

OLAÉRCIO ISRAEL MACHADO JÚNIOR

**ESTUDO E APLICAÇÃO DE DIFERENTES MÉTODOS DE RESOLUÇÃO PARA
PROBLEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES EM PRESENÇA DE ATRITO**

Guaratinguetá
2015

OLAÉRCIO ISRAEL MACHADO JÚNIOR

ESTUDO E APLICAÇÃO DE DIFERENTES MÉTODOS DE RESOLUÇÃO PARA
PROBLEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES EM PRESENÇA DE ATRITO

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. José Geraldo Trani Brandão

Guaratinguetá
2015

M149e	Machado Júnior, Olaércio Israel Estudo e Aplicação de Diferentes Métodos de Resolução para Problemas Dinâmicos Não-Lineares em Presença de Atrito / Olaércio Israel Machado Júnior – Guaratinguetá : [s.n], 2015. 57 f. : il. Bibliografia : f. 55-57 Trabalho de Graduação em Engenharia Mecânica – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2015. Orientador: Prof. Dr. José Geraldo Trani Brandão 1. Vibração 2. Dinâmica I. Título CDU 534.1
-------	---

OLAÉRCIO ISRAEL MACHADO JÚNIOR

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE
DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE "GRADUADO EM
ENGENHARIA MECÂNICA"

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA


Prof. Dr. MARCELO SAMPAIO MARTINS
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. JOSÉ GERALDO TRANI BRANDÃO
Orientador/UNESP-FEG


Prof. Dr. MAURO PEDRO PERES
UNESP-FEG


Prof. Dr. MARCELO SAMPAIO MARTINS
UNESP-FEG

Fevereiro de 2015

DADOS CURRICULARES
OLAÉRCIO ISRAEL MACHADO JÚNIOR

NASCIMENTO	26.02.1990 – APARECIDA / SP
FILIAÇÃO	Olaércio Israel Machado Sônia Regina de Oliveira Machado
2006/2008	Curso Técnico em Mecânica Industrial Colégio Técnico Industrial de Guaratinguetá "Prof. Carlos Augusto Patrício Amorim" Universidade Estadual Paulista
2009/2014	Curso de Graduação Engenharia Mecânica Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá Universidade Estadual Paulista

aos meus pais, irmão e amigos que
sempre me incentivaram nessa
caminhada rumo à conclusão do
curso superior.

MACHADO, O. I., Jr. **Estudo e aplicação de diferentes métodos de resolução para problemas dinâmicos não-lineares em presença de atrito**. 2015. 57 f. Trabalho de Graduação (Graduação em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2014.

RESUMO

O fenômeno do atrito está presente em sistemas mecânicos com duas ou mais superfícies em contato, o qual pode causar sérios danos nas estruturas. Sua compreensão em diversos problemas dinâmicos se tornou fruto de pesquisas devido ao seu comportamento não-linear. Torna-se necessário conhecer e estudar minuciosamente cada modelo de atrito existente na literatura e os métodos de resolução não-linear para definir qual será o mais adequado ao problema em análise. Um modelo de atrito muito utilizado é o Atrito de Coulomb, o qual vem sendo considerado na maioria dos problemas estudados no centro de pesquisa francês Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés (LMSSC), local onde a pesquisa se iniciou. Com relação aos métodos de resolução, utiliza-se comumente o método do Balanço Harmônico. Para expandir os conhecimentos sobre os modelos de atrito e os métodos de resolução não-linear, realizou-se uma pesquisa para identificar e conhecer potenciais estudos que podem ser aplicados nas linhas de pesquisa existentes no LMSSC e, dessa forma, obter melhores resultados finais. Os modelos de atrito identificados são divididos em estáticos e dinâmicos. Os modelos estáticos podem ser: Modelos Clássicos, Modelo de Karnopp e Modelo de Armstrong. Já os modelos dinâmicos são: Modelo de Dahl, Modelos de Bliman e Sorine e Modelo de LuGre. Com relação aos métodos não-lineares, estuda-se os Métodos Temporais e os Métodos de Aproximação. Os modelos de atrito analisados com o auxílio do software Matlab são validados a partir de pesquisas encontradas na literatura, comprovando a eficácia da programação desenvolvida.

PALAVRAS-CHAVE: Vibração Mecânica. Modelos de Atrito. Métodos Não-lineares. Análise Dinâmica.

MACHADO, O. I., Jr. **Study and application of resolution methods for nonlinear dynamic friction problems**. 2015. 57 p. Graduate Work (Graduate in Mechanical Engineering) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2014.

ABSTRACT

The friction phenomena is present in mechanical systems with two surfaces that are in contact, which can cause serious damage to structures. Your understanding in many dynamic problems became the target of research due to its nonlinear behavior. It is necessary to know and thoroughly study each existing friction model found in the literature and nonlinear methods to define what will be the most appropriate to the problem in question. One of the most famous friction model is the Coulomb Friction, which is considered in the studied problems in the French research center Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés (LMSSC), where this search began. Regarding the resolution methods, the Harmonic Balance Method is generally used. To expand the knowledge about the friction models and the nonlinear methods, a study was carried out to identify and study potential methodologies that can be applied in the existing research lines in LMSSC and then obtain better final results. The identified friction models are divided into static and dynamic. Static models can be Classical Models, Karnopp Model and Armstrong Model. The dynamic models are Dahl Model, Bliman and Sorine Model and LuGre Model. Concerning about nonlinear methods, we study the Temporal Methods and Approximate Methods. The friction models analyzed with the help of Matlab software are verified from studies in the literature demonstrating the effectiveness of the developed programming.

KEYWORDS: Mechanical Vibration. Friction Models. Nonlinear Methods. Dynamic Analysis.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - MASSA EM MOVIMENTO.....	15
FIGURA 2 - CURVA DEMONSTRANDO A RELAÇÃO ENTRE VELOCIDADE E FORÇA DE ATRITO.....	16
FIGURA 3 - MODELO DE ATRITO DE COULOMB.....	17
FIGURA 4 - MODELO DE ATRITO ESTÁTICO.	18
FIGURA 5 - CARACTERÍSTICAS DO ATRITO EM FUNÇÃO DA FORÇA EXTERNA.	18
FIGURA 6 - MODELO DE ATRITO DE COULOMB COMBINADO AO MODELO DE ATRITO VISCOSO.....	19
FIGURA 7 - MODELO DE ATRITO DE STRIBECK.	20
FIGURA 8 - MODELO DE ATRITO DE KARNOPP.....	21
FIGURA 9 - REAL CONTATO ENTRE DUAS SUPERFÍCIES.....	24
FIGURA 10 - EVOLUÇÃO DA FORÇA DE ATRITO AO LONGO DA VELOCIDADE.	24
FIGURA 11 - PRÉ-DESLIZAMENTO.	25
FIGURA 12 - FORÇA DE SEPARAÇÃO EM FUNÇÃO DA TAXA DA FORÇA EXTERNA.....	25
FIGURA 13 - EXPERIÊNCIA DE SIMULAÇÃO DO MOVIMENTO ADERÊNCIA-DESLIZAMENTO.....	26
FIGURA 14 - RESULTADOS DA SIMULAÇÃO DO MOVIMENTO ADERÊNCIA-DESLIZAMENTO.	26
FIGURA 15 - FENÔMENO DA HISTERESE.....	27
FIGURA 16 - MODELO DE ATRITO DE DAHL.....	28
FIGURA 17 - CONCEPÇÃO DO MODELO DE ATRITO DE LUGRE.....	30
FIGURA 18 - ALGORITMO PARA ESQUEMA DE INTEGRAÇÃO DE NEWMARK.....	35
FIGURA 19 - GRÁFICO OBTIDO NO MATLAB PARA PRIMEIRA VALIDAÇÃO.....	45
FIGURA 20 - GRÁFICO ENCONTRADO NA LITERATURA.....	45
FIGURA 21 - GRÁFICOS REFERENTES À SEGUNDA VALIDAÇÃO.....	46
FIGURA 22 - RESPOSTA DINÂMICA E DIAGRAMA DE FASES PARA O ATRITO DE COULOMB.	48
FIGURA 23 - RESPOSTA DINÂMICA E DIAGRAMA DE FASES PARA O ATRITO ESTÁTICO.....	49
FIGURA 24 - RESPOSTA DINÂMICA E DIAGRAMA DE FASES PARA O ATRITO DE COULOMB COMBINADO AO ATRITO VISCOSO.	49
FIGURA 25 - RESPOSTA DINÂMICA E DIAGRAMA DE FASES PARA O ATRITO DE STRIBECK.	50
FIGURA 26 - RESPOSTA DINÂMICA E DIAGRAMA DE FASES PARA O ATRITO DE KARNOPP.	50
FIGURA 27 - RESPOSTA DINÂMICA E DIAGRAMA DE FASES PARA O ATRITO DE ARMSTRONG. ..	51
FIGURA 28 - RESPOSTA DINÂMICA PARA O MÉTODO RUNGE-KUTTA.	52
FIGURA 29 - RESPOSTA DINÂMICA PARA O MÉTODO DE BALANÇO HARMÔNICO.	53

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - PARÂMETROS UTILIZADOS NA PRIMEIRA VALIDAÇÃO.	44
TABELA 2 - PARÂMETROS UTILIZADOS NA SEGUNDA VALIDAÇÃO.	46
TABELA 3 - PARÂMETROS UTILIZADOS NO DESENVOLVIMENTO DOS GRÁFICOS DOS MODELOS DE ATRITO.	47

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 - OS SETE PARÂMETROS E SUAS VARIAÇÕES.....	22
QUADRO 2 - DEFINIÇÃO DA FORÇA DE ATRITO PARA CADA MODELO.	47

LISTA DE SÍMBOLOS

F_{ext}	força externa
$f(\dot{x})$	força de atrito
x	posição da massa
F_c	atrito de Coulomb
$\text{sgn}(\dot{x})$	função seno da velocidade
μ	coeficiente de atrito
N	força normal
F_s	atrito Estático
F_v	atrito Viscoso
$\dot{x}_s$	velocidade de Stribeck
DV	limite de velocidade
k_t	rigidez tangencial do contato estático
F_{st}	atrito de Stribeck
γ	parâmetro temporal e empírico
$F_{s,a}$	atrito de Stribeck no final do período de deslizamento
$F_{s,\infty}$	atrito de Stribeck após um longo período
t_p	tempo de permanência (tempo na velocidade nula)
τ_L	constante de tempo
ω	frequência
σ_0	coeficiente de rigidez
α	parâmetro que determina a forma da curva de Dahl
z	variável interna nos modelos de atrito
X	vetor que representa os n graus de liberdade do sistema
M	matriz de massa
C	matriz de amortecimento
K	matriz de rigidez
$F_{\text{ext}}(\Omega, t)$	parte periódica do sistema
$F_{\text{NL}}(X, \dot{X}, \Omega, t)$	não-linearidade do sistema
t	tempo
Ω	frequência de excitação

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
1.1 JUSTIFICATIVA.....	13
1.2 OBJETIVOS.....	13
1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO	13
 2 MODELOS DE ATRITO	 15
2.1 OS MODELOS ESTÁTICOS DE ATRITO.....	15
2.1.1 Os Modelos Clássicos	16
2.1.2 O Modelo de Atrito de Karnopp.....	20
2.1.3 O Modelo de Atrito de Armstrong	21
2.2 OS MODELOS DINÂMICOS DE ATRITO	23
2.2.1 A Tribologia	23
2.2.2 O Modelo de Atrito de Dahl.....	28
2.2.3 Os Modelos de Atrito de Bliman e Sorine	29
2.2.4 O Modelo de Atrito de LuGre	30
 3 MÉTODOS NÃO LINEARES DE CÁLCULO.....	 32
3.1 MÉTODOS TEMPORAIS	33
3.1.1 Métodos de Integração Temporal.....	33
3.1.2 Método de Diferenças Finitas.....	36
3.1.3 Método de Disparo	36
3.2 MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO	37
3.2.1 Métodos de Perturbação	38
3.2.2 Método de Balanço Harmônico.....	39
3.2.3 Método de Colocação	41
3.2.4 Método de Elementos Finitos.....	43
 4 VALIDAÇÃO E DISCUSSÃO DOS MODELOS DE ATRITO E DOS MÉTODOS DE RESOLUÇÃO.....	 44
4.1 PRIMEIRA VALIDAÇÃO	44
4.2 SEGUNDA VALIDAÇÃO	46

4.3 DISCUSSÃO DOS MODELOS DE ATRITO.....	47
4.4 COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS TEMPORAL E DE APROXIMAÇÃO	52
5 CONCLUSÃO.....	54
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	55

1 INTRODUÇÃO

Todo corpo com uma determinada massa e com características elásticas pode sofrer vibração, o que abrange a grande maioria das estruturas metálicas. Todo sistema apresenta ao menos uma frequência natural, a qual é definida como a frequência em que o sistema vibra livremente a partir de uma condição inicial.

Pode-se diferenciar a vibração livre da vibração forçada ao afirmar que a primeira ocorre em decorrência apenas de forças internas, enquanto que a outra necessita da excitação de forças externas. Se a frequência de excitação se igualar à frequência natural, tem-se vibrações de grande amplitude e ocorre um fenômeno chamado de ressonância que pode levar estruturas ao colapso.

A vibração linear apresenta uma relativa facilidade em sua análise pelo fato de poder aplicar o princípio da superposição. Por outro lado, a vibração não-linear não tem solução trivial e exige um esforço maior em seu estudo, sendo os sistemas não-lineares objetos desta pesquisa. Um elemento causador da não-linearidade é o atrito.

O atrito está presente em todos os sistemas mecânicos conhecidos (rolamentos, embreagens, transmissões, freios, sistemas hidráulicos, etc.) quando há duas superfícies em contato e com um movimento relativo. A força de atrito pode ocorrer em decorrência de diversos fenômenos que englobam as deformações elásticas, plásticas e outras.

Esta força é igualmente dependente da geometria e da topologia onde se verifica o contato, o deslocamento, a velocidade relativa entre os corpos e a presença de um determinado lubrificante. Trata-se de uma ciência que estuda a interação entre superfícies em movimento: a tribologia.

O conhecimento aprofundado do comportamento do atrito em diversos sistemas mecânicos é extremamente importante para os engenheiros.

O comportamento da força de atrito é não-linear e dentro de diversos casos, se mal aplicado, pode criar sérios problemas em regime permanente. Assim sendo, com o avanço da tecnologia nos dias atuais, desenvolver e utilizar os modelos de atrito mais complexos e refinados se tornou uma prática mais comum.

Diante da necessidade de se conhecer e estudar novos modelos de atrito e métodos de resolução não-linear, iniciou-se esta pesquisa no Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés (LMSSC), instituto francês localizado em Paris.

1.1 JUSTIFICATIVA

Cada sistema dinâmico em presença de atrito tem de ser estudado individualmente para que o engenheiro faça as melhores considerações e aproximações possíveis nos cálculos e simulações. Com isso, conhecer o modelo de atrito e o método de resolução mais adequado para a situação é fundamental para obter resultados expressivos no final da análise.

