



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.005/04

**Estudo da Violação das Simetrias de Lorentz e CPT
na Eletrodinâmica Quântica**

Lúcio Campos Costa

Orientador

Prof. Dr. Jeferson de Lima Tomazelli

Setembro de 2004

Aos Meus Pais,

Edison e Maria José

Agradecimentos

Não tenho dúvidas de que ao final de mais esta etapa, inúmeros são os mestres, amigos e colegas que, direta ou indiretamente, contribuíram para minha formação acadêmica e pessoal. Por isso, reservo este espaço para registrar minha terna gratidão a todos, em especial:

- a minha família, pela confiança, apoio incondicional e amor que sempre me proporcionou;

- à Débora, pelo amor, dedicação, cumplicidade, paciência e sobretudo pela alegria que imprime à vida desta alma sonhadora;

- ao Jeferson, orientador e amigo, que sempre conduziu com serenidade e sabedoria meus passos por terrenos tão escarpados. Obrigado Jeferson, Fátima, Vitor e Maria Luísa por me permitirem compartilhar de sua amizade;

- ao Prof. Guy Bonneau, pela orientação e atenção ímpar durante os seis meses em que trabalhei no LPTHE da Université de Paris VII;

- aos professores do IFT que contribuíram grandemente para a minha formação;

- À Ana Lucia e ao Prof. Rubem Aldrovandi pela grande ajuda no meu contato com o Prof. G. Bonneau;

- aos amigos e colegas que, no IFT, junto comigo, plantaram seus sonhos, os quais, certamente, serão colhidos num futuro próximo;

- aos Profs. M. Paty (Université de Paris VII) e A. Garcia (L'Ecole des Hautes Études en Science Sociales) pela amável acolhida no seio de seus respectivos grupos de pesquisa e pelos ricos ensinamentos sobre as Ciências Humanas;

- ao Ivan H. Bechtold (Taió), Gerson G. Gomes, Luciano Bachmann, Marcelo Yamashita, Raquel S. M. de Carvalho, Rogério e Tatiana de Almeida, Sandro Coelho, Esdras S. Santos, ..., pela amizade e companheirismo de sempre;

Agradeço também a todos os funcionários do Instituto, pela atenção e presteza que sempre me proporcionaram e pela simpatia que lhes é característica.

Por fim, agradeço ao Povo Brasileiro que, através da Fapesp, financiou estes meus últimos seis anos de formação - mestrado e doutorado.

Resumo

Na presente tese investiga-se uma versão estendida da eletrodinâmica quântica, onde se introduz um termo de acoplamento axial renormalizável não invariante, dando ênfase à quebra dinâmica das simetrias de Lorentz e CPT no setor de gauge e à ambigüidade no coeficiente do termo do tipo Chern-Simons, induzido através de correções radiativas e outros métodos não perturbativos. Aspectos da teoria efetiva de Euler-Kockel-Heisenberg a temperatura finita também são investigados à luz do formalismo conhecido como Thermo Field Dynamics.

Palavras Chaves: QED, simetrias de Lorentz e CPT, correções radiativas, temperatura finita, Thermo Field Dynamics

Área do conhecimento: 1.05.03.00-5, Física das Partículas Elementares e Campos.

Abstract

In the present thesis it is investigated an extended version of quantum electrodynamics where a renormalized non-invariant axial coupling term is introduced, emphasizing the dynamic violation of the Lorentz and CPT symmetries in the gauge sector of the theory as well as the ambiguity of the coefficient of the Chern-Simons-like term, induced through radiative corrections and other non-perturbative methods. Some aspects of the Euler-Kockel-Heisenber effective theory at finite temperature have also been addressed in the context of the Thermo Field Dynamics formalism.

Índice

1	Introdução	1
2	A Violação da Simetria de Lorentz como Efeito da Temperatura	6
2.1	A Lagrangiana de Euler-Kockel-Heisenberg (E-K-H)	7
2.2	A Teoria Efetiva de E-K-H à Temperatura Finita	19
2.2.1	O Caso Spinorial	19
2.2.2	O Limite de Altas Temperaturas	21
2.2.3	O Caso Escalar	24
2.2.4	A Perda de Covariância	26
3	A Teoria com Quebra Explícita: Cálculo a la Fock-Schwinger	28
3.1	Aspectos Preliminares	28
3.2	A Ação Efetiva	29
3.3	A Ambigüidade do Termo de Quebra e outras Patologias	37
4	A Renormalização da QED₄ Estendida a 1-Loop	39
4.1	O Cálculo da Polarização do Vácuo	39
4.2	A Equação de Schwinger-Dyson	45
4.3	O Caso da Teoria de Maxwell-Chern-Simons	47
4.4	Análise do Propagador $G^{\mu\nu}(p)$	49
4.4.1	A Massa Induzida	49
4.4.2	O Problema da Invariância de Gauge	50
4.4.3	A Renormalização da Carga	51
5	Considerações Finais	53

A	Estados Puros e Mistos em TFD	57
A.1	A Representação de Número	57
A.2	Estados Coerentes	58
A.3	Estados Squeezed	61
A.4	Estados Mistos em TFD	63
B	A Lagrangiana de E-K-H via o Método de Fock-Schwinger	66
B.1	O Método de Fock-Schwinger	66
B.2	O Caso do Campo Eletromagnético Constante	72
C	A Anomalia Axial	81
C.1	Introdução	81
C.2	Anomalias Advindas do Processo de Renormalização	83
C.3	O Termo de Superfície em Integrais Linearmente Divergentes	84
C.4	Ambigüidades em $T_{\mu\nu}$	86
	Referências	88

Capítulo 1

Introdução

O Teorema CPT [1] afirma que se uma teoria de campo satisfaz os axiomas de:

1. *localidade*,
2. *invariância de Lorentz*,
3. *analiticidade das representações do grupo de Lorentz com relação aos parâmetros de “boost”*,

a transformação CPT é uma simetria dessa teoria. Neste contexto, a invariância sobre o grupo de Lorentz constitui um axioma fundamental para a construção consistente de uma teoria quântica de campos relativística, onde se inclui o modelo padrão das partículas elementares.

Apesar de inúmeros experimentos, não há, até o momento, evidências conclusivas de que o axioma 2, acima citado, seja violado. No entanto, a possibilidade de que a natureza apresente uma pequena violação da simetria de Lorentz (e CPT) vem sendo objeto de uma intensa atividade de pesquisa que, nos últimos anos, envolveu diversas áreas da Física, da Óptica Quântica à Física de Neutrinos.

A pergunta que se coloca é: em que medida a simetria de Lorentz, cerne da Teoria da Relatividade Especial (Restrita) é, por alguma razão desconhecida, somente aproximada?

Experimentos envolvendo *Penning traps*, espectroscopia de hidrogênio e anti-hidrogênio, oscilações de mésons neutros, observações associadas à oscilação de neutrinos, entre outros [2], têm procurado sinais mensuráveis que possam confirmar ou impor limites aos parâmetros relacionados a uma possível violação da simetria de Lorentz e/ou CPT.

Vale lembrar que uma tal violação estaria associada à violação do axioma 2 e, por isso, não deve interferir em propriedades mais fundamentais da teoria, tais como a microcausalidade, a qual está intimamente associada ao axioma 1.

Do ponto de vista teórico, diferentes abordagens podem ser evocadas para se estudar tal fenômeno. Um cenário natural onde se verifica a violação da simetria de Lorentz é encontrado em teorias a temperatura finita. Em linhas gerais, a introdução de graus de liberdade térmicos em uma teoria quântica de campos modifica as condições de contorno da teoria original (i.e., à temperatura zero), levando a uma violação do axioma 2 [3]-[5].

Mesmo quando um tratamento covariante à temperatura finita é empregado [6], a violação da simetria de Lorentz pode ser constatada devido à presença do quadri-vetor velocidade do banho térmico ($\mathbf{u}$), o qual atribui ao espaço-tempo uma direção privilegiada. Uma discussão deste assunto, no contexto da teoria efetiva de Euler-Kockel-Heisenberg (E-K-H) [7],[8], será apresentada no próximo capítulo*, onde a incorporação da temperatura será efetuada utilizando o formalismo de H. Umezawa, conhecido como Thermo Field Dynamics (TFD) [14]-[15].

Neste formalismo, a média estatística quântica de um observável num certo *ensemble* é identificada, em teoria quântica de campos, com o valor esperado do mesmo num vácuo térmico. Assim, a temperatura é introduzida de primeiros princípios, através de uma transformação de Bogoliubov nos estados de vácuo do sistema. No Apêndice A, uma breve introdução ao Formalismo TFD é oferecida.

Um ponto crucial do estudo da teoria de E-K-H a temperatura finita reside no tratamento consistente que deve ser empregado para se controlar os diferentes graus de divergências intrínsecos à teoria. Com isso em mente, utilizaremos a regularização analítica [16] para tratar o caso spinorial e, no caso escalar, mostraremos como a prescrição de Pauli-Villars-Rayski (P-V-R) [17] permite uma abordagem mais ade-

*Para isso, utilizaremos a abordagem devido a V. Weisskopf [9], a qual está apresentada de maneira elegante no texto de V. B. Berestetskii *et al* [10]. Cabe aqui lembrar que a teoria de E-K-H foi rederivada em 1951 por J. Schwinger usando o método das características empregado, em 1937, por V. Fock num contexto diferente [12]. A formulação de Schwinger, conhecida hoje como o Método do Tempo-Próprio de Fock-Schwinger [13] (e esboçada no Apêndice B), servirá de base para as investigações do Capítulo 3.

quada. De fato, como veremos, tais investigações serão de fundamental importância para que possamos trazer a lume uma resposta mais acertada a respeito da polêmica instaurada na literatura quanto a correta dependência da carga renormalizada com relação a temperatura [18]-[23].

Na esteira destas discussões, apresentaremos, na última seção do Capítulo 2, uma discussão acerca do problema de perda de covariância de Lorentz na teoria de E-K-H a temperatura finita e de sua possível restauração num regime de altas temperaturas.

Um outro cenário de interesse que será tema da presente tese considera a introdução de termos que violam explicitamente a simetria de Lorentz já a nível Lagrangiano [24]-[28], sem afetar as demais propriedades estruturais da teoria.

No caso do Modelo Padrão das partículas elementares, uma construção que preserva a estrutura de gauge usual $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ e é renormalizável por contagem de potências vem sendo estudada, abordando-se de maneira consistente a fenomenologia associada à violação das simetrias de Lorentz e CPT. Nesta versão estendida do Modelo Padrão, a energia e o momento são conservados e os métodos canônicos de quantização são aplicáveis [2].

No que se refere ao setor da eletrodinâmica quântica (QED), uma pequena controvérsia foi criada em torno do problema da indução de um termo do tipo Chern-Simons [29] no setor do fóton, gerado através de correções radiativas a partir do setor fermiônico devido a introdução de uma corrente axial [30]-[38]. De fato, alguns autores mostraram que ao se adicionar um termo renormalizável e não invariante de Lorentz, do tipo $\bar{\psi} i \not{b} \gamma_5 \psi$, à Lagrangiana de um elétron na presença de um campo eletromagnético[†], um termo (do tipo Chern-Simons)

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{1}{2} c_\mu \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} F_{\alpha\beta} A_\gamma, \quad (1.1)$$

é gerado através de correções radiativas [30]-[35].

Em (1.1), o coeficiente c_μ é um quadrivetor constante que seleciona uma direção preferencial no espaço-tempo, violando assim as simetrias de Lorentz e CPT. Como

[†]Onde b_μ é um quadrivetor constante que seleciona uma direção preferencial no espaço-tempo e ψ representa o campo de um elétron.

consequência, espera-se que a luz advinda de uma galáxia distante apresente um efeito de birefringência [24] (i.e., rotação entre os vetores de polarização da radiação eletromagnética). No entanto, dados observacionais impõem limites a tais efeitos e, efetivamente, c_μ deve ser tomado como zero [24]-[25].

Outra importante característica associada ao termo (1.1) consiste no fato do mesmo não ser invariante de gauge, uma vez que $\mathcal{L}_{CS}$ depende de A_μ . Por outro lado, a integral quadridimensional de (1.1), isto é, a ação, o é pois, sob uma tal transformação, $\mathcal{L}_{CS}$ muda a menos de uma derivada total. Como consequência, as equações de Euler-Lagrange permanecem invariantes, mesmo com a adição do termo do tipo Chern-Simons à densidade Lagrangiana total [39].

Do ponto de vista teórico, a determinação do coeficiente do termo induzido é, como veremos, ambígua e necessita de condições físicas subsidiárias para que este seja fixado. Neste sentido, uma investigação criteriosa dos aspectos estruturais da teoria, em particular aqueles relacionados ao processo de renormalização, é de fundamental importância para uma compreensão mais aguda do assunto. Este será, portanto, o objetivo que norteará toda a segunda parte da tese, a partir do terceiro capítulo.

Mais especificamente, será apresentado no Capítulo 3 o cálculo do coeficiente do termo induzido do tipo Chern-Simons (c_μ), usando o formalismo do tempo-próprio de Fock-Schwinger [11],[12], onde a ambigüidade na determinação do coeficiente será explicitada. Neste cálculo, seguiremos a abordagem de J. M. Chung e B. K. Chung [35]. Contudo, existem inconsistências técnicas neste tratamento, as quais serão evidenciadas e discutidas.

Com o intuito de investigarmos o problema da geração dinâmica de um termo do tipo (1.1) sob um ponto de vista alternativo, apresentaremos, no Capítulo 4, um estudo canônico da QED estendida a 1-Loop. Como ponto de partida, efetuaremos o cálculo, em segunda ordem na constante de acoplamento, do tensor de polarização do vácuo da QED estendida, levando-se em conta a soma correta de gráficos próprios. A fim de que apenas contribuições lineares no parâmetro de quebra compareçam ordem a ordem, o conjunto de diagramas próprios a ser considerado deve incluir o gráfico contendo uma inserção do tipo $\bar{\psi}i\not{b}\gamma_5\psi$ para cada linha fermiônica interna.

Este procedimento não vem sendo adotado na literatura e, conforme veremos, é de fundamental importância para que a análise do coeficiente induzido e da geração de massa seja consistente.

Os diferentes graus de divergências do tensor de polarização do vácuo serão regularizados segundo a prescrição de Pauli-Villars-Rayski (P-V-R) [17], a qual preserva, por construção, a simetria de gauge da teoria. Como no caso da anomalia Axial ou ABJ [40]-[45] e da QED_{2+1} [46], as quantidades calculadas a partir deste objeto apresentarão ambigüidades advindas do processo de regularização e serão fixadas somente com a ajuda de um vínculo físico.

Desta forma, a partir da Equação de Schwinger-Dyson [47], o propagador fotônico da teoria estendida será obtido, permitindo uma discussão a respeito de sua estrutura singular, geração de massa e indução de termo de quebra. Tais análises serão feitas à luz de um breve estudo da teoria de Maxwell-Chern-Simons, onde o propagador fotônico modificado é apresentado.

O problema relacionado à preservação da invariância de gauge da teoria, bem com o estudo da renormalização da carga elétrica, constituem os objetos de estudo das seções finais desse capítulo. A esse respeito, veremos que condições subsidiárias sobre os coeficientes de P-V-R deverão ser impostas, a fim de que a simetria de gauge da teoria original seja reestabelecida. Esta análise será determinante no estudo da renormalização da carga.

No Capítulo 5, teceremos as considerações finais, incluindo uma discussão sobre o tratamento perturbativo em segunda ordem no parâmetro de quebra, apontando para perspectivas futuras, como fruto da presente investigação.

Capítulo 2

A Violação da Simetria de Lorentz como Efeito da Temperatura

Como dito no capítulo anterior, um cenário natural para se investigar uma possível violação da simetria de Lorentz em extensões do Modelo Padrão emerge do estudo de teorias a temperatura finita, onde o quadrivetor velocidade do banho térmico desempenha um papel similar àquele desempenhado pelo vetor constante b_μ numa teoria estendida da QED a temperatura zero.

O objetivo do presente capítulo é apresentar um estudo que trata da implementação de temperatura na teoria efetiva de Euler-Kockel-Heisenberg (E-K-H) para o campo eletromagnético clássico em interação com campos de matéria, utilizando o formalismo conhecido como Thermo Field Dynamics (TFD)* [23]. No entanto, faremos antes um esboço da teoria à temperatura zero.

Como se sabe, a teoria efetiva de E-K-H pode ser vista como uma versão a baixas energias da QED onde, por exemplo, fenômenos de autointeração são previstos classicamente (a nível lagrangiano).

Apesar de ser possível fornecer um tratamento covariante a esta teoria [10], [11], problemas relacionados à violação da simetria de Lorentz estão presentes, uma vez que, por construção, assumem-se condições demasiadamente restritivas, por exemplo, quanto à forma do vetor campo eletromagnético (fazendo-se necessário escolher um referencial particular, onde os vetores campo elétrico, $\mathbf{E}$, e campo magnético, $\mathbf{B}$, são paralelos).

*Uma breve introdução ao formalismo TFD é apresentada no Apendice A.

Com a introdução de graus de liberdade térmicos, a teoria se torna ainda mais problemática, uma vez que mesmo a sua covariância fica comprometida, como discutido na Introdução. Como será pontuado, os métodos usados para se construir uma versão covariante da teoria a temperatura finita não são mais aplicáveis devido à presença de novo parâmetro $\beta = 1/KT$ (onde T é a temperatura do banho térmico e K a constante de Boltzmann). Neste sentido, a violação da simetria de Lorentz emerge como um efeito direto da introdução da temperatura, patologia esta bem conhecida na literatura [5].

Outro aspecto importante que será discutido diz respeito à correta implementação do procedimento de regularização da teoria, que deve controlar de maneira consistente divergências intrínsecas ao formalismo da Teoria Quântica de Campos, bem como controlar ambigüidades. Ao tratar os casos da QED spinorial e escalar, as vantagens de se utilizar a regularização analítica [16] ou a prescrição de Pauli-Villars-Rayski (P-V-R)[17] serão evidenciadas. À luz destas discussões, calcularemos a Lagrangiana de E-K-H segundo a abordagem de Weisskopf [9], [10], discutindo o problema de sua dependência logarítmica [18]-[22]; como veremos, uma resposta definitiva será apresentada [23].

Muitas destas questões estão formalmente ligadas ao problema da violação explícita da simetria de Lorentz e CPT na QED estendida (a $T = 0$), e constituem tema dos capítulos subseqüentes.

2.1 A Lagrangiana de Euler-Kockel-Heisenberg (E-K-H)

Efeitos quânticos, como o espalhamento fóton-fóton (Halpern), podem ser simulados no âmbito da teoria clássica através da introdução de interações efetivas não lineares.

Em 1935, Euler e Koeckel (E-K) [7] calcularam a seção de choque do espalhamento Halpern e mostraram que, em segunda ordem na constante de estrutura fina (α^2), o elemento de matriz para tal espalhamento é finito. Neste cálculo, E-K assumiram que a Hamiltoniana de matéria e de campo deveria ser substituída por uma nova Hamiltoniana efetiva (não linear) contendo apenas o campo de radiação.

