

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA – UNESP
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – Campus de Ilha Solteira

Lucas Fornaziero de Oliveira

**Análise estática do chassi de aço carbono 1020 e alumínio 6061
de um ciclo-riquixá**



Ilha Solteira – SP
2024

Lucas Fornaziero de Oliveira

**Análise estática do chassi de aço carbono 1020 e alumínio 6061
de um ciclo-riquixá**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresenta à Universidade Estadual
Paulista (UNESP), Faculdade de
Engenharia de Ilha Solteira, Ilha
Solteira, para obtenção de
Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Marcio
Antônio Bazani

Ilha Solteira – SP
2024

ATA DE DEFESA

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA – CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
ATA DA DEFESA – TRABALHO DE GRADUAÇÃO

TÍTULO: ANÁLISE ESTÁTICA DO CHASSI DE AÇO CARBONO 1020 E ALUMÍNIO 6061 DE UM CICLO-RIQUIXÁ

ALUNO: Lucas Fornaziero de Oliveira

RA: 172054133

Orientador: Prof. Dr. Marcio Antonio Bazani

Aprovado (X) – Reprovado () pela

Comissão Examinadora Nota obtida: 5,0

Comissão Examinadora:



Documento assinado digitalmente
MARCIO ANTONIO BAZANI
Data: 12/06/2024 08:16:45-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Dr. Marcio Antonio Bazani

Presidente (Orientador)



Documento assinado digitalmente
EDUARDO PRETO
Data: 11/06/2024 21:16:22-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Me. Eduardo Preto



Documento assinado digitalmente
LUCAS SIMON ARAUJO
Data: 11/06/2024 21:59:43-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Me. Lucas Simon Araujo



Documento assinado digitalmente
LUCAS FORNAZIERO DE OLIVEIRA
Data: 11/06/2024 20:43:08-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Assinatura do aluno

Ilha Solteira (SP) 3 de Junho de 2024.

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

- O48a Oliveira, Lucas Fornaziero de.
Análise estática do chassi de aço carbono 1020 e alumínio 6061 de um ciclo-
rickshaw / Lucas Fornaziero de Oliveira. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2024
24 f. : il.
- Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Engenharia Mecânica) -
Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia, Ilha Solteira,
2024
- Orientador: Marcio Antonio Bazani
- Inclui bibliografia
1. Análise estática. 2. Simulações. 3. Elementos finitos. 4. Materiais.

Dedico este trabalho aos meus pais, meus
maiores e melhores orientadores da vida.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais e irmãs, que me deram todo apoio possível para que eu concluísse minha trajetória, me proporcionando apoio e condições a cada decisão durante os anos de curso.

As amizades e afinidades que conquistei durante minha estadia na cidade de Ilha Solteira, me auxiliaram não apenas em momentos acadêmicos como pessoais e financeiros.

Por fim, ao meu orientador que me apoiou em todo caminho para a conclusão do presente trabalho e graduação.

RESUMO

O trabalho a seguir apresenta uma análise estática mecânica utilizando simulação computacional da “carroagem da alegria”, desenvolvida pelo professor doutor Antonio de Pádua Filho, é representada por um veículo introduzido na Índia na década de 40 conhecido como Ciclo-Riquixá, onde nesta análise utilizaremos o desenho técnico 3D da estrutura e a simulação em malha desenvolvidos através do software *Autodesk Inventor 3D®*; será apresentado a revisão bibliográfica contendo os modelos matemáticos utilizados para os cálculos do software, como tensão de Von-Mises e Fator de Segurança; é abordado sobre a estrutura física original, os componentes utilizados para sua construção e os materiais usados na simulação numérica, além de alguns detalhes sobre os parâmetros do projeto, como pontos de apoio e forças atuantes, e desenvolvimento de malha; nos resultados é apresentado os valores e métodos obtidos conforme padrão do software, diagramas de força cortante e momento fletor e as análises mecânicas, por exemplo; e por fim, na conclusão é discutido sobre o efeito das forças-peso atuantes na estrutura, a diferença de resultados entre um material e outro, e também é apresentado possíveis melhorias de processo e estrutural para a estrutura e simulação.

Palavras-chave: estrutura; chassi; análise estática; simulação; elementos finitos; materiais.

ABSTRACT

The following work presents a static mechanical analysis using computer simulation of the “joy wagon”, developed by Professor Antonio de Padua Filho, which is represented by a vehicle introduced in India in the 1940s known as the Ciclo-Riquixá, where in this analysis we will use the 3D technical drawing of the structure and the mesh simulation developed using *Autodesk Inventor 3D*® software; the bibliographical review containing the mathematical models used for the software calculations, such as Von-Mises stress and Factor of Safety, will be presented; the original physical structure, the components used for its construction and the materials used in the numerical simulation are discussed, as well as some details about the design parameters, such as support points and acting forces, and mesh development; the results show the values and methods obtained according to the software standard, shear force and bending moment diagrams and mechanical analyses, for example; and finally, the conclusion discusses the effect of the weight forces acting on the structure, the difference in results between one material and another, and also presents possible process and structural improvements to the structure and simulation.

Keywords: structure; chassis; static analysis; simulation; finite elements; materials.

Lista de Figuras

Figura 1 - Simplificação dos carregamentos e reações de apoio em viga.....	15
Figura 2 - Distâncias entre rodas e pino.....	17
Figura 3 - Estado plano de tensão.....	20
Figura 4 - Tipos de elementos finitos.....	23
Figura 5 - Design da estrutura do chassi.....	25
Figura 6 - Pontos de apoio e cargas atuantes.	26
Figura 7 - Malha gerada por simulação computacional.....	27
Figura 8 - Aproximação de malha	27
Figura 9 - Diagrama de força cortante da estrutura em aço carbono.....	28
Figura 10 - Diagrama de força cortante da estrutura em alumínio 6061.....	29
Figura 11 - Diagrama de momento fletor em da estrutura em aço carbono.....	29
Figura 12 - Diagrama de momento fletor em da estrutura em alumínio 6061.....	29
Figura 13 - Tensão equivalente de Von-Mises / Estrutura em aço carbono.....	31
Figura 14 - Tensão equivalente de Von-Mises / Estrutura em alumínio.....	32
Figura 15 - Fator de segurança / Estrutura em aço carbono.....	33
Figura 16 - Fator de segurança / Estrutura em alumínio.....	33
Figura 17 - Deslocamento / Estrutura em aço carbono.....	34
Figura 18 - Deslocamento / Estrutura em alumínio.....	34
Figura 19 - Apoio em “V” para o acento do lado do pino.....	35

Lista de Tabelas

Tabela 1 - Geometria dos perfis do chassi.....	24
Tabela 2 - Propriedades dos materiais.....	25
Tabela 3 - Forças de reações reais dos pontos de apoio da estrutura.....	30
Tabela 4 - Momentos reações reais dos pontos de apoio da estrutura.....	30
Tabela 5 - Resultados detalhados.....	39
Tabela 6 – Dados físicos.....	40

Sumário

1. Introdução.....	12
2. Objetivos.....	13
2.1. Objetivos gerais.....	13
2.2. Objetivos Específicos.....	13
3. Revisão bibliográfica.....	13
3.1. Análise estática.....	14
3.1.1. Segunda Lei de Newton.....	14
3.1.2. Força cortante e Momento fletor.....	14
3.1.3. Centro de massa.....	15
3.1.4. Momento de inércia.....	16
3.1.5. Torção.....	17
3.1.6. Tensões.....	18
3.1.6.1. Tensão normal.....	18
3.1.6.2. Flexão.....	18
3.1.6.3. Cisalhamento.....	19
3.1.6.4. Lei de Hooke.....	19
3.1.6.5. Estado plano de tensões.....	19
3.1.7. Critérios de falha.....	21
3.2. Fator de segurança.....	22
3.3. Elementos finitos.....	22
4. Materiais e métodos.....	24
4.1. Estrutura do chassi.....	24
4.2. Simulação numérica computacional.....	26
5. Resultados.....	28
5.1. Força cortante e Momento fletor.....	28
5.2. Análise estrutural.....	31
6. Conclusões.....	36
7. Referências.....	37
Apêndice	39
Anexo A – Resultados.....	40

Anexo B – Algoritmo de plotagem.....	41
--------------------------------------	----

1. Introdução

Construída para lazer, a “carroagem da alegria” do Professor Doutor Antonio de Pádua Filho é conhecida por todos os alunos da Engenharia Mecânica como objeto de estudos das matérias que o professor leciona. Podemos adaptar a carroceria a um certo veículo criado a décadas atrás, o ciclo-riquixá.

Também conhecidos no Brasil como Táxi ecológico ou Ecotáxi, o ciclo-riquixá é maior que um triciclo, um meio de locomoção urbana, onde duas pessoas se sentam em um assento elevado e outra pessoa pedala, podendo ser na frente ou atrás (Flipar, 2024). Ele foi introduzido na década de 1940 na Índia, e também foi implementado em cidades americanas, como Nova York (Yamaguti, 2019).

No Rio de Janeiro e Volta Redonda eles são utilizados como meio alternativo de transporte público. No programa municipal “Movimento Salvador vai de bike”, que foi criado em 2014, em uma parte foram iniciados testes do serviço de táxi em triciclos velo-táxi oferecidos inicialmente no Centro Histórico de Salvador (G1, 2014).

A análise estática estrutural é uma ferramenta fundamental para um projeto mecânico tanto para inovação quanto para adaptação mecânica. Um método usado para análise de comportamento de elementos mecânicos e estruturais quando submetidos a esforços e cargas estáticas. Ou seja, não é apenas uma análise lógica, é uma análise complexa que compreende movimentos de estabilidade conectados as teorias físicas e matemáticas solicitadas para deslocamentos naturais dos componentes estruturais (BENZOR SOLUÇÕES EM ENGENHARIA E TECNOLOGIA, 2022).

O processo de análise estática começa com o desenho técnico da estrutura em um software de análise 3D, como o *SolidWorks*®, por exemplo. Na sequência é feita a escolha do material, de forma que as propriedades mecânicas estejam de acordo, assim a simulação da reação aos esforços e cargas na estrutura da será o mais verdadeiro e realista possível. Em seguida, a estrutura é subdividida em elementos finitos, que são pequenos fragmentos, onde será analisada individualmente os esforços sobre cada subestrutura para obtermos uma maior precisão da atuação das forças sobre o corpo. Logo após, é feita a definição dos parâmetros de simulação, onde são inseridos todos os parâmetros físicos, por exemplo, forças atuantes, posicionamento. Por fim, é feita a análise dos resultados, avaliando a atuação das forças no sistema e tomando decisões concisas sobre a resistência da estrutura onde os esforços estão sendo aplicados (BENZOR SOLUÇÕES EM ENGENHARIA E TECNOLOGIA, 2022).

