem ser redefinidos:

$$\bar{\pi}^a\zeta^a = \frac{i}{2}\left(\bar{c}^b\bar{c}^c\zeta^b\zeta^c - \bar{c}^b\bar{c}^c\zeta^c\zeta^b\right).$$

Trabalhando esta equação:

$$\bar{\pi}^a\zeta^a = \frac{i}{2}\bar{c}^b\bar{c}^c\left(\zeta^b\zeta^c - \zeta^c\zeta^b\right) = \frac{i}{2}\bar{c}^b\bar{c}^c\left[\zeta^b,\zeta^c\right] =$$

$$= \frac{i}{2}\bar{c}^b\bar{c}^c f^{abc}\zeta^a = \frac{i}{2}f^{abc}\bar{c}^b\bar{c}^c\zeta^a = \frac{i}{2}(\bar{c}\times\bar{c})^a\zeta^a,$$

o campo $\bar{\pi}(x)$ pode ser escrito em termos do campo $\bar{c}(x)$:

$$\bar{\pi} = \frac{i}{2}(\bar{c}\times\bar{c}) \qquad \text{(H-24)}$$

Por outro lado, os termos proporcionais a $\bar{\theta}$ em (H-22) nos fornecem:

$$-i\bar{s}^a\tau^a = -\left(i\,\bar{c}^b B^c - i\,B^b\bar{c}^c\right)\tau^b\tau^c. \qquad \text{(H-25)}$$

Então:

$$-\bar{s}^a\tau^a = B^b\bar{c}^c\tau^b\tau^c - B^c\bar{c}^b\tau^b\tau^c$$

e redefinindo índices:

$$-\bar{s}^a\tau^a = B^b\bar{c}^c\tau^b\tau^c - B^b\bar{c}^c\tau^b\tau^c = B^b\bar{c}^c[\tau^b,\tau^c] =$$

$$= B^b\bar{c}^c f^{abc}\tau^a = f^{abc}B^b\bar{c}^c\tau^a = (B\times\bar{c})^a\tau^a.$$

Portanto:

$$\bar{s} = -(B\times\bar{c}). \qquad \text{(H-26)}$$

Isolando agora a parte proporcional a $d\bar{\theta}\wedge d\bar{\theta}$ da curvatura, dada por (H-9) e (H-16) e impondo ser ela nula obtemos:

$$(-i\,r^a + i\,\theta\,s^a)\tau^a = -\Big[-c^b c^c - c^b i\theta\bar{B}^c - c^b i\theta\bar{\theta}s^c - i\theta\bar{B}^b c^c + \theta\bar{B}^b\bar{\theta}r^c -$$

$$- i\bar{\theta}r^b c^c + \bar{\theta}r^b\theta\bar{B}^c - i\theta\bar{\theta}s^b c^c - c^b i\bar{\theta}r^c\Big]\tau^b\tau^c \qquad \text{(H-27)}$$

Os termos independentes de θ e $\bar{\theta}$ nesta equação resultam em uma expressão semelhante a (H-23):

$$-i\,r^a\sigma^a = c^b c^c\,\sigma^b\sigma^c. \qquad \text{(H-28)}$$

seguindo o mesmo caminho usado para deduzir (H-24) chegamos a:

$$r = \frac{i}{2}\,(c \times c) \qquad \text{(H-29)}$$

Os termos proporcionais a θ em (H-27) fornecem a igualdade:

$$i\,s^a\sigma^a = -\left(i\,c^b\,\bar{B}^c - i\,\bar{B}^b c^c\right)\sigma^b\sigma^c \qquad \text{(H-30)}$$

que é análoga a (H-25). Trabalhando aqui exatamente como na dedução de (H-26) temos:

$$s = \bar{B} \times c \qquad \text{(H-31)}$$

Identificando a parte da curvatura proporcional a $d\theta \wedge d\bar{\theta}$, igualando a zero e separando apenas termos independentes de θ e $\bar{\theta}$ deduzimos de (H-6), (H-10), (H-17) e (H-19) que:

$$\left(-i\bar{B}^c - iB^c\right)\sigma^c = \left(c^a\bar{c}^b + \bar{c}^a c^b\right)\sigma^a\sigma^b \qquad \text{(H-32)}$$