Num trabalho subseqüente, Heisenberg e Euler [8] generalizaram o trabalho de

E-K, encontrando uma Lagrangiana efetiva (em ordem de α^3), induzida por um campo externo estático e homogêneo, satisfazendo a condição de não produção de pares reais.

Seguindo uma abordagem alternativa e utilizando-se da física de subtrações, Weisskopf [9] deu unidade aos trabalhos de Euler, Kockel e Heisenberg, fornecendo uma detalhada discussão sobre a física envolvida em tais processos, em particular, no que se refere à “renormalização da carga elétrica”[†].

Para Weisskopf, a fenomenologia associada aos processos considerados por Euler, Kockel e Heisenberg pode ser justificada intuitivamente pois, ao se considerar que quanta de altas frequências podem ser absorvidos quando na presença de um campo eletromagnético externo, espera-se que os mesmos sofram efeitos de espalhamento, reflexão ou refração, caso não tenham energia suficiente para produzirem pares.

Pictoricamente, é como se o vácuo (dos campos de matéria), sob a ação do campo externo, adquirisse uma constante dielétrica diferente da unidade e isso fosse sentido pelo fóton.

Quando se efetua a quantização do campo elétron-pósitron, a expressão para a energia (associada à Hamiltoniana livre $\hat{H}$) contém um termo constante infinito[‡]

$$\varepsilon_0 = - \sum_{\mathbf{p}, \sigma} |\epsilon_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)}|, \quad (2.1)$$

[†]Surge então, pela primeira vez, a idéia de renormalização da carga.

[‡]De fato, como é conhecido na literatura (seguiremos a notação de [10]), a Hamiltoniana do campo spinorial (que descreve o elétron) é, em segunda quantização, dada por

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \epsilon_{\mathbf{p}\sigma} (a_{\mathbf{p}\sigma}^+ a_{\mathbf{p}\sigma} - b_{\mathbf{p}\sigma} b_{\mathbf{p}\sigma}^+),$$

onde $\epsilon_{\mathbf{p}\sigma} \equiv |\epsilon_{\mathbf{p}\sigma}^{(\pm)}|$. Entretanto, essa não é uma forma desejável para $\hat{H}$, e faz-se necessário reordenar os operadores b 's. Usando as relações de anticomutação entre os operadores de criação e destruição, em particular,

$$\{b_{\mathbf{p}\sigma}, b_{\mathbf{p}\sigma}^+\}_+ = 1,$$

segue que

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \epsilon_{\mathbf{p}\sigma} (a_{\mathbf{p}\sigma}^+ a_{\mathbf{p}\sigma} + b_{\mathbf{p}\sigma}^+ b_{\mathbf{p}\sigma}) + \varepsilon_0 .$$

o qual é, usualmente, subtraído de $\hat{H}$, de modo que os seus autovalores sejam finitos.

Em (2.1), $\epsilon_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)} = -\epsilon_{\mathbf{p}\sigma}^{(+)}$ representa os níveis de energia associados aos modos de frequência negativa das soluções da equação de Dirac.

Em princípio, esta constante não tem nenhum significado físico imediato, visto que a energia do vácuo é, por definição, zero. Porém, devemos notar que, no caso em que o sistema se encontra na presença de um campo eletromagnético, os níveis de energia do mesmo sofrem modificações, em particular os níveis $\epsilon_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)}$. Tais modificações são finitas e importantes do ponto de vista físico. Elas descrevem a dependência do campo com relação às propriedades do espaço e alteram as equações do campo eletromagnético no vácuo, modificando a Lagrangiana que o descreve, fato que se reflete nas equações de Maxwell para o campo eletromagnético.

Por sua vez, a densidade Lagrangiana deve ser uma quantidade invariante relativística e, portanto, deve ser descrita em termos dos invariantes da teoria. No caso do campo eletromagnético, os invariantes são $E^2 - H^2$ e $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$ e, como usual, a densidade Lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{8\pi}(E^2 - H^2). \quad (2.2)$$

Para derivarmos a Lagrangiana de E-K-H, iremos assumir que os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ variam tão lentamente no espaço e no tempo que podem ser tratados como sendo uniformes e constantes. Para que isso seja possível, é necessário que a frequência (ω) e o vetor de onda ($\mathbf{k}$) característicos satisfaçam às desigualdades

$$\omega \ll m, \quad |\mathbf{k}| \ll m, \quad (2.3)$$

(onde m é a massa associada ao campo de matéria) o que implica em podermos assumir que a Lagrangiana a ser obtida não depende das derivadas dos campos.

Contudo, se estamos interessados em guiar nossa construção utilizando nosso conhecimento físico, devemos também assumir que o campo elétrico é suficientemente fraco para que não haja produção de pares. Logo,

$$|E| \ll \frac{m^2}{e} \quad (\hbar = c = 1). \quad (2.4)$$

Pode-se mostrar que, sob tais condições, a probabilidade de produção de pares é exponencialmente pequena [10].

No caso em que existem tanto um campo magnético quanto um campo elétrico, é possível, em geral, escolher um referencial onde $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ são paralelos[§]. Este referencial será usado nos cálculos que se seguem, pois nos permite separar a influência do campo magnético no movimento da carga na direção de $\mathbf{E}$. Devemos lembrar que a condição (2.4) deve ser satisfeita neste referencial.

Em linhas gerais, a obtenção da Lagrangiana se dá a partir do cálculo do desvio W' dos “níveis de energia do vácuo”. Mais precisamente, W' corresponde à modificação na “energia de ponto zero” (2.1), devido à presença do campo. Para calcularmos tal energia, devemos antes subtrair de (2.1) o valor médio da energia potencial do elétron nos estados de energia negativa. Do ponto de vista físico, tal subtração faz com que a carga do vácuo seja zero, por definição.

Neste contexto, a energia de ponto zero na presença do campo é dada por

$$\varepsilon_0 = - \sum_{\mathbf{p}, \sigma} |\epsilon_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)}| = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \int \psi_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)*} i \frac{\partial}{\partial t} \psi_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)} d^3x, \quad (2.5)$$

onde $\psi_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)}$ são as soluções de frequência negativa da equação de Dirac no campo considerado. Na expressão acima, estamos assumindo que a integração se dá sobre um volume unitário, e que as funções de onda são normalizadas à unidade. Portanto, ε_0 é a energia por unidade de volume.

De acordo com a discussão precedente, devemos subtrair de ε_0 a quantidade

$$U_0 = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \int \psi_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)*} e\phi \psi_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)} d^3x, \quad (2.6)$$

onde $\phi = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}$ é o potencial escalar do campo uniforme. Esta expressão pode ser

[§]Utilizando as fórmulas de transformação (sob Lorentz) dos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$, constatamos que a condição para que ambos os campos sejam paralelos (i.e., $\mathbf{E} \times \mathbf{H} = 0$) é dada por

$$\frac{\beta(E^2 + H^2)}{(1 + \beta^2)} = 0,$$

onde $\beta = \mathbf{v}/c$.

ainda escrita, de maneira mais conveniente, como

$$\begin{aligned}
 U_0 &= \mathbf{E} \cdot \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \int \psi_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)*} \frac{\partial \hat{H}}{\partial \mathbf{E}} \psi_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)} d^3x \\
 &= -\mathbf{E} \cdot \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \frac{\partial |\epsilon_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)}|}{\partial \mathbf{E}} \\
 &= \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{E}}.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Portanto, o desvio total sofrido pela densidade de energia do vácuo é

$$W' = \left(\varepsilon_0 - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{E}} \right) - \left(\varepsilon_0 - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{E}} \right)_{\mathbf{E}=\mathbf{H}=0}. \tag{2.8}$$

Podemos relacionar W' à modificação $\delta\mathcal{L}$ na densidade Lagrangiana ($\mathcal{L}_{ren} = \mathcal{L}_0 + \delta\mathcal{L}$) através da transformada de Legendre

$$W = \sum \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L, \tag{2.9}$$

onde q representa as “coordenadas generalizadas” do campo. No caso do campo eletromagnético, teremos duas quantidades independentes, que são os potenciais $\mathbf{A}$ e ϕ . Como

$$\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}} - \nabla\phi \quad e \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}, \tag{2.10}$$

$\dot{\mathbf{A}}$ é a única “velocidade generalizada” que aparece explicitamente em L e, devido à primeira expressão em (2.10), uma diferenciação com relação a $\dot{\mathbf{A}}$ é equivalente a uma com relação a $\mathbf{E}$. Logo, de (2.9) segue que

$$W' = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial(\delta\mathcal{L})}{\partial \mathbf{E}} - (\delta\mathcal{L}). \tag{2.11}$$

Comparando (2.11) com (2.8), vemos que

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ren} - \mathcal{L}_0 = -[\varepsilon_0 - (\varepsilon_0)_{\mathbf{E}=\mathbf{H}=0}], \tag{2.12}$$

mostrando que $\delta\mathcal{L}$ pode ser calculada através de (2.1).

Para calcularmos $\delta\mathcal{L}$, iremos, primeiramente, nos restringir ao caso em que há somente campo magnético. Os níveis de energia “negativos” de um elétron (carga $e = -|e|$) em um campo magnético uniforme e constante $H_z = -H$ são

$$-|\epsilon_{\mathbf{p}, \sigma}^{(-)}| = -\sqrt{m^2 + (2n + 1 - \sigma)|e|H + p_z^2}, \tag{2.13}$$

onde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ e $\sigma = \pm 1$.

Para calcularmos a soma sobre os momentos, usamos o fato de que a densidade de estados é dada por

$$\frac{|e|H}{2\pi} \frac{dp_z}{2\pi}. \quad (2.14)$$

Além disso, todos os níveis, exceto $n = 0, \sigma = 1$, são duplamente degenerados, i.e., os níveis $n, \sigma = -1$ e $n + 1, \sigma = 1$ são coincidentes. Assim,

$$-\varepsilon_0 = \frac{|e|H}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sqrt{m^2 + p_z^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{m^2 + 2|e|Hn + p_z^2} \right\} dp_z. \quad (2.15)$$

A divergência na integral acima é eliminada no cálculo de $\delta\mathcal{L}$ quando efetuamos a subtração da mesma quando $H = 0$. Entretanto, para procedermos a esta “renormalização”, é conveniente calcularmos antes a expressão convergente

$$\begin{aligned} \Phi &\equiv -\frac{\partial^2 \varepsilon_0}{(\partial m^2)^2} \\ &= -\frac{|e|H}{4(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ (m^2 + p_z^2)^{-3/2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (m^2 + 2|e|Hn + p_z^2)^{-3/2} \right\} dp_z \\ &= -\frac{|e|H}{2(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \left\{ (m^2 + p_z^2)^{-3/2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (m^2 + 2|e|Hn + p_z^2)^{-3/2} \right\} dp_z \\ &= -\frac{|e|H}{8\pi^2} \left\{ \frac{1}{m^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 + 2|e|Hn} \right\}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Utilizando a representação integral da função gama, escrevemos (2.16) como

$$\Phi = -\frac{|e|H}{8\pi^2} \int_0^{\infty} e^{-m^2\eta} \left[2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2|e|Hn\eta} - 1 \right] d\eta. \quad (2.17)$$

A soma do termo entre colchetes em (2.17) se reduz àquele de uma progressão geométrica e, portanto,

$$\Phi = -\frac{|e|H}{8\pi^2} \int_0^{\infty} e^{-m^2\eta} \left[\frac{2}{1 - e^{-2|e|H\eta}} - 1 \right] d\eta \quad (2.18)$$

$$= -\frac{|e|H}{8\pi^2} \int_0^{\infty} e^{-m^2\eta} \coth(|e|H\eta) d\eta \quad (2.19)$$

Para encontrarmos $\delta\mathcal{L}$, devemos integrar Φ duas vezes com respeito a m^2 e, então, subtrair o valor da quantidade resultante quando $H = 0$. Efetuando a primeira

integração, encontramos

$$\begin{aligned}\int \Phi dm^2 &= -\frac{|e|H}{8\pi^2} \int_0^\infty \int e^{-m^2\eta} \coth(|e|H\eta) dm^2 d\eta \\ &= -\frac{|e|H}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{-m^2\eta}}{-\eta} \coth(|e|H\eta) d\eta + C',\end{aligned}\quad (2.20)$$

onde C' é uma constante de integração que depende de H , mas não de m^2 . Efetuando uma segunda integração a partir de (2.20), obtemos

$$-\varepsilon_0 = -\frac{|e|H}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{-m^2\eta}}{\eta^2} \coth(|e|H\eta) d\eta + C'' + m^2 C', \quad (2.21)$$

onde C'' é uma nova constante de integração, com a mesma dependência com relação a H e m que C' . Assim, para obtermos $\delta\mathcal{L}$, substituímos (2.21) em (2.12), o que nos dá

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= -\frac{|e|H}{8\pi^2} \int_0^\infty d\eta \frac{e^{-m^2\eta}}{\eta^2} \left[\coth(|e|H\eta) - \left(\frac{1}{|e|H\eta} + \mathcal{O}(H, H^3, \dots) \right) \right] \\ &+ [C'' - (C'')_{H \rightarrow 0} + m^2(C' - (C')_{H \rightarrow 0})].\end{aligned}\quad (2.22)$$

Como estamos considerando um campo magnético fraco, desprezamos os termos $\mathcal{O}(H, H^3, \dots)$ no segundo membro do termo entre colchetes em (2.22). Assim,

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{-m^2\eta}}{\eta^3} (|e|H\eta \coth(|e|H\eta) - 1) d\eta + c_1 + m^2 c_2, \quad (2.23)$$

onde[¶]

$$c_1 = (C'' - (C'')_{H \rightarrow 0}), \quad (2.24)$$

$$c_2 = (C' - (C')_{H \rightarrow 0}). \quad (2.25)$$

Analisando a expressão (2.23), vemos que, em $\delta\mathcal{L}$, as duas constantes c_1 e c_2 são divergentes e, portanto, faz-se necessário efetuarmos um processo de “renormalização”. Como mostraremos a seguir, isso pode ser feito a partir de considerações de dimensão e paridade com respeito a H , haja vista que $\delta\mathcal{L}$, sendo uma função de m e H , deve ser da forma

$$\delta\mathcal{L} = m^4 f\left(\frac{H^2}{m^4}\right) \quad (2.26)$$

[¶]Note que tanto c_1 quanto c_2 dependem de H , mas não de m .

(pois, como estamos trabalhando em unidades onde $c = 1$ e $\hbar = 1$, $\delta\mathcal{L} = [m^4]$ e $H = [m^2]$).

Com base nessas considerações, e devido a independência de (2.25) com relação a m , concluímos que c_2 deve ser zero, já que, segundo (2.26), não deve haver termos ímpares em m^2 em $\delta\mathcal{L}$. O termo c_1 é dado pela condição de que a expansão de $\delta\mathcal{L}$ em potências de H^2 começa com um termo em H^4 : um termo em H^2 deverá simplesmente alterar o coeficiente na Lagrangiana original $\mathcal{L}_0 = -H^2/8\pi$ e isto deve, essencialmente, significar uma mudança na definição do campo e, portanto, da carga. Neste sentido, a eliminação do termo em H^2 funciona como uma “renormalização” da carga. Para a referida renormalização, devemos escolher

$$c_1 = \frac{H^2 e^2}{3 \cdot (8\pi^2)} \int_0^\infty \frac{e^{-\eta}}{\eta} d\eta. \quad (2.27)$$

Esta escolha é justificada pelo fato de que na expansão de $\delta\mathcal{L}$ há, ainda, um termo proporcional à H^2 (que pode ser explicitado efetuando-se a expansão de (2.23) para $H \rightarrow 0$) igual a expressão (2.27), mas com sinal trocado. Portanto, como discutido no parágrafo anterior, a escolha acima tem a finalidade de subtrair de $\delta\mathcal{L}$ tal dependência, deixando-a apenas proporcional a ordens superiores em H .

Finalmente, fazendo $m^2\eta \rightarrow \eta$ em (2.23) e usando (2.27), obtemos

$$\delta\mathcal{L} = \frac{m^4}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\eta}}{\eta^3} \left\{ -\eta b \coth(b\eta) + 1 + \frac{1}{3} b^2 \eta^2 \right\} d\eta, \quad (2.28)$$

onde $b = |e|H/m^2$.

Consideremos agora o caso em que, além do campo magnético $\mathbf{H}$, existe um campo elétrico $\mathbf{E}$ paralelo a $\mathbf{H}$. Para obtermos a Lagrangiana $\delta\mathcal{L}$ neste caso, usaremos um procedimento análogo àquele desenvolvido anteriormente. Mais precisamente, partimos, primeiramente, do fato de que a presença do campo magnético $\mathbf{H}$ se reflete na massa da partícula através da relação: $m \rightarrow m + |e|H(2n+1-\sigma)$. Diante disso, construímos uma nova quantidade Φ , similar à (2.16) e que, por argumentos de dimensão, é escrita genericamente como

$$\begin{aligned} \Phi(H, E) &\equiv -\frac{\partial^2 \varepsilon_0}{(\partial m^2)^2} \\ &= -\frac{|e|H}{8\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{F[(m^2 + |e|H(2n+1+\sigma))/|e|H]}{m^2 + |e|H(2n+1+\sigma)}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde F é uma função desconhecida, que será encontrada através da imposição de vínculos estruturais da teoria, tais como a invariância relativística e argumentos de dimensionalidade.

Fatorando m^2 em (2.29) e usando a definição de b , obtemos

$$\Phi(H, E) = -\frac{b}{8\pi^2} \left\{ F\left(\frac{1}{b}\right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F[(1+2nb)/b]}{1+2nb} \right\}. \quad (2.30)$$

Definindo agora a quantidade adimensional

$$a = \frac{|e|E}{m^2}, \quad (2.31)$$

e introduzindo-a em (2.30) através de identidade $aa^{-1} = 1$, resulta

$$\begin{aligned} \Phi(H, E) &= -\frac{b}{8\pi^2} \left\{ F\left(\frac{a}{ab}\right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F[(1+2nb)a/ab]}{1+2nb} \right\} \\ &= -\frac{b}{8\pi^2} \left\{ \tilde{F}\left(\frac{1}{a}\right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{F}[(1+2nb)/a]}{1+2nb} \right\}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde modificamos funcionalmente F , para que o argumento da função sofra um reescalonamento relativo a (a/b) , ou seja,

$$F(\alpha(a/b)a^{-1}) \rightarrow \tilde{F}(\alpha a^{-1}), \quad (2.33)$$

onde α representa os demais argumentos de F .

A partir de (2.32), devemos notar que cada termo em $\Phi(H, E)$ já leva em conta a soma sobre todos os números quânticos, exceto n . Até o momento, $\tilde{F}$ é uma função desconhecida. Para derivá-la, usaremos considerações de invariância relativística. Resumidamente, exigiremos que Φ seja uma função dos invariantes (de Lorentz) $H^2 - E^2$ e $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$, ou seja,

$$\Phi(H, E) = f(H^2 - E^2, \mathbf{H} \cdot \mathbf{E}). \quad (2.34)$$

Note que, no caso em que $H = 0$, teremos

$$\Phi(0, E) = f(-E^2, 0) = \Phi(iE, 0). \quad (2.35)$$

Portanto, a função $\Phi(iE, 0)$ pode ser obtida a partir de (2.19), fazendo $H \rightarrow iE$

$$\Phi(iE, 0) = \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty e^{-\eta/a} \cot(\eta) d\eta. \quad (2.36)$$

Assim, $\tilde{F}$ é encontrada comparando-se esta expressão com o limite $\Phi(H \rightarrow 0, E)$ de (2.32).

