



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-T.008/93

Sistemas Bidimensionais de Partículas Carregadas

Silvio Raul Baez Escobar



Orientador

Luiz Agostinho Ferreira

Novembro 1993

IFT/TE
M-103

Agradecimentos

Seria impossível citar os nomes de todas as pessoas que foram importantes para mim ao longo destes anos. Algumas delas foram:

-Prof. Antonio Bras de Pádua. Pela acolhida na minha chegada ao Brasil, pela amizade e pelo incentivo nos momentos difíceis (que não foram poucos!).

-Edson Gonçalves, Jonas Sobrinho, Mauro Tonasse e Felice Pisano. Com eles aprendi bastante sobre física e sobre a vida.

-Maria Caballero. Pela ajuda nos momentos difíceis e pela amizade. A sua bondade é uma lição de vida.

-Prof. Adriano Natale. Pela acolhida no IFT.

-Aos Professores José G. Pereira e Roberto Kraenkel. Tenho me beneficiado bastante dos seus cursos e das conversas com eles. Ao Kraenkel agradeço também a indicação da referência [32] no início deste trabalho.

-Os funcionários do Instituto. Particularmente, a Marina, o Marcelo e o Alexandre pelos serviços prestados no uso da biblioteca. Eles sempre se mostraram predispostos a serem úteis.

-Felice Pisano, Clovis B. Peres, Orlando G. Peres e Kwok S. Fa. Pela amizade desinteressada e pelo companheirismo. Sempre lembrarei as discussões sobre física e outros assuntos muitas vezes até tarde na madrugada.

-Cristina e Luiz A. Saeger. Pela amizade, pela ajuda em muitas ocasiões, especialmente o Luiz pela assistência na edição do texto.

-Os Professores A. H. Zimerman, José F. Gomes e Luiz A. Ferreira. Com eles aprendi bastante em pouco tempo. Trabalhando com eles meu entusiasmo pela física só tem aumentado. Meus agradecimentos especiais ao Prof. Luiz A. Ferreira pelo incentivo constante, pela paciência

e pela compreensão.

Outras pessoas não ligadas ao meio acadêmico mas que foram igualmente importantes:

-Meus familiares, especialmente meus pais, pela compreensão, pelo apoio, pelo carinho,...

-Hugo Nunez, Gustavo López, Alberto Caballero, Julio C. Salsa, Pedro Caballero,....., pela amizade e pelo incentivo (muitas vezes financeiros!).

-Os Campanelli, especialmente a Daniela, pelo carinho, pela paciência e compreensão dispensada.

Resumo

Estudamos as simetrias de um sistema bidimensional de partículas carregadas interagindo com o campo magnético de um vórtice pontual. Comparamos estes resultados com aqueles correspondentes a um sistema bidimensional de partículas carregadas acoplado a um campo de Chern-Simons. Discutimos a relação existente entre a estrutura do espaço de configuração, teoria de Chern-Simons e a estatística destes sistemas bidimensionais. Estudamos também o efeito Hall quântico que constitui a verificação mais concreta destas propriedades.

Palavras Chaves: sistema bidimensional, teoria Chern-Simons, estatística, efeito Hall.

Áreas de conhecimento: 1.05.03.00-5, 1.05.03.01-3.

Abstract

We study the symmetries of a two dimensional system of charged particles interacting with the magnetic field of a vortex. We compare such results with those corresponding to a system of charged particles coupled to Chern-Simons field. We discuss the relation among the structure of the configuration space, Chern-Simons theory, and the statistics of those two dimensional systems. We also study the Quantum Hall effect which constitutes the most concrete example where such properties of two dimensional system are manifested.

Key Words: two-dimensional system, Chern-Simons theory, statistics, Hall effect.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Preliminares	2
2	Partícula pontual + vórtice magnético	8
2.1	Transformações conformes na mecânica clássica	8
2.2	Simetrias	12
3	Partículas pontuais com campos de gauge abeliano	22
3.1	Teoria de Chern-Simons vs. Eletrodinâmica	22
3.2	Interação de partículas carregadas com campos de C-S	23
3.3	Equações de movimento	24
3.4	Auto-interação	25
3.5	Formulação canônica. Quantização	26
3.6	Solução para os campos de gauge	27
3.7	Dinâmica quântica	29
3.8	Simetrias	31
3.9	Sistema de duas partículas	35
3.10	Estatística fracionária	40
4	Efeito Hall	56
4.1	Tratamentos clássico e semi-clássico	57
4.2	Tratamento quântico	59
4.3	Efeito Hall quântico inteiro	62
4.4	Efeito Hall quântico fracionário	67
4.5	Fluido-dinâmica e o QHE	71
5	Conclusão	84
A	Sistema de dois anyons	87
	Referências	89

As componentes temporal e espacial desta equação determinam as identidades campo-corrente que relacionam os campos eletromagnéticos à corrente da matéria,

$$E^i(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{c\kappa} \epsilon^{ik} j^k(t, \mathbf{x}), \quad (3.18)$$

$$B(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{\kappa} \rho(t, \mathbf{x}). \quad (3.19)$$

3.4 Auto-interação

A eletrodinâmica de partículas pontuais usualmente apresenta problemas de auto-interação (auto-energia). Queremos saber qual é a situação nesta teoria e para isto consideramos a equação de movimento para uma única partícula, a partir da Eq.(3.16), suprimindo simplesmente o subíndice p .

Nesta equação fica claro que a força deriva dos campos eletromagnéticos calculados na posição da partícula, $\mathbf{r}$. Segundo as expressões para E e B , estes campos dependem da densidade de carga e da corrente calculados por sua vez no ponto $\mathbf{x} = \mathbf{r}$, ver Eqs. (3.18) e (3.19). Porém isto acarreta numa indefinição $\delta^2(\mathbf{r} - \mathbf{r})$, ver Eq.(3.13). Por sorte, esta quantidade indefinida aparece multiplicada por uma quantidade que se anula, como pode-se ver usando as identidades campo-corrente,

$$m\dot{v}^i = e[E^i(\mathbf{x}) + \frac{1}{c}\epsilon^{ij}v^j B(\mathbf{x})] = \frac{e^2}{c\kappa}\epsilon^{ik}(v^k - v^k)\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{r}). \quad (3.20)$$

Esta quantidade se anula para qualquer ponto do espaço inclusive em $\mathbf{x} = \mathbf{r}$, ou seja, na posição da partícula. Concluimos que *partículas pontuais carregadas interagindo com um campo de Chern-Simons não experimentam auto-interação*. Agora simplesmente redefinimos a equação de movimento para N partículas de forma a eliminar estas contribuições indefinidas,

$$m_p \dot{v}_p^i \equiv \frac{e_p}{c\kappa} \epsilon^{ij} \sum_{q \neq p} e_q (v_q^j - v_p^j) \delta^2(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q). \quad (3.21)$$

Finalmente, para as variáveis dinâmicas do campo, a partir das identidades de campo-corrente, obtemos a equação

$$\dot{A}^i(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\kappa} \epsilon^{ij} \sum_{p=1}^N e_p v_p^j \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{r}_p), \quad (3.22)$$

Relação das Figuras

3.1	Nenhuma permutação	43
3.2	Uma permutação	44
3.3	Duas permutações	44
3.4	Nenhuma permutação	45
3.5	Uma permutação	46
3.6	Duas permutações	46
3.7	Trança de duas partículas e a sua projecção no plano.	49
3.8	Tranças equivalentes.	49
3.9	Tranças não equivalentes.	50
3.10	Projecção no plano $x-t$	51
3.11	Operadores de intersecção	51
3.12	Intersecções que comutam.	52
4.1	Quantização da resistência de Hall.	63
4.2	Argumento de Laughlin para o Q.H.E.	66

1 Introdução

A maior parte das pesquisas em Física foram direcionadas a problemas que residem no espaço-tempo quadri-dimensional. Porém, em muitas ocasiões também se precisou seguir caminhos indiretos e aprender antes com problemas equivalentes e mais simples em dimensões mais baixas para depois voltar ao problema original. Ficou claro que muitas destas pesquisas *pedagógicas* podiam ter aplicações físicas, como por exemplo em matéria condensada, como é o caso dos sólitons e das cargas fracionárias em polímeros [1] (particularmente em polietilenos). A mesma situação repetiu-se na década dos 80 com os fenômenos em $(2 + 1)$ dimensões e que ainda constituem uma área ativa de pesquisa [2]. Aqui estudaremos alguns sistemas planares em $(2 + 1)$ dimensões e as motivações para isto são diversas. Ainda há muito que aprender por exemplo em teoria quântica de campos. Existe a possibilidade de aplicações físicas como o comportamento das teorias de campos a altas temperaturas, certos fenômenos interessantes de matéria condensada, como o *efeito Hall quântico* [4] ou a gravidade planar [3] que descreve a dinâmica na presença de cordas cósmicas, e a perspectiva de uma *teoria de campos conforme* em duas dimensões. Sistemas planares de partículas carregadas na presença de campos eletromagnéticos exibem muitas características notáveis. Um exemplo disto é o movimento no plano de uma partícula carregada na presença de um campo magnético externo perpendicular ao plano. Neste sistema os níveis de energia, chamados *níveis de Landau* são infinitamente degenerados [46]. Esta degenerescência é consequência essencialmente da não comutatividade dos geradores de translação na presença do campo magnético uniforme. Esta propriedade continua válida para um sistema bidimensional de muitas partículas carregadas na presença de um campo magnético perpendicular desde que as possíveis interações entre as partículas sejam invariantes por translação. Quando o campo magnético externo é suficientemente intenso o comportamento destes sistemas pode ser ainda mais extraordinário. Neste sentido, o fenômeno mais espetacular observado em anos recentes é o efeito Hall quântico, onde a condutividade de Hall da amostra bidimensional que contém os elétrons é quantizada. Neste trabalho estudamos alguns destes sistemas planares. No capítulo 1 estudamos o sistema bidimensional formado por

uma partícula carregada não relativística na presença do campo magnético de um vórtice pontual. Aqui o campo é prescrito externamente. Encontramos que além das simetrias usuais este sistema apresenta uma simetria *escondida* dada pelo $SO(2, 1)$. Esta simetria reflete a invariância do sistema por reparametrização temporal. No capítulo 2 estudamos novamente as simetrias desta vez de um sistema de partículas acopladas ao campo de Chern-Simons, i.e. aqui o campo é uma variável dinâmica. As simetrias e as constantes de movimento são comparadas com aquelas do capítulo anterior. Aqui encontramos também uma simetria escondida que é a mesma do capítulo 1. Vemos que o termo de Chern-Simons determina a aparição de uma interação efetiva não local que é determinante para a estatística do sistema planar. Estudamos também as consequências da estrutura não trivial do espaço de configuração em duas dimensões, como por exemplo, a formação de classes de homotopias não usuais (se comparado com o espaço tridimensional) para as possíveis trajetórias de permutação. Isto fica claro na descrição por integrais de trajetórias para espaços multiplamente conexos. Finalmente, no capítulo 3 estudamos o efeito Hall que constitui a aplicação de maior êxito de todos estes conceitos. Através de um modelo simples de fluido-dinâmica os resultados são ilustrados ainda melhor.

1.1 Preliminares

Sabemos que a mecânica de uma partícula (não relativística), com a sua dinâmica dada por derivadas temporais de segunda ordem, pode ser vista como uma Teoria de Campos Relativística (TCR) em $(D = 0 + 1)$ dimensões [5]. Então, existe uma relação entre as simetrias da mecânica de uma partícula não relativística e aquelas de uma TCR. A continuação estudamos alguns assuntos preliminares bem conhecidos em $(3 + 1)$ dimensões.

Em $(3 + 1)$ dimensões as transformações infinitesimais das coordenadas do espaço tempo

$$x^\mu \longrightarrow x^\mu + \delta_f x^\mu, \quad (1.1)$$

$$\delta_f x^\mu = -f^\mu(x), \quad (1.2)$$

induzem transformações sobre as variáveis de campos que podem ser expressas conveniente-

mente em termos de uma *derivada de Lie* na direção de f ,

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \delta_f A_\mu, \quad (1.4)$$

$$\delta_f A_\mu = f^\alpha \partial_\alpha A_\mu + (\partial_\mu f^\alpha) A_\alpha \equiv L_f A_\mu. \quad (1.5)$$

Aplicando o *Teorema de Noether* para uma Lagrangeana L que muda por uma derivada total,

$$L \longrightarrow L + \delta L, \quad (1.6)$$

onde

$$\delta L = \partial_\mu \Omega^\mu, \quad (1.7)$$

têm-se² a corrente conservada

$$j^\mu = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \delta A_\nu - \Omega^\mu. \quad (1.8)$$

Pode acontecer que esta corrente não seja gauge-invariante, mas existem métodos para aperfeiçoá-la, como por exemplo, adicionando *superpotenciais*³. Com esta modificação a corrente pode ser expressa na forma de *Bessel-Hagen* [6],

$$j_f^\mu = T^{\mu\nu} f_\nu, \quad (1.9)$$

onde

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \partial^\alpha A_\alpha - g^{\mu\nu} L. \quad (1.10)$$

¹A *derivada de Lie* de um tensor $T_{\mu\dots}^{\nu\dots}$ é definida por,

$$L_f T_{\mu\dots}^{\nu\dots} \equiv f^\alpha \partial_\alpha T_{\mu\dots}^{\nu\dots} + (\partial_\mu f^\alpha) T_{\alpha\dots}^{\nu\dots} + \dots - (\partial_\alpha f^\nu) T_{\mu\dots}^{\alpha\dots} - \dots, \quad (1.3)$$

onde os termos omitidos são repetições dos primeiros, para cada índice. Note também que em geral, $L_f A_\mu \neq g_{\mu\nu} L_f A^\nu$.

²A Eq.(1.7) deve ser estabelecida sem o uso das equações de movimento.

³Os superpotenciais são divergências de tensores antissimétricos: $\partial_\nu X^{\mu\nu}$, $X^{\mu\nu} = -X^{\nu\mu}$, os quais não estragam a conservação da corrente desde que $\partial_\mu \partial_\nu X^{\mu\nu} = 0$. Note também que Ω^μ não é univocamente definido pela Eq.(1.7)!

A divergência da corrente de Bessel-Hagen com f^μ arbitrário é

$$\partial_\mu j_f^\mu = (\partial_\mu T^{\mu\nu})f_\nu + T^{\mu\nu}\partial_\mu f_\nu = \frac{1}{2}T^{\mu\nu}(\partial_\mu f_\nu + \partial_\nu f_\mu), \quad (1.11)$$

onde usamos que $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ e também que $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

Então para um *vetor de Killing*, i.e., um vetor que satisfaz a *equação de Killing*

$$\partial_\mu f_\nu + \partial_\nu f_\mu = 0, \quad (1.12)$$

a corrente é conservada,

$$\partial_\mu j_f^\mu = 0. \quad (1.13)$$

Mas se também o tensor energia-momento tiver traço nulo a Eq.(1.11) pode ser estendida para

$$\partial_\mu j_f^\mu = \frac{1}{2}T^{\mu\nu}(\partial_\mu f_\nu + \partial_\nu f_\mu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial_\alpha f^\alpha). \quad (1.14)$$

Logo, se f^μ satisfaz a *equação de Killing conforme*

$$\partial_\mu f_\nu + \partial_\nu f_\mu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial_\alpha f^\alpha = 0, \quad (1.15)$$

a corrente j_f^μ será conservada. Os f^μ 's que satisfazem a Eq.(1.15) são componentes dos chamados *vetores de Killing conforme*. Os vetores de Killing (rotação de Lorentz, translação) são também vetores de Killing conforme, mas além desses existem as outras soluções correspondentes à *dilatação e transformação conforme especial*.

Numa TCR em $(D+1)$ dimensões, uma *transformação conforme* tem por efeito mudar as variáveis independentes, as coordenadas x^μ do espaço-tempo, preservando ângulos. Se a transformação for infinitesimal,

$$\delta_f x^\mu = -f^\mu(x), \quad (1.16)$$

então $f^\mu(x)$ é o chamado *vetor de Killing conforme* e satisfaz a *equação de Killing conforme*

$$\partial_\mu f_\nu + \partial_\nu f_\mu = \frac{2}{D+1}g_{\mu\nu}\partial_\alpha f^\alpha. \quad (1.17)$$

Aqui $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico de Minkowski com assinatura $(1, -1, -1, \dots)$ e D é a dimensão espacial. A Eq. (1.17) tem um número finito e igual a $\frac{1}{2}(D+2)(D+3)$ de soluções para $D > 1$, e estas transformações conformes formam o grupo de transformações $SO(2, D+1)$. As soluções da Eq.(1.17) abrangem

- $D + 1$ translações espaço-temporais $f^\mu = a^\mu$; a^μ constante;
- $\frac{1}{2}D(D+1)$ rotações espaço-temporais $f^\mu = \omega^\mu_\nu x^\nu$; $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$;
- Uma única transformação de escala $f^\mu = ax^\mu$; $a \rightarrow$ constante;
- $D + 1$ transformações conformes especiais (TrCE) $f^\mu = 2c.x x^\mu - c^\mu x^2$; c^μ constante.

As versões finitas destas transformações são, respectivamente,

$$x^\mu \longrightarrow x^\mu + a^\mu, \quad (1.18)$$

$$x^\mu \longrightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (1.19)$$

$$x^\mu \longrightarrow \varepsilon^a x^\mu, \quad (1.20)$$

$$x^\mu \longrightarrow \frac{x^\mu - c^\mu x^2}{1 - 2c.x + c^2 x^2}, \quad (1.21)$$

onde a matriz Λ satisfaz, $\Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta g_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta}$

Em $D = 1$ existe um número infinito de soluções para a Eq.(1.17), correspondentes à redefinição arbitrária de $x^\pm = (1/\sqrt{2})(x^0 \pm x^1)$, formando assim um grupo de infinitos parâmetros. Neste caso temos:

- Transf. infinitesimal $\longrightarrow \delta_f x^\pm = -f^\pm(x^\pm)$; $f^\pm$ arbitrário;
- Transf. finita $\longrightarrow X^\pm = X^\pm(x^\pm)$; $X^\pm$ arbitrário.

Por outro lado, os campos relativísticos Lorentz-covariantes, i.e. as variáveis independentes, transformam-se como

$$\delta_f \varphi = f^\alpha \partial_\alpha \varphi + \partial_\alpha f_\beta \left(\frac{\Delta}{D+1} g^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \Sigma^{\alpha\beta} \right) \varphi, \quad (1.22)$$

onde $\Sigma^{\alpha\beta}$ é a matriz de spin e Δ é uma constante chamada *dimensão de escala* de φ . Quando a densidade de Lagrangeana para φ possui um termo cinético (relativístico) convencional, i.e.

Logo, a invariância conforme numa TCR pode ser resumida por uma relação entre a *densidade de energia*, $\mathcal{E} \equiv T^{00}$, e o traço do tensor T^{ij} , que possui componentes espaciais apenas,

$$T_{\mu}^{\mu} = 0 \implies \mathcal{E} = T^{00} = \sum_{i=1}^D T^{ii}. \quad (1.29)$$

Como consequência da invariância conforme existe uma corrente conservada que pode ser construída na forma de Bessel-Hagen projetando o tensor $T^{\mu\nu}$ sobre o vetor de Killing conforme, ver Eq.(1.9). As *constantes de movimento* são

$$C_f = \int d^D x (\mathcal{E} f^0 - \mathbf{P} \cdot \mathbf{f}) = \int d^D x T^{0\nu} f_{\nu}. \quad (1.30)$$

Na mecânica não relativística as simetrias conformes são equivalentes a simetrias por reparametrização temporal, como é visto no capítulo 1. Em particular, é analisado em detalhe as simetrias clássica e quântica do sistema planar partícula carregada-vórtice magnético, quando o campo é prescrito externamente.

2 Partícula pontual + vórtice magnético

Consideramos a dinâmica de uma partícula pontual interagindo com um vórtice magnético pontual. A descrição deste sistema torna-se essencialmente bidimensional quando o movimento ao longo do vórtice (um tubo infinitesimal) é desprezado. Estas estruturas (partícula-vórtice) aparecem no Efeito Hall Quântico (QHE) e as equações que as descrevem são semelhantes aquelas encontradas na gravitação em $(2+1)$ -dimensões, onde aparecem cordas cósmicas infinitas. Antes, na primeira seção, estudamos o equivalente às transformações conformes na mecânica não relativística.

2.1 Transformações conformes na mecânica clássica

A Lagrangeana cinética para o movimento não relativístico de uma partícula pontual no espaço d -dimensional é quadrática na derivada temporal da posição da partícula, $\mathbf{r}(t)$, de modo que o tempo é a única variável independente e a posição da partícula $\mathbf{r}(t)$ é a variável dependente. Portanto, esta teoria tem a estrutura de uma TCR em $(0+1)$ -dimensões onde o *campo* agora é a posição da partícula $\mathbf{r}(t)$, enquanto que as dimensões espaciais formam um *espaço interno* e a posição $\mathbf{r}(t)$ é um vetor neste espaço. Consequentemente, as transformações conformes, neste caso, degeneram-se em *reparametrizações* do tempo, que é a única variável independente [7]. De fato, o tempo sofre uma *transformação projectiva* definida da seguinte forma

$$T = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta} \equiv \omega[t], \quad (2.1)$$

onde, no último membro, deve-se ler ' ω atuando sobre t '. Aqui $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são números reais. A lei de composição deste grupo de transformação é determinada efetuando duas transformações consecutivas

$$\omega(\alpha', \beta', \gamma', \delta') \omega(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \omega(\alpha\alpha' + \beta'\gamma, \alpha'\beta + \beta'\delta, \alpha\gamma' + \gamma\delta', \beta\gamma' + \delta\delta'). \quad (2.2)$$

O *elemento identidade* deste grupo de transformação é estabelecido a partir da relação $T =$

$\omega[t] \equiv t$, e é o seguinte

$$\text{Identidade} \equiv e = \omega(\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = 1) = \omega(1, 0, 0, 1). \quad (2.3)$$

Além disso, podemos impôr um vínculo entre os parâmetros,

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad (2.4)$$

o qual esta' de acordo com a Eq.(2.3) e evita reflexões, $t \longrightarrow (-T)$. O elemento de grupo passa então a depender de três parâmetros,

$$\omega = \omega(\alpha, \beta, \gamma), \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \quad (2.5)$$

Estas propriedades correspondem também aos elementos do grupo $SL(2, \mathbf{R})$, o conjunto das matrizes 2×2 , unimodulares, sobre os reais,

$$SL(2, \mathbf{R}) = \{g = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} / \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}\}. \quad (2.6)$$

Aqui, a *lei de composição* dos parâmetros é idêntica a anterior,

$$g(\alpha, \beta, \gamma)g(\alpha', \beta', \gamma') = g(\alpha\alpha' + \beta'\gamma, \alpha'\beta + \beta'\delta, \alpha\gamma' + \gamma\delta', \beta\gamma' + \delta\delta'), \quad (2.7)$$

e também o elemento identidade,

$$e = g(\alpha = 1, 0, 0), \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \quad (2.8)$$

Então concluímos que estes dois grupos são isomórficos,

$$\Omega = \{\omega(\alpha, \beta, \gamma) / \alpha\delta - \beta\gamma = 1\} \sim SL(2, \mathbf{R}) = \{g = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} / \alpha\delta - \beta\gamma = 1\}, \quad (2.9)$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$. Quando pensamos no grupo de transformação da variável t podemos pensar nas matrizes $g \in SL(2, \mathbf{R})$.

Estas matrizes podem ser expressas através de uma *decomposição de Gauss* [8],

$$g = z_+ h z_-, \quad (2.10)$$

onde, são dadas explicitamente por,

$$z_+ = \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} \mu^{-1} & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Nesta fatoração fica evidente o efeito do elemento de grupo g :

-A matriz z_- efetua *translação temporal* como pode-se ver das Eqs. (2.10) e (2.11), pondo $\alpha = 1 = \delta$, $\gamma = 0$,

$$g(1, \beta, 0) \equiv z_- : t \longrightarrow T = t + \beta; \quad (2.12)$$

-A matriz h efetua *dilatação temporal*. Fazendo $\beta = \gamma = 0$ e usando o vínculo (2.4) temos,

$$g(\alpha, 0, 0) \equiv h : t \longrightarrow T = \alpha^2 t; \quad (2.13)$$

-A matriz z_+ efetua TrCE. Pondo $\delta = \alpha$, $\beta = 0$ temos que,

$$g(1, 0, \gamma) = z_+ : t \longrightarrow T = \frac{t}{\gamma t + 1} \iff \frac{1}{T} = \frac{1}{t} + \gamma. \quad (2.14)$$

Na transformação do campo $r(t)$ o *Jacobiano* pode aparecer num peso qualquer ε

$$t \longrightarrow T \implies r(t) \longrightarrow R(T) = J^\varepsilon r(t) = \left(\frac{dt}{dT}\right)^\varepsilon r(t). \quad (2.15)$$

Porém, em unidades naturais, o *campo* $r(t)$ transforma-se como $\sqrt{t}$. Então, da Eq.(2.1) temos

$$dT = \frac{1}{(\gamma t + \delta)^2} dt \implies R(T) = (\gamma t + \delta)^{-1} r(t). \quad (2.16)$$

mostrando que $\varepsilon = -\frac{1}{2}$ de acordo com a escala de transformação de $r(t)$.

