



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Tópicos da Geometria Projetiva

Renata Brandão de Castro

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação – Mestrado Profissional em
Matemática Universitária do Departamento
de Matemática como requisito parcial para a
obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Elíris Cristina Rizzioli

2012

Brandão de Castro, Renata

Tópicos da Geometria Projetiva/ Renata Brandão de Castro- Rio
Claro: [s.n.], 2012.

94 f.:fig.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Insti-
tuto de Geociências e Ciências Exatas.

Orientadora: Elfris Cristina Rizziolli

1. Geometria. 2. Geometria Projetiva. 3. Perspectivas e Pro-
jeções.

TERMO DE APROVAÇÃO

Renata Brandão de Castro
TÓPICOS DA GEOMETRIA PROJETIVA

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Elíris Cristina Rizzioli
Orientadora

Prof. Grazielle Feliciani Barbosa
Departamento de Matemática - UFSCAR - São Carlos, SP.

Prof. Dr. Carina Alves
Departamento de Matemática - IGCE/UNESP - Rio Claro, SP.

Rio Claro, 09 de Outubro de 2012

Dedico este trabalho aos meus pais, João Guilherme e Ana Alice.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, pois sem Ele nada conseguiria.

Aos meus pais João Guilherme e Ana Alice que sempre me apoiaram e acreditaram no meu trabalho.

Aos meus irmãos Murilo e Mateus, que me levaram e me buscaram tantas vezes em Rio Claro.

Ao meu namorado Gustavo que sempre me deu força e teve paciência nas minhas ausências.

Ao Geraldo, pai da Letícia, minha amiga e companheira de curso, que nos levava toda sexta feira para Rio Claro sempre alegre e nos dando força.

Aos colegas de curso por estarem sempre ajudando uns aos outros.

A colega Evelize, quem me acolheu muitas vezes em sua casa com todo carinho e atenção.

Aos professores desse programa, que estavam sempre prontos a nos ajudar e conversar sobre qualquer assunto.

Em especial à minha orientadora e amiga, Elíris, que esteve comigo o tempo todo, me recebendo sempre alegre e entusiasmada com esse trabalho.

Resumo

Neste projeto tratamos da Geometria Projetiva advinda da generalização da Geometria Afim do Plano Euclidiano. Estabelecemos um Sistema Axiomático para a Geometria Projetiva e provamos resultados de sustentabilidade para esta geometria, sobretudo resultados sobre Perspectivas e Projeções. Também exploramos Cônicas dentro deste contexto.

O principal livro usado como referência deste trabalho foi [1] de Judith Cederberg e como textos auxiliares consultaremos [2] e [3].

Palavras-chave: Geometria, Geometria Projetiva, Perspectivas e Projeções.

Abstract

This project dealt with the Projective Geometry arising from the generalization of the Affine Geometry of the Euclidean Plane. Established an Axiomatic System for Projective Geometry and prove sustainability outcomes for this geometry, particularly on results Prospects and Projections. We also explored conics within this context.

Keywords: Geometry, Projective Geometry, Perspectives and Projectivities.

Lista de Figuras

1.1	Euclides.	10
1.2	Retas paralelas que parecem se encontrar num ponto.	10
1.3	Filippo Bruneleschi.	11
1.4	Flagelação de Cristo.	11
2.1	Triângulo.	13
2.2	Triângulos perspectivos por um ponto e por uma reta.	14
2.3	Quadrângulo completo.	14
2.4	Quadrilateral completo.	15
2.5	Feixe de retas.	15
2.6	Feixe de pontos.	15
2.7	Perspectividade entre dois feixes de pontos.	16
2.8	Perspectividade entre dois feixes de reta.	17
2.9	Perspectividade entre um feixe de pontos e um feixe de retas.	17
2.10	Projetividade entre os feixes de pontos A, B, C e A'', B'', C'' respectivamente.	18
2.11	Plano xyz	19
2.12	Aplicação da $\mathcal{F}$	20
2.13	Triângulos perspectivos por uma reta (P, Q e R são colineares).	22
2.14	Conjunto harmônico $H(AB, CD)$	23
2.15	$\triangle EFG$ e $\triangle E'F'G'$ perspectivos pela reta AB	24
2.16	$H(AB, CD) \Leftrightarrow H(CD, AB)$	25
2.17	Conjunto harmônico $H(ab, cd)$	26
2.18	Projetividade entre os feixes de pontos A, B, C e A'', B'', C'' respectivamente.	27
2.19	Projetividade entre os feixes de retas a, b, c e a'', b'', c'' respectivamente.	27
2.20	Projetividade entre um feixe de retas a, b, c e um feixe de pontos A'', B'', C'' respectivamente.	28
2.21	Composição de duas perspectividades.	29
2.22	Se $H(AB, CD)$ e $ABCD \wedge A'B'C'D'$, então $H(A'B', C'D')$	30
2.23	Eixo de homologia.	32
2.24	Cônica de Pontos.	33

2.25	P e P' , pontos da cônica de pontos.	34
2.26	Hexágono.	35
2.27	Pontos diagonais J, L e K , do hexágono $PBP'ACD$, colineares.	36
2.28	Hexágono inscrito em um ponto cônico.	37
2.29	Os três pontos colineares de um ponto cônico.	38
2.30	Os quatro pontos colineares de um ponto cônico.	39
2.31	Cônica de pontos usando o Teorema de Pascal.	39
3.1	Pares ordenados.	43
4.1	C , ponto invariante e m , reta de referência invariante.	70
4.2	Retas invariantes.	71
4.3	Colinação perspectiva com centro C	72
4.4	Colinação perspectiva com eixo m	72
4.5	X não pertence a CP e nem a m na homologia com centro C e eixo m	74
4.6	X pertence a CP e Y não pertence a CP na homologia com centro C e eixo m	74
4.7	Cônica de pontos e suas tangentes.	81
4.8	Triângulo diagonal auto-polar.	82
4.9	Construção de uma reta polar a um ponto P não pertencente a uma cônica.	83
4.10	Reta p interceptando a cônica em pontos distintos R e S	84
4.11	Reta p que não intercepta a cônica.	84
5.1	S, R e Q são pontos colineares.	91

Sumário

1	Introdução	9
2	Elementos da Geometria Projetiva	13
2.1	Sistema Axiomático	13
2.2	Plano Projetivo	18
2.3	Propriedades	21
2.4	Cônicas no Plano Projetivo	32
3	Modelo Analítico para o Plano Projetivo	42
3.1	Sobre o plano euclidiano	43
3.2	Sobre o plano projetivo	45
4	Transformações do Plano Projetivo	61
4.1	Colineação	61
4.2	Correlação e Polaridade	74
5	Validação do Modelo Analítico	86
	Referências	94

1 Introdução

Do ponto de vista analítico de Klein a definição de geometria projetiva é a generalização lógica da geometria afim. Na geometria afim, por sua vez, todas as transformações que preservam o paralelismo e a razão entre segmentos paralelos são chamadas transformações afins. Muitas vezes, dizemos ainda que as transformações afins preservam as propriedades que são mantidas numa projeção paralela de um plano sobre o outro. A geometria projetiva é capaz de generalizar afinidades colineares, a transformação que define essa geometria. O conjunto de pontos contido no plano euclidiano deve ser ampliado para incluir pontos além de uma linha, a linha muitas vezes referida como linha ideal.

Ao invés de complicar a geometria, estes novos pontos ideais simplificam a geometria projetiva e dão a propriedade tão desejada de dualidade. Uma diferença fundamental da Geometria Projetiva para a Geometria Euclidiana/ Afim é que não é mais necessário distinguir as seções cônicas entre círculos, elipses, parábolas e hipérbolas ou diferenciar as retas paralelas das não paralelas. Nesta Geometria, qualquer par de retas distintas é incidente em um ponto e por qualquer par de pontos distintos passa-se somente uma reta. Esta dualidade é uma das suas características fundamentais, permitindo associar a ela uma estrutura simétrica caracterizada pelo princípio de dualidade.

Euclides (± 330 a.C. - ± 270 a.C.), primeiro professor de matemática do Museu de Alexandrina, foi o autor da obra monumental *Os Elementos* constituída por 13 livros (capítulos). Seu texto intitulado *Óptica (Eustoichia)* foi um dos primeiros trabalhos escritos sobre perspectivas. A obra não trata apenas de Geometria, inclui também resultados de aritmética.

Outros notáveis do Museu foram o ex aluno Apollonius de Perga (± 262 a.C. - ± 190 a.C.), com o estudo das cônicas, e um professor do Museu, Pappus de Alexandria (± 290 - ± 350) que ampliou o trabalho de Euclides com resultados diferentes do que tinham feito até o momento, demonstrando somente novos teoremas que falavam sobre axiomas de incidência.

A Geometria Projetiva começou de fato, com a introdução de percepção de profundidade em pinturas e nos desenhos durante o Renascimento, como uma resposta à busca por maior realismo nas obras, procurando reproduzir fielmente a "imagem" capturada pela visão humana, ou seja, obter representações realistas de objetos tridimensionais



Figura 1.1: Euclides.

em duas dimensões na tela. Por exemplo, ao olharmos para as pistas de uma estrada, elas parecem se encontrar num ponto. Estes pintores influenciados pela tese de Platão de que a natureza é matematicamente desenhada, acharam relações que puderam ser usadas para obter perspectivas. Essa interação da matemática e arte, a importante tese de Platão e a influência da igreja fazem das origens da geometria projetiva um episódio fascinante da história da matemática.



Figura 1.2: Retas paralelas que parecem se encontrar num ponto.

Um dos mais importantes destes artistas, para não dizer o mais importante, foi Giotto di Bondone (1266-1337), pintor e arquiteto de Florença, e considerado o anunciante do Renascimento. Ele revela em suas obras a preocupação em mostrar a idéia de tridimensionalidade. Filippo Brunelleschi (1377-1466) entrou para história em 1434 ao concluir a Santa Maria Del Fiori em Florença, primeira cúpula em grandes dimensões. Ele redescobriu, com base na geometria, as regras da perspectiva linear, que, conhecidos por gregos e romanos, ficaram esquecidos durante toda a Idade Média. Restabeleceu na prática o conceito de ponto de fuga, e a relação entre a distância e a redução no tamanho dos objetos.

Na mesma época, Leon Battista Alberti (1405-1472), arquiteto, escritor, pintor e escultor, escreveu Tratados sobre todas as áreas em que atuou, propondo que os artistas buscassem no estudo científico, na história e na matemática, fundamentos para o



Figura 1.3: Filippo Brunelleschi.

seu trabalho. Escreveu o primeiro manual sistematizado de perspectiva, apresentando aos escultores normas de proporções humanas ideais. Em um dos tratados, o objetivo principal de Alberti é precisamente o de estabelecer as bases científico-naturalísticas da pintura, para os quais o conteúdo objetivamente científico da perspectiva é determinante e o que, por si só, justificava a sua maior qualificação. Também para Brunelleschi, a representação deveria ter um caráter racional e geométrico-matemático.

O século XV é um período fundamental para o desenvolvimento prático da perspectiva e também para sua teorização. Piero della Francesca (1415-1492), mestre de matemática do monge franciscano, que além do seu trabalho como pintor, escreve um tratado dedicado às questões da perspectiva na pintura, o *De prospectiva pingendi*. O tratado tem como elementos essenciais a proporção e a mensuração e apresenta um aspecto didático importante, pois é acrescido de inúmeras imagens, desenhos de projeções em perspectiva. No livro há proposições e demonstrações no mesmo estilo de *Os Elementos* de Euclides, por sua estrutura lógica. Em *Flagelação de Cristo*, sua obra mais importante, ele aplica de forma exemplar a teoria descrita em seu tratado.



Figura 1.4: Flagelação de Cristo.

Com a retomada do livro *Os Elementos* apareceram muitos resultados formidáveis sobre a idéia de incidência. Girard Desargues (1591-1661) e Blaise Pascal (1623-1662)

provaram várias propriedades não métricas de cônicas que eram diferentes daquelas examinadas por Apolônio há dezoito séculos.

O matemático alemão David Hilbert (1862-1943) apresentou um sistema de axiomas completo para as geometrias euclidianas plana e espacial numa série de conferências na Universidade de Göttingen. Isto dizia que todos os resultados de *Os Elementos* ficavam válidos assumindo seus postulados. Logo após a fixação dos axiomas de Hilbert, o matemático americano Oswal Veblen (1880-1960) estabeleceu os axiomas da Geometria Projetiva na sua obra *Projective Geometry*, junto com John Wesley Young. Hoje em dia, o inglês H. M. S. Coxeter (1907-19) é considerado o maior geômetra sintético.

A relevância da geometria projetiva para obter as representações realistas planas de objetos tridimensionais está atualmente fazendo o estudo da geometria projetiva um pré-requisito para o estudo da computação gráfica. O valor desse pré-requisito está se aprimorando, uma vez que a computação gráfica usa a representação analítica de pontos e retas por coordenadas homogêneas e a representação de transformações de matrizes desenvolvidas na geometria projetiva.

Este trabalho tem por objetivo apresentar alguns tópicos da Geometria Projetiva bem como seus elementos, modelo e transformações.

A dissertação inicia-se com a apresentação dos elementos e o sistema de axiomas dessa geometria. Em seguida, tratamos do modelo analítico e das transformações da Geometria Projetiva. E por fim encerramos com as verificações desse sistema axiomático em nosso modelo analítico.

Observamos ainda que, embora tratamos do Plano Projetivo, as figuras foram feitas no Plano Euclidiano, em prol de um melhor entendimento dos objetos abordados.

Por fim, os resultados chamados de dual ao outro resultado significa que este ainda é válido e a demonstração é análoga, bastando trocar a palavra "ponto" pela palavra "reta" e vice-versa.

2 Elementos da Geometria Projetiva

No que segue apresentamos os elementos da Geometria Projetiva sobre os quais baseamos este trabalho.

2.1 Sistema Axiomático

Para estabelecer o sistema axiomático é preciso primeiramente elucidar os objetos centrais da geometria projetiva. Observamos que neste momento apenas apresentaremos as definições necessárias para enunciarmos o sistema axiomático para a geometria projetiva.

Entretanto na seção 2.3 exploraremos resultados concernentes a estes os quais proporcionarão um melhor entendimento. Iniciamos com a definição de triângulo que, embora apresentado de um modo diferente da geometria euclidiana, mantém propriedades semelhantes a definição clássica.

Definição 2.1. *Um **triângulo** é um conjunto de três pontos não colineares e três retas determinadas por estes pontos. Os pontos são chamados vértices e as retas são chamadas de lados do triângulo. (veja figura 2.1)*

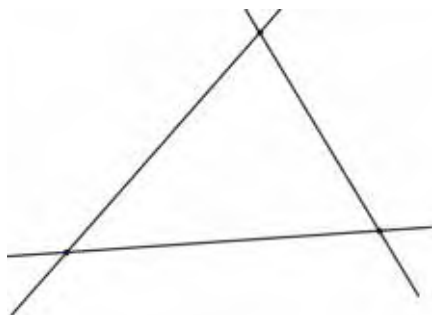


Figura 2.1: Triângulo.

Definição 2.2. *Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são **perpectivos por um ponto** se as três retas correspondentes aos vértices, AA' , BB' e CC' são concorrentes. Os triân-*

gulos são **perpectivos por uma reta** se os três pontos de intersecção correspondentes aos lados, $AB \cdot A'B'$, $AC \cdot A'C'$, e $BC \cdot B'C'$, são colineares (veja figura 2.2).

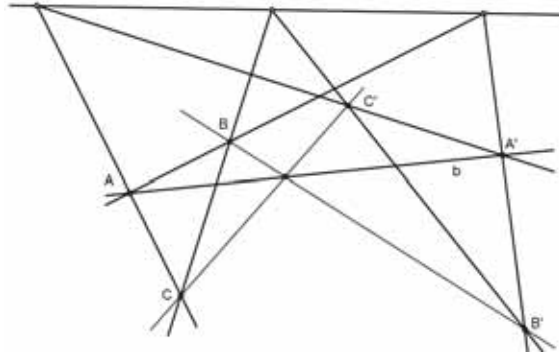


Figura 2.2: Triângulos perspectivos por um ponto e por uma reta.

Definição 2.3. *Quadrângulo completo* é um conjunto de quatro pontos, a cada três não colineares, e as seis retas determinadas por esses quatro pontos. Os pontos são chamados de vértices e as retas são chamadas de lados do quadrângulo. Se A, B, C e D são os quatro pontos do quadrângulo, então AB e CD , AC e BD , e AD e BC são denominados pares de lados opostos. Os pontos, nos quais, os pares de lados opostos se interceptam são chamados de pontos diagonal do quadrângulo. (veja figura 2.3)

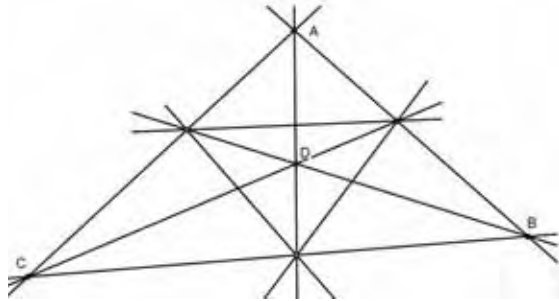


Figura 2.3: Quadrângulo completo.

Definição 2.4. (Dual da definição 2.3) *Quadrilateral completo* é um conjunto de quatro retas, a cada três não concorrentes, e os seis pontos determinados por estas retas. Os pontos são chamados vértices e as retas são chamadas lados do quadrilateral. Se a, b, c e d são as quatro retas do quadrilateral, $a \cdot b$ e $c \cdot d$, $a \cdot c$ e $b \cdot d$ e $a \cdot d$ e $b \cdot c$ são denominados pares de vértices opostos. As retas juntamente com os pares de vértices opostos são chamados de retas diagonal do quadrilateral (veja figura 2.4)

Definição 2.5. O conjunto de retas incidentes sobre um ponto P é chamado um **feixe de retas** com centro P (veja figura 2.5); o conjunto de todos os pontos sobre a reta p é chamado um **feixe de pontos** com eixo p . (veja figura 2.6)

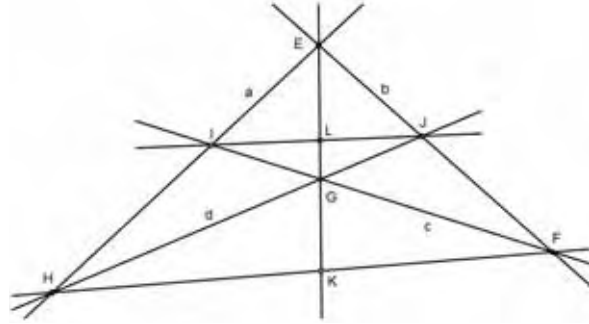


Figura 2.4: Quadrilátero completo.

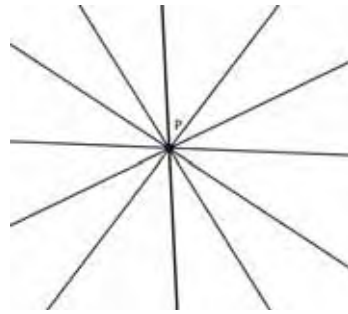


Figura 2.5: Feixe de retas.



Figura 2.6: Feixe de pontos.

- Definição 2.6.** (a) Uma aplicação bijetora entre dois feixes de pontos com eixos em p e p' é chamada uma **perspectividade** se cada reta que une o ponto X sobre p com o ponto correspondente X' sobre p' é incidente sobre um ponto fixado O . O é chamado de **centro da perspectividade**. Tal perspectividade é denotada por $X \overset{O}{\bar{\wedge}} X'$. (veja figura 2.7)
- (b) Uma aplicação bijetora entre dois feixes de retas com centros em P e P' é chamada uma **perspectividade** se cada ponto de interseção das retas x e x' , pertencentes aos feixes envolvidos e incidentes sobre P e P' respectivamente, pertence a uma reta fixada a . a é chamado o **eixo da perspectividade**. Tal perspectividade é denotada por $x \overset{a}{\bar{\wedge}} x'$. (veja figura 2.8)
- (c) Uma aplicação bijetora entre um feixe de pontos com eixo p e um feixe de retas com centro P é chamado uma **perspectividade** se cada ponto X sobre p é incidente sobre a reta correspondente x sobre P . Tal perspectividade é denotada por $X \bar{\wedge} x$

ou $x \bar{\wedge} X$. (veja figura 2.9)

- (d) Em cada uma das definições acima, dizemos que os feixes de pontos e ou retas estão relacionadas **perspectivamente**.

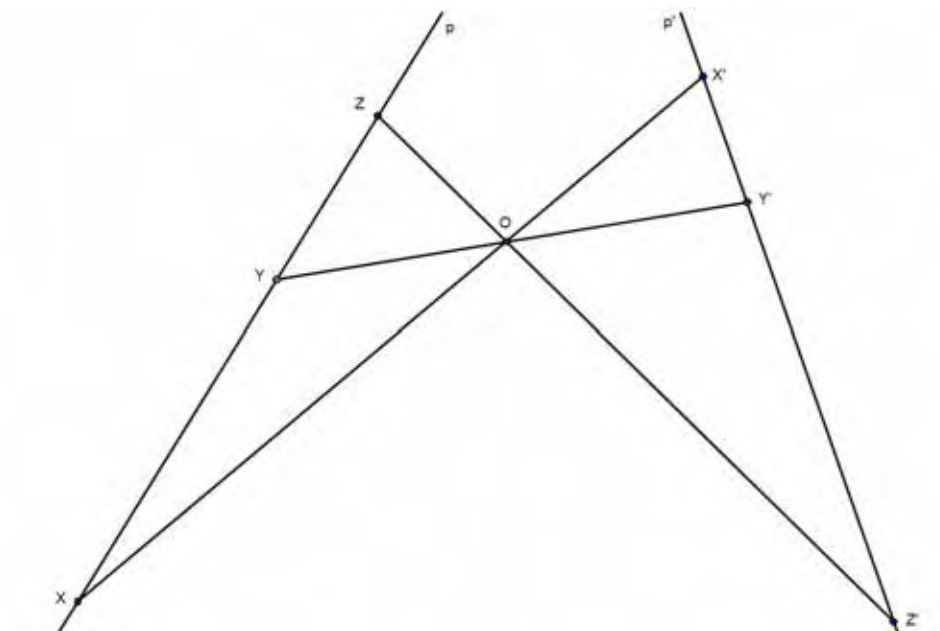


Figura 2.7: Perspectividade entre dois feixes de pontos.

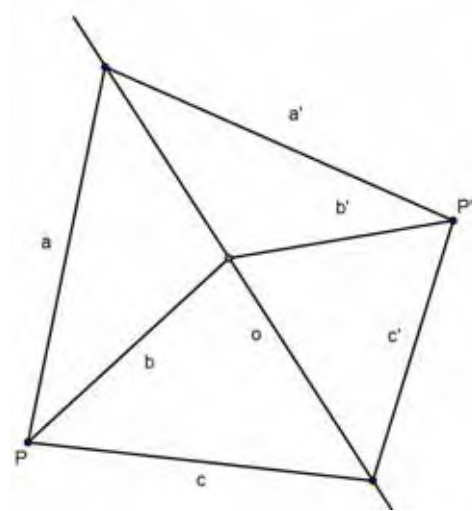


Figura 2.8: Perspectividade entre dois feixes de reta.

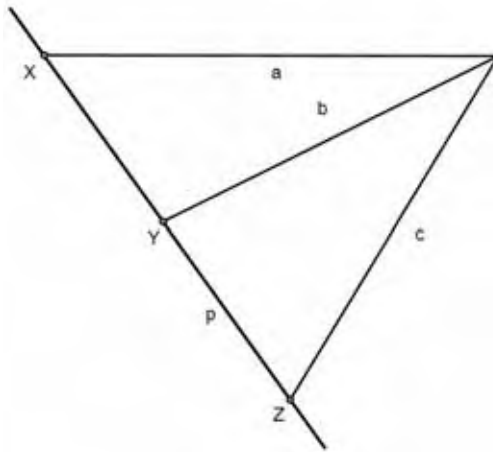


Figura 2.9: Perspectividade entre um feixe de pontos e um feixe de retas.

Definição 2.7. *Uma aplicação bijetora entre os elementos de dois feixes é chamada uma **projetividade** se esta aplicação é o resultado de uma composição de um número finito de perspectividades. Quando uma projetividade existe entre dois feixes dizemos que estes feixes estão relacionados projetivamente. Ainda, quando a projetividade tem o mesmo feixe como domínio e contra-domínio, digamos $\mathcal{F}$, simplesmente dizemos projetividade sobre $\mathcal{F}$.*

A seguir ilustramos uma projetividade entre feixes de pontos, veja figura ??.

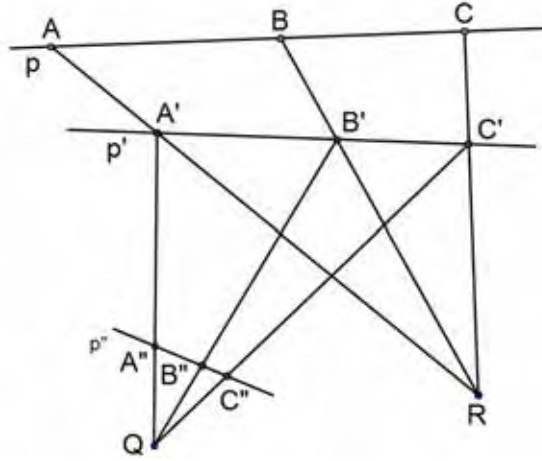


Figura 2.10: Projetividade entre os feixes de pontos A, B, C e A'', B'', C'' respectivamente.