A partir de pesquisas na literatura, a compreensão de tais modelos de atrito e métodos de resolução possibilitará um avanço nas linhas de pesquisa do LMSSC, a qual realiza apenas estudos a partir do modelo de Atrito de Coulomb e de resolução pelo Método de Balanço Harmônico.

1.2 OBJETIVOS

O propósito deste trabalho é estudar diferentes modelos de atrito que ocorrem entre duas superfícies e métodos de resolução não-linear para definir os melhores parâmetros e melhorar os resultados obtidos nas linhas de pesquisa existentes no laboratório francês.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho está dividido em cinco capítulos, conforme descrito a seguir:

Capítulo 1: INTRODUÇÃO

Alguns conceitos relacionados à vibração mecânica são introduzidos para situar o assunto principal. Ainda, apresenta-se a justificativa do trabalho, os objetivos e um breve resumo de cada capítulo.

Capítulo 2: MODELOS DE ATRITO

Este capítulo aborda os modelos de atrito mais conhecidos na literatura (estáticos e dinâmicos) e suas características principais.

Capítulo 3: MÉTODOS NÃO-LINEARES DE CÁLCULO

Os métodos de resolução são estudados individualmente e será demonstrado a diferença fundamental entre cada método e a forma como o problema é tratado inicialmente para posteriores cálculos iterativos computacionais.

Capítulo 4: VALIDAÇÃO E DISCUSSÃO DOS MODELOS DE ATRITO E MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

Apresentação dos resultados obtidos para alguns modelos de atrito e métodos de resolução, os quais serão estudados a partir de programações efetuadas no Matlab.

Capítulo 5: CONCLUSÃO

Ao final do trabalho é essencial descrever as conclusões obtidas ao longo da pesquisa.

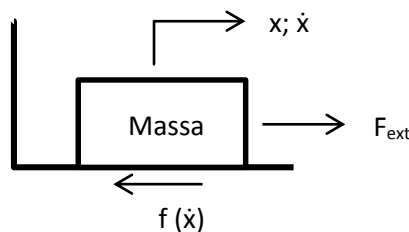
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS: Ainda, tem-se ao final todas as referências bibliográficas utilizadas.

2 MODELOS DE ATRITO

A interpretação do atrito é muito importante para a dinâmica e os sistemas mecânicos. Torna-se essencial observar as características e os resultados das simulações produzidas por este fenômeno no término da análise do comportamento de atrito e da compreensão de certos efeitos.

A Figura 1 mostra uma massa em movimento que se desloca pelo efeito de uma força externa (F_{ext}) e com uma força de atrito $f(\dot{x})$ contrária ao sentido do movimento. As variáveis x e $\dot{x}$ são, respectivamente, a posição e a velocidade da massa.

Figura 1 - Massa em movimento.



Com isso, os diferentes métodos para calcular ou estimar a força de atrito são apresentados. Estuda-se os modelos estáticos e os modelos dinâmicos. Os modelos estáticos mais utilizados são os Modelos Clássicos, o Modelo de Karnopp e o Modelo de Armstrong. Esses modelos consideram o atrito como uma função da velocidade. Assim sendo, os modelos de atrito que incorporam a parte dinâmica são necessários para descrever adequadamente os fenômenos de atrito. Existem vários modelos dinâmicos e os de maior importância são o Modelo de Dahl, os Modelos de Bliman e Sorine e o Modelo de LuGre.

2.1 OS MODELOS ESTÁTICOS DE ATRITO

Os modelos clássicos apresentam diferentes composições que mudam a concepção da força de atrito e podem ser: Coulomb, Viscoso, Estático e Stribeck. O maior inconveniente destes modelos reside na detecção da velocidade quando ela é nula. O modelo de Karnopp foi desenvolvido para eliminar as dificuldades que os modelos precedentes revelam em torno de

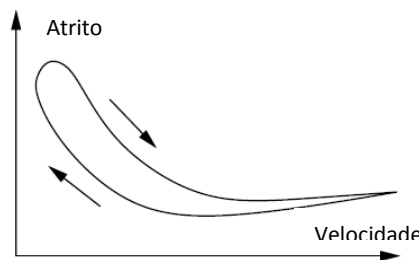
velocidade igual a zero. Ainda, tem-se o modelo de Armstrong com considerações mais complexas.

2.1.1 Os Modelos Clássicos

Os modelos clássicos, segundo Armstrong-Hélouvry et al. (1994), são formulados a partir de vários componentes, sendo que cada um descreve certa forma da força de atrito.

A curva de histerese na Figura 2 revela que a força de atrito é maior para velocidades crescentes do que para velocidades decrescentes.

Figura 2 - Curva demonstrando a relação entre velocidade e força de atrito.



Fonte: Adaptado de (Armstrong-Hélouvry et al., 1994).

2.1.1.1 Atrito de Coulomb (ou Atrito Cinético)

O modelo de atrito mais conhecido e difundido é aquele desenvolvido por forças de Coulomb e não depende da velocidade. A força de atrito é representada na equação (2.1).

$$f(\dot{x}) = F_c \cdot \text{sgn}(\dot{x}) \quad (2.1)$$

Os parâmetros F_c e $\text{sgn}(\dot{x})$ são, respectivamente, o atrito de Coulomb e a função seno da velocidade, definidos nas equações (2.2) e (2.3).

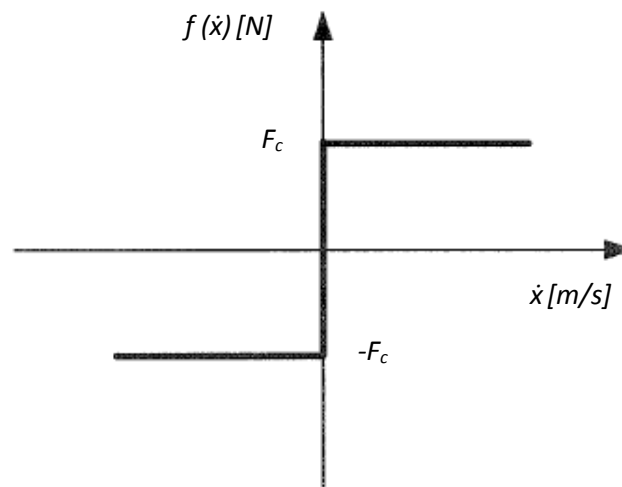
$$F_c = \mu \cdot N \quad (2.2)$$

$$\text{sgn}(\dot{x}) = \begin{cases} 1 & \dot{x} > 0 \\ 0 & \dot{x} = 0 \\ -1 & \dot{x} < 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Sendo μ o coeficiente de atrito e N a força normal.

Este modelo não demonstra o valor da força de atrito quando a velocidade é nula e pode tomar qualquer valor dentro do intervalo $-F_c$ e $+F_c$ (forças de Coulomb negativas e positivas), variando em função da forma onde a função seno da velocidade é definida. Ilustra-se a força de atrito em função da velocidade na Figura 3.

Figura 3 - Modelo de Atrito de Coulomb.

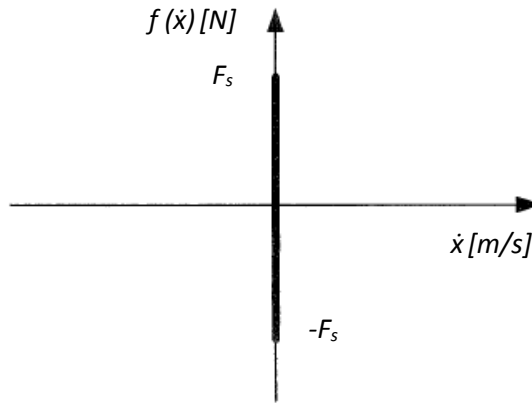


Fonte: Adaptado de (Armstrong-Hélouvry et al., 1994).

2.1.1.2 Atrito Estático (ou Atrito de Aderência)

Considerando-se um novo componente F_s como o atrito estático, a força de atrito passa a ser descrita no repouso. É importante considerar duas situações para o novo modelo: a intensidade da força de atrito no modelo estático é maior que a força no atrito de Coulomb e o atrito é modelado em termos da força externa (F_{ext}). A Figura 4 mostra o atrito em função da velocidade.

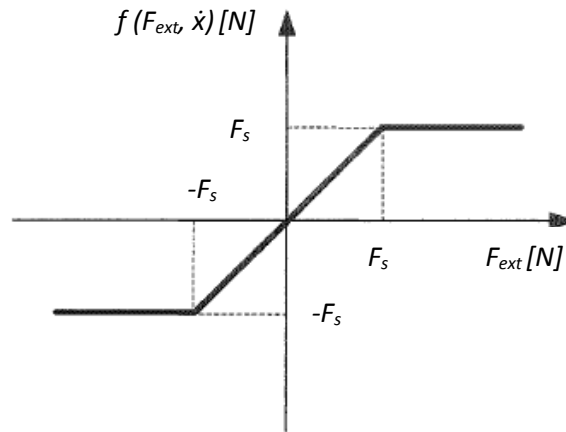
Figura 4 - Modelo de Atrito Estático.



Fonte: Adaptado de (Armstrong-Hélouvry et al., 1994).

Conforme já mencionado, o atrito é função da força externa (F_{ext}) e não da velocidade, como ilustra a Figura 5.

Figura 5 - Características do atrito em função da força externa.



Fonte: Adaptado de (Armstrong-Hélouvry et al., 1994).

O gráfico da Figura 5 é confeccionado pelo sistema de equações (2.4).

$$f(F_{ext}, \dot{x}) = \begin{cases} F_{ext} & \dot{x} = 0; |F_{ext}| < F_s \\ F_s \cdot \text{sgn}(F_{ext}) & \dot{x} = 0; |F_{ext}| \geq F_s \end{cases} \quad (2.4)$$

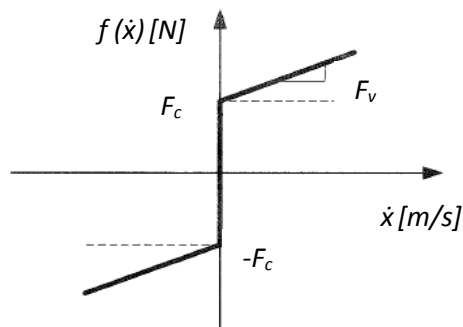
2.1.1.3 Atrito de Coulomb Combinado ao Atrito Viscoso

Em razão de não-linearidades presentes no atrito de Coulomb, o Modelo de Atrito Viscoso é geralmente utilizado em certos problemas dinâmicos. Considerado de maior facilidade para ser tratado matematicamente, sua representação física é ainda mais simples que o atrito desenvolvido por Coulomb. Neste caso, o atrito de Coulomb é combinado ao atrito viscoso. O modelo é representado pela equação (2.5).

$$f(\dot{x}) = F_c \cdot \text{sgn}(\dot{x}) + F_v \cdot \dot{x} \quad (2.5)$$

O parâmetro F_v representa o Atrito Viscoso. O gráfico deste modelo de atrito é representado na Figura 6.

Figura 6 - Modelo de Atrito de Coulomb combinado ao Modelo de Atrito Viscoso.



Fonte: Adaptado de (Armstrong-Hélouvry et al., 1994).

Embora a utilização destes modelos combinados seja conveniente na simulação de movimentos oscilatórios, eles apresentam imprecisão na posição final do corpo quando é aplicado em pequenas forças e em pequenos deslocamentos.

2.1.1.4 Atrito de Stribeck (ou Atrito de Viscosidade Negativa)

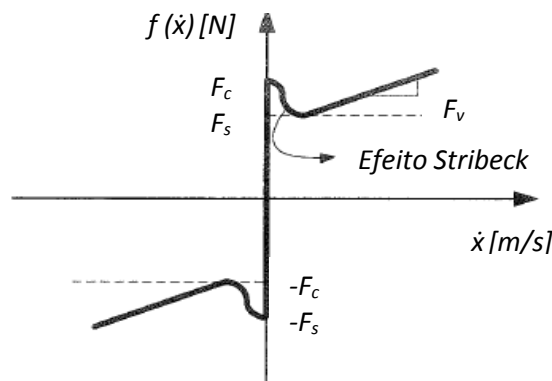
Finalizando os modelos clássicos, soma-se o efeito de Stribeck à equação anterior. Este fenômeno mostra que, para baixas velocidades, o atrito antes do início do movimento diminui com o aumento da velocidade.

O efeito é explicado fisicamente como uma ruptura da aderência, que é verificado quando a velocidade relativa entre dois corpos é zero (atrito estático). O que é percebido por Stribeck é a existência de um filme lubrificante que diminui com o atrito, no início do movimento. O atrito de Stribeck é modelado pela fórmula (2.6).

$$f(\dot{x}) = F_v \cdot \dot{x} + \left[F_c + (F_s - F_c) \cdot e^{-\left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_s}\right)^\delta} \right] \text{sgn}(\dot{x}) \quad (2.6)$$

Os parâmetros δ e $\dot{x}_s$ se referem a um parâmetro empírico e à velocidade de Stribeck. Este modelo é representado pela Figura 7.

Figura 7 - Modelo de Atrito de Stribeck.



Fonte: Adaptado de (Armstrong-Hélouvry et al., 1994).

2.1.2 O Modelo de Atrito de Karnopp

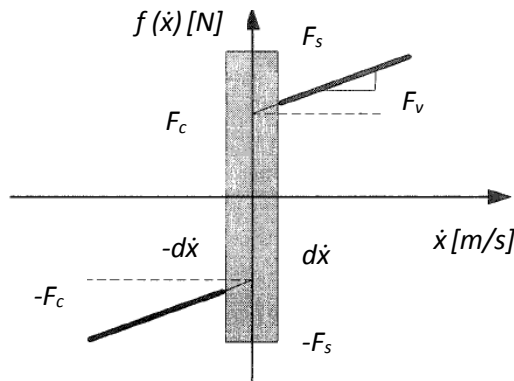
O modelo de Karnopp (1985) foi desenvolvido para resolver as dificuldades que os modelos anteriores revelaram ao tratar a velocidade igual a zero. Pode-se observar que este modelo apresenta semelhanças com o mostrado na Figura 6, mas é considerado um intervalo de velocidade $[-d\dot{x}, d\dot{x}]$. Neste intervalo, a velocidade é nula e a força de atrito $f(\dot{x})$ é dependente da força externa. Fora deste intervalo, a força de atrito é representada como uma função da velocidade. Este modelo é capaz de simular o movimento do tipo aderência-deslizamento, o qual não é observado no modelo de Coulomb.

O atrito neste modelo está representado no sistema de equações (2.7).

$$f(\dot{x}) = \begin{cases} F_c \cdot \text{sgn}(\dot{x}) + F_v \cdot \dot{x}, & |\dot{x}| \geq DV \\ F_{ext} - k \cdot x, & \begin{cases} |\dot{x}| < DV \text{ e} \\ |F_{ext} - k \cdot x| \leq F_s \end{cases} \\ F_s \cdot \text{sgn}(F_{ext} - k \cdot x) & \begin{cases} |\dot{x}| < DV \text{ e} \\ |F_{ext} - k \cdot x| > F_s \end{cases} \end{cases} \quad (2.7)$$

O parâmetro DV é o limite de velocidade. A representação do modelo é mostrada na Figura 8.

Figura 8 - Modelo de Atrito de Karnopp.



Fonte: Adaptado de (Karnopp, 1985).