Estas transformações deixam invariante a Ação Cinética de uma partícula livre, porém a Lagrangeana fica quase-invariante,

$$L = \frac{1}{2}mv^2 \longrightarrow L' = L + \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}m\frac{\gamma r^2}{\gamma t + \delta}\right), \quad (2.17)$$

$$I = \int L dt \longrightarrow I' = I. \quad (2.18)$$

Agora vejamos a versão infinitesimal da Eq.(2.1). Usamos a letra genérica s para o conjunto dos parâmetros α, β, γ ; definimos s_0 como o valor dos parâmetros na identidade do grupo, i.e. $s_0 = \{\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0\}$ e expandimos a Eq(2.1) em *série de Taylor* até a primeira ordem,

$$T(s_0 + \epsilon s) = T(s_0) + \delta\beta + \delta\alpha t + (-\delta\gamma)t^2. \quad (2.19)$$

Logo,

$$\delta_f t \equiv T - t = a + bt + ct^2 \equiv -f(t). \quad (2.20)$$

De forma análoga,

$$\mathbf{R}(T) = \mathbf{R}(t - f) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(t)f - \frac{1}{2}\mathbf{r}(t)\frac{df}{dt}. \quad (2.21)$$

Ou ainda,

$$\delta_f \mathbf{r}(t) \equiv \mathbf{R}(t) - \mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t)f - \frac{1}{2}\mathbf{r}(t)\frac{df}{dt}. \quad (2.22)$$

Estes dois resultados, as Eqs. (2.20) e (2.22), são as versões não relativísticas das Eqs.(1.16) e (1.22) (com $\Delta = -\frac{1}{2}$), respectivamente. A Lagrangeana de uma partícula livre novamente fica quase-invariante perante estas transformações, enquanto que a Ação Cinética fica invariante,

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}(t)^2 \longrightarrow L' = L + \delta_f L = L + \frac{d}{dt}(fL - \frac{1}{4}m\frac{d^2 f}{dt^2}\mathbf{r}(t)^2), \quad (2.23)$$

$$I = \int Ldt \longrightarrow I' = I + \delta_f I = I. \quad (2.24)$$

Trataremos agora dos geradores desta simetria. Estes podem ser determinados imediatamente reescrevendo a Eq. (2.20) apropriadamente,

$$\delta_f t = a + bt + ct^2 = (a\frac{d}{dt} + bt\frac{d}{dt} + ct^2\frac{d}{dt})t, \quad (2.25)$$

de onde os operadores diferenciais,

$$G_1 \equiv \frac{d}{dt}, \quad G_2 \equiv t\frac{d}{dt}, \quad G_3 \equiv t^2\frac{d}{dt}, \quad (2.26)$$

constituem uma realização diferencial dos geradores G_i , um para cada parâmetro, e, fisicamente eles efetuam translação temporal, dilatação temporal e TrCE, respectivamente:

$$\delta_{G_1} t = G_1 t \implies T = t + 1,$$

$$\delta_{G_2} t = G_2 t \implies T = 2t,$$

$$\delta_{G_3} t = G_3 t \implies T = t + t^2.$$

Segundo a Eq. (2.22), as respectivas variações no campo $\mathbf{r}(t)$ são,

$$\delta_{G_1} \mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t), \quad \delta_{G_2} \mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t)t - \frac{1}{2}\mathbf{r}(t), \quad \delta_{G_3} \mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t)t^2 - t\mathbf{r}(t). \quad (2.27)$$

Estes geradores satisfazem a álgebra $SO(2, 1)$ [9],

$$[G_1, G_2] = G_1, \quad [G_2, G_3] = G_3, \quad [G_1, G_3] = 2G_2. \quad (2.28)$$

que é a correspondente não relativística de $SO(2, 4)$ (ver parágrafo que segue a Eq. (1.17)), embora não contenha a *rotação espaço-temporal*, Eq. (1.19) e a sua versão infinitesimal (ver parágrafo anterior à equação citada).

Finalmente, a teoria $L = \lambda r^{-2}$ também é invariante por reparametrização temporal. Naturalmente, uma teoria extendida deste tipo seria [10],

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}(t)^2 - \frac{\lambda}{r^2}. \quad (2.29)$$

Na seguinte seção analisaremos uma teoria não relativística que também é invariante conforme (ou por reparametrização).

2.2 Simetrias

Em $(2 + 1)$ -dimensões ¹, a Lagrangeana de uma partícula de carga e , massa m , na

¹No plano, o vetor posição é $\mathbf{r}(t) = (x^1, x^2)$ e a velocidade, $\mathbf{v}(t) = (v^1, v^2)$. O produto vetorial de dois vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ é definido assim, $v = \epsilon^{ij}a^ib^j = a^1b^2 - a^2b^1$, e portanto é um pseudo-escalar (aqui ϵ^{ij} é o tensor de Levi-Civita no plano). O produto vetorial de um vetor com um escalar é novamente um vetor. Por exemplo, o campo magnético $B = \nabla \times \mathbf{A} = \epsilon^{ij}\partial_i A^j$ é um pseudo-escalar, e o rotacional de um escalar é um vetor, $(\nabla \times s)^i = \epsilon^{ij}\partial_j s$.

presença de um campo magnético $B = \nabla \times \mathbf{A}$, é [11],

$$L = L_P + L_I = \frac{1}{2}m\mathbf{v}(t)^2 + \frac{e}{c}\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)). \quad (2.30)$$

Se o campo magnético for um vórtice [12],

$$B(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \Phi \delta^2(\mathbf{r}), \quad (2.31)$$

então o potencial vetor na Eq. (2.30) deve ser prescrito *externamente* da seguinte forma,

$$\mathbf{A}^i(\mathbf{r}) = -\frac{\Phi}{2\pi} \varepsilon^{ij} \frac{x^j}{r^2}. \quad (2.32)$$

Nestas duas equações, Φ representa o fluxo do campo magnético B através do plano, e é constante,

$$\Phi = \int d^2\mathbf{r} B(\mathbf{r}). \quad (2.33)$$

Para chegar a Eq. (2.31) a partir da Eq. (2.32) usamos a função de Green no plano. Note que a expressão para o potencial pode ser reescrita como,

$$\mathbf{A}^i(\mathbf{r}) = -\frac{\Phi}{2\pi} \varepsilon^{ij} \frac{x^j}{r^2} = -\Phi \varepsilon^{ij} \partial_j \frac{1}{2\pi} \ln(r). \quad (2.34)$$

Então o campo magnético é

$$B(\mathbf{r}) = \varepsilon^{ij} \partial_i (-\Phi \varepsilon^{jk} \partial_k \frac{1}{2\pi} \ln(r)) = \Phi \delta^{ik} \partial_i \partial_k \frac{1}{2\pi} \ln(r), \quad (2.35)$$

ou ainda,

$$B(\mathbf{r}) = \Phi \nabla^2 \left(\frac{1}{2\pi} \ln(r) \right), \quad (2.36)$$

onde a função $\frac{1}{2\pi} \ln(r)$ é a função de Green no plano,

$$\nabla^2 G = \nabla^2 \frac{1}{2\pi} \ln(r) = \delta^2(\mathbf{r}) \quad (2.37)$$

e isto leva finalmente à Eq. (2.31). As equações de Euler determinam a Força de Lorentz como equação de movimento, em ausência de campo elétrico,

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = \frac{e}{c} \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \times B(\mathbf{r}) \iff m \frac{dv^i}{dt} = \frac{e}{c} \varepsilon^{ij} v^j \Phi \delta^2(\mathbf{r}). \quad (2.38)$$

O momento canônico determina a Hamiltoniana através de uma transformação de Legendre,

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + \frac{e}{c}\mathbf{A} \implies \quad (2.39)$$

$$H = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2. \quad (2.40)$$

Simetrias clássicas

Rotação A teoria *partícula carregada + vórtice magnético*, Eq. (2.30), é invariante por rotações. Uma rotação infinitesimal é dada por,

$$\delta_R x^i = -\varepsilon^{ij} x_j \implies \delta_R L = 0 \implies \delta_R I = \delta_R \int dt L = 0. \quad (2.41)$$

Então $\delta_R x^i$ é uma simetria da teoria em questão e pelo *Teorema de Noether* deve existir uma constante de movimento,

$$C = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \cdot \delta \mathbf{r}, \quad \frac{dC}{dt} = 0. \quad (2.42)$$

Para $\delta \mathbf{r} \equiv \delta_R \mathbf{r}$,

$$C \equiv J = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} + \frac{e\Phi}{2\pi c}. \quad (2.43)$$

onde usamos a definição do momento canônico. A quantidade conservada sob rotação é o *momento angular canônico* que contém, além do termo usual, um termo constante dependente do fluxo, devido a que o momento canônico também não é o usual (ele depende do potencial vetor). Mais tarde veremos que este termo adicional tem um papel importante quanticamente.

Simetrias conformes (reparametrização temporal) Vimos que a partícula livre é invariante por reparametrização (Eqs. (2.23) e (2.24)). Ou seja, a invariância por reparametrização do primeiro termo da teoria *partícula + vórtice* está garantida. Vejamos então o termo de *interação*. Primeiramente, a variação de L_I devido a um $\delta \mathbf{r}$ arbitrário é o seguinte

$$\delta L = \frac{e}{c} \delta(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})) = \frac{e}{c} \frac{d}{dt}(\delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{A}) + \frac{e}{c} \delta \mathbf{r} \times \mathbf{v} \Phi \delta^2(\mathbf{r}). \quad (2.44)$$

Se $\delta \mathbf{r}$ for consequência de uma reparametrização, i.e., se for dada pelas Eqs. (2.22) e (2.20)

$$\delta_f t \equiv T - t = a + bt + ct^2 \equiv -f(t), \quad (2.45)$$

$$\delta_f \mathbf{r}(t) \equiv \mathbf{R}(t) - \mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t)f - \frac{1}{2}\mathbf{r}(t)\frac{df}{dt}, \quad (2.46)$$

então a variação na Eq. (2.44) é a seguinte,

$$\delta_f L = \frac{e}{c} \frac{d}{dt}(\delta_f \mathbf{r} \cdot \mathbf{A}) - \frac{1}{2} \frac{df}{dt} \mathbf{r} \times \mathbf{v} \Phi \delta^2(\mathbf{r}) = \frac{e}{c} \frac{d}{dt}(\delta_f \mathbf{r} \cdot \mathbf{A}). \quad (2.47)$$

No segundo membro o termo que contém a delta se anula pois ela contribui apenas na origem, onde o fator $\mathbf{r}$ se anula. Então temos,

$$\delta_f I = \delta_f \int dt L_I = 0. \quad (2.48)$$

Logo, a teoria *partícula + vórtice* é invariante por reparametrização temporal. É interessante notar que o termo de interação fica invariante não somente para $\varepsilon = -\frac{1}{2}$ na Eq. (2.15), mas também para um ε arbitrário, de modo que o equivalente á Eq. (2.22) seja

$$\delta_f \mathbf{r}(t) \equiv \mathbf{R}(t) - \mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t)f(t) + \varepsilon \frac{df}{dt} \mathbf{r}(t). \quad (2.49)$$

É natural esperar esta invariância ampliada, já que o sistema *partícula + vórtice* é a versão bidimensional do *monopolo magnético* tridimensional [13].

Por outro lado, sabemos que quando a Lagrangeana fica quase-invariante (isto sem uso das equações de movimento!) perante uma simetria, a constante de movimento ganha um termo adicional se comparado com a Eq. (2.42),

$$\delta L = \frac{dX}{dt} \implies C = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \cdot \delta \mathbf{r} - X. \quad (2.50)$$

Logo, para as simetrias conformes desta teoria as constantes de movimento podem ser calculadas usando as Eqs. (2.22), (2.23) e (2.47),

$$X = f L_P - \frac{1}{4} m \frac{d^2 f}{dt^2} r^2 + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} f \implies \quad (2.51)$$

$$G = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 f - \frac{1}{2}m\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \frac{df}{dt} + \frac{1}{4}mr^2 \frac{d^2 f}{dt^2}, \quad \frac{dG}{dt} = 0. \quad (2.52)$$

Usando a forma de f dada na Eq. (2.20), a expressão anterior é dada por,

$$f = -(a + bt + ct^2) \longrightarrow G = aH + bD + cK, \quad (2.53)$$

onde,

$$H \equiv \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2, \quad D \equiv tH - \frac{1}{2}m\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}, \quad K \equiv -t^2 H + 2tD + \frac{1}{2}mr^2, \quad (2.54)$$

são os geradores da translação temporal, dilatação temporal e TrCE, respectivamente. Teríamos chegado a estes resultados se tivéssemos usado $\delta\mathbf{r}$ dada pela Eq. (2.22), com $f = 1, t, t^2$ separadamente, nas Eqs. (2.51) e (2.52).

Simetrias quânticas

Quanticamente, a dinâmica do sistema *partícula + vórtice* é governado pela *equação de Schrödinger* dependente do tempo definida no plano

$$i\hbar\partial_t\Psi(t, \mathbf{r}) = H\Psi(t, \mathbf{r}). \quad (2.55)$$

Aqui H é a Hamiltoniana dada pela Eq. (2.40), onde $\mathbf{p}$ e $\mathbf{A}$ são operadores.

As relações fundamentais de quantização são,

$$[x^i, x^j] = [p^i, p^j] = 0, \quad [x^i, p^j] = [x^i, mv^j] = i\hbar\delta^{ij}. \quad (2.56)$$

Aparecem também as relações de comutação não usuais entre as componentes da velocidade,

$$[mv^i, mv^j] = 2\pi i\hbar^2\nu\delta^2(\mathbf{r})\varepsilon^{ij}. \quad (2.57)$$

Aqui $\nu \equiv \frac{e\Phi}{\hbar c}$ é um 2-cociclo e mede a quantidade de *fluxo quântico fundamental* $\Phi_0 = \frac{\hbar c}{e}$ que atravessa o plano [14],

$$\nu = \frac{\Phi}{\left(\frac{\hbar c}{e}\right)} = \frac{\Phi}{\Phi_0}. \quad (2.58)$$

Veremos mais tarde que esta quantidade está relacionada com a degenerescência dos níveis energéticos.

Reparametrização A reparametrização temporal (2.1) induz uma transformação unitária nas variáveis dinâmicas,

$$\mathbf{R}(t) = U(g)\mathbf{r}(t)U^{-1}(g), \quad g \in SL(2, \mathbf{R}), \quad (2.59)$$

onde os $U(g)$'s são matrizes unitárias que efetuam a reparametrização e constituem uma representação do grupo $SL(2, \mathbf{R})$. Das Eqs. (2.16) e (2.59) concluimos que,

$$U^{-1}(g)\mathbf{r}(t)U(g) = \mathbf{r}(T)(\gamma t + \delta). \quad (2.60)$$

Consistentemente, o vetor de estado muda conforme,

$$|\Psi(T)\rangle = U(g)|\Psi(t)\rangle. \quad (2.61)$$

A partir destas duas relações podemos achar os equivalentes quânticos de (2.27):

a) Translação temporal

A matriz z_- da Eq. (2.12) pode ser reescrita como

$$z_- = g(1, \beta, 0) = \exp(\beta\sigma_-) : t \longrightarrow T = t + \beta, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.62)$$

Aqui a matriz σ satisfaz o vínculo $\sigma_-^n = 0$, $n \geq 2$. Introduzimos o gerador infinitesimal G_- através da definição ,

$$U(z_-) \equiv \exp(-i\beta G_-), \quad (2.63)$$

o qual representa um determinado g , e desenvolvemos as Eqs. (2.59) e (2.61) para obter as relações ,

$$\frac{\delta \mathbf{r}(t)}{\delta \beta} \equiv i[G_-, \mathbf{r}(t)] = \mathbf{v}, \quad (2.64)$$

$$\frac{\delta |\Psi(t)\rangle}{\delta \beta} \equiv iG_-|\Psi(t)\rangle = -\frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt}. \quad (2.65)$$

Destas duas equações concluímos que,

$$G_- \equiv H. \quad (2.66)$$

b) Dilatação temporal

A matriz h da Eq. (2.13) reescrevemos como,

$$h = g(\alpha, 0, 0) = \exp(-\frac{1}{2}\zeta\sigma_3) : t \longrightarrow T = \alpha^2 t, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.67)$$

$$\alpha = \delta^{-1} \equiv \exp(-\frac{1}{2}\zeta). \quad (2.68)$$

Introduzimos o gerador G_3 definindo a representação unitária

$$U(h) = \exp(i\zeta G_3), \quad (2.69)$$

e expandimos as Eqs. (2.59) e (2.61) para $\zeta \ll 1$, obtendo

$$\frac{\delta \mathbf{r}(t)}{\delta \zeta} \equiv i[G_3, \mathbf{r}(t)] = t\mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{r}(t), \quad (2.70)$$

$$\frac{\delta |\Psi(t)\rangle}{\delta \zeta} \equiv iG_3|\Psi(t)\rangle = -t \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt}. \quad (2.71)$$

Destas duas equações concluímos que

$$G_3 \equiv D, \quad (2.72)$$

onde D é operador de *dilatação temporal*.

c) Transformação conforme especial

A matriz z_+ da Eq. (2.14) é reescrita como,

$$z_+ = g(1, 0, \gamma) = \exp(\gamma\sigma_+) : t \longrightarrow T = \frac{t}{\gamma t + 1}, \quad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.73)$$

que induz a representação unitária

$$U(z_+) = \exp(i\gamma G_+), \quad (2.74)$$

e, novamente expandindo as Eqs. (2.59) e (2.61), obtemos

$$\frac{\delta \mathbf{r}(t)}{\delta \gamma} \equiv i[G_+, \mathbf{r}(t)] = t^2\mathbf{v} - t\mathbf{r}(t), \quad (2.75)$$

$$\frac{\delta|\Psi(t)\rangle}{\delta\gamma} \equiv iG_+|\Psi(t)\rangle = -t^2 \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt}. \quad (2.76)$$

Daqui concluímos que

$$G_+ \equiv K, \quad (2.77)$$

onde K é o operador de TrCE.

Em resumo, os nossos resultados foram os seguintes

$$\text{--Trans. temporal: } \frac{i}{\hbar}[H, \mathbf{r}(t)] = \mathbf{v}, \quad i\hbar \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = H|\Psi(t)\rangle; \quad (2.78)$$

$$\text{--Dilatação temporal: } \frac{i}{\hbar}[D, \mathbf{r}(t)] = t\mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{r}, \quad i\hbar t \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = D|\Psi(t)\rangle; \quad (2.79)$$

$$\text{--TrCE: } \frac{i}{\hbar}[K, \mathbf{r}(t)] = t^2\mathbf{v} - t\mathbf{r}, \quad i\hbar t^2 \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = K|\Psi(t)\rangle. \quad (2.80)$$

Nestas equações reintroduzimos a constante de Planck. É interessante notar que uma possível realização dos operadores H , D e K , é obtida a partir de uma extensão, por simetrização, dos seus correspondentes clássicos, Eq. (2.54),

$$H \equiv \frac{1}{2}mv^2, \quad D \equiv tH - \frac{1}{4}m(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}), \quad K \equiv -t^2H + 2tD + \frac{1}{2}m\mathbf{r}^2. \quad (2.81)$$

É fácil verificar, usando os comutadores fundamentais, que estes operadores de fato satisfazem as relações (2.80). Também é fácil verificar que H , D e K satisfazem a álgebra $SO(2,1)$, consistentemente com as relações (2.28),

$$[H, D] = i\hbar, \quad [K, D] = -i\hbar K, \quad [H, K] = 2i\hbar D. \quad (2.82)$$

Estes operadores podem ser expressos na base de Cartan [9], formando combinações lineares e introduzindo um parâmetro fixo de dimensão temporal que chamaremos de a ,

$$R = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}K + aH\right), \quad S = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}K - aH\right), \quad L_{\pm} = \frac{1}{\hbar}(S \pm iD) \quad (2.83)$$

$$\implies [R, L_{\pm}] = \pm\hbar L_{\pm}, \quad [L_+, L_-] = -2\hbar^{-1}R. \quad (2.84)$$

O grupo $SO(2, 1)$ é o grupo das transformações (no espaço tridimensional, com $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$) que deixa invariante a métrica

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2, \quad (2.85)$$

cujos geradores das *rotações* nos planos (1-2), (2-0) e (0-1) são R, S e D, respectivamente. Os geradores S e D atuam como geradores não compactos de *boost*, R, porém gera rotações que formam o subgrupo compacto $SO(2)$ de $SO(2, 1)$. A dependência temporal destes geradores é estabelecida através da *equação de Heisenberg*

$$\frac{dG}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, G] + \partial_- G. \quad (2.86)$$

Especificamente, usando as realizações (2.81) e os respectivos comutadores obtemos as seguintes equações de movimento:

$$\frac{dH}{dt} = 0, \quad \frac{dD}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, D] + \partial_t D = 0, \quad \frac{dK}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, K] + \partial_t K = 0 \quad (2.87)$$

Estes geradores são constantes de movimento, mas note que não comutam com a Hamiltoniana (obviamente, com exceção do próprio H). Daqui fica claro que qualquer combinação linear destes geradores também é uma constante de movimento,

$$\frac{dG}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, G] + \frac{\partial G}{\partial t} = 0, \quad G \equiv aH + bD + cK, \quad (2.88)$$

e note que também aqui o operador G se conserva sem comutar com a Hamiltoniana, mas pelo fato do primeiro termo ser compensado exatamente pelo segundo. As equações de movimento são

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[G, \mathbf{r}(t)] = f(t)\mathbf{v}(t) - \frac{1}{2}\frac{df(t)}{dt}\mathbf{r}(t), \quad (2.89)$$

$$i\hbar f(t)\frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = G|\Psi(t)\rangle, \quad (2.90)$$

$$f = a + bt + ct^2. \quad (2.91)$$

A Eq. (2.88) expressa o fato de que as transformações geradas por G deixam a Ação mas não a Lagrangeana, invariante. Isto significa que qualquer um desses operadores G, poderia ser usado para determinar a evolução temporal do vetor de estado, embora na prática, alguns sejam mais convenientes do que outros. De fato, somente alguns deles possuem autoestados normalizáveis.

Simetrias combinadas O operador de *Casimir* para o grupo $SO(2, 1)$ é [9]

$$C^2 = R^2 - S^2 - D^2 = \frac{1}{2}(KH + HK) + D^2. \quad (2.92)$$

O Casimir pode ser expresso em termos do momento angular. Este, por sua vez, é uma constante de movimento,

$$J = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} + \hbar\nu, \quad \frac{dJ}{dt} = 0, \quad (2.93)$$

e além do mais, comuta com todos os geradores conformes (H, D, K). Ou seja, o grupo completo de simetria é o produto

$$SO(2, 1) \times U(1). \quad (2.94)$$

Quando o momento angular é diagonalizado o Casimir fica automaticamente diagonalizado,

$$C^2 = \frac{1}{4}(J - \hbar\nu)^2 - \frac{1}{4}\hbar^2 \implies J \equiv \hbar j \implies C^2 = \frac{1}{4}\hbar^2(j - \nu)^2 - \frac{1}{4}\hbar^2, \quad (2.95)$$

onde $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Definindo os autovalores do Casimir estabelecemos um vínculo com os autovalores do momento angular,

$$C \equiv \hbar^2 d(d - 1) \implies d = \frac{1}{2}(1 \pm |j - \nu|). \quad (2.96)$$

3 Partículas pontuais com campos de gauge abeliano

Diferentemente do capítulo anterior, onde o potencial vetor foi imposto externamente, agora consideramos as variáveis de campo A_μ como sendo variáveis dinâmicas, governadas por uma Ação de uma *teoria de gauge abeliana*.