Estabelecidos os objetos anteriores podemos enunciar o sistema axiomático para a geometria projetiva, o qual é composto pelos seguintes axiomas:

Axioma 2.1. *Quaisquer dois pontos distintos são incidentes com exatamente uma reta.*

Axioma 2.2. *Quaisquer duas retas distintas são incidentes com pelo menos um ponto.*

Axioma 2.3. *Existem pelo menos quatro pontos, que a cada três não são colineares.*

Axioma 2.4. *Os três pontos diagonais do quadrângulo completo nunca são colineares.*

Axioma 2.5 (Teorema de Desargues ¹). *Se dois triângulos são perspectivos por um ponto, estes são perspectivos por uma reta.*

Axioma 2.6. *Se uma projetividade sobre um feixe mantém três elementos do feixe invariante, então esta mantém todo elemento do feixe invariante. Ou seja, uma projetividade sobre um feixe que mantém três elementos invariantes é necessariamente a aplicação identidade.*

Observação 2.1. Note que do axioma 2.4 segue que os pontos na diagonal de um quadrângulo formam um triângulo; esse triângulo é denominado **triângulo diagonal**.

2.2 Plano Projetivo

Nesta seção apresentamos um modelo geométrico para o plano projetivo, que é estabelecido via o sistema axiomático apresentado anteriormente.

¹Este resultado conhecido como teorema de Desargues pode ser demonstrado no ambiente da geometria projetiva para um espaço tridimensional, porém em nosso caso como tratamos da geometria projetiva plana não é possível demonstrá-lo

Definição 2.8. Dizemos que um plano é um **plano projetivo** se este satisfaz os axiomas 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4.

Para estabelecer o modelo geométrico para o plano projetivo é preciso estabelecer uma relação injetora de um determinado plano paralelo ao plano xy de modo que pontos sejam aplicados em retas e retas sejam aplicadas em planos. Fazemos isto.

Sejam Π um plano paralelo (não coincidente) ao plano xy do espaço Euclidiano xyz e O a origem do sistema. Note que cada ponto P em Π , junto com o ponto O , determinam uma única reta p . Então podemos dizer que P corresponde a uma única reta que passa por O , a saber, a reta p .

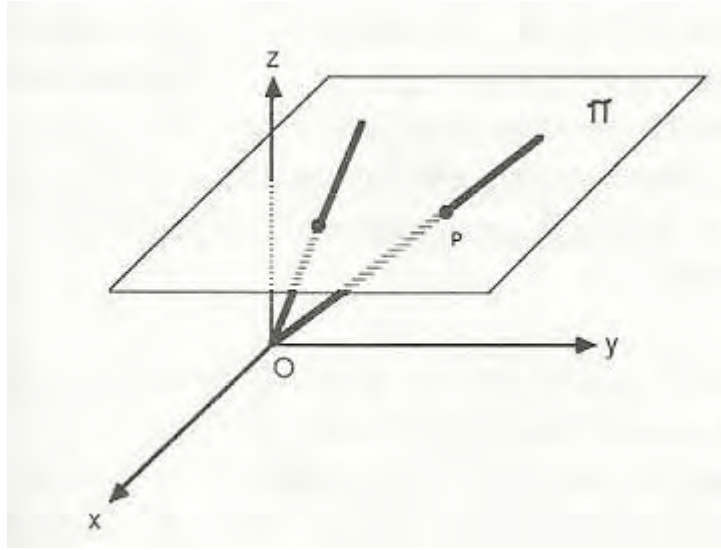


Figura 2.11: Plano xyz .

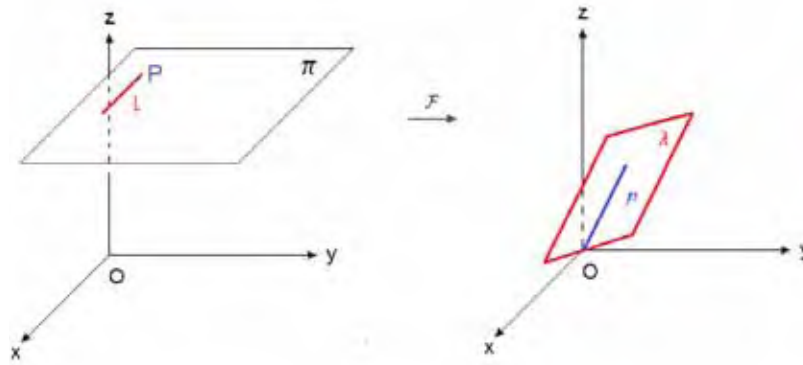
Analogamente cada reta l em Π , junto com o ponto O , determinam um único plano λ , logo podemos dizer que a cada reta l corresponde o único plano que passa por O e contém l , a saber, λ (conforme figura 2.12). Consequentemente existe uma aplicação injetora $\mathcal{F}$ entre o conjunto de pontos e retas em Π para o conjunto de retas e planos passando por O , respectivamente.

Para um melhor entendimento podemos visualizar as ações de $\mathcal{F}$ no esboço da figura 2.12, onde fazemos o abuso de considerar cópias do espaço xyz

Porém, esta aplicação não é sobrejetora, pois o plano xy e o conjunto de todas as retas no plano xy passando por O não pertencem a imagem desta aplicação.

Com a aplicação $\mathcal{F}$ estabelecida vejamos como é possível gerar um modelo geométrico para um plano projetivo.

Um modelo, Π' , de um plano projetivo é obtido adicionando uma reta, chamada reta ideal, e pontos, denominados pontos ideais, a Π , de modo que, a aplicação $\mathcal{F}$ também seja sobrejetora e portanto uma bijeção. Via $\mathcal{F}$ a reta ideal e os pontos ideais são aplicados ao plano xy e àquelas retas passando por O e que pertencem

Figura 2.12: Aplicação da $\mathcal{F}$.

ao plano xy , respectivamente. Uma vez adicionados, essa reta ideal e esses pontos ideais são tratados como quaisquer reta e pontos em Π' . Grosseiramente falando, $\Pi' = \Pi \cup \{\text{pontos ideais}\} \cup \{\text{reta ideal}\}$.

Agora para tratar de resultados envolvendo pontos e retas de Π' é necessário descrever a interpretação do termo "incidência" entre estes. Para tanto, dado um ponto P e uma reta r em Π' dizemos que estes são incidentes se, e somente se, a reta correspondente ao ponto P passando por O (via $\mathcal{F}$) pertence ao plano correspondente a reta r passando por O . Dessa maneira, observe que os pontos ideais são incidentes a reta ideal.

Sob esta interpretação Π' é um modelo geométrico do plano projetivo, no seguinte sentido, Π' satisfaz os axiomas 2.1 a 2.4. Com efeito,

Π' cumpre o axioma 2.1:

Existência:

Dados dois pontos P_1 e P_2 no plano projetivo Π' sempre existe uma reta r em Π' tal que P_1 e P_2 sejam coincidentes a esta. De fato, observe que pela definição de $\mathcal{F}$ temos que as imagens de P_1 e P_2 são retas r_1 e r_2 , as quais no espaço euclidiano 3D definem um único plano, digamos λ . Pela bijetividade de $\mathcal{F}$ existe uma única reta r em Π' tal que $\mathcal{F}(r) = \lambda$. Consequentemente, de modo natural, P_1 e P_2 são incidentes a reta r , já que as retas r_1 e r_2 são incidentes ao plano λ .

Unicidade:

Sejam R_1 e R_2 dois pontos distintos em Π' . Mostremos que estes são incidentes a exatamente uma reta.

Para isto suponha que P_1 e P_2 são incidentes a duas retas r e s . Veja que como P_1 e P_2 são incidentes a reta r segue que as retas r_1 e r_2 , (imagens de P_1 e P_2 na $\mathcal{F}$, respectivamente) são incidentes ao plano λ_r (imagem de r via $\mathcal{F}$). Como P_1 e P_2 são incidentes também na reta s , segue que as retas r_1 e r_2 são incidentes também ao plano λ_s (imagem de s via $\mathcal{F}$). Consequentemente λ_r e λ_s são planos coincidentes, porque

neste ambiente (espaço euclidiano tridimensional), duas retas determinam apenas um plano.

Π' cumpre o axioma 2.2:

Temos que mostrar que quaisquer duas retas distintas em Π' são incidentes com pelo menos um ponto em Π' .

Para isto, sejam l_1 e l_2 retas distintas em Π' . Denotamos por λ_i as imagens de l_i via $\mathcal{F}$, para $i = 1, 2$.

Afirmamos que λ_1 e λ_2 são planos concorrentes no espaço euclidiano 3D. De fato, veja que ambos não são coincidentes, pois l_1 e l_2 são distintas e $\mathcal{F}$ é injetiva. Tampouco λ_1 e λ_2 são planos paralelos no espaço euclidiano tridimensional já que se estes fossem, existiriam retas não concorrentes p_1 e p_2 em λ_1 e λ_2 , respectivamente, e este fato gera um absurdo como veremos a seguir.

Denote por Q_1 e Q_2 pontos de Π' tal que $\mathcal{F}(Q_1) = p_1$ e $\mathcal{F}(Q_2) = p_2$ (que sempre existem, já que $\mathcal{F}$ é sobrejetora). Mas pelo item anterior Q_1 e Q_2 são incidentes com exatamente uma reta l , e isto é equivalente a dizer que as imagens de Q_1 e Q_2 , ou seja, p_1 e p_2 , são retas incidentes a um único plano λ no espaço euclidiano 3D, consequentemente $\lambda_1 = \lambda = \lambda_2$, porém isto contraria o fato de que λ_1 e λ_2 são planos paralelos.

Portanto, λ_1 e λ_2 são sempre planos concorrentes no espaço euclidiano 3D. Seja r a reta gerada pela interseção de λ_1 e λ_2 . Pela sobrejetividade de $\mathcal{F}$ existe um ponto R em Π' tal que $\mathcal{F}(R) = r$.

Mas este ponto necessariamente incide sobre as retas l_1 e l_2 em Π' já que a imagem deste ponto via $\mathcal{F}$ é uma reta r incidente aos planos $\lambda_1 = \mathcal{F}(l_1)$ e $\lambda_2 = \mathcal{F}(l_2)$.

Π' cumpre o axioma 2.3:

Temos que provar que existe pelo menos quatro pontos tais que cada três destes não são pontos colineares. De fato isto ocorre pois, caso contrário, isto é, se quaisquer quatro pontos, cada três destes fossem colineares o axioma 2.1 não seria satisfeito, já que neste caso teríamos dois pontos distintos incidentes com pelo menos duas retas.

Π' cumpre o axioma 2.4:

Observe que três pontos diagonal de um quadrângulo completo nunca são colineares. Se isto não ocorresse, a existência de três pontos diagonal de um quadrângulo completo colineares implicaria que o axioma 2.3 não é satisfeito pelo plano Π' . Uma vez que teríamos quatro pontos com pelo menos três destes colineares, a saber os três pontos diagonal e um dos quatro pontos que originou o quadrângulo completo.

2.3 Propriedades

Uma vez estabelecido um modelo geométrico para o plano projetivo iniciamos o tratamento de elementos importantes da geometria projetiva plana definidos na seção 2.1. Primeiramente apresentamos resultados que envolvem triângulos perspectivos.

Teorema 2.1 (Dual do 2.5). *Se dois triângulos são perspectivos por uma reta, eles são perspectivos por um ponto.*

Demonstração. Suponha que $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são triângulos perspectivos por uma reta, conseqüentemente $AB \cdot A'B' = P$, $BC \cdot B'C' = Q$, e $AC \cdot A'C' = R$ são colineares (veja figura 2.13).

Temos que mostrar que estes triângulos são perspectivos por um ponto, para tanto é preciso mostrar que AA' , BB' e CC' são concorrentes.

Considere $O = AA' \cdot BB'$, então os triângulos são perspectivos por O . Com efeito, primeiramente veja que os triângulos $\triangle RAA'$ e $\triangle QBB'$ são perspectivos pelo ponto P , já que P está em RQ (pois P, Q e R são colineares) e P está em AB e em $A'B'$ (pela definição de $P = AB \cdot A'B'$).

Logo, segue do axioma 2.6 que os triângulos $\triangle RAA'$ e $\triangle QBB'$ são perspectivos por uma reta. Ou seja, $RA \cdot QB = C$, $RA' \cdot QB' = C'$, e $AA' \cdot BB' = O$ são colineares. Do fato de C, C' e O serem colineares segue que O é incidente sobre CC' . Portanto, AA' , BB' , e CC' são concorrentes. $\square$

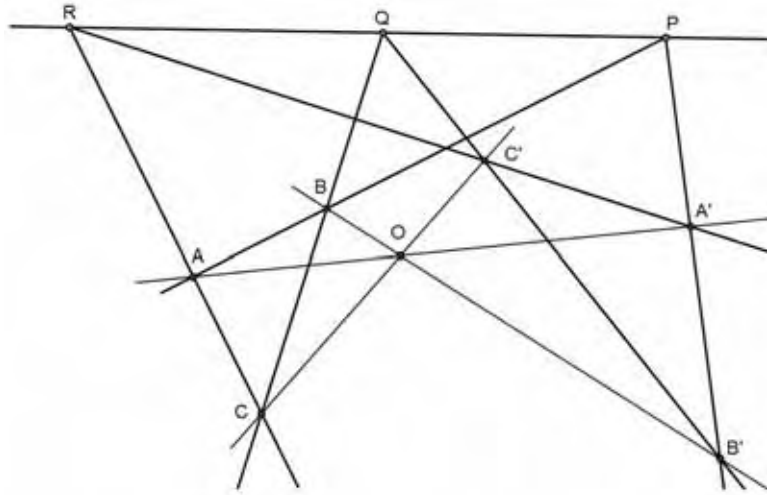


Figura 2.13: Triângulos perspectivos por uma reta (P, Q e R são colineares).

Agora introduzimos uma classe especial de conjuntos, peculiar à geometria projetiva, que contém quatro pontos colineares (e conjuntos duais de quatro retas concorrentes), a saber, conjuntos harmônicos. Dados três pontos colineares e distintos será possível construir um quarto ponto colinear a estes a partir de resultados anteriores. Este quarto ponto, cuja unicidade é garantida pelo axioma 2.5 e seu dual 2.1, terá um papel fundamental ao tratar de cônicas no plano projetivo, como veremos na seção 2.4.

Definição 2.9. *Quatro pontos colineares, A, B, C e D formam um conjunto harmônico $H(AB, CD)$ se existe um quadrângulo completo que dois lados opostos passam por A , dois outros lados opostos passam por B , enquanto os dois lados restantes*

passam por C e D , respectivamente. C é chamado de **conjugado harmônico** de D (ou D é o conjugado harmônico de C) com relação a A e B .

Observação 2.2. Note que A e B são pontos diagonal do quadrângulo que são nomeados primeiro. Também repare que os pontos do primeiro par do conjunto harmônico são distintos dos pontos do segundo par, mas não há distinção feita entre os pontos do primeiro par ou pontos do segundo par; isto é

$$H(AB, CD) \Leftrightarrow H(BA, CD) \Leftrightarrow H(AB, DC) \Leftrightarrow H(BA, DC).$$

A seguir, dados quaisquer três pontos distintos colineares, A, B, C , construiremos um ponto D tal que este é o conjugado harmônico de C com relação para A e B .

Teorema 2.2. Se A, B e C são três pontos colineares e distintos, então existe um único conjugado harmônico, D , de C com relação a A e B .

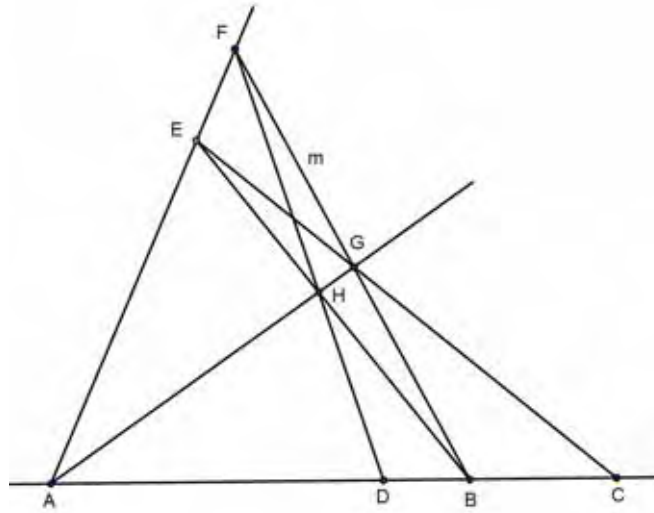


Figura 2.14: Conjunto harmônico $H(AB, CD)$

Demonstração. Existência:

Mostramos a existência do ponto D via a construção do seguinte quadrângulo completo: Seja E um ponto qualquer não pertencente a AB e seja m uma reta que passa por B distinta de AB e tal que não contém E . Agora considere $m \cdot AE = F$, $m \cdot CE = G$ e $AG \cdot EB = H$. Veja que os pontos $EFGH$ definem um quadrângulo tal que dois lados opostos passam por A , dois lados opostos passam por B e um dos lados restantes passa por C e o outro passa por $FH \cdot AB$ (conforme figura 2.14). Logo basta definirmos D como sendo o ponto $FH \cdot AB$.

Unicidade:

Seja $EFGH$ o quadrângulo completo acima usado para determinar D . Mostremos que o ponto D derivado da construção deste quadrângulo completo é único. Para tanto, suponha que exista um segundo quadrângulo completo $E'F'G'H'$ e também construído de modo que $E'H' \cdot F'G' = B$, $E'F' \cdot G'H' = A$ e $E'G' \cdot AB = C$. Provemos que $D' = D$.

Observe que o $\triangle EFG$ e $\triangle E'F'G'$ são perspectivos pela reta AB . (Veja figura 2.15).

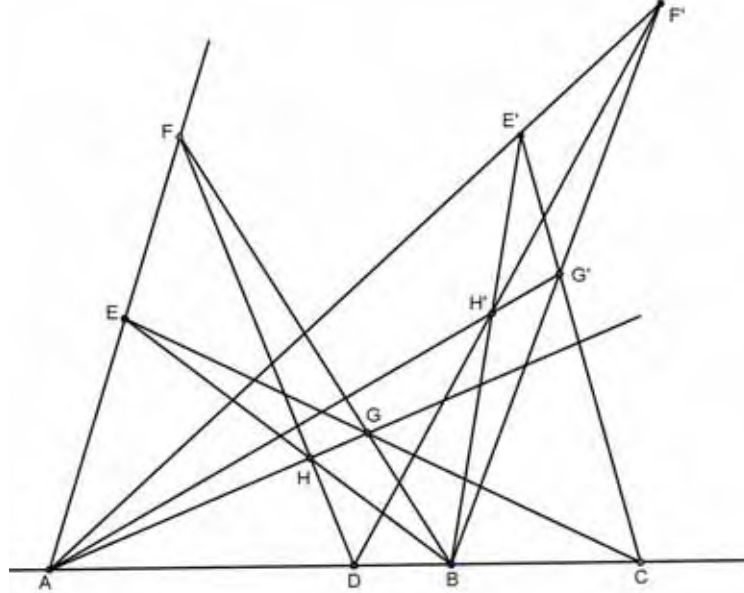


Figura 2.15: $\triangle EFG$ e $\triangle E'F'G'$ perspectivos pela reta AB .

Então pelo Teorema 2.1, eles são perspectivos por um ponto; isto é, EE' , FF' e GG' são concorrentes. Analogamente $\triangle EGH$ e $\triangle E'G'H'$ são perspectivos por AB e conseqüentemente EE' , GG' e HH' são concorrentes. Portanto, as quatro retas EE' , FF' , GG' e HH' são todas concorrentes. Desta forma $\triangle FHG$ e $\triangle F'H'G'$ são perspectivos por um ponto, e pelo Axioma 2.5 disto segue que estes são perspectivos por uma reta. Logo $FH \cdot F'H'$, $FG \cdot F'G' = B$ e $HG \cdot H'G' = A$ são colineares. Mas $FH \cdot AB = D$, $F'H' \cdot AB = D^*$. Portanto $D = D'$.

□

No resultado a seguir veremos que além das possíveis mudanças de ordem dos pares envolvidos no conjunto harmônico, os pares podem ser trocados.

Teorema 2.3. *O conjunto harmônico $H(AB, CD)$ existe se, e somente se, $H(CD, AB)$ existe.*

Demonstração. Mostraremos que se $H(AB, CD)$ existe então também existe $H(CD, AB)$. A afirmação recíproca pode ser demonstrada de modo análogo apenas renomeando os pontos.

Suponha que $H(AB, CD)$ seja um conjunto harmônico formado pelos pontos colineares A, B, C, D , então existe um quadrângulo $EFGH$ tal que $A = EF \cdot GH, B = EH \cdot FG, C = EG \cdot n$ e $D = FH \cdot n$, onde $n = AB$.

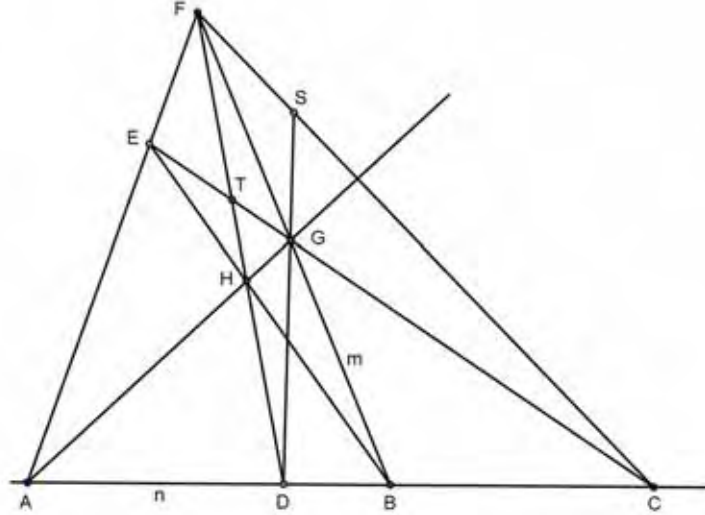


Figura 2.16: $H(AB, CD) \Leftrightarrow H(CD, AB)$.

Seja $S = DG \cdot FC$ e $T = GE \cdot FH$ e considere o quadrângulo $TGSF$ (veja figura 2.16). Note que as duas retas $SF = FC$ e $TG = GE$ são ambas incidentes com C . Ainda $GS = DG$ e $TF = FH$ são ambas incidentes em D . Além disso, a reta GF é incidente com B . Então para mostrar que o conjunto harmônico $H(CD, AB)$ de fato existe, resta apenas mostrar que TS é incidente com A .

Observe que $A = EF \cdot GH$. Agora considere os triângulos $\triangle THE$ e $\triangle SGF$. Se mostrarmos que estes triângulos são perspectivos pelo ponto A , segue que necessariamente A é incidente com TS . Façamos isto, veja que as interseções dos lados correspondentes dos triângulos $\triangle THE$ e $\triangle SGF$ são $TE \cdot SF = GE \cdot FC = C, TH \cdot SG = FH \cdot DG = D, HE \cdot GF = B$ e temos por hipótese C, D, B são colineares, mais ainda, sabemos que estes pontos são incidentes com a reta $n = AB$. Logo, estes triângulos são perspectivos pela reta n e pelo teorema 2.1 estes são perspectivos por um ponto. Uma vez que, $EF \cdot GH = A$, segue que, necessariamente, $EF \cdot TS = A$ e $TS \cdot GH = A$, pois caso contrário as retas EF e GH teriam dois pontos em comum, sendo portanto coincidentes, o que não é o caso. Ou seja, são triângulos perspectivos pelo ponto A como queríamos demonstrar. $\square$

Observação 2.3. Denotamos por $H(AB, CD) \Leftrightarrow H(CD, AB)$ a afirmação: O conjunto harmônico $H(AB, CD)$ existe se, e somente se, $H(CD, AB)$ existe.

Corolário 2.1. $H(AB, CD) \Leftrightarrow H(AB, DC) \Leftrightarrow H(BA, CD) \Leftrightarrow H(BA, DC) \Leftrightarrow H(CD, AB) \Leftrightarrow H(CD, BA) \Leftrightarrow H(DC, AB) \Leftrightarrow H(DC, BA)$.

Como nas seções anteriores, o dual dessa definição de conjunto harmônico de pontos podem ser formulados.

Definição 2.10. Quatro retas concorrentes, a, b, c, d formam o **conjunto harmônico** $H(ab, cd)$ se existe um quadrilateral completo no qual dois vértices opostos pertencem a a , outros dois lados opostos pertencem a b , enquanto os outros dois vértices restantes pertencem a c e d , respectivamente (veja figura 2.17) onde retas e, f, g e h formam um quadrilateral que resulta $H(ab, cd)$.

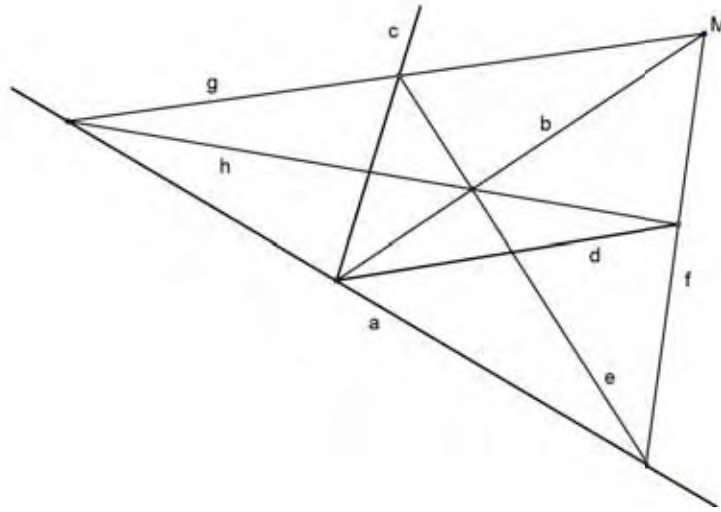


Figura 2.17: Conjunto harmônico $H(ab, cd)$.

Teorema 2.4. Se retas a, b e c são concorrentes, então d , o conjugado harmônico de c com respectivos para a e b , é único.

Demonstração. A construção da quarta reta do conjunto harmônico resulta da dualidade dos resultados anteriores. $\square$

Teorema 2.5. $H(ab, cd) \Leftrightarrow H(cd, ab)$.