A simulação computacional é representada pelo uso de softwares que, por meio de modelos matemáticos, permitem a realização de previsões de situações que podem ocorrer

em uma determinada operação, minimizando riscos e permitindo ganhos de produtividade nos processos simulados (Mirlisenna, 2016). Segundo o professor e coordenador do Curso de Engenharia de Produção do Instituto Mauá de Tecnologia (IMT) David Garcia Pernof (A voz da indústria, 2022) “Enquanto estudo, as simulações computacionais permitem aos analistas/gestores uma melhor tomada de decisão, de forma antecipada à realização do próprio evento, prevenindo impacto ambiental, riscos de acidentes de trabalho e ou retrabalhos em alterações de layout organizacional”.

2. Objetivos

2.1. Objetivos Gerais

O objetivo deste trabalho é realizar uma análise estática do chassi da “carroagem da alegria”, um ciclo-riquixá adaptado, levando em consideração os componentes, materiais e geometria do veículo para avaliar a resistência mecânica dos materiais utilizados.

2.2. Objetivos Específicos

- Revisar bibliografia de métodos dos elementos finitos e metodologia de projetos;
- Gerar desenho técnico do chassi utilizando CAD (*Computer Aided Design* – Desenho Auxiliado por Computador) 3D;
- Determinar os esforços que agem na estrutura;
- Comparar resultados do modelo do chassi com o material escolhido com um projeto de chassi com material alterado.

3. Revisão Bibliográfica

O presente trabalho terá a revisão bibliográfica dividida em análise estática, fator de segurança e simulação numérica.

3.1. Análise estática

3.1.1. Segunda Lei de Newton

Sabendo-se que o projeto trata de um veículo de carregamento humano, nós teremos as cargas atuantes na estrutura provenientes dos passageiros que utilizarão, ou seja, a força peso através da Segunda Lei de Newton pode quantificar a carga que está sendo exercida na estrutura, onde m a massa do corpo do passageiro e a aceleração, temos:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (1)$$

O carregamento humano é definido como força peso, e, utilizando a fórmula da Segunda Lei de Newton, fica o seguinte:

$$P = mg \quad (2)$$

Sendo m é a massa do corpo do passageiro e g é a aceleração gravitacional.

3.1.2. Força cortante e Momento fletor

Hibbeler (2010) afirma que “[...] elementos delgados que suportam carregamentos aplicados perpendicularmente a seu eixo longitudinal são denominadas vigas”. Quando aplicamos um carregamento em uma estrutura, são gerados esforços internos, como forças cortantes, e momento fletor, que são variáveis ao longo do comprimento da viga.

Quando iniciamos um projeto de viga, devemos ter ciência do momento máximo e força cortante máxima do projeto e onde estarão aplicadas, e, para isso, é feito uma análise por meio de gráficos, onde os valores de força cisalhante e de momento são expressos ao longo do eixo longitudinal da viga, conhecidos como diagramas de força cortante e momento fletor, como afirma (Hibbeler, 2011).

Para a força cortante, utilizamos a integração do carregamento w em relação ao eixo longitudinal da viga, ao longo de todo seu comprimento l :

$$\frac{dV}{dx} = -w \leftrightarrow V = \int_0^l -w dx \quad (3)$$

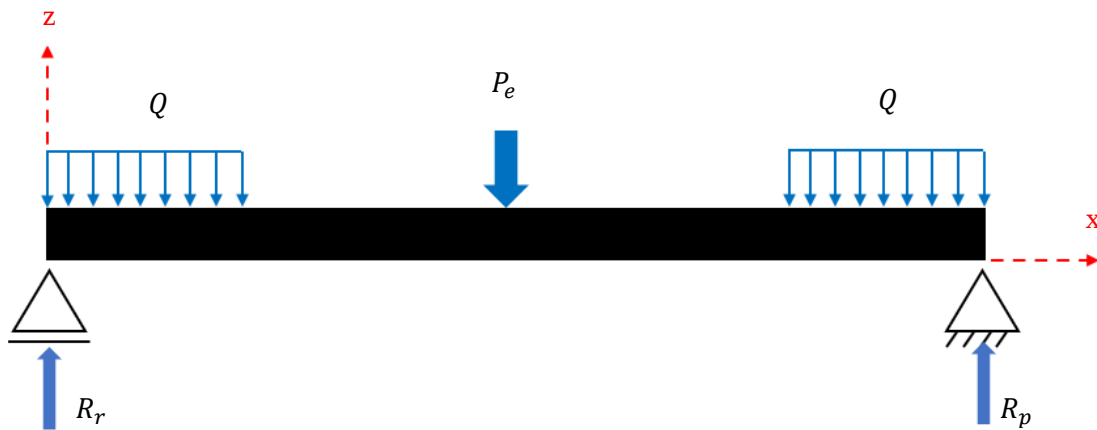
Para o momento fletor, utilizamos a integração da força cisalhante:

$$\frac{dM}{dx} = V \leftrightarrow M = \int_0^l V dx \quad (4)$$

Happian-Smith (2002) afirma que o chassi pode ser tratado como uma viga bidimensional, haja vista que a estrutura é simétrica ao longo do seu eixo longitudinal, é possível calcular e representar a força cortante e o momento fletor atuante sobre a estrutura.

A Figura 1 demonstra o esquema simplificado.

Figura 1 - Simplificação dos carregamentos e reações de apoio em viga / Vista lateral.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Onde R_r é a força de reação na roda, R_p é a força de reação no pino, P_e é a força peso da estrutura, e Q é a carga distribuída representada pelo peso dos passageiros.

Sabendo que no projeto original construído pelo professor Dr. Antonio de Pádua Filho não há cargas referentes a bateria, motor, carroceria e outros componentes, a estrutura foi projetada apenas para que suporte a massa dos passageiros.

3.1.3. Centro de Massa

O centro de massa é um ponto que refere-se ao centro geométrico do corpo (Hibbeler, 2010). No caso de corpos com forma arbitrária, podem ser definidas as coordenadas $\bar{x}$, $\bar{y}$ e $\bar{z}$ da localização desse ponto pelas seguintes fórmulas:

$$\bar{x} = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA} \quad \bar{y} = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA} \quad \bar{z} = \frac{\int_A z dA}{\int_A dA} \quad (5)$$

Para corpos compostos por vários componentes de geometrias conhecidas, como um chassi, precisamos seccionar o corpo em partes mais simples. Segundo Hibbeler (2010), “podemos eliminar a necessidade de integração para determinar o centroide da área inteira contanto que a área e a localização do centroide de cada uma dessas formas compostas sejam conhecidas”.

A Equação (5) abaixo nos mostra a fórmula a ser usada no cálculo do centro de massa.

$$\bar{x} = \frac{\sum x A_i}{A} \quad \bar{y} = \frac{\sum y A_i}{A} \quad \bar{z} = \frac{\sum z A_i}{A} \quad (6)$$

onde $\bar{x}$, $\bar{y}$ e $\bar{z}$ são as coordenadas do centro de massa do corpo do chassi, x , y e z são as coordenadas do centro de massa de cada parte composta do corpo e A_i é a área total de cada componente da estrutura.

3.1.4. Momento de Inércia

Sendo considerada uma propriedade da seção que estamos analisando, é necessário realizar o cálculo do momento de inércia de área dos componentes para descobrirmos a tensão de flexão e flambagem. Abaixo são apresentadas as fórmulas para determinar os momentos (Hibbeler, 2010).

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad (7)$$

$$I_y = \int_A x^2 dA \quad (8)$$

sendo x e y são as coordenadas da distância do diferencial de área e dA é o diferencial de área.

No eixo z é utilizado o momento de inércia polar, representado na seguinte forma:

$$J_o = \int_A r^2 dA = I_x + I_y \quad (9)$$

sendo r é a distancia perpendicular entre o polo (eixo z) e o elemento dA .

Utilizando as equações (6) e (7) e substituindo em (8), chegamos em:

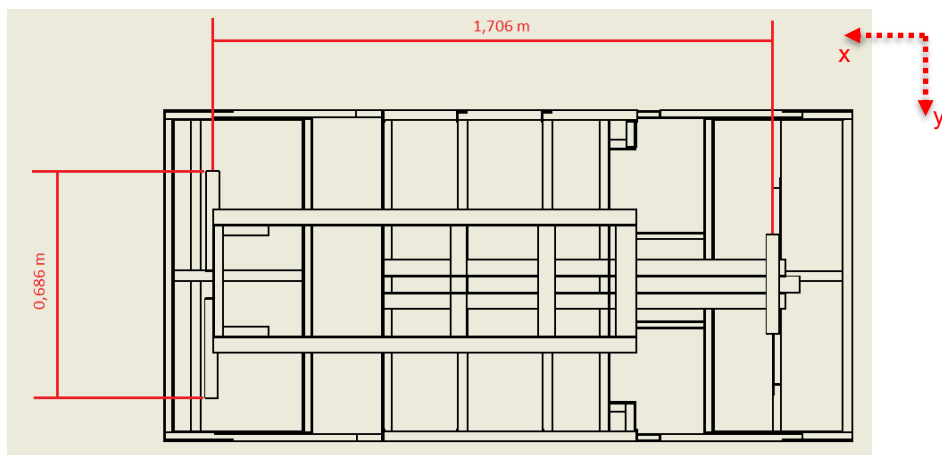
$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (10)$$

3.1.5. Torção

Torque é um momento que tende a torcer um elemento em torno de seu eixo longitudinal. Para o projeto em questão, devido a ação das forças atuantes da gravidade, não ocorre a torção pura (Hibbeler, 2011). A atuação da força peso dos passageiros, estrutura e componentes causa uma flexão na estrutura do chassi, consequentemente, o mais adequado para a análise de torção seja a combinação com a flexão (Happian-Smith, 2002).