A passagem do limite $H \rightarrow 0$ em (2.32) pode ser efetuada através da mudança de variável $2bn \rightarrow x$ e da substituição da soma sobre n por uma integração sobre $dn = dx/2b$,

$$\begin{aligned}\Phi(H \rightarrow 0, E) &= \lim_{b \rightarrow 0} -\frac{b}{8\pi^2} \left\{ \tilde{F}\left(\frac{1}{a}\right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{F}[(1+2nb)/a]}{1+2nb} \right\} \\ &= 0 + \lim_{b \rightarrow 0} -\frac{b}{8\pi^2} 2 \int_{2b}^{\infty} \frac{\tilde{F}[(1+x)/a]}{1+x} \frac{dx}{2b} \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{F}[(1+x)/a]}{1+x} dx.\end{aligned}\quad (2.37)$$

Fazendo a substituição

$$\frac{x+1}{a} \rightarrow y, \quad (2.38)$$

segue que

$$\begin{aligned}\Phi(0, E) &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_{1/a}^{\infty} \frac{\tilde{F}(y)}{ay} a dy \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_{1/a}^{\infty} \frac{\tilde{F}(y)}{y} dy.\end{aligned}\quad (2.39)$$

Equacionando (2.36) e (2.39) e diferenciando a expressão resultante com respeito a $z \equiv 1/a$, concluímos que

$$\frac{\tilde{F}(\alpha z)}{\alpha z} = - \int_0^{\infty} e^{-\eta(\alpha z)} \eta \cot(\eta) d\eta. \quad (2.40)$$

Antes de aplicarmos (2.40) em (2.32), devemos notar que

$$\begin{aligned}\Phi(H, E) &= -\frac{bz}{8\pi^2} \left\{ \frac{\tilde{F}(z)}{z} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{F}[(1+2nb)z]}{(1+2nb)z} \right\} \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \frac{b}{a} \left\{ 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{F}[(1+2nb)z]}{(1+2nb)z} - \frac{\tilde{F}(z)}{z} \right\}.\end{aligned}\quad (2.41)$$

Agora, usando (2.40), reescrevemos o termo com somatória em (2.41) como

$$\begin{aligned}2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{F}[(1+2nb)z]}{(1+2nb)z} &= -2 \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\eta(1+2nb)z} \eta \cot(\eta) d\eta \\ &= - \int_0^{\infty} e^{-\eta z} \eta \cot(\eta) \left\{ 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nbz\eta} \right\} d\eta.\end{aligned}\quad (2.42)$$

Nesta expressão, identificando novamente o termo entre colchetes como a soma de uma progressão geométrica, concluímos que

$$\begin{aligned}\Phi(H, E) &= -\frac{b}{a} \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty e^{-\eta z} \eta \cot(\eta) \left\{ \frac{2}{1 + e^{-2bz\eta}} - 1 \right\} d\eta \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \frac{b}{a} \int_0^\infty e^{-\eta z} \eta \cot(\eta) \coth(b\eta z) d\eta,\end{aligned}\quad (2.43)$$

onde utilizamos a identidade

$$\frac{2}{1 + e^{-\theta}} - 1 = \coth(\theta). \quad (2.44)$$

Substituindo $\eta z = \eta m^2/|e|E$ em (2.43) e fazendo a mudança de variável $\eta \rightarrow \eta|e|E$, obtemos

$$\begin{aligned}\Phi(H, E) &= -\frac{1}{8\pi^2} \frac{H}{E} \int_0^\infty e^{-m^2\eta} |e|E\eta \cot(|e|E\eta) \coth(|e|H\eta) |e|E d\eta \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty e^{-m^2\eta} |e|H\eta \coth(|e|H\eta) |e|E \cot(|e|E\eta) d\eta.\end{aligned}\quad (2.45)$$

Para obtermos a Lagrangiana $\delta\mathcal{L}$, procederemos de forma análoga àquela desenvolvida anteriormente (quando considerávamos apenas o campo magnético), ou seja, integramos (2.45) duas vezes com relação a m^2 . Como resultado, obtemos

$$\begin{aligned}-\varepsilon_0 &= \int \int \Phi(H, E) (dm^2)^2 \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{-m^2\eta}}{\eta^2} |e|^2 EH\eta \coth(|e|H\eta) \cot(|e|E\eta) d\eta \\ &\quad + C'' + m^2 C',\end{aligned}\quad (2.46)$$

onde C' e C'' são constantes de integração.

Substituindo a expressão acima em (2.12), obtemos

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty d\eta \frac{e^{-m^2\eta}}{\eta^3} \{ |e|H\eta \coth(|e|H\eta) |e|E\eta \cot(|e|E\eta) - 1 \} + c_1 + m^2 c_2, \quad (2.47)$$

onde, como no caso anterior, já desprezamos os termos lineares em H e E , e definimos

$$c_1 = (C'' - (C'')_{H \rightarrow 0}), \quad (2.48)$$

$$c_2 = (C' - (C')_{H \rightarrow 0}). \quad (2.49)$$

A Lagrangiana em (2.47) pode ainda ser escrita em termos das quantidades a e b . Para isso, fazemos a seguinte mudança de variável no termo que está sendo integrado explicitamente: $m^2\eta \rightarrow \eta$. Como resultado, teremos

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{m^4}{8\pi^2} \int_0^\infty d\eta \frac{e^{-\eta}}{\eta^3} \{b\eta \coth(b\eta) a\eta \cot(a\eta) - 1\} + c_1 + m^2 c_2. \quad (2.50)$$

Note que tanto c_1 como c_2 dependem de H e E , mas não de m^2 . Como no caso anterior, deveremos ter

$$\delta\mathcal{L} = m^4 f\left(\frac{H^2}{m^4}, \frac{E^2}{m^4}\right). \quad (2.51)$$

Portanto, aplicando a mesma análise feita anteriormente aos coeficientes c_1 e c_2 , concluimos que c_2 deve ser zero e que

$$c_1 = \frac{(H^2 - E^2)e^2}{3(8\pi^2)} \int_0^\infty \frac{e^{-\eta}}{\eta} d\eta. \quad (2.52)$$

Conseqüentemente, substituindo esses resultados em (2.50), obtemos

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= -\frac{m^4}{8\pi^2} \int_0^\infty d\eta \frac{e^{-\eta}}{\eta^3} \{b\eta \coth(b\eta) a\eta \cotg(a\eta) - 1\} \\ &+ \frac{(H^2 - E^2)e^2}{3 \times 8\pi^2} \int_0^\infty \eta^2 \frac{e^{-\eta}}{\eta^3} d\eta \\ &= \frac{m^4}{8\pi^2} \int_0^\infty d\eta \frac{e^{-\eta}}{\eta^3} \left\{ -b\eta \coth(b\eta) a\eta \cotg(a\eta) + 1 - \frac{1}{3}\eta^2 (a^2 - b^2) \right\}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Os parâmetros a e b podem ainda ser escritos na forma dos invariantes

$$a = -\frac{i|e|}{\sqrt{2m^2}} [(\mathcal{F} + i\mathcal{G})^{1/2} - (\mathcal{F} - i\mathcal{G})^{1/2}], \quad (2.54)$$

$$b = \frac{|e|}{\sqrt{2m^2}} [(\mathcal{F} + i\mathcal{G})^{1/2} + (\mathcal{F} - i\mathcal{G})^{1/2}], \quad (2.55)$$

onde

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}(H^2 - E^2), \quad \mathcal{G} = (\mathbf{H} \cdot \mathbf{E}) \quad e \quad \mathcal{F} \pm i\mathcal{G} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} \pm i\mathbf{E})^2. \quad (2.56)$$

Quando (2.53) é expressa em termos dos invariantes $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, ela se torna válida para qualquer referencial, e não somente para aquele onde $\mathbf{H} \parallel \mathbf{E}$.

Esta densidade de Lagrangiana foi derivada pela primeira vez por V. Weisskopf [9] em 1936 a partir dos trabalhos de W. Heisenberg, H. Euler e B. Kockel [7]-[8].

Em 1951, J. Schwinger apresentou uma dedução para a densidade (2.53) usando o formalismo do tempo-próprio. Uma esboço comentado da primeira parte do artigo de J. Schwinger constitui o Apêndice B (o qual servirá de referencia para os cálculos do Capítulo 3).

Devemos ressaltar que a expressão acima obtida para $\delta\mathcal{L}$ é válida somente se os campos satisfazem as condições (2.3) e (2.4). Apesar desse fato não aparecer explicitamente em (2.53), tais condições podem ser percebidas notando que o integrando em (2.53) contém pólos em $\eta = n\pi/a$ ($n = 1, 2, \dots$) e a integral, como escrita acima, não tem, rigorosamente falando, nenhum significado. Ela só ganha sentido quando é usada para derivar os termos da série assintótica em potências de a , através da expansão formal de $\cot ga$.

Por fim, cabe ressaltar que a correção à Lagrangiana livre obtida acima é, de fato, um resultado importante. Ela remove a linearidade das equações de Maxwell e, desta forma, leva a efeitos que, a princípio, são observáveis (por exemplo o espalhamento fóton-fóton e o espalhamento Delbrück, bem como efeitos de birefringência).

2.2 A Teoria Efetiva de E-K-H à Temperatura Finita

2.2.1 O Caso Spinorial

Com o intuito de estudar os efeitos de temperatura na teoria de E-K-H, faremos uso do formalismo conhecido como Thermo Field Dynamics (TFD) [14]-[15] (ver Apêndice A). Em TFD, a temperatura é introduzida através de uma transformação de Bogoliubov nos estados de vácuo do sistema. No presente caso, para cada modo $(\mathbf{p}, \sigma)$, o estado de vácuo do campo elétron-pósitron num campo eletromagnético externo se transforma como

$$|0\rangle \rightarrow |0\rangle_\beta = (1 + e^{-\beta\epsilon})^{-1/2} \{ |0\rangle_a \otimes |0\rangle_b + e^{-\beta\epsilon/2} a^\dagger \tilde{a} |0\rangle_a \otimes b^\dagger \tilde{b} |0\rangle_b \}, \quad (2.57)$$

onde ϵ representa os autovalores de energia do sistema e $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ são operadores de aniquilação de campos auxiliares os quais agem em seus respectivos setores de vácuo [49] (lembrando que $\beta = 1/KT$).

Considerando o caso onde somente o campo magnético está presente, a generalização térmica natural da expressão (2.1) é

$$\begin{aligned}\langle 0|\mathcal{H}|0\rangle_\beta &= \varepsilon_0^\beta = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \epsilon_{\mathbf{p}\sigma} \{ \langle 0|a^\dagger a|0\rangle_\beta + \langle 0|b^\dagger b|0\rangle_\beta - \langle 0|1|0\rangle_\beta \} \\ &= \sum_{\mathbf{p}\sigma} \epsilon_{\mathbf{p}\sigma} \left\{ \frac{1}{1 + e^{\beta\epsilon_{\mathbf{p}\sigma}}} - \frac{1}{1 + e^{-\beta\epsilon_{\mathbf{p}\sigma}}} \right\},\end{aligned}\quad (2.58)$$

onde, como em (2.13),

$$\epsilon_{\mathbf{p},\sigma} = \sqrt{m^2 + (2n + 1 - \sigma)|e|H + p_z^2} \quad (2.59)$$

são os níveis de energia de um elétron com carga $-|e|$ em um campo magnético constante e uniforme $H_z = -H$. Em (2.59), $n = 0, 1, 2, \dots$ e $\sigma = \pm 1$.

Devemos ainda enfatizar que a expressão acima, para a energia de ponto zero térmica, foi obtida a partir do estado de vácuo da TFD, expressão (2.57), o qual, por construção, leva em conta a interação entre o campo fermiônico e o reservatório térmico à temperatura T .

Agora, considerando a densidade de estados de momento

$$\frac{|e|H}{2\pi} \frac{dp_z}{2\pi}$$

e o fato de que os valores da componente z do momento do elétron em (2.58) tendem ao contínuo, a energia de vácuo torna-se

$$\varepsilon_0^\beta = \frac{|e|H}{(2\pi)^2} \sum_{n\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} dp \epsilon_{n\sigma} \left\{ \frac{1}{1 + e^{\beta\epsilon_{n\sigma}}} - \frac{1}{1 + e^{-\beta\epsilon_{n\sigma}}} \right\}, \quad (2.60)$$

onde a mudança de notação $p_z \rightarrow p$ foi efetuada. Note que, para $T \rightarrow 0$, o resultado esperado à temperatura zero, expressão (2.15), é obtido. Expandindo ambas as séries geométricas entre chaves na expressão (2.60) e tomando o limite para um campo magnético fraco,

$$\varepsilon_0^\beta = \varepsilon_0 + \frac{2|e|H}{2\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{l} \frac{\partial}{\partial \beta} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-l\beta\sqrt{p^2+m^2}} \left\{ -1 + \left(\frac{2}{1 - e^{\frac{-l\beta|e|H}{\sqrt{p^2+m^2}}}} \right) \right\}, \quad (2.61)$$

onde

$$\varepsilon_0 = -\frac{|e|H}{(2\pi)^2} \sum_{n\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} dp \epsilon_{n\sigma} \quad (2.62)$$

é a contribuição da energia de ponto-zero a qual, ao final, levará à densidade Lagrangiana de E-K-H térmica. No limite de campo fraco,

$$\left(\frac{2}{1 - e^{\frac{-l\beta|e|H}{\sqrt{p^2+m^2}}}} \right) \sim \frac{2\sqrt{p^2+m^2}}{l\beta|e|H} \left\{ 1 - \frac{l\beta|e|H}{2\sqrt{p^2+m^2}} + \frac{5(l\beta|e|H)^2}{12(p^2+m^2)} \right\}, \quad (2.63)$$

de tal forma que (2.61) torna-se

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^\beta &= \varepsilon_0 + \frac{8|e|Hm}{(2\pi)^2} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{\partial^2 K_0(l\beta m)}{\partial(l\beta m)^2} + (\text{termo independente do campo magnetico}) \\ &+ \frac{10|e|^2 H^2 \beta m}{3(2\pi)^2} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} l \frac{\partial K_0(l\beta m)}{\partial(l\beta m)} + \frac{10|e|^2 H^2}{3(2\pi)^2} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} K_0(l\beta m), \end{aligned} \quad (2.64)$$

onde

$$K_0(l\beta m) = \int_0^\infty dp \frac{e^{-l\beta\sqrt{p^2+m^2}}}{\sqrt{p^2+m^2}} \quad (2.65)$$

é a função de Bessel modificada de ordem zero. De (2.64), é imediato mostrar que (2.12) leva a

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}^\beta = \delta\mathcal{L}_{\text{E-K-H}} &- \frac{2|e|Hm^2}{\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} K_0(l\beta m) - \frac{2|e|^2 H^2 m}{\pi^2 \beta} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{l} K_1(l\beta m) \\ &+ \frac{5|e|^2 H^2}{6\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l K_0(l\beta m) + \frac{5|e|^2 H^2 \beta m}{6\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} l K_1(l\beta m), \end{aligned} \quad (2.66)$$

onde

$$K_1(x) = \frac{\partial K_0(x)}{\partial x}.$$

Se, ingenuamente, o limite de altas temperaturas é tomado em (2.66), encontra-se um comportamento do tipo $\ln(\beta m)$, devido à presença da função de Bessel modificada. No entanto, deve-se notar que tal procedimento é matematicamente inconsistente, uma vez que nenhum procedimento de regularização foi empregado em (2.61). De fato, somente no limite de baixas temperaturas, onde o segundo termo em (2.61) é regular, o procedimento acima ganha sentido [48].

2.2.2 O Limite de Altas Temperaturas

Com o objetivo de extrair contribuições finitas da expressão divergente (2.60) (ou (2.61)) quando o limite de altas temperaturas é considerado, utilizaremos a regula-

rização analítica [16]. Tomando o limite $\beta \rightarrow 0$ em (2.60), obtemos

$$\varepsilon_0^{\beta \rightarrow 0} = -\frac{|e|H}{(2\pi)^2} \sum_{n\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} dp \epsilon_{n\sigma} \left\{ \frac{6\beta(\alpha_{n\sigma} + p^2)^{1/2}}{12 + \beta^2(\alpha_{n\sigma} + p^2)} \right\} \quad (2.67)$$

onde $\alpha_{n,\sigma}$ foi introduzido através da expressão

$$\epsilon_{n\sigma}^2 = m^2 + (2n + 1 - \sigma)|e|H + p^2 \equiv \alpha_{n\sigma} + p^2. \quad (2.68)$$

Para mantermos sob controle a divergência ultravioleta em (2.67), faremos uso da representação integral da função gama,

$$\frac{1}{A^{1+\delta}} = \frac{1}{\Gamma(1+\delta)} \int_{0+}^{\infty} d\eta \eta^{\delta} e^{-A\eta}, \quad (2.69)$$

válida para $\delta > -1$, a qual permite efetuarmos uma continuação analítica através da escolha apropriada do valor δ . Assim, segue que

$$\varepsilon_0^{\beta \rightarrow 0} = -\frac{|e|H}{(2\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(1+\delta)} \sum_{n\sigma} \int_{0+}^{\infty} d\eta \eta^{\delta} e^{-(12+\beta^2\alpha_{n\sigma})\eta} \left\{ 6\sqrt{\pi}\alpha_{n\sigma} \eta^{-1/2} - 3\eta^{-1} \frac{\partial}{\partial\beta} \left(\sqrt{\frac{\pi}{\beta^2\eta}} \right) \right\}, \quad (2.70)$$

onde a integração gaussiana em p já foi efetuada. Calculando a derivada em β no último termo de (2.70) e fazendo uso da identidade

$$\sum_{n\sigma} e^{-\beta^2\alpha_{n\sigma}\eta} = e^{-\beta^2 m^2 \eta} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta^2(2|e|Hn)\eta} \right) = e^{-\beta^2 m^2 \eta} \coth(\beta^2 |e|H\eta), \quad (2.71)$$

podemos escrever (2.14) como

$$\varepsilon_0^{\beta \rightarrow 0} = A + B + C, \quad (2.72)$$

onde

$$A = -\frac{|e|H}{(2\pi)^2} \frac{6\sqrt{\pi}m^2}{\Gamma(1+\delta)} \int_{0+}^{\infty} d\eta \eta^{-3/2+1+\delta} e^{-(12+\beta^2 m^2)\eta} \coth(\beta^2 |e|H\eta), \quad (2.73)$$

$$B = -\frac{|e|H}{(2\pi)^2} \frac{6\sqrt{\pi}|e|H}{\Gamma(1+\delta)} \int_{0+}^{\infty} d\eta \eta^{-3/2+1+\delta} e^{-(12+\beta^2 m^2)\eta} \operatorname{csch}^2(\beta^2 |e|H\eta) \quad (2.74)$$

e

$$C = \frac{|e|H}{(2\pi)^2} \frac{3\sqrt{\pi}}{\beta^2 \Gamma(1+\delta)} \int_{0+}^{\infty} d\eta \eta^{-3/2+\delta} e^{-(12+\beta^2 m^2)\eta} \coth(\beta^2 |e|H\eta). \quad (2.75)$$