3.1 Teoria de Chern-Simons vs. Eletrodinâmica

A referida Ação não necessariamente deve ser aquela da *eletrodinâmica de Maxwell*¹,

$$I_{EM} = -\frac{1}{4c} \int d^3x F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x), \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.1)$$

Também poderíamos incluir o termo de Chern-Simons como Ação cinética [15]

$$I_{CS} = \frac{\kappa}{2c} \int d^3x \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha A_\beta(x) A_\gamma(x). \quad (3.2)$$

Além disso consideramos uma Ação para a interação matéria-campo,

$$I_{in} = -\frac{1}{c^2} \int d^3x A_\mu(x) j^\mu(x), \quad j^\mu \equiv (c\rho, \mathbf{j}). \quad (3.3)$$

A partir da minimalização da Ação total, $I = I_{EM} + I_{CS} + I_{in}$, determinamos as equações de movimento

$$\partial_\alpha F^{\alpha\mu} + \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\mu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \frac{1}{c} j^\mu. \quad (3.4)$$

Esta equação tem uma consequência muito importante que segue da sua componente temporal ($\mu = 0$),

$$\partial_\alpha F^{\alpha 0} + \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{0\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \frac{1}{c} j^0 = \rho \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} - \kappa B = \rho. \quad (3.5)$$

Esta é a *lei de Gauss* para esta teoria. Agora integramos esta equação sobre o espaço todo e usamos o teorema da divergência $\oint_{V_\infty} d^2\mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{E} = \oint_{C_\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$, obtendo:

$$\oint_{C_\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \kappa \Phi = Q, \quad (3.6)$$

¹Aqui usaremos a métrica $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$. As coordenadas do espaço-tempo são denotados por $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. O potencial vetor por $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$, $A^i(x) \equiv A^i(t, \mathbf{x})$ e as derivadas por $\partial^\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = (\partial^0, -\nabla)$. Os campos magnético e elétrico são definidos pelas relações, $F_{ij} \equiv \varepsilon^{ij} B$ e $F_{0i} \equiv E^i$.

onde definimos o fluxo magnético $\Phi = \int d^2\mathbf{r} B$ através do plano e a carga total $Q = \int d^2\mathbf{r} \rho$. No entanto, devido a presença da massa κ os campos caem exponencialmente a grandes distâncias (isto pode ser visto no propagador) de modo que o primeiro termo da equação anterior se anula. Logo,

$$\Phi = -\frac{1}{\kappa}Q. \quad (3.7)$$

Esta relação é uma característica essencial da teoria (topológica) de Chern-Simons. Fisicamente, isto quer dizer que a matéria carrega uma carga total Q e um fluxo magnético $-\frac{Q}{\kappa}$, vinculados. Explicitamente, esta equação é escrita como

$$\Phi = -\frac{Q}{\kappa} = \oint_{C_\infty} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}. \quad (3.8)$$

Daqui fica claro que o vetor potencial é de longo alcance, de modo que $\oint_{C_\infty} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}$ não se anula, enquanto que o campo B (*gauge-invariante*) é de curto alcance, de modo que $\int d^2\mathbf{r} B$ converge. Estas propriedades correspondem a um vórtice que pelo caráter assintótico é chamado *vórtice topológico* [15],

$$A^i(r, \theta) \longrightarrow A^i(\infty, \theta) = \frac{Q}{2\pi\kappa} \varepsilon^{ij} \frac{x^j}{r^2} = -\frac{\Phi}{2\pi} \varepsilon^{ij} \partial_j \ln r. \quad (3.9)$$

É fácil notar que a Eq.(3.7) pode ser obtida sem considerações assintóticas desde que o termo de Maxwell seja suprimido [16], mantendo-se apenas o termo de Chern-Simons. De fato, esta teoria pode ser vista como o limite $\kappa \longrightarrow \infty$ da teoria completa, ver Eq. (3.4). Fisicamente, este truncamento somente faz sentido a baixas energias, ou equivalentemente, a grandes distâncias, que é quando o termo de Chern-Simons (de derivadas de ordem menor) domina o termo de Maxwell (de derivadas de ordem maior).

3.2 Interação de partículas carregadas com campos de C-S

De acordo com o afirmado no último parágrafo, agora consideramos um sistema de partículas carregadas interagindo com um campo de Chern-Simons. A Lagrangiana total é [17]

$$L = L_M + L_{in} + L_{CS}. \quad (3.10)$$

Agora escrevemos explicitamente cada um desses termos:

Matéria A Lagrangiana cinética para N partículas pontuais de massas m_p , $p = 1, \dots, N$, e coordenadas $\mathbf{r}_p(t)$, as quais representam as variáveis dinâmicas da matéria, é

$$L_M = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N m_p v_p^2. \quad (3.11)$$

Interação A corrente conservada de cada uma destas N partículas de carga e_p é acoplada ao campo de Chern-Simons,

$$L_{in} = \frac{1}{c} \int d^2x A_\mu j^\mu = \frac{1}{c} \int d^2x \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} - \frac{1}{c} \int d^2x A_0 j^0. \quad (3.12)$$

Para partículas pontuais as componentes da corrente são

$$j^\mu = (j^0, \mathbf{j}) = (c\rho, \mathbf{j}) = (c \sum_{p=1}^N e_p \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{r}_p(t)), \sum_{p=1}^N e_p \mathbf{v}_p \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{r}_p(t))). \quad (3.13)$$

Substituímos esta expressão em L_{in} , temos então

$$L_{in} = \frac{1}{c} \sum_{p=1}^N e_p \mathbf{v}_p(t) \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{r}_p(t)) - \sum_{p=1}^N e_p A_0(t, \mathbf{r}_p(t)). \quad (3.14)$$

Chern-Simons Explicitamos a Lagrangiana em (3.2) e efetuamos uma integração por partes,

$$L_{CS} = \frac{\kappa}{2c} \int d^2x \epsilon^{ij} \dot{A}_i(x) A_j(x) - \kappa \int d^2x A_0(x) B(x) \quad (3.15)$$

Aqui fica claro que as variáveis dinâmicas dos campos são as componentes espaciais $A_i(t, \mathbf{x})$, enquanto que A_0 atua como um multiplicador de Lagrange.

3.3 Equações de movimento

Para as variáveis da matéria obtemos a *força de Lorentz*,

$$m_p \dot{v}_p^i(t) = e_p [E^i(t, \mathbf{r}_p) + \frac{1}{c} \epsilon^{ij} v_p^j(t) B(t, \mathbf{r}_p)]. \quad (3.16)$$

Para as variáveis de campo a equação de movimento é a mesma de (3.4) mas sem o primeiro termo que provém da Ação de Maxwell,

$$\frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \frac{1}{c} j^\mu. \quad (3.17)$$

onde escolhemos o *gauge de Weyl* $A_0 \equiv 0$.

3.5 Formulação canônica. Quantização

Da análise anterior reconhecemos como variáveis dinâmicas as seguintes:

$$\mathbf{r}_p, \quad \mathbf{p}_p = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_p} = m_p \mathbf{v}_p + \frac{e_p}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_p), \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}). \quad (3.23)$$

A estrutura simplética para as variáveis da matéria é convencional, levando naturalmente ao *colchete de Poisson* usual para as variáveis $\mathbf{r}_p$ e $\mathbf{p}_p$,

$$[\mathbf{r}_p^i, \mathbf{p}_q^j]_{PB} = \delta^{ij} \delta_{pq}. \quad (3.24)$$

Todavia, para os campos de gauge a Lagrangiana cinética (Chern-Simons) é de primeira ordem na derivada temporal, de modo que o colchete de Poisson para as variáveis dinâmicas dos campos é não usual [18],

$$[A_i(\mathbf{x}), A_j(\mathbf{y})]_{PB} = -\frac{c}{\kappa} \varepsilon^{ij} \delta^2(\mathbf{xy}). \quad (3.25)$$

Estes são os colchetes fundamentais. Nos argumentos, o tempo é suprimido já que supõe-se fixo. A Hamiltoniana total é obtida, como usualmente, por uma transformação de Legendre,

$$H = \sum_{p=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{A}}_\mu} \cdot \dot{\mathbf{v}}_p + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{A}}_\mu} - L. \quad (3.26)$$

Substituindo os momentos canônicos nesta equação obtemos

$$H = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N m_p \mathbf{v}_p^2(t) + \int d^2\mathbf{x} A_0(x) [\kappa B(x) + \rho(x)]. \quad (3.27)$$

Nesta equação, o multiplicador de Lagrange A_0 , pode ser fixado a zero (escolhendo o *gauge de Weyl*) desde que o fator entre parênteses do segundo membro seja imposto como vínculo. Logo, a Hamiltoniana é a mesma da partícula livre quando expressa em termos da velocidade, ou seja, as equações de movimento clássicas são idênticas as da partícula livre. Porém, a relação entre a velocidade e o momento foi alterado,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N m_p \mathbf{v}_p^2(t) = \sum_{p=1}^N \frac{1}{2m_p} [\mathbf{p}_p - \frac{e_p}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_p)]^2. \quad (3.28)$$

Note que os colchetes de Poisson também mudam. Esta é uma consequência significativa da presença do termo de Chern-Simons. Usando os colchetes fundamentais, Eqs. (3.24) e (3.25), podemos reobter as equações de movimento (3.21) e (3.22) no esquema Hamiltoniano. Para isto usamos os comutadores,

$$[m_p v_p^i, m_q v_q^j]_{PB} = -\frac{e_p}{c} \epsilon^{ij} \{ \delta_{pq} B(\mathbf{r}_p) + \frac{e_q}{\kappa} \delta^2(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q) \}, \quad (3.29)$$

$$[m_p v_p^i, A^i(\mathbf{x})]_{PB} = \frac{e_p}{\kappa} \epsilon^{ij} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{r}_p), \quad (3.30)$$

e também, como anteriormente, redefinimos as somas de modo a evitar quantidades indefinidas.

Usando os colchetes clássicos, podemos quantizar diretamente esta teoria. As principais relações de comutação são:

$$[\mathbf{r}_p^i, p_q^j] = [\mathbf{r}_p^i, m_q v_q^j] = i\hbar \delta^{ij} \delta_{pq}; \quad (3.31)$$

$$[m_p v_p^i, m_q v_q^j] = i\hbar \epsilon^{ij} \{ \delta_{pq} e_p B(\mathbf{r}_p) + \frac{e_q e_p}{\kappa} \delta^2(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q) \}; \quad (3.32)$$

$$[A_i(\mathbf{x}), A_j(\mathbf{y})] = \frac{i}{\kappa} \epsilon^{ij} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.33)$$

As equações de movimento agora aparecem simetrizadas ,

$$m_p \dot{v}_p^i = \frac{e_p}{2c\kappa} \epsilon^{ij} \sum_{neq} e_q \{ v_q^j \delta^2(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q) + \delta^2(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q) v_q^j \} \quad (3.34)$$

$$-(v_p^j \delta^2(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q) + \delta^2(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q) v_p^j), \quad (3.35)$$

$$\dot{A}^i(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\kappa} \epsilon^{ij} \sum_p v_p^j \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{r}_p) + \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{r}_p) v_p^j. \quad (3.36)$$

3.6 Solução para os campos de gauge

Vimos que a Eq. (3.19) constitui um vínculo que provem da componente temporal da equação de movimento (3.17). Então fica claro que a *intensidade de campo* F_{ij} é completamente determinada por j^0 , que neste caso é dado pela Eq. (3.13). Portanto, podemos eliminar o grau

de liberdade extra [19] em A^i impondo uma condição de gauge e então resolver A^i em termos de j^0 . Para isto fixamos o gauge com a seguinte equação

$$\partial_i A^i = 0 \implies A^i(\mathbf{x}) = \varepsilon^{ij} \partial_j g(\mathbf{x}), \quad (3.37)$$

onde $g(\mathbf{x})$ é uma função escalar. Substituindo esta expressão na equação de movimento determinamos $g(\mathbf{x})$ e portanto $A^i(\mathbf{x})$,

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{\kappa} \int d^2 \mathbf{r} \left(\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{r}| \right) \rho(\mathbf{r}), \quad (3.38)$$

$$\implies A^i(\mathbf{x}) = \varepsilon^{ij} \partial_j g(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\kappa} \varepsilon^{ij} \int d^2 \mathbf{r}_p \frac{x^j - r_p^j}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_p|^2} \rho(\mathbf{r}_p). \quad (3.39)$$

Aqui usamos as relações $\partial_j \ln r = \frac{r^j}{r^2}$ e também $\nabla^2 \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{r}| = \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{r})$. Ainda podemos usar a Eq.(3.13) para substituir ρ ,

$$A^i(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\kappa} \varepsilon^{ij} \sum_{q=1}^N e_q \frac{x^j - r_q^j}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_q|^2}. \quad (3.40)$$

Note que o potencial vetor no ponto $\mathbf{x}$ depende do vetor posição de todas as partículas, e exatamente na posição de alguma partícula fica indefinido. Para evitar isto, simplesmente redefinimos os termos da soma e melhoramos a notação

$$a_p^i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \frac{1}{2\pi\kappa} \varepsilon^{ij} \sum_{q \neq p}^N e_q \frac{r_p^j - r_q^j}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q|^2}. \quad (3.41)$$

Este é o potencial vetor visto pela partícula p e descreve vórtices localizados nas posições de todas as outras partículas,

$$\mathbf{B}_p = \nabla \times \mathbf{a}_p = \frac{1}{\kappa} \sum_{q \neq p} e_q \delta^2(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q). \quad (3.42)$$

A solução (3.41) para o potencial vetor determina uma realização para o operador momento cinético,

$$m_p v_p^i = p_p^i - \frac{1}{2\pi\kappa} \varepsilon^{ij} \sum_{q \neq p}^N e_q \frac{r_p^j - r_q^j}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q|^2}, \quad (3.43)$$

onde $\mathbf{p}_p = -i\hbar \nabla_p$, enquanto que $\mathbf{r}_p$ atua multiplicando diretamente. Isto determina uma Lagrangiana efetiva [17],

$$L_{ef} = \sum_{p=1}^N \frac{1}{2} m_p v_p^2 + \frac{e_p}{c} \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{A} a_p. \quad (3.44)$$

3.7 Dinâmica quântica

Usamos agora a Lagrangiana efetiva para determinar a Hamiltoniana do sistema, dada por

$$L_{ef} \Rightarrow H = \sum_{p=1}^N \frac{1}{2m_p} [-i\hbar \nabla_p - \frac{e_p}{c} \mathbf{a}_p(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)]^2. \quad (3.45)$$

Esta Hamiltoniana determina a evolução do sistema através da equação de Schrödinger

$$i\hbar \partial_t \Psi(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = H \Psi(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (3.46)$$

Através de uma transformação de gauge (singular) podemos remover a interação da Hamiltoniana. Antes, note que o potencial vetor, Eq. (3.41), pode ser escrito como um gradiente introduzindo a variável angular θ

$$a_p^i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = -\frac{1}{2\pi\kappa} \partial_i^p \sum_{q \neq p} \theta_{pq} \, tg \theta_{pq} = \frac{y_p - y_q}{x_p - x_q}. \quad (3.47)$$

Então efetuamos a transformação

$$a_p^i \longrightarrow a_p'^i = a_p^i + \partial_i \Lambda_p \equiv 0 \iff a_p^i = -\partial_i \Lambda_p, \quad (3.48)$$

de onde, usando a Eq. (3.47), concluímos

$$\Lambda_p = \frac{1}{2\pi\kappa} \sum_{q \neq p} e_q \theta_{pq}. \quad (3.49)$$

É sabido que esta transformação de gauge implica numa transformação unitária sobre a função de onda e os observáveis,

$$\Psi \longrightarrow \Psi^0 = \exp[i\Theta] \Psi, \quad (3.50)$$

$$H \longrightarrow H^0 = \exp[-i\Theta] H \exp[i\Theta], \quad (3.51)$$

Definimos

$$\Theta \equiv \sum_{p=1}^N \frac{e_p}{\hbar c} \Lambda_p = \sum_{p < q}^N \nu_{pq} \theta_{pq}. \quad (3.52)$$

e introduzimos novamente a quantidade $\nu = \frac{e_p e_q}{ch\kappa}$ definida no capítulo anterior.

A nova função de onda Ψ^0 é governada pela Hamiltoniana 'livre' H^0 ,

$$i\hbar\partial_t\Psi^0(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = H^0\Psi^0(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (3.53)$$

Explicitamente, esta Hamiltoniana é

$$H^0 = e^{-i\Theta} H e^{i\Theta} = \sum_{p=1}^N -\frac{\hbar^2}{2m_p} \nabla_p^2. \quad (3.54)$$

Em princípio, a função de onda Ψ é univalente, porém o objeto Θ é multivalente como pode-se ver da sua definição (3.52). Logo, Ψ^0 deve ser multivalente. Ou seja, embora H^0 seja a soma de Hamiltonianas de uma partícula livre, Ψ^0 não pode ser escolhida como o produto de funções de onda de uma partícula livre (ondas planas) pois Ψ^0 satisfaz condições de contorno complicadas. É o preço para deixar a Hamiltoniana sem interação. Em resumo, o *espaço de Hilbert* para N partículas carregadas interagindo com um campo de Chern-Simons não é a soma (direta) dos espaços de Hilbert de cada uma das partículas. Este resultado é crucial como veremos mais tarde. a estatística do sistema sofre alteração.

Na *representação holomórfica* [20] a função de onda Ψ^0 ganha uma forma muito interessante e que sugere uma generalização. Introduzimos as variáveis complexas

$$\mathbf{r}_p = (x_p, y_p) \longrightarrow z_p = x_p + iy_p \in \mathbb{C}, \quad (3.55)$$

$$\theta_{pq} = tg^{-1} \frac{y_p - y_q}{x_p - x_q} \implies z_p - z_q = |z_p - z_q| \exp[i\theta_{pq}]. \quad (3.56)$$

Note que a exponencial que aparece na transformação unitária pode ser reescrita

$$\exp[i\Theta] = \exp\left[i \sum_{p < q} \nu_{pq} \theta_{pq}\right] = \prod_{p < q}^N [\exp(i\theta_{pq})]^{\nu_{pq}}. \quad (3.57)$$

Usando as variáveis complexas da Eq. (3.56), este resultado ainda pode ser escrito como

$$\exp[i\Theta] = \prod_{p < q}^N \left[\frac{z_p - z_q}{|z_p - z_q|} \right]^{\nu_{pq}}. \quad (3.58)$$

Finalmente, podemos escrever a função de onda Ψ^0 na representação holomórfica

$$\Psi^0(\mathbf{r}) = e^{i\Theta} \Psi(\mathbf{r}) = \exp[i \sum_{p < q} \nu_{pq} \theta_{pq}] = \prod_{p < q}^N [\exp(i\theta_{pq})]^{\nu_{pq}} \Psi(\mathbf{r}), \quad (3.59)$$

Ou,

$$\Psi^0(z, \bar{z}) = \prod_{p < q}^N \left[\frac{z_p - z_q}{|z_p - z_q|} \right]^{\nu_{pq}} \Psi(z, \bar{z}) = \prod_{p < q}^N (z_p - z_q)^{\nu_{pq}} \frac{\Psi(z, \bar{z})}{|z_p - z_q|^{\nu_{pq}}}. \quad (3.60)$$

A forma desta função de onda sugere a seguinte generalização

$$\Psi^0(z, \bar{z}) \equiv \prod_{p < q}^N (z_p - z_q)^{\nu_{pq}} f(z, \bar{z}), \quad (3.61)$$

onde f é uma função univalente. Um exemplo deste tipo de função de onda aparece no *Efeito Hall Quântico Fracionário* (FQHE), com

$$f(z, \bar{z}) = \prod_p \exp\left[-\frac{1}{4} \frac{|z_p|^2}{l_0^2}\right] = \exp\left[-\frac{1}{4} \sum_p \frac{|z_p|^2}{l_0^2}\right]. \quad (3.62)$$

Aqui $l_0^2 = \frac{\hbar c}{eB}$ é chamado de *comprimento magnético* e constitui uma escala fundamental do sistema. Esta função de onda foi postulada por R. Laughlin [21] para descrever o FQHE, baseado em certas propriedades fundamentais do fenômeno. Esta função é dada por

$$\Psi^0(z, \bar{z}) = \prod_{p < q}^N (z_p - z_q)^{\nu_{pq}} \exp\left[-\frac{1}{4} \sum_p \frac{|z_p|^2}{l_0^2}\right], \quad (3.63)$$

e hoje é conhecida como *Função de Onda de Laughlin*.

3.8 Simetrias

A uma transformação infinitesimal nas variáveis da matéria,

$$\mathbf{r}_p(t) \longrightarrow \mathbf{r}_p(t) + \delta \mathbf{r}_p(t, \mathbf{r}_p), \quad (3.64)$$

é associado um difeomorfismo do espaço-tempo,

$$\delta x^\nu = -g^\nu(x), \quad (3.65)$$

assumindo que as variáveis de campo transformam-se por uma *derivada de Lie* [22],

$$\delta A_\mu = g^\nu \partial_\nu A_\mu + \partial_\mu g^\nu A_\nu = g^\nu F_{\nu\mu} + \partial_\mu (g^\nu A_\nu). \quad (3.66)$$

O termo de Chern-Simons fica invariante sob a transformação (3.66) e a Lagrangiana C-S fica quase-invariante,

$$\delta L_{CS} = \frac{\kappa}{2c} \frac{d}{dt} \int d^2x g^0 \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha A_\beta A_\gamma. \quad (3.67)$$

A Lagrangiana de interação transforma-se conforme

$$\begin{aligned} \delta L_{in} = & - \sum_{p=1}^N e_p [(\delta r_p^i \partial_i + g^\mu \partial_\mu) A_0(\mathbf{r}_p) + \frac{dg^0}{cdt} A_0(\mathbf{r}_p) \\ & + \frac{v_p^i}{c} (\delta r_p^j + g^\mu \partial_\mu) A_i(\mathbf{r}_p) + (\frac{d}{cdt} \delta r_p^i + \frac{d}{cdt} g^i) A_i(\mathbf{r}_p)]. \end{aligned} \quad (3.68)$$

E, finalmente, para a Lagrangiana das partículas, temos

$$\delta L_M = \sum_{p=1}^N m_p \mathbf{v}_p \cdot \frac{d\delta \mathbf{r}_p}{dt}. \quad (3.69)$$

Agora consideramos várias transformações de simetria, para as quais δL_{in} e δL_M são derivadas totais,

$$\delta L_M + \delta L_{in} = \frac{dX}{dt}, \quad (3.70)$$

e calculamos as correspondentes constantes de movimento, usando a equação

$$C = \int d^2x \frac{\partial L}{\partial \dot{A}} \cdot \delta A + \sum_{p=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_p} \cdot \delta \mathbf{r}_p - \frac{\kappa}{2c} \int d^2x g^0 \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha A_\beta A_\gamma - X, \quad (3.71)$$

onde o último termo vem da equação (3.70), e o penúltimo termo vem da Eq. (3.67). Calculando as derivadas explicitamente obtemos

$$C = \sum_{p=1}^N [m_p \mathbf{v}_p + \frac{e_p}{c} A(\mathbf{r}_p)] \cdot \delta \mathbf{r}_p + \frac{\kappa}{c} \int d^2x g^\mu A_\mu B - X. \quad (3.72)$$

Simetrias de translação e rotação

Para translação e rotação das coordenadas r_p tomamos

$$\delta r_p^i = a^i \longrightarrow \text{translação} , \quad (3.73)$$

$$\delta r_p^i = -\varepsilon^{ij} r_p^j \longrightarrow \text{rotação} . \quad (3.74)$$

Para o difeomorfismo infinitesimal g^μ definimos um tri-vetor de componente temporal nula (pois o tempo não é parametrizado), e as componentes espaciais iguais a $-\mathbf{r}_p$,

$$g^\mu(x) = (0, -a^i) \longrightarrow \text{translação} , \quad (3.75)$$

$$g^\mu(x) = (0, \varepsilon^{ij} x^j) \longrightarrow \text{rotação} . \quad (3.76)$$

Então o potencial de gauge transforma-se sob rotações e translações como

$$\delta A_\mu(t, \mathbf{x}) = -a^i \partial_i A_\mu(t, \mathbf{x}) \longrightarrow \text{translação} , \quad (3.77)$$

$$\delta A_0(t, \mathbf{x}) = -\varepsilon^{jk} x^j \partial_k A_0(t, \mathbf{x}), \quad (3.78)$$

$$\delta A_i(t, \mathbf{x}) = -\varepsilon^{jk} x^j \partial_k A_i(t, \mathbf{x}) - \varepsilon^{ij} A_j(t, \mathbf{x}) \longrightarrow \text{rotação} . \quad (3.79)$$

Para estas transformações L_M e L_{in} são invariantes, i.e., $X = 0$ na Eq.(3.70). Logo, usando a Eq.(3.72) encontramos as constantes de movimento das translações, $\mathbf{P}$, e das rotações, J ,

$$\mathbf{P} = \sum_{p=1}^N \left[m_p \mathbf{v}_p + \frac{e_p}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_p) \right] + \frac{\kappa}{c} \int d^2 \mathbf{x} \mathbf{A} B = \sum_{p=1}^N \mathbf{p}_p + \frac{\kappa}{c} \int d^2 \mathbf{x} \mathbf{A} B, \quad (3.80)$$

$$J = \sum_{p=1}^N \mathbf{r}_p \times \mathbf{A}_p + \frac{\kappa}{c} \int d^2 \mathbf{x} (\mathbf{x} \times \mathbf{A}) B. \quad (3.81)$$

O último termo destas fórmulas é a contribuição do termo de Chern-Simons, e é nisto que difere do seu correspondente quando o campo é externo, ver Eq.(2.43). Vimos que quando o campo é

externo os autovalores do momento angular são convencionais, i.e., são múltiplos inteiros de $\hbar$ [23]. Ao contrário, quando o campo de gauge obedece uma dinâmica de Chern-Simons aparece esta contribuição adicional no momento angular, alterando os autovalores. Estes resultados podem ser reduzidos usando o vínculo (3.19) que tem por efeito remover todas as contribuições do campo, tanto aqueles que vêm do termo de Chern-Simons como também da interação ,

$$\mathbf{P} = \sum_{p=1}^N m_p \mathbf{v}_p, \quad (3.82)$$

$$\mathbf{J} = \sum_{p=1}^N m_p \mathbf{r}_p \times \mathbf{v}_p. \quad (3.83)$$

Contudo, note que $m_p \mathbf{v}_p$ não é momento canônico, e portanto, os autovalores de $\mathbf{J}$ não são inteiros. Este resultado será importante quando estudarmos a estatística do sistema. Finalmente, estas constantes de movimento satisfazem a *álgebra Euclidiana*

$$[P^i, P^j] = 0, \quad (3.84)$$

$$[J, P^i] = i\hbar \epsilon^{ij} P^j, \quad (3.85)$$

cujos comutadores são calculados usando os comutadores fundamentais.