Para a análise, utilizamos os momentos gerados pela reação dos pneus e no ponto de conexão entre chassi e triciclo. A Figura 3 esquemiza as dimensões da estrutura estudada.

Figura 2 - Distâncias entre rodas e pino.



Fonte: Vista superior do desenho 2D retirado do software *Autodesk Inventor 3D*.

Segundo Happian-Smith (2002), podemos notar que pode haver dois tipos de torção na estrutura: ao longo do eixo X, devido as reações nas rodas e também ao longo do eixo Y devido a reação no ponto de conexão entre chassi e parte motora.

Happian-Smith (2002) apresenta que a torção gerada no chassi pela reação causada nas rodas pode ser calculada da seguinte maneira:

$$T_y = R_r d_y \quad (11)$$

Já a torção que pode ocorrer devido a reação no pino dianteiro, pode ser calculada da seguinte forma:

$$T_x = R_f d_x \quad (12)$$

sendo R_r é a força de reação da roda, R_f é a força de reação do pino, d_y é a distância entre rodas e d_x é a distância entre eixos.

3.1.6. Tensões

Tensões mecânicas referem-se às forças internas que surgem dentro de um material sólido quando está sujeito a cargas externas. Para uma análise estática, devemos levar em consideração a flexão, a torção e a combinação entre ambos nos cálculos, segundo Hapian-Smith (2002), e desconsiderar carregamentos laterais, frontais e traseiros decorrentes de fatores dinâmicos.

3.1.6.1. Tensão normal

A intensidade da força, ou força por unidade de área, que age perpendicularmente à um diferencial de área, segundo Hibbeler (2011), é definida como Tensão Normal.

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (13)$$

3.1.6.2. Flexão

Para determinar a flexão de componentes estruturais utilizamos o momento fletor, e, com o valor máximo que o componente é submetido, encontramos a tensão máxima de flexão (Hibbeler, 2011).

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \quad (14)$$

sendo M o momento interno máximo, c a distância entre o eixo neutro e o ponto mais afastado do eixo neutro e I o momento de inércia da área da seção transversal calculada em torno do eixo neutro.

3.1.6.3. Cisalhamento

A tensão de cisalhamento pode ser determinada utilizando a força cortante (V) atuante na seção determinada pelas equações de equilíbrio e a área da seção em questão (A) (Hibbeler, 2011).

$$\tau = \frac{QV}{iT} \quad (15)$$

3.1.6.4. Lei de Hooke

A Lei de Hooke é um princípio fundamental da física que descreve o comportamento elástico de materiais sólidos sob a ação de uma carga externa. Ela estabelece uma relação linear entre a deformação do material e a força aplicada. É aplicável a materiais que exibem comportamento elástico, ou seja, que retornam à sua forma original quando a carga é removida (BIOPDI, 2023).

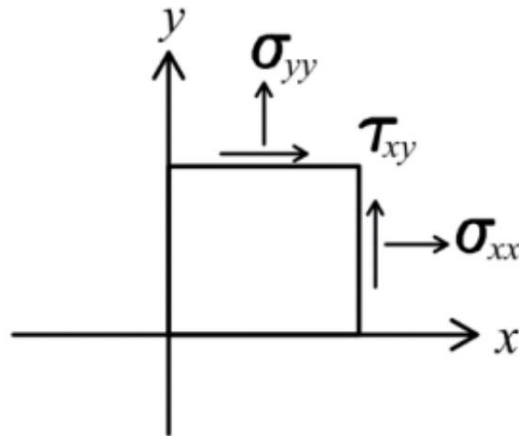
Segundo Hibbeler (2011), a expressão matemática da Lei de Hooke é geralmente apresentada como:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (16)$$

sendo E o módulo de elasticidade do material (ou módulo de Young) e ε a deformação sofrida pelo material.

3.1.6.5. Estado plano de tensões

O estado plano de tensões em um ponto é representado por uma combinação de duas componentes de tensão normal, σ_x e σ_y , e uma componente de tensão de cisalhamento, σ_{xy} , que agem nas quatro faces do elemento. Essa análise é feita para simplificar o estado geral de tensões, onde teríamos seis componentes independentes agindo em cada face do elemento do material (Cury, 2022).

Figura 3 - Estado plano de tensão.

Fonte: (Cury, 2022).

Aplicando as equações de equilíbrio de força, como orienta Hibbeler (2011), e utilizando o sistema cartesiano de eixos coordenados, conseguimos determinar as equações das tensões normais e de cisalhamento.

$$\sigma_x = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta) \quad (17)$$

$$\sigma_y = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos(2\theta) - \tau_{xy} \sin(2\theta) \quad (18)$$

$$\tau_{xy} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta) \quad (19)$$

Para determinar a tensão normal máxima e mínima no plano, derivamos as equações de torção (10 e 11) em relação a θ e igualamos a zero:

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (20)$$

Utilizamos o mesmo procedimento para determinar a tensão de cisalhamento máxima e mínima no plano, derivando a Equação 13 em relação a θ e igualando a zero.

$$\tau_{m\acute{a}x} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (21)$$

Na sessão final deste trabalho (Apêndice) está presente os valores de σ_x , σ_y e τ_{xy} calculados pelo software.

3.1.7. Critério de falhas

A tensão de Von-Mises, ou teoria da energia de distorção, considera que o escoamento ocorre quando a energia associada à mudança de forma de um corpo sob carregamento multiaxial for igual à energia de distorção em um corpo de prova de tração, quando o escoamento ocorre na tensão de escoamento uniaxial (De Lima, 2011).

Segundo Hibbeler (2011), a fórmula para calcular essa energia de distorção em um plano é:

$$u_d = \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) \quad (22)$$

Onde σ_1 , σ_2 e σ_3 são as tensões principais atuantes em um ponto específico e ν é o Coeficiente de Poisson.

Para um ensaio de tração uniaxial, $\sigma_1 = \sigma_e$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, portanto:

$$(u_d)_e = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_v^2 \quad (23)$$

onde σ_v é a tensão de Von-Mises.

Como a teoria da energia de distorção máxima exige que $(u_d)_e = u_d$, então, para o caso de tensão no plano ou biaxial, temos:

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_v^2 \quad (24)$$

Se a tensão de Von-Mises exceder o limite de escoamento (σ_e), isso indica que o material está próximo de falhar. Assim, a condição de falha de Von-Mises é expressa como:

$$\sigma_v \geq \sigma_e \quad (25)$$

Caso a tensão equivalente seja maior que o limite de escoamento o material sofrerá deformação plástica (Hibbeler, 2010).

3.2. Fator de segurança

Um método para especificação da carga admissível para o projeto ou análise de um elemento é o uso de um número denominado fator de segurança. Hibbeler (2011) afirma que “[...] o fator de segurança (FS) é a razão entre a carga de ruptura (F_{rup}) e a carga admissível (F_{adm}) [...]”.

$$FS = \frac{F_{rup}}{F_{adm}} \quad (26)$$

Se a carga aplicada ao elemento estiver linearmente relacionada com a tensão desenvolvida no interior do elemento, então podemos expressar o fator de segurança como a razão entre a tensão de ruptura (tensão de escoamento do material) e a tensão admissível (tensão máxima calculada da estrutura) (Hibbeler, 2011), ou seja:

$$FS = \frac{\sigma_{rup}}{\sigma_{adm}} \quad (27)$$

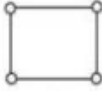
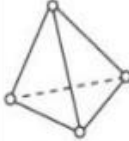
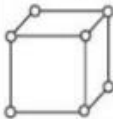
O coeficiente de segurança da estrutura sempre será maior ou igual a um, o que evita uma possível falha catastrófica. De acordo com Happian-Smith (2002), o fator de segurança ideal para estruturas veiculares é de 1,5, para a condição de maior carga possível.

3.3. Elementos finitos

Método criado inicialmente para a indústria aeronáutica e posteriormente expandido para outros domínios, consiste na divisão do problema em diversos pequenos fragmentos desse problema, conhecidos como elementos, e seus pontos de união são denominados nós (Mirlisenna, 2016).

A subdivisão da estrutura em um número de elementos finitos é conhecida como malha, e seus parâmetros, como tamanho de elementos e tipo de geometria são extremamente importantes para a obtenção de resultados. No cálculo, é feito uma interpolação entre os valores obtidos em cada nó para o resultado do elemento (Mirlisenna, 2016).

Figura 4 - Tipos de elementos finitos.

Elemento	Nome
	Elemento linear 1D
	Elemento triangular 2D
	Elemento retangular 2D
	Elemento tetraédrico 3D
	Elemento hexaédrico 3D

Fonte: (De Oliveira, 2017).

No exemplo acima, observamos que no elemento hexaédrico 3D possui oito nós, que interpolados vão gerar um resultado único para o elemento em um determinado ponto nos três eixos/graus de liberdade (x , y e z).

Para obtenção de valores de tensões, deformações e forças de reação, (Carvalho, 20--), é necessário solucionar diversas equações de equilíbrio, para isso, comumente, é utilizada a notação matricial onde o software trabalha com matriz de rigidez, matriz de deslocamentos nodais e matriz de forças.

$$\{F\} = [k]\{u\} \quad (28)$$

sendo $\{F\}$ é a matriz coluna representando as forças, $[k]$ é a matriz de rigidez do elemento e $\{u\}$ é a matriz coluna que armazena os deslocamentos nodais dos elementos.

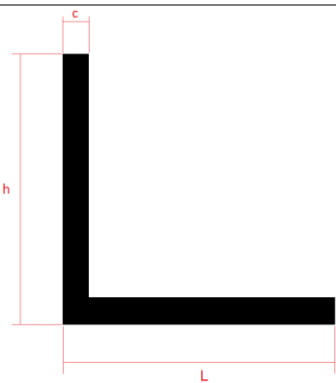
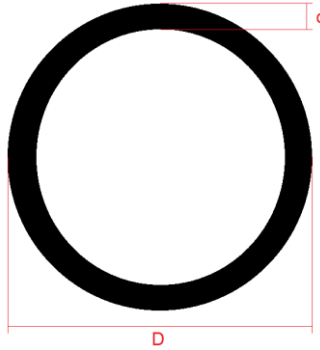
A finalidade do método dos elementos finitos é obter resultados aproximados dos resultados reais através de métodos numéricos, é válido ressaltar que quanto mais precisos são os resultados a serem obtidos, maior é o consumo computacional necessário o que muitas vezes torna inviável realizar uma simulação extremamente robusta (A voz da indústria, 2022).