Trabalhamos esta expressão reescrevendo o segundo membro e redefinindo índices:

$$\left(\bar{B}^c + B^c\right)\sigma^c = i\left(c^a\bar{c}^b\,\sigma^a\sigma^b - c^b\,\bar{c}^a\,\sigma^a\sigma^b\right) =$$

$$= i\left(c^a \bar{c}^b \tau^a \tau^b - c^a \bar{c}^b \tau^b \tau^a\right) = i\, c^a \bar{c}^b [\tau^a, \tau^b] = i\, c^a \bar{c}^b f^{abc} \tau^c =$$

$$= i\, f^{cab}\, c^a \bar{c}^b \tau^c = i\,(c \times \bar{c})^c \tau^c$$

Chegamos a:

$$\bar{B} + B - i\, c \times \bar{c} = 0 \qquad \text{(H-33)}$$

Destacamos a parte proporcional a $dx^\mu \wedge d\theta$ da curvatura e igualamos a zero. Se considerarmos apenas termos independentes de θ e $\bar{\theta}$ as equações (H-4), (H-5), (H-14) e (H-18) nos fornecem:

$$\left(\partial_\mu \bar{c}^a - \bar{R}^a_\mu\right) \tau^a = \left(-A^b_\mu \bar{c}^c + \bar{c}^b A^c_\mu\right) \tau^b \tau^c \qquad \text{(H-34)}$$

Vamos desenvolver o segundo membro desta igualdade:

$$\left(\partial_\mu \bar{c}^a - R^a_\mu\right) \tau^a = -\left(A^a_\mu \bar{c}^c \tau^b \tau^c - A^c_\mu \bar{c}^b \tau^b \tau^c\right) =$$

$$= -\left(A^b_\mu \bar{c}^c \tau^b \tau^c - A^b_\mu \bar{c}^c \tau^c \tau^b\right) = -A^b_\mu \bar{c}^c [\tau^b, \tau^c] = -A^b_\mu \bar{c}^c f^{abc} \tau^a,$$

assim:

$$\bar{R}^a_\mu \tau^a = \partial_\mu \bar{c}\, \tau^a + f^{abc} A^b_\mu \bar{c}^c \tau^a =$$

$$= \partial_\mu \bar{c}^a \tau^a + (A_\mu \times \bar{c})^a \tau^a = D_\mu \bar{c}^a \tau^a$$

então:

$$\bar{R}_\mu = D_\mu \bar{c} \qquad \text{(H-35)}$$

Ainda com a parte da curvatura proporcional a $dx^\mu \wedge d\theta$, os termos multiplicados por $\bar{\theta}$ nos conduzem a:

$$(i\, d_\mu B^a - i\, S^a_\mu)\, \tau^a =$$

$$= (-i\, A^a_\mu B^c - R^b_\mu\, \bar{c}^c - \bar{c}^b R^c_\mu + i B^b A^c_\mu)\, \tau^b \tau^c \qquad \text{(H-36)}$$

que pode ser desenvolvida:

$$(i\, d_\mu B^a - i\, S^a_\mu)\, \tau^a =$$

$$= \left\{ -i\,(A^b_\mu B^c\, \tau^b \tau^c - A^c_\mu B^b \tau^b \tau^c) - (R^b_\mu \bar{c}^c - R^c_\mu \bar{c}^b)\, \tau^b \tau^c \right\} =$$

$$= -i\,(A^b_\mu B^c\, \tau^b \tau^c - A_\mu B\, \tau^c \tau^b) - (R^b_\mu \bar{c}^c\, \tau^b \tau^c - R^b_\mu \bar{c}^c \tau^c \tau^b) =$$

$$= -i A^a B^c [\tau^b, \tau^c] - R^b \bar{c}^c [\tau^b, \tau^c] = -i A^b B^c f^{abc} \tau^a - R^b \bar{c}^c f^{bca} \tau^a =$$

$$= -i\,(A_\mu \times B)^a\, \tau^a - (R_\mu \times \bar{c})^a\, \tau^a ,$$

ou seja,

$$S^a_\mu \tau^a = \left\{ d_\mu B^a + (A_\mu \times B)^a \right\} \tau^a - i\,(R_\mu \times \bar{c})^a\, \tau^a .$$

Como indicamos mais adiante $R_\mu = D_\mu c$ (H-39), portanto:

$$S_\mu = D_\mu B - i\, D_\mu c \times \bar{c} \qquad \text{(H-37)}$$

Finalmente tomando os termos proporcionais a $dx^\mu \wedge d\bar{\theta}$, igualando a zero e isolando termos independentes de θ e $\bar{\theta}$ obtemos de (H-3), (H-8), (H-13) e (H-15):

$$(\partial_\mu c^a - R^a_\mu)\,\tau^a = -(A^b_\mu c^c - c^b A^c_\mu)\,\tau^b\tau^c \qquad \text{(H-38)}$$

que é similar à relação (H-34). Assim por analogia com (H-35) chegamos a:

$$R_\mu = D_\mu c \qquad \text{(H-39)}$$

A parte da curvatura diferente de zero é aquela proporcional a $dx^\mu \wedge dx^\nu$:

$$\Omega = \phi_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu \qquad \text{(H-40)}$$