Demonstração. Resulta de modo natural da dualidade dos resultados anteriores. $\square$

Agora retomamos perspectividades e projetividades. Note que uma perspectividade entre dois feixes de retas ou entre dois feixes de pontos é unicamente determinada por dois pares de elementos correspondentes, desde que nenhum elemento desses dois pares estejam sobre ambos os feixes. Em outras palavras, uma vez que dois pares de elementos correspondentes estão especificados, a imagem de qualquer terceiro elemento do domínio é unicamente determinada.

Antes de prosseguirmos recordamos projetividade via os três exemplos a seguir, onde denotamos por $ABC \wedge A''B''C''$ uma projetividade entre os feixes de pontos

determinados por A, B, C e A'', B'', C'' , respectivamente (figura 2.18); $abc \wedge a''b''c''$ uma projetividade entre os feixes de retas determinados pelas retas a, b, c e a'', b'', c'' , respectivamente (figura 2.19); $abc \wedge A''B''C''$ uma projetividade entre um feixe de retas e um feixe de pontos determinados por a, b, c e A'', B'', C'' , respectivamente. (figura 2.20)

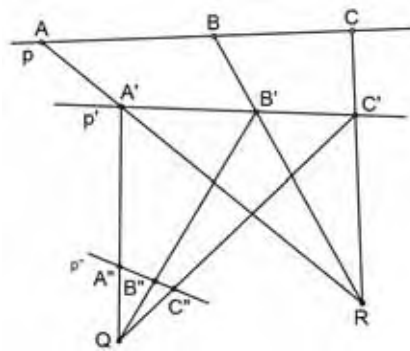


Figura 2.18: Projetividade entre os feixes de pontos A, B, C e A'', B'', C'' respectivamente.

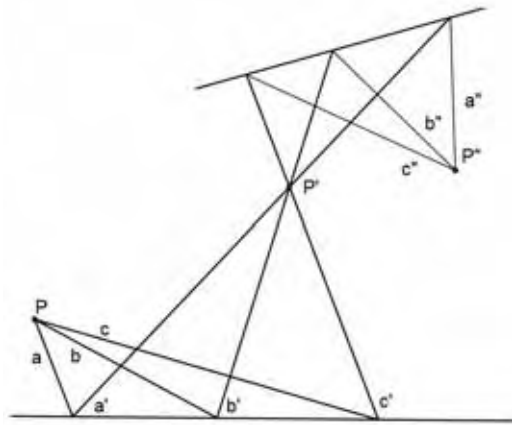


Figura 2.19: Projetividade entre os feixes de retas a, b, c e a'', b'', c'' respectivamente.

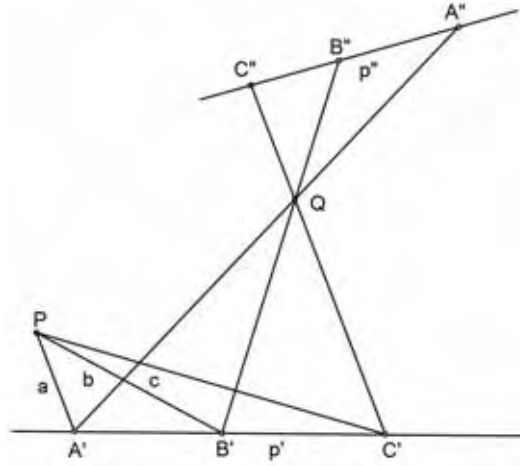


Figura 2.20: Projetividade entre um feixe de retas a, b, c e um feixe de pontos A'', B'', C'' respectivamente.

Estudemos a projetividade $\mathcal{P}$ representada na figura 2.18. Veja que $\mathcal{P}$ é resultante da composição das perspectividades $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ e $\mathcal{P}_4$ tais que: $\mathcal{P}_1$ é a perspectividade definida por $\mathcal{P}_1(A) = a = AA'$, $\mathcal{P}_1(B) = b = BB'$ e $\mathcal{P}_1(C) = c = CC'$; $\mathcal{P}_2$ é a perspectividade definida por $\mathcal{P}_2(a) = A'$, $\mathcal{P}_2(b) = B'$ e $\mathcal{P}_2(c) = C'$; $\mathcal{P}_3$ é a perspectividade definida por $\mathcal{P}_3(A') = a' = A'A''$, $\mathcal{P}_3(B') = b' = B'B''$ e $\mathcal{P}_3(C') = c' = C'C''$ e $\mathcal{P}_4$ é a perspectividade definida por $\mathcal{P}_4(a') = A''$, $\mathcal{P}_4(b') = B''$ e $\mathcal{P}_4(c') = C''$. Por exemplo, $\mathcal{P}(A) = (\mathcal{P}_4 \circ \mathcal{P}_3 \circ \mathcal{P}_2 \circ \mathcal{P}_1)(A) = A''$.

Observamos que uma projetividade não é obtida de uma maneira única via perspectividades, por exemplo, a projetividade $\mathcal{P}$ também pode ser vista como a composição das perspectividades $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ tais que: $\mathcal{Q}_1$ é a perspectividade definida por $\mathcal{Q}_1(A) = A'$, $\mathcal{Q}_1(B) = B'$ e $\mathcal{Q}_1(C) = C'$; $\mathcal{Q}_2$ é a perspectividade definida por $\mathcal{Q}_2(A') = A''$, $\mathcal{Q}_2(B') = B''$ e $\mathcal{Q}_2(C') = C''$. Por exemplo, $\mathcal{P}(A) = (\mathcal{Q}_2 \circ \mathcal{Q}_1)(A) = A''$.

Observação 2.4. Podemos concluir da definição de projetividade que uma projetividade não tem um centro ou um eixo, exceto se consiste apenas de uma perspectividade. Ainda, observamos que a aplicação inversa de uma projetividade e o produto de duas (ou um número finito de) projetividades são também projetividades.

Teorema 2.6. (*Teorema Fundamental*). *Dados dois feixes quaisquer sempre existe uma projetividade entre estes. Além disso, esta projetividade é unicamente determinada por três pares de elementos correspondentes.*

Demonstração. Existência:

Caso 1. Dois feixes de pontos: Sejam A, B e C elementos do feixe com eixo p e A', B', C' seus elementos correspondentes do feixe com eixo p' ($p \neq p'$). Agora construimos a reta AA' e escolhemos um ponto $P \neq A$ sobre esta reta. Seja $m \neq p'$ uma reta qualquer passando por A' . Considere $B_1 = BP \cdot m, C_1 = CP \cdot m$. Desta forma,

$ABC \xrightarrow{P} A'B_1C_1$. Agora, defina $Q = B_1B' \cdot C_1C'$. Então $A'B_1C_1 \xrightarrow{Q} A'B'C'$ e portanto $ABC \xrightarrow{Q} A'B'C'$ é a composição das duas perspectivas. (Veja figura 2.21)

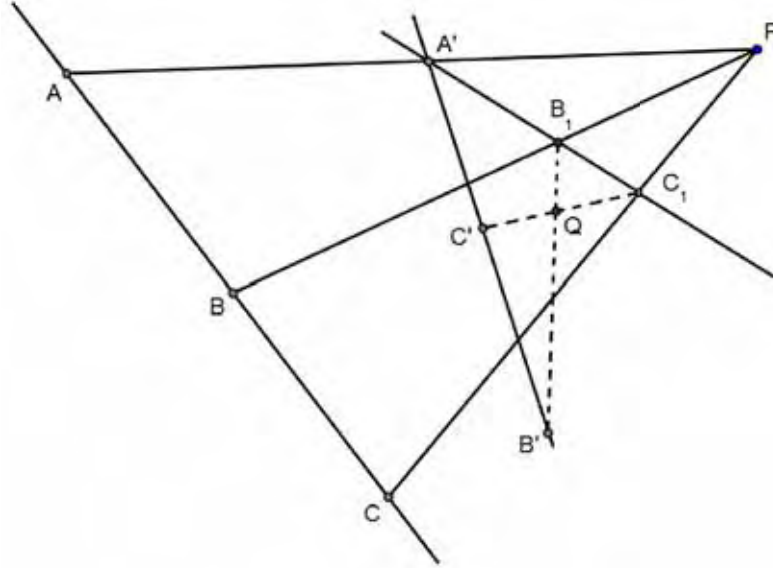


Figura 2.21: Composição de duas perspectivas.

Caso 2. Dois feixes de retas: Basta considerar a dualidade com o caso 1.

Caso 3. Um feixe de pontos e um feixe de retas: Segue da combinação dos casos anteriores.

□

Corolário 2.2. *Dados dois feixes distintos, se uma projetividade entre estes mantém um dos elementos fixado então esta projetividade é uma perspectividade.*

Demonstração. Caso 1. Dois feixes de pontos com um ponto comum: Sejam A, B e C elementos do feixe com eixo p e A', B', C elementos correspondentes do feixe com eixo p' ($p \neq p'$). Agora, defina $Q = AA' \cdot BB'$. Então $ABC \xrightarrow{Q} A'B'C$ e portanto $ABC \xrightarrow{Q} A'B'C$ por apenas uma perspectividade.

Caso 2. Dois feixes de retas: Basta considerar a dualidade com o caso 1.

Caso 3. Um feixe de pontos e um feixe de retas: Segue da combinação dos casos anteriores.

□

Corolário 2.3. *Uma projetividade entre dois feixes é composta por no máximo três perspectividades distintas.*

Demonstração. Pelo teorema 2.6 uma projetividade é unicamente determinada por três pares de elementos correspondentes e pelo corolário 2.2 sabemos que se uma projetividade entre dois feixes distintos mantém um elemento invariante então essa projetividade

é uma perspectividade, sendo assim temos apenas três perspectividades possíveis para compor essa projetividade, pela unicidade da projetividade. Veja que a composição com uma quarta perspectividade não é possível, pois esta última deveria manter os três pares correspondentes inalterados o que é impossível, pois não existe uma perspectividade com este efeito. $\square$

No teorema a seguir mostramos que a relação harmônica é invariante sob uma projetividade.

Teorema 2.7. *Sejam A, B, C e D pontos que definem o conjunto harmônico $H(AB, CD)$. Se $ABCD \wedge A'B'C'D'$, então os pontos A', B', C' e D' também definem um conjunto harmônico, ou seja, existe $H(A'B', C'D')$.*

Demonstração. Uma vez que a projetividade plana é a composição de perspectividades e estamos considerando desde o início a dualidade entre pontos e retas, é suficiente mostrar que $H(AB, CD)$ implica $H(ab, cd)$ sempre que $ABCD \bar{\wedge} abcd$, onde a, b, c e d são as retas definidas por A e A' , B e B' , C e C' , D e D' , respectivamente.

Como $ABCD \bar{\wedge} abcd$ temos que existe $O = a \cdot b$ de forma que $a = OA, b = OB, c = OC$ e $d = OD$.

Ainda, $H(AB, CD)$ é um conjunto harmônico, logo existe um quadrângulo com um vértice em O , a saber $OEFG$, tal que A e B são pontos diagonal do quadrângulo.

Seja $O = a \cdot b$, assim $a = OA, b = OB$ e assim por diante.

Já que $H(AB, CD)$, existe um quadrângulo com um vértice em O , $OEFG$, tal que A e B são pontos diagonal do quadrângulo, C pertença a uma diagonal e D a outra.

Veja que $A = EF \cdot OG, B = OE \cdot GF, C = OF \cdot AB$ e $D = GE \cdot AB$ (veja figura 2.22).

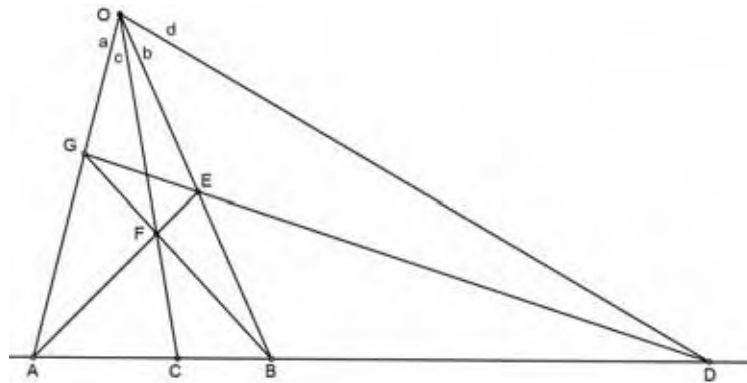


Figura 2.22: Se $H(AB, CD)$ e $ABCD \wedge A'B'C'D'$, então $H(A'B', C'D')$.

Agora considere o quadrilátero GF, GE, AE, AB . Assim $GF \cdot GE = G$ e $AE \cdot AB = A$ pertencem a a ; $GE \cdot AE = E$ e $GF \cdot AB = B$ pertencem a b ; $GE \cdot AB = D$ pertence a d enquanto $GF \cdot AE = F$ pertence a c . Portanto temos que as retas a, b, c e d formam o conjunto harmônico $H(ab, cd)$. $\square$

Teorema 2.8. *Se quatro elementos de um feixe, A, B, C, D formam um conjunto harmônico, $H(AB, CD)$, e quatro elementos de um segundo feixe A', B', C', D' formam um segundo conjunto harmônico, $H(A'B', C'D')$, então existe uma projetividade que aplica A, B, C, D em A', B', C', D' , respectivamente.*

Demonstração. Pelo teorema 2.6, existe uma projetividade tal que $ABC \wedge A'B'C'$. Seja D^* a imagem de D sob esta projetividade. Então pelo teorema 2.7 existe o conjunto harmônico $H(A'B', C'D^*)$. Por outro lado, por hipótese, temos também o conjunto harmônico $H(A'B', C'D')$. Mas pelo teorema 2.2 sabemos que o conjugado harmônico de C' com relação a A' e D' é único, consequentemente $D^* = D$. $\square$

Definição 2.11. *Sejam A e A' , B e B' pares de pontos correspondentes via uma projetividade, as retas AB' e BA' são chamadas de **ligações transversais** destes pares de pontos.*

Teorema 2.9. *Dada uma projetividade entre dois feixes distintos de pontos existe uma única reta que contém as interseções dos cruzamentos transversais de todos os pares de pontos correspondentes.*

Demonstração. Considere dois feixes distintos de pontos com eixos p e p' .

Suponha que $ABC \wedge A'B'C'$, onde $P = p \cdot p'$ não é nenhum destes seis pontos.

Existência:

Veja que $(A'A, A'B, A'C) \bar{\wedge} ABC$ e $A'B'C' \bar{\wedge} AA', AB', AC'$. Logo $(A'A, A'B, A'C) \wedge (AA', AB', AC')$. Como $A'A$ é aplicado nele mesmo, segue pelo corolário 2.2, que esta projetividade é na verdade uma perspectividade, digamos, $(A'A, A'B, A'C) \xrightarrow{h} (AA', AB', AC')$ para algum eixo h .

Observe que h contém as interseções dos cruzamentos transversais de todos os pares de pontos correspondentes. De fato, para mostrar isso é suficiente mostrar que via h é possível encontrar a imagem de um ponto D (diferente de A, B, C) sobre p . Para isso construa $A'D$ e considere $D_1 = A'D \cdot h$, note que $D' = AD_1 \cdot p'$.

Unicidade:

Para mostrar que h é único, é necessário mostrar que h é independente das escolhas dos centros dos feixes de retas (no nosso caso denotados por A e A') e portanto que as interseções dos cruzamentos transversais de todos os pares de pontos correspondentes sobre h .

Para fazer isto é suficiente encontrar dois pontos sobre h que sejam independentes destas escolhas.

Seja $Q = h \cdot p'$ e $R = h \cdot p$.

Usando a técnica descrita anteriormente para localizar a imagem de R , obtemos $R_1 = A'R \cdot h$. Mas $A'R \cdot h = R$, consequentemente $R_1 = R$. Desta forma $R' = AR \cdot p' = p \cdot p' = P$; isto é, a imagem de R é P .

Por outro lado, podemos mostrar que a imagem de P é Q . Porém, pelo teorema 2.6 a imagem e a pré-imagem de P são unicamente determinadas. Ainda veja que $Q \neq R$ pois esta projetividade não é uma perspectividade.

Logo, $h = QR$ é unicamente determinada.

□

Definição 2.12. Nas condições acima, a reta h é chamada o **eixo de homologia** desta projetividade.

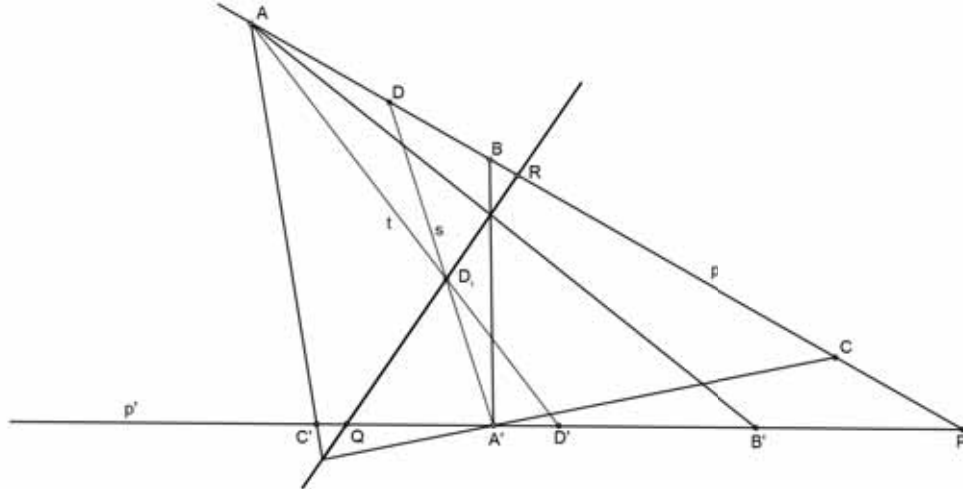


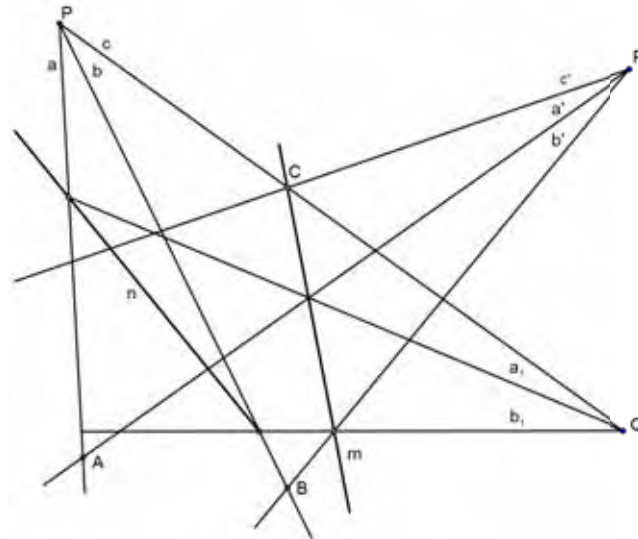
Figura 2.23: Eixo de homologia.

Observação 2.5. Na demonstração do teorema anterior descrevemos o método usado para construir o eixo h e encontrar a imagem (via h) de qualquer ponto. Observe ainda que para feixes de retas é possível obter o objeto dual ao eixo de homologia, a saber, o **centro de homologia**, com o qual é possível construir a imagem de uma reta sob alguma projetividade dada entre feixes distintos de retas.

2.4 Cônicas no Plano Projetivo

Estamos interessados em estudar objetos da geometria projetiva que sejam determinados por um conjunto de n pontos que a cada três destes são não colineares. Para $n = 3$ definimos triângulos e para $n = 4$ consideramos objetos conhecidos como quadrângulos. Agora trataremos de objetos que são unicamente determinados por 5 pontos, a saber, **cônicas de pontos**, as quais são definidas em termos de projetividade.

Definição 2.13. Uma **cônica de pontos** é o conjunto de pontos de intersecção de retas correspondentes de cada duas projetividades, (mas não perspectividade), as quais relacionam feixes de retas com centros distintos. (veja figura 2.24).



Observação 2.6. Veja que não podemos definir uma cônica de pontos através de uma perspectividade pois, neste caso as interseções das retas correspondentes são colineares, ou seja, definem uma reta e não uma cônica.

Definição 2.14. Uma *tangente* a uma cônica de pontos é uma reta que tem exatamente um ponto em comum com a cônica de pontos. Esta reta denotada por $\text{tg } P$ é a reta tangente a cônica em P .

Definição 2.15. *Uma cônica de retas é o conjunto de retas ligando pontos correspondentes a cada duas projetividades, (mas não perspectividade), as quais relacionam feixes de retas com centros distintos.*

Observação 2.9. Uma cônica de pontos é determinada por uma projetividade entre dois feixes de retas, e sabemos que esta aplicação é unicamente determinada quando três pares de retas correspondentes são especificadas.

Portanto, dados feixes de retas com centros P e P' ($P \neq P'$) podemos arbitrariamente escolher três retas a, b e c incidentes com P e três retas correspondentes a', b'

e c' incidentes com P' . Desde que esta correspondência não resulta em uma perspectiva, é possível localizar três pontos da cônica de pontos determinados por esta projetividade, a saber, $a \cdot a'$, $b \cdot b'$ e $c \cdot c'$.

Observe que ao escolher diferentes retas e/ou outras retas correspondentes é definida outra cônica de pontos.

O teorema a seguir mostra como determinar dois outros pontos desta cônica de pontos.

Teorema 2.10. *Os centros dos feixes de retas na projetividade que define uma cônica de pontos são pontos desta cônica.*

Demonstração. Sejam P e P' os centros dos feixes de retas. Defina $m = PP'$ e considere m como uma reta no feixe com centro P (veja figura 2.25).

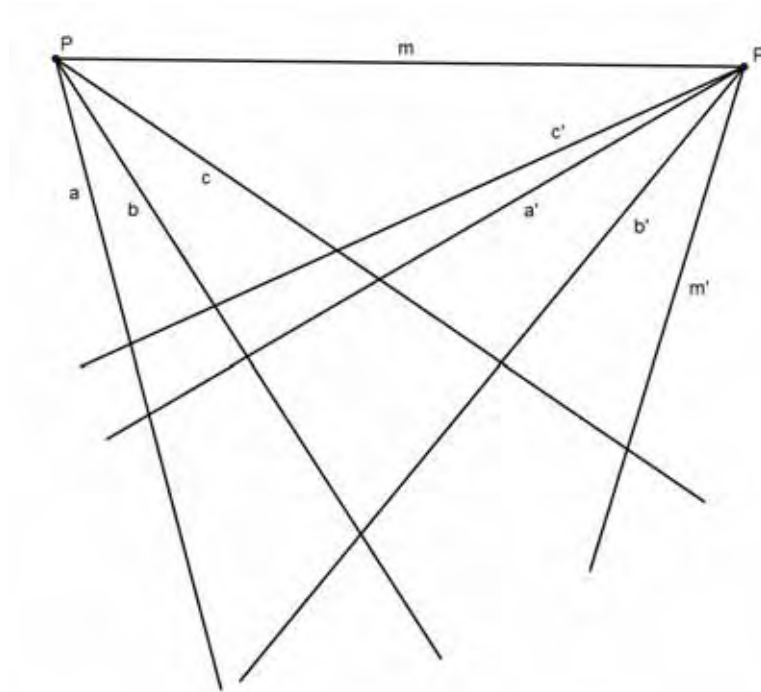


Figura 2.25: P e P' , pontos da cônica de pontos.

Então existe uma reta correspondente a m , m' , no feixe de retas com centro em P' . Note que $m \neq m'$ já que a projetividade não é uma perspectiva.

Consequentemente, $m \cdot m' = P'$. Ou seja, P' é um ponto da cônica de pontos.

Analogamente, considerando desta vez $m = PP'$ como sendo uma reta no feixe de retas de centro P' e procurando a reta correspondente, n , a esta no feixe de retas de centro P , temos que $n \cdot m = P$ e consequentemente P é um ponto da cônica de pontos. $\square$

Observação 2.10. Com este teorema dados cinco pontos quaisquer P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 (cada três não colineares) é possível determinar dois feixes de retas e uma projetividade

entre estes de forma que P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 sejam pontos de uma cônica de pontos determinada por tais feixes e projetividade, como segue:

Escolha dois pontos, digamos, P_1 e P_2 , como centro dos feixes e construa as retas P_1P_3, P_1P_4, P_1P_5 e P_2P_3, P_2P_4, P_2P_5 .

Veja que desta maneira, a projetividade $(P_1P_3, P_1P_4, P_1P_5) \wedge (P_2P_3, P_2P_4, P_2P_5)$ define uma cônica de pontos contendo os pontos P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 .

Mais adiante, mostraremos que dados quaisquer cinco pontos não colineares definem uma única cônica de pontos.

Definição 2.17. Um **hexágono** é um conjunto de seis pontos distintos (aqui não exigimos que cada três sejam não colineares) chamados de *vértices*, digamos $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ e seis retas $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_5, P_5P_6$ e P_6P_1 conforme a figura 2.26. Estas retas são denominadas os *lados* do hexágono $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$. Dizemos que os pares P_1 e P_4, P_2 e P_5, P_3 e P_6 são *pares de vértices opostos* e os pares P_1P_2 e P_4P_5, P_2P_3 e P_5P_6, P_3P_4 e P_6P_1 são *pares de lados opostos* e, ainda, dizemos que os três pontos de interseção de lados opostos são **pontos diagonal**.