4. Materiais e métodos

4.1. Estrutura do chassi

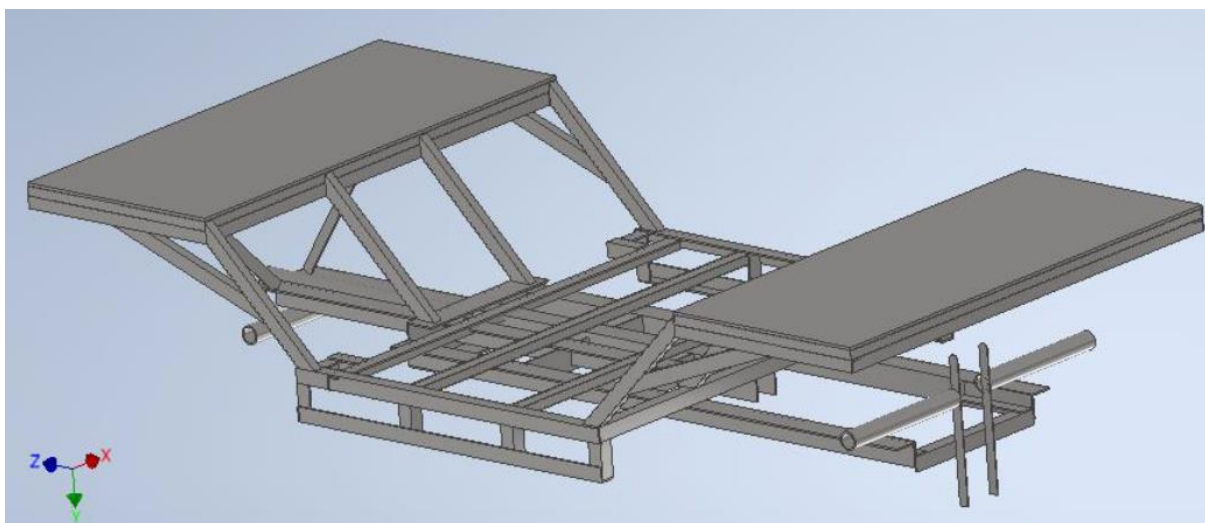
A estrutura do chassi em estudo foi anteriormente construído na universidade, composto por tubos e cantoneiras de aço 1020, possuindo perfis distintos. A Tabela 1 mostra a geometria dos perfis:

Tabela 1 – Geometria dos perfis do chassi.

Geometria	Dimensões
	$L = 25mm ; h = 25mm ; c = 3,55mm$
	$L = 20mm ; h = 30mm ; c = 3,55mm$
	$L = 25mm ; h = 30mm ; c = 3,55mm$
	$L = 30mm ; h = 30mm ; c = 3,55mm$
	$L = 50mm ; h = 50mm ; c = 3,55mm$
	$D = 30mm ; c = 4mm$
	$D = 40mm ; c = 4mm$
	$D = 50mm ; c = 4mm$

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

O desenho tridimensional foi desenvolvido, como pode ser observado na Figura 5:

Figura 5 – Design da estrutura do chassi.

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

O material escolhido para a construção foi o aço SAE 1020 devido a seu baixo custo e boa soldabilidade e usinabilidade, porém com baixa resistência a corrosão.

Para fins de comparação, foi utilizado um segundo material na simulação, o alumínio 6061, que possui alta resistência a tração, densidade menor (sendo mais leve que o aço 1020), boa resistência a corrosão e fácil usinabilidade e soldabilidade, porém um custo mais alto.

A Tabela 2 mostra as propriedades dos materiais a serem utilizados:

Tabela 2 – Propriedades dos materiais.

		Aço Carbono 1020	Alumínio 6061
		Unidade	
Geral	Densidade de massa	g/cm^3	7,85
	Resistência à escoamento	MPa	350
	Resistência máxima a tração	MPa	420
Tensão	Módulo de Young	GPa	200
	Coefficiente de Poisson	<i>adimensional</i>	0,29
	Módulo Cortante	GPa	77,5194
			25,9023

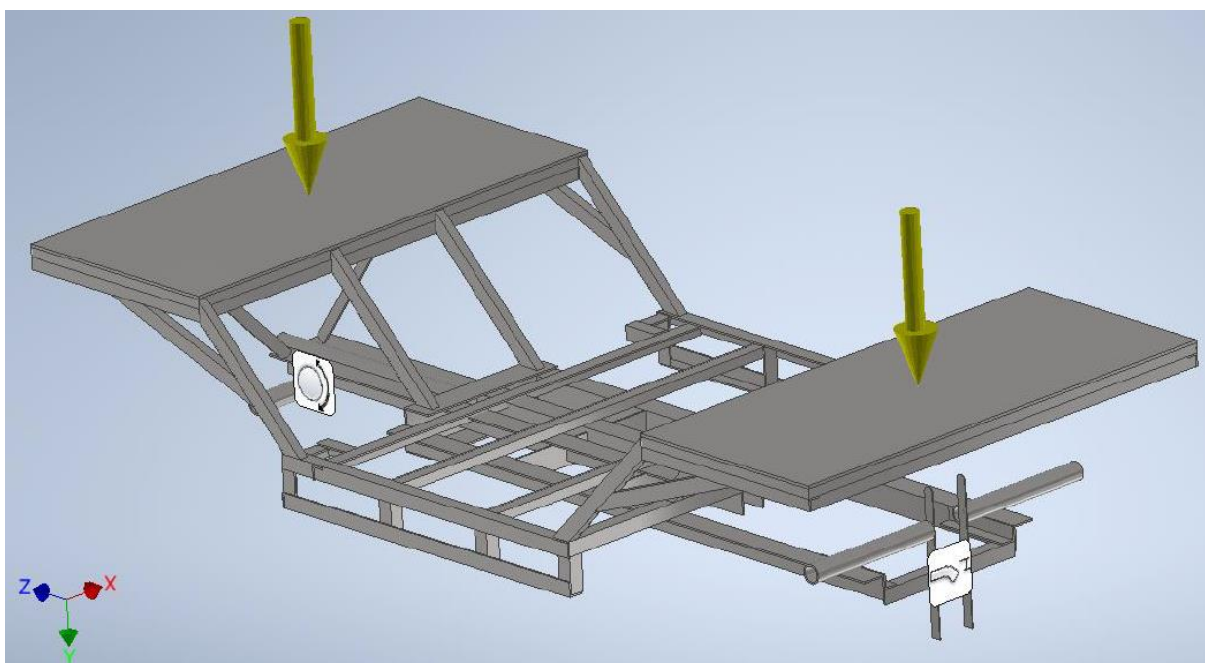
Fonte: Autodesk Inventor 3D®.

4.2. Simulação numérica computacional

O modelo 3D da estrutura foi desenvolvido através do software *Autodesk Inventor 3D*® pela parte de modelagem, e, para a simulação numérica também foi utilizado o mesmo software, porém utilizando a ferramenta de análise, criando um estudo de análise estática.

Para o estudo, foi utilizado um carregamento máximo total de 600 kg, sendo dividido em 300 kg para cada lado do chassi, equivalente a 5,8842 kN total e 2,9421 kN para cada lado, a força peso da estrutura de 1,02 kN, considerado ponto fixo o pino que liga o chassi ao triciclo e ponto móvel localizado no eixo das rodas traseiras, como citado anteriormente, além das relações de carga. A Figura 6 mostra a relação dos pontos de apoio com as cargas aplicadas (para a simulação, o software aplica a força peso implicitamente, sem neces).

Figura 6 – Pontos de apoio e cargas atuantes.



Fonte: Autodesk Inventor 3D®.

É importante ressaltar que o vínculo entre um componente e outro foi utilizado a junção por face ou tangencial, não utilizado o recurso de junção por solda.

A malha é composta por 350717 nós e 172981 elementos, com um tamanho médio de 0,1 (fração do diâmetro do modelo), fator de nivelamento 1.5 e ângulo máximo de giro igual a 60°, que o próprio programa configura como padrão.

A Figura 7 ilustra a malha gerada pelo software na estrutura.

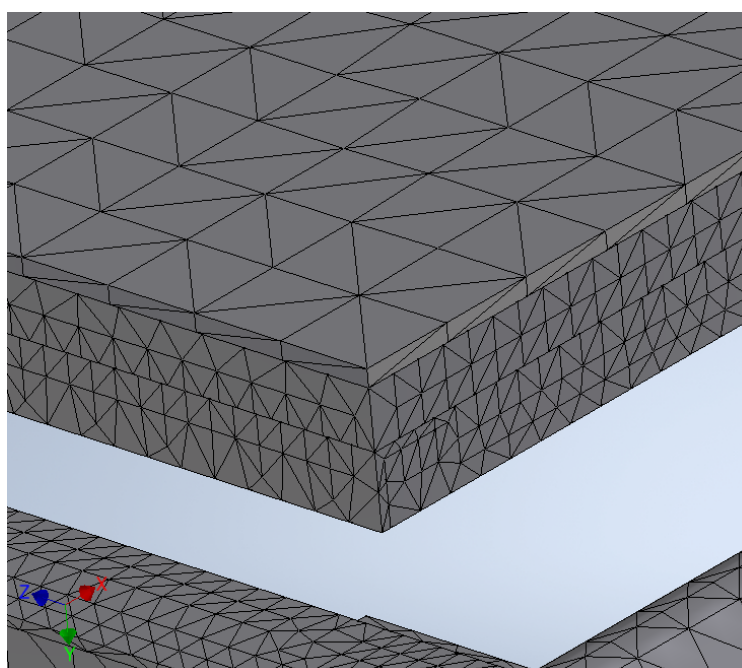
Figura 7 – Malha gerada por simulação computacional.



Fonte: Autodesk Inventor 3D®.

Foi utilizado o modelo de malha gerado pelo próprio software, onde a geometria triangular é a padrão (*AUTODESK Inventor Professional 2024®*, 2024), podemos observar na Figura 8 abaixo representando uma aproximação da estrutura para a análise da malha:

Figura 8 – Aproximação de malha.



Fonte: Autodesk Inventor 3D®.