Usando as relações (H-2) e (H-12) calculamos $\phi_{\mu\nu}$:

$$\phi_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu = \partial_\mu(A^a_\nu + \theta\bar{R}^a_\nu + \bar{\theta}R^a_\nu + i\theta\bar{\theta}S^a_\nu)\,\tau^a\, dx^\mu \wedge dx^\nu +$$

$$+\Big[A^b_\mu A^c_\nu + A^b_\mu\theta\bar{R}^c_\nu + A^b_\mu\bar{\theta}R^c_\nu + iA^b_\mu\theta\bar{\theta}S^c_\nu + \theta\bar{R}^b_\mu A^c_\nu + \bar{\theta}R^b_\mu A^c_\nu +$$

$$+\theta\bar{R}^b_\mu\bar{\theta}R^c_\nu + \bar{\theta}R^b_\mu\theta\bar{R}^c_\nu + i\theta\bar{\theta}S^b_\mu A^c_\nu\Big]\,\tau^b\tau^c\, dx^\mu \wedge dx^\nu \qquad \text{(H-41)}$$

Estamos interessados apenas na parte de $\phi_{\mu\nu}$ que independe de θ e $\bar{\theta}$:

$$(\partial_\mu A^a_\nu \tau^a + A^b_\mu A^c_\nu \tau^b\tau^c)\, dx^\mu \wedge dx^\nu =$$

$$= \Big\{\frac{1}{2}(\partial_\mu A^a_\nu \tau^a + \partial_\mu A^a_\nu \tau^a) + \frac{1}{2}(\partial_\mu A^a_\nu \tau^a - \partial_\mu A^a_\nu \tau^a) +$$

$$+\frac{1}{2}(A^b_\mu A^c_\nu \tau^b\tau^c + A^b_\mu A^c_\nu \tau^b\tau^c) + \frac{1}{2}(A^b_\mu A^c_\nu \tau^b\tau^c - A^c_\mu A^b_\nu \tau^b\tau^c)\Big\}\, dx^\mu \wedge dx^\nu$$

como $dx^\mu \wedge dx^\nu$ é antissimétrico, apenas a parte antissimétrica desta expressão contribui:

$$\phi_{\mu\nu}\Big|_{\substack{\text{independente}\\ \text{de } \theta \text{ e } \bar\theta}} = \frac{1}{2}\left\{\partial_\mu A^a_\nu \tau^a - \partial_\nu A^a_\mu \tau^a + A^b_\mu A^c_\nu \tau^b \tau^c - A^b_\mu A^c_\nu \tau^b \tau^c\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\partial_\mu A^a_\nu \tau^a - \partial_\nu A^a_\mu \tau^a + A^b_\mu A^c_\nu [\tau^b, \tau^c]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\partial_\mu A^a_\nu \tau^a - \partial_\nu A^a_\mu \tau^a + (A_\mu \times A_\nu)^a \tau^a\right\},$$

assim:

$$\phi_{\mu\nu}\Big|_{\substack{\text{independente}\\ \text{de } \theta \text{ e } \bar\theta}} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \tag{H-42}$$

O que fizemos até aqui foi verificar as relações de (97) a (104) que correspondem neste apêndice às relações (H-39), (H-35), (H-37), (H-29), (H-24), (H-31), (H-26), (H-33) e (H-42), obedecendo a ordem de apresentação no texto.

Vamos verificar agora a expressão (109). De (91) percebemos que:

$$\phi_\mu \phi^\mu\Big|_{\theta\bar\theta} = 2i\,\theta\bar\theta A_\mu (D^\mu B - i D^\mu c \times \bar c) + 2\,\theta\bar\theta D_\mu c\, D^\mu \bar c$$

onde usamos também (H-37), (H-39) e (H-35). Derivando por θ e $\bar\theta$:

$$\frac{\partial}{\partial\bar\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\phi_\mu\phi^\mu\Big|_{\substack{\text{independente}\\ \text{de } \theta \text{ e } \bar\theta}} = -A_\mu D^\mu B + i A_\mu D^\mu c \times \bar c + i D_\mu c\, D^\mu \bar c.$$

Esta expressão pode ser colocada em uma forma mais conveniente:

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}\frac{\partial}{\partial\theta}\,\phi_\mu\phi^\mu\Big|_{\substack{\text{independente}\\ \text{de }\theta\text{ e }\bar{\theta}}} =$$

$$= -A_\mu\partial^\mu B - A^a_\mu f^{abc}A^{\mu b}B^c + iA^a_\mu f^{abc}D^\mu c^b\bar{c}^c - i\partial_\mu\bar{c}D^\mu c - if^{cbc}A_\mu\bar{c}^c D^\mu c^a.$$

Usando a propriedade de antissimetria de f^{abc} obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}\frac{\partial}{\partial\theta}\,\phi_\mu\phi^\mu\Big|_{\substack{\text{independente}\\ \text{de }\theta\text{ e }\bar{\theta}}} = -A_\mu\partial^\mu B - i\,\partial_\mu\bar{c}\,D^\mu c \qquad \text{(H-43)}$$

que corresponde a igualdade procurada.