Simetrias conformes

Agora introduzimos uma reparametrização temporal como em (2.20) e (2.22),

$$\delta_f = -f(t), \quad \delta_f \mathbf{r}_p(t) = f(t) \mathbf{v}_p(t) + \epsilon \dot{f}(t) \mathbf{r}_p, \quad (3.86)$$

e o difeomorfismo infinitesimal associado a ele

$$g_f^\mu(x) = [cf(t), -\epsilon \dot{f}(t)x^i]. \quad (3.87)$$

Da expressão geral (3.68) encontramos

$$\delta_f L_{in} = \frac{d}{dt}(f L_{in}), \quad (3.88)$$

que coincide com o resultado do problema com campo externo, i.e., a interação fica invariante por reparametrização temporal, com as coordenadas das partículas transformando-se com peso ϵ arbitrário. Também como anteriormente a Lagrangiana da matéria transforma-se com uma derivada total somente para as transformações conformes, com $f = 1, t, t^2$, e peso $\epsilon = -\frac{1}{2}$,

$$\delta_f L_M = \frac{d}{dt} [f L_M - \frac{1}{4} \ddot{f} \sum_{p=1}^N m_p r_p^2]. \quad (3.89)$$

Usando a Eq.(3.71) as constantes de movimento são

$$\begin{aligned} C_f = & \sum_{p=1}^N [\frac{1}{2} m_p v_p^2 f - \frac{1}{4} \dot{f} m_p \frac{dr_p^2}{dt} + \frac{1}{4} \ddot{f} m_p r_p^2] \\ & + \int d^2 x A_0 (\kappa B + \rho) - \frac{1}{2c} \dot{f} \int d^2 x A \cdot x (\kappa B + \rho). \end{aligned} \quad (3.90)$$

Aqui de novo desaparecem as contribuições do campo quando é imposto o vínculo, levando a uma generalização daquele obtido no capítulo anterior para uma única partícula num campo externo,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N m_p v_p^2, \quad (3.91)$$

$$D = tH - \frac{1}{4} \sum_{p=1}^N m_p (\mathbf{r}_p \cdot \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{r}_p), \quad (3.92)$$

$$K = -t^2 H + 2tD + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N m_p r_p^2. \quad (3.93)$$

Neste caso H coincide com a Hamiltoniana (3.45) e estes geradores novamente satisfazem a álgebra $SO(2,1)$, como pode ser verificado usando as relações de comutação fundamentais.

3.9 Sistema de duas partículas

Com a finalidade de ilustrar melhor estes resultados, agora passamos a estudar o caso de $N = 2$ [24]. A Hamiltoniana (3.45) fica explicitamente

$$H = \frac{1}{2m_1} [p_1 - \frac{e_1}{c} \mathbf{a}_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)]^2 + \frac{1}{2m_2} [p_2 - \frac{e_2}{c} \mathbf{a}_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)]^2, \quad (3.94)$$

onde os potenciais são dados pela Eq.(3.41),

$$a_1^i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv a_1^i(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{e_2}{2\pi\kappa} \varepsilon^{ij} \frac{r_1^j - r_2^j}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}, \quad (3.95)$$

$$a_2^i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv a_2^i(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{e_2}{2\pi\kappa} \varepsilon^{ij} \frac{r_1^j - r_2^j}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}. \quad (3.96)$$

É conveniente introduzir aqui as coordenadas do *centro de massa* e as *relativas*

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (3.97)$$

Nestas coordenadas a Hamiltoniana fica

$$H = \frac{P^2}{2M} + \frac{1}{\mu}(\mathbf{p} - \mathbf{a})^2, \quad \mu \equiv \text{massa reduzida}, \quad (3.98)$$

onde redefinimos o potencial como sendo

$$a^i \equiv \frac{1}{Mc} [e_1 m_2 \mathbf{a}_1 - e_2 m_1 \mathbf{a}_2] = \frac{e_1 e_2}{2\pi c \kappa} \varepsilon^{ij} \frac{\mathbf{r}^j}{r^2}. \quad (3.99)$$

Da mesma forma que em (3.47), podemos escrever

$$a^i(\mathbf{r}) = \frac{e_1 e_2}{2\pi c \kappa} (-\partial_i \theta). \quad (3.100)$$

Efetuamos uma transformação de gauge (singular) para eliminar a interação da Hamiltoniana e a função de gauge correspondente é simplesmente

$$\Lambda = \frac{e_1 e_2}{2\pi c \kappa} \theta = \hbar \nu \theta, \quad \nu = \frac{e_1 e_2}{c \hbar \kappa}. \quad (3.101)$$

A função de onda e a Hamiltoniana sofrem a transformação unitária

$$\Psi(t; \mathbf{r}) \longrightarrow \Psi^0(t; \mathbf{r}) = e^{i\nu\theta} \Psi(t; \mathbf{r}) \quad (3.102)$$

$$H \longrightarrow H^0 = e^{-i\nu\theta} H e^{i\nu\theta}. \quad (3.103)$$

Note que, na Hamiltoniana, apenas o termo *relativo* carrega a interação e o termo de CM move-se livremente. Então a função de onda total fatora-se,

$$\Psi(t; \mathbf{R}, \mathbf{r}) = \exp\left[\frac{i}{\hbar} \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}\right] \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (3.104)$$

Podemos simplesmente fixar $\mathbf{P} = 0$ e considerar apenas a dinâmica da parte *relativa*, e cuja função de onda satisfaz

$$i\hbar\partial_t\Psi(t;\mathbf{r}) = H\Psi(t;\mathbf{r}) = \frac{1}{2\mu}(\mathbf{p} - \mathbf{a})^2\Psi(t;\mathbf{r}), \quad (3.105)$$

$$i\hbar\partial_t\Psi^0(t;\mathbf{r}) = H^0\Psi^0(t;\mathbf{r}) = \frac{1}{2\mu}\mathbf{p}^2\Psi^0(t;\mathbf{r}). \quad (3.106)$$

Devido a forma da Hamiltoniana podemos fatorar a função de onda numa parte temporal e numa espacial,

$$\Psi(t;\mathbf{r}) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}Et\right]\Psi_E(\mathbf{r}), \quad H\Psi_E(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\mu}(\mathbf{p} - \mathbf{a})^2\Psi_E(\mathbf{r}) = E\Psi_E. \quad (3.107)$$

Da Eq.(3.103) vemos que esta autofunção satisfaz

$$\Psi_E(\mathbf{r}) = e^{-i\nu\theta}\Psi_E^0(\mathbf{r}), \quad H^0\Psi_K^0 = \frac{\hbar^2 K^2}{2\mu}\Psi_K^0. \quad (3.108)$$

A função $\Psi_E(\mathbf{r})$ é univalente, i.e., em coordenadas polares, por exemplo, deve satisfazer a seguinte condição de contorno

$$\Psi_E(r, \theta) = \Psi_E(r, \theta + 2\pi) \Rightarrow \Psi_E^0(r, \theta) = e^{-i2\pi\nu}\Psi_E^0(r, \theta + 2\pi). \quad (3.109)$$

Ou seja, a nova função de onda satisfaz uma condição de contorno não trivial. A rotação de 2π corresponde a intercambiar as partículas duas vezes consecutivas, depois da qual, a função de onda ganha a fase $e^{-2\pi i\nu}$. Se definirmos a *estatística do sistema* a partir da fase resultante na função de onda total devido ao intercâmbio de duas partículas ², então o parâmetro estatístico S deve ser metade da fase em (3.109)

$$2\pi S = \pi\nu \Rightarrow S = \frac{\nu}{2} = \frac{e_1 e_2}{2\hbar c \kappa}. \quad (3.111)$$

²Isto é,

$$\Psi(\dots, q_i, \dots, q_k, \dots) = e^{2\pi i S} \Psi(\dots, q_k, \dots, q_i, \dots), \quad (3.110)$$

onde, por exemplo, $S = 0$ para *bósons* e $S = \frac{1}{2}$ para *férmions*. Aqui, genericamente, q_k denota o conjunto de todos os números quânticos que caracterizam a k -ésima partícula.

Por exemplo, para $e_1 = e_2$

$$\frac{e^2}{2ch\kappa} = \frac{\kappa\Phi^2}{2ch}. \quad (3.112)$$

Aqui fica claro que o spin depende do parâmetro κ que vem do termo de Chern-Simons. O momento angular relativo é

$$J = \mathbf{r} \times \mu \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} - \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} + \frac{e^2}{2\pi c \kappa}. \quad (3.113)$$

Este operador atua sobre a função de onda univalente do modo usual,

$$\Psi(r, \theta) = R(r)Y_l(\theta), \quad J\Psi(r, \theta) = R(r)J e^{il\theta} = (\hbar l + \frac{e^2}{2\pi c \kappa})\Psi(r, \theta), \quad (3.114)$$

onde l é um número inteiro e $\mathbf{p}$ atua como $-i\hbar\nabla$. O primeiro termo descreve o momento angular orbital e o segundo o momento angular de spin. Mas como este é um valor relativo, para achar o spin individual devemos dividir por dois

$$S = \frac{e^2}{2ch\kappa} = \frac{\nu}{2}, \quad (3.115)$$

o qual coincide com aquele da Eq.(3.111). Quando a interação é removida da Hamiltoniana, o momento angular se transforma para J^0 ,

$$J \longrightarrow J^0 = e^{-i\nu\theta} J e^{i\nu\theta} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = -i\hbar\partial_\theta. \quad (3.116)$$

De sua forma poderíamos concluir que seu autovalor é inteiro, porém lembre que este novo operador atua sobre a nova função de onda Ψ^0 que é multivalente,

$$J^0\Psi^0 = -i\hbar\partial_\theta\Psi^0 = \hbar(l + \nu)\Psi^0, \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (3.117)$$

Isto coincide novamente com os resultados anteriores. Analizemos estes resultados mais cuidadosamente. Obtivemos uma solução não local para os campos de Chern-simons ($A^0 \equiv 0$ e A^i dados pela Eq.(3.41)), e com isto formulamos uma teoria efetiva. Vimos que esta solução para o potencial determina uma soma de vórtices magnéticos localizados nas posições das partículas, ver Eq.(3.42). O fluxo magnético destes vórtices está vinculado com as cargas das partículas

localizadas naqueles mesmos pontos, ver Eq.(3.7). Logo, não seria correto imaginar a partícula carregada e o vórtice magnético como sendo objetos separados. Neste sentido, a teoria (3.45) descreve um sistema formado por N tais objetos compostos interagindo entre si através do potencial vetor. Vimos que existem dois modos de descrever este sistema:

- Com uma Hamiltoniana que carrega a interação e determina a evolução da função de onda univalente, ver por ex. (3.45) ou (3.105);

- Com uma Hamiltoniana sem interação (a qual é removida por uma transformação de gauge singular) que determina a evolução de uma função de onda multivalente que satisfaz condições de contorno complicadas.

A primeira descrição chamaremos de *usual*. Adotando a definição de estatística introduzida anteriormente, concluímos que a estatística deste sistema é a usual pois a função de onda é univalente o que, por sua vez, determina uma fase bosônica ou fermiônica para o intercâmbio de dois destes objetos compostos. Porém, calculamos o momento angular explicitamente para o caso de duas partículas e concluímos que resulta um spin anômalo (ou fracionário) que interpola entre bósons e férmions, ver Eq. (3.115).

A segunda descrição chamaremos de *aniônica*. Aqui, a estatística do sistema é não usual (uma *estatística fracionária*), como pode-se ver em (3.111), que essencialmente se deve ao fato da função de onda ser univalente. Como na outra descrição, as partículas apresentam spin fracionários, ver Eq. (3.117).

Em resumo, temos duas descrições que deveriam dar os mesmos resultados físicos, mas não é o caso como acabamos de ver no parágrafo anterior. Veremos que para consertar este paradoxo devemos definir mais cuidadosamente o conceito de *estatística* em duas dimensões espaciais. No espaço tridimensional não aparecem ambigüidades nesta definição. Este é o assunto da seguinte seção. Por outro lado, estes objetos compostos de spin fracionário são conhecidos na literatura como *anyons* [25], por razões óbvias. O modelo de anyons proporciona uma explicação natural do FQHE que foi descoberto experimentalmente em 1982. Também se especulou sobre uma *supercondutividade aniônica* [26] como uma provável teoria para explicar

supercondutividade a altas temperaturas, mas os resultados experimentais mostraram a sua inviabilidade.

3.10 Estatística fracionária

Na seção anterior vimos que em duas dimensões é possível obter uma estatística fracionária impondo condições de contorno complicadas sobre a função de onda do sistema. Aqui mostramos que a possibilidade de spin e estatística fracionários é consequência da estrutura do *espaço de configuração* das partículas idênticas em duas dimensões [27].

O spin é o número quântico correspondente ao momento angular intrínseco e, portanto, rotula as partículas. No espaço tridimensional as componentes do spin satisfazem a álgebra de Lie $SO(3)$,

$$[S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.118)$$

Estas relações de comutação impõem um vínculo sobre os valores do spin s de modo que as partículas em $(3 + 1)$ -dimensões apresentam spin inteiro ou semi-inteiro, sem outras possibilidades.

Porém, em duas dimensões (espaciais!) o *grupo das rotações* é o $SO(2)$, que é abeliano e possui um único gerador. Existe um único eixo de rotação que é perpendicular ao plano. Portanto, o spin se refere à única componente S_3 , que obviamente não satisfaz álgebra alguma e em analogia com o caso tridimensional é natural esperar que não exista nenhum vínculo sobre os autovalores de S_3 deixando aberta a possibilidade para um spin arbitrário. Por fim, em uma dimensão espacial não existe um eixo de rotação e portanto não é possível introduzir o conceito de spin.

A *amplitude* para uma configuração, por exemplo, de N partículas localizadas em $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$, é uma função de onda $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$. Denotemos por

$$\Psi' \equiv \Psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (3.119)$$

a amplitude que difere por uma única permutação. O fato das partículas serem idênticas

significa que a densidade de probabilidade deve ficar inalterada sob a permutação

$$|\Psi'|^2 = |\Psi|^2 \iff \Psi' = P\Psi, \quad P = e^{i\phi}, \quad (3.120)$$

ou seja, P deve ser simplesmente uma fase. Efetuando uma segunda permutação

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \longrightarrow \Psi' = \Psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \longrightarrow \Psi'' = P^2\Psi = \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (3.121)$$

$$\implies P^2 = 1 \iff P = \pm 1. \quad (3.122)$$

Logo, para partículas idênticas existem apenas duas possíveis funções de ondas, uma simétrica ($p = 1$) e uma antissimétrica ($p = -1$). Coincidentemente, na natureza encontramos também dois tipos de partículas cada uma das quais satisfazem as propriedades acima:

- bosons $\longrightarrow P = 1$.
- fermions $\longrightarrow P = -1$.

É natural concluir que a existência desses dois tipos de funções de ondas explica o fato de encontrarmos na natureza estes dois tipos de partículas somente. Contudo, esta análise é incompleta. Por exemplo, será que a trajetória seguida pelas partículas até efetuar a permutação não influencia na estatística do sistema?. Usualmente, no processo de permutação, somente consideramos os estados inicial e final sem nos preocuparmos com as trajetórias seguidas pelas partículas. Na verdade, como veremos no espaço tridimensional, não existem motivos para preocupação. Porém, em duas dimensões, a fase que aparece quando as duas partículas são transportadas (adiabaticamente) ao longo de um caminho até efetuar a permutação é determinante para definir a estatística. Aqui podemos pensar também no sentido de Berry [28], ou seja, no transporte adiabático da função de onda ao longo de uma trajetória no espaço dos parâmetros. A fase que aparece (*fase de Berry*) depende da própria função de onda e da Hamiltoniana do sistema.

Espaço de configuração de partículas idênticas

Espaço tridimensional Imaginemos duas partículas idênticas se movendo no espaço tridimensional. O espaço de configuração (EC) é determinado pelo conjunto de pares de vetor posição $\{r_1, r_2\}$. A indistinguibilidade das partículas significa que devemos impôr a identificação

$$\{r_1, r_2\} \sim \{r_2, r_1\}, \quad (3.123)$$

ou seja, não podemos afirmar em princípio que uma determinada partícula está em r_1 e a segunda em r_2 , ou vice-versa. Também impomos a condição de rigidez das partículas

$$r_1 \neq r_2, \quad (3.124)$$

para evitar a interseção das trajetórias, de modo que possamos saber se houve ou não intercâmbio. Por conveniência, usamos as coordenadas do centro de massa (CM) e as relativas. Nestas coordenadas, o EC é o conjunto $\{R, r\}$ com $r \neq 0$ (isto vem de $r_1 \neq r_2$) e com r sendo identificado com $-r$ (que vem de $\{r_1, r_2\} \sim \{r_2, r_1\}$). Com estas restrições o EC é representado como

$$C_3 = R \otimes \left[\frac{R^3 - \{0\}}{Z_2} \right]. \quad (3.125)$$

Aqui R^3 denota o espaço Euclideano tridimensional gerado pelo vetor $R = (R_1, R_2, R_3)$, o fator $R^3 - \{0\}$ corresponde ao vetor $r = (r_1, r_2, r_3)$ com a origem isolada, e por último, Z_2 é o grupo *multiplicativo* dos números 1 e -1 . Portanto, o quociente $\frac{R^3 - \{0\}}{Z_2}$ implica na identificação de r com $(-r)$.

Já que estamos interessados em determinar fases ao longo de diversas trajetórias neste EC devemos analisar a equivalência destas trajetórias. O movimento de CM como visto na seção anterior pode ser desprezado. Precisamos apenas classificar (topologicamente) as trajetórias fechadas do fator *relativo*

$$\frac{R^3 - \{0\}}{Z_2} \equiv R \otimes RP^2. \quad (3.126)$$

No último membro introduzimos a notação usada pelos matemáticos para denotar o *espaço real projectivo bidimensional*. Essencialmente, isto significa que este espaço pode ser considerado como o produto de uma reta com uma esfera S^2 , ou seja, pode ser parametrizada por uma quantidade real r e duas angulares, (θ, ϕ) por exemplo, onde o centro da esfera é isolado e os pontos diametralmente opostos (antípodas) são identificados. Para facilitar a visualização consideramos $r = \text{constante}$. O resultado final é uma esfera S^2 com as antípodas identificadas. Agora consideramos três trajetórias fechadas típicas:

- A trajetória fechada da fig. 3.1 que representa o movimento das partículas sem ocorrer intercâmbio. É evidente que esta trajetória fechada pode ser deformada continuamente a um ponto. Quanticamente, a função de onda do sistema não ganha fase alguma ao longo desta trajetória.

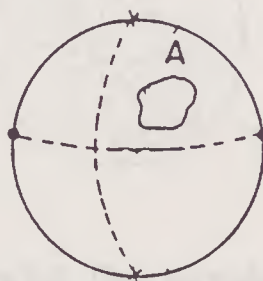


Figura 3.1: Nenhuma permutação .

- A trajetória da fig. 3.2 que conecta as antípodas e como, por definição , estes pontos são identificados entre si, esta trajetória também é fechada e representa um intercâmbio. Porém, desde que estes pontos extremos da trajetória são fixos, é impossível deformá-la continuamente a um ponto. Quanticamente, a função de onda ganha uma fase não trivial ao longo desta trajetória.

- A trajetória da fig. 3.3 que representa dois intercâmbios consecutivos. Também forma uma curva fechada na superfície esférica e claramente pode ser deformada continuamente a um ponto. A função de onda não ganha fase alguma nesta trajetória que é topologicamente

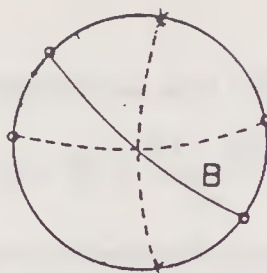


Figura 3.2: *Uma permutação .*

equivalente à trajetória da fig. 3.1 que corresponde a nenhum intercâmbio.

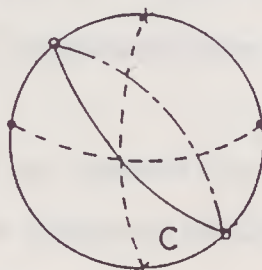


Figura 3.3: *Duas permutações .*

Concluimos então que no EC de duas partículas idênticas em três dimensões existem apenas duas classes de trajetórias fechadas: as que determinam um único intercâmbio e as que não representam intercâmbio algum. Chamemos de η a fase que se deriva ao longo destas trajetórias com as partículas sendo transportadas adiabaticamente (fase de Berry). Da análise destes tipos de trajetórias resulta que se η for a fase correspondente a um único intercâmbio então para a trajetória de dois intercâmbios consecutivos (que são equivalentes !) deve acontecer

$$\eta^2 = 1 \implies \eta = \pm 1, \tag{3.127}$$

o que coincide com (3.122) obtida por permutação direta.

Espaço bidimensional

Em analogia ao espaço tridimensional, aqui o EC é representado por

$$C_2 = \mathbb{R}^2 \otimes \frac{\mathbb{R}^2 - \{0\}}{\mathbb{Z}_2}. \quad (3.128)$$

onde $\mathbb{R}^2$ (o primeiro fator) corresponde ao espaço Euclideano bidimensional. De novo ignoramos o movimento no CM e fixamos a distância relativa entre as partículas $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = \text{constante}$. Nos limitamos a classificar as trajetórias fechadas apenas no setor do movimento relativo, que representamos por

$$\frac{\mathbb{R}^2 - \{0\}}{\mathbb{Z}_2} \equiv \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}P^1, \quad (3.129)$$

de modo que é possível parametrizar por r e θ . Com r fixo o EC é apenas uma circunferência com pontos diametralmente opostos identificados entre si. De novo estudamos três trajetórias fechadas típicas neste setor do EC:

- A trajetória da figura 3.4 que percorre (ida e volta) um segmento da metade da circunferência e obviamente pode ser deformada continuamente a um ponto. Esta trajetória fechada não determina um intercâmbio.