2.1.3 O Modelo de Atrito de Armstrong

O modelo proposto por Armstrong, citado em Armstrong-Hélouvry et al. (1994), estuda o fenômeno do atrito ao acrescentar dependências temporais enquanto o sistema está em aderência e também o efeito de Stribeck. O comportamento do atrito é determinado pelas equações de (2.8) a (2.10) que descrevem o sistema em aderência e em deslizamento.

Sem deslizamento (ou em pré-deslizamento):

$$f(\dot{x}) = k_t \cdot x \quad (2.8)$$

Com deslizamento:

$$f(\dot{x}) = \left\{ F_c + F_v \cdot \dot{x} + F_{St}(\gamma, t_p) \frac{1}{1 + \left[\frac{\dot{x}(t - \tau_L)}{\dot{x}_s} \right]^2} \right\} \text{sgn}(\dot{x}) \quad (2.9)$$

Atrito estático ascendente:

$$F_{St}(\gamma, t_p) = F_{s,a} + (F_{s,\infty} - F_{s,a}) \frac{t_p}{t_p + \gamma} \quad (2.10)$$

Os parâmetros mencionados na equação anterior são definidos como:

- k_t : rigidez tangencial do contato estático;
- F_{st} : atrito de Stribeck;
- γ : parâmetro temporal e empírico;
- $F_{s,a}$: atrito de Stribeck no final do período de deslizamento;
- $F_{s,\infty}$: o atrito de Stribeck após um longo período;
- t_p : tempo de permanência (tempo na velocidade nula);
- τ_L : constante de tempo.

Ainda, os sete parâmetros de atrito podem apresentar faixa de valores e dependência de certas características (Quadro 1).

Quadro 1 - Os sete parâmetros e suas variações.

Parâmetros	Variação do parâmetro	Características que influenciam o parâmetro
F_c	0,001 – (0,1.N)	Viscosidade do lubrificante, geometria do contato e carga.
F_v	0 – valores elevados	Viscosidade do lubrificante, geometria do contato e carga.
$F_{s,\infty}$	0 – (0,1.N)	Lubrificação limite.
k_t	$\frac{1}{\Delta x} (F_s + F_c)$ $1 < \Delta x < 50$ [μm]	Propriedades do material e acabamento superficial.
$\dot{x}_s$	0,00001 – 0,1 [m/s]	Viscosidade do lubrificante, geometria do contato e carga, lubrificação limite, Propriedades do material e acabamento superficial.
τ_L	1 – 50 [m.s]	Viscosidade do lubrificante, geometria do contato e carga.
γ	0 – 206 [s]	Lubrificação limite.

2.2 OS MODELOS DINÂMICOS DE ATRITO

Uma falha dos métodos apresentados anteriormente é que eles não explicam as propriedades intrínsecas do atrito devido à sua dinâmica interna: os micro-deslocamentos durante a fase de aderência, os movimentos tipo aderência-deslizamento e as histereses do atrito em função da velocidade não-estacionária.

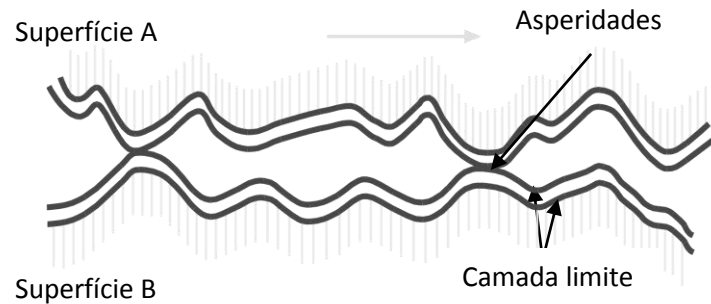
Existem diversos modelos dinâmicos e os mais conhecidos são: o modelo de Dahl, os modelos de Bliman e Sorine e o modelo de LuGre. O modelo de Dahl é inspirado nas características tensão-deformação de mecânica dos fluidos, sendo essencialmente o atrito de Coulomb com um atraso na mudança da força de atrito quando a direção do movimento se altera. Esta força de atrito depende somente da posição. O modelo mencionado não inclui o efeito de Stribeck nem o fenômeno de aderência. Contudo, os modelos de Bliman e Sorine e de LuGre foram elaborados a fim de incluir estes fenômenos, podendo ser considerados como uma extensão do modelo de Dahl.

2.2.1 A Tribologia

Segundo Jean-Marie (2000), a tribologia lida com muitos aspectos do atrito, lubrificação, desgaste e aderência. O interesse centrou-se nesta ciência quando as consequências de atrito e desgaste se tornaram problemáticas para o bom funcionamento dos sistemas.

Para entender um pouco mais da tribologia de superfícies modernas, torna-se necessário considerar a topografia das superfícies (ver Figura 9). Nestes pontos de contato há altas pressões específicas e com temperatura elevada. Os lubrificantes reagem com a superfície e formam assim a chamada camada limite, cujo espaçamento varia de alguns átomos a uma fração de micron.

Figura 9 - Real contato entre duas superfícies.

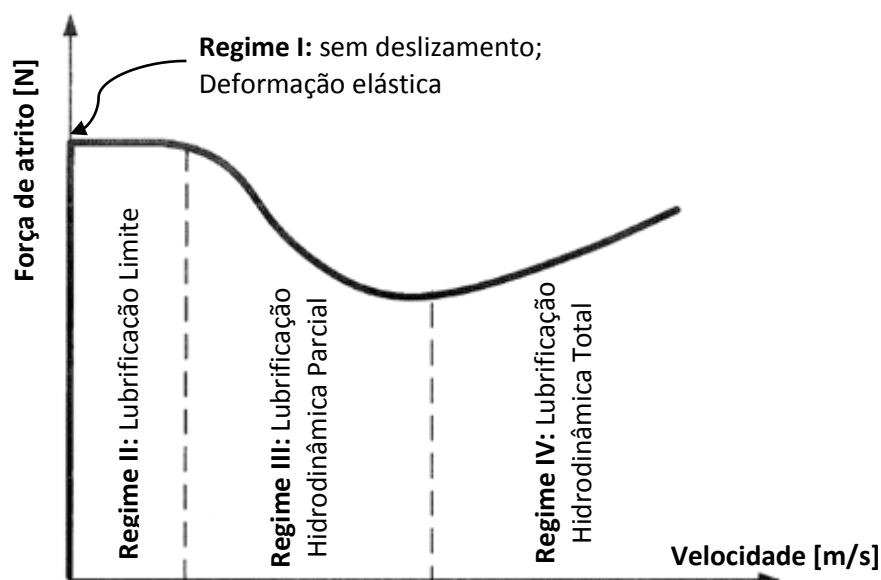


Fonte: Adaptado de (Armstrong-Hélouvry et al., 1994).

A presença de um fluido entre dois sólidos muda completamente o comportamento local. A introdução de lubrificante produz outro tipo de força de atrito: a força viscosa. Os lubrificantes podem ser sólidos, líquidos ou gasosos.

Há quatro regimes de lubrificação dinâmicos em um sistema com lubrificante: atrito estático, lubrificação limite, lubrificação hidrodinâmica parcial (ou misto) e lubrificação hidrodinâmica total (ou elastohidrodinâmico). A Figura 10 mostra uma curva que corresponde aos três regimes móveis em função da velocidade (regimes II, III e IV), considerando a característica do regime estático (regime I), que é independente da velocidade.

Figura 10 - Evolução da força de atrito ao longo da velocidade.



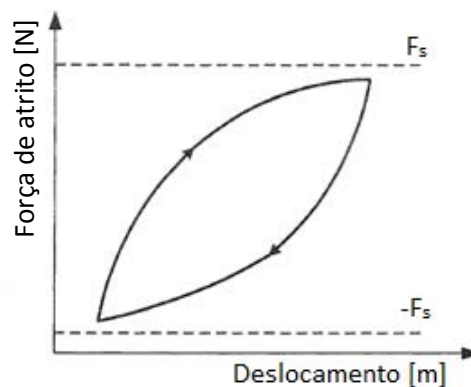
Fonte: Adaptado de (Armstrong-Hélouvry et al., 1994).

2.2.1.1 Regime I: Atrito Estático e Deslocamento em Pré-Deslizamento

Neste regime, as junções se deformam elasticamente e a camada limite e a rugosidade deformam plasticamente sob carga, provocando assim o pré-deslizamento (micro-movimento) até alcançar o atrito estático. Este regime tem vários comportamentos dinâmicos e os mais importantes são: o deslocamento em pré-deslizamento, a mudança na força de desprendimento e o movimento do tipo aderência-deslizamento.

O pré-deslizamento é um deslocamento microscópico em velocidade quase nula. O comportamento resultante é dado pela Figura 11:

Figura 11 - Pré-deslizamento.



Fonte: Adaptado de (Canudas de Wit et al., 1995).

Se a força de desprendimento é excedida, as junções das asperezas se quebram e começa o real deslizamento que permite a passagem do regime estático ao regime de lubrificação limite. Os resultados experimentais mostraram que a força de desprendimento é uma função da taxa de crescimento da força externa aplicada (ver Figura 12).

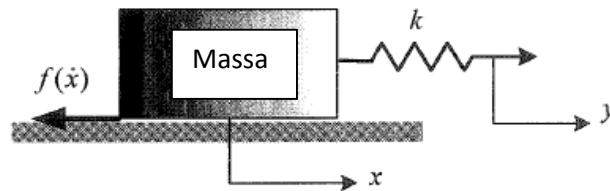
Figura 12 - Força de separação em função da taxa da força externa.



Fonte: Adaptado de (Canudas de Wit et al., 1995).

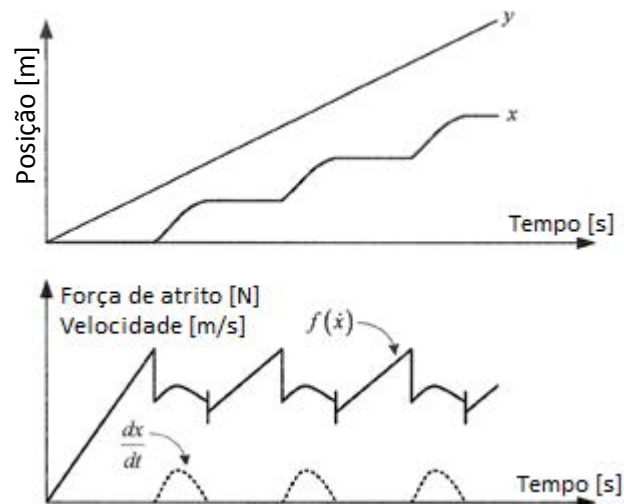
O movimento tipo aderência-deslizamento é causado pelo fato do atrito ser maior em repouso do que em movimento. A experiência com uma massa em repouso e ligada a uma mola de rigidez k (Figura 13) e os resultados da simulação obtidos são apresentados na Figura 14.

Figura 13 - Experiência de simulação do movimento aderência-deslizamento.



Fonte: Adaptado de (Canudas de Wit et al., 1995).

Figura 14 - Resultados da simulação do movimento aderência- deslizamento.



Fonte: Adaptado de (Canudas de Wit et al., 1995).

2.2.1.2 Regime II: Lubrificação Limite

A velocidade não é elevada devido à ação da lubrificação. O atrito seco é tão dominante que as microdurezas são resultados deste atrito. Isto ocorre independente da velocidade, sendo dependente apenas do lubrificante.

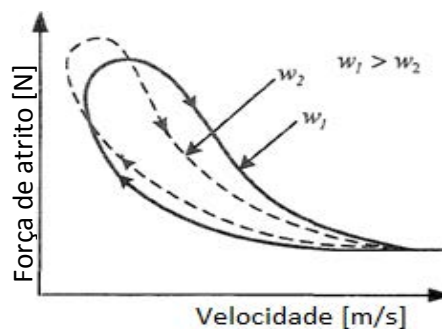
2.2.1.3 Regime III: Lubrificação Hidrodinâmica Parcial (Misto)

O processo de formação é dominado pela interação da viscosidade do lubrificante, da velocidade do movimento e da geometria de contato. A partir de uma velocidade definida, as superfícies começam a crescer e provoca a diminuição da força de atrito com o aumento da velocidade. Porém, a escolha apropriada do lubrificante pode reduzir ou eliminar a instabilidade.

Neste regime, o fenômeno dinâmico observado é o retardamento do atrito, segundo Hess, Soom (1990). A força de atrito é menor para velocidades baixas do que para velocidades altas (o efeito de histerese). Além disso, o ciclo de histerese é maior para taxas mais elevadas de variação de velocidade.

A Figura 15 ilustra este fenômeno destacando duas curvas de atrito correspondentes a dois perfis de velocidade sinusoidal de diferentes frequências w_1 e w_2 .

Figura 15 - Fenômeno da Histerese.



Fonte: Adaptado de (Hess, Soom, 1990).

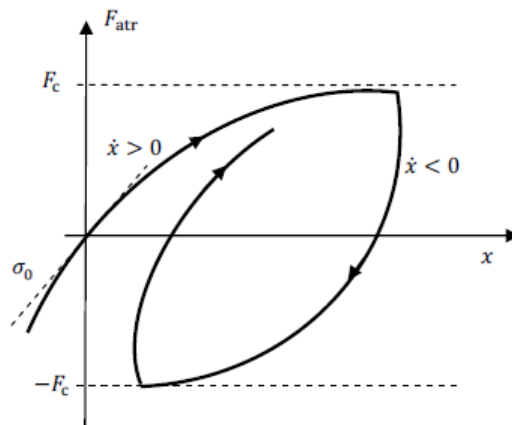
2.2.1.4 Regime IV: Lubrificação Hidrodinâmica Total

O contato sólido-sólido é eliminado e o desgaste é reduzido. A força de atrito se torna a força de viscosidade proporcional à velocidade de deslocamento.

2.2.2 O Modelo de Atrito de Dahl

O modelo desenvolvido por Dahl (1968) é frequentemente usado em sistemas de controle e é baseado em funções de deslocamento, segundo Martínez-Carranza et al. (2012). A partir de experiências, Dahl notou que a transição do estado estático para o estado cinético não é instantâneo e há um comportamento elástico antes dos materiais em contato se deslizarem. Dahl propôs que a força de atrito é dependente da posição (Figura 16).

Figura 16 - Modelo de Atrito de Dahl.



Fonte: Adaptado de (Dahl, 1968).

Esta curva é modelada pela equação (2.11).

$$\frac{df(\dot{x})}{dx} = \sigma_0 \left(1 - \frac{f(\dot{x})}{F_c} \cdot \text{sgn}(\dot{x}) \right)^\alpha \quad (2.11)$$

Os parâmetros x , $f(\dot{x})$, F_c , σ_0 e $\dot{x}$ são o deslocamento, a força de atrito, o coeficiente de Coulomb, o coeficiente de rigidez e a velocidade. O parâmetro α determina a forma da curva (geralmente $\alpha = 1$).