Apêndice I

Estudo das Rotações no Super-espaço

Escolhemos a métrica referente a parte grassmaniana do super-espaço conforme trabalhos anteriores[12] pela matriz antissimétrica. 2 x 2: $\varepsilon^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. A simetria que descreve as rotações neste sub-espaço é uma invariância pelo grupo simplético $Sp(2)$[12], cujos geradores na representação fundamental são dados pelas três matrizes de Pauli: σ_1 , $i\sigma_2$ e σ_3 . Estes geradores atuam nas coordenadas grassmaniannas que definimos por $(-i\theta, \bar{\theta})$:

$$\delta \begin{bmatrix} -i\theta \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} = (a_1\sigma_1 + a_2 i\sigma_2 + a_3\sigma_3) \begin{bmatrix} -i\theta \\ \theta \end{bmatrix} =$$

$$= \left\{ (a_1 + a_2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (a_1 - a_2) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} -i\theta \\ \theta \end{bmatrix} \quad \text{(I-1)}$$

Observando como cada matriz da transformação acima age nas coordenadas percebemos que os geradores de $Sp(2)$ podem ser realizados pelos operadores:

$$J_1^{(\theta)} = -i\theta \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \quad \text{(I-2)}$$

$$J_-^{(\theta)} = -i\bar{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \text{(I-3)}$$

$$J_3^{(\theta)} = \frac{1}{2} \left\{ \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \right\} \quad \text{(I-4)}$$

Preferimos aqui trabalhar com $J_+^{(\theta)}$ e $J_-^{(\theta)}$, mas também podemos usar $J_1^{(\theta)} = J_+^{(\theta)} + J_-^{(\theta)}$ e $J_2^{(\theta)} = J_+^{(\theta)} - J_-^{(\theta)}$. A álgebra que estes geradores satisfazem é dada por:

$$[J_+^{(\theta)}, J_-^{(\theta)}] = 2 J_3^{(\theta)} \tag{I-5}$$

$$[J_-^{(\theta)}, J_3^{(\theta)}] = J_-^{(\theta)} \tag{I-6}$$

$$[J_+^{(\theta)}, J_3^{(\theta)}] = J_+^{(\theta)} \tag{I-7}$$

Como os operadores acima agem apenas nas variáveis de Grassmann podemos combiná-los com os geradores do grupo de rotação (J_+, J_- e J_3) do espaço ordinário $x_\mu (\mu = 0, 1, 2, 3)$:

$$S_+ = J_+ + J_+^{(\theta)} \tag{I-8}$$

$$S_- = J_- + J_-^{(\theta)} \tag{I-9}$$

$$S_3 = J_3 + J_3^{(\theta)} \tag{I-10}$$

e compor uma álgebra mais geral:

$$[S_+, S_-] = 2 S_3 \tag{I-11}$$

$$[S_+, S_3] = - S_+ \tag{I-12}$$

$$[S_-, S_3] = + S_- \tag{I-13}$$

que descreve a rotação no super-espaço (x_μ , $-i\theta, \bar{\theta}$).

Apêndice J

Invariância por reparametrização

Consideremos a ação:

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{L}\, d\tau \tag{J-1}$$

onde:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\, \dot{x}^{\mu} \dot{x}_{\mu} \frac{1}{e} - m^2 e \tag{J-2}$$

mantendo os extremos fixos, para que A seja invariante por reparametrização do parâmetro $\tau : \tau \rightarrow \tau'(\tau)$, o segundo termo da lagrangeana nos fornece:

$$e(\tau)\, d\tau = e'(\tau')\, d\tau' \tag{J-3}$$

ou melhor,

$$e'(\tau') = \frac{d\tau}{d\tau'}\, e(\tau) \tag{J-4}$$

e o primeiro termo nos conduz a:

$$x^{\mu}(\tau) = x^{\mu'}(\tau') \tag{J-5}$$

Trabalhando com uma reparametrização infinitesimal:

$$\tau' = \tau + \varepsilon(\tau) \tag{J-6}$$

obtemos a partir de (J-4):

$$e'(\tau+\varepsilon) = \frac{d\tau}{d\tau'}\, e(\tau) \tag{J-7}$$

ou:

$$e'(\tau) + \varepsilon \frac{d e'}{d\tau'} = (1-\dot{\varepsilon})\, e(\tau) \tag{J-8}$$

e assim:

$$\bar{\delta} e(\tau) = e'(\tau) - e(\tau) = -\dot{\varepsilon}\, e(\tau) - \varepsilon \frac{d e'(\tau)}{d\tau'} \tag{J-9}$$

onde $\bar{\delta} e(\tau)$ indica variação na forma do campo $e(\tau)$. Nesta aproximação, desprezando termos de 2ª ordem em ε, temos $\varepsilon\, e(\tau) = \varepsilon\, e'(\tau)$ o que nos permite escrever:

$$\varepsilon \frac{d e'(\tau)}{d\tau'} = \varepsilon \frac{d e(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{d\tau'} = \varepsilon \frac{d e(\tau)}{d\tau} (1+\varepsilon) \simeq \varepsilon \frac{d e(\tau)}{d\tau} \tag{J-10}$$