5. Resultados

A simulação foi realizada com a aplicação da carga na estrutura afim de se obter valores de tensão equivalente de Von-Mises, deslocamento sofrido com a deformação e o fator de segurança da mesma e compararmos os resultados entre os dois materiais. É importante salientar que os efeitos de inércia e amortecimento foram desconsiderados.

5.1. Força cortante e momento fletor

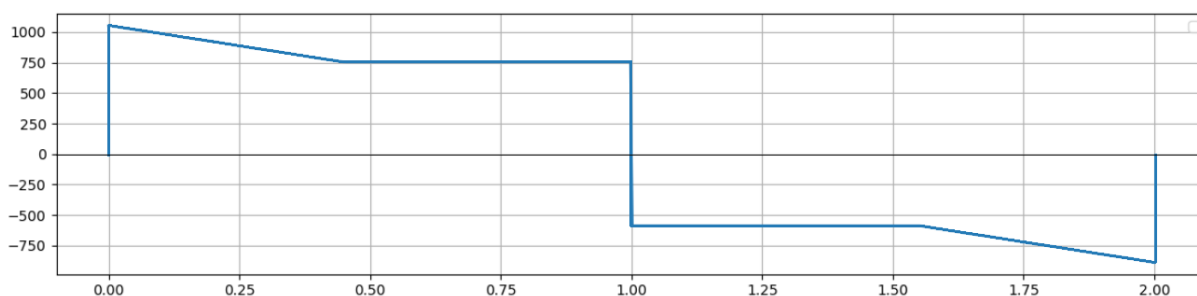
Para determinarmos os valores de força cortante e momento fletor, primeiramente deve ser levado em consideração alguns parâmetros de maneira analítica para simplificação do problema:

- A estrutura do chassi é simétrica;
- É representado por uma viga bidimensional;
- As rodas são apoios móveis;
- O pino de conexão com o triciclo é um apoio fixo;

Com os parâmetros previamente estipulados e com o auxílio da Figura 1, podemos plotar os diagramas de força cortante e momento fletor para definição de pontos onde pode haver maiores carregamentos na estrutura e, conseqüentemente, maiores tensões. Para isso, foi criado um diagrama de força cortante e um de momento fletor para cada material.

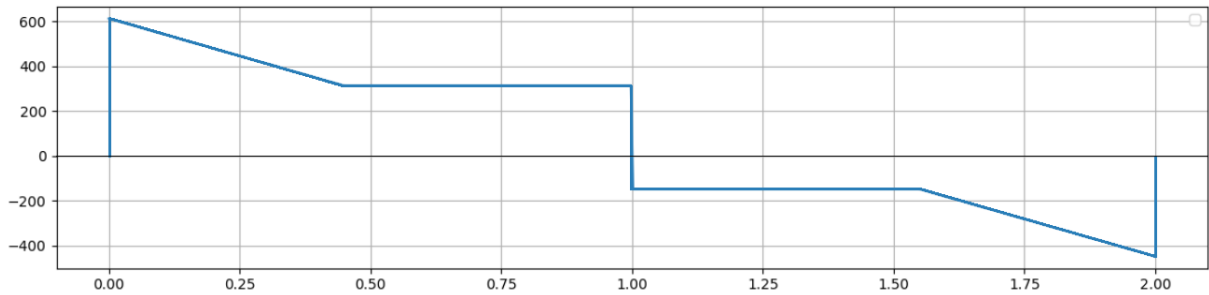
As Figuras 9 e 10 representam o diagrama de força cortante da estrutura.

Figura 9 – Diagrama de força cortante da estrutura em aço carbono.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Figura 10 - Diagrama de força cortante da estrutura em alumínio 6061.

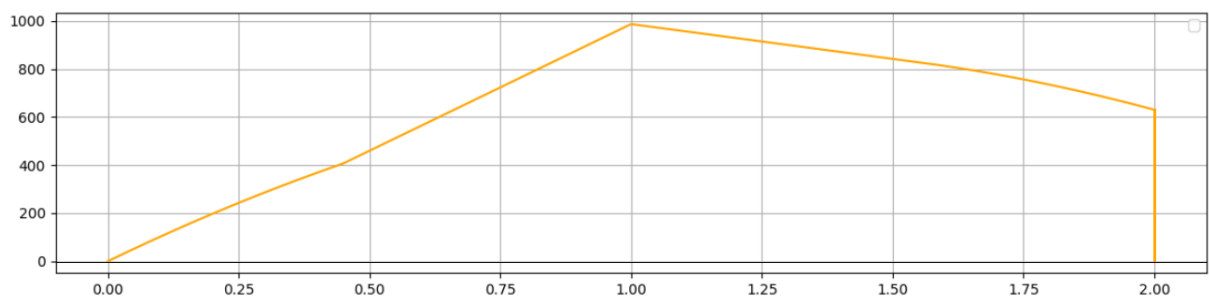


Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Podemos observar que ocorre o máximo de cisalhamento nas regiões de reação de apoio, onde também são aplicadas as cargas. É notável também a influencia da força-peso atuante no centro da estrutura.

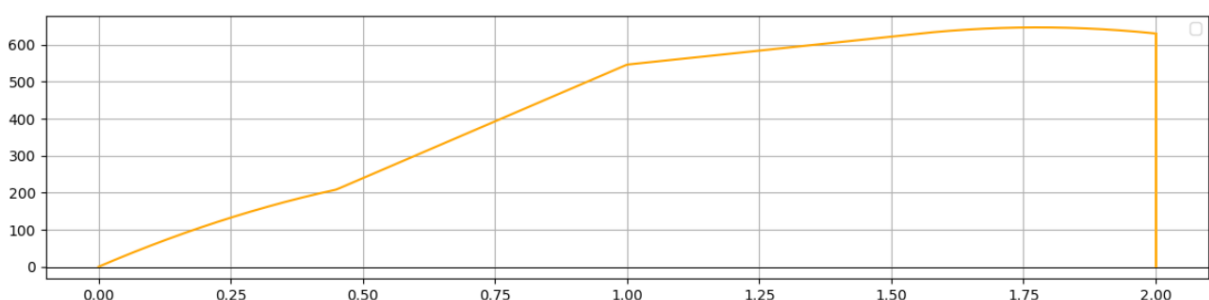
As Figuras 11 e 12 representam o diagrama de momento fletor do chassi.

Figura 11 – Diagrama de momento fletor da estrutura em aço carbono.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Figura 12 - Diagrama de momento fletor da estrutura em alumínio 6061.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Já no diagrama de momento fletor, quando comparamos os gráficos dos dois materiais, podemos observar a diferença que a força-peso influencia no resultado final.

Assim como na força cortante, podemos observar que a grande diferença entre o resultado obtido para cada material é a magnitude do seu valor, e pode ser notado devido a

curvatura do momento fletor no trecho de carga distribuída para os diagramas junto material foi utilizado o alumínio 6061.

Nas Tabelas 3 e 4 são apresentados os valores reais da simulação para as reações de apoio na roda e no pino da estrutura, seja ela em material aço carbono ou alumínio 6061.

Tabela 3 – Forças de reações reais dos pontos de apoio da estrutura.

		Força de reação			
		Aço carbono		Alumínio 6061	
		Magnitude	Componentes (X, Y, Z)	Magnitude	Componentes (X, Y, Z)
Apoio de pino	[N]	457,863	0	463,335	0
			-288,662		-303,183
			355,405		350,370
Apoio das rodas	[N]	470,263	5,520	469,235	5,642
			-298,126		-298,497
			-363,645		-362,008

Fonte: Autodesk Inventor 3D®.

Tabela 4 – Momentos de reações reais dos pontos de apoio da estrutura.

		Momento de reação			
		Aço carbono		Alumínio 6061	
		Magnitude	Componentes (X, Y, Z)	Magnitude	Componentes (X, Y, Z)
Apoio das rodas	[Nm]	79,882	79,553	80,100	79,690
			-6,263		-7,503
			3,633		3,044
Apoio de pino	[Nm]	14,907	0	14,836	0
			4,533		4,557
			-14,201		-14,118

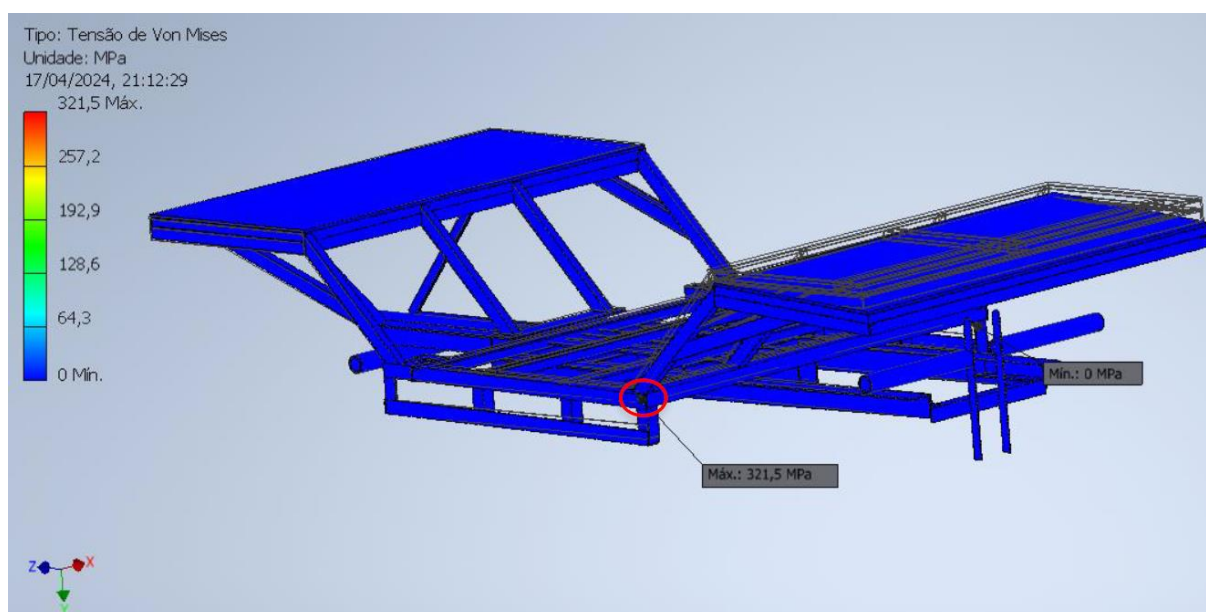
Fonte: Autodesk Inventor 3D®.