Neste modelo, a força de atrito é dependente da posição e do sinal da velocidade. No domínio temporal, este modelo pode ser reescrito na equação (2.12).

$$\frac{df(\dot{x})}{dt} = \frac{df(\dot{x})}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{df(\dot{x})}{dx} \dot{x} = \sigma_0 \left(1 - \frac{f(\dot{x})}{F_c} \cdot \text{sgn}(\dot{x}) \right)^\alpha \dot{x} \quad (2.12)$$

Este modelo é uma generalização do atrito de Coulomb, sem o efeito de Stribeck, e não é capaz de capturar a aderência. No caso em que $\alpha = 1$, obtêm-se a expressão (2.13).

$$\frac{df(\dot{x})}{dt} = \sigma_0 \cdot \dot{x} - \frac{f(\dot{x}) \cdot \sigma_0}{F_c} |\dot{x}| \quad (2.13)$$

Com a introdução de $f(\dot{x}) = \sigma_0 \cdot z$, o modelo passa a ser representado pela expressão (2.14).

$$\frac{dz}{dt} = \dot{x} - \frac{\sigma_0 \cdot |\dot{x}|}{F_c} z \quad (2.14)$$

O parâmetro z se refere a uma variável interna, caracterizando os microdeslocamentos.

O modelo Dahl levou ao desenvolvimento de muitos outros modelos, tais como os modelos de Bliman Sorine e também o modelo de LuGre, os quais incluem o fenômeno de aderência e o efeito de Stribeck.

2.2.3 Os Modelos de Atrito de Bliman e Sorine

Bliman e Sorine (1995) propuseram modelos de atrito dinâmico generalizando o modelo de Dahl para obter o efeito Stribeck. Estes modelos assumem que o atrito é independente da velocidade. Eles sugerem a substituição da variável temporal por uma variável espacial representada pela expressão (2.15).

$$s = \int_0^t |v(\tau)| d\tau \quad (2.15)$$

A equação do modelo é descrita em (2.16).

$$\frac{df(\dot{x})}{dx} = -\sigma_0 \frac{f(\dot{x})}{F_c} + \sigma_0 \cdot \text{sgn}(\dot{x}) \quad (2.16)$$

Bliman e Sorine substituíram este modelo por um outro de segunda ordem que aproxima o efeito Stribeck por uma simples transição entre o atrito estático e o atrito de Coulomb, conforme a expressão (2.17).

$$\frac{d^2 f(\dot{x})}{dx^2} + 2 \cdot \zeta \cdot \omega \frac{df(\dot{x})}{dx} + \omega^2 \cdot f(\dot{x}) = \omega^2 \cdot F_c \cdot \text{sgn}(\dot{x}) \quad (2.17)$$

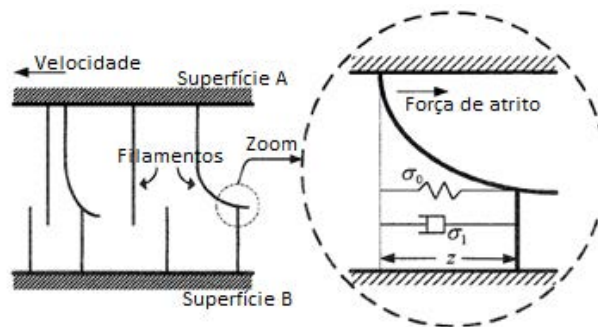
2.2.4 O Modelo de Atrito de LuGre

Segundo Canudas de Wit et al. (1995), este modelo surgiu a partir das técnicas de Dahl e é considerado o mais preciso entre os modelos de atrito dinâmico. O modelo inclui o efeito Stribeck e o atrito viscoso.

O fenômeno elástico observado é que, sob um ponto de vista microscópico, dois corpos rígidos entram em contato por um par de fios. Estes fios são opostos um ao outro e exercem forças sobre o deslocamento de atrito proporcional às suas tensões.

O modelo assume que o atrito está também relacionado com a posição devido ao contato entre os fios e não só com a velocidade. Quando a tensão na qual um fio atua excede um determinado valor, existe uma ruptura entre a união dos filamentos. Quando uma força tangencial é aplicada, os filamentos atuam como molas e amortecedores e originam a força de atrito (Figura 17).

Figura 17 - Concepção do Modelo de Atrito de LuGre.



Fonte: Adaptado de (Canudas de Wit et al., 1995).

Quando a força é grande o suficiente, alguns fios se curvam até que eles se deslizem. Assim, a equação de modelo LuGre é uma variável z que modela a deflexão média dos fios.

A equação correspondente a este modelo é dada em (2.18).

$$\frac{dz}{dt} = \dot{z} = \dot{x} - \sigma_0 \frac{|\dot{x}|}{\alpha(\dot{x})} z \quad (2.18)$$

Sendo que $\dot{x}$ é a velocidade relativa do movimento, σ_0 é o coeficiente de rigidez das deformações microscópicas.

A função $\alpha(\dot{x})$ é positiva e permite descrever arbitrariamente a característica de atrito $f(\dot{x})$ no estado estacionário. Geralmente, ela é dada pela equação (2.19) que apresenta uma boa aproximação do efeito de Stribeck.

$$\alpha(\dot{x}) = F_c + (F_s - F_c) \cdot e^{-\left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_s}\right)^2} \quad (2.19)$$

Os parâmetros F_c , F_s e $\dot{x}_s$ representam, respectivamente, o coeficiente de Coulomb, o coeficiente estático e a velocidade de Stribeck. A força de atrito gerada pela deformação dos fios é pela equação (2.20).

$$f(\dot{x}) = \sigma_0 \cdot z + \sigma_1 \cdot \dot{z} + F_v \cdot \dot{x} \quad (2.20)$$

O coeficiente de amortecimento σ_1 pode ser expresso como uma função da velocidade através da expressão (2.21).

$$\sigma_1(\dot{x}) = \sigma_{1s} \cdot e^{-\left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_d}\right)^2} \quad (2.21)$$

Considerando que $\dot{x}_D$ seja um parâmetro associado com a diminuição da velocidade. Ele pode ser representativo ao deixar σ_1 decrescer com o aumento da velocidade.

3 MÉTODOS NÃO-LINEARES DE CÁLCULO

Este capítulo aborda os métodos de cálculo mais conhecidos para a resolução de equações não-lineares. Considera-se a equação (3.1) para descrever sistemas dinâmicos em presença de atrito:

$$\mathbf{M}.\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}.\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}.\mathbf{X} = F_G(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \Omega, t) = F_{ext}(\Omega, t) - F_{NL}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \Omega, t) \quad (3.1)$$

$$F_{ext}(\Omega, t) = F_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (3.2)$$

O vetor $\mathbf{X}$ representa os n graus de liberdade do sistema. $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{K}$ representam as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do sistema. A parte periódica e a não-linearidade do sistema são representadas por $F_{ext}(\Omega, t)$ e $F_{NL}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \Omega, t)$, respectivamente.

Diante dos diversos métodos que serão estudados neste capítulo, alguns se baseiam na formulação dos problemas não-lineares sob a forma de equação de estado de primeira ordem, considerando um vetor do tipo $\mathbf{x} = [\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}] \in \mathbb{R}^{2n}$. Considera-se as expressões (3.3) e (3.4) para a sequência dos estudos.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, t) \quad (3.3)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1} \cdot F_G \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{M} \cdot \mathbf{K} & \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{C} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (3.4)$$

Suponha-se que a matriz $\mathbf{M}$ seja reversível.

A resposta de um sistema dinâmico não-linear a uma solicitação periódica (F_{ext}) é frequentemente periódica, podendo ser em alguns casos quase-periódica. Assim sendo, respostas periódicas serão priorizadas em nossos estudos.

A partir da formulação do problema introduzido anteriormente, diversos métodos podem ser utilizados e, basicamente, dividem-se em dois grupos principais. O primeiro trata dos métodos temporais que utilizam um modelo de integração temporal e não determina previamente a forma da solução. O segundo são os métodos de aproximação que buscam a solução como uma perturbação da solução linear, considerada descrita em um espaço restrito ou descrita por uma soma de funções de forma.

3.1 MÉTODOS TEMPORAIS

Os métodos temporais possuem uma restauração no tempo passo a passo da solução e utilizam um modelo de integração. Estes métodos não têm uma forte suposição sobre a resposta do sistema e podem lidar com todos os tipos de casos.

A finalidade do método de integração temporal é, a partir de condições iniciais, simular o regime transiente para obter um regime permanente em função da solução desejada.

O método de diferenças finitas e o método de disparo realizam uma integração temporal sobre o período do regime permanente e, em seguida, resolvem um problema ao limite conforme a condição periódica. É possível obter uma solução $X(t) = X(t + T)$.

3.1.1 Métodos de Integração Temporal

Os métodos de integração temporal, estudados por Kuhl et al. (1999), têm como objetivo construir a partir de um conjunto de condições iniciais a resposta passo a passo do sistema. A estabilidade e a precisão são muito importantes em um esquema de integração temporal. No caso de um sistema não-linear, preocupa-se com a estabilidade numérica dos algoritmos. Uma condição interessante no problema não-linear é a conservação ou a diminuição da energia total em um espaço de tempo.

Este método permite o cálculo de todos os tipos de resposta vibratória (transitória ou periódica). O regime permanente da solução pode ser alcançado após um longo regime transitório, que pode ser problemático para alguns sistemas. Torna-se necessário qualificar corretamente o esquema de integração e utilizar os métodos mais adequados.

3.1.1.1 Qualificação de um Esquema de Integração

A ideia de um integrador temporal é verificar a equação diferencial em vários instantes consecutivos t_n , discretizando tal equação no tempo e formulando hipóteses sobre a variação

dos deslocamentos, velocidades e acelerações em cada intervalo de tempo h entre $[t_n; t_{n+1}]$. Formula-se uma equação $x_n = x(t_n)$ que relaciona valores dos vetores de estado nos instantes, como descrito em (3.5) e (3.6).

$$x_{n+1} = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot x_{n+1-j} - h \sum_{j=0}^m \beta_j \cdot \dot{x}_{n+1-j} \quad (3.5)$$

$$h \equiv t_{n+1} - t_n \quad (3.6)$$

Afirma-se que um esquema é dito explícito quando $\beta = 0$ e x_{n+1} é calculado e, função dos valores nos instantes precedentes. Quando $\beta \neq 0$, tem-se um esquema implícito e o vetor x_{n+1} depende de sua própria derivada. Os esquemas explícitos são mais adequados para sistemas dinâmicos de alta ou media frequência, sendo que sistemas de baixa frequência utilizam esquemas implícitos pois necessitam de inversões matriciais em cada instante de tempo.

A propriedade que define que a solução calculada pelo esquema de integração é convergente diante da solução exata do problema segue na fórmula (3.7).

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_{n+1} - x_n}{h} = \dot{x}(t_n) \quad (3.7)$$

A estabilidade de um sistema permite avaliar a evolução da perturbação em torno da solução para instantes subseqüentes. Um esquema de integração estável apresenta uma solução limitada para a diferença entre solução numérica e solução exata. Posiciona-se na fronteira da estabilidade para obter um esquema preciso.

3.1.1.2 Esquema de Integração para Sistemas Não-lineares

Substituindo o vetor X pelo termo $q(t)$, uma estimativa dos deslocamentos e velocidades $\tilde{q}_{n+1}$ e $\tilde{\dot{q}}_{n+1}$ é efetuada a partir dos dados aos instantes precedentes q_n , $\dot{q}_n$, $\ddot{q}_n$. A equação do movimento permite deduzir $\ddot{q}_{n+1}$, o qual é utilizado para determinar o novo campo de deslocamento e velocidade q_{n+1} et $\dot{q}_{n+1}$ no instante seguinte. Para avaliar a aceleração, aplica-se Newton-Raphson para calcular uma correção a cada etapa. Veja a expressão (3.8).

$$[\mathbf{M} + \gamma \cdot h \cdot \mathbf{C} + \beta \cdot h^2 \mathbf{K}] \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} = \mathbf{F}_L(t) - \mathbf{C} \tilde{\dot{\mathbf{q}}}_{n+1} - \mathbf{K} \tilde{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbf{F}_{NL}(\tilde{\mathbf{q}}_{n+1} + \beta \cdot h^2 \cdot \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}, \tilde{\dot{\mathbf{q}}}_{n+1} + \gamma \cdot h \cdot \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}) \quad (3.8)$$

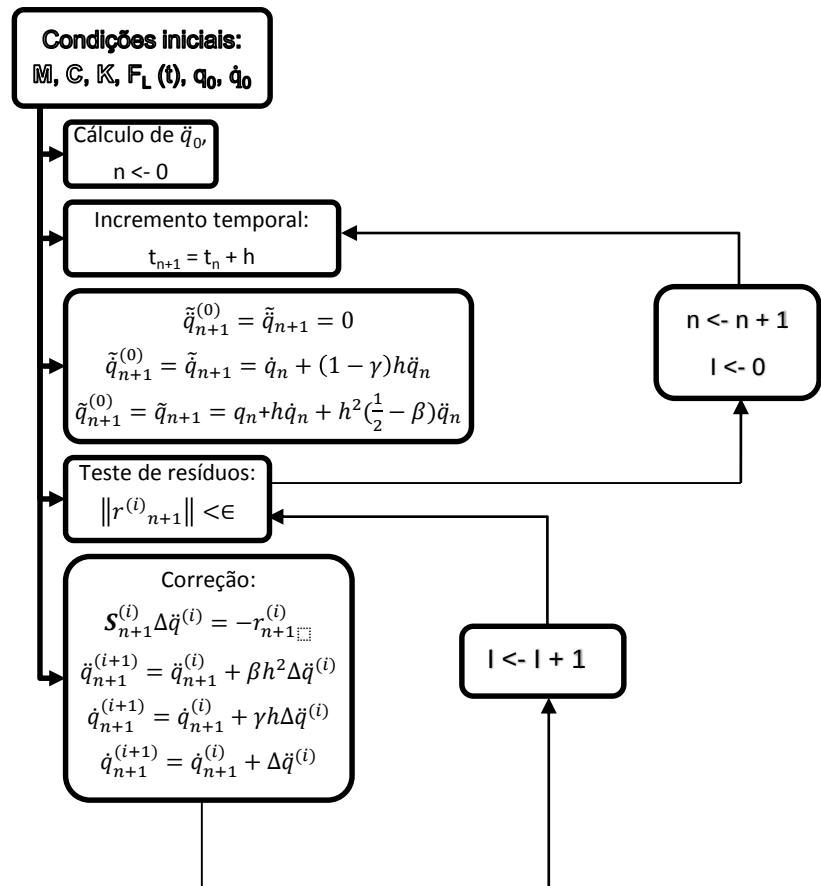
Considera-se os parâmetros $\mathbf{r}_{n+1}^{(i)}$ e $\mathbf{S}_{n+1}^{(i)}$ como descritos em (3.9) e (3.10).

$$\mathbf{r}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^{(i)} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^{(i)} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{q}_{n+1}^{(i)} + \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{q}_{n+1}^{(i)}, \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^{(i)}) + \mathbf{F}_L(t_{n+1}) \quad (3.9)$$

$$\mathbf{S}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{M} + \gamma \cdot h \left(\mathbf{C} + \mathbf{C}_{\dot{\mathbf{q}}} \cdot \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{q}_{n+1}^{(i)}, \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^{(i)}) \right) + \beta \cdot h^2 \left(\mathbf{K} + \mathbf{C}_{\dot{\mathbf{q}}} \cdot \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{q}_{n+1}^{(i)}, \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^{(i)}) \right) \quad (3.10)$$

Com isso, um algoritmo foi proposto para facilitar a compreensão do método (Figura 18).