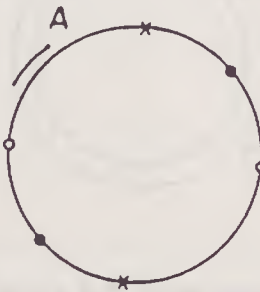


Figura 3.4: Nenhuma permutação .

- A trajetória da fig. 3.5 percorre (somente ida) exatamente uma metade da circunferência. Os extremos desta trajetória são pontos opostos e identificados entre si, daí conclui-se que esta constitui uma trajetória fechada e representa um intercâmbio ($\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$). Mas como estes pontos são fixos esta curva não é deformável continuamente a um ponto.

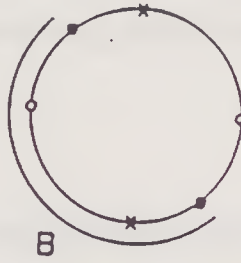


Figura 3.5: Uma permutação .

- A trajetória da fig. 3.6 é obviamente fechada e representa dois intercâmbios ($r \rightarrow -r \rightarrow r$). Porém, a novidade é que, diferentemente do caso tridimensional, esta trajetória não é deformável a um ponto e portanto não é equivalente ao primeiro caso. Além disto, quaisquer trajetória fechada (ou $\frac{n}{2}$ loop, n inteiro) são não equivalentes para n 's diferentes, e então existe um número infinito de classes de trajetórias não equivalentes, cada uma das quais representa um intercâmbio, dois, etc.

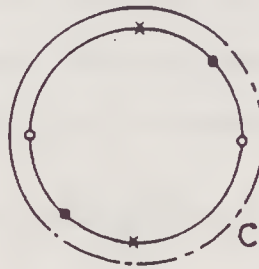


Figura 3.6: Duas permutações .

Sabemos que a densidade de probabilidade deve ficar inalterada sob qualquer um destes intercâmbios, então a fase η (que corresponde a um intercâmbio) é simplesmente

$$\eta = \exp[i\theta], \quad (3.130)$$

onde θ é chamado de *parâmetro estatístico* e seu domínio é arbitrário [29]. Finalmente, se η é associado a um intercâmbio, η^2 é associado a dois, ..., η^k a k permutações (ou $\frac{k}{2}$ loops na figura

acima). Isto explica porquê em duas dimensões podemos ter qualquer estatística, que particularmente para $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ se reduz às estatísticas bosônica e fermiônica, respectivamente.

Grupo de homotopia

Vimos que a diferença fundamental entre o EC em dimensão espacial três e dimensão espacial dois surge quando a origem é removida, o que faz com que o EC em 2-D fique *multiplamente conexo* e em 3-D continua *simplesmente conexo*. Por outro lado, caminhos fechados em *espaços multiplamente conexos* são classificados em *classes de equivalências* sendo que estas classes são os elementos do (primeiro) *grupo de homotopia*, Π_1 [30]. Cada elemento deste grupo, i.e., cada classe, contém trajetórias que são deformáveis entre si. Por exemplo, no caso do EC para duas partículas idênticas em 2-d, quaisquer $\frac{k}{2}$ loop pertence à classe $[\alpha_k]$. Neste caso, a composição do grupo é definida por adição :

$$[\alpha_k][\alpha_{k+1}] = [\alpha_{k+k+1}] = [\alpha_{2k+1}], \quad (3.131)$$

que significa: a classe que contém as trajetórias de k -permutações vezes a classe que contém as trajetórias de $k + 1$ -permutações resulta na classe que contém as trajetórias de $2k + 1$ -permutações. Daqui fica claro que $\Pi_1(C_2)$ é isomórfico ao grupo dos inteiros sob adição ,

$$\Pi_1(C_2) = \Pi_1\left(\frac{\mathbf{R} - \{0\}}{\mathbf{Z}_2}\right) = \Pi_1(RP^1) \sim \mathbf{Z}. \quad (3.132)$$

Cada $\frac{k}{2}$ -loop é uma trajetória fechada ao longo da qual a função de onda ganha uma fase do tipo η^k , $k \in \mathbf{Z}$.

Em 3-D, o grupo fundamental é isomórfico ao *grupo cíclico de ordem dois*,

$$\Pi_1(C_3) = \Pi_1(RP^2) \sim \mathbf{Z}_2. \quad (3.133)$$

O grupo $\mathbf{Z}_2$ possui apenas dois elementos, ou seja, para este EC existem apenas duas classes de trajetórias fechadas e para cada uma delas a função de onda ganha uma das fases: fermiônica ou bosônica.

Estes resultados são generalizados imediatamente. Por exemplo, para duas partículas idênticas em D-dimensões o EC é

$$C_D = \mathbb{R}^D \otimes \frac{\mathbb{R}^D - \{0\}}{\mathbb{Z}_2} = \mathbb{R}^D \otimes (\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}P^{D-1}). \quad (3.134)$$

$$\implies \Pi_1(C_D) = \Pi_1(\mathbb{R}P^{D-1}) = \mathbb{Z}_2, \quad D \geq 3. \quad (3.135)$$

Para um número N arbitrário de partículas idênticas temos:

- Para $D \geq 3$ o EC quebra em $N!$ partes correspondentes a todas as permutações possíveis entre as partículas. Ou seja o *grupo fundamental* deste espaço é isomorfo ao *grupo de permutação* S_N de ordem N,

$$C_D = \mathbb{R}^{ND} \otimes \frac{\mathbb{R}^{ND} - \{0\}}{\mathbb{Z}_2}, \quad \Pi_1(C_D) = S_N, \quad D \geq 3. \quad (3.136)$$

Existem apenas duas representações unidimensionais deste grupo, a saber, a *trivial* e a representação que associa $(+1)$ a permutações pares e (-1) a permutações ímpares. Logo, estas representações determinam a existência da duas fases usuais. O S_N também possui representações de dimensões mais altas que são implementadas fisicamente apenas quando existem simetrias internas adicionais. Tais possibilidades são conhecidas como *para-estatísticas* (e não deve ser confundida com estatística fracionária);

- Para $D = 2$, o EC para N partículas quebra em infinitas partes. O grupo fundamental é um grupo infinito não abeliano, chamado *grupo de trança* (braid group),

$$\Pi_1(C_2) = B_N. \quad (3.137)$$

A representação unidimensional deste grupo é a única que nos interessa (na seguinte seção veremos a razão). As representações de dimensão mais alta ainda estão sendo pesquisadas e aqui não nos ocuparemos delas.

Grupo de trança

Em $D = 2$ podemos representar pictoricamente [20] uma classe de equivalências, i.e., um elemento do grupo fundamental, por um conjunto de curvas entrelaçadas (uma trança).

Para N partículas esta trança é formada por N curvas em $(2 + 1)$ dimensões, fig. 3.7, as quais nunca se intersectam e tal que as posições finais das N partículas constituam permutações das posições iniciais (lembre que estes pontos iniciais e finais são identificados entre si através da ação do grupo S_N).

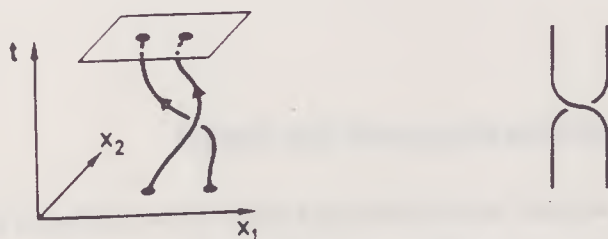


Figura 3.7: Trança de duas partículas e a sua projeção no plano.

Como uma trança representa uma classe inteira de trajetórias possíveis, ela pode ter várias versões equivalentes, de modo que uma seja deformável na outra com a restrição de não mexer os pontos extremos e sem deixar passar uma curva através da outra.

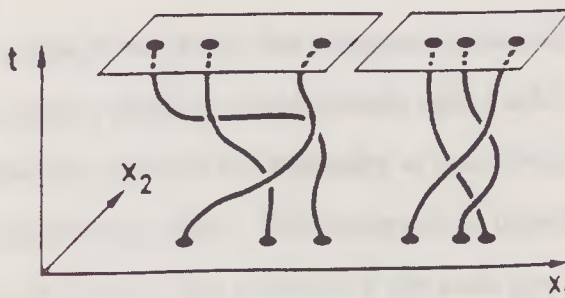


Figura 3.8: Tranças equivalentes.

Ao contrário, tranças que representam classes não equivalentes não são deformáveis entre si, no sentido acima explicado.

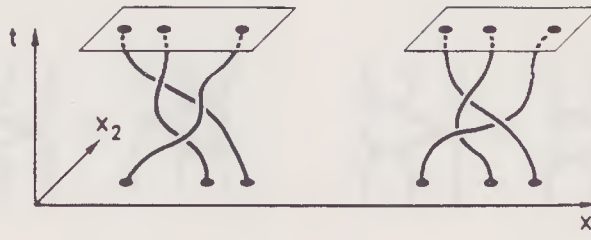


Figura 3.9: Tranças não equivalentes.

Podemos idealizar ainda mais e projetar estas tranças no plano formado pelo eixo temporal e uma das coordenadas espaciais. Para facilitar a interpretação destas tranças no plano, determinamos algumas convenções :

- As posições iniciais das cordas são todas diferentes, $x_a < \dots < x_N$;
- Em cada instante há no máximo uma intersecção de cordas;
- As cordas são sempre paralelas ao eixo do tempo (ou algum outro parâmetro) com exceção nas vizinhanças de uma intersecção, e com valores iniciais x_i sendo permutados;
- Numa intersecção, a corda que está por cima corresponde a uma curva tridimensional com menor ordenada y .

Por exemplo, a projeção no plano das tranças acima estão nas figs.3.8 e 3.9

Cada trança (no plano) pode ser caracterizada agora pelo conjunto das suas intersecções que podem ser denotadas pela ação de um operador σ_i que efetua o intercâmbio das cordas i e $i + 1$, com a corda da esquerda por cima. Pelo contrario, o intercâmbio com a corda da direita por cima define a operação inversa, que portanto é efetuado por σ^{-1} , ver fig. 3.11.

Da fig. 3.10 concluímos a seguinte relação para estes operadores,

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}. \quad (3.138)$$

Esta relação é conhecida como *equação de Yang-Baxter*. Da fig. 3.12 concluímos que

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i - j| \geq 2. \quad (3.139)$$



Figura 3.10: *Projeção no plano x-t*

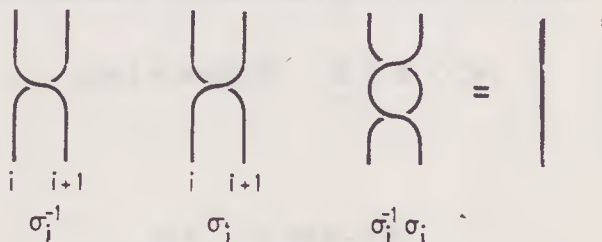


Figura 3.11: *Operadores de intersecção* .

que é a relação de comutação para intersecções não adjacentes. Pode ser provado que realmente não existem mais relações independentes entre os σ 's além destas duas.

Então uma trança é univocamente caracterizada por um produto ordenado de σ 's. Contudo, há diferentes sequências de σ 's que determinam tranças equivalentes.

Agora representemos cada elemento de $\Pi_1(C_2)$, i.e., cada sequência de σ 's, por uma fase η . Esta representação é evidentemente unidimensional. Então a Eq.(3.139) implica em

$$\eta(\sigma_i \sigma_j) = \eta(\sigma_i) \eta(\sigma_j), \quad |i - j| \geq 2, \quad (3.140)$$

ou seja, fases de intercâmbios não adjacentes fatoram-se. A Eq.(3.138) implica na relação

$$\eta(\sigma_i) = \eta(\sigma_j), \quad i, j \text{ arbitrários.} \quad (3.141)$$

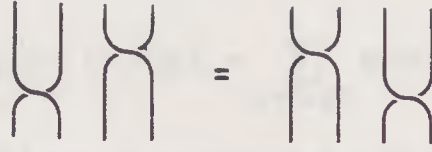


Figura 3.12: *Intersecções que comutam.*

Esta equação nos diz que η é uma fase universal. Portanto, a representação unitária abeliana do grupo de trança é univocamente especificada pela fase universal

$$\eta(\sigma_i) = \exp[i\Phi], \quad 0 \leq \Phi < 2\pi, \quad (3.142)$$

e seu respectivo inverso,

$$\eta(\sigma_i^{-1}) = \exp[-i\Phi]. \quad (3.143)$$

Um elemento genérico do grupo de tranças B_N , por exemplo, $(\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_N})$, com σ_{i_k} valendo genericamente para σ ou σ^{-1} , é representado pela fase,

$$\eta(\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_N}) = \eta(\sigma_{i_1}) \dots \eta(\sigma_{i_N}) = \exp[i\Phi \sum_{k=1}^N \epsilon_k], \quad (3.144)$$

onde ϵ_k é o sinal do k -ésimo operador,

$$\sigma_{i_k} \longrightarrow \epsilon_k = 1, \quad \sigma_{i_k}^{-1} \longrightarrow \epsilon_k = -1. \quad (3.145)$$

Com estes resultados podemos estudar a formulação por integrais de trajetórias e fazer mais explícito o elo entre teorias topológicas e estatísticas fracionária em 2-D.

Integrais de trajetórias

A integral de trajetória sobre espaços multiplamente conexos [20] [32] difere daquela sobre espaços simplesmente conexos em que devemos associar pesos η a diferentes trajetórias

homotopicamente desconexas [33]. O propagador do ponto $q \in C$ ao ponto q' pode ser escrito como uma *integral de trajetórias*, i.e., uma soma de amplitudes parciais K^α que correspondem às trajetórias α que unem os pontos (q, t) e (q', t') ,

$$K(q', t'; q, t) = \langle q', t' | q, t \rangle = \sum_{\alpha \in \Pi_1(C)} \eta(\alpha) K^\alpha(q', t'; q, t), \quad (3.146)$$

onde α rotula os elementos (classes de equivalências) de Π_1 . A amplitude parcial K^α é a integral de trajetória usual, por exemplo, para uma teoria com Lagrangiana L ,

$$K^\alpha(q', t'; q, t) = \int_{q(t) \in \alpha} Dq(t) \exp[i \int_t^{t'} dt_0 L[q(t_0)]], \quad (3.147)$$

com a integração restrita às trajetórias que pertencem à α -ésima classe de homotopia. Existem alguns requerimentos físicos que a soma (3.146) deve satisfazer:

- O módulo do peso η deve ser um: $|\eta| = 1$;
- A amplitude em (3.146) deve satisfazer a propriedade convolutiva,

$$K(q'', t''; q, t) = \int dq'' \langle q'', t'' | q', t' \rangle \langle q', t' | q, t \rangle = \int dq' K(q'', t''; q', t') K(q', t'; q, t), \quad (3.148)$$

onde assumimos que $|q, t\rangle$ seja um conjunto completo de estados. Isto é satisfeito por cada um dos estados K^α separadamente. Daqui concluimos que

$$\eta(\alpha)\eta(\beta) = \eta(\alpha \circ \beta), \quad (3.149)$$

onde α e β são classes de homotopia com pontos extremos comuns, por exemplo,

$$p(ab) \in \alpha, \quad p(bc) \in \beta \implies p(ac) \in \alpha \circ \beta. \quad (3.150)$$

Isto significa que os pesos η determinam uma representação para o grupo $\Pi_1(C_2)$. Este resultado coincide com o da seção anterior onde foi obtido usando os operadores de permutação de tranças (os σ 's). Logo,

$$\eta \equiv \exp[i\Phi \sum_{k=1}^N \epsilon_k], \quad \epsilon = \pm 1. \quad (3.151)$$

Podemos construir uma expressão analítica para estas fases, representando o *sin*al através do ângulo polar relativo das partículas que estão sendo permutadas,

$$\epsilon_i = \frac{\Delta\Theta_i}{\pi}, \quad \Theta = tg^{-1}\frac{y}{x}. \quad (3.152)$$

Substituindo na expressão para η ,

$$\eta(\sigma_k) = \exp\left[i\frac{\Phi}{\pi} \sum_{i < j} \Delta\Theta_{ij}^k\right], \quad \Delta\Theta_{ij}^k = \pi\delta_{i,j}\delta_{j,k+1} \quad (3.153)$$

$$\Rightarrow \eta(\sigma_k) = \exp\left[i\frac{\Phi}{\pi} \sum_{ij} \int dt \frac{d\Theta[x_i - x_j]}{dt}\right]. \quad (3.154)$$

Em geral, para uma classe (trança) α ,

$$\eta(\alpha) = \exp\left[i\frac{\Phi}{\pi} \sum_{ij} \int dt \frac{d\Theta^\alpha[x_i - x_j]}{dt}\right], \quad (3.155)$$

onde,

$$\Theta_{ij} = \Theta(x_i - x_j) = tg^{-1}\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}. \quad (3.156)$$

Finalmente, substituindo este resultado na Eq.(3.146) obtemos o propagador mais geral para espaços multiplamente conexos

$$K(q', t'; q, t) = \int_{q', q} Dq(t_0) \exp\left[i \int_t^{t'} dt_0 \{L(q(t_0)) + \frac{\Phi}{\pi} \sum_{ij} \frac{d\Theta(x_i - x_j)}{dt_0}\}\right], \quad (3.157)$$

onde $q(t)$ é um ponto no EC. Agora fica claro qual é o efeito dos pesos η : é equivalente a adicionar uma *ação topológica* que não altera as equações de movimento, porém é determinante para a estatística do sistema.

A função de onda que evolui com o propagador acima é

$$\Psi(q, t) = \langle q, t | \Psi \rangle = \int dq_0 \langle q, t | q_0, t_0 \rangle \langle q_0, t_0 | \Psi \rangle, \quad (3.158)$$

$$\Rightarrow \Psi(q, t) = \int dq_0 K(q, t; q_0, t_0) \Psi(q_0, t_0), \quad (3.159)$$

e é univalente. A introdução das fases η como pesos das diferentes classes no propagador implica na aparição do termo topológico, como foi afirmado,

$$L_0 \longrightarrow L' = L_0 + \frac{\Phi}{\pi} \sum_{i < j} \frac{d\Theta(x_i - x_j)}{dt}, \quad (3.160)$$

$$K(q', t'; q, t) = \int Dq(t) \exp[i \int_t^{t'} dt_0 L(q(t_0))] \quad (3.161)$$

$$K(q', t'; q', t') = \exp[-i \frac{\Phi}{\pi} \sum_{ij} \Theta_{ij}(t)] K_0(q', t'; q, t) \exp[i \frac{\Phi}{\pi} \sum_{ij} \Theta_{ij}(t)], \quad (3.162)$$

onde Θ é multivalente. Agora podemos definir uma nova função de onda,

$$\Psi_0(q, t) = \exp[-i \frac{\Phi}{\pi} \sum_{ij} \Theta_{ij}(t)] \Psi_0(q, t), \quad (3.163)$$

que satisfaz

$$\Psi_0(q, t) = \int dq_0 K_0(q, t; q_0, t_0) \Psi_0(q_0, t_0). \quad (3.164)$$

De novo, como Θ_{ij} é um objeto multivalente e Ψ univalente, a função de onda Ψ_0 deve ser multivalente e, portanto, satisfaz condições de contorno complicadas. Esta função de onda é exatamente aquela obtida em (3.59) com a identificação

$$\theta_{pq} \longrightarrow \Theta_{ij}, \quad \nu_{pq} \longrightarrow \frac{-\Phi}{\pi}. \quad (3.165)$$

De fato, a Lagrangiana efetiva de (3.44) pode ser escrita como na Eq. (3.160)

$$L_{ef} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N m_p v^2 + \sum_{p < q} (-\nu_{pq}) \frac{d\theta_{pq}}{dt}, \quad (3.166)$$

$$L_{ef} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N m_p v^2 + \frac{d}{dt} \sum_{p < q} (-\nu_{pq}) \theta_{pq}. \quad (3.167)$$

4 Efeito Hall

O efeito Hall quântico (QHE) representa um elo interessante entre campos de gauge, bidimensionalidade e topologia. Em particular, o QHE está relacionado à teoria de Chern-Simons introduzida no capítulo anterior e constitui um tópico recente da física-matemática. O QHE é um caso especial do fenômeno conhecido como efeito Hall, que foi descoberto em 1879 pelo físico americano Edwin H. Hall. O campo magnético exerce força somente sobre as partículas carregadas em movimento. A direção desta força é perpendicular tanto à direção do movimento da partícula como à direção do campo magnético. Se a partícula estiver confinada num plano, a trajetória resultante é uma circunferência cujo raio é inversamente proporcional à intensidade do campo magnético. Quando a partícula carregada é colocada simultaneamente num campo elétrico e num campo magnético a sua trajetória é uma cicloide [11]. Ou seja, a partícula se move numa trajetória circular ao redor do centro de deriva a qual também se move em linha reta. A direção do movimento do centro de deriva é perpendicular às direções dos campos elétrico e magnético. A velocidade do centro de deriva, conhecida como *velocidade de deriva*, é diretamente proporcional à intensidade do campo elétrico e inversamente proporcional à intensidade do campo magnético. Com estas propriedades é possível entender o efeito Hall clássico o qual é estudado na primeira seção deste capítulo. Depois, nas seções seguintes estudamos o QHE tanto o inteiro (IQHE) como o fracionário (FQHE). As características principais do QHE são a quantização da condutividade de Hall e a precisão muito alta com que a quantização é observada (10^{-6}) em amostras praticamente bidimensionais ($\sim 100\text{\AA}$) com impurezas. Este grau de precisão é surpreendente pois sob condições usuais (altas temperaturas e campo magnético não muito intenso) a resistividade de Hall (tal como a resistência comum) da amostra é muito sensível por exemplo à geometria da amostra, à quantidade de impureza presente e à temperatura. Pelo contrário, o QHE é o mesmo para amostras com diferentes geometrias e composições.

A ação de uma partícula de carga e e massa m confinada num plano na presença de

campos constantes é [4]

$$S = \int dt L = \int dt \left[\frac{1}{2} m v^2 + \frac{e}{c} b f v \cdot A - e A_0 \right]. \quad (4.1)$$

O momento canônico e a hamiltoniana são dados por

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m \mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A}, \quad H = \frac{1}{2m} \left[\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right]^2 - e E^i x^i. \quad (4.2)$$

Aqui definimos um campo magnético uniforme perpendicular ao plano e um campo elétrico constante

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \equiv B \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{E} = -\nabla A_0, \quad (4.3)$$

onde escolhemos $A_0 = -E^i x^i$.

4.1 Tratamentos clássico e semi-clássico

A equação de movimento é determinada pela *força de Lorentz*,

$$\mathbf{F} = m \dot{\mathbf{v}} = e \mathbf{E} + e \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (4.4)$$

Introduzimos as variáveis complexas $z = x + iy$ e a equação anterior fica sendo

$$\dot{v} = \frac{eE}{m} - i\omega_c v, \quad \omega_c = \frac{eB}{mc}, \quad (4.5)$$

cujas solução é

$$v(t) = i \frac{cE}{B} + v_0 e^{-i\omega_c t}, \quad (4.6)$$

onde v_0 é a velocidade inicial complexa, $v_0 = v_{0x} + i v_{0y}$. O segundo termo descreve o movimento cíclotron e o primeiro o movimento de deriva,

$$v_d = i \frac{cE}{B} \iff (v_d)_x = -\frac{cE_y}{B}, \quad (v_d)_y = \frac{cE_x}{B}, \quad (4.7)$$

ou seja, a velocidade de deriva está na direção de $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ e é independente da carga,

$$\mathbf{v} = -\frac{c}{B^2} \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (4.8)$$

Para um gas de elétrons sem interação a densidade de corrente *de deriva*, ou *corrente de Hall*, é dada por

$$J^H = nev_d \iff J_x^H = cen \frac{E_y}{B}, \quad J_y^H = -cen \frac{E_x}{B}. \quad (4.9)$$

Daqui é evidente que a *corrente de Hall* é perpendicular ao campo elétrico. Em geral definimos a *matriz de condutividade* (σ_{ij}) através de

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

e, comparando esta com a equação anterior, temos

$$\sigma_{xy}^H = -\sigma_{yx}^H = -\frac{nce}{B}, \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0. \quad (4.11)$$

A matriz da resistividade (ρ_{ij}) é a inversa de (σ_{ij}) , ou seja,

$$\rho_{xy} = \frac{1}{\sigma_{yx}} = \frac{B}{nce} = -\rho_{yx}, \quad \rho_{xx} = \rho_{yy} = 0. \quad (4.12)$$

Para obter um modelo mais realístico devemos incorporar uma resistividade longitudinal não nula e, para isto, devemos levar em conta as colisões entre as partículas. Neste caso a *equação de Langevin*, que é semiclássica, fornece bons resultados

$$\frac{d\langle v \rangle}{dt} = \frac{eE}{m} - i\omega \langle v \rangle - \frac{\langle v \rangle}{\tau}. \quad (4.13)$$

Esta equação é análoga a (4.5), mas no lugar da velocidade temos a velocidade média e um termo a mais para simular o efeito da colisão. A quantidade τ é o tempo médio entre as colisões. No equilíbrio, $\frac{d\langle v \rangle}{dt} = 0$, a densidade de corrente é simplesmente

$$J = en \langle v \rangle = \frac{\sigma_0 E}{1 + i\omega\tau}, \quad \sigma_0 e^2 \frac{\tau}{m}. \quad (4.14)$$

Daqui a condutividade e a resistividade são calculadas imediatamente

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega^2\tau^2}, \quad \sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = \frac{-\sigma_0\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}, \quad (4.15)$$

$$\rho_{xx} = \rho_{yy} = \frac{1}{\sigma_0}, \quad \rho_{xy} = -\rho_{yx} = \frac{\omega\tau}{\sigma_0}. \quad (4.16)$$

Note que os elementos não diagonais de ρ_{ij} coincidem com os resultados clássicos.