e concluir que:

$$\bar{\delta} e(\tau) = -\frac{d}{d\tau}(e\,\varepsilon) \tag{J-11}$$

Fazendo a transformação infinitesimal em (J-5) obtemos:

$$x^{\mu'}(x+\varepsilon) = x^{\mu'}(\tau) + \varepsilon \frac{d x^{\mu'}(\tau)}{d\tau} \tag{J-12}$$

portanto:

$$\bar{\delta} x^{\mu} = x^{\mu'}(\tau) - x^{\mu}(\tau) = -\varepsilon \frac{d x^{\mu}(\tau)}{d\tau} \,. \tag{J-13}$$

Podemos agora demonstrar que a transformação dos campos (J-9) e (J-13) mantém a lagrangeana invariante a menos de termos de superfície.

Notemos que a ação (J-1) se transforma por reparametrização da seguinte forma:

$$\delta A = \int_{\tau_1'}^{\tau_2'} \delta \mathcal{L}\, d\tau + \int_{\tau_1'}^{\tau_2'} \mathcal{L}\, \delta(d\tau) \qquad \text{(J-14)}$$

onde a variação da lagrangeana é:

$$\delta \mathcal{L}(x^\mu, e; \tau) = \bar{\delta} \mathcal{L} + \varepsilon \dot{\mathcal{L}} \qquad \text{(J-15)}$$

$\bar{\delta} \mathcal{L}$ é a variação na forma dos campos $x^\mu(\tau)$ e $e(\tau)$ e $(\varepsilon \dot{\mathcal{L}})$ é a variação em τ . Como

$$d\tau' = \frac{d\tau'}{d\tau}\, d\tau = (1 + \dot{\varepsilon})\, d\tau \qquad \text{(J-16)}$$

para transformações infinitesimais, então:

$$\delta(d\tau) = \dot{\varepsilon}\, d\tau \qquad \text{(J-17)}$$

Assim escrevemos a variação de ação (J-14):

$$\delta A = \int_{\tau_1'}^{\tau_2'} (\varepsilon \dot{\mathcal{L}} + \bar{\delta} \mathcal{L} + \mathcal{L} \dot{\varepsilon})\, d\tau \qquad \text{(J-18)}$$

ou seja,

$$\delta A = \int_{\tau_1 + \varepsilon_1}^{\tau_2 + \varepsilon_2} \left\{ \frac{d}{d\tau} (\varepsilon \mathcal{L}) + \bar{\delta} \mathcal{L} \right\} d\tau \qquad \text{(J-19)}$$

mas construimos A invariante por reparametrização $(\delta A = 0)$:

$$\bar{\delta} \mathcal{L} = -\frac{d}{d\tau}(\varepsilon \mathcal{L}) \qquad \text{(J-20)}$$

Como a borda esta fixa $(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0)$, esta expressão nos mostra que a variação na forma dos campos mantém a ação invariante.

Apêndice K

Ação quântica da partícula sem spin num espaço curvo

A ação (154):

$$A = \int d\tau\, d\sigma\, \chi^*(\tau,\sigma)\left\{ i\frac{\partial}{\partial\sigma} - \frac{1}{\alpha}\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2 + \frac{\partial}{\partial c}\frac{\partial}{\partial \bar{c}}\right]\right\}\chi(\tau,\sigma) \quad \text{(K-1)}$$

pode ser desenvolvida usando a transformada de Fourier da função $\chi(\tau,\sigma)$:

$$\chi(\alpha) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dy^-\, e^{i\alpha y^-}\,\tilde{\chi}(y^-) \quad \text{(K-2)}$$

como indicamos no texto. Aplicando a transformada na parte contendo o hamiltoniano de (J-1) temos:

$$\frac{1}{4\pi^2}\int dx\, d\bar{c}\, dc\, d\sigma\, d\alpha\, \frac{1}{\alpha}\,\alpha\int dy^{-\prime}\, e^{-i\alpha y^{-\prime}}\,\tilde{\chi}^*(y^{-\prime})\,\frac{1}{\alpha}\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \right.$$

$$\left. + m^2 + \frac{\partial}{\partial c}\frac{\partial}{\partial \bar{c}}\right]\alpha\int dy^-\, e^{i\alpha y^-}\,\tilde{\chi}(y^-) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int dx\, d\bar{c}\, dc\, d\sigma\, d\alpha\, \tilde{\chi}^*(y^{-\prime})\, e^{-i\alpha(y^- - y^{-\prime})}\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2 + \frac{\partial}{\partial c}\frac{\partial}{\partial \bar{c}}\right]\tilde{\chi}(y^-) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int dx\, d\bar{c}\, dc\, d\sigma\, dy^{-\prime} dy^-\, \tilde{\chi}^*(y^{-\prime})\,\delta(y^- - y^{-\prime})\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2 + \frac{\partial}{\partial c}\frac{\partial}{\partial \bar{c}}\right]\tilde{\chi}(y^-) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int dx\, d\bar{c}\, dc\, d\sigma\, dy^-\, \tilde{\chi}^*(y^-)\left[-\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu} + m^2 + \frac{\partial}{\partial c}\frac{\partial}{\partial \bar{c}}\right]\tilde{\chi}(y^-) \quad \text{(K-3)}$$