A integral acima é um objeto finito e, portanto, o integrando em (2.73)-(2.75) pode ser expandido em série de potências para $\beta m \ll 1$, com um domínio de convergência

que corresponde à continuação analítica $\delta > -1$. Para recuperarmos a teoria original, tomamos o limite $\delta \rightarrow 0$ após efetuarmos a integração na variável η . Como resultado, obtemos, em ordem $|e|^4$,

$$A \simeq \frac{3\sqrt{12}m^2}{\pi\beta^2} \left(1 + \frac{1}{24}\beta^2 m^2\right) - \frac{|e|^2 H^2}{4(12)^{3/2}\pi} m^2 \beta^2 \left(1 - \frac{3}{24}\beta^2 m^2\right) + \frac{|e|^4 H^4}{12(12)^{7/2}\pi} m^2 \beta^6, \quad (2.76)$$

$$B \simeq \frac{-2(12)^{3/2}}{\beta^4\pi} \left(1 + \frac{3}{24}\beta^2 m^2\right) + \frac{|e|^2 H^2}{2\sqrt{12}\pi} \left(1 - \frac{1}{24}\beta^2 m^2\right) - \frac{3|e|^4 H^4 \beta^4}{40(12)^{5/2}\pi} \left(1 - \frac{5}{24}\beta^2 m^2\right), \quad (2.77)$$

e

$$C \simeq \frac{-(12)^{3/2}}{\beta^4\pi} \left(1 + \frac{3}{24}\beta^2 m^2\right) + \frac{|e|^2 H^2}{4\sqrt{12}\pi} \left(1 - \frac{1}{24}\beta^2 m^2\right) - \frac{|e|^4 H^4 \beta^4}{80(12)^{5/2}\pi} \left(1 - \frac{5}{24}\beta^2 m^2\right). \quad (2.78)$$

Deve-se notar que as expressões acima ainda apresentam um comportamento singular para $\beta \rightarrow 0$, como pode ser constatado através dos primeiros termos nas expressões (2.76)-(2.78). Por outro lado, usando (2.12), a densidade Lagrangiana efetiva de E-K-H se torna

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}^{\beta \rightarrow 0} &= \mathcal{L}_{ren}^{\beta \rightarrow 0} - \mathcal{L}_0 = -[\varepsilon_0^{\beta \rightarrow 0} - (\varepsilon_0)_{H=0}^{\beta \rightarrow 0}] \\ &\simeq -\frac{|e|^2 H^2}{8\pi} \left(\frac{6}{\sqrt{12}} - \frac{5}{(12)^{3/2}} m^2 \beta^2 \right) + \frac{|e|^4 H^4}{\pi} \left(\frac{29m^2 \beta^6}{96(12)^{7/2}} - \frac{7\beta^4}{80(12)^{5/2}} \right) \end{aligned} \quad (2.79)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ren}^{\beta \rightarrow 0} &= \mathcal{L}_0 + \delta\mathcal{L}^{\beta \rightarrow 0} \\ &\simeq -\frac{|e|^2 H^2}{8\pi} \left[1 + \left(\frac{6}{\sqrt{12}} - \frac{5}{(12)^{3/2}} m^2 \beta^2 \right) \right] \\ &= -\frac{H^2 e_{ren}^2}{8\pi}, \end{aligned} \quad (2.80)$$

onde os termos de ordem superior a β^2 foram descartados e a carga renormalizada foi definida como

$$e \rightarrow e_{ren}^{\beta \rightarrow 0} = e \left[1 + \left(\frac{6}{\sqrt{12}} - \frac{5}{(12)^{3/2}} m^2 \beta^2 \right) \right]^{1/2}. \quad (2.81)$$

2.2.3 O Caso Escalar

Quando os efeitos de spin se tornam irrelevantes, a QED espinorial se reduz à QED escalar e uma teoria diferente se apresenta. Na QED escalar, a Hamiltoniana para o campo de bósons carregados na presença de um campo eletromagnético externo é dada por

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p}}^{(+)} (a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}}^{\dagger} b_{\mathbf{p}}) + \varepsilon_0, \quad (2.82)$$

onde

$$\varepsilon_0 = \langle 0 | \mathcal{H} | 0 \rangle = \sum_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p}}. \quad (2.83)$$

Usando o estado de vácuo correspondente da TFD, para cada modo do campo bosônico, temos

$$|0\rangle \rightarrow |0\rangle_{\beta} = (1 + e^{-\beta\epsilon})^{1/2} \exp \left\{ -\frac{\beta\epsilon}{2} (a^{\dagger} \tilde{a}^{\dagger} \otimes b^{\dagger} \tilde{b}^{\dagger}) \right\} |0\rangle_a \otimes |0\rangle_b \quad (2.84)$$

e, portanto, considerando o caso onde existe somente um campo magnético, (2.83) torna-se

$$\varepsilon_0^{\beta} = \langle 0 | \mathcal{H} | 0 \rangle_{\beta} = \sum_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p}} \left\{ \frac{-2 + e^{\beta\epsilon_{\mathbf{p}}}}{1 - e^{\beta\epsilon_{\mathbf{p}}}} \right\}, \quad (2.85)$$

onde

$$\epsilon_{\mathbf{p}} = \sqrt{m^2 + 2n|e|H + p^2} \quad (2.86)$$

representa os níveis de energia degenerados independentes do spin para o campo bosônico com carga $-|e|$, num campo magnético constante e uniforme $H_z = -H$. Considerando a densidade de estados de momento correspondente, teremos

$$\varepsilon_0^{\beta} = \frac{|e|H}{(2\pi)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp \epsilon_n \left\{ \frac{-2 + e^{\beta\epsilon_n}}{1 - e^{\beta\epsilon_n}} \right\}. \quad (2.87)$$

Como no caso fermiônico, a integral acima é difícil de ser resolvida analiticamente e nos restringiremos a uma análise de seu comportamento assintótico. Primeiramente, tomamos o limite de baixas temperaturas; neste limite, é fácil notar que a expressão (2.87) leva ao resultado esperado à temperatura zero. Por outro lado, para $T \rightarrow \infty$, podemos determinar *a priori* a densidade Lagrangiana efetiva a altas

temperaturas definida com a ajuda de (2.12). Tomando, $\beta \rightarrow 0$ em (2.87), obtemos

$$\varepsilon_0^{\beta \rightarrow 0} = \frac{|e|H}{(2\pi)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp \left\{ \frac{1}{\beta} - \epsilon_n - \frac{\beta \epsilon_n^2}{2} \right\}, \quad (2.88)$$

onde termos de ordem superior em β foram desprezados.

A integral nos momentos acima apresenta diferentes graus de divergência no ultravioleta, os quais são mais severos que no caso spinorial, exigindo não somente uma prescrição de regularização, mas também um esquema consistente de subtração. A fim de se extrair um resultado finito para o limite de altas temperaturas da energia de ponto-zero, empregaremos a prescrição de Pauli-Villars-Rayski [17]. Seguindo [48], onde as motivações para o uso de tal esquema de regularização são discutidas em detalhe, substituímos (2.88) por sua expressão regularizada

$$(\varepsilon_0^R)^{\beta \rightarrow 0} = \sum_{i=0}^N c_i (\varepsilon_{0,i})^{\beta \rightarrow 0}, \quad (2.89)$$

onde

$$(\varepsilon_{0,i})^{\beta \rightarrow 0} = \frac{|e|H}{(2\pi)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp \left\{ \frac{1}{\beta} - \epsilon_{n,i} - \frac{\beta \epsilon_{n,i}^2}{2} \right\}. \quad (2.90)$$

As divergências linear, quadrática, cúbica e logarítmica que aparecem em (2.88) devem ser eliminadas ao se impor que os coeficientes c_i 's satisfaçam as condições

$$\sum_{i=0}^N c_i = 0, \quad \sum_{i=0}^N c_i m_i^2 = 0. \quad (2.91)$$

Em (2.89) e (2.91), N é o número total de reguladores e os coeficientes são tais que $c_0 = 1$ e $m_0 = m$, a massa nua do campo bosônico.

Neste contexto, a densidade Lagrangiana efetiva a altas temperaturas $\delta\mathcal{L}^R$ é construída seguindo os mesmos passos efetuados na seção anterior. No entanto, com exceção do primeiro termo de (2.88), o qual não contribui para $\delta\mathcal{L}^R$ em virtude da primeira das condições em (2.91), os dois termos remanescentes podem ser manipulados com a ajuda de (2.69), mantendo sob controle termos *finitos* espúrios que são independentes de β e que violam a invariância da teoria sob reflexões $H \rightarrow -H$. Este tipo de termo com paridade ímpar, que também aparece na teoria à temperatura zero, é subtraído pela adição de contratermos finitos, com sinais opostos. Como

resultado final, obtemos

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = & \frac{m^4}{8\pi^2} \int_{0+}^{\infty} d\eta \frac{e^{-\eta}}{\eta^3} \left\{ -\eta b \coth(\eta b) + 1 - \frac{1}{3} b^2 \eta^2 \right\} \\ & + \frac{m^5 \beta \sqrt{\pi}}{8\pi^2} \int_{0+}^{\infty} d\eta \frac{e^{-\eta}}{\eta^{7/2}} \left\{ -\eta b \coth(\eta b) + 1 - \frac{1}{3} b^2 \eta^2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.92)$$

onde $b = |e|H/m^2$ e uma renormalização da carga foi efetuada com o auxílio da condição (2.91).

2.2.4 A Perda de Covariância

Como vimos nas seções precedentes, a implementação de temperatura na teoria efetiva de E-K-H exige uma análise criteriosa a respeito da correta utilização dos esquemas de subtração, para que a consistência matemática e a manutenção das simetrias fundamentais da teoria original sejam preservadas.

Vimos também que as expressões finais para a Lagrangiana de E-K-H inviabilizam a utilização de um tratamento similar àquele utilizado nas expressões (2.26) a (2.51) na seção 2.1 onde, por argumentos de dimensão e simetria, a estrutura funcional da Lagrangiana renormalizada de E-K-H foi obtida em sua forma covariante.

De fato, a perda da covariância de Lorentz se manifesta de maneira explícita na teoria a temperatura finita. Este resultado já era esperado, uma vez que a presença dos graus de liberdade térmicos causa uma modificação nas condições de contorno da teoria.

Ademais, a introdução de um novo parâmetro (β), que pode ser relacionado à quadri-velocidade do banho térmico, leva a conseqüências análogas àquelas encontradas no caso onde a violação da simetria de Lorentz se dá de maneira explícita (devido à introdução *ab initio* de um vetor constante b_μ). Tais vetores selecionam uma direção preferencial no espaço-tempo que, no caso da quebra explícita, dá origem a uma nova fenomenologia associada.

Cabe lembrar que em uma teoria a temperatura finita, onde uma dada simetria (por exemplo, a de Lorentz) é violada pela introdução de termos não invariantes à lagrangiana original, os efeitos térmicos podem ser responsáveis pela restauração dessa simetria [50]-[52].

A este respeito, vale ressaltar que no limite de altas temperaturas ($\beta \rightarrow 0$) a expressão (2.80) indica que a dependência da densidade lagrangiana com a temperatura é proporcional a β^2 . Com efeito, no caso onde tal dependência se torna desprezível, a covariância da teoria é restaurada. No entanto, este assunto, que demanda um estudo cuidadoso do processo de renormalização da teoria a temperatura finita, foge ao escopo do presente trabalho.

Capítulo 3

A Teoria com Quebra Explícita: Cálculo a la Fock-Schwinger

3.1 Aspectos Preliminares

Na extensão do Modelo Padrão proposta por D. Colladay e A. V. Kostecký [27], uma das questões que se coloca é: de que forma um termo do tipo Chern-Simons, como o apresentado em (1.1), pode ser induzido radiativamente quando um termo renormalizável e não invariante do tipo $\bar{\psi} i \not{b} \gamma_5 \psi$ (onde b_μ é um quadrivetor constante que seleciona uma direção preferencial no espaço-tempo e ψ representa o campo de um elétron.) é adicionado ao setor fermiônico da lagrangiana usual da QED?

Nos últimos anos, vários autores têm investigado este problema. Em particular, R. Jackiw e A. V. Kostecký mostraram que o termo de Chern-Simons induzido não é univocamente determinado [30]. Ele depende de como a teoria é definida: perturbativa ou não-perturbativamente, segundo a densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - e\not{A} - \gamma_5\not{b} - m)\psi. \quad (3.1)$$

onde γ_5 é hermitiana, com $\text{tr}\gamma_5\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta = 4i\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$.

No tratamento não-perturbativo, que pressupõe o uso do propagador fermiônico “exato”

$$G(p) = \frac{i}{\not{p} - m - \gamma_5\not{b}},$$

as correções radiativas geram um termo do tipo Chern-Simons não nulo. Já no tratamento perturbativo, definido a partir do propagador fermiônico usual, independente

de b_μ , e onde o termo $-\gamma_5 \not{b}$ é visto como um vértice de interação ou *inserção*, as correções radiativas levam a um resultado finito, mas indeterminado. Ambigüidades advindas do processo de regularização também são verificadas no estudo da QED estendida.

Usando a teoria de perturbação tradicional, alguns autores [31]-[32] mostraram que um resultado “exato” (que leva em conta todas as ordens em b_μ) coincide com o cálculo que considera apenas a contribuição linear no parâmetro de quebra [30], [33]. Outros métodos menos convencionais também têm sido usados para se calcular o termo induzido. Dentre outros, vale destacar o método de expansão derivativa [34] e o elegante método do tempo-próprio de Fock-Schwinger [35]-[38].

Neste capítulo, pretendemos apresentar o cálculo não-perturbativo devido a J. M. Chung e B. K. Chung [35], para a determinação do termo tipo Chern-Simons gerado dinamicamente, usando o método do tempo-próprio de Fock-Schwinger (apresentado no Apêndice B).

Por fim, a ambigüidade do coeficiente do termo induzido será evidenciada e algumas inconsistências técnicas que inviabilizam este tratamento serão apresentadas e discutidas, abrindo caminho para uma análise alternativa, a ser apresentada no Capítulo 4.

3.2 A Ação Efetiva

A densidade lagrangiana do campo fermiônico na presença de um campo externo A_μ e do termo $\bar{\psi}\gamma_5\not{b}\psi$ que viola as simetrias de Lorentz e CPT, está definida em (3.1). Esta Lagrangiana define a teoria cuja ação efetiva S é dada por

$$\begin{aligned} S &= -i\ln\left(\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{i\int d^4x \mathcal{L}}\right) \\ &= -i\text{Tr}\ln(i\not{\partial} - e\not{A} - \gamma_5\not{b} - m), \end{aligned}$$

onde Tr indica a soma diagonal sobre as coordenadas do espaço-tempo bem como sobre os índices spinoriais. Decompondo o traço na expressão acima, segue que

$$S = S^{(0)} + S^{(1)},$$

onde

$$\begin{aligned} S^{(0)} &= -i \text{Tr} \ln(i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - m), \\ S^{(1)} &= -i \int_0^1 dz \text{Tr} \left(\frac{1}{-i\cancel{\partial} + e\cancel{A} + z\gamma_5 \cancel{b} + m} \gamma_5 \cancel{b} \right). \end{aligned}$$

Neste contexto, introduzimos a função de Green (fermiônica) $G(x, x')$ através da equação diferencial não homogênea

$$[-i\cancel{\partial} + e\cancel{A}(x) + z\gamma_5 \cancel{b} + m]G(x, x') = \delta^4(x - x') \quad (3.2)$$

e, então, escrevemos $S^{(1)}$ como

$$S^{(1)} = -i \int d^4x \int_0^1 dz \text{tr}[G(x, x')\gamma_5 \cancel{b}]_{x' \rightarrow x}. \quad (3.3)$$

Contudo, se definirmos a função de Green (bosônica) $\Delta(x, x')$ como sendo

$$G(x, x') = [i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - z\gamma_5 \cancel{b} + m]\Delta(x, x'), \quad (3.4)$$

ou, equivalentemente,

$$G(x, x') = [-i\partial'_\mu - eA_\mu(x')]\Delta(x, x')\gamma^\mu + \Delta(x, x')[-z\gamma_5 \cancel{b} + m], \quad (3.5)$$

então vemos que a equação (3.2) se torna

$$\mathcal{H}\Delta(x, x') = \delta^4(x - x'),$$

onde

$$\mathcal{H} = -\Pi^2 + m^2 + z^2 b^2 + \frac{e}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2iz\sigma^{\mu\nu}\Pi_\mu b_\nu \gamma_5, \quad (3.6)$$

e

$$\Pi \equiv i\partial_\mu - eA_\mu.$$

Na expressão (3.6), a grandeza $\sigma_{\mu\nu}$, definida conforme a expressão (B.25) do Apêndice B, está associada ao spin do campo fermiônico e $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ é o tensor intensidade do campo eletromagnético.

Em notação matricial, a função de Green $\Delta(x, x')$ pode ser representada como

$$\Delta(x', x'') = \langle x' | \mathcal{H}^{-1} | x'' \rangle = i \int_0^\infty ds \langle x' | e^{-i\mathcal{H}s} | x'' \rangle, \quad (3.7)$$

onde, na integração em s , um fator de convergência $-i\varepsilon$ (com $\varepsilon > 0$) está implícito.