4.2 Tratamento quântico

Precisamos resolver a equação de Schrödinger [34] sem campo elétrico

$$H\Psi = \frac{1}{2m}[(p_x - \frac{e}{c}A_x)^2 + (p_y - \frac{e}{c}A_y)^2]\Psi = \epsilon\Psi. \quad (4.17)$$

Para um campo magnético uniforme B escolhemos o gauge de Landau $A_x = -By$, $A_y = 0$. Neste gauge,

$$H = \frac{1}{2m}[(p_x + \frac{eB}{c}y)^2 + p_y^2] \implies [H, p_x] = 0, \quad (4.18)$$

de modo que a função de onda total pode ser fatorada numa parte que depende somente de x e uma outra que depende somente de y ,

$$\Psi = \exp[ik_x x]\phi(y). \quad (4.19)$$

Substituindo esta função na equação de Schrödinger obtemos uma equação diferencial para $\phi(y)$

$$\frac{d^2\phi}{dy^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[\epsilon - \frac{m}{2}\omega_c^2(y - y_0)^2]\phi = 0, \quad (4.20)$$

onde

$$y_0 \equiv \frac{cp_x}{eB} = \frac{c\hbar k_x}{eB}. \quad (4.21)$$

A Eq.(4.20) é a equação de Schrödinger para um oscilador harmônico com o centro em $y = y_0$, de modo que a solução é conhecida

$$\phi = \phi_n(y - y_0) = \exp[-\frac{m\omega_c}{2\hbar}(y - y_0)^2]H_n[\sqrt{\frac{m\omega_c}{\hbar}}(y - y_0)], \quad (4.22)$$

e satisfaz a equação de autovalores

$$H\phi_n = \epsilon_n\phi_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c\phi_n, \quad (4.23)$$

onde os H_n são os polinômios de Hermite. Estes níveis de energia são conhecidos como *níveis de Landau* e estão igualmente espaçados como aqueles do oscilador harmônico com intervalo $\hbar\omega_c$.

As autofunções (4.22) são conhecidas como *orbitais de Landau* e apresentam um pico em $y = y_0$, ou seja, y_0 nos dá a localização dos orbitais de Landau. Uma característica importante desta solução é que a autofunção ϕ_n depende de y_0 , que por sua vez depende de k_x , ver Eqs.(4.22) e (4.21). Porém, os autovalores não dependem de y_0 , de modo que cada nível de Landau é altamente degenerado. Para um plano finito de area $L_x L_y$, da condição de contorno sobre a função de onda, $\Psi(x + L_x, y) = \Psi(x, y)$ temos $k_x L_x = 2\pi p$, $p \in \mathbb{Z}$, encontramos que os valores permitidos de k_x são

$$\delta k_x = \frac{2\pi}{L_x}. \quad (4.24)$$

Além disto, a condição de que o centro y_0 esteja localizado no intervalo $0 < y_0 < L_y$ implica que

$$0 < |k_x| < \frac{eB}{\hbar c} L_y, \quad (4.25)$$

de onde sai que o número de valores permitidos de k_x é finito e dado por

$$Deg = \frac{eBL_y}{\hbar c} \frac{1}{\delta k_x} = \frac{BL_x L_y}{\frac{\hbar c}{e}} = \frac{\phi}{\phi_0}. \quad (4.26)$$

Esta quantidade é a *degenerescência* para um nível de Landau, i.e., o número de possíveis localizações do centro y_0 (e portanto, das órbitas de Landau) no plano de área $L_x L_y$. De outra forma, a degenerescência de cada nível de Landau é justamente o fluxo $\phi \equiv BL_x L_y$ que atravessa o plano em unidades de *fluxo fundamental* $\phi_0 \equiv \frac{\hbar c}{e}$.

Se o *fator de preenchimento* para o gas de elétrons for ν , então no total deve existir

$$N = \nu \frac{\phi}{\phi_0} \quad (4.27)$$

elétrons, o que determina a seguinte densidade superficial

$$n = \frac{(\frac{\nu\phi}{\phi_0})}{L_x L_y} = \frac{\nu e B}{\hbar c}. \quad (4.28)$$

Para o gas sem interação , segundo o resultado clássico (4.11) deveríamos esperar que

$$\sigma_{xy}^H = -\frac{n c e}{B} = -\nu \frac{e^2}{h}. \quad (4.29)$$

Agora mostremos que este resultado clássico para a condutividade de Hall é correto quanticamente, embora o centro (x_0, y_0) das órbitas de Landau não possa assumir valores definidos pois estas coordenadas não comutam entre si e, portanto, não podem ser determinados simultaneamente

$$[x_0, y_0] \neq 0. \quad (4.30)$$

Note por exemplo que no gauge de Landau y_0 é definido mas x_0 não. Introduzimos um campo elétrico constante na direção y , i.e. $E_x = 0$ e $E_y = E$, então a eq. de Schrödinger muda para

$$H'\Psi' = \frac{1}{2m}[(p_x - \frac{e}{c}A_x)^2 + (p_y - \frac{e}{c}A_y)^2]\Psi' + eEy\Psi' = \epsilon\Psi', \quad (4.31)$$

onde a hamiltoniana para o gauge de Landau fica

$$H' = \frac{1}{2m}[(p_x + \frac{eB}{c}y)^2 + p_y^2] + eEy \implies [H, p_x] = 0, \quad (4.32)$$

e de novo podemos fatorar a função de onda,

$$\Psi' = \exp[ik_x x]\phi'(y). \quad (4.33)$$

Substituindo na equação de autovalores achamos uma equação para ϕ' ,

$$\frac{d^2\phi'}{dy^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[\epsilon' - \frac{m}{2}\omega^2(y - y'_0)^2 - eEy]\phi' = 0. \quad (4.34)$$

Aqui fica claro que o efeito de adicionar o campo elétrico é deslocar o centro das órbitas, y_0

$$y_0 \longrightarrow y'_0 = y_0 - \frac{eE}{m\omega_c^2}, \quad (4.35)$$

e, com isto, os autovalores ficam

$$\epsilon \longrightarrow \epsilon' = \hbar\omega_c(\frac{1}{2} + n) - eEy'_0 - \frac{m}{2}(\frac{cE}{B})^2, \quad (4.36)$$

$$\implies \epsilon' = \hbar\omega_c(\frac{1}{2} + n) - \hbar k_x v_D + \frac{m}{2}v_D^2. \quad (4.37)$$

A nova função de onda é

$$\phi'(y) = \phi_n(y - y'_0), \quad (4.38)$$

com ϕ_n dado por (4.22). Por outro lado, pode ser visto que

$$\langle v_y \rangle = \frac{1}{m} \langle p_y \rangle = \frac{1}{m} \int dx dy \Psi_n'^* (-i\hbar \frac{\partial}{\partial y}) \Psi_n = 0, \quad (4.39)$$

$$\langle v_x \rangle = \frac{1}{m} \langle (p_x - \frac{e}{c} B y) \rangle = \frac{\hbar k_x}{m} - \frac{eB}{mc} y'_0 = \frac{cE}{B} = v_D \quad (4.40)$$

Então, a partir de $J_x = -ne \langle v_x \rangle$ e $\sigma_{xy} = \frac{J_x}{E_y}$, podemos reobter a Eq.(4.29).

Se o sistema tiver simetria esférica devemos usar o *gauge simétrico* $A_x = -\frac{By}{2}$, $A_y = \frac{Bx}{2}$.

Neste caso, os autovalores de (4.17) continuam sendo (4.23), mas a função de onda se torna

$$\phi_{m,n} = \exp[\frac{x^2 + y^2}{4l^2}] (\partial_x + i\partial_y)^m (\partial_x - i\partial_y)^n \exp[-\frac{x^2 + y^2}{2l^2}], \quad (4.41)$$

onde $l \equiv \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$ e m é o momento angular sobre o qual a energia não depende. Para o nível de Landau mais baixo, $n = 0$,

$$\phi_{m,0} = \frac{1}{\sqrt{m!}} z^m \exp[-\frac{|z|^2}{4l^2}], \quad (4.42)$$

onde $z = x + iy$. Quando existem impurezas no material, os níveis de Landau se alargam formando bandas de energia. Em 1980, von Klitzing et al. [35] descobriram experimentalmente que a Eq.(4.29) continua valendo na presença destas impurezas com o fator de preenchimento ν tomando valores inteiros. Isto é discutido em mais detalhe a seguir.

4.3 Efeito Hall quântico inteiro

À temperaturas relativamente altas o gas de elétrons apresenta o efeito Hall usual clássico. A resistência Hall,

$$R_H \equiv \frac{V_H}{I} \quad (4.43)$$

varia linearmente com o campo magnético de acordo com a Eq.(4.12),

$$R_H = \frac{B}{nec}. \quad (4.44)$$

Aqui V_H é a voltagem transversal à direção da corrente I . Porém, à baixas temperaturas [4] ($0 - 2\text{ K}$) e campo magnético intenso ($1 - 20\text{ Tesla}$), von Klitzin et al. obtiveram um resultado surpreendente: a resistencia de Hall, R_H , mostrou uma série de *platôs* ao invés de apresentar um comportamento linear com um campo magnético como seria no caso clássico (ou semiclássico). Os valores de R_H nos platôs foram encontrados e satisfazem

$$R_H = \frac{1}{p} \left(\frac{h}{e^2} \right), \quad p \in \mathbb{Z}. \quad (4.45)$$

Comparando esta equação com a Eq.(4.29) concluímos que os platôs (ou melhor, o ponto médio deles), acontecem em valores inteiros do fator de preenchimento $\nu = \frac{n\hbar c}{eB} = \frac{nA}{De_g}$, com $A = L_x L_y$ e De_g é a degenerescência, dada em (4.26). À temperaturas mais baixas ainda, as regiões dos platôs se tornam cada vez mais planas e a equação anterior é obedecida com mais precisão. Além disso, a resistência longitudinal, R_{yy} , ao invés de permanecer constante como esperado da Eq.(4.16), cai rapidamente com a temperatura de modo que, nos platôs se anula (a corrente flui sem dissipação), e entre um platô e outro tem picos, ver fig. 4.1

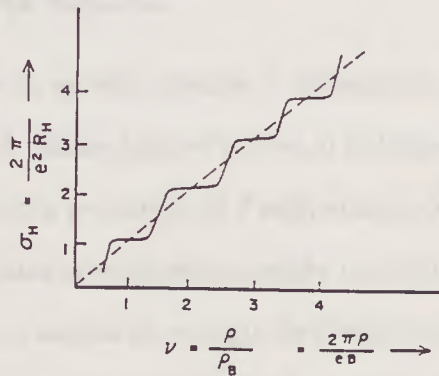


Figura 4.1: Quantização da resistência de Hall.

Um aspecto ainda mais surpreendente é que a Eq.(4.45) para as regiões dos platôs verifica-se com precisão, independente da forma e das características do material, e é reproduzível com a precisão de uma parte em 10^5 . Hoje o efeito Hall é usado para determinar a constante de estrutura fina, por exemplo.

As impurezas ou defeitos que existem em toda amostra real tem dois efeitos muito importantes:

- Como afirmado antes, alargam os níveis de Landau formando as *bandas de Landau*. Na presença destas impurezas os estados degenerados que pertencem a um mesmo nível de Landau (ou seja, possuem a mesma energia) passam a ter energias ligeiramente diferentes entre si, i.e., as impurezas levantam a degenerescência;

- Produzem *estados localizados* entre as bandas de condução . Especificamente, em cada banda podemos diferenciar três tipos de estados: 1) os *estados extensos* que se encontram na proximidade do centro de cada banda e de fato se estendem numa grande região do plano – os elétrons que se encontram nestes estados podem percorrer toda esta grande área da amostra efetuando a corrente; 2) os *estados localizados inferiores* que são os menos energéticos, de modo que os elétrons que se encontram nestes estados se localizam numa pequena região do espaço circundando átomos (ou impurezas) que possuem excesso de carga positiva. 3) os *estados localizados superiores* que descrevem elétrons que se localizam em pequenas regiões que circundam átomos com excesso de carga negativa.

Usando o conceito de estado extenso e localizado, podemos explicar qualitativamente como aparecem os platôs. À baixas temperaturas, o sistema encontra-se praticamente no *estado fundamental*, de acordo com o *princípio de Pauli*, abaixo de um certo nível de energia, chamado *energia de Fermi*, cada estado contém exatamente um elétron (estamos ignorando os graus de liberdade de spin), sendo que acima da energia de Fermi todos os estados ficam vazios. Notemos que a energia de Fermi é uma propriedade local, ou seja varia de ponto a ponto, e a voltagem entre os lados opostos do plano nada mais é do que a diferença entre as energias de Fermi destes dois lados. Suponhamos que energia de Fermi se encontra na sub-banda dos estados localizados, i.e., no gap de energia, e então aumentemos o campo magnético gradualmente. Da Eq.(4.26), a degenerescência deve aumentar, i.e., novos estados surgem dentro de cada banda, dos quais alguns deles que surgirão abaixo da energia de Fermi serão preenchidos por elétrons provenientes de estados mais energéticos fazendo com que a energia de Fermi (que

assumimos estar na sub-banda dos estados localizados) desca num nível inferior. Enquanto o nível de Fermi permanecer nesta sub-banda todos os estados da sub-banda de condução (extensa) permanecerão preenchidos, e já que eles são responsáveis pela condução da corrente através do plano, a corrente também permanecerá inalterada. Isto corresponde à região do platô. Aqui poderia-se questionar que quando o campo magnético aumenta, o movimento dos elétrons de condução se retarda, resultando uma diminuição da intensidade de corrente, $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$. Porém, lembremos que surgem novos estados, de modo que há mais elétrons de condução disponíveis o que compensa o efeito anterior e a corrente permanece constante. Ao contrário, quando a intensidade do campo continua aumentando e a energia de Fermi atinge a sub-banda de condução, diminui o número de estados ocupados desta sub-banda e a intensidade de corrente cai. E quanto à resistência de Hall, $R_H = \frac{V_H}{I}$? Mantendo a voltagem V_H constante, R_H permanece constante no primeiro caso e aumenta no segundo (pois a corrente diminui). Aumentando ainda mais a intensidade do campo, a energia de Fermi atingirá a sub-banda inferior dos estados localizados e o processo se repete na banda consecutiva, que contribui com o platô seguinte. Outra característica importante do IQHE é que na região dos platôs a resistência na direção da corrente se anula. A resistência elétrica é equivalente à dissipação de energia (em forma de calor ou energia vibracional dentro da rede) dos elétrons de condução os quais, como consequência, sofrem transições para níveis de energia inferiores. Por outro lado, como afirmado, a energia de Fermi é uma característica local. Então, quando a energia de Fermi se encontra na sub-banda de condução, pode acontecer que os estados de alguns elétrons desta sub-banda sejam inferiores à energia de Fermi num determinado ponto do plano, porém, ao se estender para outras regiões seja superior à energia de Fermi destas regiões. Como resultado, estes elétrons deverão cair para os níveis imediatos à energia de Fermi local. Em particular, pode acontecer que num lado do plano onde começa a corrente, a energia de Fermi local seja 'alta' e no lado oposto seja 'baixa' fazendo com que os elétrons de condução dissipem energia ao longo da amostra bidimensional, o que caracteriza a propriedade chamada *resistência*. Ao contrário, quando a energia de Fermi se encontra na sub-banda localizada, os elétrons localizados

não conseguem se conectar a outros possíveis pontos do plano com energia de Fermi inferior e portanto é impossível haver dissipação de energia (resistência).

Argumentação de Laughlin para o IQHE

Pouco depois da descoberta do IQHE, Laughlin [37] sugeriu uma argumentação elegante e geral, baseado na invariância de gauge e numa geometria não trivial. Ele considerou um sistema cilíndrico com um solenoide fixo no eixo de simetria e um campo magnético perpendicular à superfície em todos os pontos. É levado em conta a presença de impurezas de modo que os níveis de Landau passam a formar bandas separadas por estados localizados como explicado na seção anterior. Assumimos que a energia de Fermi se encontra num destes gaps, veja fig. 4.2

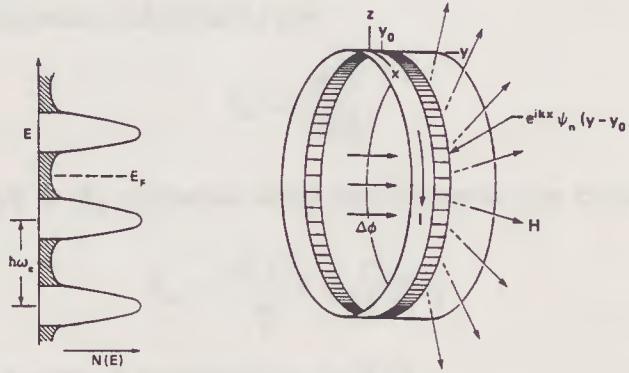


Figura 4.2: Argumento de Laughlin para o Q.H.E.

Suponhamos que a interação entre os elétrons seja desprezível. A hamiltoniana do sistema é a mesma da Eq.(4.31), ou da Eq.(4.32), no gauge de Landau sendo que agora a coordenada x é ao longo da circunferência do cilindro (veja fig. 4.2). Os autovalores também são dados pela Eq.(4.36). Variemos o fluxo do solenóide desde 0 até ϕ_0 , o fluxo quântico. Como resultado, a hamiltoniana (4.31) que depende explicitamente do potencial, muda

$$\mathbf{A} = (A_x = -By, 0) \longrightarrow \mathbf{A} = (A_x + \frac{\Phi_0}{2\pi R}, 0). \quad (4.46)$$

Isto é equivalente a transladar a localização das órbitas de Landau,

$$y'_0 \text{ da Eq.(4.35)} \longrightarrow y'_0 - \frac{\Phi_0}{2\pi RB} = y'_0 - \left(\frac{L_y}{\left(\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)}, \quad (4.47)$$

o que para $\frac{\Phi}{\Phi_0} = 1 \iff N = \nu$, segundo a Eq.(4.27), é equivalente a transladar cada órbita de Landau por uma quantidade igual à largura do cilindro: $\Delta y'_0 = L_y$. Os autovalores, que dependem linearmente de y'_0 segundo (4.36), mudam linearmente com $\Delta\Phi \equiv \phi_0$, ou seja, existe um incremento na energia, o qual para N elétrons transferido de um lado ao outro é dado por

$$\Delta U = NeE\Delta y'_0 = NeEL_y = NeV_y. \quad (4.48)$$

Mas sabemos que a variação no fluxo deve induzir uma corrente [38],

$$I_x = c \frac{\partial U}{\partial \Phi}, \quad (4.49)$$

que pode ser convenientemente substituída por

$$I_x = c \frac{\Delta U}{\Delta \Phi}. \quad (4.50)$$

Usando a Eq.(4.48) e $\Delta\Phi = \Phi_0$ podemos obter esta corrente que circunda o cilindro,

$$I_x = \frac{cNeV_y}{\frac{hc}{e}} = \frac{e^2}{h} NV_y. \quad (4.51)$$

Daqui obtemos imediatamente a condutância de Hall,

$$\sigma_H = \frac{I_x}{V_y} = N \frac{e^2}{h} = \nu \frac{e^2}{h}, \quad N \in \mathbb{Z}. \quad (4.52)$$

Na prática, as interações sempre estão presentes mas ainda assim é possível manter este resultado, o que pode ser calculado através da fórmula de Kubo [39], onde σ_H aparece como um invariante topológico.

4.4 Efeito Hall quântico fracionário

O FQHE foi observado pela primeira vez em 1982 por H. Störmer et al. [40] e foi uma surpresa para os teóricos que tinham concluído, segundo o modelo para IQHE, que valores

fracionários do fator de preenchimento determinariam um sistema instável. De fato, a característica principal do FQHE é que os pontos médios dos platôs ocorrem em valores fracionários do fator de preenchimento, $\nu = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$, etc. O FQHE requer temperaturas mais baixas ($T \sim 2 \times 10^{-2} - 10^{-1} K$), campo magnético mais intenso ($B \sim 15 - 30 \times 10^4 G$) e amostras mais puras do que IQHE. Como afirmado, para FQHE a condutividade é

$$\sigma_H = \nu \frac{e^2}{h}, \quad \nu = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \dots, \frac{4}{5}, \dots \quad (4.53)$$

Mais recentemente, em 1987, R. Willet et al. [41] observaram denominadores pares, $\nu = \frac{9}{4}, \frac{5}{2}$, etc.