Figura 18 - Algoritmo para Esquema de Integração de Newmark.



3.1.2 Método de Diferenças Finitas

O método de diferenças finitas, estudado por Burden e Faires (2008), é um método de resolução de equações diferenciais com base na aproximação de derivadas por diferenças finitas. Este método estuda um esquema de integração direta no regime permanente do sistema, expressa cada instante do intervalo de vibração e ajusta esses instantes pelo esquema de integração. Em seguida, tem-se uma divisão em n pontos com passo h , conforme o sistema de equações (3.11).

$$\begin{cases} \dot{x}_0 &= \mathbf{G}(x_0, t_0) \\ \dot{x}_1 &= \mathbf{G}(x_1, t_1) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= \mathbf{G}(x_{n-1}, t_{n-1}) \end{cases} \quad (3.11)$$

Considera-se fórmula (3.12) a seguir.

$$x_{i+1} - x_i = h/2(\mathbf{G}(x_{i+1}, t_{i+1}) + \mathbf{G}(x_i, t_i)) \quad (3.12)$$

Com isso, o sistema é descrito na expressão (3.13).

$$\begin{cases} x_1 - x_0 &= h/2(\mathbf{G}(x_1, t_1) + \mathbf{G}(x_0, t_0)) \\ x_2 - x_1 &= h/2(\mathbf{G}(x_2, t_2) + \mathbf{G}(x_1, t_1)) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} - x_0 &= h/2(\mathbf{G}(x_{n-1}, t_{n-1}) + \mathbf{G}(x_0, t_0)) \end{cases} \quad (3.13)$$

A resolução do sistema é obtida usando um agente de resolução não-linear do tipo Newton-Raphson.

Uma desvantagem deste método é o tamanho do sistema obtido que pode ser importante a fim de apresentar uma precisão aceitável.

3.1.3 Método de Disparo

Segundo Nayfeh e Balachandran (1995), o método de disparo é um método numérico para a solução de problemas no limite. O método divide o intervalo onde é procurado uma solução em diversos intervalos menores, permite resolver um problema de valor inicial em

cada um dos intervalos menores e impõe condições correspondentes adicionais para formar uma solução ao longo de todo o intervalo.

Assim, as condições finais $x(T_0, x_0)$ são obtidas por integração temporal a partir de determinadas condições iniciais (T_0, x_0) e fazer as correções necessárias. Uma correção Δx e ΔT é calculada a cada interação do algoritmo do método, conforme a expressão (3.14).

$$x(T_0 + \Delta T, x_0 + \Delta x) = x_0 \quad (3.14)$$

Descreve-se uma expressão em primeira ordem a partir das condições iniciais em (3.15).

$$x(T_0, x_0) + \frac{\partial x}{\partial t}(T_0, x_0) \cdot \Delta T + \frac{\partial x}{\partial x_0}(T_0, x_0) \cdot \Delta x_0 = x_0 \quad (3.15)$$

Após algumas modificações na equação anterior, pode-se obter a expressão (3.16) para o cálculo de solução periódica de um sistema não-linear.

$$\frac{\partial x}{\partial t}(T_0, x_0) \cdot \Delta T + \frac{\partial x}{\partial x_0}(T_0, x_0) \Delta x_0 = x_0 - x(T_0, x_0) \quad (3.16)$$

Este método não determina a forma da solução e supera o problema de truncamento (caso dos métodos de balanço harmônico e de colocação).

3.2 MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO

Um problema se revela diante da determinação da função verdade ou quando essa função é desconhecida e precisa ter uma ideia aproximada das suas principais propriedades. Normalmente, torna-se necessário calcular esta função em alguns pontos e formular uma proposição para todos os outros valores.

A escolha do tipo da aproximação como local ou global e o nível de precisão desejado é muito importante. Assim, a velocidade de resolução dos métodos temporais é maximizada por uma abordagem direta do regime permanente.

Estuda-se os métodos de perturbação que examinam a solução sob a forma de uma perturbação da solução do sistema linear. Em seguida, desenvolve-se um pequeno parâmetro de acordo com a função.

O método de balanço harmônico e o método de colocação desenvolvem a solução desejada sob a forma de uma série de Fourier. A formulação do problema é realizada no domínio de frequência relacionando os coeficientes de Fourier.

Por fim, o método de elementos finitos utiliza funções de interpolação dos polinômios de Lagrange em cada elemento criado.

3.2.1 Métodos de Perturbação

Os métodos de perturbação, segundo Nayfeh (2007), incluem os métodos matemáticos para encontrar uma solução aproximada, a partir da solução exata do problema relacionado. A teoria de perturbação é aplicável se o problema não pode ser resolvido exatamente, mas pode ser formulado através da adição de um pequeno termo.

Os termos não-lineares da equação podem ser solucionados ao considerá-los pequenos e proporcionais a um parâmetro α (parâmetro de perturbação, sendo $\alpha \ll 1$). Veja a expressão (3.17).

$$F_{NL}(X, \dot{X}, \Omega, t) = \alpha \cdot \check{F}_{NL}(X, \dot{X}, \Omega, t) \quad (3.17)$$

A solução do problema não-linear $x(t)$ pode ser obtida ao desenvolver o parâmetro de perturbação α em potência crescente, conforme a expressão (3.18).

$$x(t) = x_0(t) + \alpha \cdot x_1(t) + \alpha^2 \cdot x_2(t) + \dots \quad (3.18)$$

Após obter um sistema com a introdução da equação anterior, pode-se determinar a solução final de forma sucessiva às potências crescentes, ou seja, a solução perturbadora de ordem 02 é calculada a partir da solução perturbadora de ordem 01.

Entretanto, pode-se aparecer termos secundários que dificultam a aproximação correta da solução final. Assim sendo, algumas técnicas foram desenvolvidas para lidar com tal problema:

- Método de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky (1961): introduz uma amplitude $A(t)$ e uma fase $\varphi(t)$ dependentes do tempo:

$$x(t) = A(t) \cos(\Phi(t)) + \alpha \cdot x_1(A(t), \Phi(t)) + \dots \quad (3.19)$$

- Método de Lindstedt-Poincaré, segundo Nayfeh e Mook (1979): aplica uma correção na pulsação da resposta não-linear ao considerar escalas de tempo menores:

$$x(t) = x_0(t_0, t_1, \dots) + \alpha \cdot x_1(t_0, t_1, \dots) + \alpha^2 \cdot x_2(t_0, t_1, \dots) + \dots \text{ com } t_i = \alpha^i \cdot t \quad (3.20)$$

As desvantagens deste método são relacionadas à difícil adaptação aos sistemas de grande porte, a limitação em não-linearidades simples e a propriedade analítica dos cálculos.

3.2.2 Método de Balanço Harmônico

O método de balanço harmônico, estudado por Nakhla e Vlach (1976), foi desenvolvido na década de 1990 e rapidamente se tornou reconhecido como um dos métodos mais simples e direto para resolução de sistemas dinâmicos não-lineares.

A solução periódica e aproximada do problema é definida por um somatório harmônico, somado a um termo inicial constante B_0 , sob forma de série de Fourier truncada, conforme a expressão (3.21).

$$X(t) = B_0 + \sum_{k=1}^m \left(A_k \cdot \sin\left(\frac{k}{v} \Omega \cdot t\right) + B_k \cos\left(\frac{k}{v} \Omega \cdot t\right) \right) \quad (3.21)$$

A expressão de $X(t)$ é inserida na equação que descreve o sistema.

Geralmente, agrupa-se os coeficientes de cada harmônico da expressão $X(t)$, os quais apresentam diferentes equações não-lineares. O sistema resultante é resolvido de forma iterativa através dos procedimentos de Newton-Raphson, o qual define as constantes da resposta aproximada.

Portanto, o grande inconveniente deste método é o tratamento dos termos não-lineares do sistema, ou seja, a definição dos coeficientes de Fourier dos esforços não-lineares.

Uma variação do método apresentado é denominada método de balanço harmônico incremental, o qual foi desenvolvido por Lau et al. (1982). Diferentemente do método tradicional que aplica Newton-Raphson em um sistema não-linear, o modo incremental utiliza

a série de Taylor associada ao procedimento de Galerkin antes da solução aproximada do sistema dinâmico.

Considera-se o vetor relacionado aos coeficientes de Fourier $Z = [B_0 \ A_1 \ B_1 \ \dots \ A_k \ B_k \ \dots]^T$ e v a componente de eventuais sub-harmônicos na expressão (3.22).

$$X(t) = \begin{bmatrix} I_n & \sin\left(\frac{\Omega}{v}t\right)I_n & \cos\left(\frac{\Omega}{v}t\right)I_n & \dots & \sin\left(\frac{k}{v}\Omega t\right)I_n & \cos\left(\frac{k}{v}\Omega t\right)I_n & \dots \end{bmatrix} [B_0 \ A_1 \ B_1 \ \dots \ A_k \ B_k \ \dots]^T \quad (3.22)$$

Para simplificar, pode-se definir a seguinte notação $T_n(t)$ na expressão (3.24).

$$T_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & \sin\left(\frac{\Omega}{v}t\right) & \cos\left(\frac{\Omega}{v}t\right) & \dots & \sin\left(\frac{k}{v}\Omega t\right) & \cos\left(\frac{k}{v}\Omega t\right) & \dots \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$T_n(t) = T_1(t) \otimes I_n \quad (3.24)$$

Sendo $\otimes$ o produto de Kronecker.

De maneira análoga, define-se $F(X, \dot{X}, \Omega, t)$ nas expressões descritas em (3.25).

$$\begin{aligned} F(X, \dot{X}, \Omega, t) &= C_0 + \sum_{k=1}^m \left(C_k \sin\left(\frac{k}{v}\Omega \cdot t\right) + D_k \cos\left(\frac{k}{v}\Omega \cdot t\right) \right) \\ F(X, \dot{X}, \Omega, t) &= T_n(t) [D_0 \ C_1 \ D_1 \ \dots \ C_k \ D_k \ \dots]^T \\ F(X, \dot{X}, \Omega, t) &= (T_1(t) \otimes I_n) b \end{aligned} \quad (3.25)$$

Determina-se um operador de derivação elementar e as velocidades e as acelerações nas expressões em (3.26):

$$\begin{aligned} \nabla &= \frac{\Omega}{v} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \dot{X}(t) &= T_n(t) \nabla_n Z \\ \ddot{X}(t) &= T_n(t) \nabla_n^2 Z = T_n(t) (\nabla_1^2 \otimes I_n) Z \end{aligned} \quad (3.26)$$

A expressão $T_n(t)b$ pode ser determinada após algumas modificações em (3.27).

$$T_n(t) (\nabla_1^2 \otimes \mathbf{m} + \nabla_1 \otimes \mathbf{c} + I_{2m+1} \otimes \mathbf{k}) = T_n(t) b \quad (3.27)$$

As funções trigonométricas decorrentes das não-linearidades podem ser estudadas em (3.28) com o procedimento de Galerkin.

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot g(t) dt \\ \frac{1}{T} \int_0^T {}^T \mathbf{T}_n(t) \mathbf{T}_n(t) dt &= \frac{1}{T} \int_0^T ({}^T \mathbf{T}_1(t) \mathbf{T}_1(t)) \otimes \mathbf{I}_n dt \end{aligned} \quad (3.28)$$

Posteriormente, obtém-se a expressão (3.29) que relaciona os coeficientes de Fourier da resposta Z .

$$H(Z, \Omega) = \mathbf{A}(\Omega) \cdot Z - b(Z, \Omega) \quad (3.29)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} K & & & & & \\ & K - \left(\frac{\Omega}{v}\right)^2 \mathbf{M} & -\frac{\Omega}{v} \mathbf{C} & & & \\ & \frac{\Omega}{v} \mathbf{C} & K - \left(\frac{\Omega}{v}\right)^2 \mathbf{M} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & K - \left(\frac{k}{v}\right)^2 \mathbf{M} & -\frac{k}{v} \Omega \mathbf{C} \\ & & & & \frac{k}{v} \Omega \mathbf{C} & K - \left(\frac{k}{v}\right)^2 \mathbf{M} \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

A matriz $\mathbf{A}$ em (3.30) depende das partes lineares do sistema e da frequência de excitação Ω . O vetor b corresponde aos coeficientes de Fourier.

A função $H(Z, \Omega)$ necessita de uma matriz Jacobiana com as derivadas dos termos não-lineares e pode ser finalmente resolvida por diversos métodos, como o método de diferenças finitas ou mesmo um cálculo analítico.

3.2.3 Método de Colocação

Segundo Xiu e Hesthaven (2005), o método de colocação é outro método para a solução de sistemas não-lineares e tem como objetivo analisar a equação do sistema sobre pontos de colocação para definir um sistema de equações algébricas não-lineares que podem ser

resolvidas por Newton-Raphson. Posteriormente, a solução é estudada como uma variação da função polinomial de Lagrange seccionada e de período T.

Os polinômios são decompostos em base de polinômios de Lagrange para determinar a solução em função de um número finito de incógnitas, conforme a expressão (3.31).

$$x^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^p x^{(i,j)} \left(\prod_{k=0, k \neq j}^p \frac{t - t_{i,k}}{t_{i,j} - t_{i,k}} \right) \quad (3.31)$$

Nota-se que $x^{(i,j)} = x^{(i)}(t_{i,j})$ são valores no instante $t_{i,j}$.

Para a resolução de sistemas não-lineares, o método de colocação decompõe a solução em série de Fourier e, em seguida, é solucionada pelo método de balanço harmônico.

Avalia-se $X(t)$, $\dot{X}(t)$ e $F_{NL}(X, \dot{X}, \Omega, t)$ em $r+1$ instantes do período e obtém-se as expressões em (3.32).

$$\begin{aligned} \bar{X} &= {}^T [{}^T X_0 {}^T X_1 \dots {}^T X_r] = {}^T [{}^T X(t_0) {}^T X(t_1) \dots {}^T X(t_r)] \\ \bar{F}_{NL} &= {}^T [{}^T F_{NL}(X_0, \dot{X}_0, \Omega, t_0) {}^T F_{NL}(X_1, \dot{X}_1, \Omega, t_1) \dots {}^T F_{NL}(X_r, \dot{X}_r, \Omega, t_r)] \end{aligned} \quad (3.32)$$

Tem-se $X(t)$ e $F_{NL}(X, \dot{X}, \Omega, t)$ descritos em função dos coeficientes de Fourier Z e b_{NL} (referência aos esforços F_{NL}). Com isso, os parâmetros $\bar{X}$, $\bar{\dot{X}}$, $\bar{F}_{NL}$ são descritos em função de tais coeficientes, conforme as expressões em (3.33).