A notação acima enfatiza a idéia do método de Fock-Schwinger que consiste em considerar $\mathcal{H}$ como sendo a Hamiltoniana que governa a evolução de um dado sistema quântico hipotético segundo o “tempo” s , de forma que $x_\mu(s = 0)$ tem o valor x'' e, depois de evoluído, $x_\mu(s)$ tem o valor x' (ver Apêndice B). Assim,

$$\Delta(x', x'') = i \int_0^\infty ds \langle x'(s) | x''(0) \rangle, \quad (3.8)$$

a qual satisfaz a equação

$$i\partial_s \langle x'(s) | x''(0) \rangle = \langle x'(s) | \mathcal{H}(x(s), \Pi(s)) | x''(0) \rangle, \quad (3.9)$$

e a condição de contorno

$$\langle x'(s) | x''(0) \rangle_{s \rightarrow 0} = \delta^4(x' - x''). \quad (3.10)$$

Para calcularmos a amplitude de transição $\langle x'(s) | x''(0) \rangle$, procedemos de maneira análoga àquela utilizada na seção (B.2) do Apêndice B, sendo que aqui as equações de movimento são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{dx^\mu}{ds} &= i[\mathcal{H}, x^\mu] = 2\Pi^\mu - 2iz\sigma^{\mu\nu}b_\nu\gamma_5, \\ \frac{d\Pi^\mu}{ds} &= i[\mathcal{H}, \Pi^\mu] = 2eF^{\mu\nu}\Pi_\nu + ie\partial_\nu F^{\mu\nu} + \frac{e}{2}\sigma^{\rho\nu}\partial_\mu F_{\rho\nu} - 2izeF_{\mu\rho}\sigma^{\rho\nu}b_\nu\gamma_5. \end{aligned}$$

No caso em que $F^{\mu\nu}$ é constante, as equações acima são solúveis. Na notação matricial, tais soluções podem ser escritas como

$$\Pi(s) = e^{2eFs}(\Pi(0) - iz\sigma b\gamma_5) + iz\sigma b\gamma_5, \quad (3.11)$$

$$x(s) = x(0) + \left(\frac{e^{2eFs} - 1}{eF} (\Pi(0) - iz\sigma b\gamma_5) \right). \quad (3.12)$$

Após algumas manipulações, encontramos

$$\Pi(0) = \frac{1}{2}eFe^{-eFs}\sinh^{-1}(eFs)(x(s) - x(0)) + iz\sigma b\gamma_5, \quad (3.13)$$

$$\Pi(s) = \frac{1}{2}eF e^{eFs} \sinh^{-1}(eFs)(x(s) - x(0)) + iz\sigma b\gamma_5, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \Pi^2(s) &= (x(s) - x(0))K(x(s) - x(0)) \\ &\quad + iz e(x(s) - x(0))e^{-eFs} \sinh^{-1}(eFs)F\sigma b\gamma_5 - 3z^2b^2, \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde

$$K = \frac{e^2}{4}F^2 \sinh^{-2}(eFs).$$

Para escrevermos os operadores em (3.15) sob um ordenamento consistente, faz-se necessário calcular o seguinte comutador

$$[x(s), x(0)] = i \frac{e^{2eFs} - 1}{eF}. \quad (3.16)$$

Assim*,

$$x(s)Kx(0) - x(0)Kx(s) = \frac{i}{2}\text{TR}\{eF \coth(eFs)\}, \quad (3.17)$$

e, portanto, a partir de (3.6), (3.15) e (3.17),

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -x(s)Kx(s) + 2x(s)Kx(0) - x(0)Kx(0) - \frac{i}{2}\text{TR}\{eF \coth(eFs)\} \\ &\quad - \frac{e}{2}\text{TR}\{\sigma F\} + m^2 - 2z^2b^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Substituindo (3.18) em (3.9), obtemos

$$\begin{aligned} i\partial_s \langle x'(s)|x''(0) \rangle &= [-(x' - x'')K(x' - x'') - \frac{i}{2}\text{TR}\{eF \coth(eFs)\} \\ &\quad - \frac{e}{2}\text{TR}\{\sigma F\} + m^2 - 2z^2b^2] \langle x'(s)|x''(0) \rangle, \end{aligned} \quad (3.19)$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} \langle x'(s)|x''(0) \rangle &= C(x', x'') e^{-L(s)} s^{-2} \exp \left[-\frac{i}{4}(x' - x'')eF \coth(eFs)(x' - x'') \right. \\ &\quad \left. + \frac{ie}{2}\text{TR}(\sigma F)s - i(m^2 - 2z^2b^2)s \right], \end{aligned} \quad (3.20)$$

*O traço denotado por TR estende-se somente aos índices de Lorentz, i.e., $\text{TR}(AB) = A_{\mu\nu}B^{\nu\mu}$. Em particular, deve-se notar que a expressão $\text{TR}(\sigma F) = \sigma_{\mu\nu}F^{\nu\mu}$ é ainda uma quantidade matricial, pois cada $\sigma_{\mu\nu}$ é uma matriz 4×4 .

onde

$$L(s) = \frac{1}{2} \text{TR} \ln \frac{\sinh(eFs)}{eFs}. \quad (3.21)$$

Para determinarmos $C(x', x'')$, partimos da definição do operador Π e das relações (3.13) e (3.14), de forma que

$$\begin{aligned} [i\partial'_\mu - eA_\mu(x')] \langle x'(s) | x''(0) \rangle = \\ \left(\frac{1}{2} eF_{\mu\nu} [\coth(eFs) - 1] (x'(s) - x''(0)) + iz\sigma b\gamma_5 \right) \langle x'(s) | x''(0) \rangle, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} [-i\partial''_\mu - eA_\mu(x'')] \langle x'(s) | x''(0) \rangle = \\ \left(\frac{1}{2} eF_{\mu\nu} [\coth(eFs) - 1] (x'(s) - x''(0)) + iz\sigma b\gamma_5 \right) \langle x'(s) | x''(0) \rangle \end{aligned} \quad (3.23)$$

de onde, utilizando (3.20), chegamos às equações

$$[i\partial'_\mu - eA_\mu(x') - \frac{1}{2} eF_{\mu\nu} (x' - x'')^\nu - iz\sigma b\gamma_5] C(x', x'') = 0, \quad (3.24)$$

$$[-i\partial''_\mu - eA_\mu(x'') - \frac{1}{2} eF_{\mu\nu} (x' - x'')^\nu - iz\sigma b\gamma_5] C(x', x'') = 0. \quad (3.25)$$

Formalmente, duas soluções podem ser escritas

$$C(x', x'') = C_1(x'') \exp \left\{ z(x' - x'')\sigma b\gamma_5 - ie \int_{x''}^{x'} dx [A(x) + \frac{1}{2} F(x - x'')] \right\}, \quad (3.26)$$

$$C(x', x'') = C_2(x') \exp \left\{ z(x' - x'')\sigma b\gamma_5 - ie \int_{x'}^{x''} dx [A(x) + \frac{1}{2} F(x - x')] \right\}. \quad (3.27)$$

Como ambas integrais em (3.26) e (3.27) são independentes do caminho de integração devido ao Teorema de Stokes, podemos escolher o caminho de integração como sendo uma linha reta conectando x' e x'' , ou seja, $x = x'' + t(x' - x'')$. Desta forma,

$$\begin{aligned} \int_{x''}^{x'} dx^\mu F(x - x'')_\mu &= \int_0^1 dt (x' - x'') F(x - x'') = 0, \\ \int_{x'}^{x''} dx^\mu F(x - x'')_\mu &= \int_1^0 dt (x' - x'') F(x - x'') (1 - t) = 0. \end{aligned}$$

Com isso em mente, a comparação entre as duas expressões para $C(x', x'')$ nos leva à seguinte conclusão: $C_1(x'') = C_2(x') = C$ (constante). Esta constante é finalmente determinada pela condição de normalização (3.10), de forma que

$$C = -\frac{i}{(4\pi)^2}. \quad (3.28)$$

Portanto, a expressão final para a amplitude de transição fica

$$\begin{aligned} \langle x'(s)|x''(0) \rangle &= -\frac{i}{(4\pi)^2} \Phi(x', x'') e^{-L(s)} s^{-2} \exp \left[-\frac{i}{4} (x' - x'') eF \coth(eFs) (x' - x'') \right. \\ &\quad \left. + \frac{ie}{2} \text{TR}(\sigma F) s - i(m^2 - 2z^2 b^2) s \right], \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde

$$\Phi(x', x'') = e^{z(x' - x'') \sigma b \gamma_5 - ie \int_{x''}^{x'} dx^\mu A_\mu(x)}. \quad (3.30)$$

De posse da amplitude de transição (3.29) e com a ajuda de (3.4), (3.5) e (3.8), podemos calcular o traço em (3.3), ou seja,

$$\begin{aligned} \text{tr}[G(x', x'') \gamma_5 \not{b}] &= \text{tr} \left[(i\gamma_5 b^\mu - \gamma_5 \sigma^{\mu\nu} b_\nu) \int_0^\infty ds \langle x'(s) | \Pi_\mu(s) | x''(0) \rangle \right] \\ &\quad + izb^2 \text{tr} \left[\int_0^\infty ds \langle x'(s) | x''(0) \rangle \right] \\ &= \text{tr} \left[(-i\gamma_5 b^\mu - \gamma_5 \sigma^{\mu\nu} b_\nu) \int_0^\infty ds \langle x'(s) | \Pi_\mu(0) | x''(0) \rangle \right] \\ &\quad + izb^2 \text{tr} \left[\int_0^\infty ds \langle x'(s) | x''(0) \rangle \right] \end{aligned} \quad (3.31)$$

Tomando a média entre as duas expressões equivalentes acima, obtemos

$$\begin{aligned} \text{tr}[G(x', x'') \gamma_5 \not{b}] &= \frac{ib^\mu}{2} \text{tr} \left[\gamma_5 \int_0^\infty ds \langle x'(s) | [\Pi_\mu(s) - \Pi_\mu(0)] | x''(0) \rangle \right] \\ &\quad - \frac{ib_\nu}{2} \text{tr} \left[\gamma_5 \sigma^{\mu\nu} \int_0^\infty ds \langle x'(s) | [\Pi_\mu(s) + \Pi_\mu(0)] | x''(0) \rangle \right] \\ &\quad + izb^2 \text{tr} \left[\int_0^\infty ds \langle x'(s) | x''(0) \rangle \right]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Agora, a partir das relações (3.13) e (3.14) calculamos

$$\begin{aligned} \langle x'(s) | [\Pi_\mu(s) - \Pi_\mu(0)] | x''(0) \rangle &= [eF(x' - x'')]_\mu \langle x'(s) | x''(0) \rangle, \\ \langle x'(s) | [\Pi_\mu(s) + \Pi_\mu(0)] | x''(0) \rangle &= [eF \coth(eFs)(x' - x'') + iz\sigma b \gamma_5]_\mu \langle x'(s) | x''(0) \rangle. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Finalmente, usando (3.29) e (3.33), reescrevemos (3.32) na seguinte forma

$$\text{tr}[G(x', x'') \gamma_5 \not{b}] = \frac{1}{(4\pi)^2} \Phi_0(x', x'') \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-i(m^2 - 2z^2 b^2)s} e^{-L(s)}$$

$$\begin{aligned}
& \times e^{-\frac{i}{4}(x'-x'')eF \coth(eFs)(x'-x'')} \\
& \times \left\{ \frac{1}{2} e F_{\mu\nu} (x' - x'')^\nu b^\mu \text{tr} \left[\gamma_5 e^{z(x'-x'')\sigma b} e^{\frac{ie}{2} \text{TR}(\sigma F)s} \right] \right. \\
& + \frac{ie}{2} F_{\mu\alpha} [\coth(eFs)]^{\alpha\beta} (x' - x'')_\beta b_\nu \text{tr} \left[\gamma_5 \sigma^{\mu\nu} e^{z(x'-x'')\sigma b} e^{\frac{ie}{2} \text{TR}(\sigma F)s} \right] \\
& \left. - \frac{z}{2} b^2 \text{tr} \left[e^{z(x'-x'')\sigma b} e^{\frac{ie}{2} \text{TR}(\sigma F)s} \right] \right\}, \tag{3.34}
\end{aligned}$$

onde $\Phi_0(x', x'')$ representa a função $\Phi(x', x'')$ avaliada em $z = 0$.

A quadri-corrente do vácuo é obtido, como em (B.19), a partir da variação da ação $S^{(1)}$ em relação a $A^\mu(x)$,

$$\langle j_\mu \rangle = \frac{\delta S^{(1)}}{\delta A_\mu(x)}.$$

Assim, substituindo (3.34) em (3.3) obtemos, após a deformação do caminho de integração is para o eixo real positivo,

$$\begin{aligned}
\langle j_\mu \rangle &= \frac{ie}{(4\pi)^2} (x' - x'')_\mu \Phi_0(x', x'') \int_0^1 dz \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-i(m^2 - 2z^2 b^2)s} e^{-l(s)} \\
& \times e^{\frac{1}{4}(x'-x'')eF \cot(eFs)(x'-x'')} \\
& \times \left\{ -\frac{1}{2} e F_{\rho\nu} (x' - x'')^\nu b^\rho \text{tr} \left[\gamma_5 e^{z(x'-x'')\sigma b} \gamma_5 e^{\frac{e}{2} \text{TR}(\sigma F)s} \right] \right. \\
& + \frac{e}{2} F_{\rho\alpha} [\cot(eFs)]^{\alpha\beta} (x' - x'')_\beta b_\nu \text{tr} \left[\gamma_5 \sigma^{\rho\nu} e^{z(x'-x'')\sigma b} \gamma_5 e^{\frac{e}{2} \text{TR}(\sigma F)s} \right] \\
& \left. + \frac{z}{2} b^2 \text{tr} \left[e^{z(x'-x'')\sigma b} \gamma_5 e^{\frac{e}{2} \text{TR}(\sigma F)s} \right] \right\}_{x'' \rightarrow x'},
\end{aligned}$$

onde

$$l(s) = \frac{1}{2} \text{TR} \ln \frac{\text{sen}(eFs)}{eFs}.$$

Usando a técnica de autovalores [11] e desprezando os termos que não contribuem para a corrente de Chern-Simons, obtemos em ordem $\mathcal{O}(e^2)^\dagger$,

$$\begin{aligned}
\langle j_\mu \rangle &= \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dz \left[(x' - x'')_\mu (x' - x'')_\rho \Phi_0(x', x'') \tilde{F}^{\rho\nu} b_\nu \right. \\
& \times \left. \int_0^\infty ds \left(\frac{a_1}{s^2} + \frac{a_2 z b^2}{s} \right) e^{-(m^2 - 2z^2 b^2)s + (x' - x'')^2/(4s)} \right]_{x'' \rightarrow x'},
\end{aligned}$$

[†]Esta aproximação equivale ao cálculo a um “loop” do tensor de polarização do vácuo via diagramas de Feynman.

onde

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho}$$

e

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^{2N}}{(2N)!} [(x' - x'')^2 b^2 - ((x' - x'') \cdot b)^2]^N, \\ a_2 &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^{2N+1}}{(2N+1)!} [(x' - x'')^2 b^2 - ((x' - x'') \cdot b)^2]^N. \end{aligned}$$

Agora, à luz da teoria de perturbação no parâmetro b , expandimos o fator $e^{2z^2b^2s}$ em potências de seu expoente, para encontrarmos

$$\begin{aligned} \langle j_\mu \rangle &= \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dz \left[\Phi_0(x', x'') \frac{(x' - x'')_\mu (x' - x'')_\rho}{(x' - x'')^2} b_\nu \tilde{F}^{\rho\nu} \right. \\ &\times \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^{2N}}{(2N)!} \left(1 + \frac{z^2}{2N+1} \frac{b^2}{m^2} [-m^2(x' - x'')^2]^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\times \left\{ (x' - x'')^2 b^2 - \frac{(x' - x'')_\alpha (x' - x'')_\beta}{(x' - x'')^2} (x' - x'')^2 b^\alpha b^\beta \right\}^N \\ &\times \left. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{b^2}{m^2} \right)^n [-m^2(x' - x'')^2]^{\frac{(n+1)}{2}} K_{n-1}([-m^2(x' - x'')^2]^{\frac{1}{2}}) \right]_{x'' \rightarrow x'} \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde identificamos $K_n(x)$ como sendo a função de Bessel modificada de ordem n , i.e.,

$$\int_0^\infty ds s^{n-2} e^{-sy-1/s} = 2y^{(1-n)/2} K_{n-1}(2y^{1/2}).$$

Usando as identidades

$$\begin{aligned} \lim_{x'' \rightarrow x'} \Phi_0(x', x'') &= 1, \\ \lim_{x'' \rightarrow x'} [-m^2(x' - x'')^2]^{\frac{1}{2}} K_{-1}([-m^2(x' - x'')^2]^{\frac{1}{2}}) &= 1, \\ \lim_{x'' \rightarrow x'} [-m^2(x' - x'')^2]^{\frac{(n+1)}{2}} K_{n-1}([-m^2(x' - x'')^2]^{\frac{1}{2}}) &= 0 \quad (n = 1, 2, 3...), \\ \lim_{x'' \rightarrow x'} \frac{(x' - x'')_\mu (x' - x'')_\nu}{(x' - x'')^2} &= \frac{1}{4} g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

não é difícil mostrar que cada termo de ordem superior em (3.35) se anula separadamente e, portanto,

$$\langle j_\mu \rangle = -\frac{e^2}{8\pi^2} \tilde{F}^{\mu\nu} b_\nu \int_0^1 dz, \quad (3.37)$$

ou, equivalentemente,

$$S^{(1)} = -\frac{e^2}{16\pi^2} \int_0^\infty d^4x \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} A_\mu b_\nu \tilde{F}_{\lambda\rho} \int_0^1 dz. \quad (3.38)$$

3.3 A Ambigüidade do Termo de Quebra e outras Patologias

A expressão (3.38) mostra que o método do tempo-próprio de Fock-Schwinger leva a um termo do tipo Chern-Simons induzido radiativamente que é finito e diferente de zero. Este resultado coincide com aquele encontrado na referência [32], que utiliza o método da expansão derivativa covariante, mas difere dos resultados das referências [30], [33] e [31], onde o coeficiente $3/(32\pi^2)$ é obtido ao invés de $1/(16\pi^2)$. No entanto, devemos enfatizar que as expressões (3.37) e (3.38) contêm uma possível ambigüidade. Isto pode ser percebido notando que o último limite em (3.36) tem, do ponto de vista matemático, uma dependência direcional [36], i.e., ele pode tomar valores distintos conforme x_μ se aproxima de zero por direções diferentes. Em geral,

$$\lim_{x' \rightarrow 0} \frac{x_\mu x_\nu}{x^2} = c g_{\mu\nu}, \quad (3.39)$$

onde c é uma constante arbitrária. Para ser consistente com a operação traço em 4-dimensões, escolheu-se $c = 1/4$. Por esta razão, o termo induzido radiativamente é, de fato, ambíguo na presente abordagem.

No entanto, qualquer tipo de discussão a respeito do resultado obtido fica comprometida, uma vez que o tratamento acima padece de inconsistências matemáticas relacionadas ao procedimento de obtenção das soluções (3.26) e (3.27). De fato, devido à presença da grandeza matricial $\sigma_{\mu\nu}$ em (3.24) e (3.25), deparamo-nos com um problema de ordenamento. Para compreendermos como isso se dá, consideremos o caso mais simples, onde o campo eletromagnético é nulo. Nesta situação, a equação (3.24) se resume a

$$\partial'_\mu C(x', x'') = (\partial'_\mu M) C(x', x''), \quad (3.40)$$

onde $M = (x' - x'')^\alpha z \sigma_{\alpha\nu} b^\nu \gamma_5$, de forma que

$$\partial'_\mu M = z \sigma_{\mu\nu} b^\nu \gamma_5. \quad (3.41)$$

Para integrarmos esta equação, devemos antes examinar se

$$[M, (\partial'_\mu M)] = 0, \quad (3.42)$$

pois só então poderemos tomar como solução $C(x', x'') \propto \exp(M)$. No entanto, devido à presença de $\sigma_{\mu\nu}$, a relação (3.42) não se verifica. Diante disso, concluímos que no caso tratado na seção anterior, onde o campo eletromagnético está presente, o procedimento dispensado é inconsistente.

Um forma de se resolver este tipo de problema é levar em consideração a equação de movimento para $\sigma_{\mu\nu}$, a qual, torna o tratamento muito mais complexo. Yu. A. Sytenko e K. Yu. Rulik [38] implementaram tal procedimento para calcular, em segunda ordem no parâmetro de quebra, a corrente induzida. Contudo, tal estudo tampouco é conclusivo, pois considera um parâmetro de expansão diferente do que estamos interessados [‡], embora indique que não há indução de um termo tipo Chern-Simons, indo ao encontro dos resultados do próximo capítulo.