5.2. Análise estrutural

Quando analisamos os resultados obtidos pelo software *Autodesk Inventor 3D*®, estamos considerando condições mais próximas a realidade, excluindo as simplificações como a simetria da estrutura, a consideração como viga bidimensional. Como podemos observar, estrutura foi feita em dois materiais totalmente diferentes, com propriedades diferentes, logo, obtemos o primeiro ponto de comparação, com relação a massa do chassi. Devido a densidade de massa de cada material, temos uma grande diferença nas massas, onde a estrutura construída em aço carbono tem 136,994 kg e em alumínio teria 47,119 kg, ou seja, o chassi em alumínio representa 34,4% da massa do chassi em aço carbono, portanto, uma redução de um pouco mais de 65% da massa.

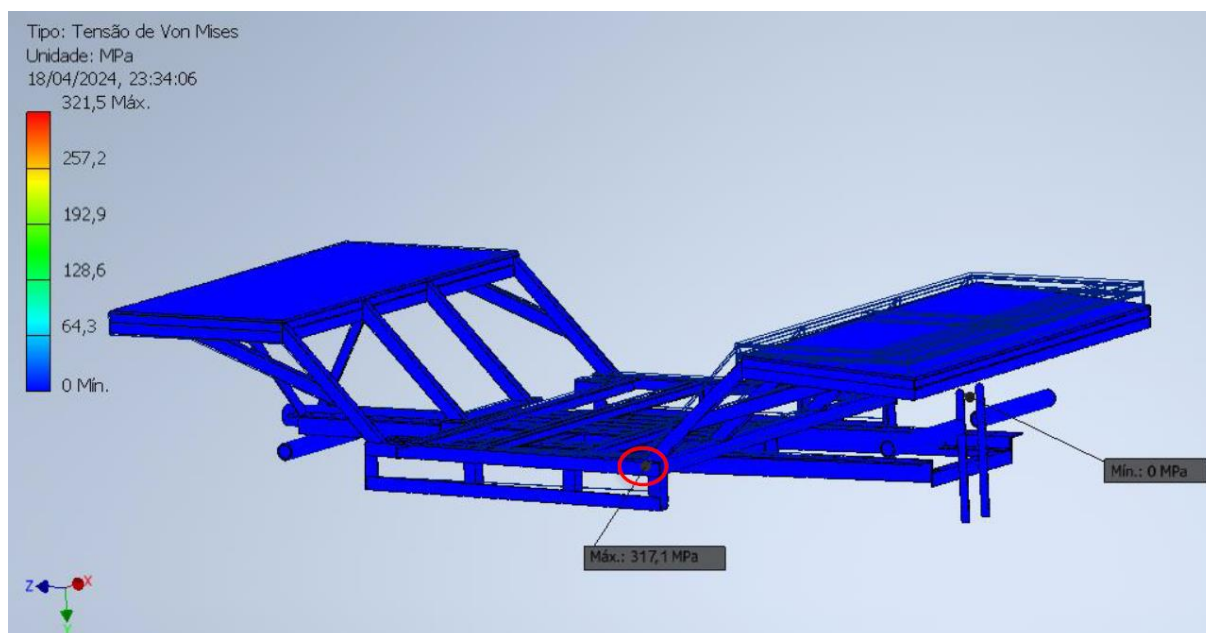
A Tensão de Von-Mises é representada nas Figuras 13 e 14, mostrando a distribuição de tensão sobre a estrutura.

Figura 13 – Tensão equivalente de Von-Mises / Estrutura em aço carbono.



Fonte: *Autodesk Inventor 3D*®.

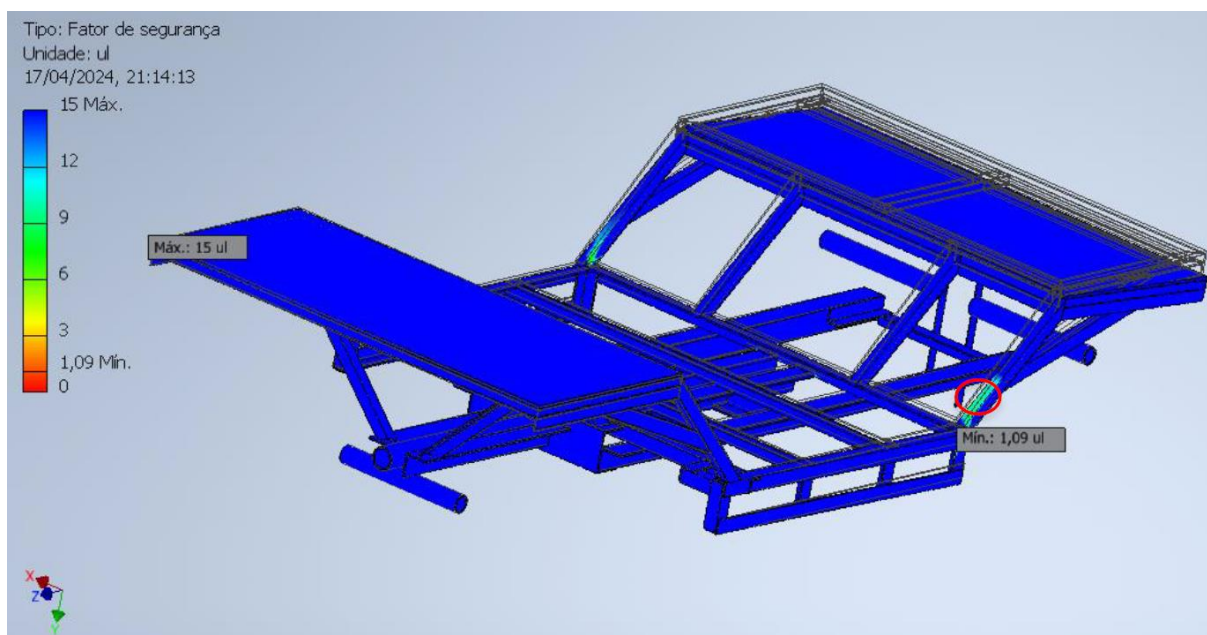
Figura 14 - Tensão equivalente de Von-Mises / Estrutura em alumínio.



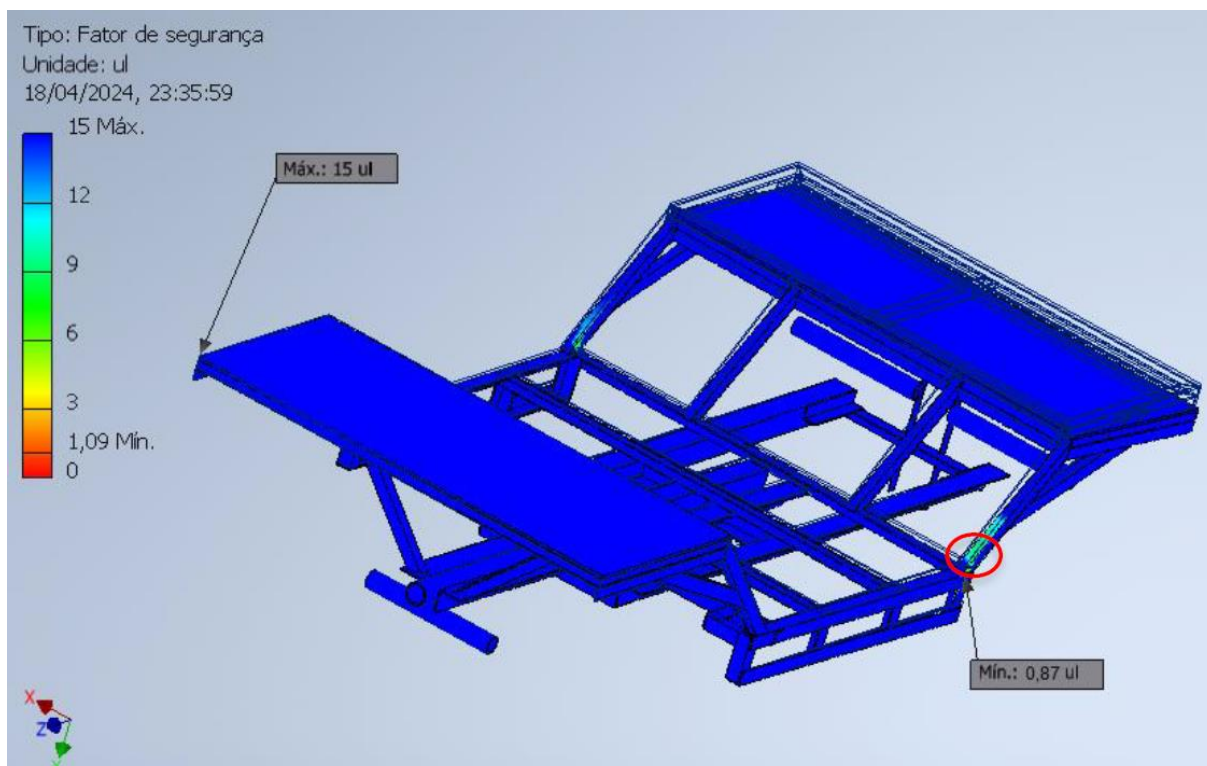
Fonte: Autodesk Inventor 3D®.

Comparando as Figuras 13 e 14 podemos observar que não há uma diferença considerável entre os pontos máximos de tensão para cada material, sendo eles 321,45 MPa aço carbono e 317,065MPa em alumínio. Porém, quando comparados as respectivas tensões de escoamento, nota-se que para o aço carbono não houve nenhum tipo de deformação plástica, ou seja $\sigma_v < \sigma_e$, já o alumínio pode ser considerado que haja deformação plástica, já que a tensão máxima sofrida é maior que a tensão de escoamento ($\sigma_v > \sigma_e$).

Podemos confirmar esse fato utilizando os valores de fator de segurança obtidos na estrutura como mostra as Figuras 15 e 16.

Figura 15 – Fator de segurança / Estrutura em aço carbono.

Fonte: Autodesk Inventor 3D®.

Figura 16 – Fator de segurança / Estrutura em alumínio.