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \bar{T}_1 \otimes I_n \cdot Z \\ \bar{\dot{X}} &= \bar{T}_1' \otimes I_n \cdot Z \\ \bar{F}_{NL} &= \bar{T}_1 \otimes I_n \cdot b_{NL} \\ \text{avec } \bar{T}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & \sin\left(\frac{\Omega}{\nu} t_0\right) & \cos\left(\frac{\Omega}{\nu} t_0\right) & \dots & \cos\left(\frac{m}{\nu} \Omega t_0\right) \\ 1 & \sin\left(\frac{\Omega}{\nu} t_1\right) & \cos\left(\frac{\Omega}{\nu} t_1\right) & \dots & \cos\left(\frac{m}{\nu} \Omega t_1\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \sin\left(\frac{\Omega}{\nu} t_r\right) & \cos\left(\frac{\Omega}{\nu} t_r\right) & \dots & \cos\left(\frac{m}{\nu} \Omega t_r\right) \end{bmatrix} \\ \bar{T}_n &= \bar{T}_1 \otimes I_n \quad \text{et} \quad \bar{T}_1' = \frac{d}{dt} \bar{T}_1 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Sendo I_n a matriz identidade de $\mathbb{R}^n$.

As expressões de $\bar{F}_{NL}$ e dos coeficientes de Fourier dos esforços não-lineares b_{NL} podem ser obtidas, conforme descrito em (3.34) e (3.35).

$$\bar{F}_{NL} = \begin{bmatrix} F_{NL}(X_0, \dot{X}_0, \Omega, t_0) \\ \vdots \\ F_{NL}(X_r, \dot{X}_r, \Omega, t_r) \end{bmatrix} = F_{NL}(\bar{X}, \bar{\dot{X}}, \Omega, [t_0 \cdots t_r]) \quad (3.34)$$

$$b_{NL} = ({}^T\bar{T}_n\bar{T}_n)^{-1} {}^T\bar{T}_n F_{NL}(\bar{X}, \bar{\dot{X}}, \Omega, [t_0 \cdots t_r]) \quad (3.35)$$

Tirando proveito da teoria existente na interpolação polinomial, o método de colocação chega a uma convergência rápida quando as soluções procedem suficientemente no espaço aleatório, semelhante aos métodos de Galerkin. Assim, o custo dos métodos de cálculo de colocação depende da escolha dos pontos de colocação.

3.2.4 Método de Elementos Finitos

O método de elementos finitos, estudado por Bathe (1976), está fundamentado em uma discretização espacial e temporal ao tratar de problemas dinâmicos não-lineares. As incógnitas do sistema são valores nodais avaliados em vários instantes de tempo.

As respostas dinâmicas são avaliadas com o auxílio de polinômios de Lagrange definidos sobre os instantes de tempo estudados. O sistema obtido apresenta uma matriz de rigidez e uma matriz Jacobiana dos termos não-lineares. Finaliza-se com modificações dos termos não-lineares por interpolação para diminuir a quantidade de integrações a serem realizadas. Este método é vantajoso ao tratar soluções transitórias e soluções periódicas ou quase-periódicas aumentando o campo de utilização para sistemas dinâmicos não-lineares.

4 VALIDAÇÃO E DISCUSSÃO DOS MODELOS DE ATRITO E DOS MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

4.1 PRIMEIRA VALIDAÇÃO

A fim de comparar os diferentes modelos de atrito estático, valida-se o Modelo de Atrito de Coulomb a partir do método de Runge-Kutta com os parâmetros definidos por Rao (2008) através do software MATLAB e, em seguida, utiliza-se a mesma programação para desenvolver outros modelos.

Essa validação é extremamente importante para a sequência dos estudos ao confirmar que a programação desenvolvida é válida e pode ser aplicada em outros casos variando a função $f(\dot{x})$ e os parâmetros constantes da equação.

A equação (4.1) se refere a um sistema massa-mola com força externa e sujeito a uma força de atrito e os parâmetros podem ser vistos na Tabela 1:

$$m.\ddot{x} + k.x + \mu.m.g.\sin(\dot{x}) = F_0.\sin(\omega.t) \quad (4.1)$$

Tabela 1 - Parâmetros utilizados na primeira validação.

m	k	F₀	ω	μ	x₀	ẋ₀
[kg]	[N/m]	[N]	[rad/s]		[m]	[m/s]
5,0	2000,0	100,0	30,0	0,5	0,1	0,1

Adiante, seguem o gráfico obtido no Matlab (Figura19) e o gráfico encontrado na literatura (Figura 20) para mostrar que ambos são iguais.

Figura 19 - Gráfico obtido no Matlab para Primeira Validação.

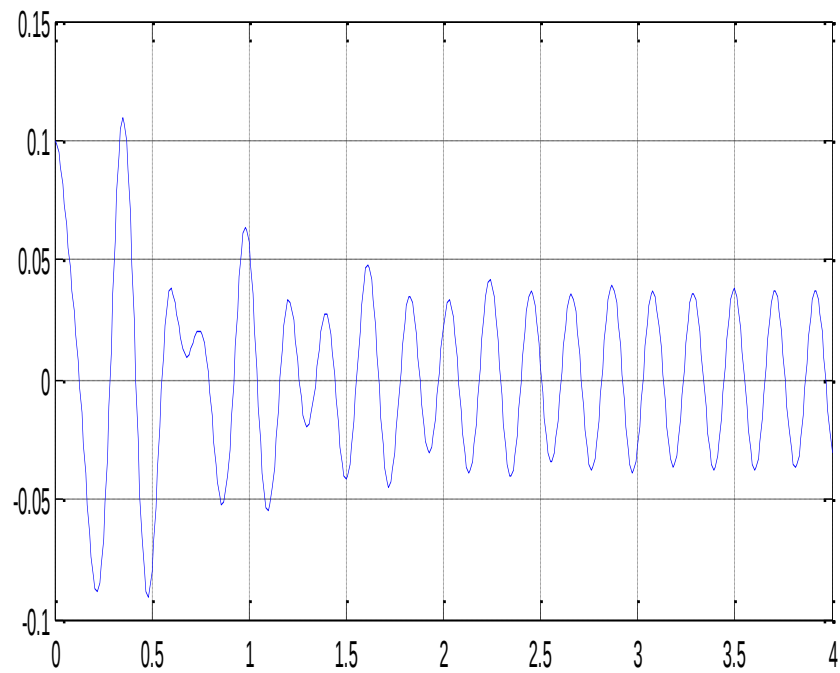
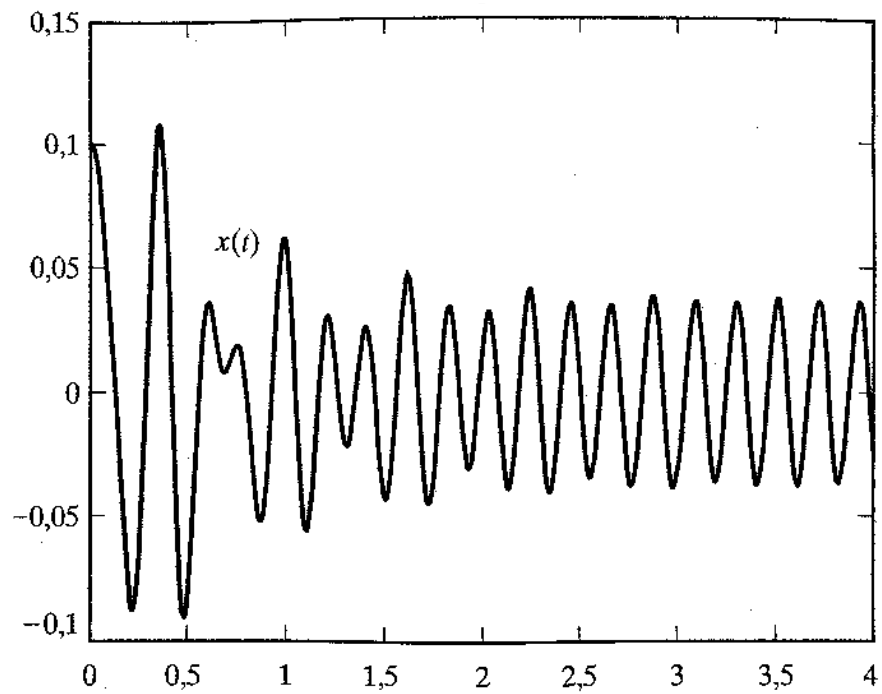


Figura 20 - Gráfico encontrado na literatura.



Fonte: (Rao, 2008).

4.2 SEGUNDA VALIDAÇÃO

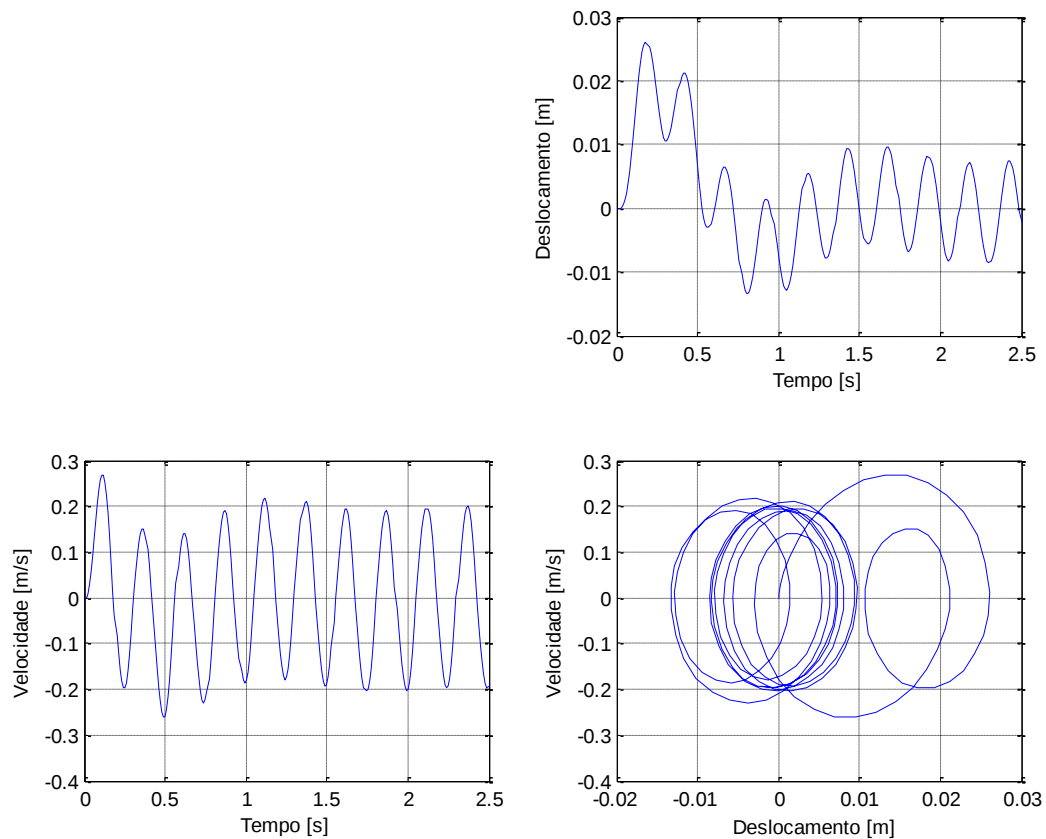
A segunda validação do programa anterior para o modelo de Coulomb foi concebida para o problema no artigo de Hong e Liu (2000). Este problema foi tratado nos trabalhos de Karim (2013), aluno de doutorado no centro de pesquisa francês e integrante da mesma linha de pesquisa sobre vibrações não-lineares.

Os parâmetros (Tabela 2) e os gráficos obtidos (Figura 21) seguem abaixo:

Tabela 2 - Parâmetros utilizados na Segunda Validação.

m	K	F₀	ω	F_c	x₀	ẋ₀
[kg]	[N/m]	[N]	[rad/s]	[N]	[m]	[m/s]
200.10 ³	5000.10 ³	1000.10 ³	8π	200.10 ³	0	0

Figura 21 - Gráficos referentes à Segunda Validação.



Assim sendo, a programação desenvolvida é válida e pode ser considerada na sequência dos estudos.

4.3 DISCUSSÃO DOS MODELOS DE ATRITO

Diante das comprovações anteriores, a programação está apta para ser utilizada.

Os parâmetros das equações a serem utilizadas no desenvolvimento dos estudos dos modelos de atrito estão na Tabela 3.

Tabela 3 - Parâmetros utilizados no desenvolvimento dos gráficos dos modelos de atrito.

m [kg]	K [N/m]	F₀ [N]	ω [rad/s]	F_c [N]	F_s [N]	F_v [N]	ẋ_s [m/s]	x₀ [m]	ẋ₀ [m/s]	F_{St}(Y,t_p) [N]	τ_L [m.s]
5,00	2000,00	100,00	30,00	2,45	0,23	2,00	0,02	0,10	0,10	3,00	30,00

As equações utilizadas pelos modelos são representadas em (4.2) e (4.3) que novamente se referem a um sistema massa-mola com força externa e sujeito à força de atrito.

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = F_{ext} - f(\dot{x}) \quad (4.2)$$

$$F_{ext} = F_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (4.3)$$

em que $f(\dot{x})$ é a força de atrito que varia em cada modelo (Quadro 2):

Quadro 2 - Definição da força de atrito para cada modelo.

Modelo de atrito	Equação
a) Atrito de Coulomb	$f(\dot{x}) = F_c \cdot \text{sgn}(\dot{x})$
b) Atrito Estático	$f(F_{ext}, \dot{x}) = \begin{cases} F_{ext} & \dot{x} = 0; F_{ext} < F_s \\ F_s \cdot \text{sgn}(F_{ext}) & \dot{x} = 0; F_{ext} \geq F_s \end{cases}$
c) Atrito de Coulomb combinado ao Atrito Viscoso	$f(\dot{x}) = F_c \cdot \text{sgn}(\dot{x}) + F_v \cdot \dot{x}$
d) Atrito de Stribeck	$f(\dot{x}) = F_v \cdot \dot{x} + \left[F_c + (F_s - F_c) \cdot e^{-\left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_s}\right)^\delta} \right] \text{sgn}(\dot{x})$

e) Atrito de Karnopp	$f(\dot{x}) = \begin{cases} F_c \cdot \text{sgn}(\dot{x}) + F_v, & \dot{x} \geq DV \\ F_{ext} - k \cdot x, & \begin{cases} \dot{x} < DV \text{ e} \\ F_{ext} - k \cdot x \leq F_s \end{cases} \\ F_s \cdot \text{sgn}(F_{ext} - k \cdot x) & \begin{cases} \dot{x} < DV \text{ e} \\ F_{ext} - k \cdot x > F_s \end{cases} \end{cases}$
f) Atrito de Armstrong (com deslizamento)	$f(\dot{x}) = \left\{ F_c + F_v \cdot \dot{x} + F_{st}(\gamma, t_p) \frac{1}{1 + \left[\frac{\dot{x}(t - \tau_L)}{\dot{x}_s} \right]^2} \right\} \text{sgn}(\dot{x})$

Após o estudo dos modelos e correta aplicação de $f(\dot{x})$, os gráficos obtidos são: o deslocamento em função do tempo (reposta dinâmica) e a velocidade em função do deslocamento (diagrama de fases).

Estes gráficos são mostrados nas Figuras de 22 a 27.

Figura 22 - Resposta Dinâmica e Diagrama de Fases para o Atrito de Coulomb.