[‡]Na seção anterior, estávamos interessados no cálculo em segunda ordem na carga elétrica.

Capítulo 4

A Renormalização da QED₄ Estendida a 1-Loop

Neste capítulo, será apresentado um cálculo perturbativo em segunda ordem na constante de acoplamento para o tensor de polarização do vácuo da QED estendida. O propagador corrigido do fóton será obtido através da equação de Schwinger-Dyson e aspectos relacionados à geração dinâmica de massa (deslocamento do pólo), bem como sobre a ambigüidade advinda do processo de regularização e a invariância de gauge, serão discutidos. Por fim, a renormalização da carga elétrica será efetuada. Utilizaremos a prescrição de Pauli-Villars-Raynski para controlar os diferentes graus de divergência do problema.

4.1 O Cálculo da Polarização do Vácuo

A quantidade relevante para se investigar uma possível geração dinâmica de um termo do tipo Chern-Simons no setor de gauge e/ou a renormalização da carga na QED estendida, é a amplitude de persistência do vácuo, calculada em segunda ordem nas variáveis do fóton.

Com isso em mente, somos levados a examinar a amplitude de polarização do vácuo, onde lançamos mão do propagador fermiônico exato (i.e., definido não-perturbativamente, segundo a discussão do capítulo precedente), o qual, como vimos, é dado por*

$$S(l) = \frac{i}{\not{l} - m - \not{p}\gamma_5}. \quad (4.1)$$

*Por conveniência, usaremos nos cálculos que seguem uma notação onde a carga elétrica e está implícita.

Assim, o tensor de polarização do vácuo é escrito como

$$\Pi^{\mu\nu}(p, m, b) = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\gamma^\mu S(l) \gamma^\nu S(l+p)]. \quad (4.2)$$

Notando que

$$S(l) = S_0(l) + S_b(l), \quad (4.3)$$

onde

$$S_0(l) = \frac{i}{\not{l} - m}$$

é o propagador fermiônico livre e

$$S_b(l) = -iS(l)\not{b}\gamma_5 S_0(l), \quad (4.4)$$

segue que o tensor $\Pi^{\mu\nu}(p, m, b)$ em (4.2) admite a seguinte decomposição

$$\Pi^{\mu\nu}(p, m, b) = \Pi_0^{\mu\nu}(p, m) + \Pi_b^{\mu\nu}(p, m, b) + \Pi_{bb}^{\mu\nu}(p, m, b). \quad (4.5)$$

Na expressão acima,

$$\Pi_0^{\mu\nu}(p, m) = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\gamma^\mu S_0(l) \gamma^\nu S_0(l+p)] \quad (4.6)$$

é o tensor de polarização do vácuo da QED tradicional,

$$\Pi_b^{\mu\nu}(p, m, b) = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\gamma^\mu S_0(l) \gamma^\nu S_b(l+p) + \gamma^\mu S_b(l) \gamma^\nu S_0(l+p)] \quad (4.7)$$

é a contribuição linear em b_μ ao tensor de polarização do vácuo, e

$$\Pi_{bb}^{\mu\nu}(p, m, b) = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\gamma^\mu S_b(l) \gamma^\nu S_b(l+p)] \quad (4.8)$$

é a contribuição em ordem b^2 , alvo de nossas investigações subseqüentes.

De fato, como estamos interessados na contribuição em segunda ordem na constante de acoplamento, levando-se em conta as correções em ordem b_μ para as linhas fermiônicas internas, consideraremos o seguinte caso

$$S_b(l) \rightarrow -iS_0(l)\not{b}\gamma_5 S_0(l). \quad (4.9)$$

Nesta aproximação, as expressões (4.7) e (4.8) tornam-se

$$\Pi_b^{\mu\nu}(p, m, b) = -i \times \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\gamma^\mu S_0(l) \gamma^\nu S_0(l+p) \not{b} \gamma_5 S_0(l+p) + \gamma^\mu S_0(l) \not{b} \gamma_5 S_0(l) \gamma^\nu S_0(l+p)], \quad (4.10)$$

e

$$\Pi_{bb}^{\mu\nu}(p, m, b) = (i)^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\gamma^\mu S_0(l) \not{b} \gamma_5 S_0(l) \gamma^\nu S_0(l+p) \not{b} \gamma_5 S_0(l+p)]. \quad (4.11)$$

Diagramaticamente, as expressões (4.6), (4.10) e (4.11), são representadas pela série

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(p, m, b) \equiv & \text{Diagrama 1} = \text{Diagrama 2} + \\ & + \text{Diagrama 3} + \text{Diagrama 4} + \text{Diagrama 5} + O(b^2), \end{aligned}$$

Diagrama 1: Two external wavy lines with momenta p and indices ν and μ meet at a shaded oval. Diagrama 2: A wavy line with momentum p and index ν enters a loop with momentum l and $l+p$, with a wavy line with momentum p and index μ exiting. Diagrama 3: A wavy line with momentum p and index ν enters a loop with momentum l and $l+p$, with a wavy line with momentum p and index μ exiting. Diagrama 4: A wavy line with momentum p and index ν enters a loop with momentum l and $l+p$, with a wavy line with momentum p and index μ exiting. Diagrama 5: A wavy line with momentum p and index ν enters a loop with momentum l and $l+p$, with a wavy line with momentum p and index μ exiting.

onde,

$$-\times- \equiv \frac{\begin{array}{c} \times \\ \vdots \\ b_\alpha \\ \vdots \\ \times \end{array}}{i\gamma^\alpha \gamma_5} + O(b^2)$$

representa as inserções em ordem b_α para a linha interna fermiônica.

Por contagem de potências, $\Pi_b^{\mu\nu}(p, m, b)$ e $\Pi_{bb}^{\mu\nu}(p, m, b)$ são, respectivamente, linear e logaritmicamente divergentes no limite do ultravioleta (i.e., $p \gg m$). O tensor $\Pi_0^{\mu\nu}(p)$, relativo ao setor da QED usual, apresenta divergências quadráticas, lineares e logarítmicas. Para que a teoria seja matematicamente bem definida, faz-se necessário utilizar um procedimento de regularização.

Como é sabido, simetrias fundamentais da teoria, como a simetria de gauge (que se reflete nas identidades de Ward), devem ser preservadas, pois são importantes para a fixação de ambigüidades advindas do processo de renormalização. Um exemplo clássico onde esse tipo de análise se aplica, ocorre no estudo da anomalia axial (ou

anomalia ABJ) [40]-[41], a qual guarda, como veremos, estreita semelhança com o assunto da violação da simetria de Lorentz e CPT na QED (vide Apêndice C).

Com o intuito de preservar a simetria de gauge e preservar a invariância de Lorentz no setor de $\Pi_0^{\mu\nu}(p, m)$, utilizaremos a prescrição de Pauli-Villars-Rayski (P-V-R) [17]. Neste método, massas fictícias auxiliares satisfazendo condições específicas são introduzidas. A teoria original é recuperada quando, ao final dos cálculos, as massas reguladoras são tomadas arbitrariamente grandes.

Para ser consistente com o esquema de P-V-R, o tensor $\Pi^{\mu\nu}(p, m, b)$ deve ser regularizado como um único objeto. Por isso, substituímos (4.5) por

$$\Pi^{\mu\nu}(p, b) = \sum_{i=0}^N c_i (\Pi_0^{\mu\nu}(p, m_i) + \Pi_b^{\mu\nu}(p, m_i, b) + \Pi_{bb}^{\mu\nu}(p, m_i, b)), \quad (4.12)$$

onde cada termo do lado direito continua tendo a mesma forma funcional de suas expressões anteriores (respectivamente (4.6), (4.10) e (4.11)), exceto pelo fato que $m \rightarrow m_i$. Analisando a estrutura de (4.12), pode-se mostrar que, com 3 massas auxiliares satisfazendo as condições

$$\sum_{i=0}^N c_i = 0, \quad (4.13)$$

$$\sum_{i=0}^N c_i m_i = 0, \quad (4.14)$$

$$\sum_{i=0}^N c_i m_i^2 = 0, \quad (4.15)$$

as divergências de $\Pi^{\mu\nu}(p, m, b)$ são controladas. Nas expressões acima, $c_0 = 1$ e $m_0 = m$ é a massa do elétron. De fato, resolvendo o sistema acima, concluímos que N deve ser no mínimo igual a 3 e, neste caso, uma escolha possível para os coeficientes é $c_1 = -2$, $c_2 = c_3 = 1/2$ de modo que

$$m_2 = m + m_1 \left(1 + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$m_3 = m + m_1 \left(1 + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

onde m_1 é um parâmetro livre.

O cálculo do tensor (4.12) é demasiadamente extenso e, por usar procedimentos tradicionais da teoria quântica de campos, omitiremos maiores detalhes e nos ataremos exclusivamente na apresentação de seu resultado final, bem como na discussão de suas implicações. Assim,

$$\Pi_0^{\mu\nu}(p, m) = g^{\mu\nu}\Pi_1(p, m) + p^\mu p^\nu \Pi_2(p, m), \quad (4.16)$$

onde

$$\Pi_1(p, m) = \frac{ip^2}{2\pi^2} \int_0^1 dz \, z (1-z) \left(\sum_{i=0}^N c_i \ln \left[\frac{m_i^2}{m^2} \right] + \ln \left[1 - \frac{z(1-z)p^2}{m^2} \right] \right), \quad (4.17)$$

$$\Pi_2(p, m) = \frac{-i}{2\pi^2} \int_0^1 dz \, z (1-z) \left(\sum_{i=0}^N c_i \ln \left[\frac{m_i^2}{m^2} \right] + \ln \left[1 - \frac{z(1-z)p^2}{m^2} \right] \right), \quad (4.18)$$

$$\Pi_b^{\mu\nu}(p, m, b) = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha b_\beta \Pi_b(p, m), \quad (4.19)$$

onde

$$\Pi_b(p, m) = \sum_{i=1}^N c_i \left(-\frac{1}{8\pi^2} + \frac{m_i^2}{\pi^2} \int_0^1 \frac{dz \, z}{m_i^2 - p^2 z(1-z)} \right); \quad (4.20)$$

e, finalmente,

$$\Pi_{bb}^{\mu\nu}(p, m, b) = \mathbb{A}(p, m, b)g^{\mu\nu} + \mathbb{B}(p, m)b^\mu b^\nu + \mathbb{C}(p, m, b)(b^\mu p^\nu + b^\nu p^\mu) + \mathbb{D}(p, m, b)p^\mu p^\nu, \quad (4.21)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(p, m, b) = & \sum_{i=1}^N c_i \left\{ \frac{-2b^2}{3} \Pi_2(p) - 2b^2 \frac{i}{2\pi^2} \int_0^1 dz \, z (1-z) \frac{m_i^2}{m_i^2 - p^2 z(1-z)} \right. \\ & - \frac{p^2 b^2}{2} \frac{i}{2\pi^2} \int_0^1 dz \, z (1-z) (2z - 2z^2 + 1) \frac{1}{m_i^2 - p^2 z(1-z)} \\ & - (p \cdot b)^2 \frac{i}{2\pi^2} \int_0^1 dz \, z (1-z) (-4z - 4z^2 + 3) \frac{1}{m_i^2 - p^2 z(1-z)} \\ & + \frac{(p \cdot b)^2}{8} \frac{i}{2\pi^2} \int_0^1 dz \, z (1-z) (-32z + 40z^2) \frac{m_i^2}{(m_i^2 - p^2 z(1-z))^2} \\ & \left. + \frac{(p \cdot b)^2 p^2}{8} \frac{i}{2\pi^2} \int_0^1 dz \, z (1-z) (-8z^2 + 8z^4) \frac{1}{(m_i^2 - p^2 z(1-z))^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{p^2 b^2}{8} \frac{i}{2\pi^2} \int_0^1 dz \, z (1-z) (24z - 24z^2 - 4) \frac{m_i^2}{(m_i^2 - p^2 z(1-z))^2} \\
& - \frac{b^2}{2} \frac{i}{2\pi^2} \int_0^1 dz \, z (1-z) \frac{m_i^4}{(m_i^2 - p^2 z(1-z))^2} \\
& - \frac{p^4 b^2}{2} \frac{i}{2\pi^2} \int_0^1 dz \, z (1-z) (z^2 - 2z^3 + z^4) \frac{1}{(m_i^2 - p^2 z(1-z))^2} \Big\}, \tag{4.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}(p, m) = & \sum_{i=1}^N c_i \Big\{ 10\Pi_2(p) - \frac{i6}{2\pi^2} \int_0^1 dz \, z (1-z) \frac{m_i^2}{m_i^2 - p^2 z(1-z)} \\
& - p^2 \frac{i}{2\pi^2} \int_0^1 dz \, z (1-z) \frac{1}{m_i^2 - p^2 z(1-z)} \\
& + p^2 \frac{i}{2\pi^2} \int_0^1 dz \, z (1-z) \frac{m_i^2}{(m_i^2 - p^2 z(1-z))^2} \\
& + 2p^2 \frac{i}{2\pi^2} \int_0^1 dz \, z^2 (1-z)^2 \frac{m_i^2}{(m_i^2 - p^2 z(1-z))^2} \\
& + \frac{i}{2\pi^2} \int_0^1 dz \, z (1-z) \frac{m_i^4}{(m_i^2 - p^2 z(1-z))^2} \\
& + p^4 \frac{i}{2\pi^2} \int_0^1 dz \, z (1-z) (z^2 - 2z^3 + z^4) \frac{1}{(m_i^2 - p^2 z(1-z))^2} \Big\}, \tag{4.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}(p, m, b) = & \sum_{i=1}^N c_i \Big\{ (p \cdot b) \frac{i}{2\pi^2} \int_0^1 dz \, z (1-z) (6z - 4z^2 + 1) \frac{1}{m_i^2 - p^2 z(1-z)} \\
& - (p \cdot b) \frac{i}{2\pi^2} \int_0^1 dz \, z (1-z) \frac{m_i^2}{(m_i^2 - p^2 z(1-z))^2} \\
& - (p \cdot b) p^2 \frac{i}{2\pi^2} \int_0^1 dz \, z (1-z)^2 \frac{1}{(m_i^2 - p^2 z(1-z))^2} \\
& - 4(p \cdot b) \frac{i}{2\pi^2} \int_0^1 dz \, z^2 (1-z)^2 \frac{m_i^2}{(m_i^2 - p^2 z(1-z))^2} \Big\}, \tag{4.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}(p, m, b) = & \sum_{i=1}^N c_i \Big\{ -2b^2 \frac{i}{2\pi^2} \int_0^1 dz \, z^2 (1-z) \frac{1}{m_i^2 - p^2 z(1-z)} \\
& + 4b^2 \frac{i}{2\pi^2} \int_0^1 dz \, z^2 (1-z)^2 \frac{m_i^2}{(m_i^2 - p^2 z(1-z))^2} \\
& - 4(p \cdot b) \frac{i}{2\pi^2} \int_0^1 dz \, z (1-z) (z - 2z^2) \frac{1}{m_i^2 - p^2 z(1-z)} \\
& + 4(p \cdot b)^2 \frac{i}{2\pi^2} \int_0^1 dz \, z^3 (1-z)^2 \frac{1}{(m_i^2 - p^2 z(1-z))^2} \Big\}. \tag{4.25}
\end{aligned}$$

Agrupando as expressões (4.16), (4.19) e (4.21) escrevemos, após uma compactação da notação,

$$\Pi^{\mu\nu}(p, m, b) = \mathcal{A}g^{\mu\nu} + \mathcal{B}b^\mu b^\nu + \mathcal{C}(b^\mu p^\nu + b^\nu p^\mu) + \mathcal{D}p^\mu p^\nu + \mathcal{E}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}p_\alpha b_\beta, \quad (4.26)$$

onde definimos

$$\mathcal{A} = (\mathbb{A}(p, m, b) + \Pi_1(p, m)), \quad (4.27)$$

$$\mathcal{B} = \mathbb{B}(p, m), \quad (4.28)$$

$$\mathcal{C} = \mathbb{C}(p, m, b), \quad (4.29)$$

$$\mathcal{D} = (\mathbb{D}(p, m, b) + \Pi_2(p, m)), \quad (4.30)$$

$$\mathcal{E} = \Pi_b(p, m). \quad (4.31)$$

4.2 A Equação de Schwinger-Dyson

A partir da expressão (4.26), podemos obter o propagador corrigido para o fóton usando a Equação de Schwinger-Dyson [47], a qual representa, em uma dada ordem, a soma de um conjunto de diagramas próprios da série perturbativa. Portanto, sendo

$$(G_0^{-1})^{\mu\nu} = ip^2 g^{\mu\nu} \quad (4.32)$$

o inverso do propagador do fóton livre da QED no gauge de Feynman, a equação de Schwinger-Dyson

$$(G^{-1})^{\mu\nu} = (G_0^{-1})^{\mu\nu} - \Pi^{\mu\nu}(p, m, b) \quad (4.33)$$

nos leva à expressão

$$(G^{-1})^{\mu\nu} = Ag^{\mu\nu} + Bb^\mu b^\nu + C(b^\mu p^\nu + b^\nu p^\mu) + Dp^\mu p^\nu + E\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}p_\alpha b_\beta, \quad (4.34)$$

onde redefinimos

$$A = (ip^2 - \mathcal{A}), \quad (4.35)$$

$$B = -\mathcal{B}, \quad (4.36)$$

$$C = -\mathcal{C}, \quad (4.37)$$

$$D = -\mathcal{D}, \quad (4.38)$$

$$E = -\mathcal{E}. \quad (4.39)$$

Para invertermos $G^{\mu\nu}$ a partir de (4.33) e encontrarmos o propagador do fóton da QED estendida, devemos antes resolver a equação

$$(G^{-1})^{\mu\nu}(G)_{\nu\alpha} = \delta_{\alpha}^{\mu}. \quad (4.40)$$

Através do *anzats*

$$G_{\nu\alpha} = A' g_{\nu\alpha} + B' b_{\nu} b_{\alpha} + C' (b_{\nu} p_{\alpha} + b_{\alpha} p_{\nu}) + D' p_{\nu} p_{\alpha} + E' \epsilon_{\nu\alpha\rho\sigma} p^{\rho} b^{\sigma}, \quad (4.41)$$

pode-se mostrar que

$$A' = \frac{1}{\left(A - \frac{E^2}{A} [b^2 p^2 - (b \cdot p)^2]\right)}, \quad (4.42)$$

$$B' = \frac{-DA' + EE'(p \cdot b) - \frac{[A+Bp^2 D(p \cdot b)]}{B(p \cdot b) + Db^2}}{C(p \cdot b) + Dp^2 - \frac{A+Bp^2 + D(p \cdot b)}{B(p \cdot b) + Db^2}}, \quad (4.43)$$

$$C' = \frac{-(AD' + BD'p^2 + DA' + DD'(p \cdot b) + EE'(p \cdot b))}{B(p \cdot b) + Db^2}, \quad (4.44)$$

$$D' = \frac{-B'[A + Bp^2 + D(p \cdot b)] - BA' + EE'b^2}{B(p \cdot b) + Db^2}, \quad (4.45)$$

$$E' = -\frac{EA'}{A}. \quad (4.46)$$

De posse dos coeficientes, podemos reescrever (4.41) da seguinte forma

$$G_{\nu\alpha} = A' \left\{ g_{\nu\alpha} + \frac{B'}{A'} b_{\nu} b_{\alpha} + \frac{C'}{A'} (b_{\nu} p_{\alpha} + b_{\alpha} p_{\nu}) + \frac{D'}{A'} p_{\nu} p_{\alpha} + \frac{E'}{A'} \epsilon_{\nu\alpha\rho\sigma} p^{\rho} b^{\sigma} \right\}, \quad (4.47)$$

onde o coeficiente A' , escrito explicitamente com a ajuda das expressões (4.27), (4.31), (4.35) e (4.39), é

$$A' = \frac{1}{ip^2 - \Pi(p, m, b)}$$

com

$$\Pi(p, m, b) = \Pi_1(p, m) + A(p, m, b) - \frac{\Pi_b^2(p, m)[p^2 b^2 - (p \cdot b)^2]}{ip^2 - (\Pi_1(p, m) + A(p, m, b))}.$$

Numa notação mais conveniente, escrevemos

$$A' = \frac{-i}{p^2 - \tilde{\Pi}(p, m, b)} \quad (4.48)$$

onde

$$\tilde{\Pi}(p, m, b) = -i\Pi_1(p, m) + -iA(p, m, b) - \frac{(-i)\Pi_b^2(p, m)[p^2 b^2 - (p \cdot b)^2]}{p^2 - (\Pi_1(p, m) + A(p, m, b))}. \quad (4.49)$$

4.3 O Caso da Teoria de Maxwell-Chern-Simons

Antes de procedermos à análise do propagador fotônico corrigido e com o intuito de melhor compreender o mecanismo de indução do termo de quebra, investigaremos nesta seção as conseqüências da presença *ab initio* de um termo do tipo Chern-Simons na Lagrangiana de Maxwell [24]-[25].