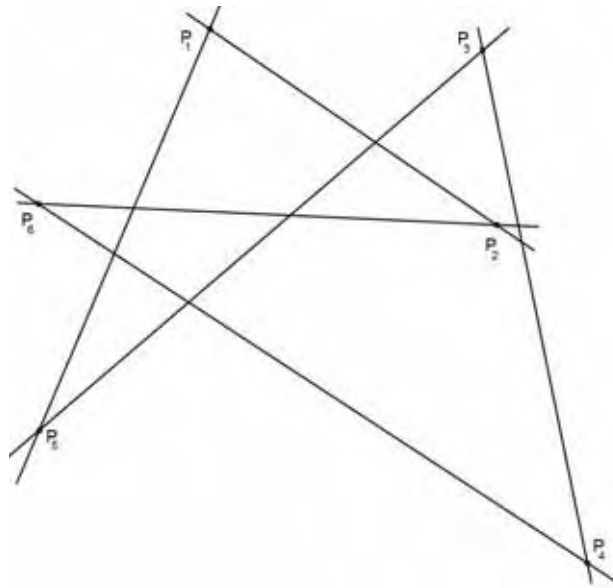


Figura 2.26: Hexágono.

Observação 2.11. Dado um conjunto de seis pontos estes não determinam um único hexágono, uma vez que um hexágono é determinado pela ordem no qual seus vértices são nomeados. Na verdade, um conjunto de seis pontos podem determinar $6!/12 = 60$ hexágonos diferentes. Portanto, no próximo teorema, é importante notar que P e P' , os centros dos feixes de retas usados para definir uma cônica de pontos, são usados como sendo o primeiro e terceiro vértice do hexágono, respectivamente.

Teorema 2.11. *Se A, B, C, D são quatro pontos sobre uma cônica de pontos definida por uma projetividade entre feixes de retas de centros P e P' , então os pontos diagonal do hexágono $PBP'ACD$ são colineares, e reciprocamente, se os pontos diagonal do hexágono $PBP'ACD$ são colineares então A, B, C, D são pontos de uma cônica de pontos determinada por projetividade entre feixes de centros P e P' .*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Pela definição 2.17 temos que os pontos diagonais, J, L, K , para o hexágono $PBP'ACD$ são dados pelas interseções de retas a seguir:

$$PB \cdot AC = J,$$

$$BP' \cdot CD = L$$

$$P'A \cdot DP = K.$$

Considere agora os pontos $AC \cdot PD = M$ e $AP' \cdot DC = N$ (veja figura 2.27).

Neste contexto e pelo fato de que A, B, C e D são pontos de uma cônica de pontos obtemos a seguinte perspectividade:

$AJCM \wedge PA, PB, PC, PD \wedge P'A, P'B, P'C, P'D \wedge NLCD$, ou $AJCM \wedge NLCD$.

Uma vez que $C \wedge C$ segue pelo corolário 2.2 que esta projetividade é uma perspectividade entre os feixes de pontos $AJCN$ e $NLCD$. Consequentemente, como $AN \cdot MD = JL \cdot AN = MD \cdot JL$ e $AN \cdot MD = P'A \cdot PD = K$ segue que o centro de perspectividade é K e ainda que J, L e K são colineares.

$(\Leftarrow)$ Segue pelos mesmos argumentos de $(\Rightarrow)$ mas no sentido contrário.

□

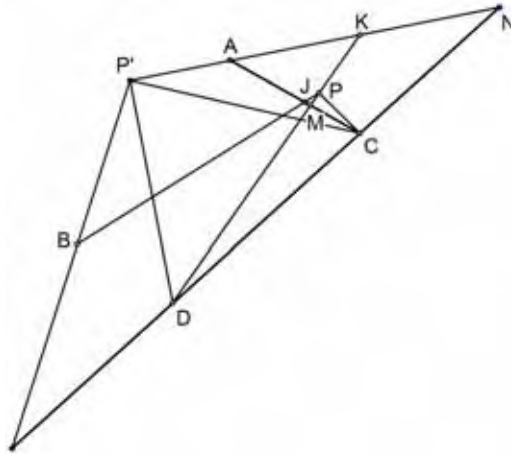


Figura 2.27: Pontos diagonais J, L e K , do hexágono $PBP'ACD$, colineares.

Com este resultado finalmente é possível mostrar que cinco pontos determinam uma única cônica.

Teorema 2.12. *Uma cônica de pontos é unicamente determinada por cinco pontos distintos, cada três não colineares.*

Demonstração. Sejam P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 , cinco pontos, cada três não colineares. Então pela observação 2.10 existe uma cônica de pontos determinada pelos feixes de retas com centros P_1 e P_2 e pela projetividade $(P_1P_3, P_1P_4, P_1P_5) \wedge (P_2P_3, P_2P_4, P_2P_5)$, a qual contém estes cinco pontos.

Seja D um sexto ponto qualquer sobre esta cônica de pontos. Para mostrar que a cônica é unicamente determinada, isto é, que o mesmo conjunto de pontos é determinado quando outros pontos diferentes de P_1 e P_2 são usados como os centros dos feixes, é suficiente mostrar que D pertence a cônica de pontos definida por feixes com centros em quaisquer outros dois pontos.

Para tanto, considere o hexágono $P_1P_4P_2P_3P_5D$. Pelo teorema 2.11, os pontos diagonais $P_1P_4 \cdot P_3P_5$, $P_4P_2 \cdot P_5D$, $P_2P_3 \cdot DP_1$ são colineares. Mas este hexágono é igual ao hexágono $P_4P_2P_3P_5DP_1$ e consequentemente pela recíproca do teorema 2.11, segue que D é um ponto da cônica de pontos determinada pelos feixes com centros P_3 e P_4 . De modo análogo, usando outros hexágonos com centros P_1 e P_2 como primeiro e terceiro vértices, podemos mostrar que D é um ponto da cônica de pontos determinada pelos feixes com centros em qualquer outros dois dos pontos P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 . $\square$

O próximo resultado é conhecido como teorema do hexagrama místico de Pascal e foi demonstrado por Pascal em 1640 aos 17 anos. Enquanto que o resultado dual deste resultado apenas foi provado em 1806 por Brianchon.

Corolário 2.4 (Teorema de Pascal). *Se um hexágono está inscrito em uma cônica de pontos - ou seja, os vértices do hexágono são pontos da cônica de pontos - então seus pontos diagonais são colineares. (Veja figura 2.28).*

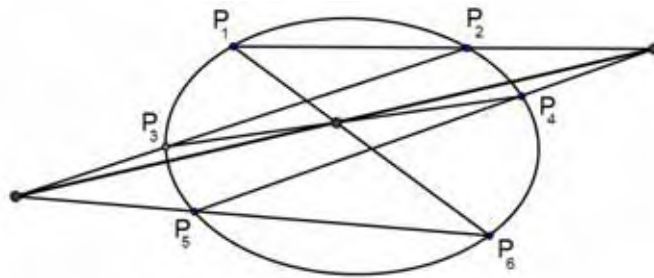


Figura 2.28: Hexágono inscrito em um ponto cônico.

Demonstração. Seja $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ um hexágono tal que cada P_i é um ponto de uma cônica, pelo teorema anterior temos que estes pontos definem uma única cônica na qual o hexágono está inscrito. Pelo teorema 2.11 segue que os pontos diagonais deste hexágono são colineares. $\square$

Corolário 2.5. *Se os cinco pontos P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 são pontos de uma cônica de pontos, então os três pontos $P_1P_2 \cdot P_4P_5, P_2P_3 \cdot P_5P_1, P_3P_4 \cdot \text{tg } P_1$ são colineares. (Veja figura 2.29).*

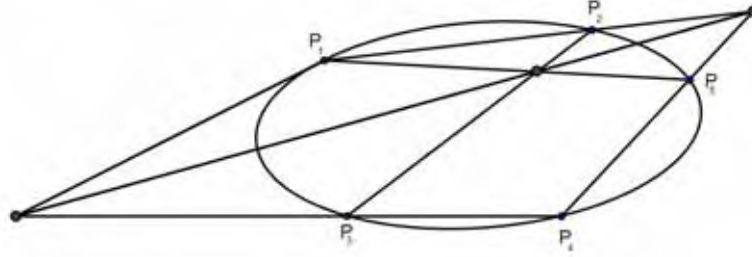


Figura 2.29: Os três pontos colineares de um ponto cônico.

Demonstração. Para demonstrar este corolário é suficiente observar que os pontos

$$P_1P_2 \cdot P_4P_5 = L,$$

$$P_2P_3 \cdot P_5P_1 = M,$$

$$P_3P_4 \cdot \text{tg } P_1 = K$$

são pontos diagonais do hexágono $P_1P_2P_3P_4P_5Q$, onde P_1Q é a reta tangente em P_1 à cônica determinada por P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 , ou seja $P_1Q = \text{tg } P_1$.

Logo, pelo corolário 2.4 segue o resultado. □

Corolário 2.6. *Se P_1, P_2, P_3, P_4 são quatro pontos de uma cônica de pontos então os quatro pontos $P_1P_2 \cdot P_3P_4, P_1P_3 \cdot P_2P_4, \text{tg } P_2 \cdot \text{tg } P_3$ e $\text{tg } P_1 \cdot \text{tg } P_4$ são colineares. (Veja figura 2.30).*

Demonstração. Para demonstrar este corolário consideraremos os seguintes hexágonos $P_1P_2QP_4P_3R$ e $P_1SP_2P_4TP_3$ tais que : $P_2Q = \text{tg } P_2$; $P_3R = \text{tg } P_3$; $P_1S = \text{tg } P_1$ e $P_4T = \text{tg } P_4$. Aplicando o teorema de Pascal 2.4 obtemos que os seguintes pontos são colineares: $P_1P_2 \cdot P_4P_3, \text{tg } P_2 \cdot \text{tg } P_3$ e $QP_4 \cdot RP_1$ são colineares já que são pontos diagonais do hexágono em questão. Também pelo mesmo argumento para o segundo hexágono segue a colinearidade dos seguintes pontos: $\text{tg } P_1 \cdot \text{tg } P_4$; $SP_2 \cdot TP_3$ e $P_2P_4 \cdot P_3P_1$. Agora pelo axioma 2.1 os pontos $QP_4 \cdot RP_1$ e $SP_2 \cdot TP_3$ são incidentes a uma única reta. Logo $P_1P_2 \cdot P_4P_3, \text{tg } P_2 \cdot \text{tg } P_3, QP_4 \cdot RP_1, P_1P_2 \cdot P_3P_4, P_1P_3 \cdot P_2P_4, \text{tg } P_2 \cdot \text{tg } P_3$ e $\text{tg } P_1 \cdot \text{tg } P_4$ são colineares, conseqüentemente segue o resultado. □

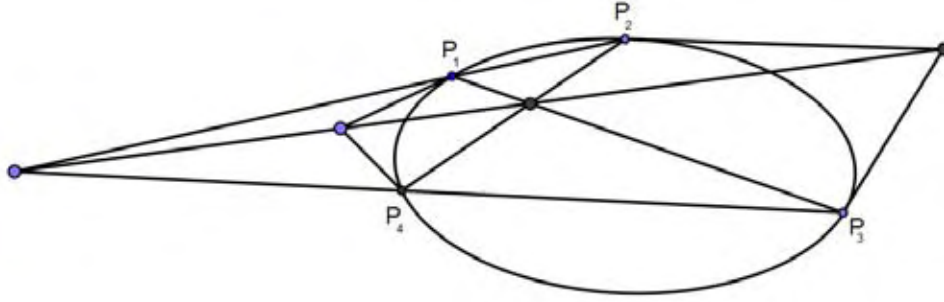


Figura 2.30: Os quatro pontos colineares de um ponto cônico.

Observação 2.12. Já sabemos que cinco pontos determinam uma única cônica de pontos, os demais pontos desta cônica podem ser localizados com seguinte procedimento:

Sejam A, B, C, D, E cinco pontos de uma cônica de pontos. Então qualquer ponto adicional, F , sobre a cônica de pontos pode ser considerado como o sexto ponto do hexágono inscrito, $ABCDEF$. Agora, uma vez que os pontos diagonais $P = AB \cdot DE$, $Q = BC \cdot EF$ e $R = CD \cdot FA$ são colineares, podemos escolher uma reta m que passa por E , (neste caso, escolhemos a reta EF). Observe que se $R = CD \cdot PQ$ então $F = RA \cdot m$ (veja figura 2.31). Logo localizamos o ponto F nesta cônica. Para localizar os demais pontos sobre esta cônica, basta escolher outras retas que passam por E .

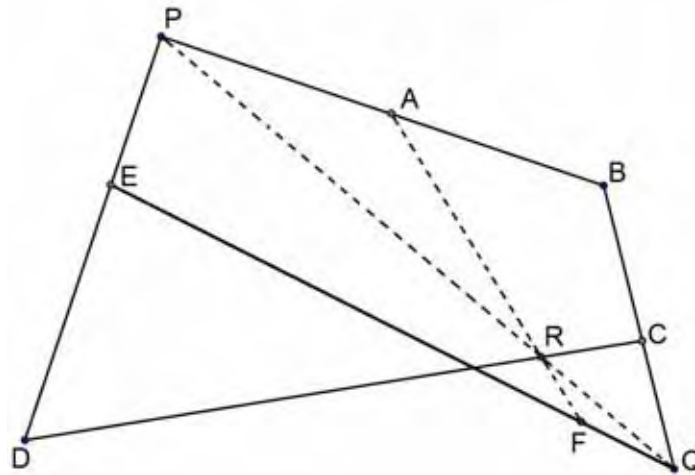


Figura 2.31: Cônica de pontos usando o Teorema de Pascal.

Os resultados a seguir tratam das retas tangentes à cônica de pontos, em especial provaremos que uma cônica de pontos é unicamente determinada por três pontos distintos não colineares e pelas tangentes a dois destes.

Teorema 2.13. *Para qualquer ponto A de uma cônica de pontos, existe uma única reta tangente a esta cônica em A .*

Demonstração. Sejam B, C, D, E outros quatro pontos da cônica de pontos a qual A pertence. Então a cônica de pontos pode ser definida pela projetividade, $\mathcal{P}$, que relaciona os feixes com centros A e B dada por $(AC, AD, AE) \wedge (BC, BD, BE)$. Considere a reta B como uma reta no feixe de centro B , como toda projetividade é uma bijeção, existe uma reta h no feixe com centro A que corresponde a esta reta. Note que h contém o ponto A da cônica de pontos e ainda $h \cdot AB = A$. Provaremos agora que h é a reta tangente procurada, para isto basta mostrar que o único ponto da cônica pertencente a h é o ponto A .

De fato, suponha que h contenha um segundo ponto da cônica, X distinto de A . Agora, analisamos os seguintes casos.

Caso 1. X pertencente a AB .

Neste caso temos que $AB = h$ já que pelo axioma 2.1 dois pontos definem uma única reta. Consequentemente h é um elemento fixado pela projetividade $\mathcal{P}$, portanto pelo corolário 2.2 esta projetividade é uma perspectividade, mas isto contradiz a definição de cônica de pontos.

Caso 2. X não pertencente a AB .

Se X não pertence a AB então a reta $h = AX$ é a reta correspondente à reta AB pela definição de h . Por outro lado AX é correspondente a XB pela definição da projetividade $\mathcal{P}$. Ou seja, as retas distintas AB e BX são correspondentes a AX , mas isto contradiz o fato de que $\mathcal{P}$ é uma função.

Com estes dois casos mostramos que a reta h possui apenas o ponto A em comum com a cônica de pontos. Ou seja, h é uma reta tangente a cônica no ponto A .

Resta mostrar a unicidade de h . Para isto, suponha que exista uma reta h' tangente a cônica no ponto A . Considerando h' como uma reta no feixe com centro A (o que podemos fazer já que A pertence a h') temos que existe uma reta m no feixe com centro em B que corresponde h' , via $\mathcal{P}$. Nestas condições segue que $m \cdot h'$ é um ponto da cônica (pela definição de cônica de pontos). Mas, como h' é uma tangente em A , esta contém apenas um ponto da cônica que neste caso é o ponto A . Deste fato segue que $m \cdot h'$ é igual a A , logo A pertence a m ; mas sabemos que B também pertence a m , portanto m é igual a AB e consequentemente pela injetividade de $\mathcal{P}$ obtemos $h' = h$. □

Observação 2.13. Esta tangente é a reta correspondente à reta AB considerada como a reta do feixe que passa por B quando a cônica é definida pela projetividade relativa dos feixes com centros A e B .

Corolário 2.7. *Uma cônica de pontos é unicamente determinada por três pontos distintos não colineares, e pela tangente em dois deles.*

Demonstração. Para mostrar que uma cônica de pontos é unicamente determinada por três pontos, P_1, P_2, P_3 , desta cônica e pelas tangentes a dois destes, digamos $\text{tg } P_1, \text{tg } P_3$, basta definir uma projetividade que envolva tais tangentes unicamente determinadas pelo teorema anterior. Para tanto considere a projetividade entre os feixes de centro em P_1 e centro em P_3 que aplica $\text{tg } P_1$ em P_3P_1 , P_1P_3 em $\text{tg } P_3$ e P_1P_2 em P_3P_2 . Veja que os outros dois pontos da cônica, Q e R , podem ser obtidos através das interseções de retas dos feixes com centros em P_1 e P_3 , respectivamente: $P_1Q \cdot P_3Q$ e $P_1R \cdot P_3R$. $\square$

Observação 2.14. Pela definição, tangentes são as retas que interceptam uma cônica exatamente uma vez. Outras retas podem ou não interceptar a cônica, mas como o próximo teorema mostra, uma reta nunca pode interceptar uma cônica mais que duas vezes. Este resultado será usado mais adiante quando usamos uma aproximação analítica para estudar mais propriedades de cônica de pontos.

Teorema 2.14. *Uma reta intercepta uma cônica de pontos em no máximo dois pontos.*

Demonstração. Suponha que uma reta r intercepta uma cônica de pontos em três pontos distintos Q, R e S . Ainda, sejam P e P' os outros dois pontos da cônica e considere os feixes com centros em P e P' . Então, a cônica pode ser definida em termos da projetividade entre estes feixes onde Q, R e S são pontos da interseção dos pares de retas correspondentes PQ e $P'Q$, PR e $P'R$, PS e $P'S$, ou seja, a projetividade é dada por $PQ, PR, PS \wedge P'Q, P'R, P'S$. Porém, por hipótese os três pontos Q, R e S pertencem a r , consequentemente esta projetividade é na verdade uma perspectividade onde r é o seu eixo de perspectividade, o que contradiz a definição de uma cônica de pontos. $\square$

3 Modelo Analítico para o Plano Projetivo

No capítulo anterior, sinteticamente, apresentamos o sistema axiomático para a geometria projetiva, estabelecemos um modelo para o plano projetivo π' e ainda tratamos de objetos inerentes a esta geometria. Neste momento trataremos destes objetos analiticamente.

Primeiramente apresentamos um modelo analítico para o plano euclidiano; este nos será muito útil posteriormente, uma vez que, o plano projetivo π' é uma extensão do plano euclidiano.

Estes modelos estão fundamentados sob uma relação de equivalência em $\mathbb{R}^3$ a qual tratamos a seguir:

Proposição 3.1. *Defina em $\mathbb{R}^3$ a seguinte relação binária: $\forall (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$,*

$$(b_1, b_2, b_3) \sim (a_1, a_2, a_3) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : b_i = ka_i, i = 1, 2, 3.$$

A relação $\sim$ é uma relação de equivalência.

Demonstração. Devemos mostrar que $\sim$ satisfaz as propriedades: reflexão, simetria e transitividade. Façamos isto.

Reflexiva: Para todo $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 : (a_1, a_2, a_3) \sim (a_1, a_2, a_3)$, pois $a_i = 1a_i, i = 1, 2, 3$. Neste caso se $k = 1$.

Simétrica: Para todo $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 :$

Se $(a_1, a_2, a_3) \sim (b_1, b_2, b_3)$ então

$$(b_1, b_2, b_3) \sim (a_1, a_2, a_3),$$

com efeito, $(a_1, a_2, a_3) \sim (b_1, b_2, b_3) \Rightarrow \exists k' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $b_i = k'a_i, i = 1, 2, 3$.

Logo, $a_i = \frac{1}{k'}b_i$.

Então considerando $k = \frac{1}{k'}$, segue que $(b_1, b_2, b_3) \sim (a_1, a_2, a_3)$

Transitividade: Para todo $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 :$

Se $(a_1, a_2, a_3) \sim (b_1, b_2, b_3)$ e $(b_1, b_2, b_3) \sim (c_1, c_2, c_3)$ então

$$(a_1, a_2, a_3) \sim (c_1, c_2, c_3).$$

De fato, por hipótese sabemos que existem $k_1, k_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $b_i = k_1 a_i, i = 1, 2, 3$ e $c_i = k_2 b_i, i = 1, 2, 3$.

Assim, $c_i = k_2 b_i = k_2(k_1 a_i) = (k_2 k_1) a_i$.

Logo, considerando $k = k_2 k_1$, temos que $(a_1, a_2, a_3) \sim (c_1, c_2, c_3)$. $\square$

3.1 Sobre o plano euclidiano

O estudo analítico está baseado na premissa de que cada ponto no plano euclidiano pode ser designado com um par ordenado de números reais. Esta associação é realizada via um sistema de coordenadas cartesianas, onde duas retas perpendiculares são usadas como eixos. Ao ponto de interseção destes eixos designamos o par ordenado $(0, 0)$ e aos demais pontos designamos os pares ordenados como na figura 3.1. Denotamos as coordenadas de um ponto P por (x_1, x_2) .



Figura 3.1: Pares ordenados.

Com a representação analítica de pontos dado acima, as retas do plano euclidiano podem ser representadas analiticamente por equações da forma

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 = 0$$

onde os coeficientes u_i são números reais constantes e $u_1^2 + u_2^2 \neq 0$. Reciprocamente, três números reais u_1, u_2, u_3 , tais que $u_1^2 + u_2^2 \neq 0$, definem uma reta, que denotamos por $[u_1, u_2, u_3]$ e dizemos que cada u_i é uma coordenada desta reta.

Uma reta não é unicamente representada por suas coordenadas uma vez que, as equações $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 = 0$ e $ku_1 x_1 + ku_2 x_2 + ku_3 = 0$ representam a mesma reta para todo número real k diferente de zero.

Porém, existe uma correspondência biunívoca entre as retas do plano euclidiano e as classes de equivalência definida pela relação $\sim$ da proposição 3.1.

Definição 3.1. Cada representante $[u_1, u_2, u_3], u_1^2 + u_2^2 \neq 0$ de uma determinada classe de equivalência (via $\sim$ da proposição 3.1) é denominado **coordenadas homogêneas da reta** que este define.

Ou seja, neste contexto, retas do plano euclidiano são interpretadas como sendo classes de equivalências de triplas ordenadas $[u_1, u_2, u_3]$, onde $u_1^2 + u_2^2 \neq 0$; qualquer um

dos representantes da classe de equivalência é denominado coordenadas homogêneas da reta.

Note ainda que, considerando a notação matricial temos que a equação da reta correspondente a tripla ordenada $[u_1, u_2, u_3]$ é $uX = 0$ onde u é a matriz linha

$$u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}, X \text{ é a matriz coluna } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } 0 \text{ representa matriz nula.}$$

Por exemplo, $u = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ então $uX = 0$ representa a equação $2x_1 - 3x_2 + 5 = 0$.

Vejam agora como interpretar os pontos do plano euclidiano como classes de equivalência (via $\sim$ da proposição 3.1).

Observe que cada ponto do plano euclidiano está em correspondência biunívoca com uma classe de equivalência (via $\sim$ da proposição 3.1) de uma determinada tripla ordenada (y_1, y_2, y_3) , com $y_3 \neq 0$.

De fato, note que cada tripla ordenada $(y_1, y_2, y_3), y_3 \neq 0$, é equivalente a terna $(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3}, 1)$. Ou seja, cada classe de equivalência tem um representante (único) da forma $(x_1, x_2, 1)$ e reciprocamente.

Desta maneira, cada ponto (x_1, x_2) do plano euclidiano está em correspondência biunívoca com a classe de equivalência a qual $(x_1, x_2, 1)$ pertence. Por exemplo, o ponto do plano com coordenadas $(2, -3)$ é um ponto com coordenadas homogêneas $(2, -3, 1)$.

Definição 3.2. Cada representante $(y_1, y_2, y_3), y_3 \neq 0$, de uma determinada classe de equivalência (via $\sim$ da proposição 3.1) é denominado **coordenadas homogêneas do ponto** que este define.

Definição 3.3. Dizemos que um ponto do plano em coordenadas homogêneas $(x_1, x_2, 1)$ é incidente com uma reta $[u_1, u_2, u_3]$ se, e somente se,

$$uX = 0,$$

onde u é a matriz linha $u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$, X é a matriz coluna $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e 0 representa matriz nula.

Consequentemente as considerações anteriores nos permitem estabelecer o seguinte modelo analítico para o plano euclidiano:

Termo indefinido	Interpretação
Pontos	Classe de equivalência de triplas ordenadas (y_1, y_2, y_3) , onde $y_3 \neq 0$.
Retas	Classe de equivalência de triplas ordenadas $[u_1, u_2, u_3]$, onde $u_1^2 + u_2^2 \neq 0$.
Incidência	Um ponto $(x_1, x_2, 1)$ é incidente sobre uma reta $[u_1, u_2, u_3]$ se, e somente se $uX = 0$, em $u = [u_1, u_2, u_3]$, e $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e 0 a matriz nula.

3.2 Sobre o plano projetivo

O modelo analítico para o plano projetivo é inspirado no modelo para o plano euclidiano. Aqui novamente empregamos a relação de equivalência da proposição 3.1.

A saber,

Termo indefinido	Interpretação
Pontos	Classe de equivalência não nula de triplas ordenadas de números reais; qualquer elemento (x_1, x_2, x_3) desta classe de equivalência é denominada coordenadas homogêneas do ponto . Ainda denotamos por $\bar{X}$ a classe de um ponto $X \in \mathbb{R}^3$.
Retas	Classe de equivalência não nula de triplas ordenadas de números reais; qualquer elemento $[u_1, u_2, u_3]$ desta classe de equivalência é denominada coordenadas homogêneas da reta .
Incidência	A reta $[u_1 u_2 u_3]$ é incidente com o ponto (x_1, x_2, x_3) se, e somente se $[u_1, u_2, u_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$, em que 0 representa a matriz nula.