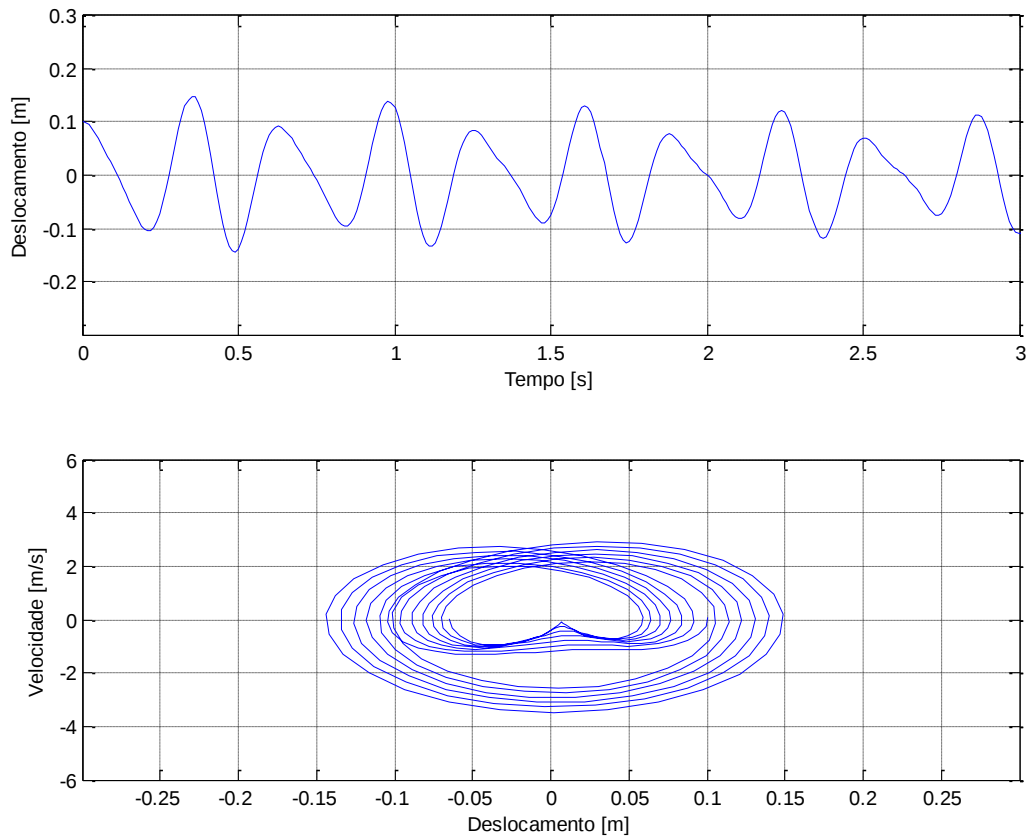


Figura 23 - Resposta Dinâmica e Diagrama de Fases para o Atrito Estático.

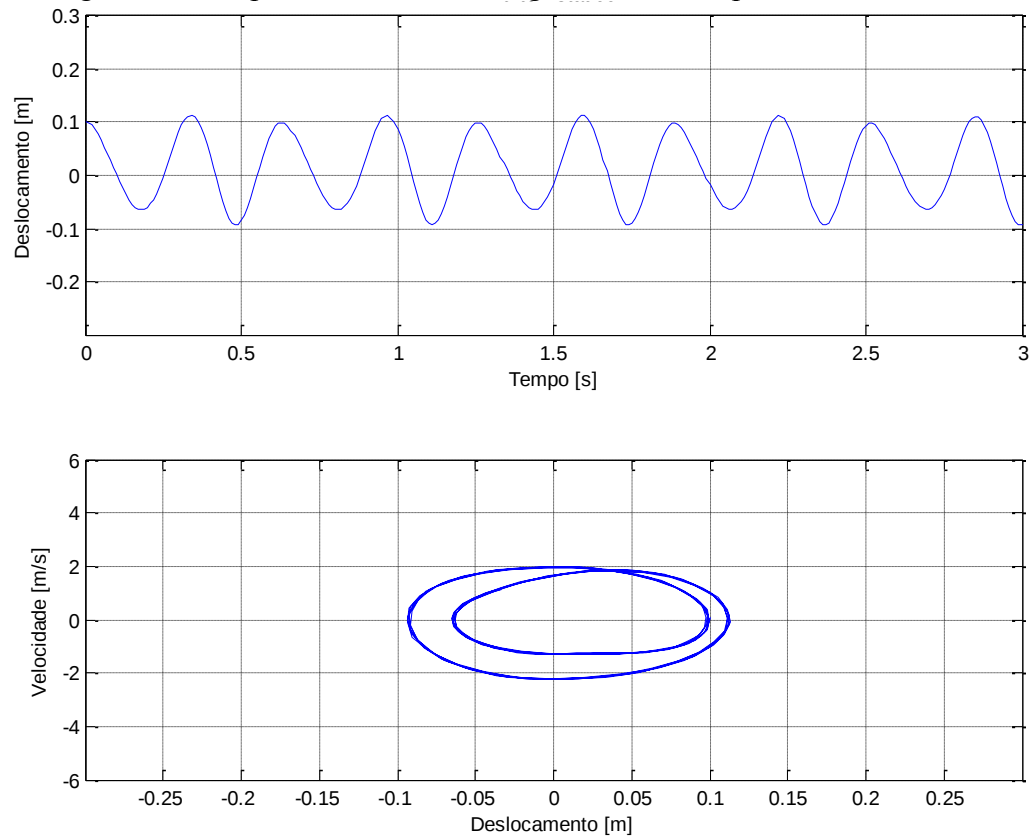


Figura 24 - Resposta Dinâmica e Diagrama de Fases para o Atrito de Coulomb combinado ao Atrito Viscoso.

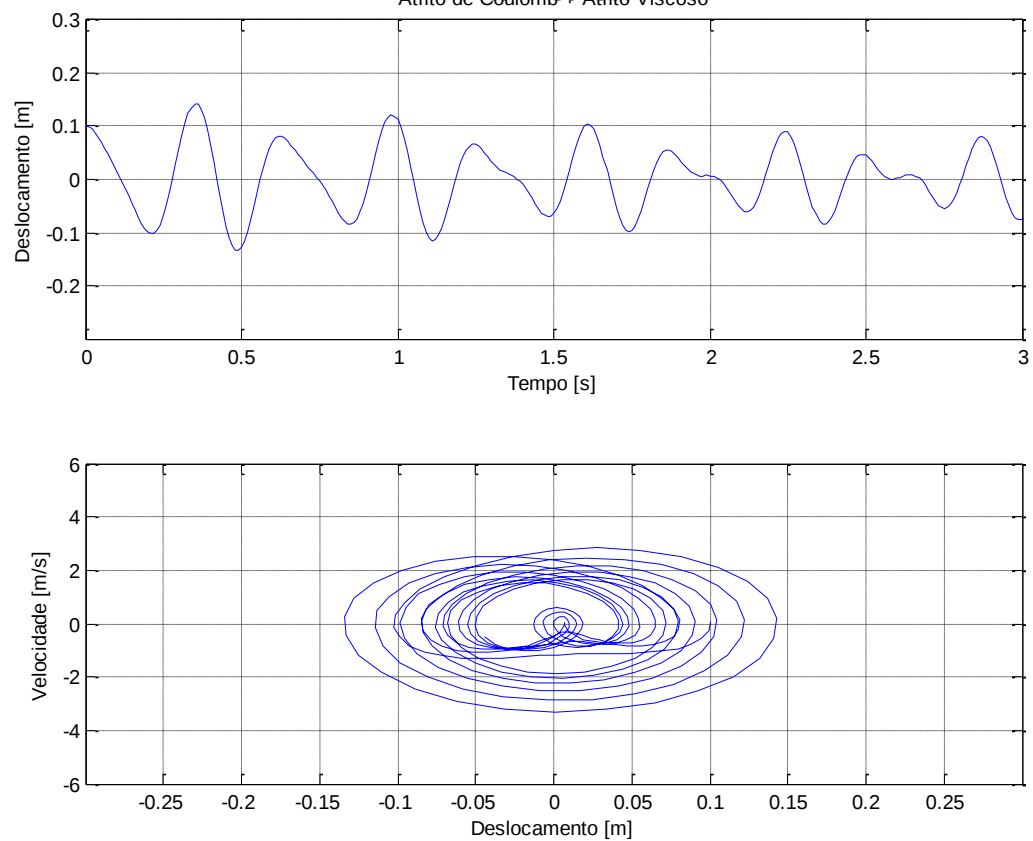


Figura 25 - Resposta Dinâmica e Diagrama de Fases para o Atrito de Stribeck.

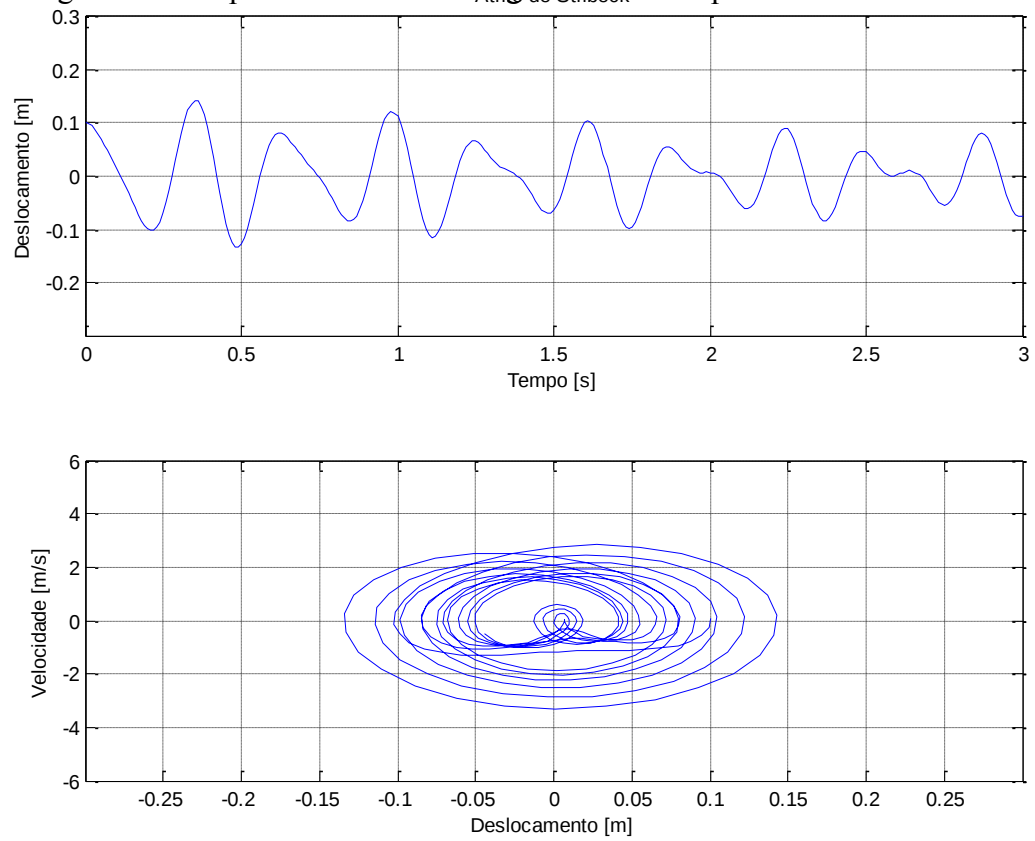


Figura 26 - Resposta Dinâmica e Diagrama de Fases para o Atrito de Karnopp.

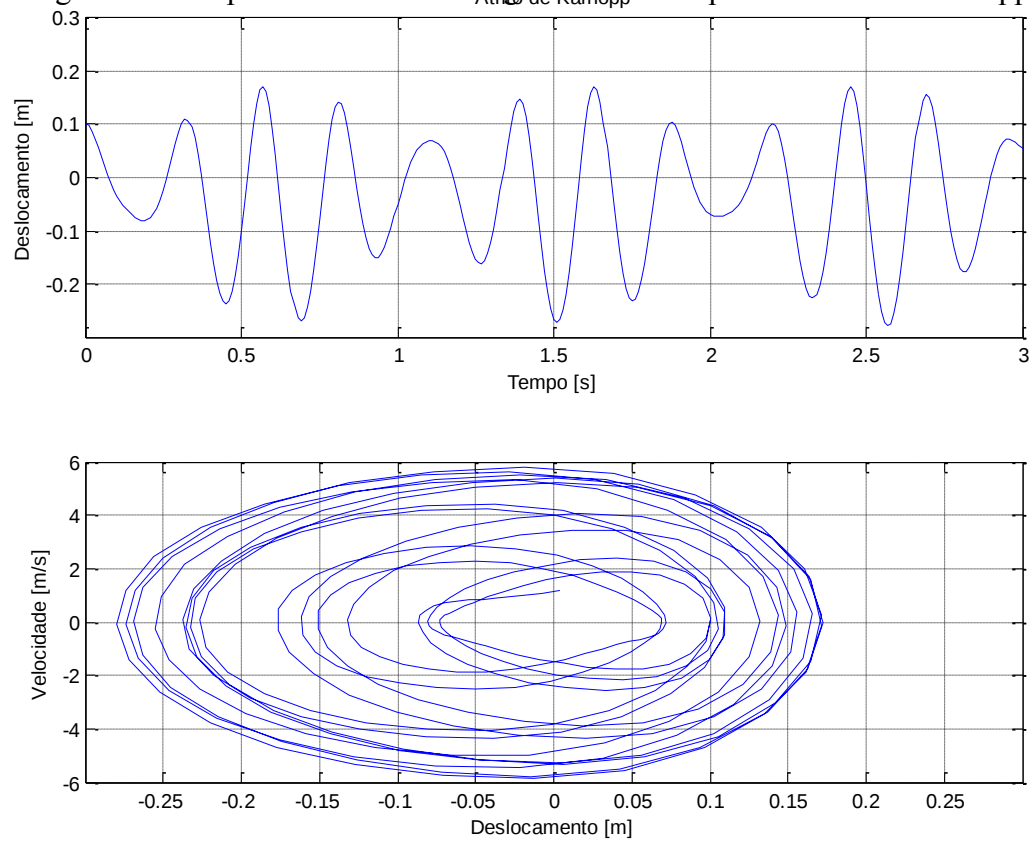
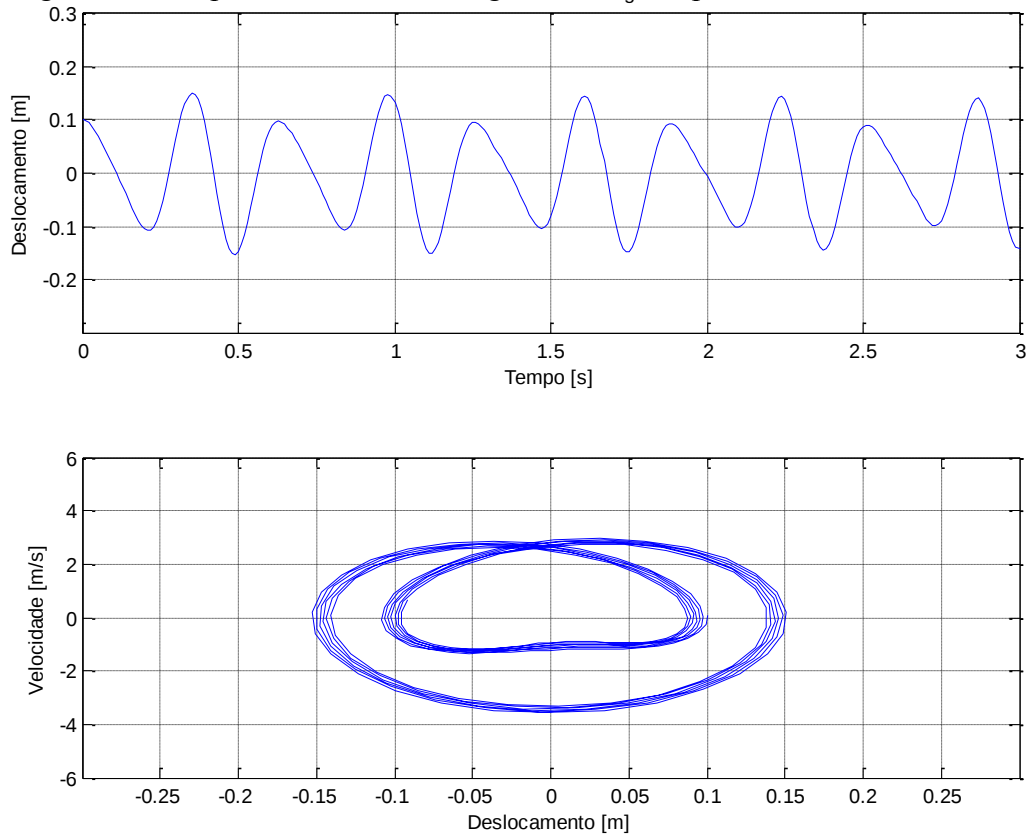


Figura 27 - Resposta Dinâmica e Diagrama de Fases para o Atrito de Armstrong.