O ansatz de Laughlin

Estudando o caso de 3 elétrons num campo magnético intenso, R. Laughlin [21] notou que os elétrons permaneciam no nível de Landau mais baixo, manifestando uma forte repulsão entre si. Motivado por esta observação ele propôs uma função de onda para o estado fundamental de um sistema de N elétrons com a geometria de um disco,

$$\Psi_0^m = \prod_{p < q}^N (z_p - z_q)^m \exp\left[-\frac{1}{4l_0^2} \sum_{p=1}^N |z_p|^2\right], \quad (4.54)$$

que foi introduzida na seção 3.7, com $l_0 = \sqrt{\frac{c\hbar}{eB}}$. O inteiro m deve ser ímpar de modo que a função de onda seja completamente antissimétrica. Para o IQHE as interações não são relevantes mas para o FQHE, são essenciais. A Hamiltoniana agora é dada por

$$H = \frac{1}{2m_e} \sum_{p=1}^N \left(\mathbf{p}_p - \frac{e}{c} \mathbf{A}_p\right)^2 + \rho_0 \int_{amostra} d^2\mathbf{r}' \frac{e^2}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{2} \sum_{p \neq q} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q|}, \quad (4.55)$$

onde ρ_0 é a densidade de fundo. A função de onda de Laughlin pode ser vista como formada por funções de onda correspondentes a uma única partícula que se encontra no nível de Landau mais baixo, veja a Eq. (4.42). Isto é uma boa aproximação, pois quando o campo magnético é intenso, o potencial de Coulomb é 'pequeno' se comparado com o gap $\hbar\omega_c$. Por outro lado, o quadrado do módulo da Eq.(4.54) pode ser escrito como uma distribuição clássica de Boltzmann,

$$|\Psi_0^{(m)}(z_1, \dots, z_N)|^2 = \exp[-\beta V_{ef}(z_1, \dots, z_N)]. \quad (4.56)$$

Pondo a temperatura fictícia como sendo

$$\frac{1}{\beta} = m \implies V_{ef} = -2m^2 \sum_{p < q}^N \ln \frac{|z_p - z_q|}{l_0} + \frac{m}{2} \sum_p^N \frac{|z_p|^2}{l_0^2}, \quad (4.57)$$

temos que V_{ef} coincide com a energia potencial de um *plasma de uma componente* em 2-D: o primeiro termo representa uma repulsão coulombiana (que é logarítmica em duas dimensões) entre as partículas de carga m ; o segundo termo é um potencial de confinamento destas cargas em torno da origem devido a uma densidade uniforme de cargas (opostas) dada por

$$\rho_{neutr} = \frac{1}{2\pi l_0^2}. \quad (4.58)$$

Esta analogia reduz os cálculos de valor esperado na função de onda de Laughlin em relação aos correspondentes do plasma. Em particular, a neutralidade do plasma significa que a densidade de elétrons no estado (4.54) é uniforme e igual a

$$\rho = \frac{1}{m} \rho_0 = \frac{1}{2m l^2} = \frac{1}{m} \frac{eB}{hc}, \quad (4.59)$$

ou seja, em $\nu = \frac{1}{m}$ a energia é minimizada e o estado representado pela função de onda de Laughlin é estável. Excitações elementares localizadas são encontradas fazendo atuar os operadores $A_{\pm z_0}$ na função de Laughlin,

$$\psi_{\pm z_0}^m = A_{\pm z_0} \prod_{p < q} (z_p - z_q)^m \exp\left[-\frac{1}{4l_0^2} \sum_{p=1}^N |z_p|^2\right], \quad (4.60)$$

onde

$$A_{+z_0} = \prod_p (z_p - z_0) \quad (4.61)$$

cria um quase-buraco em z_0 , e

$$A_{-z_0} = \prod_p \left[\frac{\partial}{\partial z_p} - eB z_0 \right] \quad (4.62)$$

cria uma quase-partícula localizada em z_0 . Excitações mais altas são obtidas atuando repetidamente com o operador $A_{\pm z}$. A carga e a estatística das quase-partículas podem ser determinadas calculando a fase de Berry. Para determinar a carga calculamos a fase de Berry da função de

onda do quase-buraco, Eq.(4.60), quando a localização z_0 do quase-buraco se move adiabaticamente seguindo um loop de raio R . Note que a localização z_0 aparece como um parâmetro na função de onda citada. A fase de Berry satisfaz

$$\frac{d\gamma}{dt} = i \langle \psi_{+1}^m(z_0) | \frac{d}{dt} | \psi_{+1}^m(z_0) \rangle = i \langle \psi_{+1}^m(z_0) | \frac{d}{dt} \sum_p \ln[z_p - z_0] | \psi_{+1}^m(z_0) \rangle. \quad (4.63)$$

Note que a densidade de elétrons neste estado é

$$\rho_{+1}(z) = \langle \psi_{+1}^m(z_0) | \sum_p \delta[z_p - z] | \psi_{+1}^m(z_0) \rangle. \quad (4.64)$$

Logo,

$$\frac{d\gamma}{dt} = i \int d^2 z \rho_{+1}(z) \frac{d}{dt} \ln[z - z_0]. \quad (4.65)$$

Agora, integramos z_0 ao longo de um contorno fechado C no sentido anti-horário. O termo da derivada temporal tem contribuição não nula somente para z dentro do contorno C e é $-2\pi i$,

$$\gamma = \int \frac{d\gamma}{dt} dt = 2\pi \int_D d^2 z \rho_{+1}(z) \sim 2\pi \int_D d^2 z \rho_0 = 2\pi \langle n \rangle_D = 2\pi \nu \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad (4.66)$$

onde D é a região delimitada por C e $\langle n \rangle_D$ é o número médio de elétrons na região D . Esta fase deve ser interpretada como uma fase de Aharonov-Bhom de uma carga q ,

$$\gamma = i \frac{q}{\hbar} \oint_C db f l.A = 2\pi \frac{q}{e} \frac{\Phi}{\Phi_0}. \quad (4.67)$$

Comparando esta com o resultado anterior conseguimos determinar a carga q do quase-buraco,

$$q = \nu e. \quad (4.68)$$

Isto mostra que a carga do quase-buraco não é quantizada em unidades da carga do elétron. Finalmente, para determinar a estatística das quase-partículas devemos considerar o estado de dois quase-buracos localizados em z_1 e z_2 ,

$$\Psi_{+2}^m(z_1, z_2) = \prod_p (z_p - z_1)(z_p - z_2) \Psi_0^m(z_1, \dots, z_N). \quad (4.69)$$

Agora, do mesmo modo que anteriormente, movemos adiabaticamente z_1 ao longo do loop C que contém Z_2 . Surge a fase de Berry

$$\gamma = 2\pi \langle n \rangle_d = 2\pi\nu \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} - 1 \right). \quad (4.70)$$

O primeiro termo é o mesmo de antes. O segundo é devido à presença do segundo quase-buraco em z_2 . A fase resultante é interpretada como uma fase de permutação ou estatística

$$\theta = -\frac{\Delta\gamma}{2}\nu\pi = \frac{\pi}{m}. \quad (4.71)$$

4.5 Fluido-dinâmica e o QHE

Aqui consideramos um sistema de muitas partículas no plano como sendo um fluido [42] clássico e formulamos a sua dinâmica como uma teoria de campos nas coordenadas espaciais que se movem com o fluido. As interações e o potencial de fundo são embutidos num único potencial o qual é assumido ter um mínimo em algum valor específico da densidade do fluido, a partir do qual efetuamos pequenas oscilações. Nesta descrição conseguimos descrever as características essenciais do QHE sem precisar fazer os cálculos mais complicados *da teoria de muitos corpos*, mas em compensação é incompleta.

Fluido-dinâmica como uma teoria de gauge

Um sistema bidimensional de partículas não relativísticas rotuladas pelas suas coordenadas $x_\alpha(t) = (x_\alpha^1, x_\alpha^2)$ pode ser descrita pela seguinte Lagrangiana

$$L = \sum_\alpha \frac{m}{2} \dot{x}_\alpha^2 - \int d^2x U(x, \dot{x}_\alpha), \quad (4.72)$$

onde qualquer potencial envolvido foi embutido em U . Quando se trata de uma quantidade muito grande de partículas podemos descrever o sistema como sendo um fluido, i.e., substituímos os rótulos discretos das coordenadas de cada partícula por variáveis contínuas,

$$x_\alpha(t) \longrightarrow x(y, t), \quad (4.73)$$

onde $y = (y_1, y_2)$ rotula agora os pontos do fluido e são as coordenadas que se movem com o fluido. Chamemos de ρ_y a densidade de massa no sistema de coordenada y e ρ a densidade de massa no sistema de coordenadas x . Eles se relacionam da seguinte forma

$$\rho = \rho_y \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|, \quad (4.74)$$

onde o fator é o Jacobiano da transformação

$$\left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \text{ que satisfaz } \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial x}{\partial y} \right| = 1. \quad (4.75)$$

Assumimos que o potencial U contém o potencial de interação devido a forças de curto alcance e um potencial de fundo cuja escala de variação é muito maior que o espaço de separação entre as partículas. A energia potencial pode ser escrita como a integral de uma densidade de energia (potencial) que dependa também da densidade de massa,

$$\int d^2x U(x, \dot{x}, \rho) = \int d^2y \left| \frac{\partial x}{\partial y} \right| U(x, \dot{x}, \rho_y \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|) = \int d^2y \rho_y V(x, \dot{x}, \rho_y \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|), \quad (4.76)$$

com

$$V(x, \dot{x}, \rho_y \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|) \equiv \frac{U(x, \dot{x}, \rho_y \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|)}{\rho_y \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|}. \quad (4.77)$$

Então a Lagrangiana (4.72) toma a seguinte forma nas coordenadas y ,

$$L = \int d^2y \rho_y \left[\frac{1}{2} \dot{x}^2 - V(x, \dot{x}, \rho_y \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|) \right]. \quad (4.78)$$

Agora consideremos uma transformação de coordenadas que preserva a área

$$y_i \longrightarrow y'_i = \sigma_1(y_1, y_2) \implies dy'_1 dy'_2 = J dy_1 dy_2, \quad (4.79)$$

ou seja, uma transformação tal que

$$J = \left| \frac{\partial y'}{\partial y} \right| \equiv 1. \quad (4.80)$$

Para uma transformação infinitesimal que preserva área,

$$y_i \longrightarrow y'_i = y_i + f_i(y_1, y_2), \quad (4.81)$$

a condição (4.80) determina uma restrição sobre a função f ,

$$\partial_i f_i = 0 \implies f_i = -\varepsilon^{ij} \partial_j \Lambda(y), \quad (4.82)$$

onde Λ é uma função de gauge arbitrária. Agora substituímos este resultado na equação anterior,

$$y'_i = y_i - \varepsilon^{ij} \partial_j \Lambda = [1 + i(\varepsilon^{kl} \partial_l \Lambda \partial_k)] y_i \sim \exp[i L_\Lambda] y_i, \quad (4.83)$$

onde introduzimos a quantidade L_Λ que é o gerador da transformação de coordenadas no plano que preserva a área,

$$L_\Lambda \equiv i \varepsilon^{kl} (\partial_l \Lambda) \partial_k = i \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial y_2} \frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{\partial \Lambda}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \right). \quad (4.84)$$

Estes geradores satisfazem a álgebra

$$[L_\Lambda, L_{\Lambda'}] = i L_{\{\Lambda, \Lambda'\}}, \quad (4.85)$$

onde o colchete do lado direito é o *colchete de Poisson* dos objetos Λ 's e, em particular, para as coordenadas y 's,

$$\{y_1, y_2\} = 1. \quad (4.86)$$

A álgebra (4.85) foi introduzida por primeira vez por Arnold em 1966 [43] no contexto da fluido-dinâmica e é conhecida como *álgebra w_∞* ou álgebra de difeomorfismos que preservam área [44].

Suponhamos agora que esta transformação não mude a posição física de cada ponto do fluido,

$$x'_a(y') = x_a(y), \quad (4.87)$$

o que obviamente deixa invariante a Lagrangiana (4.78). Nesta relação substituímos a transformação infinitesimal (4.81) e descobrimos a variação infinitesimal do campo x ,

$$x'_a(y') = x'_a(y + f) \sim x'_a(y) + \frac{\partial x_a}{\partial y_i} f_i = x_a(y), \quad (4.88)$$

ou seja,

$$\delta x_a(y) = x'_a - x_a(y) = -\frac{\partial x_a}{\partial y_i} f_i(y) = \epsilon^{ij} \frac{\partial x_a}{\partial y_i} \frac{\partial \Lambda}{\partial y_j}, \quad (4.89)$$

ou ainda, geometricamente,

$$\delta_\Lambda x_a(y) = \{x_a, \Lambda\}. \quad (4.90)$$

Esta é a invariância de gauge da teoria.

Conservação da circulação

Vimos no primeiro capítulo que a uma dada simetria corresponde uma certa quantidade conservada. A transformação (4.90) constitui uma simetria da teoria (4.78) e a quantidade conservada é

$$C = \int d^2 y \Pi_a(y) \delta x_a(y) = \int d^2 y \rho_v [\epsilon^{ij} \dot{x}_a \frac{\partial x_a}{\partial y_i} \frac{\partial \Lambda}{\partial y_j}] = \int d^2 y \epsilon^{ij} \frac{\partial}{\partial y_i} [\dot{x}_a \frac{\partial x_a}{\partial y_j}] \Lambda, \quad (4.91)$$

onde na última passagem foi feita uma integração por partes. Aqui Π_a é o momento conjugado a x_a ,

$$\Pi_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} = \rho_v \dot{x}_a, \quad (4.92)$$

isto, supondo que o potencial V não dependa da velocidade. A quantidade C em (4.91) satisfaz

$$\frac{dC}{dt} = 0 \implies \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial y_j} (\epsilon^{ij} \dot{x}_a \frac{\partial x_a}{\partial y_i}) \right] = 0, \quad (4.93)$$

considerando o fato de que Λ é arbitrário. Mas esta equação é equivalente ao *teorema da circulação de Kelvin* [45] como pode ser visto mais claramente integrando sobre uma área Ω delimitada por uma curva fechada Γ no sistema de coordenadas y ,

$$\frac{d}{dt} \oint_\Omega d^2 y \frac{\partial}{\partial y_j} (\epsilon^{ij} \dot{x}_a \frac{\partial x_a}{\partial y_i}) = \frac{d}{dt} \oint_\Gamma \dot{x}_a \frac{\partial x_a}{\partial y_i} dy_i = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \oint_{x(\Gamma)} dx_a \dot{x}_a = 0, \quad (4.94)$$

onde, na primeira passagem, usamos o teorema de Gauss no plano. Este resultado implica na conservação da quantidade

$$\int_{x(\Gamma)} dx \cdot \dot{x} = \text{constante} \longrightarrow \text{Teorema de Kelvin}. \quad (4.95)$$

Conclui-se que a conservação da circulação que segue da invariância de gauge é o análogo ao que acontece na eletrodinâmica livre de Maxwell. Das equações de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \text{ (lei de Gauss)}, \quad \partial_t \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{B} = -\mathbf{J} \text{ (lei de Ampere)}, \quad (4.96)$$

obtemos a equação da continuidade

$$\nabla \cdot \partial_t \mathbf{E} = \partial_t (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \partial_t \rho = -\nabla \cdot \mathbf{J} \Leftrightarrow \partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (4.97)$$

A equação da continuidade implica na conservação da carga $Q = \int d^2x \rho$,

$$\frac{dQ}{dt} = \int d^2x \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int d^2x \nabla \cdot \mathbf{J} = - \int_{\Gamma_\infty} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (4.98)$$

Então, da primeira equação de Maxwell acima temos

$$\frac{d}{dt} \oint_{\Omega} d^2x (\nabla \cdot \mathbf{E} - \rho) = \frac{d}{dt} \oint_{\Gamma} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{E} - \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_{\Gamma} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (4.99)$$

ou seja,

$$\oint_{\Omega} d^2x \nabla \cdot \mathbf{E} = \oint_{\Gamma} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{E} = \text{constante}, \quad \frac{dQ}{dt} = 0. \quad (4.100)$$

Este resultado é o análogo a (4.95). Na seguinte seção veremos que esta analogia com a eletrodinâmica de Maxwell pode ser feita ainda mais estreita considerando somente pequenas flutuações .

Analogia com a eletrodinâmica

Aqui assumimos que o potencial V em (4.78) depende somente da densidade de massa, ou seja, não existe um potencial de fundo (background), e também que possui um mínimo num determinado ρ_0 . Das equações de Euler-Lagrange obtemos

$$\ddot{x}_a - \frac{\partial V}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_a} = 0. \quad (4.101)$$

Em ρ_0 o segundo termo se anula e uma primeira integração fornece

$$\dot{x}_a = \text{constante}, \quad V \equiv V(\rho_0). \quad (4.102)$$

Uma possível solução desta equação é

$$x_a = Ky_a, \quad \frac{dy_a}{dt} = 0, \quad V \equiv V(\rho_0). \quad (4.103)$$

A constante K pode ser determinada a partir da relação de transformação da densidade, Eq.(4.74),

$$K = \sqrt{\frac{\rho_v}{\rho_0}}. \quad (4.104)$$

Logo, a solução estável é

$$x_i = \sqrt{\frac{\rho_v}{\rho_0}} y_i. \quad (4.105)$$

Agora consideramos pequenas flutuações a partir da solução estável

$$x_i = \sqrt{\frac{\rho_v}{\rho_0}} y_i + \epsilon_i(y). \quad (4.106)$$

A partir da Eq.(4.89) obtemos a variação de ϵ ,

$$\delta\epsilon_i = -\sqrt{\frac{\rho_v}{\rho_0}} f_i = \sqrt{\frac{\rho_v}{\rho_0}} \epsilon^{ij} \frac{\partial \Lambda}{\partial y_j}. \quad (4.107)$$

Isto sugere que ϵ seja definido por

$$\epsilon_i(y) \equiv \frac{1}{\sqrt{\rho_v}} \epsilon^{ij} A_j(y), \quad \delta A_i = \frac{\rho_v}{\sqrt{\rho_0}} \frac{\partial \Lambda}{\partial y_i}. \quad (4.108)$$

Finalmente, podemos escrever explicitamente as flutuações nas coordenadas como sendo

$$x_i = \sqrt{\frac{\rho_v}{\rho_0}} y_i + \frac{1}{\sqrt{\rho_v}} \epsilon^{ij} A_j(y). \quad (4.109)$$

Este resultado determina a flutuação na densidade que, em primeira ordem em A , é

$$\rho = \rho_v \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| = \rho_0 - \frac{\rho_0^{\frac{3}{2}}}{\rho_v} (\nabla \times A). \quad (4.110)$$

Agora assumimos que o mínimo de V em ρ_0 é quadrático, de modo que para pequenas flutuações da densidade podemos escrever

$$V \sim \mu [\rho - \rho_0]^2 = \mu \left[\rho_v \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| - \rho_0 \right]^2. \quad (4.111)$$

Juntando estes dois últimos resultados podemos escrever a Lagrangiana (4.78) até em ordem quadrática em A ,

$$L = \int d^2y \frac{1}{2} [\dot{A}^2 - 2\mu \frac{\rho_0^3}{\rho_y} (\nabla \times A)^2], \quad (4.112)$$

que é exatamente a Lagrangiana de Maxwell no *gauge temporal*, $A_0 = 0$. O coeficiente do segundo termo faz o papel da velocidade da luz no sistema de coordenadas y

$$c_y^2 = 2\mu \frac{\rho_0^3}{\rho_y}, \quad (4.113)$$

sendo que no sistema de coordenadas x , no qual o fluido está em movimento, esta velocidade é

$$c_x^2 = 2\mu \rho_0^2. \quad (4.114)$$

A partir desta analogia concluímos que aos fótons da eletrodinâmica correspondem ondas no fluido, e às cargas localizadas, $\nabla \cdot E \propto q\delta^2(x)$, vórtices no fluido, $\nabla \cdot \dot{x} \propto q\delta^2(x)$. Veja as Eqs.(4.100) e (4.95). Uma carga pontual na eletrodinâmica apresenta um campo elétrico radial $\propto \frac{r}{r^2}$, o qual, segundo a Eq.(4.109), corresponde a vórtices do fluido e cuja circulação azimuthal é $\propto \frac{e\theta}{r}$.

Fluido carregado num campo magnético

Agora consideramos um fluido bidimensional carregado que se encontra num campo magnético uniforme externo de intensidade B . Para uma partícula de carga e e num campo magnético uniforme a Lagrangiana ganha um termo extra do tipo

$$\frac{eB}{2} \epsilon^{ab} \dot{x}_a x_b. \quad (4.115)$$

Para o fluido a Lagrangiana ganha um termo equivalente a este,

$$L' = \frac{eB}{2m} \int d^2y \rho_y \epsilon^{ab} \dot{x}_a x_b. \quad (4.116)$$

Aqui podemos usar a Eq.(4.109) para substituir o campo x e obter uma Lagrangiana onde apareça explicitamente o objeto A ,

$$L' = \frac{eB}{2m} \int d^2y \epsilon^{ab} \dot{A}_a A_b. \quad (4.117)$$

Mas esta é a Lagrangiana de Chern-Simons introduzida no capítulo 2, ver Eq.(3.15), a qual, como foi visto, tem por efeito dar massa ao fóton deixando as correlações de curto alcance. Vimos também que as propriedades de longo alcance de uma QED em $(2 + 1)$ dimensões são determinadas por este termo. Aqui consideramos uma teoria definida por este único termo e estudamos as propriedades dos vórtices do fluido. A transformação que preserva área, Eq.(4.89), novamente constitui uma simetria para esta teoria e portanto deve existir uma quantidade conservada

$$C = \int d^2y \Pi_a \delta x_a = -\frac{eB}{2m} \int d^2y \rho_y \partial_j [\varepsilon^{ij} \varepsilon^{ab} x_b \partial_i x_a] \Lambda(y), \quad (4.118)$$

de modo que

$$\frac{dC}{dt} = 0 \implies (\Lambda \text{ é arbitrário}) \quad (4.119)$$

$$\frac{d}{dt} \partial_j [\varepsilon^{ij} \varepsilon^{ab} x_b \partial_i x_a] = \frac{d}{dt} (\varepsilon^{ij} \varepsilon^{ab} \partial_i x_a \partial_j x_b) = 0, \quad (4.120)$$

ou seja, o Jacobiano da transformação $x \longrightarrow y$ se conserva,

$$J = \left| \frac{\partial x}{\partial y} \right| = \frac{1}{2} \varepsilon^{ij} \varepsilon^{ab} \partial_i x_a \partial_j x_b. \quad (4.121)$$

Isto significa que a densidade do fluido não depende do tempo para um y fixo,

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt} \left| \frac{\partial x}{\partial y} \right| \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho_y}{\rho} \right) = 0 \implies \rho = Cte. \rho_y. \quad (4.122)$$

Consideramos agora pequenas oscilações do fluido e usamos a Eq.(4.109) para substituí-la na quantidade conservada, Eq.(4.120),

$$\frac{d}{dt} (\varepsilon^{ij} \varepsilon^{ab} \partial_i x_a \partial_j x_b) = 0 \implies \frac{d}{dt} (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (4.123)$$

e obtemos a conservação do ‘campo magnético local’¹. Em analogia ao vórtice magnético estudado na capítulo 1, especificamente as Eqs. (2.31) e (2.32), aqui definimos um vórtice na

¹Aqui não deve ser confundido o ‘campo magnético $\nabla \times \mathbf{A}$ com o campo magnético externo $\mathbf{B}$. Note que o ‘potencial vetor’ $\mathbf{A}$ descreve o deslocamento do fluido, segundo a Eq.(4.109) e $\nabla \times \mathbf{A}$ descreve a flutuação da densidade, segundo a Eq.(4.110).

origem por

$$\nabla \times \mathbf{A} = q\sqrt{\rho_0}\delta^2(r), \quad (4.124)$$

o que determina a densidade do fluido na origem, onde q mede a intensidade do vórtice. A solução desta equação é

$$A_i = \frac{q\sqrt{\rho_0}}{2\pi}\varepsilon^{ij}\frac{y_j}{r^2} \Rightarrow x_i = y_i + \frac{q}{2\pi}\frac{y_i}{r^2}, \quad (4.125)$$

onde, por conveniência, fixamos $\rho_y = \rho_0$. Em coordenadas polares temos

$$\mathbf{A} = \frac{q\sqrt{\rho_0}}{2\pi}\left(\frac{1}{r}\right)\mathbf{e}_\theta, \quad A_r = 0. \quad (4.126)$$

Desde que $\frac{1}{\sqrt{\rho_0}}\varepsilon^{ij}A_j$ representa o deslocamento do fluido, podemos concluir que o vórtice determina realmente o deslocamento radial do fluido desde/para a localização do vórtice,

$$\delta x_i = \frac{1}{\sqrt{\rho_y}}\varepsilon^{ij}A_j \Leftrightarrow \delta \mathbf{x} = -\frac{q}{2\pi}\left(\frac{1}{r}\right)\hat{\mathbf{r}}. \quad (4.127)$$

Isto significa que um excedente do fluido é encontrado no vórtice. O excesso de massa e de carga no vórtice são respectivamente

$$\Delta m = \rho_0 q, \quad \Delta Q = \frac{eq\rho_0}{m}. \quad (4.128)$$

A solução para um vórtice pode ser determinada sem fazer aproximações de pequenas flutuações. De fato da Eq.(4.121)

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{ij}\varepsilon^{ab}\partial_i x_a \partial_j x_b = 1 + \frac{1}{\sqrt{\rho_0}}, \quad (4.129)$$

o qual, para um vórtice $\nabla \times \mathbf{A} = \frac{q}{\sqrt{\rho_0}}\delta^2(r)$, é

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{ij}\varepsilon^{ab}\partial_i x_a \partial_j x_b = 1 + q\delta^2(r), \quad r = |\mathbf{y}|. \quad (4.130)$$

Uma solução desta equação é

$$x_i = y_i \sqrt{1 + \frac{q}{\pi|y|^2}}. \quad (4.131)$$

Esta solução vai para a solução anterior, Eq.(4.125), a grandes distancias do vórtice,

$$x_i = y_i \sqrt{1 + \frac{q}{\pi|y|^2}} \longrightarrow x_i = y_i + \frac{q}{2\pi} \frac{y_i}{r^2}, \quad |y| \longrightarrow \infty. \quad (4.132)$$

A solução (4.131) tem um comportamento interessante perto da origem, i.e., em $y_i \longrightarrow \epsilon_i \Leftrightarrow |y| \longrightarrow 0$

$$x_i = \frac{\epsilon_i}{|\epsilon|} \sqrt{\frac{q}{\pi}} \sqrt{1 + \frac{\pi}{q} |\epsilon|^2} \sim \frac{\epsilon_i}{|\epsilon|} \sqrt{\frac{q}{\pi}}, \quad |\epsilon| \ll 1. \quad (4.133)$$

Isto significa que um ponto (vórtice) no espaço dos y é mapeado num círculo de raio $R = \sqrt{\frac{q}{\pi}}$,

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{q}{\pi}, \quad |y| \longrightarrow 0. \quad (4.134)$$

A área do vórtice no espaço real, dos x , é $\pi r^2 = q$. Logo o vórtice no espaço dos y representa um buraco de área q no fluido, déficit de massa $q\rho_0$ e carga elétrica $\frac{eq\rho_0}{m}$.