De acordo com [6], toda reta l passando pela origem pode ser representada na notação vetorial como:

$$l : (x_1, x_2, x_3) = t(s_1, s_2, s_3), t \in \mathbb{R},$$

onde $x = (x_1, x_2, x_3)$ é o vetor definido da origem a um ponto arbitrário X sobre a reta l e s é o vetor diretor para a l . Observe que qualquer múltiplo escalar não nulo do vetor diretor s é também um vetor diretor para a mesma reta.

Também por [6], todo plano τ passando pela origem pode ser representado da forma:

$$\tau : \langle n, x \rangle = n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = 0,$$

onde $x = (x_1, x_2, x_3)$ é o vetor definido da origem a um ponto arbitrário X sobre o plano τ e $n = (n_1, n_2, n_3)$ é um vetor normal ao plano.

Portanto, uma reta l passando pela origem com vetor diretor s pertence ao plano τ (passando pela origem) com vetor normal n se, e somente se,

$$\langle n, s \rangle = 0. \text{ Ou seja, } n \text{ e } s \text{ são perpendiculares.}$$

Sendo assim, é possível identificar cada ponto P em π com uma classe de equivalência de $\mathbb{R}^3$, a saber, o conjunto de todos os possíveis vetores diretores para a reta que passa pela origem e intercepta π em P . Em outras palavras, P é identificado com a classe de equivalência de $\mathbb{R}^3$ a qual o vetor diretor s pertence.

Analogamente, cada reta l em π pode ser identificada com uma classe de equivalência em $\mathbb{R}^3$, a saber, o conjunto de todos os possíveis vetores normais ao plano que passa pela origem e que intercepta π em l . Isto é cada reta l é identificada com a classe de equivalência de $\mathbb{R}^3$ a qual n pertence.

Desta maneira, elementos destas classes de equivalência (a saber, do vetor diretor normal) foram identificados com coordenadas homogêneas de pontos e retas em π .

Para completar o processo, precisamos encontrar coordenadas homogêneas para os pontos ideais e para a reta ideal adicionados a π para a obtenção de π' .

Podemos obter isto através da identificação de cada ponto ideal com a classe de equivalência não nula dos possíveis vetores diretores da reta pertencente ao plano XY correspondente a este ponto ideal, e identificando a reta ideal com a classe de equivalência não nula dos possíveis vetores normais ao plano XY .

Agora, as coordenadas homogêneas de um ponto ideal são dadas por $(x_1, x_2, 0)$ e as coordenadas homogêneas de uma reta ideal dada por $[0, 0, u_1]$.

Usando esta identificação, estamos habilitados a dizer que pontos em π' são colineares se, e somente se, as retas correspondentes a estes são coplanares, mas da Álgebra Linear sabemos que estas retas são coplanares se, e somente se, os respectivos vetores diretores são linearmente independentes.

Observação 3.1. No que segue a notação $P(p_1, p_2, p_3)$ significa que (p_1, p_2, p_3) são as coordenadas homogêneas do ponto P , assim com $u[u_1, u_2, u_3]$ significa que $[u_1, u_2, u_3]$ são as coordenadas homogêneas da reta u .

Teorema 3.1. *Três pontos, $X(x_1, x_2, x_3), Y(y_1, y_2, y_3), Z(z_1, z_2, z_3)$ são colineares se, e somente se o determinante*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Demonstração. Sabemos que X, Y, Z são colineares se, e somente se existe uma reta de coordenadas homogêneas $u[u_1 \ u_2 \ u_3]$ tal que

$$\begin{aligned} u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 &= 0 \\ u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 &= 0 \\ u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 &= 0 \end{aligned}$$

ou na notação matricial

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

segue pela Regra de Cramer que este sistema homogêneo admite como solução apenas a solução trivial. Mas se este ocorre, ou seja, $u_1 = u_2 = u_3 = 0$; temos que u_1, u_2, u_3 não definem uma reta. Portanto, necessariamente

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Disto, segue que

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

já que o determinante de uma matriz coincide com o determinante de sua transposta. □

Corolário 3.1. *Se $P(p_1, p_2, p_3)$ e $Q(q_1, q_2, q_3)$ são pontos distintos, então a equação da reta PQ pode ser escrita por:*

$$\begin{vmatrix} x_1 & p_1 & q_1 \\ x_2 & p_2 & q_2 \\ x_3 & p_3 & q_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Vejamos agora como determinar quando três retas são concorrentes e encontrar a equação do ponto determinado por duas retas. Aqui, no entanto, as coordenadas das retas são usadas como linhas em vez de colunas.

Teorema 3.2. *Três retas, u, v e w são concorrentes se, e somente se o determinante*

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstração. Suponha que as retas distintas u, v e w sejam concorrentes e denote por (x_1, x_2, x_3) o ponto em comum.

Consequentemente, considerando $[u_1, u_2, u_3]$, $[v_1, v_2, v_3]$ e $[w_1, w_2, w_3]$ as coordenadas homogêneas de u, v e w respectivamente, temos que este ponto é concorrente a três retas se, e somente se,

$$\begin{aligned} u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 &= 0 \\ v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 &= 0 \\ w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ou em notação matricial

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

segue pela Regra de Cramer que a única solução possível é a trivial, o que não pode ocorrer já que em nossa interpretação analítica um ponto é uma classe de equivalência não nula.

Sendo assim, necessariamente,

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

□

Corolário 3.2. *A equação do ponto de interseção das retas concorrentes p e q , denotado por $p \cdot q$ pode ser escrita como*

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Exemplo 3.1. Pelo corolário anterior podemos encontrar a equação do ponto de interseção das retas p e q dadas pelas coordenadas homogêneas $[-2, 5, 7]$ e $[3, 1, 2]$. Veja que esta equação é determinada por

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ -2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Expandindo este determinante temos a equação $3u_1 + 25u_2 - 17u_3 = 0$, que é a equação de um ponto. Note que as coordenadas deste ponto são $(3, 25, -17)$.

O próximo teorema é de fundamental importância para reescrevermos projetividades na forma analítica.

Teorema 3.3. *Se $P(p_1, p_2, p_3)$ e $Q(q_1, q_2, q_3)$ são dois pontos distintos, então qualquer ponto R da reta PQ tem coordenadas homogêneas (r_1, r_2, r_3) onde $r_i = \lambda_1 p_i + \lambda_2 q_i, i = 1, 2, 3$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$. Reciprocamente, qualquer ponto R com coordenadas homogêneas desta forma pertence a reta PQ .*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Suponhamos que o ponto R tenha coordenadas homogêneas $(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 q_1, \lambda_1 p_2 + \lambda_2 q_2, \lambda_1 p_3 + \lambda_2 q_3)$, com $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^*$. Então:

$$\begin{vmatrix} r_1 & p_1 & q_1 \\ r_2 & p_2 & q_2 \\ r_3 & p_3 & q_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 p_1 + \lambda_2 q_1 & p_1 & q_1 \\ \lambda_1 p_2 + \lambda_2 q_2 & p_2 & q_2 \\ \lambda_1 p_3 + \lambda_2 q_3 & p_3 & q_3 \end{vmatrix} = 0$$

Logo, pelo teorema 3.1, os pontos P, Q e R são colineares.

$$(\Rightarrow) \text{ Se } R \text{ pertence a } PQ \text{ então } \begin{vmatrix} r_1 & p_1 & q_1 \\ r_2 & p_2 & q_2 \\ r_3 & p_3 & q_3 \end{vmatrix} = 0, \text{ ou em outras palavras, os}$$

vetores correspondentes à estes três pontos são linearmente dependentes. Portanto, existem $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ não todos nulos, tais que $\lambda_1 P + \lambda_2 Q + \lambda_3 R = 0$. Note que $\lambda_3 \neq 0$ já que P e Q são pontos distintos. Portanto, assumindo $\lambda_3 = -1$, segue $\lambda_1 P + \lambda_2 Q = R$. $\square$

Definição 3.4. *Os pontos P e Q usados no teorema 3.3 são chamados pontos base, enquanto que λ_1 e λ_2 são chamados parâmetros homogêneos de R com relação a P e Q .*

Observação 3.2. Os parâmetros homogêneos dos pontos base P e Q , com relação a P e Q respectivamente, são $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Em geral, os parâmetros homogêneos de um ponto dependem dos pontos base escolhidos e de suas coordenadas homogêneas. Então, coordenadas homogêneas específicas para os pontos base devem ser usadas. Mesmo assim, não existe um único conjunto de parâmetros homogêneos para cada ponto, já que (λ_1, λ_2) e $(k\lambda_1, k\lambda_2)$ representam o mesmo ponto ($k \neq 0$); mas a razão $\lambda = \lambda_1/\lambda_2$ é única.

Definição 3.5. No contexto da observação anterior a razão $\lambda = \lambda_1/\lambda_2$ é chamada *parâmetro do ponto*.

Note que o parâmetro de Q é 0, e convencionamos o parâmetro de P como sendo ∞ . Desta maneira os números reais estão em correspondência injetora com todos os pontos pertencentes a uma reta, exceto com um, a saber, o primeiro ponto base.

Observação 3.3. Veja que temos o dual do teorema 3.3 para retas, a saber: Se $u[u_1, u_2, u_3]$ e $v[v_1, v_2, v_3]$ são retas distintas e concorrentes então qualquer reta do plano definido por u e v tem coordenadas homogêneas (w_1, w_2, w_3) onde $w_i = \lambda_1 v_i + \lambda_2 u_i$, $i = 1, 2$ e $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$; e reciprocamente, qualquer reta com estas coordenadas pertence ao plano determinado pelas retas u e v .

As retas u e v em questão são denominadas retas base e os números reais λ_1 e λ_2 são chamados parâmetros homogêneos de w com relação a u e v .

Teorema 3.4. Uma projetividade entre dois feixes pode ser representada por uma equação matricial (real) da forma

$$s \begin{bmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

com $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = |A| \neq 0, s \neq 0$, onde (λ_1, λ_2) são parâmetros homogêneos dos elementos originais e (λ'_1, λ'_2) são parâmetros homogêneos das imagens destes, respectivamente, com relação a uma base predeterminada de elementos.

Demonstração. Sejam P e Q pontos base do feixe de pontos e m e n retas base do feixe de retas.

Considere $X(x_1, x_2, x_3)$ um ponto sobre a reta PQ , distinto de P e Q com parâmetros homogêneos (λ_1, λ_2) ; suponha que a reta $x'[x'_1, x'_2, x'_3]$ de parâmetros homogêneos λ'_1 e λ'_2 seja a imagem de X sob esta perspectividade.

Note que, pela definição de perspectividade segue que x' é incidente ao ponto X , ou seja,

$$\begin{bmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

O que resulta:

$$x'_1x_1 + x'_2x_2 + x'_3x_3 = 0. \quad (I)$$

Reescrevendo a equação (I) em termos de componentes temos

$$(\lambda'_1m_1 + \lambda'_2n_1)(\lambda'_1p_1 + \lambda'_2q_1) + (\lambda'_1m_2 + \lambda'_2n_2)(\lambda'_1p_2 + \lambda'_2q_2) + (\lambda'_1m_3 + \lambda'_2n_3)(\lambda'_1p_3 + \lambda'_2q_3) = 0. \quad (II)$$

Logo,

$$\begin{aligned} &\lambda'_1\lambda_1(p_1m_1 + p_2m_2 + p_3m_3) + \lambda'_1\lambda_2(q_1m_1 + q_2m_2 + q_3m_3) + \\ &\lambda'_2\lambda_1(p_1n_1 + p_2n_2 + p_3n_3) + \lambda'_2\lambda_2(q_1n_1 + q_2n_2 + q_3n_3) = 0 \end{aligned} \quad (III)$$

Para simplificar a equação (III) adotemos a seguinte notação:

$$\begin{aligned} a_{21} &= \sum_{i=1}^3 p_i m_i \\ a_{22} &= \sum_{i=1}^3 q_i m_i \\ a_{11} &= - \sum_{i=1}^3 p_i n_i \\ a_{12} &= - \sum_{i=1}^3 q_i n_i \end{aligned} \quad (IV)$$

Consequentemente,

$$a_{21}\lambda'_1\lambda_1 + a_{22}\lambda'_1\lambda_2 - a_{11}\lambda'_2\lambda_1 - a_{12}\lambda'_2\lambda_2 = 0 \quad (V)$$

ou seja,

$$\lambda'_1(a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2) = \lambda'_2(a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2) = 0 \quad (VI)$$

Disto resulta que

$$\frac{\lambda'_1}{\lambda'_2} = \frac{a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2}{a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2} \quad (VII)$$

Mas isto significa que existe $s \neq 0$ tal que

$$\begin{aligned} s\lambda'_1 &= a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 \\ s\lambda'_2 &= a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 \end{aligned} \quad (VIII)$$

Em notação matricial:

$$s \begin{bmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (IX)$$

Observe que

$$a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12} = |A| \neq 0 \quad (X)$$

uma vez que a perspectividade é uma aplicação injetora.

Ainda, resolvendo a equação (IX) para λ_1/λ_2 obtemos uma representação algébrica para uma perspectividade entre um feixe de retas e um feixe de pontos.

Agora para finalizar a demonstração basta lembrar que qualquer projetividade é um produto finito de perspectividade e que o produto entre duas matrizes do tipo que aparece na equação (IX) ainda é da mesma forma destas.

□

Exemplo 3.2. Procuremos uma matriz da projetividade que aplica pontos sobre uma reta p com parâmetros homogêneos $(1, 3)$, $(1, 2)$ e $(2, 3)$ a pontos sobre outra reta p' com parâmetros homogêneos $(1, -4)$, $(0, 1)$ e $(-1, 1)$ respectivamente. Veja que pelo teorema 3.4, a projetividade pode ser representada por uma matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, onde:

$$s \begin{bmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

O objetivo é determinar a, b, c e d . Para isto supondo que o par ordenado $(1, 2)$ é aplicado em $(0, 1)$ temos:

$$s_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= a + 2b \\ s_1 &= c + 2d \end{aligned} \quad (I)$$

Veja que da equação (I) segue:

$$a = -2b. \quad (II)$$

Com isto e pelo fato de que o par ordenado $(1, 3)$ é aplicado em $(1, -4)$ obtemos a relação:

$$s_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2b & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

isto é,

$$s_2 = b \quad (III)$$

$$-4s_2 = c + 3d \quad (IV)$$

Substituindo (III) em (IV) resulta que

$$c = -3d - 4b \quad (V).$$

Pelas equações (II) e (III) e sabendo que o par (2, 3) é levado em (-1, 1) por tal projetividade, segue a relação:

$$s_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2b & b \\ -3d - 4b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

consequentemente,

$$-s_3 = -b \quad (VI)$$

$$s_3 = -3d - 8b. \quad VII$$

Tomando $s_3 = 1$ então da equação (VI) temos que $b = 1$ e da equação (VII) que $d = -3$. Desta maneira pelas equações (V) e (VI) obtemos $c = 5$ e $a = -2$.

Portanto a matriz A , é a matriz

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Observe que os escalares não precisam assumir os mesmos valores, neste caso, por exemplo, temos que $s_2 = 1 = s_3$ enquanto que $s_1 = -1$.

A seguir apresentamos um teorema com a qual comprovamos que a recíproca do teorema anterior também vale.

Teorema 3.5. *Qualquer aplicação dada por uma equação matricial da forma*

$$s \begin{bmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \quad ad - bc \neq 0, \quad s \neq 0 \quad (3.9)$$

é uma projetividade.

Demonstração. Para esta demonstração assumimos que ambos feixes envolvidos são feixes de pontos, porém por argumentos análogos é possível demonstrá-los para demais casos.

Sejam $P(1, 0)$ e $Q(0, 1)$ pontos base para o primeiro feixe de pontos e R o ponto com parâmetros (1, 1) com relação aos pontos P e Q . Desta forma, da aplicação

resultante da equação matricial A segue que $P'(a, c)$, $Q'(b, d)$ e $R'(a + b, c + d)$ são os elementos correspondentes, via tal aplicação, do segundo feixe de pontos com relação a uma base predeterminada. Pelo teorema 2.6, existe uma única projetividade $\mathcal{P}$ tal que $\mathcal{P} : PQR \rightarrow P'Q'R'$. Mas pelo teorema 3.4 a projetividade $\mathcal{P}$ tem a seguinte equação matricial

$$s \begin{bmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Consequentemente, para demonstrar este teorema é suficiente mostrar que a matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

é múltiplo escalar da matriz de equação A . Para determinar a, b, c, d usaremos o fato de que P é aplicado em P' , Q é aplicado em Q' e R é aplicado em R' , via $\mathcal{P}$. Uma vez que o escalar s pode ser diferente em cada situação, podemos permitir que s assumam diferentes valores em cada um dos casos, ou seja, temos as três seguintes equações matriciais.

$$\begin{aligned} s_1 \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & s_2 \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ s_3 \begin{bmatrix} a + b \\ c + d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Destas equações matriciais obtemos

$$s_1 a = a_{11} \quad s_2 b = a_{12} \quad s_3(a + b) = a_{11} + a_{12}$$

$$s_1 c = a_{21} \quad s_2 d = a_{22} \quad s_3(c + d) = a_{21} + a_{22}$$

Uma vez que estas seis equações tem sete incógnitas, uma destas podemos escolher.

Digamos então que $s_3 = 1$.

Consequentemente segue,

$$a + b = a_{11} + a_{12} = s_1 a + s_2 b$$

$$c + d = a_{21} + a_{22} = s_1 c + s_2 d$$

Ou seja,

$$a(1 - s_1) + b(1 - s_2) = 0$$

$$c(1 - s_1) + d(1 - s_2) = 0$$

e como $ad - bc \neq 0$, a solução $s_1 = 1$ e $s_2 = 1$ é única. Logo,

$$\begin{aligned}a &= a_{11} \\ b &= a_{12} \\ c &= a_{21} \\ d &= a_{22}.\end{aligned}$$

Portanto segue que a equação matricial

$$s \begin{bmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

é a representação de uma projetividade.

□

Observação 3.4. Pelos teoremas 3.4 e 3.5 podemos concluir então que existe uma correspondência biunívoca entre os conjuntos das projetividades entre dois feixes com relação a uma base predeterminada e o conjunto das classes de equivalência das matrizes 2×2 com determinantes não nulo, sob a relação $\sim$ dada por $A \sim B$ se, e somente se $A = sB$ para alguma constante diferente de zero.

Com o teorema 3.4 é possível verificar que o modelo analítico definido satisfaz o axioma 2.6.

De acordo com o axioma 2.6, projetividades sobre feixe (que não seja a identidade) tem no máximo dois elementos invariantes. O próximo teorema caracteriza as representações matriciais de projetividade com dois, um ou nenhum elementos invariantes, respectivamente.

Teorema 3.6. *Uma projetividade sobre um feixe (que não seja a identidade) com matriz*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

tem dois elementos invariantes se $(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}a_{21} > 0$, tem um elemento invariável se $(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}a_{21} = 0$, ou nenhum elemento invariante se $(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}a_{21} < 0$.

Demonstração. Note que (λ_1, λ_2) é um elemento invariante se, e somente se

$$s \begin{bmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

que é, se, e somente se (λ_1, λ_2) um vetor característico ou autovetor da matriz. Porém, existem autovetores se, e somente se, existe uma solução $s \neq 0$ da equação $|A - sI| = 0$.

$$\text{Ou seja, } 0 = |A - sI| = \begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - s \end{vmatrix} = (a_{11} - s)(a_{22} - s) - (a_{21}a_{12}) =$$

$s^2 - (a_{11} + a_{22})s - a_{21}a_{12}s + a_{11}a_{22}$. Resolvendo para s temos o seguinte:

$$s = \frac{(a_{22} + a_{11}) \pm \sqrt{(a_{22} + a_{11})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2}$$

Se a expressão sob o radical é positiva, há duas soluções distintas para s e portanto dois autovetores linearmente independentes e assim dois pontos invariantes distintos da projetividade. Se esta expressão é zero, há exatamente uma solução para s e portanto exatamente um ponto invariante da projetividade. Finalmente, se a expressão é negativa, não existem soluções reais para s e então não há pontos invariantes da projetividade. Uma vez que esta expressão é algébricamente equivalente à expressão na instrução do teorema, o resultado segue. $\square$

Definição 3.6. *Uma projetividade sobre um feixe é denominado **hiperbólica**, **parabólica**, ou **elíptica** se o número de elementos invariantes é 2, 1 ou 0, respectivamente.*

A seguir definimos o objeto Raio Transversal. Veremos que, no contexto do modelo analítico para o plano projetivo este valor numérico é invariante sob projetividades.

Definição 3.7. *Se A, B, C, D são quatro elementos distintos de um feixe com par homogêneos $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2), (\gamma_1, \gamma_2)$ e (δ_1, δ_2) respectivamente com relação a uma base de pontos dada, então o **raio transversal** de A, B, C e D , $R(A, B, C, D)$, é o número real obtido pela seguinte expressão em termos de determinantes.*

$$R(A, B, C, D) = \frac{\begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} \div \frac{\begin{vmatrix} \delta_1 & \alpha_1 \\ \delta_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta_1 & \beta_1 \\ \delta_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}.$$

Observação 3.5. Na definição acima se nenhum dos elementos A, B, C, D é o primeiro elemento da base de pontos considerada, então $(\alpha, 1), (\beta, 1), (\gamma, 1), (\delta, 1)$ também são parâmetros homogêneos para tais pontos, respectivamente.

Veja que neste caso,

$$R(A, B, C, D) = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta} \div \frac{\delta - \alpha}{\delta - \beta}.$$

Observação 3.6. É possível mostrar que as 24 permutações possíveis dos quatro elementos distintos de um feixe podem ser caracterizadas em termos do raio transversal r em seis possíveis valores: $r, 1/r, 1 - r, (r - 1)/r, r/(r - 1)$ e $1/(1 - r)$. Por exemplo, $R(A, B, C, D) = R(B, A, D, C) = R(C, D, A, B) = R(D, C, B, A) = r$. E ainda,

$$R(D, C, A, B) = 1/r = R(A, C, B, D) \text{ e}$$

$$R(B, C, A, D) = r - 1 = R(A, D, B, C).$$

Consequentemente, o raio transversal de quatro elementos distintos de um feixe não pode ser 0, 1 ou ∞ .

Teorema 3.7. *O raio transversal de quatro elementos distintos de um feixe é invariante sob uma projetividade.*

Demonstração. Temos que provar que se A, B, C, D são elementos distintos de um feixe correspondendo a elementos distintos A', B', C', D' de outro feixe, ou seja, $ABCD \wedge A'B'C'D'$, então $R(A, B, C, D) = R(A', B', C', D')$. Veja que, sendo $M = [a_{ij}]$ a matriz que define a projetividade tal que $ABCD \wedge A'B'C'D'$ segue que

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \gamma'_1 & \alpha'_1 \\ \gamma'_2 & \alpha'_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_1 & \alpha_1 \end{vmatrix}; \\ \begin{vmatrix} \gamma'_1 & \beta'_1 \\ \gamma'_2 & \beta'_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \beta_1 \end{vmatrix}; \\ \begin{vmatrix} \delta'_1 & \alpha'_1 \\ \delta'_2 & \alpha'_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_1 & \alpha_1 \\ \delta_1 & \alpha_1 \end{vmatrix}; \\ \begin{vmatrix} \delta'_1 & \beta'_1 \\ \delta'_2 & \beta'_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_1 & \beta_1 \\ \delta_2 & \beta_2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

em que A tem parâmetros homogêneos (α_1, α_2) , A' tem parâmetros homogêneos (α'_1, α'_2) , B tem parâmetros homogêneos (β_1, β_2) , B' tem parâmetros homogêneos (β'_1, β'_2) , C tem parâmetros homogêneos (γ_1, γ_2) , C' tem parâmetros homogêneos (γ'_1, γ'_2) , D tem parâmetros homogêneos (δ_1, δ_2) , D' tem parâmetros homogêneos (δ'_1, δ'_2) , com relação a uma base predeterminada. Disto segue que

$$\begin{aligned} R(A', B', C', D') &= \frac{\begin{vmatrix} \gamma'_1 & \alpha'_1 \\ \gamma'_2 & \alpha'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \gamma'_1 & \beta'_1 \\ \gamma'_2 & \beta'_2 \end{vmatrix}} \div \frac{\begin{vmatrix} \delta'_1 & \alpha'_1 \\ \delta'_2 & \alpha'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta'_1 & \beta'_1 \\ \delta'_2 & \beta'_2 \end{vmatrix}} = \\ &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} \div \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_1 & \alpha_1 \\ \delta_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_1 & \beta_1 \\ \delta_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} = \\ &= \frac{\begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} \div \frac{\begin{vmatrix} \delta_1 & \alpha_1 \\ \delta_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta_1 & \beta_1 \\ \delta_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} = R(A, B, C, D). \end{aligned}$$

□

Como consequência deste teorema segue que o raio transversal pode ser calculado diretamente das coordenadas homogêneas dos pontos envolvidos, ou seja:

Corolário 3.3. Se A, B, C, D , são pontos com coordenadas homogêneas (a_1, a_2, a_3) , (b_1, b_2, b_3) , (c_1, c_2, c_3) , (d_1, d_2, d_3) , são elementos distintos de um feixe, então

1.

$$\frac{\begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_2 & b_2 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix}} \div \frac{\begin{vmatrix} d_2 & a_2 \\ d_3 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 \end{vmatrix}} = R(A, B, C, D)$$

desde que o feixe não contenha $X(1, 0, 0)$

2.

$$\frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix}} \div \frac{\begin{vmatrix} d_1 & a_1 \\ d_3 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_3 & b_3 \end{vmatrix}} = R(A, B, C, D)$$

desde que o feixe não contenha $Y(0, 1, 0)$

3.

$$\frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}} \div \frac{\begin{vmatrix} d_1 & a_1 \\ d_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}} = R(A, B, C, D)$$

desde que o feixe não contenha $Z(0, 0, 1)$

Assim se $Z(0, 0, 1)$ não é um elemento do feixe, as duas primeiras coordenadas homogêneas destes elementos podem ser usadas como parâmetros homogêneos no raio transversal. Porém se o feixe contém $Z(0, 0, 1)$ (então este corolário falha para esta afirmação), então também não pode conter ambos $X(1, 0, 0)$ e $Y(0, 1, 0)$ e corolários semelhantes podem ser provados para feixes que não contém X e para feixes que não contém Y . O uso de uma dessas afirmações semelhantes é vista no exemplo a seguir.