A partir da análise dos gráficos obtidos pelo Modelo de Atrito de Coulomb (Figura 22), verifica-se que a resposta do sistema é razoavelmente estável e seu diagrama de fases apresenta um formato padrão e oscila em torno do ponto inicial ($x = 0$).

Com uma estabilidade superior, o Modelo de Atrito Estático (Figura 23) mostra que o problema dinâmico pouco oscila ao longo do tempo com a força de atrito definida em velocidade nula.

O Modelo de Atrito de Coulomb somado ao Atrito Viscoso (Figura 24) proporciona configurações semelhantes ao modelo que considera apenas o atrito de Coulomb, indicando influência moderada do atrito viscoso. O deslocamento final tem baixa precisão, conforme visto na teoria.

A Figura 25 evidencia que o efeito de Stribeck é quase imperceptível nos gráficos, os quais se tornam idênticos aos da Figura 24.

O Modelo de Atrito de Karnopp (Figura 26) apresenta grande variação na resposta dinâmica do sistema. Seu diagrama de fases não apresenta um padrão de oscilação bem definido.

Por último, tem-se o Modelo de Atrito de Armstrong (Figura 27) com um sistema estável e bem definido. O diagrama de fases tem um movimento oscilatório padronizado a partir do repouso.

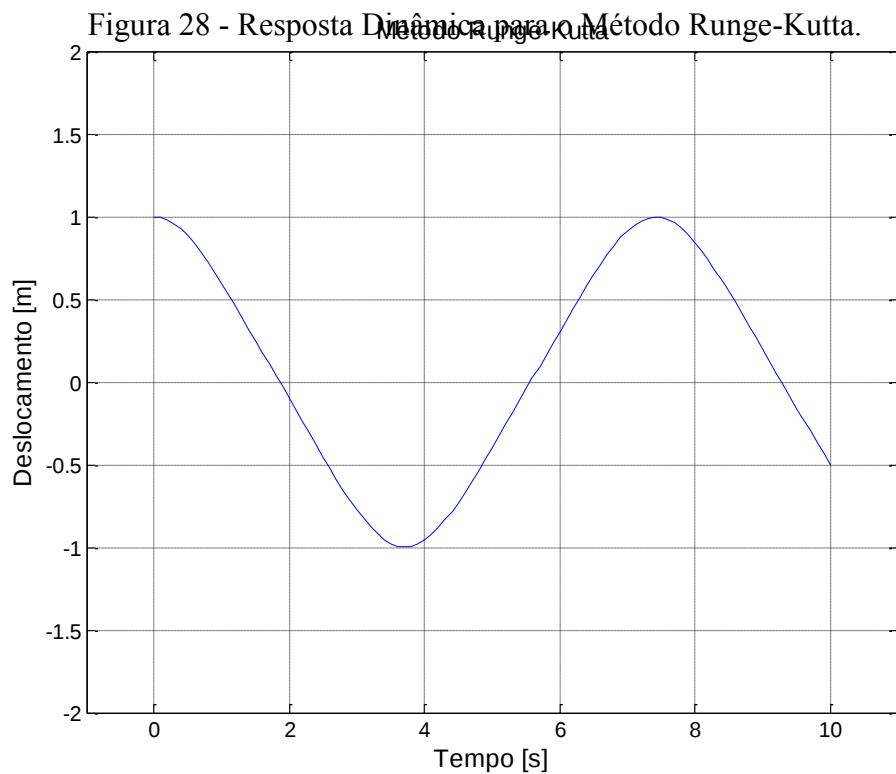
4.4 COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS TEMPORAL E DE APROXIMAÇÃO

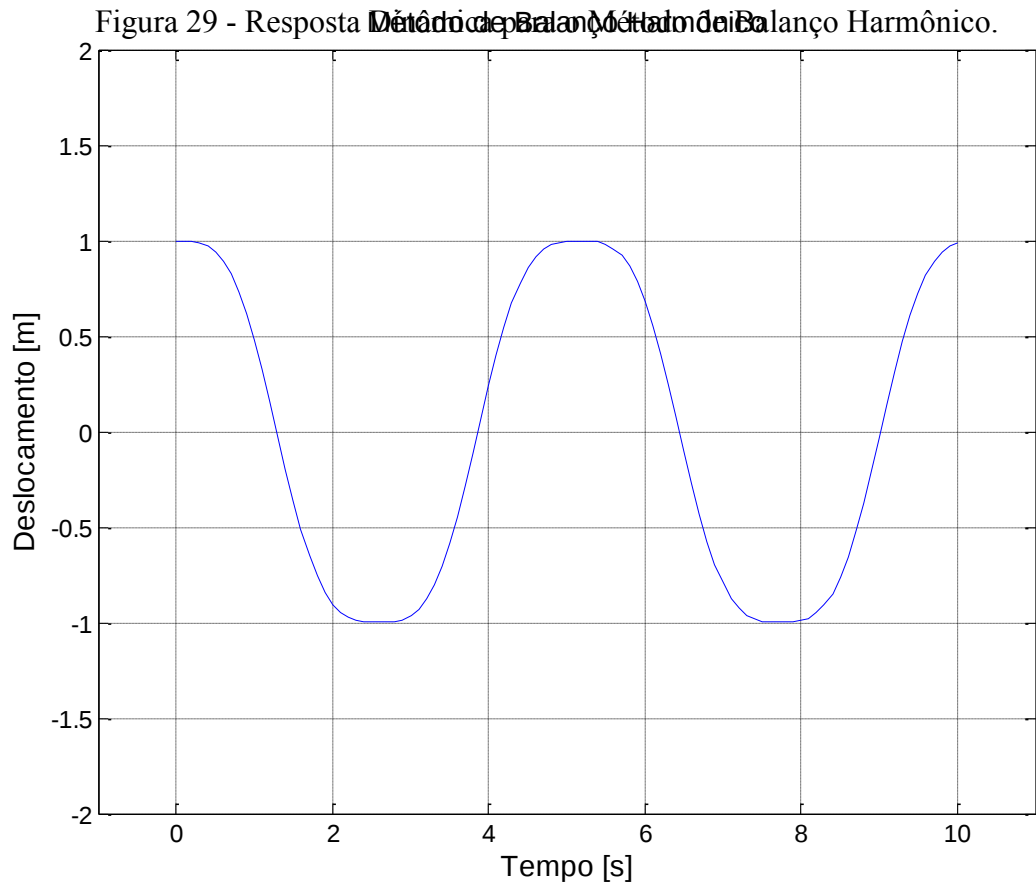
Utilizando a base da programação dos itens anteriores, desenvolveu-se uma análise para fins de comparação entre o Método de Integração de Runge-Kutta e o Método de Balanço Harmônico.

A equação que descreve o sistema, visto por Mickens (2010), está representada em (4.4).

$$\ddot{x} + x^3 = 0 \quad (4.4)$$

Após o estudo dos métodos, os gráficos obtidos do deslocamento em função do tempo (resposta dinâmica) estão nas Figura 28 e 29.





Constata-se que o mesmo problema teve diferentes respostas dinâmicas que oscilam na mesma amplitude de deslocamento. O período do Método Runge-Kutta é maior que aquele proporcionado pelo Método de Balanço Harmônico. Uma resposta maior provoca menor frequência ondulatória, fato que deve ser avaliado junto às condições do problema real para definir o melhor método a ser empregado.

5 CONCLUSÃO

A partir deste trabalho de graduação, constata-se que a literatura é farta em modelos de atrito e métodos de resolução não-linear para serem aplicados em problemas dinâmicos. Torna-se evidente que o modelo de atrito e/ou o método não-linear mais condizentes resultam numa resposta final mais próxima dos valores ideais do problema dinâmico.

Para os casos em que a força de atrito não necessita de análise em torno da velocidade igual a zero, pode-se utilizar de forma satisfatória os modelos clássicos. Para sistemas dinâmicos com uso de lubrificante e consequente surgimento do atrito viscoso, opta-se pelos modelos de Karnopp e Armstrong. Ao tratar problemas ainda mais complexos, deve-se aplicar modelos que consideram os efeitos de dinâmica interna do atrito como os propostos por Dahl e seus seguidores: Modelo de Bliman e Sorine e Modelo de LuGre.

O sistema é solucionado com o emprego de métodos não-lineares de cálculo. Nos casos em que não há a necessidade de se pré-determinar a solução do problema, os métodos temporais são mais indicados e o resultado é aperfeiçoado a cada interação realizada. A demanda por métodos mais rápidos implica na utilização dos métodos de aproximação ao considerarem a solução final como perturbadora da solução linear.

Os modelos de atrito e os métodos de resolução foram analisados com o auxílio do software Matlab. Após as validações, a programação confeccionou os gráficos da resposta dinâmica e do diagrama de fases para cada modelo de atrito estático. O Modelo de Atrito de Armstrong foi o mais estável entre os seis analisados. O Método de Balanço Harmônico mostrou resposta mais rápida ($T = 5s$) do que o Método Temporal de Runge Kutta ($T = 7,5s$).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARMSTRONG-HÉLOUVRY, B.; DUPONT, P.; CANUDAS DE WIT, C. (1994). A Survey of Models, Analysis Tools and Compensation Methods for the Control of Machines with Friction. **Automatica**, 30 (7), 1994, p. 1083-1138.

BATHE, K. J. **Numerical methods in finite element analysis**. Prentice-Hall, 1976.

BLIMAN, P. A.; SORINE, M. **Friction Modelling by Hysteresis Operators. Application to Dahl, Sticktion and Stribeck effects**. Trento: In Proceedings of the Conference Models of Hysteresis, 1991.

BLIMAN, P. A.; SORINE, M. **A System-Theoretic Approach of Systems with Hysteresis. Application to Friction Modelling and Compensation**. Groningen: In Proceedings of the second European Control Conference, 1993, p. 1844-1849.

BLIMAN, P. A.; SORINE, M. **Easy-to-Use Realistic Dry Friction Models for Automatic Control**. Rome: In Proceedings of 3rd European Control Conference, 1995, p. 3788-3794.

BOGOLIUBOV, N. N.; MITROPOLSKY, Y. A. **Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations**. New York: Gordon and Breach, 1961.

BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas. **Análise Numérica**. 8. ed. CENGAGE Learning, 2008.

CANUDAS DE WIT, C.; OLSSON, H.; ASTROM, K. J.; LISCHINSKY, P. **A New Model for Control of Systems with Friction**. IEEE Transactions on Automatic Control, 40(3), 1995, p. 419-425.

DAHL, P. **A Solid Friction Model**. Technical Report TOR-0158(3107-18)-1. Los Angeles: The Aerospace Corporation, 1968.

HESS, D. P.; SOOM, A. **Friction at a Lubricated Line Contact Operating at Oscillating Sliding Velocities**. *Journal of Tribology*, 112(1), 1990, p. 147-152.

HONG, H. K.; LIU, C. S. Coulomb friction oscillator: modelling and responses to harmonic loads and base excitations. **Journal of Sound and Vibration**, 229(5), 1171-1179, 2000.

JEAN-MARIE, G. **Frottement, usure et lubrification la tribologie ou science des surfaces**. Paris: Eyrolles, 2000.

KAMOPP, D. Computer Simulation of Stick-Slip Friction in Mechanical Dynamic Systems. **Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions ASME**, 107(1), 1985, p. 100-103.

KARIM, Y. **Caractérisation Robuste de Liaisons Amortissantes avec Dispositifs Piézo-Electriques pour la Réduction de Vibrations de Structures**. Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés (LMSSC), 2013.

KUHL, D.; CRISFIELD, M. A. Energy-conserving and decaying algorithms in non-linear structural dynamics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 45(5): 569–599, 1999.

KUHL, D.; RAMM, E. Generalized Energy-Momentum Method for non-linear adaptive shell dynamics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 178(3–4): 343–366, 1999.

LAU, S. L.; CHEUNG, Y. K.; WU, S. Y. A variable parameter incrementation method of dynamic instability of linear and nonlinear systems. **Journal of Applied Mechanics**, 49: 849–853, 1982.

MARTÍNEZ-CARRANZA, J.; SOTO-EGUIBAR, F.; MOYA-CESSA, H. Alternative Analysis to Perturbation Theory. **The European Physical Journal D**, 66, 22, 2012.

MICKENS, Ronald E. **Truly nonlinear oscillations: harmonic balance, parameter expansions, iteration, and averaging methods**. World Scientific, Atlanta University USA, 2010.

NAKHLA, Michel S.; VLACH, Jiri. A piecewise harmonic balance technique for determination of periodic response of nonlinear systems. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, Vol. 23 (2), 1976, p. 85-91.

NAYFEH, A. H.; BALACHANDRAN, B. **Applied Nonlinear Dynamics - Analytical, Computational and Experimental Methods**. 1995, Wiley Series in Nonlinear Science.

NAYFEH, A. H.; MOOK, D. T. **Nonlinear Oscillations**. 1979, John Wiley.

NAYFEH, A. H. **Perturbation Methods**. 2007, John Wiley.

RAO, Singiresu S. **Vibrações Mecânicas**. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008, p. 101-125.

XIU, D; HESTHAVEN, J. S. High-Order Collocation Methods for Differential Equations with Random Inputs. **Society for Industrial and Applied Mathematics**, Vol. 27, No. 3, 2005, p. 1118–1139.