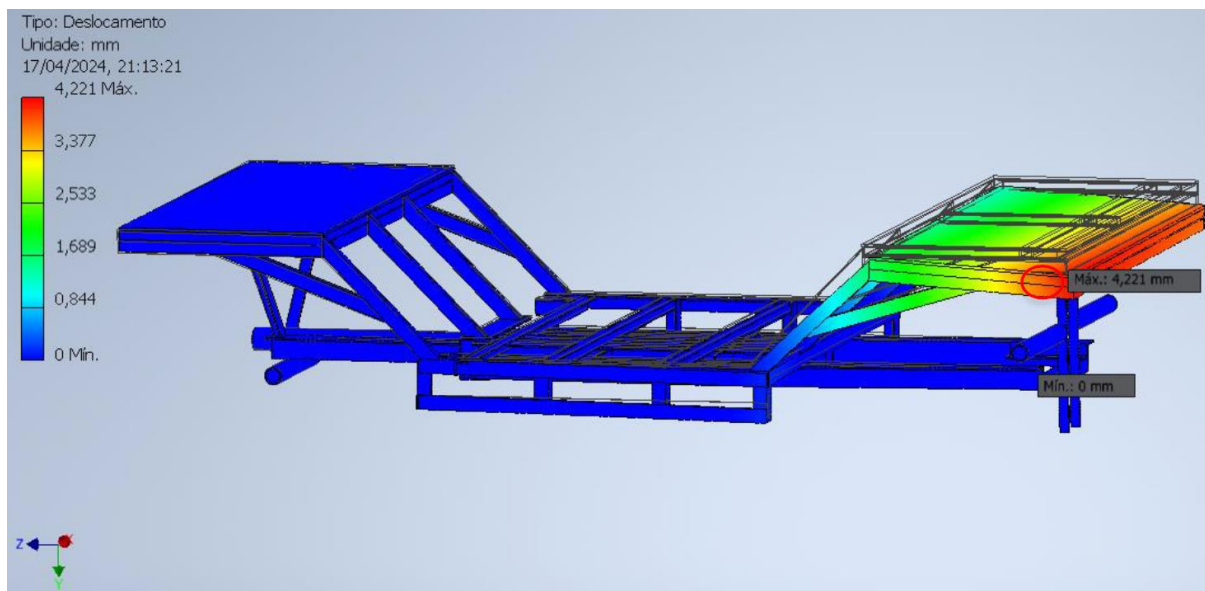
Fonte: Autodesk Inventor 3D®.

Como mostra as imagens, o fator de segurança máximo para ambas as estruturas foi de 15. Já o valor mínimo é um ponto específico pequeno na estrutura, para o aço carbono foi

1,089 e para o alumínio 0,867 que está baixo do mandatório, ou seja, pode ser considerado um propagador de deformação plástica.

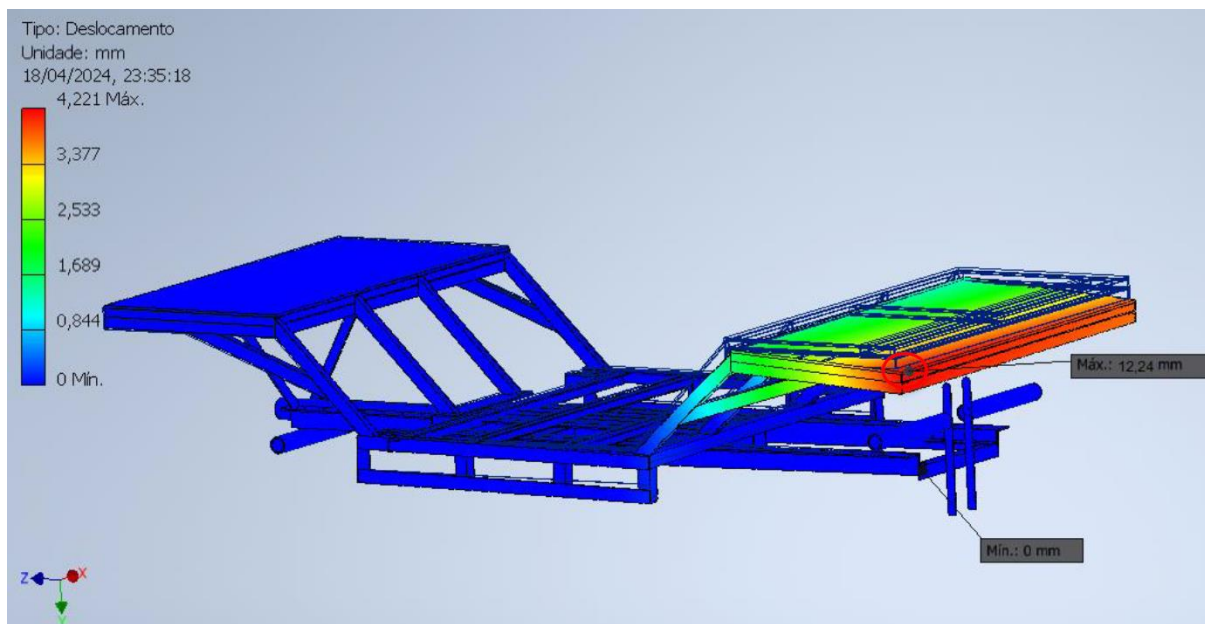
Por fim, temos nas Figuras 17 e 18 o resultado do deslocamento sofrido na estrutura.

Figura 17 – Deslocamento / Estrutura em aço carbono.



Fonte: Autodesk Inventor 3D®.

Figura 18 – Deslocamento / Estrutura em alumínio.

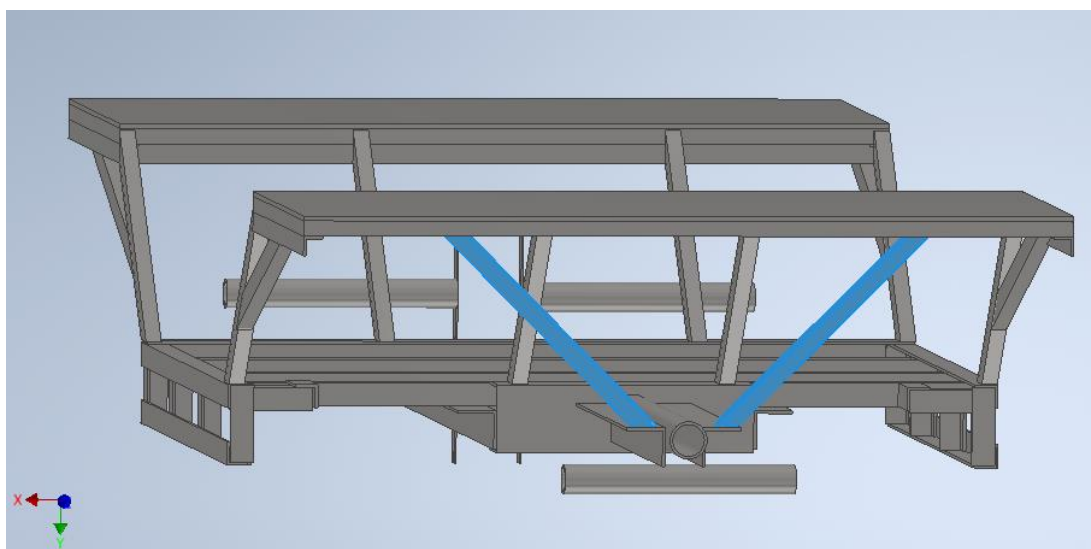


Fonte: Autodesk Inventor 3D®.

Embora a carga seja igual aplicado em cada lado da estrutura, é notável a diferença de resultado em cada, para ambos os materiais. Isso acontece devido as barras em “V” do lado

do apoio do pino formando um segundo apoio para o acento, dando mais rigidez ao sistema, como podemos observar na Figura 19.

Figura 19 – Apoio em “V” para o acento do lado do pino.



Fonte: Autodesk Inventor 3D®.

Deve-se observar que, para o desenho técnico não foi considerado junções por solda e parafusos, e durante a simulação, as propriedades dos materiais foram as consideradas padrão do próprio software Autodesk Inventor 3D®.

6. Conclusões

Em um projeto veicular, uma das partes mais importante a ser modelada é o chassi. É nele que podemos fixar outros componentes, como motor, acentos; é com ele que determinamos o estado de rigidez do sistema de suspensão do automóvel. No presente trabalho, ele é responsável por manter a integridade da estrutura durante a utilização dos passageiros, por isso é de suma importância garantir que ele não falhe e mantenha uma dirigibilidade mais maleável para o condutor.

Observamos que, na comparação de integridade de estrutura, os dois materiais tiveram resultados diferentes, sendo aço carbono 1020 obtendo valores aceitáveis para projetos, enquanto a liga de alumínio 6061 obteve resultados abaixo do aceitável, considerado não ideal para o projeto. Já o deslocamento tiveram valores baixos, mas com uma grande diferença entre os acentos da estrutura, onde na parte traseira temos um apoio em “V” para ajudar na sustentação, ficando em falta na parte frontal.

Embora seja de uso de lazer, deve ser realizada algumas melhorias para que não ocorra alguma falha. Sendo assim, é aconselhável que o chassi original passe por algumas melhorias estruturais para manter a integridade.

Para isso, alguns dessas melhorias podem ser apresentadas em futuros trabalhos, sendo de projeto e também de processo, como por exemplo: inclusão de uma viga de apoio nas partes traseira, acima das rodas, realização de uma melhoria de projeto visando mitigar esses pontos de falha, por exemplo aumentando a espessura da cantoneira ou tubo, criar a montagem da estrutura pelo software de desenho escolhido utilizando junção por solda ou parafusos, e, como um complemento, realizar uma análise de custo-benefício da fabricação dessa estrutura comparando os materiais utilizados.

7. Referências

FLIPAR. **Conheça o riquixá, tradicional meio de transporte popular na Ásia.** [S.l.], 2024. Disponível em: <https://odia.ig.com.br/stories/flipar/2024/06/6858744-conheca-o-riquixa-tradicional-meio-de-transporte-popular-na-asia.html>. Acesso em: 6 jun. 2024.

G1 (Bahia). **Velo-táxi entra em fase de testes no Centro Histórico:** G1 testou. [S. l.]: Globo.com, 9 jul. 2014. Disponível em: <https://g1.globo.com/bahia/noticia/2014/07/velo-taxi-entra-em-fase-de-testes-no-centro-historico-confira-video.html#:~:text=Os%20velo%2Dt%C3%A1xis%2C%20triciclos%20movidos,Confira%20no%20v%C3%ADdeo%20ao%20lado.%5D>. Acesso em: 16 abr. 2024.