Exemplo 3.3. Vejamos como calcular $R(A, B, C, D)$ onde $A(1, 2, 1)$, $B(3, 6, 1)$, $C(2, 4, 1)$ e $D(1, 2, 0)$ são pontos sobre a reta $l[2, -1, 0]$.

Note que $Z(0, 0, 1)$ é um ponto em l , logo não podemos usar o item (3), entretanto o ponto $X(1, 0, 0)$ não incide com l , assim segue do item (1):

$$R(A, B, C, D) = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} \div \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{-2} \div \frac{2}{2} = -1.$$

Observe que como Y também não incide a reta l , poderíamos ter calculado o raio transversal usando o item (2), o qual daria o mesmo valor.

Teorema 3.8. *Se três elementos distintos de um feixe, A, B, C e um número real r ($r \neq 0, 1$) são dados, então existe um único ponto D tal que $R(A, B, C, D) = r$.*

Sejam $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3)$ parâmetros homogêneos dos pontos A, B, C, D , com relação a uma base predeterminada B . Para determinar tal ponto D basta encontrarmos seus parâmetros homogêneos com relação a base B .

Isto segue das equações dadas nos itens (1), (2) e (3) do corolário 3.3, isto é;

1.

$$\frac{\begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_2 & b_2 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix}} \div \frac{\begin{vmatrix} d_2 & a_2 \\ d_3 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 \end{vmatrix}} = R(A, B, C, D)$$

desde que o feixe não contenha $X(1, 0, 0)$

2.

$$\frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix}} \div \frac{\begin{vmatrix} d_1 & a_1 \\ d_3 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_3 & b_3 \end{vmatrix}} = R(A, B, C, D)$$

desde que o feixe não contenha $Y(0, 1, 0)$

3.

$$\frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}} \div \frac{\begin{vmatrix} d_1 & a_1 \\ d_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}} = R(A, B, C, D)$$

desde que o feixe não contenha $Z(0, 0, 1)$

Destas igualdades temos:

$$\begin{cases} \frac{c_2 a_3 - a_2 c_3}{d_2 a_3 - a_2 d_3} = r \\ \frac{c_1 a_3 - a_1 c_3}{d_1 a_3 - a_1 d_3} = r \\ \frac{c_1 a_2 - a_1 c_2}{d_1 a_2 - a_1 d_2} = r \end{cases}$$

Ou seja, obtemos um sistema linear de três equações e três incógnitas.

$$\begin{cases} u_{11}d_1 + u_{21}d_2 + 0d_3 = \gamma_1 \\ u_{12}d_1 + 0d_2 + u_{32}d_3 = \gamma_2 \\ 0d_1 + u_{23}d_2 + d_{33}d_3 = \gamma_3 \end{cases}$$

em que u_{ij} e γ_k dependem de $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ e r dados.

Desta maneira sendo

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 \\ u_{21} & 0 & u_{23} \\ 0 & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} = -(u_{12}u_{21}u_{33} + u_{11}u_{32}u_{22}) \neq 0$$

é garantida a solução do sistema.

Teorema 3.9. *Se A, B, C, D são elementos distintos de um feixe e A', B', C', D' são elementos distintos de um outro feixe, com $R(A', B', C', D') = R(A, B, C, D)$, então existe uma projetividade aplicando A, B, C, D em A', B', C', D' , respectivamente.*

Demonstração. Pelo teorema fundamental 2.6, existe uma projetividade tal que $ABC \wedge A'B'C'$. Seja D^* a única imagem de D por esta projetividade. Pelo teorema 3.7 $R(A, B, C, D) = R(A', B', C', D^*)$. Mas, por hipótese $R(A, B, C, D) = R(A', B', C', D')$, consequentemente $R(A', B', C', D') = R(A', B', C', D^*)$, logo segue pelo teorema anterior que $D^* = D'$. $\square$

No próximo resultado veremos a relação entre dois objetos importantes da geometria projetiva, a saber, raio transversal e conjunto harmônico.

Teorema 3.10. *Se A, B, C, D são elementos distintos de um feixe, então $R(A, B, C, D) = -1$ se e somente se os pontos colineares A, B, C, D formam o conjunto harmônico $H(AB, CD)$.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Uma vez que o conjunto harmônico $H(AB, CD)$ existe segue que $H(AB, DC)$ também existe pelo corolário 2.1. Agora pelo teorema 2.8, sabemos que existe uma projetividade tal que $ABCD \wedge ABDC$. Nestas condições, pelo teorema 3.7 $R(A, B, C, D) = R(A, B, D, C)$; mas pela observação (3.7) sabemos que se $R(A, B, C, D) = r$, então $R(A, B, D, C) = 1/r$; consequentemente $r = 1/r$, ou seja, $r^2 = 1$. Como $r \neq 1$ isto implica que $r = -1$.

($\Rightarrow$) Seja D' um quarto elemento do feixe tal que A, B, C, D' formam o conjunto harmônico $H(AB, CD')$, a existência de D' é garantida pelo teorema 2.2. Logo, pelo mesmo argumento da demonstração anterior segue que $R(A, B, C, D') = -1$. Mas por hipótese $R(A, B, C, D) = -1$, ou seja, $R(A, B, C, D') = R(A, B, C, D)$. Portanto segue do teorema 3.8 que $D = D'$. Consequentemente existe o conjunto harmônico $H(AB, CD)$. $\square$

4 Transformações do Plano Projetivo

Neste capítulo estudaremos dois tipos de transformações lineares do plano projetivo, a saber, colineações e correlações. A transformação colineação é caracterizada por aplicar pontos colineares em pontos colineares, e consequentemente aplica reta em reta, enquanto que a transformação correlação tem a propriedade de aplicar pontos colineares em retas concorrentes e esta transformação será crucial para deduzirmos equações analíticas para cada cônica estudada anteriormente.

Primeiramente vejamos a definição de uma transformação linear:

Definição 4.1. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Dizemos que uma aplicação $T : V \rightarrow V$ é uma transformação linear de V se satisfaz as seguintes propriedades:*

- i) $T(u + v) = T(u) + T(v), \forall u, v \in V$;
- ii) $T(ku) = kT(u), \forall u \in V, \forall k \in \mathbb{R}$.

Ainda, dizemos que T é injetora quando $u \neq v$ implica $T(u) \neq T(v)$, T é sobrejetora quando $\text{Im}T = V$ e T é uma bijeção quando é injetora e sobrejetora.

Teorema 4.1. *T é uma transformação linear bijetora de $\mathbb{R}^3 = \{X(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \mathbb{R}\}$ se, e somente se $T(x) = AX$, em que $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$, $|A| \neq 0$ e $a_{ij} \in \mathbb{R}$.*

No que segue, V denota o conjunto $U \cup \{(0, 0, 0)\}$, em que U é o conjunto de pontos do modelo analítico (isto é, classes de equivalência não nulas de ternas ordenadas em $\mathbb{R}^3$). Observe que V munido das adições e multiplicações por escalares usuais de $\mathbb{R}^3$ forma um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Observação 4.1. Veja que uma transformação linear injetora de $V = U \cup \{(0, 0, 0)\}$ está bem definida no seguinte sentido: se $u \sim v$ então $T(u) \sim T(v)$, de fato:

Se $u \sim v$ então: $u = kv$, $k \in \mathbb{R}^*$, logo $T(u) = T(kv) = kT(v)$, $k \in \mathbb{R}^*$, isto é, $T(u) \sim T(v)$.

4.1 Colineação

Definição 4.2. *Uma transformação linear T de $V = U \cup \{(0, 0, 0)\}$ bijeção é denominada **colineação**.*

Teorema 4.2. *T é uma colineação se, e somente se, $sX' = AX$, [em que $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$, $|A| \neq 0$ e $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$] X' é um ponto de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\}$ tal que $T(\overline{X}) = \overline{X'}$.*

Demonstração. Sabemos que $T(\overline{X}) = \overline{X'}$, isto é, $T(\{kX, k \in \mathbb{R}^*\}) = \{lX', l \in \mathbb{R}^*\}$, em que X' é um ponto de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\}$ tal que $\overline{X'} = \overline{X'}$.

Sendo assim, temos que para determinados $k, l \in \mathbb{R}^*$, c aplica $kX \in \mathbb{R}^3$ em $lX' \in \mathbb{R}^3$. Como T é uma transformação linear, isto equivale a dizer que c aplica cada $X \in \mathbb{R}^3$ em $sX' \in \mathbb{R}^3$, em que $s = \frac{k}{l} \in \mathbb{R}^*$. Desta observação e pelo teorema 4.1 segue que:

$$sX' = AX, [\text{em que } A = [a_{ij}]_{3 \times 3}, |A| \neq 0 \text{ e } a_{ij} \in \mathbb{R}, s \neq 0] \quad (I).$$

□

Teorema 4.3. *Uma colineação aplica pontos colineares em pontos colineares. Além disso, a imagem, u' , de uma reta $u[u_1, u_2, u_3]$ sob uma colineação com matriz A é dada pela equação matricial $ku' = uA^{-1}$, $k \in \mathbb{R}^*$, $u' = [u'_1 \ u'_2 \ u'_3]$, $u = [u_1 \ u_2 \ u_3]$.*

Demonstração. Seja P, Q, R pontos colineares e suponha que P é um ponto da reta QR . Mostraremos que a imagem de P , P' , é colinear com as imagens de Q e R , denotadas por Q' e R' respectivamente.

Como P está sobre QR segue do teorema 3.3 que existem $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$P = \lambda_1 Q + \lambda_2 R.$$

Sendo a equação matricial que define a colineação dada por

$$sX' = AX \quad (II)$$

temos:

$$sP' = AP \Rightarrow sP' = A(\lambda_1 Q + \lambda_2 R) \Rightarrow P' = \lambda_1 (\frac{1}{s} AQ) + \lambda_2 (\frac{1}{s} AR) = \lambda_1 Q' + \lambda_2 R'.$$

Logo, pelo teorema 3.3 P' pertence a reta $Q'R'$.

Agora determinemos a equação matricial da imagem da reta $u[u_1, u_2, u_3]$ pela colineação com equação matricial (II).

Sendo $[u_1 \ u_2 \ u_3]X = 0$ a equação que define a reta u e $[u'_1 \ u'_2 \ u'_3]X' = 0$ a equação que define a imagem de u , u' , na $sX' = AX$ temos:

$$0 = [u'_1 \ u'_2 \ u'_3]X' = [u'_1 \ u'_2 \ u'_3] \frac{1}{s} AX.$$

Consequentemente X' pertence a reta u' se, e somente se X pertence a reta de equação matricial $[u'_1 \ u'_2 \ u'_3] \frac{1}{s} AX = 0$.

Mas, X' pertence a reta de equação $[u'_1 \ u'_2 \ u'_3]X' = 0$ se, e somente se, X pertence a reta de equação $[u_1 \ u_2 \ u_3]X = 0$, como colineações são injetoras, segue que as equações $[u'_1 \ u'_2 \ u'_3] \frac{1}{s} AX = 0$ e $[u_1 \ u_2 \ u_3]X = 0$, define a mesma reta.

Portanto, necessariamente $[u_1 \ u_2 \ u_3]X = [u'_1 \ u'_2 \ u'_3] \frac{1}{s} AX$ ou $k[u'_1 \ u'_2 \ u'_3] = [u_1 \ u_2 \ u_3]A^{-1}$, em que $k = \frac{1}{s}$.

□

Observação 4.2. Dos teoremas 4.1 e 4.3 vemos que podemos descrever a aplicação de qualquer colineação via uma equação entre pontos quanto via uma equação entre retas. A matriz A presente em ambos os resultados é denominada matriz da colineação. Note ainda que a matriz de uma colineação não é única, já que sendo A uma matriz de colineação então $rA, r \in \mathbb{R}^*$, também é uma matriz de colineação segundo a seguinte equação matricial equivalente a equação (I)

$$s_1 X = (rA)X, \text{ com } s_1 = sr.$$

Corolário 4.1. *Sob uma colineação, retas concorrentes correspondem a retas concorrentes.*

Demonstração. Sejam $u[u_1, u_2, u_3]$ e $v[v_1, v_2, v_3]$ retas concorrentes, quaisquer.

Pelo teorema 4.3 as respectivas imagens destas retas via uma colineação de matriz A são dadas por :

$$\begin{cases} k_1 u' = uA^{-1}, k_1 \in \mathbb{R}^* \\ k_2 v' = vA^{-1}, k_2 \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

e da demonstração do teorema 4.3 sabemos que $u'X' = 0$ se e somente se $uX = 0$ em que X' é a imagem de X via a colineação dada.

Sendo P o ponto comum de u e v temos:

$$\begin{cases} uP = 0 \\ vP = 0 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} u'P' = 0 \\ v'P' = 0 \end{cases}$$

Consequentemente P' é um ponto comum de u' e v' , isto é, u' e v' são retas concorrentes. $\square$

O seguinte teorema é a ponte para mostrar que as propriedades de raio transversal e relações harmônicas são invariantes sob colineações.

Teorema 4.4. *Uma colineação do plano projetivo induz uma projetividade entre os elementos de feixes correspondentes.*

Demonstração. Mostraremos o resultado apenas para feixe de pontos, para os demais a demonstração é análoga.

Seja $\mathcal{F}$ um feixe de pontos e P, Q, R pontos quaisquer deste. Como P, Q, R são colineares, pelo teorema 3.3 podemos escrever $R = \lambda_1 P + \lambda_2 Q$.

Sendo P', Q' e R' suas imagens sob uma colineação com matriz A segue que estes também são colineares, e portanto, $R' = \mu_1 P' + \mu_2 Q'$; por outro lado, pelo teorema 4.2, temos

$$\begin{cases} s_1 P' = AP \\ s_2 Q' = AQ \\ s_3 R' = AR, \quad s_i \in \mathbb{R}^*, \forall i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Consequentemente,

$$s_3 R' = A(\lambda_1 P + \lambda_2 Q) = \lambda_1 AP + \lambda_2 AQ = s_1 \lambda_1 P' + s_2 \lambda_2 Q'.$$

Logo,

$$s_3(\mu_1 P' + \mu_2 Q') = s_3 R' = \lambda_1 s_1 P' + \lambda_2 s_2 Q', \text{ ou seja}$$

$$s_3 \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Com isto concluímos que a colineação aplica feixe de pontos em feixe de pontos e ainda pelo teorema 3.5 induz uma projetividade dada pela equação (1), já que

$$\begin{vmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{vmatrix} = s_1 s_2 \neq 0.$$

□

Corolário 4.2. *Raio transversal e conjuntos harmônicos são invariantes sob colineações.*

Sabemos dos teoremas 2.7 e 3.7 que tanto conjunto harmônico quanto raio transversal são invariantes sob projetividade.

Como toda colineação induz uma projetividade, esta mantém invariantes tais objetos. Enquanto que projetividades são unicamente determinadas por três pares de elementos correspondentes, o próximo teorema mostra que colineações são unicamente determinadas por quatro pares de elementos correspondentes. A prova desse teorema ilustra uma técnica útil para encontrar a matriz de uma colineação, como veremos em um exemplo, posteriormente.

Teorema 4.5. *Existe uma única colineação que aplica quatro pontos quaisquer (cada três não colineares) a quatro pontos quaisquer (cada três não colineares).*

Demonstração. A verificação deste teorema consiste em encontrar algebricamente uma matriz A de colineação que relaciona quatro pontos quaisquer P, Q, R, S (cada três não colineares) a quatro pontos P', Q', R', S' (cada três não colineares) e observando que esta matriz é unicamente determinada a menos da relação de equivalência.

Primeiramente, considerando os pontos $X(1, 0, 0), Y(0, 1, 0), Z(0, 0, 1)$ e $U(1, 1, 1)$ podemos encontrar uma matriz B tal que

$$\begin{cases} s_1 P' = BX \\ s_2 Q' = BY \\ s_3 R' = BZ \\ s_4 S' = BU \end{cases}$$

Também podemos determinar uma matriz C tal que

$$\begin{cases} s_5 P = CX \\ s_6 Q = CY \\ s_7 R = CZ \\ s_8 S = CU \end{cases}$$

Observe que tais matrizes nada mais são do que as respectivas matrizes de mudança de base.

Logo, temos o seguinte:

$$\begin{cases} s_1 P' = BX = Bs_5 C^{-1} P \\ s_2 Q' = BY = Bs_6 C^{-1} Q \\ s_3 R' = BZ = Bs_7 C^{-1} R \\ s_4 S' = BU = Bs_8 C^{-1} S \end{cases}$$

Implica,

$$\begin{cases} \frac{s_1}{s_5} P' = BC^{-1} P \\ \frac{s_2}{s_6} Q' = BC^{-1} Q \\ \frac{s_3}{s_7} R' = BC^{-1} R \\ \frac{s_4}{s_8} S' = BC^{-1} S \end{cases}$$

Ou seja, sendo $A = BC^{-1}$, $k_1 = \frac{s_1}{s_5}$, $k_2 = \frac{s_2}{s_6}$, $k_3 = \frac{s_3}{s_7}$ e $k_4 = \frac{s_4}{s_8}$.

Segue:

$$\begin{cases} k_1 P' = AP \\ k_2 Q' = AQ \\ k_3 R' = AR \\ k_4 S' = AS \end{cases}$$

Com isto, pelo teorema 4.2 temos a colineação que aplica P, Q, R e S em P', Q', R' e S' . $\square$

Corolário 4.3. *Uma colineação de um plano que mantém quatro pontos fixados (cada três não colineares) é a transformação identidade.*

Demonstração. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

a matriz da colineação que mantém os pontos P, Q, R, S (cada três não colineares) invariantes, logo:

$$\begin{cases} k_1 P = AP \\ k_2 Q = AQ \\ k_3 R = AR \\ k_4 S = AS, \quad k_i \in \mathbb{R}^*, \forall i = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Ou seja,

$$k_1 \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

$$k_1 P_1 = a_{11} P_1 + a_{12} P_2 + a_{13} P_3 \Rightarrow a_{12} = 0 = a_{13} \text{ e } k_1 = a_{11}$$

$$k_1 P_2 = a_{21} P_1 + a_{22} P_2 + a_{23} P_3 \Rightarrow a_{21} = 0 = a_{23} \text{ e } k_1 = a_{22}$$

$$k_1 P_3 = a_{31} P_1 + a_{32} P_2 + a_{33} P_3 \Rightarrow a_{31} = 0 = a_{32} \text{ e } k_1 = a_{33},$$

logo,

$$A = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 \end{bmatrix}, k_1 \neq 0$$

Analogamente, podemos mostrar que

$$A = \begin{bmatrix} k_2 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix} = A = \begin{bmatrix} k_3 & 0 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$$

Logo, a menos de relação de equivalência a matriz A é a identidade. Consequentemente a colineação é a transformação identidade.

□

Exemplo 4.1. Encontremos uma matriz de colineação que relaciona $P(1, -3, 2)$, $Q(2, -1, 3)$, $R(0, 3, -2)$ e $S(-1, 3, 0)$ em $P'(3, 7, 7)$, $Q'(0, 0, 1)$, $R'(5, 7, 6)$ e $S'(1, 9, 7)$, respectivamente.

Primeiramente devemos verificar se quaisquer três dos pontos P, Q, R e S não são colineares, isto basta verificar que nenhum dos quatro determinantes $|PQR|$, $|PQS|$, $|PRS|$ e $|QRS|$ são iguais a zero. Analogamente mostramos que três dos pontos P', Q', R' e S' não são colineares. Façamos isto:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -7$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -10$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 19$$

E ainda:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 7 \\ 7 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 14$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 9 \\ 7 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -20$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 7 & 7 & 9 \\ 7 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 48$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & 9 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 38$$

Agora, seguindo os procedimentos da demonstração do teorema 4.5 vamos determinar a matriz B , tal que:

$s_1P' = BX$, $s_2Q' = BY$, $s_3R' = BZ$ e $s_4S' = BU$ ou seja:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = s_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} b_{11} = 3s_1 \\ b_{21} = 7s_1 \\ b_{31} = 7s_1 \end{matrix} \quad (3.10)$$

Substituindo a primeira coluna de B por (3.10) e usando a segunda equação temos:

$$\begin{bmatrix} 3s_1 & b_{12} & b_{13} \\ 7s_1 & b_{22} & b_{23} \\ 7s_1 & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = s_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} b_{12} = 0 \\ b_{22} = 0 \\ b_{32} = s_2 \end{matrix} \quad (3.11)$$

Substituindo a primeira coluna de B por (3.10) e (3.11) e usando a terceira equação, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 3s_1 & 0 & b_{13} \\ 7s_1 & 0 & b_{23} \\ 7s_1 & 1 & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = s_3 \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} b_{13} = 5s_3 \\ b_{23} = 7s_3 \\ b_{33} = 6s_3 \end{matrix} \quad (3.12)$$

E finalmente, de (3.10), (3.11) e (3.12) e da quarta equação temos a igualdade

$$\begin{bmatrix} 3s_1 & 0 & 5s_3 \\ 7s_1 & 0 & 7s_3 \\ 7s_1 & s_2 & 6s_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = s_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

e por conseguinte o sistema:

$$\begin{aligned} 3s_1 + 5s_3 &= s_4 \\ 7s_1 + 7s_3 &= 9s_4 \\ 7s_1 + s_2 + 6s_3 &= 7s_4 \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema vemos que $s_1 = -19$, $s_2 = 24$, $s_3 = 10$ e $s_4 = -7$ é uma solução e então B é dada por:

$$B = \begin{bmatrix} -57 & 0 & 50 \\ -133 & 0 & 70 \\ -133 & 24 & 60 \end{bmatrix}$$

Um procedimento análogo é usado para determinar a matriz C via as equações $s_5P = CX$, $s_6Q = CY$, $s_7R = CZ$ e $s_8S = CU$. Obtemos

$$C = \begin{bmatrix} 1s_5 & 2s_6 & 0 \\ -3s_5 & -1s_6 & 3s_7 \\ 2s_5 & 3s_6 & -2s_7 \end{bmatrix}$$

tal que

$$\begin{aligned} 1s_5 + 2s_6 &= -s_8 \\ -3s_5 - s_6 + 3s_7 &= 3s_8 \\ 2s_5 + 3s_6 - 2s_7 &= 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Observe que $s_5 = 19$, $s_6 = -6$, $s_7 = 10$ e $s_8 = -7$ e então C é dada por

$$C = \begin{bmatrix} 19 & -12 & 0 \\ -57 & 6 & 30 \\ 38 & -18 & -20 \end{bmatrix}$$

Finalmente, sendo $A = BC^{-1}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Observação 4.3. O teorema 4.5 nos permite simplificar provas analíticas escolhendo quaisquer quatro pontos, a cada três não colineares, como os pontos de coordenadas: $X(1, 0, 0)$, $Y(0, 1, 0)$, $Z(0, 0, 1)$ e $U(1, 1, 1)$.

Teorema 4.6. *Uma colineação tem pelo menos um ponto invariante e uma reta invariante.*

Demonstração. Para mostrar que uma colineação com matriz A tem pelo menos um ponto invariante, note que haverá um ponto invariante X se, e somente se existe um escalar $s \neq 0$ tal que $sX = AX$. Mas $sX = AX$ se, e somente se $sIX - AX = (sI - A)X = 0$ em que I é a matriz identidade. Agora esta última equação tem uma solução não trivial X se, e somente se $|sI - A| = 0$; mas como A é uma matriz real 3×3 , temos que $|sI - A|$ é um polinômio do terceiro grau em s e então tem pelo menos uma solução real não nula para s . Analogamente, para mostrar que a colineação de matriz A tem pelo menos uma reta invariante, o mesmo procedimento é usado, mas com a equação $ku' = uA^{-1}$. $\square$

Observação 4.4. A reta invariante de uma colineação não precisa ter todos os seus pontos invariantes, isto é, embora pontos sobre uma reta invariante devem permanecer sobre a reta após a aplicação da colineação, os pontos não são necessariamente mantidos fixados.

Definição 4.3. *Uma colineação que mantém fixado todos os pontos de uma reta invariante é chamada **colineação perspectiva** e esta reta é denominada **eixo**.*

Observação 4.5. Temos que a transformação identidade é uma colineação perspectiva e pelo teorema 4.5 uma colineação perspectiva que não seja a identidade pode ter no máximo um ponto invariante não fora do eixo.

O seguinte teorema demonstra que existe sempre um ponto invariante sob uma colineação perspectiva.

Teorema 4.7. *Toda colineação perspectiva tem um ponto invariante tal que toda reta que o contém é invariante sob esta colineação.*

Demonstração. Sejam m o eixo da colineação perspectiva e observe que pelo teorema 4.6, esta colineação tem pelo menos um ponto invariante.

Caso 1. Suponha que um ponto invariante C não pertença a m . Neste caso alguma reta que passa por C intersecta m em um segundo ponto invariante (que existe pela definição de m) (figura 4.1). Portanto, cada reta que passa por C tem dois pontos invariantes, a saber, C e o ponto que concorre com o eixo m , consequentemente esta tal reta é invariante.