Suponhamos que o fluido está constituido por partículas de massa m e carga e . Neste caso o número de partículas por unidade de área no espaço dos y é $\frac{\rho_0}{m}$. Se Π_a é a densidade de momento, então o momento de uma partícula é

$$p_a = \frac{m\Pi_a}{\rho_0}. \quad (4.135)$$

Para obter resultados realísticos é necessario quantizar as equações do fluido, mas aqui simplesmente assumiremos que, uma vez quantizado o vórtice, este satisfaz as condições quânticas usuais. Em particular, p_a deve satisfazer

$$\oint p_a dx_a = nh = 2\pi n\hbar, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.136)$$

para qualquer caminho fechado no fluido. Por exemplo, para um fluido na ausência de campo magnético, Eq.(4.72),

$$\oint p_a dx_a = \frac{m}{\rho_0} \oint \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} dx_a = m \oint \dot{x}_a dx_a = nh. \quad (4.137)$$

E, para o fluido num campo magnético uniforme B , Eq.(4.116),

$$\oint p_a dx_a = \frac{eB}{2} \oint_{x(\Gamma)} \varepsilon^{ab} x_b dx_a = nh. \quad (4.138)$$

Esta integral de linha determina justamente a área delimitada pela curva de integração (teorema de Green no plano). Então, para interpretar este resultado em forma consistente assumimos que qualquer mudança nas propriedades do fluido dentro desta curva, tal como a introdução de vórtices, pode mudar $\frac{eB}{2} \text{Area}$ apenas por $h \times \text{inteiro}$. Concretamente, substituindo a expansão (4.109) e usando a solução de vórtice, Eq.(4.125), obtemos

$$\frac{eB}{\sqrt{\rho_0}} \oint A_a dy_a = nh \implies eBq = nh, \quad (4.139)$$

com o que a intensidade do vórtice é quantizada. Deste resultado concluímos que o excesso de carga elétrica no fluido, Eq.(4.128), seria

$$\Delta Q = \frac{eq}{\rho_0 m} = n \frac{\rho_0 h}{mB}. \quad (4.140)$$

Estatística dos vórtices

Na seção anterior vimos que a criação de um vórtice num fluido carregado num campo magnético tem por efeito deslocar o fluido para longe do vórtice por uma quantidade inversamente proporcional à distância. Por exemplo, para um vórtice na origem,

$$\nabla \times \mathbf{A} = q\sqrt{\rho_0}\delta^2(\mathbf{r}) \implies |\delta\mathbf{x}| = \frac{q}{2\pi} \frac{1}{r}. \quad (4.141)$$

E para um vórtice localizado num ponto $\mathbf{r}'$ arbitrário temos

$$A'_i = \frac{q\sqrt{\rho_0}}{2\pi} \varepsilon^{ij} \frac{y_j - y'_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}, \quad \nabla \times \mathbf{A} = q\sqrt{\rho_0}\delta^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \implies |\delta\mathbf{x}| = \frac{q}{2\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (4.142)$$

Podemos calcular a fase que aparece na função de onda quando dois destes vórtices são permutados seguindo uma certa trajetória ². Assumimos que existe um operador unitário $U(\mathbf{r}')$ que cria um vórtice no ponto $\mathbf{r}'$ do espaço real (dos $\mathbf{x}$) e tem por efeito deslocar o fluido até um ponto $\mathbf{r}$ distante $\frac{q}{2\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ de $\mathbf{r}'$. Um estado com vórtices em $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ é construído com estes operadores,

$$|a, b\rangle = U(\mathbf{a})U(\mathbf{b} - \mathbf{d}_{a,b})|0\rangle, \quad \mathbf{d}_{a,b} \equiv \frac{q_a}{2\pi} \frac{\mathbf{a} - \mathbf{b}}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2}. \quad (4.143)$$

²Ou, equivalentemente, um dos vórtices é movido num caminho fechado ao redor do outro.

O vórtice em b não é criado exatamente em b , mas num ponto bem perto do segundo vórtice, de modo que a criação daquele vórtice desloca este na posição desejada. A fase de Berry levantada pela função de onda quando um vórtice se move numa trajetória fechada ao redor do outro é

$$\gamma_{ab} = \int_{loop} db \cdot \langle a, b | \frac{\partial}{\partial b} | a, b \rangle = \int_{loop} [\langle a, b | a, b + db \rangle - 1]. \quad (4.144)$$

O primeiro termo do último membro pode ser calculado usando a Eq.(4.143),

$$\langle a, b | a, b + db \rangle = \langle 0 | U^\dagger(b - d_{a,b}) U^\dagger(a) U(a) U(b + db - d_{a,b+db}) | 0 \rangle. \quad (4.145)$$

Mas, por definição, o operador U é unitário, de modo que

$$\langle a, b | a, b + db \rangle = \langle 0 | U^\dagger(b - d_{a,b}) U(b + db - d_{a,b+db}) | 0 \rangle. \quad (4.146)$$

Voltando a substituir na Eq.(4.144), obtemos a fase levantada por uma função de onda que representa um único vórtice, movido ao longo de uma trajetória fechada com raio menor por $|d_{a,b}|$. Definindo $R = |a - b|$ e $\Delta R = |d_{a,b}|$ temos que

$$\gamma_{ab}(\text{loop de raio } R) = \gamma_b(\text{loop de raio } R - \Delta R). \quad (4.147)$$

Isto significa que a fase adquirida pela função de onda total quando um dos vórtices é rodado ao redor do outro numa circunferência de raio R é igual à fase adquirida pela função de onda de um único vórtice quando este é rodado numa circunferência de raio $R - \Delta R$. Quando o vórtice b é movido numa circunferência de raio R ao redor do ponto a a função de onda para o estado $|a, b\rangle$ ganha a fase γ'_{ab} . Daí a diferença na fase devido à presença do vórtice a é

$$\Delta\gamma = \gamma'_{ab} - \gamma_{ab} = \gamma_b(\text{raio } R) - \gamma_b(\text{raio } R - \Delta R). \quad (4.148)$$

Mas sabemos que a fase levantada por uma partícula carregada se movendo numa trajetória fechada num campo magnético uniforme é dada pelo produto *carga* $\times$ *fluxo*, especificamente, o fluxo que atravessa a área delimitada pela trajetória. Digamos que os vórtices tem intensidades q_a e q_b , com cargas $Q_i = \frac{q_i \rho_0 e}{m}$, e o campo magnético tenha intensidade B . A diferença de fase entre o movimento num círculo de raio R e um de raio $R - \Delta R$ seria

$$\Delta\gamma = q_a q_b \frac{e B \rho_0}{m}. \quad (4.149)$$

Substituindo os valores das intensidades quantizadas dos vórtices e o valor correto para a densidade,

$$\frac{\rho_0}{m} = \frac{eB}{hk}, \quad (4.150)$$

temos

$$\Delta\gamma = n_a n_b \frac{h}{k}. \quad (4.151)$$

Para um vórtice de intensidade um, e o nível de Landau parcialmente cheio, i.e. k é um inteiro ímpar, esta fase determina uma estatística fracionária.

5 Conclusão

Na mecânica não relativística as transformações conformes degeneram-se em reparametrizações do tempo. Numa certa dimensão espacial d o termo cinético $\frac{1}{2}mv^2$ e a interação $\frac{1}{r^2}$ não são os únicos que apresentam invariância por reparametrização temporal. Outros exemplos são

-Em $d = 3$, a interação com o monopolo de Dirac,

$$A \equiv A_D, \quad B = \nabla \times A_D = g_m \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (5.1)$$

-Em $d = 2$, a interação com o vórtice magnético pontual,

$$A = \frac{\Phi}{2\pi} \nabla \theta, \quad B = \nabla \times A = \Phi \delta^2(\mathbf{r}), \quad (5.2)$$

onde Φ é o fluxo magnético do vórtice, θ é o ângulo dado por $\tan \theta = \frac{y}{x}$, e na última relação usamos $\nabla \times \nabla \theta = 2\pi \delta^2(\mathbf{r})$.

-Em $d = 2$, o potencial tipo delta, $\delta^2(\mathbf{r})$, que escala como $\frac{1}{r^2}$.

Logo, um sistema composto por uma partícula carregada interagindo com um vórtice magnético num potencial de fundo tipo delta é invariante por reparametrização temporal,

$$H = \frac{1}{2}mv^2 - g\delta^2(\mathbf{r}) = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - \mathbf{A})^2 - g\delta^2(\mathbf{r}). \quad (5.3)$$

Esta teoria não relativística pode ser tratada em segunda quantização obtendo-se desta forma uma teoria quântica de campos não relativística [47],

$$I = \int dt d^2\mathbf{r} [i\Psi^* \partial_t \Psi - \mathcal{E}] = \int dt d^2\mathbf{r} [i\Psi^* \partial_t \Psi - \frac{1}{2m} |\mathbf{D}\Psi|^2 + \frac{g}{2} \rho^2]. \quad (5.4)$$

A Hamiltoniana é $\mathcal{H} = \int d^2\mathbf{r} \mathcal{E}$ e a densidade de matéria $\rho = |\Psi|^2$. Introduzimos também a derivada covariante $\mathbf{D} = \nabla - i\mathbf{A}$, com $\mathbf{A}$ sendo o potencial de gauge determinado pela densidade de matéria

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \nabla \times \frac{1}{2\pi\kappa} \int d^2\mathbf{r}' \ln|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rho(t, \mathbf{r}'), \quad (5.5)$$

e de modo que a lei de Gauss da teoria Chern-Simons, Eq.(3.19) é satisfeita,

$$B = \nabla \times A = -\frac{1}{\kappa}\rho. \quad (5.6)$$

Nas soluções estáticas $g = \frac{1}{mk}$ esta teoria apresenta simetrias por reparametrizações conformes no plano bidimensional.

Por outro lado, o problema de uma partícula carregada interagindo com o campo externo de um vórtice pontual apresenta o grupo de simetria $SO(2,1) \times U(1)$, onde o fator $U(1)$ resulta da simetria rotacional, cujo gerador é o momento angular. Existe uma diferença fundamental quando este problema é comparado com o problema da partícula carregada interagindo com um campo de Chern-Simons, i.e., o potencial de gauge agora é uma variável dinâmica. Neste último caso o momento angular ganha uma contribuição adicional que não está presente no primeiro caso, e faz com que seus autovalores dependam do parâmetro de Chern-Simons. No primeiro caso os autovalores do momento angular são os usuais, i.e., múltiplos inteiros de $\hbar$. Podemos dar uma caracterização física para explicar esta diferença. No problema do campo externo o potencial de gauge, prescrito externamente, pode ser sustentado somente pela dinâmica de Maxwell e, como consequência, as constantes de movimento ganhariam contribuições do momento, momento angular, etc. devido ao campo. Estas contribuições podem frequentemente ser reunidas no momento canônico, o qual difere do momento cinemático. Porém, o campo de Chern-Simons apenas determina uma *interação estatística* e as partículas não experimentam a força da eletrodinâmica de Maxwell. Logo, as constantes de movimento podem ser expressas apenas em termo das variáveis cinemáticas, como pode ser visto em (3.83) e (3.82).

Uma teoria com spin e estatística fracionários pode ser vista em duas formas alternativas e equivalentes: como uma teoria com interação não local, Eq.(3.167), e com propagador dado por (3.157), ou como uma teoria com interação usual e com propagador aparentemente livre, mas cuja função de onda é sujeita a condições de contorno não triviais. Na primeira descrição, os observáveis são modificados devido a que a interação pode contribuir nas quantidades conservadas. Na segunda, os observáveis são como na teoria livre mas seus espectros são modificados pelas condições de contorno da função de onda. Por exemplo, o operador momento

angular na primeira descrição é, Eq.(3.83),

$$J = \sum_{p=1}^N m_p \mathbf{r}_p \times \mathbf{v}_p = \sum_{p=1}^N \mathbf{r}_p \times (-i) \nabla_p + \frac{\Phi}{\pi}, \quad (5.7)$$

que atua sobre uma função de onda univalente. Na segunda, o momento angular é

$$J_0 = \sum_{p=1}^N \mathbf{r}_p \times (-i) \nabla_p, \quad (5.8)$$

que atua sobre uma função de onda multivalente. Em ambos os casos o espectro é fracionário. Em resumo, o modo de produzir uma interação não local com as consequências acima é acoplado com um campo de Chern-Simons. A estreita relação entre spin fracionário, estatística e topologia do espaço de configuração faz com que a generalização para sistemas de partículas numa superfície compacta de topologia arbitrária, seja um processo não trivial. Neste sentido, os casos mais explorados foram as superfícies esféricas e toroidais, dos quais o último é mais simples.

Os elétrons em 2-d na presença do campo magnético ocupam os níveis de Landau que são altamente degenerados. Em baixas temperaturas e campos magnéticos intensos, estes elétrons apresentam fortes correlações quânticas formando um *fluido quântico*. Nestas condições, aparecem efeitos quânticos macroscópicos, i.e. a quantização da condutividade de Hall, que é observada com alta precisão. No limite de campos magnéticos muito intensos os elétrons são confinados no nível de Landau mais baixo, devido a que a separação entre níveis de Landau adjacentes é proporcional à intensidade do campo magnético. Em ausência de interações, este sistema apresenta uma simetria infinita cujo geradores satisfaz a álgebra do difeomorfismo que preserva área, i.e. a álgebra ω_∞ . Classicamente, o origem desta simetria são transformações canônicas no espaço de fase quadri-dimensional. Sob quantização o campo magnético elimina a energia cinética e a dimensão do espaço de fase é reduzida para duas. Quanticamente, estes geradores satisfazem uma deformação da álgebra ω_∞ e é chamada à álgebra W_∞ . Estes geradores quânticos podem ser usados para descrever excitações dentro do nível de Landau [48].

A Sistema de dois anyons

Resolvemos a mecânica quântica de dois anyons. A hamiltoniana é dada pela Eq.(3.94) ou, em coordenadas relativas, pela Eq.(3.98). O movimento no CM é trivial e é determinado imediatamente,

$$E_{CM} = \frac{\mathbf{P}^2}{4m}, \quad \psi_{CM} = \exp[i\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}]. \quad (\text{A.1})$$

Por simplicidade, colocamos $\hbar = c = 1$. Para o movimento relativo usamos coordenadas cilíndricas, $\mathbf{r} = (r, \theta)$, e a correspondente equação de autovalores fica

$$\left[-\frac{1}{m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{mr^2} \left(i \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{q\Phi}{2\pi} \right)^2 \right] \psi_{rel}(r, \theta) = E_{rel} \psi_{rel}(r, \theta), \quad (\text{A.2})$$

junto com a condição de contorno

$$\psi_{rel}(r, \theta) = \psi_{rel}(r, \theta + \pi). \quad (\text{A.3})$$

Desde que esta Hamiltoniana é separável nas variáveis r e θ , a função de onda fatora e o fator angular satisfaz

$$\psi_{rel}(r, \theta) = \mathcal{R}(r) \mathcal{Y}(\theta) \implies \left(i \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{q\Phi}{2\pi} \right)^2 \mathcal{Y}_l(\theta) = \lambda \mathcal{Y}_l(\theta) \quad (\text{A.4})$$

cujas soluções, consistentes com a condição de contorno, é

$$\mathcal{Y}_l(\theta) = e^{il\theta}, \quad l \longrightarrow \text{inteiro par}, \quad (\text{A.5})$$

o qual determina

$$\lambda = \left(l + \frac{q\Phi}{2\pi} \right)^2, \quad l \longrightarrow \text{inteiro par}. \quad (\text{A.6})$$

Quando λ é substituído na equação radial obtemos

$$\left[-\frac{1}{m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{mr^2} \left(l + \frac{q\Phi}{2\pi} \right)^2 \right] \mathcal{R}(r) = E_{rel} \mathcal{R}. \quad (\text{A.7})$$

Ou seja, o efeito do termo de Chern-Simons é aumentar um termo $\frac{q\Phi}{2\pi}$ no momento angular e, conseqüentemente, também na barreira centrífuga, como pode-se notar nesta última equação. Definindo

$$E_{rel} = \frac{k^2}{m}, \quad (A.8)$$

a equação radial pode ser reescrita como

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \left(l + \frac{q\Phi}{2\pi} \right)^2 + k^2 \right] \mathcal{R}(r) = 0, \quad (A.9)$$

o qual constitui a equação de Bessel, com soluções dadas por

$$\mathcal{R}(r) = J_{|l + \frac{q\Phi}{2\pi}|}(kr). \quad (A.10)$$

A função J é a *função de Bessel* de primeira espécie, de ordem $|l + \frac{q\Phi}{2\pi}|$. Portanto, a função de onda total na descrição usual é

$$\psi(\mathbf{R}, r) = \psi_{CM}(\mathbf{R}) \psi_{rel}(r) = e^{i\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}} e^{i(l + \frac{q\Phi}{2\pi})\theta} J_{|l + \frac{q\Phi}{2\pi}|}(kr). \quad (A.11)$$

O efeito da interação não local sobre o espectro de energia pode ser visto colocando o sistema, por exemplo, numa caixa cilíndrica de raio r_0 e impondo a condição de contorno

$$\psi_{rel}(r_0, \theta) = 0 \implies J_{|l + \frac{q\Phi}{2\pi}|}(kr_0) = 0. \quad (A.12)$$

Isto leva ao espectro de energia

$$E_{K;n,l} = \frac{K^2}{4m} + \frac{x_{n,l}^2}{mr_0^2}, \quad (A.13)$$

onde $x_{n,l}$ é a localização do n -ésimo zero de $J_{|l + \frac{q\Phi}{2\pi}|}$. Note que este espectro interpola continuamente entre os casos bosônico e fermiônico:

$$\begin{aligned} \text{-bósons} &\longrightarrow \frac{q\Phi}{4\pi} = \mathbb{Z}; \\ \text{-férmions} &\longrightarrow \frac{q\Phi}{4\pi} = \frac{\mathbb{Z}}{2}, \end{aligned}$$

respectivamente.

Referências

- [1] Yu Lu, *Solitons and Polarons in conducting polymers*, World Scientific, Singapore, 1988.
- [2] *Physics, Geometry and Topology*, ed. por H.C. Lee, Plenum Press, New York, 1990.
- [3] R. Jackiw, Nucl. Phys. B 252, 343 (1985).
- [4] *The Quantum Hall Effect*, ed. por R. E. Prange e S. M. Girvin, Springer, New York, 1987.
- [5] S. Fubini, Nuovo Cimento A34, 521 (1976).
- [6] E. Bessel-Hagen, Math. Ann. 84, 258 (1921).
- [7] V. Alfaro, S. Fubini e G. Furlan, Nuovo Cimento A34, 569 (1976).
- [8] A. Perelomov, *Generalized coherent states and their applications*, Springer Verlag, 1986.
- [9] B. G. Wybourne, *Classical group for physicists*, New York, 1974.
- [10] R. Jackiw, Phys. Today 25, 23 (1972).
- [11] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *The classical theory of field*, vol. 2, Pergamon Press, 1959.
- [12] R. Jackiw, Ann. Phys. 201 (New York), 117 (1990).
- [13] R. Jackiw, Ann. Phys. 129 (new York), 183 (1980).
- [14] R. Jackiw, *E. S. Fradkin Festschrift*, Adam Hilger, Bristol, 1985.
- [15] J. Schonfeld, Nucl. Phys. B156, 135 (1982); S. Deser, Phys. Rev. Lett. 48, 975 (1982); S. Deser, Ann. Phys. 140, 372 (1984); A. J. Niemi e G. W. Semenoff, Phys. Rev. Lett. 51, 2077 (1983).
- [16] C. Hagen, Ann. Phys. 157 (New York), 342 (1984).
- [17] Y. H. Chen, F. Wilczek, E. Witten e B. Halperin, Int. J. Mod. Phys. B3, 1001 (1989).

- [18] L. Faddev e R. Jackiw, Phys. Rev. Lett. 60, 1692 (1988); R. Jackiw, *Quantization without tears*, hep-th/9306075.
- [19] T. Matsuyama, Phys. Lett. B228, 99 (1989).
- [20] Y. S. Wu, Phys. Rev. Lett. 52, 2103 (1984).
- [21] R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. 50, 1395 (1983).
- [22] R. Jackiw, *Current algebra and anomalies*, Princeton University Press/ World Scientific, 1985.
- [23] R. Jackiw e N. Redlich, Phys. Rev. Lett. 50, 555 (1983).
- [24] J. M. Leinaas e J. Myrheim, Nuovo Cimento B37, 1 (1977); D. Arovas, R. Schrieffer, F. Wilczek e A. Zee, Nucl. Phys. B251, 117 (1985).
- [25] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 48, 1144 (1982); *ibid.* 49, 957 (1982).
- [26] *Fractional statistics and anyon superconductivity*, ed. por F. Wilczek, World Scientific, Singapore, 1990.
- [27] J. M. Leinaas e J. Myrheim, Nuovo Cimento B37, 1 (1977); G. Goldin, R. Menikoff e D. H. Sharp, J. Math. Phys. 22, 1664 (1981).
- [28] M. V. Berry, Proc. R. Soc. A392, 45 (1984).
- [29] R. Mackenzie e F. Wilczek, Int. J. Mod. Phys. A3, 2827 (1988).
- [30] C. Nash e S. Sen, *Topology and Geometry for Physicists*, Academic Press, London, 1982.
- [31] E. Fadell e J. van Buskirk, Duke Math. J. 29, 243 (1962); J. S. Birman, Comm. Pure and App. Math. 22, 41 (1969); R. Fox e L. Neuwirth, Math. Scand. 10, 119 (1962).
- [32] M. Laidlaw e C. De Witt, Phys. Rev. D3, 6 (1971).

- [33] L. Schulman, *Techniques and applications of path integration*, J. Wiley, New York, 1981.
- [34] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics*, vol 3, Pergamon Press, 1959.
- [35] K. von Klitzing, G. Dorda r M. Pepper, Phys. Rev. Lett. 45, 494 (1980).
- [36] B. I. Halperin, Helv. Phys. Acta 56, 75 (1983).
- [37] R. B. Laughlin, Phys. Rev. B23, 5632 (1981).
- [38] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley, 1975.
- [39] Q. Niu, D. J. Thouless e Y. S. Wu, Phys. Rev. B31, 3372 (1985); J. E. Avron e R. Seiler, Phys. Rev. Lett. 54, 259 (1985).
- [40] D. C. Sörmer e A. C. Gossard, Phys. Rev. Lett. 48, 1559 (1982).
- [41] R. Willet et al., Phys. Rev. Lett. 59, 1776 (1987).
- [42] A. L. Fetter, C. B. Hanna e R. B. Laughlin, Phys. Rev. B40, 8745 (1989); S. Bahcall e L. Susskind, Int. J. Mod. Phys B5, 2735 (1991); R. K. Bhaduri e S. Li, Preprint MCMA-TP-91-07 (Mc Master University).
- [43] V. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer Verlag, New York, 1978.
- [44] H. Aratyn, L. A. Ferreira, J. F. Gomes e A. H. Zimmerman, *Basics of W infinity algebra and some applications in Physics*, Caxambu, 1992.
- [45] L. Landau e E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, vol 6, Pergamon Press, 1959.
- [46] L. D. Landau, Z. Phys. 64, 629 (1930).
- [47] R. Jackiw e S.-Y. Pi, Phys. Rev. Lett. 64, 2969 (1990); Phys. Rev. D42, 3500 (1990); C. Kim, Ch. Lee, P. ko e B-H. Lee, preprint SNUTP 93-14/ UMN-TH-1135/ hep-th 9303131.

- [48] A. Cappelli, C. A. Trugenberger e G. Zemba, preprint CERN-TH 6516/92, maio de 1992; J. Martinez e M. Stone, preprint NSF-ITP-93-38, março de 1993; M. Flohr e R. Varnhagen, preprint BONN-HE-93-29/hep-th 9309083, setembro de 1993; D. Karabali, preprint SU-4240-553, Syracuse Univ., setembro de 1993.