Aplicando agora a transformada na parte de (K-1) que contém a derivada $\frac{\partial}{\partial \tau}$ obtemos:

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int dx\, d\bar{c}\, dc\, d\tau\, d\alpha\, \frac{1}{\alpha}\alpha\int dy^{-\prime}\, e^{-i\alpha y^{-}}\tilde{\chi}^{*}(y^{-})\, i\frac{\partial}{\partial \tau}\alpha\int dy^{-}\, c^{i\alpha y^{-}}\tilde{\chi}(y^{-}) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int dx\, d\bar{c}\, dc\, d\tau\, d\alpha \int dy^{-\prime}\, e^{-i\alpha y^{-\prime}}\, \tilde{\chi}^{*}(y^{-\prime})\frac{\partial}{\partial \tau}\int dy^{-}\frac{d}{dy^{-}}e^{i\alpha y^{-}}\tilde{\chi}(y^{-}) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int dx\, d\bar{c}\, dc\, d\tau\, d\alpha\, dy^{-\prime}\, dy^{-}\tilde{\chi}^{*}(y^{-\prime})\frac{\partial^2}{\partial \tau\, dy^{-}}e^{i\alpha(y^{-}-y^{-\prime})}\tilde{\chi}(y^{-}) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int dx\, d\bar{c}\, dc\, d\tau\, dy^{-\prime}\, dy^{-}\tilde{\chi}^{*}(y^{-})\frac{\partial^2}{\partial \tau\, dy^{-}}\,\delta(y^{-}-y^{-\prime})\,\tilde{\chi}(y^{-}) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int dx\, d\bar{c}\, dc\, d\tau\, dy^{-}\tilde{\chi}^{*}(y^{-})\frac{\partial^2}{\partial \tau\, dy^{-}}\,\tilde{\chi}(y^{-}) \qquad \text{(K-4)}$$

Portanto (K-1) pode ser escrito, usando (K-3) e (K-4):

$$A = -\frac{1}{4\pi^2}\int dx\, dc\, d\bar{c}\, d\tau\, dy^{-}\tilde{\chi}^{*}(y^{-})\left\{\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial}{dy^{-}} + \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - m^2 - \frac{\partial}{\partial c}\frac{\partial}{\partial \bar{c}}\right\}\tilde{\chi}(y^{-}) \qquad \text{(K-5)}$$

Para colocar esta ação em uma forma mais conveniente, definimos as variáveis :

$$y^{-} = y^{D} - y^{D+1} \qquad \text{(k-6)}$$

$$y^{+} = \tau = y^{D} + y^{D-1} \qquad \text{(K-7)}$$

ou seja,

$$y^D = \frac{1}{2} y^- + \frac{1}{2} \tau \tag{K-8}$$

$$y^{D+1} = \frac{1}{2} \tau - \frac{1}{2} y^- \tag{K-9}$$

e construimos as derivadas:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^{D^2}} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial y^-} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial y^{-2}} \tag{K-10}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^{D+1^2}} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau y^-} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial y^{-2}} \tag{K-11}$$

Subtraindo (K-10) de (K-11):

$$\frac{\partial^2}{\partial y^{D^2}} - \frac{\partial^2}{\partial y^{D+1^2}} = \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial y^-} \tag{K-12}$$

Usando esta relação a ação (K-5) assume a forma dada no texto pela igualdade (154):

$$A = -\frac{1}{4\pi^2} \int dx\, d\bar{c}\, dc\, d\tau\, dy^- \tilde{\chi}^* \left\{ \eta^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \frac{\partial}{\partial y^{\hat{\mu}}} \frac{\partial}{\partial y^{\hat{\nu}}} - m^2 \frac{\partial}{\partial c} \frac{\partial}{\partial \bar{c}} \right\} \tilde{\chi} \tag{K-13}$$

onde: $\hat{\mu}$ e $\hat{\nu} = 0, 1 \ldots D+1$, $\eta^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \hat{\mu} \neq \hat{\nu} \\ 1 & \text{se } \hat{\mu} = \hat{\nu} \neq D+1 \\ -1 & \text{se } \hat{\mu} = \hat{\nu} = D+1 \end{cases}$

e $y^{\hat{\mu}}$ para $\hat{\mu} < D$ é o próprio x^μ $(\mu = 0, 1, \ldots D-1)$.