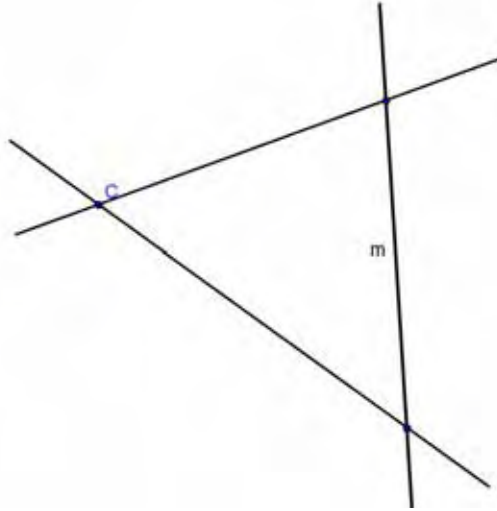


Figura 4.1: C , ponto invariante e m , reta de referência invariante.

Caso 2. Suponha que todo ponto invariante incide sobre m .

Seja P um ponto que não pertence a m , qualquer.

Agora, considere $n = PP'$ em que P' é a imagem de P sob a colineação perspectiva e defina $C = n \cdot m$.

Veja que $n = CP = CP'$ é invariante, pois C, P, P' são pontos de n e toda reta é unicamente determinada por dois pontos.

Se R é outro ponto não incidente a m ou n , analogamente ao procedimento acima é possível mostrar que existe uma reta invariante, a saber, $o = RR'$.

Considere agora $X = o \cdot n$ (figura 4.2).

Uma vez que o e n são retas invariantes, segue que X é invariante logo, pela hipótese X pertence a m , ou seja, $X = n \cdot m$. Mas, $C = n \cdot m$, logo $X = C$.

Portanto, todo ponto não incidente sobre m pertence a alguma reta invariante que passa por C , isto é, toda reta passando por C é invariante.

□

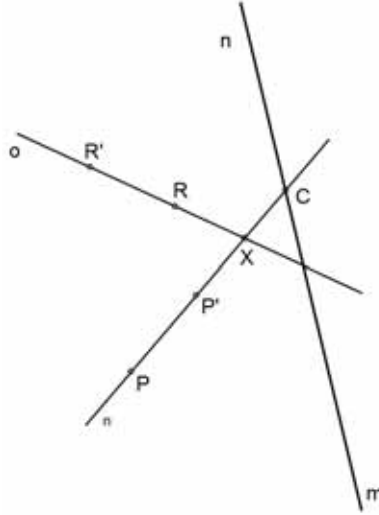


Figura 4.2: Retas invariantes.

Definição 4.4. *O ponto invariante garantido pelo teorema anterior é denominado centro da colineação perspectiva.*

Teorema 4.8. *Sejam m uma reta e C um ponto não incidente sobre m , quaisquer. Existe uma única colineação perspectiva com eixo m e centro C que aplica um ponto P dado ($P \neq C$ e P não incidente sobre m) em um ponto P' dado pertencente a PC .*

Demonstração. **Caso 1.** C não incide sobre m .

Defina $D = PC \cdot m$ e sejam E e F pontos sobre m distintos de D (figura 4.3). Nestas condições, pelo teorema 4.5 existe uma única colineação que aplica P em P' , C em C , E em E e F em F .

Note que esta colineação mantém m invariante uma vez que esta aplica E em E , F em F , respectivamente. Veja ainda que $PC = P'C$ é uma segunda reta invariante. Portanto $D = PC \cdot m$ é um terceiro ponto invariante sobre m (bem como E e F), e disto segue que a projetividade induzida sobre m por esta colineação é a identidade (conforme teorema 2.6), consequentemente m é uma reta tal que todo ponto incidente sobre esta é invariante.

Com isto, tal colineação é uma colineação perspectiva com eixo m , e de acordo com a demonstração do teorema 4.7, o centro pode ser o ponto C .

Caso 2. C incidente sobre m .

Para estes casos, defina $D = PX \cdot m$, em que X é um ponto não incidente sobre a reta PC ou não incidente a m (figura 4.4). Veja que esta colineação perspectiva procurada, deve, necessariamente aplicar X em X' dado por $CX \cdot P'D$. Por outro lado, pelo teorema 4.5 existe uma única colineação que aplica P em P' , X em

X' , C em C e D em D . Desta forma, m é invariante sob esta colineação já que C e D , pontos incidentes sobre m , são invariantes.

Veja que C é um ponto tal que toda reta que o contenha é invariante sob esta colineação já que as três retas $CP = CP'$, m e $CX = CX'$ são retas invariantes sob esta colineação e C é incidente sobre as três.

Portanto, como m tem pelo menos dois pontos invariantes segue que necessariamente m é o eixo desta colineação perspectiva.

□

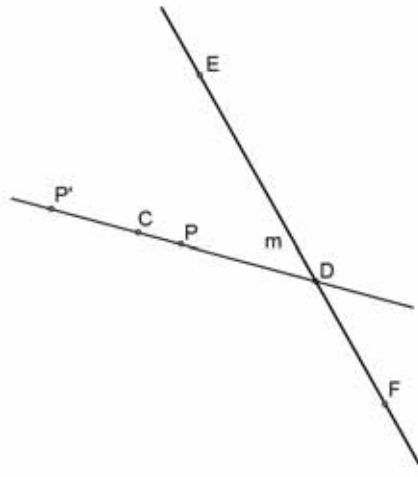


Figura 4.3: Colineação perspectiva com centro C .

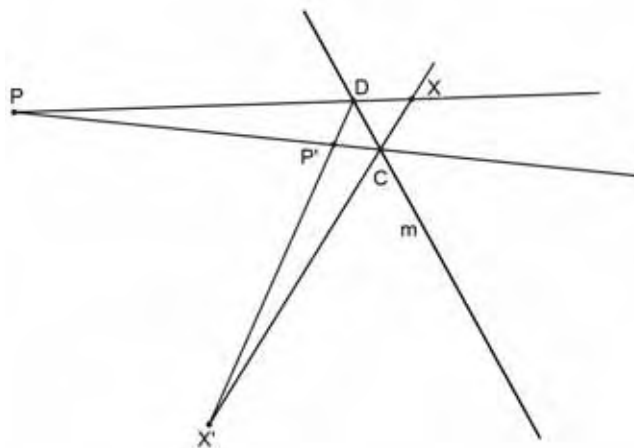


Figura 4.4: Colineação perspectiva com eixo m .

O teorema a seguir explica o nome colineação perspectiva; isto se deve ao fato de que este tipo de colineação aplica triângulos a triângulos perspectivos.

Teorema 4.9. *Se $\triangle P'Q'R'$ e $\triangle PQR$ são triângulos perspectivos a partir do ponto C e da reta m então $\triangle P'Q'R'$ é a imagem de $\triangle PQR$ sob uma colineação perspectiva de centro C e eixo m .*

Demonstração. Suponha que $\triangle PQR$ e $\triangle P'Q'R'$ são perspectivos pelo ponto C e pela reta m . Já que $\triangle PQR$ é um triângulo, os três pontos P, Q e R não são colineares. Portanto pelo menos um destes pontos, digamos P , não pertence a m . Além disso já que $\triangle PQR$ e $\triangle P'Q'R'$ são perspectivos por C , P' pertence a PC . Então pelo teorema 4.8, existe uma colineação perspectiva T com centro C e eixo m que relaciona P em P' .

Resta-nos mostrar agora que $T(Q) = Q'$ e $T(R) = R'$. Façamos isto.

Pela demonstração do teorema 4.8, $T(Q) = P'D \cdot QC$ em que $D = PQ \cdot m$. Mas $PQ \cdot m = P'Q' \cdot m$, já que os triângulos são perspectivos por m , consequentemente $P'D = P'Q'$. Portanto $T(Q) = P'Q' \cdot QC$. Por outro lado, Q' pertence a QC já que os triângulos são perspectivos por C , então $T(Q) = Q'$. Analogamente, $T(R) = R'$. □

Definição 4.5. *Uma colineação perspectiva, que não seja a identidade, é chamada uma **elação** se seu centro incide em seu eixo, e é chamada uma **homologia** caso contrário.*

Teorema 4.10. *Sob uma homologia com centro C e eixo m , qualquer ponto P que não incide sobre m ($P \neq C$) tem uma imagem P' tal que C, P e P' são colineares e, ainda se $m \cdot CP = Q$, então $R(C, Q, P, P')$ é constante para todo P .*

Demonstração. Observe primeiramente que C, P e P' são colineares pelo teorema 4.8.

Agora mostraremos que se $m \cdot CP = Q$ então $R(C, Q, P, P')$ é constante para todo ponto P , em dois casos:

O fato de C, P e P' serem colineares por todas colineações perspectivas tem sido observado anteriormente.

Caso 1. X não incide sobre CP e nem a m .

Seja X' a imagem de X sob esta homologia, e defina $D = CX \cdot m$, $E = PX \cdot m$, com isto, temos que $X' = XC \cdot EP'$, conforme ilustrado na figura 4.5.

Consequentemente, $CQPP' \overset{E}{\wedge} CDXX'$ e então pelo teorema 3.7:

$$R(C, Q, P, P') = R(C, D, X, X') = \text{constante}.$$

Caso2. X incide sobre CP .

Para este caso, seja Y um ponto não incidente sobre CP (figura 4.6). Pelo caso 1, segue que $R(C, Q, P, P') = R(C, D, Y, Y')$ e então considerando Y no lugar de P na argumentação do caso 1 segue o resultado para X .

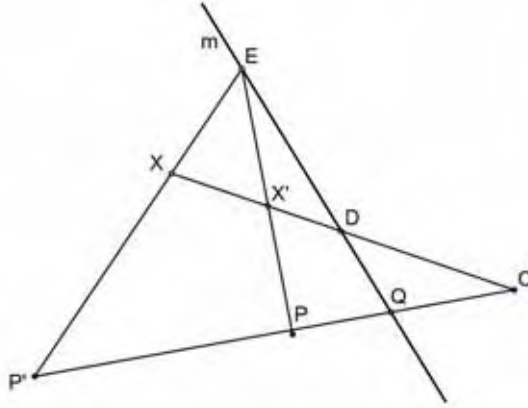


Figura 4.5: X não pertence a CP e nem a m na homologia com centro C e eixo m .

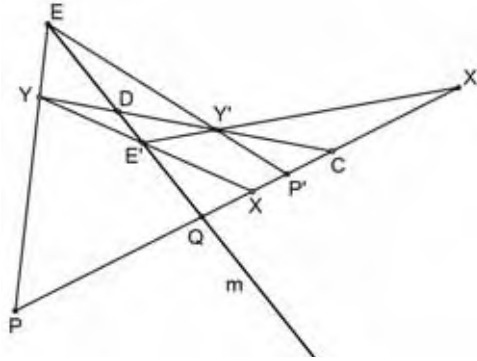


Figura 4.6: X pertence a CP e Y não pertence a CP na homologia com centro C e eixo m .

□

Definição 4.6. No contexto do teorema anterior, se este raio transversal é igual a -1 , a homologia será chamada uma **homologia harmônica**.

4.2 Correlação e Polaridade

O segundo tipo de transformações do plano projetivo, conhecido como correlações, são também transformações lineares injetoras. Aqui, no entanto, as imagens de pontos são retas.

Definição 4.7. Uma **correlação** é uma transformação linear bijetora entre o conjunto de pontos do plano projetivo sobre o conjunto de retas do plano projetivo.

Observação 4.6. Analogamente as colineações, as correlações também podem ser representadas por uma matriz, que é única a menos de relação de equivalência.

Teorema 4.11. *Uma correlação pode ser representada por uma matriz A real 3×3 em que $|A| \neq 0$. A equação matricial para a correlação é $su^t = AX$ com $X \in \mathbb{R}^3$ e $s \in \mathbb{R}^*$.*

Demonstração. Análoga a demonstração teorema 4.2. Observe que foi preciso utilizar a transposta pois pontos são representados por uma matriz coluna enquanto que retas são representadas por uma matriz linha. $\square$

Teorema 4.12. *Uma correlação aplica pontos colineares em retas concorrentes. A imagem de uma reta u sob uma correlação com matriz A é dada pela equação $kX^t = uA^{-1}$, $k \in \mathbb{R}^*$.*

Demonstração. Análoga a demonstração do teorema 4.3 $\square$

Corolário 4.4. *Sob uma correlação, retas concorrentes são aplicadas em pontos colineares.*

Demonstração. Análoga a demonstração do corolário 4.1 $\square$

Teorema 4.13. *Uma correlação de um plano projetivo induz uma projetividade entre os elementos dos feixes correspondentes.*

Demonstração. Análoga a demonstração do teorema 4.4 $\square$

Corolário 4.5. *Raio transversal e conjuntos harmônicos são invariantes sob correlações.*

Demonstração. Análoga a demonstração do corolário 4.2 $\square$

Teorema 4.14. *Existe uma única correlação que aplica quaisquer quatro pontos, (cada três não colineares), em quaisquer quatro retas, (cada três não concorrentes).*

Demonstração. Análoga a demonstração do teorema 4.5. $\square$

Observação 4.7. Do teorema anterior segue que uma correlação leva quadrângulo em um quadrilateral e vice-versa.

Definição 4.8. *Uma correlação, cuja matriz é simétrica é chamada uma **polaridade**. Se uma polaridade aplica um ponto P a uma reta p (e portanto p em P), então p é chamada **polar** de P e P é chamado o **pólo** de p com relação a polaridade dada.*

Observação 4.8. Correlações aplica pontos em retas e retas em pontos, entretanto, uma correlação que aplica um ponto P a uma reta p não necessariamente aplica a reta p ao ponto P ; uma vez que uma correlação aplica cada ponto X a uma reta u de acordo com a equação $su^t = AX$ e aplica a reta u ao ponto Y de acordo com a equação $kY^t = uA^{-1}$, segue da primeira equação que

$$u = \left(\frac{1}{s}\right)(AX)^t = \left(\frac{1}{s}\right)X^t A^t.$$

Agora se cada ponto X fosse a imagem da reta u , via a segunda equação, sendo $X = Y$, então teríamos:

$$kX^t = k'Y^t = uA^{-1} = \left(\left(\frac{1}{s}\right)X^t A^t\right)A^{-1}$$

ou

$$skX^t = X^t(A^t A^{-1}).$$

Mas veja que isto ocorre para todo ponto X se, e somente se, $A^t A^{-1} = I$, ou seja, se, e somente se, $A^t = A$ se, e somente se a matriz A é simétrica.

Veja ainda que, como polaridades são correlações, e estas são aplicações bijetoras, segue que as respectivas retas polares de pontos distintos são retas distintas, e vice e versa.

Teorema 4.15. *Um ponto P incide sobre a reta polar de um ponto Q , sob uma polaridade dada se, e somente se, Q incide sobre a reta polar de P , sob esta mesma polaridade.*

Demonstração. Seja C a matriz de uma polaridade, qualquer.

Se q e p são as retas polares de Q e P , respectivamente, temos:

$$\begin{cases} s_1 q^t &= CQ \\ s_2 p^t &= CP \end{cases} \quad (*)$$

Suponha que P incida sobre a reta polar de Q , q . Neste caso, $qP = 0$ e por (*) temos:

$$s_1 q = Q^t C,$$

logo,

$$Q^t C P = 0.$$

Consequentemente, como $C^t = C$ temos $P^t C Q = 0$, isto é, $pQ = 0$.

Portanto, Q incide sobre a reta polar de P .

De modo similar, trocando de posições P e Q , p e q , temos a afirmação recíproca $\square$

Corolário 4.6. *P incide sobre a reta polar de Q com relação a uma polaridade com matriz C , se, e somente se, $Q^t C P = 0$. Em particular, p contém o pólo de q , com relação a esta mesma polaridade, se, e somente se $pC^{-1}q^t = 0$.*

Demonstração. Segue da demonstração do teorema 4.15. $\square$

Definição 4.9. Dizemos que dois pontos são **conjugados** com relação a uma polaridade dada, se cada ponto incide sobre a reta polar do outro. Um ponto que incide sobre sua própria reta polar é chamado **auto-conjugado**.

Ainda dizemos que, duas retas são **conjugadas**, com relação à polaridade dada se cada reta é incidente com o pólo da outra. Uma reta que é incidente com seu próprio pólo é chamada **auto-conjugada**.

Teorema 4.16. O conjunto de pontos auto-conjugados de uma polaridade com matriz C é o conjunto de pontos X satisfazendo a equação $X^t C X = 0$. Enquanto que o conjunto de retas auto-conjugadas desta mesma polaridade é o conjunto de retas satisfazendo a equação $u C^{-1} u^t = 0$.

Demonstração. Segue do 4.15 e do corolário 4.6 e das definições de retas e pontos conjugados. $\square$

Corolário 4.7. O conjunto de pontos auto-conjugados de uma polaridade com matriz C é o conjunto de pontos X satisfazendo a equação:

$$c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + c_{33}x_3^2 + 2c_{12}x_1x_2 + 2c_{13}x_1x_3 + 2c_{23}x_2x_3 = 0$$

Demonstração. Pelo teorema anterior temos que este conjunto é conjunto de pontos $X(x_1, x_2, x_3)$ tais que $X^t C X = 0$, consequentemente

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

O que resulta em

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11}x_1 & c_{12}x_2 & c_{13}x_3 \\ c_{21}x_1 & c_{22}x_2 & c_{23}x_3 \\ c_{31}x_1 & c_{32}x_2 & c_{33}x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

E logo,

$$x_1(c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3) + x_2(c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3) + x_3(c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3) = 0.$$

O que implica

$$c_{11}x_1^2 + (c_{12} + c_{21})x_1x_2 + (c_{13} + c_{31})x_1x_3 + c_{22}x_2^2 + (c_{23} + c_{32})x_2x_3 + c_{33}x_3^2 = 0$$

Mas C é uma matriz simétrica, isto é, $c_{ij} = c_{ji}, \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$

Portanto,

$$c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + c_{33}x_3^2 + 2c_{12}x_1x_2 + 2c_{13}x_1x_3 + 2c_{23}x_2x_3 = 0.$$

$\square$

No próximo resultado vemos como colinação age em conjunto de pontos auto-conjugados.

Teorema 4.17. *Uma colineação com matriz A aplica um conjunto de pontos auto-conjugados com matriz C a um conjunto de pontos auto-conjugados com matriz $C' = (A^{-1})^t C (A^{-1})$.*

Demonstração. Sejam S um conjunto de pontos auto-conjugados com equação $X^t C X = 0$ em que C é uma matriz 3×3 simétrica, não singular. E A a matriz de uma colineação arbitrária. Veja que A é também uma matriz 3×3 não singular, e a equação ponto correspondente é $sX' = AX$. Logo, $X = sA^{-1}X'$ e $X^t = s(X')^t(A^{-1})^t$.

Substituindo na equação $X^t C X = 0$ temos,

$$(X')^t (A^{-1})^t C (A^{-1}) X' = 0$$

ainda

$$(X')^t ((A^{-1})^t C A^{-1}) X' = 0.$$

Mas $(A^{-1})^t C A^{-1}$ é uma matriz 3×3 simétrica, não singular, ou seja, esta matriz define uma polaridade. Portanto X pertence ao conjunto S de pontos auto-conjugados com matriz C se, e somente se X' pertence ao conjunto S' de pontos auto-conjugados com matriz $C' = (A^{-1})^t C A^{-1}$. $\square$

Teorema 4.18. *Um conjunto não vazio de pontos auto-conjugados com relação a uma polaridade dada é uma cônica de pontos e um conjunto não vazio de retas auto-conjugadas com relação a uma polaridade dada é uma cônica de retas. Reciprocamente, uma cônica de pontos é um conjunto de pontos auto conjugados e uma cônica de retas é um conjunto de retas auto conjugadas, com relação a alguma polaridade.*

Demonstração. Verificaremos este resultado apenas para o caso de cônica de pontos; para cônica de retas segue da dualidade entre estes objetos.

Seja $\mathcal{C}$ um conjunto não vazio de pontos auto-conjugados.

Observe que sendo $\mathcal{C}$ não vazio segue da bijeção da polaridade e da definição de ponto auto-conjugado que $\mathcal{C}$ tem necessariamente pelo menos três pontos não colineares. Podemos supor sem perda de generalidade que estes pontos são $X(1, 0, 0)$, $Z(0, 0, 1)$ e $U(1, 1, 1)$ e ainda que as retas polares de X e Z se interceptam em $Y(0, 1, 0)$.

Ainda, como X e Z são pontos auto-conjugados, cujas retas polares são respectivamente $XY[0, 0, 1]$ e $ZY[1, 0, 0]$.

Algebricamente, isto significa que existe uma matriz $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$ tal que

$$C[1, 0, 0]^t = s_1[0, 0, 1]^t \text{ e } C[0, 0, 1]^t = s_2[1, 0, 0]^t$$

Disto segue que $c_{11} = c_{12} = c_{23} = c_{33} = 0$ e $c_{13} \neq 0$. Agora do fato de U ser também auto-conjugado temos $C_{22} = 1$ e $C_{13} = -\frac{1}{2}$, consequentemente do corolário 4.7 a equação para $\mathcal{C}$ é dada por:

$$(x_2)^2 - x_1x_2 = 0.$$

Com isto nosso problema se resume em mostrar que o conjunto de pontos satisfazendo esta equação é uma cônica de pontos, ou seja, um conjunto de pontos de interseção entre retas correspondentes de duas projetividades de feixes de retas.

Façamos isto.

Sejam X e Z centros de dois feixes. A projetividade que usaremos é unicamente determinada pela correspondência:

$$(XY \ XZ \ XU) \wedge (ZX \ ZY \ ZU).$$

Note que sob esta projetividade, X, Y e U são todos pontos de interseção de retas correspondentes.

Ainda, uma vez que XY corresponde a ZX , a reta entre os centros dos dois feixes é tangente a X . Analogamente, ZY é tangente a Y .

Considerando XY e XZ como retas base do primeiro feixe e ZX e ZY retas bases do segundo feixe, conseguimos uma projetividade com matriz diagonal.

Finalmente, exigindo que $XU[0, 1, -1]$ com parâmetros homogêneos $(1, -1)$ seja aplicado em $ZU[1, -1, 0]$, também com parâmetros $(1, -1)$, temos a matriz identidade 2×2 como a matriz da projetividade.

Agora, seja $P(p_1, p_2, p_3)$ um ponto qualquer de $\mathcal{C}$. Mostremos que este é um ponto de interseção de retas correspondentes sob esta projetividade, para isto veja que a projetividade aplica a reta $XP = l[0, -p_3, p_2]$ com parâmetros homogêneos $(p_2, -p_3)$ à reta l' que contém Z e com os mesmos parâmetros homogêneos. Logo l' tem coordenadas $[-p_3, p_2, 0]$. Agora pelo corolário 3.2 segue que $-(p_2)^2, -p_3p_2, -(p_3)^2$ são as coordenadas do ponto da interseção de l com l' , mas P é um ponto de $\mathcal{C}$, ou seja, satisfaz $(p_2)^2 = p_1p_2$. Consequentemente, o ponto $l \cdot l'$ tem coordenadas homogêneas (p_1, p_2, p_3) . Isto é, o ponto P é um ponto de interseção das retas l e l' , relacionadas projetivamente, se, e somente se P pertence a $\mathcal{C}$.

Note ainda, que tal projetividade não é uma perspectividade, uma vez que a reta XZ , a reta que une os centros dos feixes envolvidos, não é invariante sobre esta aplicação.

($\Leftarrow$) Mostremos que qualquer cônica de pontos $\mathcal{C}$ é o conjunto de pontos auto-conjugados com relação a uma polaridade. Para tanto, seja P, Q e R três pontos distintos de $\mathcal{C}$ e S o ponto de interseção das tangentes a $\mathcal{C}$ em P e Q . Deste modo, P, Q, R e S são quatro pontos distintos, cada três não colineares.

Uma vez que colineações preservam incidência, e portanto cônicas, podemos assumir que P, Q, R e S são os pontos $X(1, 0, 0), Z(0, 0, 1), U(1, 1, 1)$ e $Y(0, 1, 0)$, respectivamente.

Pelo corolário 2.7 as tangentes em X e em Z , e os três pontos X, Z e U determinam unicamente uma cônica de pontos. Assim para nosso objetivo, é suficiente mostrar que

estas tangentes e pontos determinam uma polaridade com matriz C relativa a qual $\mathcal{C}$ seja um conjunto de pontos auto-conjugados. Ou seja, procuramos uma polaridade sob a qual duas retas tangentes sejam auto-conjugadas. Deste fato e com a condição de U ser ponto auto-conjugado, satisfazem a equação:

$$(x_2)^2 - x_1x_3 = 0.$$

Logo, novamente pelo corolário 4.7, segue que $\mathcal{C}$ é um conjunto de pontos auto-conjugados. □

Corolário 4.8. *Uma cônica de pontos tem uma equação da forma $X^tCX = 0$ e uma cônica de retas tem uma equação da forma $uC^{-1}u^t = 0$ em que C 3×3 é uma matriz 3×3 , simétrica, não singular.*

Demonstração. Segue dos teoremas 4.18 e 4.16. □

Observação 4.9. Do corolário anterior podemos concluir que qualquer cônica de pontos corresponde a uma matriz simétrica, a saber, a matriz que define a polaridade envolvida. Esta matriz é denominada **matriz da cônica de pontos**. Além disso, se a reta p corresponde ao ponto P sob a polaridade determinada pela cônica, dizemos que P e p são o pólo e reta polar com relação a cônica, respectivamente.

Corolário 4.9. *Seja P um ponto de uma cônica de pontos $\mathcal{C}$. A reta polar de P com relação a $\mathcal{C}$ é a tangente de $\mathcal{C}$ em P ; reciprocamente, a tangente a $\mathcal{C}$ em P é reta polar de P com relação a $\mathcal{C}$.*

Demonstração. Segue do teorema 4.18 e das definições dos objetos envolvidos. □

Corolário 4.10. *Se X é um ponto de uma cônica de pontos $\mathcal{C}$ com matriz C , então u , a tangente a $\mathcal{C}$ em X , é dada pela equação $su^t = CX$.*

Demonstração. Segue do corolário anterior e teorema 4.11. □

Teorema 4.19. *As tangentes a uma cônica de pontos são as retas da cônica de retas determinada pela mesma polaridade.*

Demonstração. Seja X um ponto na cônica de pontos com matriz C . Pelo corolário 4.10 do teorema 4.18, u , a tangente de X , é dada pela $su^t = CX$, conseqüentemente,

$$X = sC^{-1}u^t \tag{I}$$

.