BENZOR SOLUÇÕES EM ENGENHARIA E TECNOLOGIA. **Análise estrutural mecânica: o que é e como fazer.** [S.l.], Outubro 2022. Disponível em: https://blog.benzor.com.br/engenharia/analise-estrutural-mecanica-o-que-e-e-como-fazer/?gad_source=1&gclid=CjwKCAjwjeuyBhBuEiwAJ3vuoVPCnvMJel78rLAwwMyHYdjftxdrYeHP5QzPahUX7HpdBf_yCJUqhoCcW4QAvD_BwE. Acesso em: 16 abr. 2024.

HAPPIAN-SMITH, Julian. **An introduction to modern vehicle design.** [S.l.]: Elsevier, 2002.

BIOPDI. **Lei de Hooke:** As principais perguntas com respostas!. [S.l.], 2023. Disponível em: <https://biopdi.com.br/artigos/lei-de-hooke-as-principais-perguntas/>. Acesso em: 16 abr. 2024.

DE LIMA, Luciano R. Ornelas. **Apostila – RESMAT IV v4.** [S.l.], Janeiro 2011. Disponível em: http://www.labciv.eng.uerj.br/rm4/Cap_2_criterios.pdf. Acesso em: 16 abr. 2024.

HIBBELER, R.C. **Resistência dos materiais.** 7.ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

HIBBELER, R.C. **Estática:** mecânica para engenharia. 12. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011.

DE OLIVEIRA, Janylson Victor Lacerda. **ANÁLISE NUMÉRICA E EXPERIMENTAL DE UM ANEL SUPERELÁSTICO DE LIGA**

COM MEMÓRIA DE FORMA DE NI-TI. Repositorio UFPB, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/13395/1/JVLO06122017.pdf>. Acesso em: 16 abr. 2024.

YAMAGUTI, Kate. **Sistema de transporte na Índia: Ciclo-rickshaw.** [S.l.]: Brasileiras pelo mundo, 2019. Disponível em: <https://www.brasileiraspelomundo.com/sistema-de-transporte-na-india-1503122510#:~:text=Os%20ciclo%2Drickshaw%20foram%20introduzidos,por%20causar%20congestionamento%20de%20tr%C3%A1fego>. Acesso em: 22 mar. 2023.

LORA, Fernando Bolla. **Estudo comparativo da utilização de aço ou alumínio nos requisitos da SAE em veículos de compatição tipo fórmula.** [S.l.], 2014. Disponível em: <https://maua.br/files/monografias/completo-estudo-comparativo-utilizacao-aco-aluminio-182322.pdf>. Acesso em: 16 abr. 2024.

A VOZ DA INDÚSTRIA. **O que é e como aplicar a simulação computacional na indústria?** [S.l.]: Revista Ferramental, junho 2022. Disponível em: <https://www.revistaferramental.com.br/artigo/o-que-e-e-como-aplicar-a-simulacao-computacional-na-industria/>. Acesso em: 16 abr. 2024.

CURY, Alexandre A.. **Estado plano de tensão: Resistência dos Materiais II.** MAC/UFJF, fevereiro 2022. Disponível em: https://www2.ufjf.br/mac003/files/2015/01/4-estado_plano_tensao.pdf. Acesso em: 16 abr. 2024.

MIRLISENNA, Giuseppe. **Métodos dos Elementos Finitos: o que é?**. Blog ESSS, Janeiro 2016. Disponível em: <https://www.esss.com/blog/metodo-dos-elementos-finitos-o-que-e/>. Acesso em: 16 abr. 2024.

CARVALHO, Renato. **Métodos dos Elementos Finitos: um guia completo.** Lure Engenharia, 20--. Disponível em: <https://lureengenharia.com.br/metodo-dos-elementos-finitos-um-guia-completo/>. Acesso em: 16 abr. 2024.

AUTODESK INVENTOR PROFESSIONAL 2024®. **Referência de Propriedades de malha.** [S.l.]: © 2024 Autodesk Inc., 2024. Disponível em: <https://help.autodesk.com/view/INVTOR/2024/PTB/?guid=GUID-A7D5483E-0912-4810-ADE8-0708F2D5E7A8>. Acesso: 6 jun. 2024

Apêndice

Abaixo resultados obtidos pelo software de simulação de modo detalhado.

Tabela 5 – Resultados detalhados.

Nome	Unid	Aço carbono		Alumínio 6061	
		Mínima	Máxima	Mínima	Máxima
Volume	<i>mm³</i>	13371400			
Massa	<i>kg</i>	104,97		36,24	
Tensão de Von Mises / Critério de falha	<i>MPa</i>	11	321,50	0,00	317,07
Primeira tensão principal	<i>MPa</i>	-27,89	372,00	-31,79	378,55
Terceira tensão principal	<i>MPa</i>	-111,42	23,15	-112,61	32,07
Deslocamento	<i>mm</i>	0,00	4,22	0,00	12,24
Fator de segurança	<i>adm</i>	1,09	15,00	0,87	15,00
Tensão XX (σ_{11})	<i>MPa</i>	-63,37	64,99	-65,89	73,52
Tensão XY (σ_{12})	<i>MPa</i>	-30,83	103,55	-30,76	100,21
Tensão XZ (σ_{13})	<i>MPa</i>	-29,34	40,94	-28,05	40,24
Tensão YY (σ_{22})	<i>MPa</i>	-97,82	337,02	-99,61	345,50
Tensão YZ (σ_{23})	<i>MPa</i>	-29,47	55,48	-29,40	55,69
Tensão ZZ (σ_{33})	<i>MPa</i>	-55,01	81,99	-58,23	94,45
Deslocamento X	<i>mm</i>	-0,13	0,15	-0,37	0,43
Deslocamento Y	<i>mm</i>	-0,26	4,04	-0,75	11,73
Deslocamento Z	<i>mm</i>	-1,21	0,12	-3,50	0,34
Deformação equivalente	<i>adm</i>	0	0,		

Anexo A – Dados

Abaixo as tabelas mostram os dados utilizados no trabalho, retirados do software de simulação.

Tabela 6 – Dados físicos.

Nome	Unidade	Magnitude	
		Aço carbono	Alumínio 6061
Massa	<i>kg</i>	104,053	35,789
Área	<i>m²</i>	7,337	
Volume	<i>m³</i>	0,017	
Centro de gravidade	<i>m</i>	1,541	
	<i>m</i>	-0,717	
	<i>m</i>	-1,669	

Fonte: Autodesk Inventor 3D.

Tabela 7 – Dados de forças.

Tipo de carga	Força 1	Força 2	Força-peso
Magnitude	300 N	300 N	9,81 m/s ²
Vetor X	0 N	0 N	0 m/s ²
Vetor Y	300 N	300 N	9,81 m/s ²
Vetor Z	0 N	0 N	0 m/s ²

Fonte: Autodesk Inventor 3D®.

Anexo B – Algoritmo de plotagem

Abaixo apresenta o algoritmo usado para plotagem dos gráficos de força cortante e momento fletor (Figuras 10 à 17) no *Google Colab / Python*:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def calcular_forca_momento(L, w1, w1_pos, w2, w2_pos, P, P_pos, x):
    # L: comprimento da viga
    # w1: carga distribuída na extremidade esquerda
    # w1_pos: posição final da carga distribuída w1
    # w2: carga distribuída na extremidade direita
    # w2_pos: posição inicial da carga distribuída w2
    # P: carga pontual no meio da viga
    # P_pos: posição da carga pontual
    # x: posição ao longo da viga para calcular a força cortante e momento fletor

    # Reações nos apoios (equilíbrio estático)
    # Calculando momentos em relação ao apoio A
    
$$R_b = (w1 * w1\_pos * (w1\_pos / 2) + P * P\_pos + w2 * (L - w2\_pos) * (L - w2\_pos / 2)) / L$$

    
$$R_a = w1 * w1\_pos + P + w2 * (L - w2\_pos) - R_b$$


    # Força cortante (V)
    if 0 <= x < w1_pos:
        
$$V = R_a - w1 * x$$

    elif w1_pos <= x < P_pos:
        
$$V = R_a - w1 * w1\_pos$$

    elif P_pos <= x < w2_pos:
        
$$V = R_a - w1 * w1\_pos - P$$

    elif w2_pos <= x <= L:
        
$$V = R_a - w1 * w1\_pos - P - w2 * (x - w2\_pos)$$


    # Momento fletor (M)
    if 0 <= x < w1_pos:
        
$$M = R_a * x - (w1 * x^2) / 2$$

    elif w1_pos <= x < P_pos:
        
$$M = R_a * x - w1 * (w1\_pos^2) / 2$$

    elif P_pos <= x < w2_pos:
        
$$M = R_a * x - w1 * (w1\_pos^2) / 2 - P * (x - P\_pos)$$

    elif w2_pos <= x <= L:
        
$$M = R_a * x - w1 * (w1\_pos^2) / 2 - P * (x - P\_pos) - w2 * ((x - w2\_pos)^2) / 2$$


    return V, M

def plotar_forca_momento(L, w1, w1_pos, w2, w2_pos, P, P_pos):
    x_vals = np.linspace(0, L, 500)
    V_vals = []
    M_vals = []

    for x in x_vals:
        V, M = calcular_forca_momento(L, w1, w1_pos, w2, w2_pos, P, P_pos, x)
        V_vals.append(V)
        M_vals.append(M)
```

```
plt.figure(figsize=(12, 6))

plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(x_vals, V_vals)
plt.grid(True)
plt.legend()

plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(x_vals, M_vals, color='orange')
plt.grid(True)
plt.legend()

plt.tight_layout()
plt.show()

# Exemplo de uso:
L = 2.0 # comprimento da viga em metros
w1 = 666.7 # carga distribuída na extremidade esquerda em N/m
w1_pos = 0.45 # posição final da carga distribuída na extremidade esquerda em metros
w2 = 666.7 # carga distribuída na extremidade direita em N/m
w2_pos = 1.55 # posição inicial da carga distribuída na extremidade direita em metros
P = 1020 # carga pontual no centro da viga em N
P_pos = L / 2 # posição da carga pontual no centro da viga em metros

plotar_forca_momento(L, w1, w1_pos, w2, w2_pos, P, P_pos)
```