Apêndice L

BRST e Sistemas com Vínculos

Apresentamos neste apêndice uma revisão dos conceitos principais de sistemas com vínculos baseada na referência [21]. Usando estes conceitos vamos indicar o gerador BRST e o hamiltoniano invariante por ele, segundo referência [19].

Tomemos um hamiltoniano de partícula livre H_0 com n vínculos $\phi_i (i=1,2,\ldots,n)$ que podem ser divididos em dois grupos:

$$\Delta_i = 0 \qquad (i=1,\ldots,k) \tag{L-1}$$

$$\chi_\ell = 0 \qquad (\ell = k+1,\ldots,n) \tag{L-2}$$

Chamamos de vínculos de primeira classe Δ_i aqueles em que:

$$\{\Delta_i, \Delta_j\}_{PP} \approx 0 \tag{L-3}$$

onde o símbolo "$\approx$" indica que calculamos os parênteses de Poisson antes de usar a condição de vínculo (L-1). Os parênteses de Poisson de duas quantidades A e B são definidos por, com $(q^A;\pi_A)=(q^i,\theta^\alpha;p_i,\pi_\alpha)$:

$$\{A,B\}_{PP} = \frac{\partial A}{\partial q^A}\bigg|_r \frac{\partial B}{\partial \pi_A}\bigg|_\ell - (-1)^{\eta_A \eta_B} \frac{\partial B}{\partial q^A}\bigg|_r \frac{\partial A}{\partial \pi_A}\bigg|_\ell ; \tag{L-4}$$

r e ℓ indicam derivadas à direita e à esquerda e onde incluimos coordenadas grassmaniannas θ^α e seus momen-

tos π_α , além das coordenadas ordinárias q^i. η_A e η_B são os números de férmions de A e B . Os vínculos χ_ℓ que não satisfazem a condição (L-3) são chamados vínculos de segunda classe.

Para que a teoria seja consistente esperamos que:

$$\{\phi_i , H_T\}_{PP} \approx 0 \qquad \text{(L-5)}$$

onde $H_T = H_0 + \lambda_i \phi_i$, λ_i são os multiplicadores de Lagrange. Se esta igualdade não for satisfeita dois caminhos podem ser tomados: ou é necessário impor condições sobre λ_i , por exemplo, fazê-los igual a zero, ou se possível introduzir novos vínculos. Estes vínculos secundários uma vez identificados são tratados com os outros vínculos já existentes.

No tratamento de Dirac[21] podemos eliminar os vínculos de segunda classe introduzindo novos parênteses de Poisson:

$$\{A, B\}^* = \{A, B\}_{PP} - \{A, \chi_m\}_{PP} \Delta^{-1}_{mn} \{\chi_n, B\}_{PP} \qquad \text{(L-6)}$$

onde $\Delta_{mn} = \{\chi_m, \chi_n\}_{PP}$. Passamos para a teoria quântica determinando as relações de comutação ou anticomutação, dependendo da natureza das variáveis envolvidas, correspondentes a estes novos parênteses de Poisson.

Batalin e Vilkovisky[19] mostraram que podemos chegar ao gerador de BRST através dos vínculos de primeira classe. Para obter este resultado notamos que as condições (L-3)

e (L-5) podem ser escritas:

$$\{\Delta_r, \Delta_s\}^* = \Delta_t \, U^t{}_{rs} \tag{L-7}$$

$$\{H_0, \Delta_r\}^* = \Delta_s \, V^s{}_r \tag{L-8}$$

onde Δ_r são todos os vínculos primários e secundários de primeira classe da teoria. Completamos, então, nosso sistema com novos graus de liberdade: (η^i, ρ_i) com estatística oposta a dos vínculos Δ_i, assim, se para j fixo Δ_j é bosônico então η^j e ρ_j são fermiônicos; impomos também que o número de fantasma de η^i seja $+1$ e de ρ_i seja -1. Introduzindo uma função Ψ fermiônica arbitrária das variáveis ordinárias do sistema $(q^A; \pi_A) = (q^i, \theta^\alpha; p_i, \pi_\alpha)$ e dos graus de liberdade extras, podemos escrever o seguinte hamiltoniano[19]:

$$H_+ = H_0 + \rho_i V^i{}_j \eta^j - \{\Psi, \Omega\}^* \tag{L-9}$$

sendo Ω o gerador de BRST que é escrito da seguinte forma:

$$\Omega = \Delta_i \eta^i + \frac{1}{2} (-1)^{n_i} \rho_\ell U^\ell{}_{ij} \eta^j \eta^i \tag{L-10}$$

onde n_i é zero para bósons e $+1$ para férmions. Este gerador tem caráter fermiônico, número de fantasma $+1$, mantém a hamiltoniana (L-9) invariante e satisfaz a relação:

$$\{\Omega, \Omega\}^* = 0 . \tag{L-11}$$

Fradkin e Vilkovisky[28] mostraram que o funcional gerador correto integrado sobre o espaço de fase completo não depende da escolha da função Ψ :

$$Z_\Psi = \int dq^A d\pi^A d\eta \, d\rho \, \exp\left\{ i \int dt \left(\pi_A \dot{q}^A + \rho_i \eta^i - H_\Psi \right) \right\} \qquad \text{(L-12)}$$

REFERÊNCIAS

[1] B. Mielnik, J. Math. Phys. 25(12), 3387(84).