Por outro lado, pelo corolário 4.8, como X pertence a cônica de pontos, temos

$$X^t C X = 0 \quad (II)$$

Logo de (I) e (II) segue

$$(sC^{-1}u^t)^t C (sC^{-1}u^t) = 0,$$

ou ainda

$$uC^{-1}CC^{-1}u^t = uC^{-1}u^t = 0.$$

Assim u satisfaz a equação da cônica de retas determinada pela mesma polaridade. $\square$

Teorema 4.20. *O ponto de interseção de duas tangentes para uma cônica de pontos é o polo da reta ligando os pontos de tangência.*

Demonstração. Sejam p e q retas tangentes a uma cônica de pontos nos pontos P e Q . Logo, p e q são as retas polares de P e Q , respectivamente.

Considere agora, $R = p \cdot q$ (Figura 4.7), veja que R incide sobre as retas polares de P e de Q e então pelo teorema 4.15, P e Q são incidentes sobre a reta polar de R , consequentemente PQ é a reta polar de R , e portanto, pela definição, R é o polo da reta PQ . $\square$

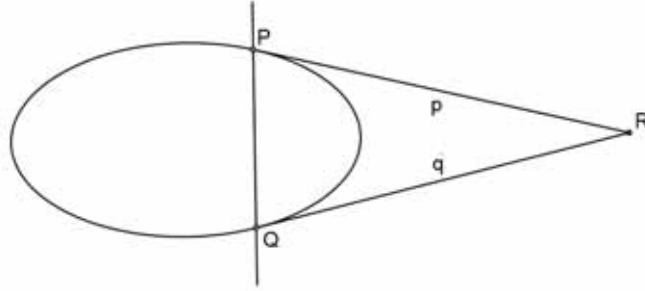


Figura 4.7: Cônica de pontos e suas tangentes.

Corolário 4.11. *Qualquer ponto incide em, no máximo, duas tangentes para uma determinada cônica de pontos.*

Definição 4.10. *Se cada vértice de um triângulo é o pólo do lado oposto deste, com relação a uma cônica, então o triângulo é chamado **auto-polar**, com relação à cônica.*

Teorema 4.21. *Se A, B, C e D são quatro pontos distintos de uma cônica de pontos então o triângulo diagonal do quadrângulo $ABCD$ é auto-polar.*

Demonstração. Sejam $P = CD \cdot AB$, $Q = CB \cdot AD$ e $R = AC \cdot BD$ os pontos diagonais do quadrângulo que definem o triângulo diagonal deste quadrângulo conforme observação 2.1.

Considere ainda,

$$S = \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} A, T = \operatorname{tg} C \cdot \operatorname{tg} D, U = \operatorname{tg} C \cdot \operatorname{tg} A \text{ e } V = \operatorname{tg} D \cdot \operatorname{tg} B$$

Neste contexto, pelo corolário do teorema 2.12, Q, R, S e T são colineares bem como P, Q, U e V (figura 4.8). Desta maneira segue do teorema 4.20, que P incide sobre as retas polares S e T , consequentemente $TS = QR$ é a reta polar de P . Similarmente, R incide sobre as retas polares de U e V , e assim $UV = PQ$ é a reta polar de R . Finalmente, já que Q incide sobre as retas polares P e R , segue que PR é a reta polar de Q . $\square$

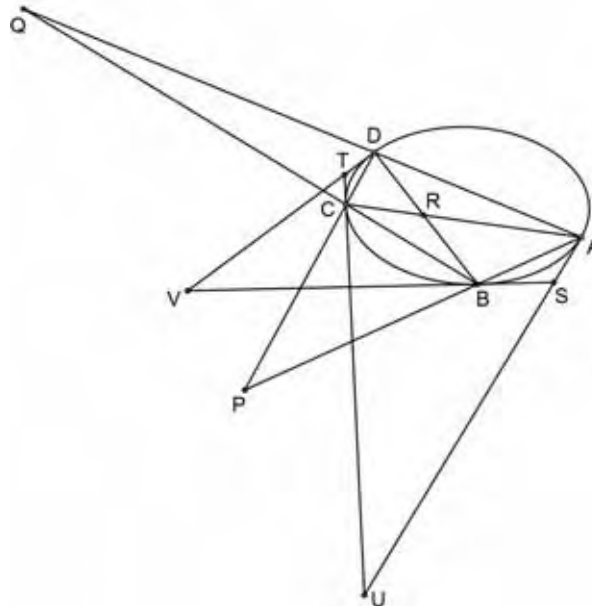


Figura 4.8: Triângulo diagonal auto-polar.

Corolário 4.12. *Se uma reta m passando por um ponto P não pertencente a uma cônica de pontos intercepta uma determinada cônica então os pontos dessa interseção são conjugados harmônicos, com relação a P é o ponto de interseção de m com a reta polar de P .*

Definição 4.11. *Se a reta polar de P com relação a uma cônica de pontos dada não intercepta esta cônica de pontos dizemos que P é um **ponto interior da cônica**. Se a reta polar de P com relação a uma cônica de pontos dada intercepta a cônica em dois pontos distintos, P é chamado um **ponto exterior da cônica**.*

Observação 4.10. É possível mostrar que uma reta contém pontos interiores de uma cônica de ponto se, e somente se, intercepta a cônica em dois pontos distintos.

Nos exemplos a seguir, mostramos como construir pólos e retas polares específicas.

Exemplo 4.2. Dada uma cônica $\mathcal{C}$ e um ponto P que não pertença a $\mathcal{C}$ vejamos como construir a reta polar de P (com relação a polaridade descrita no teorema 4.18).

Para tanto sejam l e m retas passando por P tais que estas interceptam $\mathcal{C}$ em dois pontos: sejam A e B pontos de interseção de l com $\mathcal{C}$ e C e D pontos da interseção de m com $\mathcal{C}$.

Consequentemente, pelo teorema 4.21, A, B, C e D formam um quadrângulo, cujo triângulo diagonal é auto polar. Ou seja, a reta que une $Q = AC \cdot BD$ e $R = AD \cdot BC$ é a reta polar de P (veja figura 4.9).

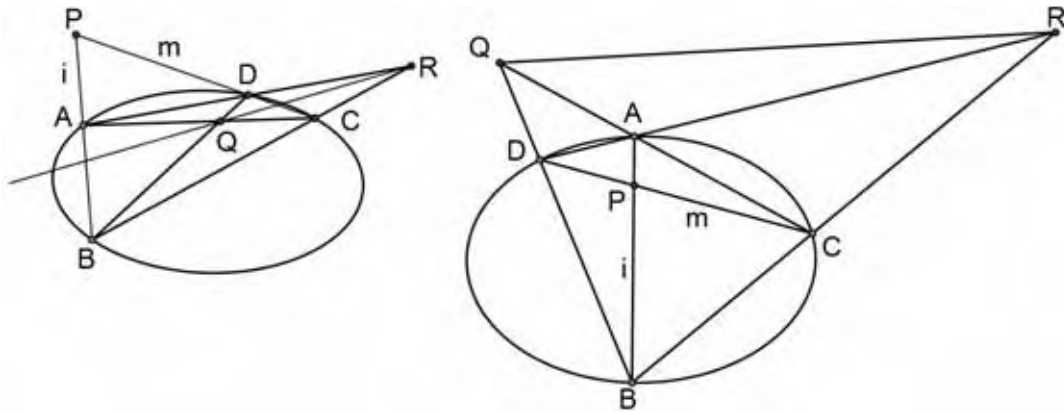


Figura 4.9: Construção de uma reta polar a um ponto P não pertencente a uma cônica.

Exemplo 4.3. Dada uma cônica $\mathcal{C}$ e uma reta p não tangente a $\mathcal{C}$, vejamos como construir o pólo de p .

Observe que se p intercepta $\mathcal{C}$ em pontos distintos R e S então, pelo teorema 4.20,

$$P = \text{tg } R \cdot \text{tg } S$$

é o pólo de p (figura 4.10).

Agora se p não intercepta $\mathcal{C}$, sejam R e S pontos distintos incidentes sobre p . Logo como p não intercepta $\mathcal{C}$, segue da observação 4.10 que todos os pontos sobre p , em particular R e S , são pontos exteriores da cônica $\mathcal{C}$.

Consequentemente, as retas polares r e s de R e S respectivamente, interceptam a cônica em dois pontos (cada uma).

Defina $P = r \cdot s$ (figura 4.11).

Uma vez que P pertence a polar de R e a polar de S segue que P é o pólo de p .

Para finalizar este capítulo apresentamos a equação que caracteriza uma cônica, o seguinte teorema.

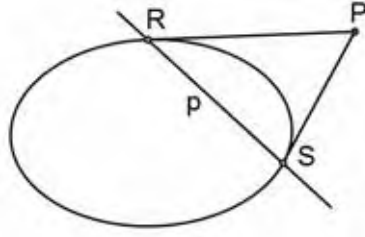


Figura 4.10: Reta p interceptando a cônica em pontos distintos R e S .

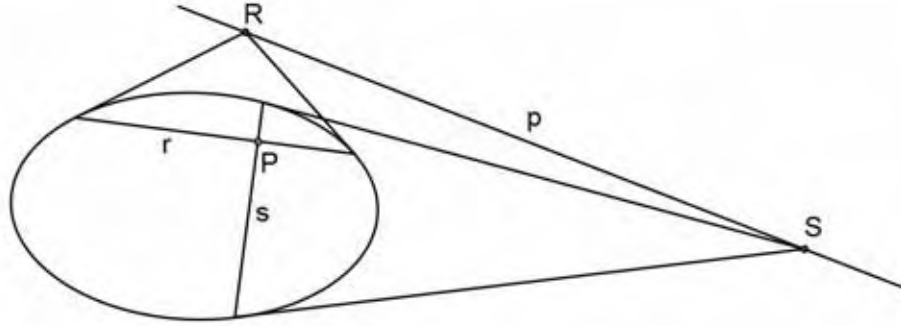


Figura 4.11: Reta p que não intercepta a cônica.

Teorema 4.22. *Qualquer cônica de pontos $\mathcal{C}_1$ pode ser aplicada via uma colineação de pontos com uma cônica de equação da forma:*

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 \pm (x_3)^2 = 0 \quad (*)$$

Demonstração. Sejam $\triangle PQR$ um triângulo auto-polar com relação a uma cônica de pontos $\mathcal{C}$ e seja T uma colineação que aplica P, Q e R em X, Y e Z , respectivamente.

Sendo T uma colineação o triângulo $\triangle XYZ$ é auto-polar com relação a cônica $T(\mathcal{C})$.

Usando um argumento análogo ao da demonstração do teorema 4.18 pode-se mostrar que um triângulo é auto-polar, com relação a uma cônica se, e somente se, a matriz de tal cônica é diagonal.

Consequentemente, a matriz que define $T(\mathcal{C})$ é diagonal.

Sobre esta matriz diagonal, temos que entradas da diagonal ou tem o mesmo sinal ou uma das entradas tem sinal diferente das outras duas. No primeiro caso, usamos uma representação matricial em que as entradas não nulas são todas positivas; para o segundo caso, podemos determinar uma colineação adequada para trocar os pontos X, Y e Z de posição a fim de obtermos uma cônica cuja matriz diagonal tenha as duas primeiras entradas da diagonal positivas e a terceira não nula. Sendo assim podemos assumir que a matriz da imagem da cônica $T(\mathcal{C})$ é da seguinte forma:

$$C = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \text{ em que } a \text{ e } b \text{ são positivas e } c \text{ é não nulo.}$$

Considere agora S a colinação com matriz

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{|c|} \end{bmatrix},$$

Pelo teorema 4.17 matriz da cônica $ST(C)$ será:

$$C' = (A^{-1})C(A^{-1}).$$

O que resulta,

$$C' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, a cônica $ST(C)$ tem equação da forma

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 \pm (x_3)^2 = 0.$$

□

Com este teorema apresentamos as seguintes terminologias:

Definição 4.12. No contexto do teorema 4.22 dizemos que C_1 é equivalente a C_2 e ainda dizemos que a cônica dada por uma equação do tipo (*) é **canônica**.

Em particular, uma polaridade associada a uma cônica equivalente a uma cônica canônica com equação

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 0 \tag{*}$$

é denominada **hiperbólica**; enquanto que se for equivalente a cônica canônica com equação $(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 0$ é denominada **elíptica**.

5 Validação do Modelo Analítico

Reservamos este capítulo para averiguar se o Modelo Analítico é adequado para o sistema axiomático proposto. Para tanto precisamos mostrar a validade dos axiomas 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 e 2.6 deste sistema.

Façamos isto:

- *Quaisquer dois pontos distintos são incidentes com exatamente uma reta.*

Verificação. Sejam P e Q dois pontos distintos, quaisquer, e $(p_1, p_2, p_3), (q_1, q_2, q_3)$ as respectivas coordenadas homogêneas.

Observe que tais coordenadas são todas nulas, assim podemos afirmar que a matriz

$$\begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{bmatrix}$$

tem pelo menos um menor de ordem 2 (ou seja, uma submatriz de ordem 2 com determinante não nulo), digamos, $\begin{vmatrix} p_i & q_i \\ p_j & q_j \end{vmatrix} = p_i q_j - q_i p_j \neq 0$, para determinados $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Por outro lado, estes pontos são incidentes sobre uma reta r , de coordenadas homogêneas $[u_1, u_2, u_3]$ se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = 0$$

e

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = 0$$

Ou equivalente, se e somente se,

$$S : \begin{cases} u_1 p_1 + u_2 p_2 + u_3 p_3 = 0 \\ u_1 q_1 + u_2 q_2 + u_3 q_3 = 0 \end{cases}$$

Vejamos se existe tal reta, ou seja, se existem u_1, u_2, u_3 .

Como as coordenadas homogêneas $[u_1, u_2, u_3]$ são não nulas e já temos $p_i q_j - q_i p_j \neq 0$, segue que necessariamente $u_k \neq 0$, em $k = i, j$.

No intuito de simplificar o entendimento digamos que $i = 2, j = 3$ e consequentemente $k = 1$.

Como já sabemos que $u_1 \neq 0$, resolver o sistema S é equivalente a resolver o sistema S' :

$$S' : \begin{cases} u'_2 p_2 + u'_3 p_3 = -p_1 \\ u'_2 q_2 + u'_3 q_3 = -q_1 \end{cases}$$

em que $u'_2 = \frac{u_2}{u_1}, u'_3 = \frac{u_3}{u_1}$.

Sendo $p_2 q_3 - q_2 p_3 \neq 0$ temos que o sistema 2×2 tem uma única solução, digamos, (a, b) . Ou seja,

$$\begin{cases} u'_2 = a \\ u'_3 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = a u_1 \\ u_3 = b u_1 \end{cases}$$

Consequentemente, qualquer terna da forma $[u_1, a u_1, b u_1], u_1 \neq 0$, constitui as coordenadas homogêneas de uma reta em que P e Q sejam incidentes. Porém, sob nossa relação de equivalência, $[u_1, a u_1, b u_1] \sim [1, a, b]$.

Logo, a reta de coordenada homogêneas $[1, a, b]$ é a única reta na qual P e Q são incidentes, veja que a unicidade se dá pela unicidade do par (a, b) solução de S' .

Na verificação supomos $i = 2, j = 3$ e $k = 1$. Porém esta situação deve se adequar a condição do problema. Por exemplo, se P tem coordenadas homogêneas $(1, 0, 0)$ e $Q(0, 1, 0)$ temos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tem o menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, neste caso $i = 1$ e $j = 2$, portanto $k = 3$.

O sistema S' é dado por:

$$S' : \begin{cases} u'_1 p_1 + u'_2 p_2 = -p_3 \\ u'_1 q_1 + u'_2 q_2 = -q_3 \end{cases}$$

com $u'_1 = \frac{u_1}{u_3}, u'_2 = \frac{u_2}{u_3}$.

$$S' : \begin{cases} u'_1 = 0 \\ u'_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 0)$$

é a única solução do sistema e portanto a terna $[0, 0, 1]$ constitui as coordenadas homogêneas da reta procurada.

Veja que de fato os pontos P e Q são incidentes sobre esta reta, já que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

e

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

- *Quaisquer duas retas distintas são incidentes com pelo menos um ponto.*

Verificação. Dual da verificação do axioma 2.1.

- *Existem pelo menos quatro pontos, que a cada três não são colineares.*

Verificação. Basta observar que os pontos P, Q, R e S de coordenadas homogêneas $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)$ são os pontos procurados já que são, a cada três, não colineares pois:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\begin{array}{cccc}
\left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right| \neq 0, & \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| \neq 0, & \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right| \neq 0, & \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| \neq 0, \\
\left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right| \neq 0, & \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right| \neq 0, & \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right| \neq 0, & \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \neq 0, \\
\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right| \neq 0, & \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \neq 0, & \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right| \neq 0, & \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right| \neq 0.
\end{array}$$

- *Os três pontos diagonal do quadrângulo completo nunca são colineares.*

Verificação. Sejam A, B, C e D pontos, cada três não colineares, qualquer.

Queremos mostrar que os pontos diagonais do quadrângulo definido por estes pontos arbitrários não são colineares.

Uma vez que colineação preservam colinearidade e concorrência, podemos restringir nossa análise para os pontos particulares $X(1, 0, 0)$, $Y(0, 1, 0)$, $Z(0, 0, 1)$ e $U(1, 1, 1)$ pois o resultado segue bastando definir uma colineação entre A, B, C e D e X, Y, Z e U respectivamente, cuja existência é garantida pelo teorema 4.5.

Façamos isto.

Veja que os pontos diagonais deste quadrângulo são:

$$\begin{aligned}
XY \cdot UZ &= P(1, 1, 0) \\
XZ \cdot UY &= Q(1, 0, 1) \\
UX \cdot ZY &= R(0, 1, 1)
\end{aligned}$$

os quais são obtidos pelo corolário 3.1.

De fato:

As equações das retas envolvidas são dadas pelas seguintes equações:

– Reta XY :

$$\left| \begin{array}{ccc} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_3 & 0 & 0 \end{array} \right| = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

– Reta UZ :

$$\left| \begin{array}{ccc} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 1 & 1 \end{array} \right| = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

– Reta XZ :

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

– Reta UY :

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_3 - x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3$$

– Reta UX :

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = x_3$$

– Reta ZY :

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0.$$

Assim,

$$\begin{cases} XY \cdot UZ = P(p_1, p_2, p_3) \Rightarrow p_3 = 0 \text{ e } p_1 = p_2, \text{ logo } P(1, 1, 0). \\ XZ \cdot UY = Q(q_1, q_2, q_3) \Rightarrow q_2 = 0 \text{ e } q_1 = q_3, \text{ assim } Q(1, 0, 1). \\ UX \cdot ZY = R(r_1, r_2, r_3) \Rightarrow r_2 = r_3 \text{ e } r_1 = 0, \text{ portanto } R(0, 1, 1). \end{cases}$$

Agora,

$$|PQR| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Consequentemente pelo teorema 3.1 PQR não são colineares.

- Se dois triângulos são perspectivos por um ponto, estes são perspectivos por uma reta.

Verificação. Seja os dois triângulos tendo vértices $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3), C(c_1, c_2, c_3)$ e $A'(a'_1, a'_2, a'_3), B'(b'_1, b'_2, b'_3), C'(c'_1, c'_2, c'_3)$. Suponhamos que estes triângulos são perspectivos por $P(p_1, p_2, p_3)$. Seja $Q = AB \cdot A'B', R = BC \cdot B'C'$ e $S = AC \cdot A'C'$. Precisamos mostrar que Q, R e S são colineares. (figura 5.1).

Para fazer isto faremos uso de parâmetros homogêneos. Já que P está na reta AA', BB' e CC' , temos parâmetros homogêneos $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)$ e (γ_1, γ_2) no que diz respeito aos pontos base A e A', B e B', C e C' , respectivamente. Portanto as coordenadas homogêneas de P são dadas por $p_i = \alpha_1 a_i + \alpha_2 a'_i = \beta_1 b_i + \beta_2 b'_i = \gamma_1 c_i + \gamma_2 c'_i, i = 1, 2, 3$. Os dois primeiros desta igualdade podem ser colocados

desta forma $\alpha_1 a_i - \beta_1 b_i = \beta_2 b'_i - \alpha_2 a'_i$, assim $(\alpha_1 a_1 - \beta_1 b_1, \alpha_1 a_2 - \beta_1 b_2, \alpha_1 a_3 - \beta_1 b_3) = (\beta_2 b'_1 - \alpha_2 a'_1, \beta_2 b'_2 - \alpha_2 a'_2, \beta_2 b'_3 - \alpha_2 a'_3)$, mas o primeiro destas triplas ordenadas dá coordenadas homogêneas de um ponto na reta AB , enquanto o segundo dá coordenadas homogêneas de um ponto na reta $A'B'$. Já que as duas triplas são iguais, ambas podem ser coordenadas para o ponto Q . Usaremos o primeiro conjunto. Também podemos mostrar que $R(\beta_1 b_1 - \gamma_1 c_1, \beta_1 b_2 - \gamma_1 c_2, \beta_1 b_3 - \gamma_1 c_3)$ e finalmente que $S(\alpha_1 a_1 - \gamma_1 c_1, \alpha_1 a_2 - \gamma_1 c_2, \alpha_1 a_3 - \gamma_1 c_3)$. Usando estas coordenadas homogêneas, podemos mostrar que $|QRS| = 0$, de modo que os três pontos são de fato colineares.

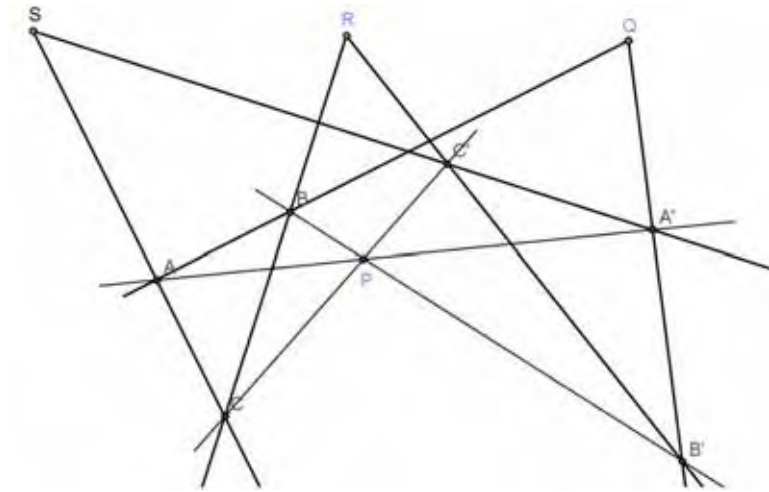


Figura 5.1: S, R e Q são pontos colineares.

- Se uma projetividade sobre um feixe mantém três elementos do feixe invariante, então esta mantém todo elemento do feixe invariante. Ou seja, uma projetividade sobre um feixe que mantém três elementos invariantes é necessariamente a aplicação identidade.

Verificação. Sejam $\mathcal{F}$ um feixe de pontos e $\mathcal{P}$ uma projetividade $\mathcal{F}$ em $\mathcal{F}$ que deixa três elementos do feixe, a saber, $P(p_1, p_2, p_3)$, $Q(q_1, q_2, q_3)$ e $R(r_1, r_2, r_3)$ invariantes, ou seja:

$$\mathcal{P}(P) = P, \mathcal{P}(Q) = Q, \mathcal{P}(R) = R.$$

Considere como elemento base:

$$(p_1, p_2, p_3) \text{ e } (q_1, q_2, q_3).$$

Veja que com esta base os parâmetros homogêneos de P são $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 0)$ e de Q são $(\beta_1, \beta_2) = (0, 1)$; observe que sendo P, Q invariantes temos que $(\lambda'_1, \lambda'_2) = (1, 0)$ e $(\beta'_1, \beta'_2) = (0, 1)$ e ainda que $(\gamma'_1, \gamma'_2) = (\gamma_1, \gamma_2)$. Com isso queremos mostrar que se $S(s_1, s_2, s_3)$ é um ponto qualquer do feixe $\mathcal{F}$, então

$$\mathcal{P}(S) = S.$$

Para isto basta mostrar que $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ pertence a classe de equivalência

$(A \sim B \text{ se, e somente se, } A = sB)$ da matriz identidade.

Usando os parâmetros homogêneos de P, Q e R temos:

(i)

$$s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$$

Logo, $a_{11} = s$ e $a_{21} = 0$, consequentemente $a_{11} \neq 0$ e $a_{21} = 0$

(ii)

$$s' \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ s' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

Então, $a_{12} = 0$ e $a_{22} = s'$, consequentemente $a_{12} = 0$ e $a_{22} \neq 0$

(iii)

$$s'' \begin{bmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} s''\gamma_1 \\ s''\gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\gamma_1 \\ a_{22}\gamma_2 \end{bmatrix}$$

Assim, $s''\gamma_1 = a_{11}\gamma_1$ e $s''\gamma_2 = a_{22}\gamma_2$, consequentemente $a_{11} = s'' = a_{22}$.

Ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s'' & 0 \\ 0 & s'' \end{bmatrix}, s'' \neq 0.$$

Isto é, $A \sim$ matriz identidade.

Referências

- [1] CEDERBERG, J. N. *A Course in Modern Geometries*. 5. ed. New York: Undergraduate Texts in Mathematics - Springer, 1989.
- [2] FISHBACK, W. T. *Projective and euclidean geometry*. 2. ed. New York: John Wiley, 1969.
- [3] SAMUEL, P. *Projective Geometry*. 5. ed. New york: Springer, 1988.
- [4] EVES, H. *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula - Geometria*. 1. ed. São Paulo: Atual, 1992.
- [5] EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. 1. ed. São Paulo: Unicamp, 2007.
- [6] BOULOS, P. *Geometria Analítica*. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2000.