A Lagrangiana de Maxwell-Chern-Simons é dada por

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2\zeta}(\partial \cdot A)^2 + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}c^\mu A^\nu F^{\alpha\beta}, \quad (4.50)$$

e a equação de movimento associada é

$$\square A_\rho - (1 - \zeta^{-1})\partial_\rho(\partial \cdot A) - 2\epsilon_{\rho\mu\alpha\beta}c^\mu \partial^\alpha A^\beta = 0. \quad (4.51)$$

Em (4.50), o segundo membro corresponde ao termo de fixação de gauge (sendo ζ o parâmetro de fixação de gauge) e c^μ é um vetor constante que viola a simetria de Lorentz.

No espaço dos momentos, fazendo $p_\mu = i\partial_\mu$, a equação de movimento pode ser escrita como

$$-p^2 A_\rho(p) - i(1 - \zeta^{-1})p_\rho(-ip_\mu A^\mu(p)) + 2i\epsilon_{\rho\mu\alpha\beta}c^\mu p^\alpha A^\beta(p) = 0,$$

ou

$$[-p^2 g_{\rho\beta} - i(1 - \zeta^{-1})p_\rho p_\beta + 2i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}c^\mu p^\alpha]A^\beta(p) = 0.$$

Escolhendo o gauge de Feynman ($\zeta = 1$), segue que

$$[-p^2 g_{\rho\beta} + 2i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}c^\mu p^\alpha]\mathbb{G}^{\beta\sigma}(p) = \delta_\rho^\sigma, \quad (4.52)$$

onde propomos como *ansatz*

$$\mathbb{G}^{\beta\sigma}(p) = A_1 g^{\beta\sigma} + A_2 p^\beta p^\sigma + A_3 c^\beta c^\sigma + B_1(c^\beta p^\sigma + p^\sigma c^\beta) + iB_2 \epsilon^{\mu\nu\beta\sigma} c_\mu p_\nu, \quad (4.53)$$

lembrando que $c_\mu = g_{\mu\nu}c^\nu$.

Substituindo (4.53) em (4.52), tem-se

$$-p^2 A_1 \delta_\rho^\sigma - p^2 A_2 p^\sigma p_\rho - p^2 A_3 c_\rho c^\sigma - p^2 B_1(c^\sigma p_\rho + p^\sigma c_\rho)$$

$$-iB_2 p^2 \epsilon^{\mu\nu\sigma} c_\mu p_\nu + 2iA_1 \epsilon_{\rho\mu\alpha}^\sigma c^\mu p^\alpha + 2iB_2 \epsilon_{\rho\mu\alpha\beta} \epsilon^{\delta\lambda\sigma\beta} c^\mu p^\alpha c_\delta p_\lambda = \delta_\rho^\sigma.$$

Fazendo uso da identidade

$$\varepsilon_{\rho\mu\alpha\beta} \varepsilon^{\delta\lambda\sigma\beta} = \delta_\rho^\delta \delta_\mu^\lambda \delta_\alpha^\sigma + \delta_\alpha^\delta \delta_\rho^\lambda \delta_\mu^\sigma + \delta_\mu^\delta \delta_\alpha^\lambda \delta_\rho^\sigma - \delta_\mu^\delta \delta_\rho^\lambda \delta_\alpha^\sigma - \delta_\rho^\delta \delta_\alpha^\lambda \delta_\mu^\sigma - \delta_\alpha^\delta \delta_\mu^\lambda \delta_\rho^\sigma,$$

podemos escrever o último termo do lado esquerdo de (4.53) como

$$\begin{aligned} 2B_2 \varepsilon_{\rho\mu\alpha\beta} \varepsilon^{\delta\lambda\sigma\beta} c^\mu p^\alpha c_\delta p_\lambda &= 2B_2 \{ (c \cdot p) [p^\sigma c_\rho + c^\sigma p_\rho] + [c^2 p^2 - (c \cdot p)^2] \delta_\rho^\sigma \\ &\quad - c^2 p^\sigma p_\rho - p^2 c^\sigma c_\rho \}. \end{aligned}$$

Identificando as potências de p e c , encontramos

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{1}{2[c^2 p^2 - (c \cdot p)^2] - (p^2)^2/2}, \\ A_1 &= \frac{p^2}{2} B_2, \\ A_2 &= -2 \frac{c^2}{p^2} B_2, \\ A_3 &= -2 B_2, \\ B_1 &= 2 \frac{(c \cdot p)}{p^2} B_2, \end{aligned}$$

de forma que

$$\begin{aligned} \mathbb{G}^{\mu\nu}(p) &= \frac{1}{4[c^2 p^2 - (c \cdot p)^2] - (p^2)^2} \left\{ p^2 g^{\mu\nu} - 4c^2 \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} - 4c^\mu c^\nu \right. \\ &\quad \left. + 4 \frac{(c \cdot p)}{p^2} [c^\mu p_\nu + c_\nu p^\mu] + 2i \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} c_\alpha p_\beta \right\}. \end{aligned}$$

Como veremos na próxima seção, a expressão acima servirá de guia para a análise da estrutura singular do propagador do “fóton” na teoria estendida. Ela permitirá também estabelecer uma relação entre os coeficientes dos termos proporcionais a $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ em $G^{\mu\nu}(p)$ e $\mathbb{G}^{\mu\nu}(p)$ e, com isso, investigar a possibilidade do coeficiente do termo de quebra do setor fermiônico ter alguma relação com o coeficiente de um (possível) termo não invariante no setor de gauge.

4.4 Análise do Propagador $G^{\mu\nu}(p)$

4.4.1 A Massa Induzida

Uma análise do pólo do propagador em (4.47) se resume ao exame da estrutura do coeficiente A' calculado na seção 4.2. Para verificarmos se há um deslocamento do pólo e conseqüente geração de massa, faz-se necessário avaliar (4.49) em $p^2 = 0$, i.e.,

$$\mu^2 = \tilde{\Pi}(p, m, b)|_{p^2=0} = -b^2 \frac{1}{6\pi^2} \sum_{i=0}^N c_i \ln \left[\frac{m_i^2}{m^2} \right] + (p \cdot b)^2 \frac{1}{2\pi^2} \sum_{i=0}^N c_i \left[\frac{1}{m_i^2} \right] \quad (4.54)$$

onde utilizamos as condições (4.13)-(4.15). No caso em que $N = 3$, discutido na seção 4.1,

$$\mu^2 = b^2 \frac{1}{6\pi^2} \ln \left[\frac{\Lambda^2}{m^2} \right] + (p \cdot b)^2 \frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{1}{m^2} \right]. \quad (4.55)$$

Em (4.55), definimos o parâmetro

$$\Lambda^2 = \frac{m_1^4}{m_2 m_3},$$

o qual deve ser entendido no limite em que $m_1 \rightarrow \infty$.

Esta indução de massa já era esperada, uma vez que, de acordo com a análise feita da seção anterior, verificou-se um deslocamento do pólo do propagador do fóton livre devido à presença do termo tipo Chern-Simons na teoria estendida no setor de Maxwell. Cabe pontuar que a contribuição para a massa μ^2 adveio do segundo termo do lado direito de (4.49) e, portanto, é fruto do diagrama em segunda ordem em b_μ , ou seja, $\Pi_{bb}^{\mu\nu}$.

Como mostra (4.54), a massa induzida é dependente do processo de regularização utilizado, haja vista que diferentes escolhas para os coeficientes das massas reguladoras podem ser tomadas. Este tipo de ambigüidade, devido ao processo de regularização e intrínseco à teoria se reflete em qualquer análise subsequente, em particular no que se refere à discussão sobre a preservação da invariância de gauge (transversalidade do propagador do fóton) e no estudo da renormalização da carga, como veremos nas próximas seções.

Outra informação importante que podemos extrair do presente estudo diz respeito à possível correlação entre os coeficientes c_α e b_α . Para se investigar o problema da

indução de um termo do tipo Chern-Simons a partir do setor fermiônico, partimos da comparação entre as expressões $G^{\mu\nu}(p)$ e $\mathbb{G}^{\mu\nu}(p)$, para chegarmos à relação

$$\frac{2c_\alpha}{p^2} = -i \frac{E'}{A'} b_\alpha. \quad (4.56)$$

Desta relação, válida fora da camada de massa ($p^2 \neq 0$), podemos inferir o valor de c_α a partir do valor do parâmetro de quebra b_α , introduzido, de primeiros princípios, na construção da teoria estendida. No entanto, o valor de b_α (e consequentemente o valor de c_α), só pode ser obtido através de experiências as quais, até o momento, indicam um valor nulo [2].

4.4.2 O Problema da Invariância de Gauge

Devido ao deslocamento do pólo do propagador $G^{\mu\nu}(p)$, o fóton adquiriu massa, dada por (4.54), cujo valor deverá ser fixado pelo experimento, uma vez que resta em (4.54) uma ambigüidade quanto à escolha dos coeficientes de P-V-R. Com efeito, a condição de transversalidade (identidade de Ward) para o fóton não mais é satisfeita e consequentemente a invariância de gauge da teoria fica comprometida.

Uma situação similar a esta ocorre no caso da anomalia axial ou anomalia ABJ, onde apenas se verifica uma conservação parcial da corrente axial (PCAC). Da mesma forma, a ambigüidade advinda do processo de regularização da teoria é fixada apenas experimentalmente [40]-[45].

Por outro lado, para que a teoria aqui investigada seja consistente e represente uma extensão da QED tradicional, onde uma possível fenomenologia associada à violação da simetria de Lorentz e CPT é acomodada, faz-se necessário garantir a preservação da simetria de gauge. Como argumenta Bonneau, a manutenção das simetrias originais da teoria, sobretudo a simetria de gauge, deve ser usada como critério para a eliminação de construções pouco realistas e, inclusive, para a fixação de ambigüidades [37].

Neste sentido, impondo as seguintes condições subsidiárias

$$\sum_{i=0}^N c_i \frac{1}{m_i^2} = 0, \quad (4.57)$$

$$\sum_{i=0}^N c_i \ln \left(\frac{m_i^2}{m^2} \right) = 0, \quad (4.58)$$

a condição de transversalidade

$$p_\mu \Pi^{\mu\nu}(p, m, b)|_{p^2=0} = 0, \quad (4.59)$$

é recuperada [†]. No entanto, sob tais circunstâncias $\mu^2 = 0$.

Diante de tais considerações, somos levados a concluir que, de fato, duas teorias diferentes se apresentam. Uma, menos realista, onde o fóton é massivo e a simetria de gauge é violada. Na outra, devido a imposição de condições subsidiárias, o fóton tem massa nula e a invariância de gauge é assegurada.

4.4.3 A Renormalização da Carga

À luz da discussão realizada na seção precedente, analisaremos agora a renormalização da carga elétrica no caso fisicamente mais realista, i.e., aquele onde as condições subsidiárias são assumidas. Para isto, partimos da expressão (4.48) e efetuamos uma expansão na constante de acoplamento. Como resultado,

$$\left[\frac{-ie_0^2}{p^2 - e_0^2 \tilde{\Pi}(p^2)} \right]_{e_0^2 \rightarrow 0} = -ie_0^2 \left[\frac{1}{p^2} + e_0^2 \left(\frac{\tilde{\Pi}(p^2)}{p^4} \right) + \mathcal{O}(e^6) \right]. \quad (4.60)$$

Expandindo $\tilde{\Pi}(p^2)$ em torno de $p^2 = 0$, segue que

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}(p^2) |_{p^2 \rightarrow 0} &= \tilde{\Pi}(p^2) |_{p^2=0} + p^2 \left(\frac{\partial}{\partial p^2} \tilde{\Pi}(p^2) \right)_{p^2=0} + \frac{p^4}{2} \left(\frac{\partial^2}{(\partial p^2)^2} \tilde{\Pi}(p^2) \right)_{p^2=0} + \dots \\ &= p^2 \dot{\tilde{\Pi}}(0) + p^2 \Pi_c(0) \end{aligned} \quad (4.61)$$

onde utilizamos o fato de $\tilde{\Pi}(p^2 = 0) = 0$ e definimos[‡]

$$\Pi_c(0) = p^2 \left(\frac{\partial^2}{(\partial p^2)^2} \tilde{\Pi}(p^2) \right)_{p^2=0} + \mathcal{O}(p^6). \quad (4.62)$$

Desta forma,

$$\left[\frac{-ie_0^2}{p^2 - e_0^2 \tilde{\Pi}(p^2)} \right]_{e_0^2 \rightarrow 0} = \frac{-ie_0^2}{p^2} \left[1 + e_0^2 \dot{\tilde{\Pi}}(0) \right] - ie_0^4 \frac{\Pi_c(0)}{2p^2}. \quad (4.63)$$

[†]Note que o número de massas auxiliares N deve ser aumentado, afim de que o novo sistema de equações formado por (4.13)-(4.15) e (4.57)-(4.58) seja solúvel.

[‡]Na notação empregada as derivadas com relação a p^2 estão representadas por um ponto sobre a função de interesse.

de onde escrevemos a carga renormalizada como sendo

$$e^2 = e_0^2 Z_3^{-1} \quad (4.64)$$

com

$$Z_3^{-1} = \left[1 + e_0^2 \dot{\tilde{\Pi}}(0) \right]. \quad (4.65)$$

Portanto, na teoria estendida, a carga renormalizada recebe contribuições do termo de quebra e, no limite em que $b \rightarrow 0$, a QED usual é recuperada.

Capítulo 5

Considerações Finais

Os estudos que constituem a presente tese versam sobre o problema da violação da simetria de Lorentz (e CPT) na QED. Uma tal violação, ainda que diminuta, de um dos pilares da Teoria Quântica de Campos, vem se consolidando como uma linha de pesquisa, cujos desdobramentos teóricos e experimentais se refletem em diversos ramos da Física. No entanto, experimentos que visam encontrar evidências concretas a esse respeito não podem, até o presente, fornecer uma resposta definitiva, mas apenas apresentar limites (devido à resolução insuficiente e baixa estatística de eventos) para os parâmetros de quebra.

Esta carência de informações experimentais leva, no âmbito teórico, a uma série de conjecturas especulativas a respeito de como uma possível violação poderia ser acomodada em teorias fundamentais, tais como o Modelo Padrão. Como vimos, o estudo de teorias à temperatura finita mostra-se um cenário natural para se investigar este tipo de fenômeno.

No contexto da eletrodinâmica efetiva de E-K-H, onde foram consideradas tanto as teorias spinorial e escalar, constatamos que a introdução dos graus de liberdade térmicos através do formalismo TFD agravou o problema da perda de covariância dessas teorias. Esta discussão baseou-se na verificação de que os procedimentos adotados na seção 2.1 não eram mais eficazes na restituição da covariância da expressão para a densidade Lagrangiana de E-K-H.

No que se refere à manipulação das quantidades divergentes intrínsecas à teoria, apresentamos uma abordagem alternativa, que trata de maneira matematicamente consistente tais quantidades, elucidando de maneira simples e clara questões con-

troveras presentes na literatura [23]. Em particular, a antiga discussão sobre a dependência logarítmica da carga renormalizada com relação à temperatura foi esclarecida, abrindo caminho para a investigação futura de desdobramentos do tema [23] e [18]-[22].

No Capítulo 3, o método do tempo-próprio de Fock-Schwinger foi utilizado para calcularmos, de maneira não-perturbativa, o coeficiente do termo tipo Chern-Simons gerado dinamicamente a partir do setor fermiônico da QED estendida, na presença de um campo externo. Como vimos, o termo induzido padece de uma ambigüidade matemática na definição da quantidade (3.13), que é fruto do próprio formalismo empregado.

Com o intuito de analisar esta questão sob um outro prisma, tratamos, no Capítulo 4, o problema do deslocamento do pólo do propagador do “fóton” da QED estendida [57]. Para isso, partimos da teoria de perturbação usual e calculamos o tensor de polarização do vácuo em segunda ordem na constante de acoplamento. Cabe ressaltar que o parâmetro de quebra foi tratado em primeira ordem no que se refere à correção das linhas internas fermiônicas.

Neste estudo, utilizamos a prescrição de P-V-R para controlar os diferentes graus de divergência do tensor de polarização do vácuo, preservando a invariância de gauge da teoria. A série perturbativa para o propagador do “fóton” foi somada através da fórmula de Schwinger-Dyson, permitindo um exame mais detalhado de sua estrutura singular, i.e., de seus pólos. Desta análise, complementada pelo estudo da teoria de Maxwell-Chern-Simons desenvolvido na seção 4.3, concluímos que, devido à presença do tensor $\Pi_{bb}^{\mu\nu}$, a massa μ^2 dada por (4.54) é gerada perturbativamente [57]. No entanto, μ^2 é dependente do processo de subtração adotado. Em particular, pode-se encontrar um conjunto de massas e coeficientes de P-V-R de forma que as condições presentes na expressão (4.54) se anulam. Este tipo de ambigüidade já era esperada e ocorre em outros modelos que envolvem o termo do tipo Chern-Simons, como a QED₂₊₁ [46] e a Anomalia Axial ou ABJ [40]-[45].