[2] D. J. Fernández C., Lett. Math. Phys. 8, 337(84).

[3] V. A. Kostelecký e M. M. Nieto
"Supersymmetry and the relationship between the Coulomb and oscillator problems in arbitrary dimensions".
Los Alamos preprint, N M 87545(1985).

[4] M. M. Nieto, Am. J. Phys. 47(12), 1067(79).

[5] M. Abramowitz e I. A. Stegun - "Handbook of Mathematical Functions" - Dover Publications (1965)

[6] F. H. J. Cornish, J. Phys. A: Math. Gen. 17, 323(84).
A. C. Barut, C. K. E. Schneider e R. Wilson, J. Math. Phys. 20, 2244(79).
A. C. Chen, J. Math. Phys. 23, 412(82).
T. Iwai, J. Math. Phys. 23, 1093(82).
I. Kimel, Rev. Bras. Fís. 12, 729(82).
J. Bellandi Fº e M. L. T. Menon
"The Kustaanheiro - Stiefeel Transformation in a Spinor Representation".
Preprint T H : 02/86 (Unicamp).

[7] L. I. Schiff - "Quantum Mechanics".
McGraw-Hill Book Company - Kōgakusha Company, LTD.
3ª edição

[8] F. Ravndal, "Elementary Supersymmetry".
(1984) CERN school at Physics.

[9] V. A. Kostelecký e M. M. Nieto, Phys. Rev. Lett. 53(24), 2285(84).

[10] T. Kugo e S. Uehara, Nucl. Phys. B 197, 378(82).
D. Dalmazi - "Estudo Crítico do Cálculo da Anomalia de Weyl na Corda pelo Método de Fujikawa".
Dissertação de Mestrado IFT. TM - 03/87.

[11] L. Bonora e M. Tonin, Phys. Lett. 98 B, 48(81).

[12] J. Hoyos, M. Quirós, J. Ramirez Mittelbrunn e F. J. Urries, Nucl. Phys. B 218, 159(83).
R. Delbourgo e P. D. Jawis, J. Phys. 15 A, 611(82).

[13] K. Ito, Phys. Lett. 155 B, 260(85).

[14] A. Neveu e P. West.
"Unification of the Poincaré Group whit BRST and Parisi-Sourlas Supersymmetry".
Preprint CERN-TH 4547/86.

[15] B. Durhuus, "Quantum Theory of string".
Lectures given at NBI/ Nordita (82).

[16] S. Coleman e J. Mandula, Phys. Rev. 1251(67).

[17] R. Haag, J. T. Lopuszanski e M. Sohnius, Nucl. Phys. B 88, 257(75).

[18] C. P. Galvão e C. Teitelboim, J. Math. Phys. 21(7), 1863(80).

[19] I. A. Batalin e G. A. Vilkovisky, Phys. Lett., 69 B, 309(77).
A. H. Zimerman, "Teoria das Cordas".
Notas do curso dado no IFT. (87).

[20] G. Parisi e N. Sourlas, Phys. Rev. Lett. 43, 744(79).

[21] P. A. M. Dirac - "Lectures on Quantum Mechanics".
Belfer Graduate School of Science - Monographs Series - Nº 2 (64).

[22] H. Aratyn, R. Ingermanson e A. J. Niemi.
"Parisi-Sourlas férmions from Ramond Superstring".
Preprint DOE/ER/01545-395 (87).

[23] F. Iachello e D. Scholten, Phys. Rev. Letts. 43, 679(79).

[24] F. Legovini - "Supersymmetry".
Lectures given at the Scuola di Perfeziomento in Scienze Cibernetiche e Fisiche of the University of Salerno.

[25] Ta-Pei Cheng, Ling-Fong Li- "Gauge Theory of Elementary Particle Physics".
Oxford Science Publication.

[26] G. Curci e R. Ferrari, Phys. Lett. 63 B, 91(76).

[27] C. Becchi, A. Rouet e A. Stora, Phys. Lett. 52 B, 344 (74); Comm. Math. Phys. 42, 127(75).

[28] E. S. Fradkin e G. A. Vilkovisky, Phys. Lett. 55 B, 224(75).

[29] J. West e J. Bagger; "Supersymmetry and Supergravity" Princeton Series in Physics, Princeton University Press (83).

[30] A. Barducci, R. Casalbuoni, D. Dominici e R. Gatto.
"The IOSP(D,2/2) Symmetry from the BRST Quantization of the Relativistic Spinning Particle".
Preprint UGVA - DPT 1987/ 01-527.