Com a ajuda das expressões para $G^{\mu\nu}(p)$ e $\mathbb{G}^{\mu\nu}(p)$, verificamos também que há uma correlação entre os coeficientes b_μ e c_μ cujos valores são dependentes do *imput*

experimental, ou seja, como no caso da Anomalia Axial [40]-[45] não podemos *a priori*, sem a ajuda de dados experimentais, afirmar se há ou não indução de um termo do tipo Chern-Simons a partir do setor fermiônico. Neste sentido, o resultado encontrado está em concordância com o trabalho de Bonneau [37].

A discussão sobre o problema da invariância de gauge, Seção 4.4, trouxe luz à compreensão das duas teorias que então se apresentam como fruto da adição do termo $\bar{\psi} i \not{b} \gamma_5 \psi$ à Lagrangiana fermiônica da QED. Como vimos, para que a teoria seja consistente em relação a seus aspectos estruturais, como a invariância de gauge, fez-se necessário impor condições subsidiárias. Com efeito, a transversalidade do fóton foi reestabelecida e o problema da ambigüidade foi circunstancialmente eliminado. Este tipo de cautela se justifica pela presença de termos como, por exemplo,

$$-\frac{p^4 b^2}{2} \frac{i}{2\pi^2} \int_0^1 dz z (1-z)(z^2 - 2z^3 + z^4) \frac{1}{(m_i^2 - p^2 z(1-z))^2}, \quad (5.1)$$

em (4.22). Tais contribuições, caso venham a comparecer em análises como aquela feita na seção 4.4.1, para se investigar a indução de massa (onde o momento externo do fóton foi considerado na camada de massa, i.e., $p^2 = 0$), não seriam eliminadas. Ademais, apesar da presença do vetor b_μ ter resultado em conseqüências mínimas no caso mais plausível do ponto de vista físico, vale lembrar que a presença de um tal vetor deverá ter conseqüências mais marcantes na investigação de outras quantidades, como no caso da renormalização da carga. Porém, o aprofundamento de tais discussões foge ao escopo da presente tese, constituindo, de fato, objeto de investigação futura.

Encerramos o Capítulo 4 com o cálculo da renormalização da carga elétrica, a qual foi feita seguindo os procedimentos tradicionais da QED usual. Resta então um estudo mais completo da renormalização da QED estendida a 1-loop, o que significa calcular os diagramas de auto-interação do elétron e de correção de vértice, levando-se em conta, é claro, os devidos conjuntos de gráficos próprios. Contudo, esse estudo será apresentado num trabalho futuro [57].

Por fim, vale ressaltar que, dentre as perspectivas futuras ensejadas no presente trabalho, encontram-se ainda o estudo da restauração da simetria de Lorentz na teoria à temperatura finita, o estudo da quebra da simetria de Lorentz no contexto

do formalismo de Weisskopf, onde a expressão para a autoenergia do sistema se faz necessária, bem como uma análise completa* da renormalização da teoria em ordem b^2 . Com respeito a este último tópico, cujos cálculos feitos em colaboração com o Prof. Guy Bonneau estão em franco progresso, deveremos esperar mínimas implicações sobre os resultados das análises aqui apresentadas exceto pelo fato de a nova série perturbativa guardar correspondência mais estreita com os cálculos não-perturbativos [58].

*Incluindo a correção de linha fermiônica e de vértice.

Apêndice A

Estados Puros e Mistos em TFD

Neste Apêndice será apresentado um breve estudo sobre o estado de vácuo térmico da TFD. Para isso, seguiremos a abordagem dada em [15].

A.1 A Representação de Número

Quando trabalhamos com problemas envolvendo osciladores harmônicos quânticos introduzimos os operadores a e $a^\dagger$ os quais devem satisfazer

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (\text{A.1})$$

A partir de a e $a^\dagger$, construímos os operadores associados aos observáveis físicos, por exemplo, posição e momento

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger), \quad (\text{A.2})$$

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}i}(a - a^\dagger), \quad (\text{A.3})$$

os quais satisfazem as relações canônicas de comutação

$$[q, p] = i. \quad (\text{A.4})$$

Podemos também definir o operador número

$$N = a^\dagger a, \quad (\text{A.5})$$

cujos autovetores ortonormalizados serão aqui representados por $|n\rangle$, de forma que

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \quad \langle m|n\rangle = \delta_{nm}. \quad (\text{A.6})$$

Neste contexto, é possível mostrar que sendo $a^\dagger$ o hermitiano conjugado de a , o autovalor n é não negativo e $a|n\rangle\rangle$ e $a^\dagger|n\rangle\rangle$ são autovetores de N com autovalor $n-1$ e $n+1$, respectivamente. Com efeito, n , sendo não negativo, deve ter um valor mínimo. Representando por $|0\rangle\rangle$ o autoestado associado a tal autovalor, segue que

$$a|0\rangle\rangle = 0, \quad (\text{A.7})$$

o que implica em

$$N|0\rangle\rangle = 0. \quad (\text{A.8})$$

Isto mostra que o autovalor de N no estado $|0\rangle\rangle$ é zero, justificando assim nossa notação. Denominaremos esse estado como estado de vácuo. Assim, um estado qualquer $|n\rangle\rangle$ normalizado pode ser obtido atuando n vezes o operador $a^\dagger$ sobre o estado de vácuo,

$$|n\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle\rangle. \quad (\text{A.9})$$

Representaremos por $\mathcal{H}(a)$ o espaço vetorial formado por todas as superposições normalizáveis dos vetores de estado $\{|n\rangle\rangle\}$: $\mathcal{H}(a) = \{\sum c_n|n\rangle\rangle : \sum |c_n| < \infty\}$. Esse espaço é conhecido como espaço de Fock e o conjunto $\{|n\rangle\rangle\}$ representa uma base de $\mathcal{H}(a)$. Como n é não negativo, esta representação é também conhecida como representação de número.

Introduzindo a notação

$$\Delta A = A - \langle A \rangle \quad (\text{A.10})$$

onde $\langle A \rangle = \langle i|A|i \rangle$ e $|i\rangle$ representa um vetor de estado qualquer de $\mathcal{H}(a)$, obtemos o princípio de incerteza

$$\langle (\Delta p)^2 \rangle \langle (\Delta q)^2 \rangle \gg \frac{1}{4}. \quad (\text{A.11})$$

Note que estamos usando $\hbar = 1$.

A.2 Estados Coerentes

Na seção anterior introduzimos o estado de vácuo, $|0\rangle\rangle$, associado ao operador a . Entretanto, quando estamos interessados em tratar fenômenos que estão no âmbito da eletrodinâmica quântica (QED), nos deparamos com um sério problema a respeito

da escolha do estado de vácuo. A existência de vários tipos diferentes de estados de vácuo está ligada ao número infinito de graus de liberdade utilizados para descrever o campo de radiação. De fato, na QED, o campo de radiação é descrito por um ensemble de fótons, embora existam fenômenos onde encontramos não somente estados de fótons mas também uma grande variedade de formas macroscópicas de radiação clássica.

Para tratarmos situações como esta, poderíamos intuitivamente supor que os estados macroscópicos são formados através da condensação de muitos fótons. Isso sugere que tais estados não devem ser autoestados do operador N , mas sim estados cujo número de partículas tenha grande incerteza. Um exemplo onde isso ocorre é encontrado na teoria do laser, onde os pacotes de onda, por terem uma fase bem definida, apresentam grande incerteza no número de partículas (pois $\Delta\phi\Delta n \geq 1/2$). Em tais situações, faz-se necessário o uso de um outro estado de vácuo, onde muitos fótons são condensados, correspondendo a estados coerentes.

Veremos agora como representar um estado associado a uma radiação macroscópica a qual contém um grande número de fótons, obtidos através de um mecanismo de condensação. Denotaremos este estado por $|0\rangle$. Obviamente, este não é o estado $|0\rangle\rangle$ do operador a , pois $a|0\rangle$ não é zero. Entretanto, podemos introduzir um novo operador, α , o qual satisfaz $\alpha|0\rangle = 0$ e $[\alpha, \alpha^\dagger] = 1$. Assim, se encontrarmos tal operador, o estado $|0\rangle$ será seu estado de vácuo.

Para encontrarmos um operador com essas características, façamos uma translação no operador a ,

$$a \rightarrow \alpha(\theta) = a + \theta, \quad (\text{A.12})$$

onde θ é um c-número. Esta transformação é chamada de translação bosônica ou transformação de Bogoliubov para os estados coerentes. O estado de vácuo associado ao operador $\alpha(\theta)$ será denotado por $|0(\theta)\rangle$

$$\alpha(\theta)|0(\theta)\rangle = 0. \quad (\text{A.13})$$

De (A.12), teremos

$$a|0(\theta)\rangle = -\theta|0(\theta)\rangle. \quad (\text{A.14})$$

O estado $|0(\theta)\rangle$ é chamado de estado coerente de a com autovalor $-\theta$ [53].

Usando uma notação mais compacta, temos

$$\alpha(\theta) = U_c(\theta)aU_c^{-1}(\theta) \quad (\text{A.15})$$

onde

$$U_c(\theta) = \exp[iG_c(\theta)] \quad (\text{A.16})$$

e o gerador $G_c(\theta)$ é dado por

$$G_c(\theta) = -i(\theta^*a - \theta a^\dagger). \quad (\text{A.17})$$

Aplicando esta transformação ao estado $|0\rangle$, obtemos

$$|0(\theta)\rangle = U_c(\theta)|0\rangle. \quad (\text{A.18})$$

Expandindo $U_c(\theta)$ chegamos a

$$U_c(\theta) = \exp\left(-\frac{1}{2}|\theta|^2\right) \exp(-\theta a^\dagger) \exp(\theta a). \quad (\text{A.19})$$

Com isso, (A.18) torna-se

$$|0(\theta)\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\theta|^2\right) \exp(-\theta a^\dagger)|0\rangle. \quad (\text{A.20})$$

Este resultado indica que o estado de vácuo $|0(\theta)\rangle$ é dado por uma superposição de estados contendo um grande número de quanta a , ilustrando assim, como se dá *condensação* de partículas a .

Da mesma maneira que construímos o espaço de Fock, $\mathcal{H}(a)$, podemos construir o espaço $\mathcal{H}(\theta)$ atuando o operador α sobre o estado $|0(\theta)\rangle$. Devemos notar que $\mathcal{H}(a)$ é equivalente a $\mathcal{H}(\theta)$ no sentido de que qualquer vetor de $\mathcal{H}(a)$ é dado por uma superposição de vetores de $\mathcal{H}(\theta)$ e vice versa. De fato, obtemos uma parametrização do espaço $\mathcal{H}(\theta)$ onde, para dois valores diferentes quaisquer de θ , dois novos espaços, equivalentes entre si, são gerados.

Neste contexto, devemos enfatizar que para os estados coerentes a relação de incerteza, (A.11), fica

$$\langle(\Delta p)^2\rangle\langle(\Delta q)^2\rangle = \frac{1}{4}. \quad (\text{A.21})$$

A.3 Estados Squeezed

No caso em que a incerteza

$$\langle (\Delta p)^2 \rangle \leq \frac{1}{2} \quad (\text{A.22})$$

ou

$$\langle (\Delta q)^2 \rangle \leq \frac{1}{2}, \quad (\text{A.23})$$

dizemos que a onda que corresponde a um dado estado é uma onda comprimida ou “squeezed”. Nesta seção estudaremos a estrutura de vácuo para os estados squeezed de dois modos. Para isso devemos considerar dois conjuntos de operadores, a e $\tilde{a}$, satisfazendo

$$[a, a^\dagger] = [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1 \quad (\text{A.24})$$

$$[a, \tilde{a}] = [a, \tilde{a}^\dagger] = 0. \quad (\text{A.25})$$

Introduzindo o gerador

$$G_c(\theta) = i[a\tilde{a} - \tilde{a}^\dagger a^\dagger], \quad (\text{A.26})$$

e definindo $U_B(\theta) = \exp[i\theta G_B]$, chegamos à transformação

$$\alpha(\theta) = U_B(\theta)aU_B^{-1}(\theta), \quad (\text{A.27})$$

$$\tilde{\alpha}(\theta) = U_B(\theta)\tilde{a}U_B^{-1}(\theta), \quad (\text{A.28})$$

onde θ é um parametro real. Expandindo $U_B(\theta)$, encontramos

$$\alpha(\theta) = ca - d\tilde{a}^\dagger, \quad (\text{A.29})$$

$$\tilde{\alpha}(\theta) = c\tilde{a} - da^\dagger, \quad (\text{A.30})$$

onde c e d são c-números dados por $c = \cosh \theta$ e $d = \sinh \theta$, respectivamente. Esta transformação é chamada de transformação de Bogoliubov para os estados squeezed de dois modos [54]. Note que

$$c^2 - d^2 = 1. \quad (\text{A.31})$$

Utilizando uma notação matricial para (A.29) e (A.30), obtemos

$$\begin{bmatrix} a \\ \tilde{a}^\dagger \end{bmatrix}^\mu = B^{-1}(\theta)^{\mu\nu} \begin{bmatrix} \alpha(\theta) \\ \tilde{\alpha}^\dagger(\theta) \end{bmatrix}^\nu \quad (\text{A.32})$$

e

$$[a^\dagger, -\tilde{a}]^\mu = [\alpha^\dagger(\theta), -\tilde{\alpha}(\theta)]^\nu B(\theta)^{\nu\mu} \quad (\text{A.33})$$

onde

$$B(\theta) = \begin{bmatrix} c & -d \\ -d & c \end{bmatrix}. \quad (\text{A.34})$$

Podemos mostrar facilmente que

$$B^{-1}(\theta) = \tau_3 B(\theta) \tau_3, \quad (\text{A.35})$$

onde fazemos uso da matriz de Pauli τ_3 ,

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.36})$$

Torna-se conveniente adotarmos a seguinte notação de dubleto,

$$a^\mu : a^1 = a, \quad a^2 = \tilde{a}^\dagger, \quad (\text{A.37})$$

$$\bar{a}^\mu : \bar{a}^1 = a^\dagger, \quad \bar{a}^2 = -\tilde{a}, \quad (\text{A.38})$$

$$\alpha(\theta)^\mu : \alpha(\theta)^1 = \alpha(\theta), \quad \alpha(\theta)^2 = \tilde{\alpha}^\dagger(\theta), \quad (\text{A.39})$$

$$\bar{\alpha}(\theta)^\mu : \bar{\alpha}(\theta)^1 = \alpha^\dagger(\theta), \quad \bar{\alpha}(\theta)^2 = -\tilde{\alpha}, \quad (\text{A.40})$$

pois, dessa forma, as transformações (A.32) e (A.33) tornam-se

$$a^\mu = B^{-1}(\theta)^{\mu\nu} \alpha(\theta)^\nu, \quad (\text{A.41})$$

$$\bar{a}^\mu = \bar{\alpha}(\theta)^\nu B(\theta)^{\nu\mu}. \quad (\text{A.42})$$

Denotaremos o vácuo de $(a, \tilde{a})$ por $|0\rangle\rangle$, e o de $(\alpha(\theta), \tilde{\alpha}(\theta))$ por $|0(\theta)\rangle\rangle$. Como em (A.18),

$$|0(\theta)\rangle\rangle = U_B(\theta)|0\rangle\rangle \quad (\text{A.43})$$

ou também

$$|0(\theta)\rangle\rangle = \exp[-\ln \cosh \theta] \exp[-a^\dagger \tilde{a}^\dagger \tanh \theta] |0\rangle\rangle. \quad (\text{A.44})$$

A relação acima indica que em $|0(\theta)\rangle\rangle$ o par $(a, \tilde{a})$ é condensado. O estado $|0(\theta)\rangle\rangle$ é chamado de estado squeezed de dois modos do par $(a, \tilde{a})$. Podemos construir o

espaço de Fock de $(a, \tilde{a})$ (denotado por $\mathcal{H}(a\tilde{a})$) atuando potências de $a^\dagger$ e $\tilde{a}^\dagger$ sobre $|0\rangle$, enquanto que o espaço de Fock $\mathcal{H}(\theta)$ é construído atuando $\alpha^\dagger(\theta)$ e $\tilde{\alpha}^\dagger(\theta)$ sobre $|0(\theta)\rangle$. Como o vácuo $|0(\theta)\rangle$ é um estado que contém a condensação do par $(a, \tilde{a})$, pode-se verificar que $|0(\theta)\rangle$ é invariante sob a troca de a por $\tilde{a}$ e vice-versa. Esta troca é chamada, em TFD, de regra de conjugação de “tilde” [55].

Introduzindo os parâmetros número $n \equiv \langle 0(\theta) | a^\dagger a | 0(\theta) \rangle$ e $\tilde{n} \equiv \langle 0(\theta) | \tilde{a}^\dagger \tilde{a} | 0(\theta) \rangle$, vemos que $n = \tilde{n} = d^2$. Logo, a matriz B depende do parâmetro número.

A.4 Estados Mistos em TFD

Pode ser mostrado que as transformações de Bogoliubov, (A.29) e (A.30), geram ruído em estados puros, em particular nos estados squeezed de dois modos. Isto nos deveria surpreender, pois usualmente esperaríamos o aparecimento de ruído somente em um estado misto (ou de mistura). Nesta seção mostraremos como este ruído, criado pela transformação de Bogoliubov, pode ser expresso em termos de uma média estatística num estado misto. Com isso, completamos nosso objetivo que é mostrar, de fato, que a transformação bosônica de Bogoliubov gera um ruído térmico.

Com efeito, consideremos dois conjuntos de operadores a e $\tilde{a}$, satisfazendo (A.24) e (A.25). Denotaremos os autovalores de $a^\dagger a$ e $\tilde{a}^\dagger \tilde{a}$ por m e $\tilde{m}$ respectivamente. Escolhendo o autovetor $|m, \tilde{m}\rangle$ como uma base no espaço de Hilbert dos dois osciladores, segue que um estado puro nesse espaço dobrado é dado por

$$|0\rangle = c_1 \sum_{m=0}^{\infty} \rho^m |m, \tilde{m}\rangle, \quad (\text{A.45})$$

$$\langle 0| = c_2 \sum_{m=0}^{\infty} \langle m, \tilde{m}| \rho^{1-m}, \quad (\text{A.46})$$

onde α é uma constante real, e c_1 e c_2 são constantes de normalização tais que

$$\langle 0|0\rangle = 1. \quad (\text{A.47})$$

O operador ρ é o operador densidade, definido aqui por

$$\rho = f^{a^\dagger a}, \quad (\text{A.48})$$

onde f é um c-número. Com isso, a condição de normalização (A.47) nos diz que

$$c_1 c_2 = 1 - f. \quad (\text{A.49})$$

Portanto, para um operador qualquer, digamos A , consistindo de a 's e $a^\dagger$'s, segue que

$$\begin{aligned} \langle 0|A(a, a^\dagger)|0\rangle &= c_1 c_2 \sum_{m=0}^{\infty} f^m \langle m|A(a, a^\dagger)|m\rangle \\ &= \frac{\text{Tr}[\rho A(a, a^\dagger)]}{\text{Tr} \rho}, \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

onde usamos $\langle m, \tilde{l}|A(a, a^\dagger)|m', \tilde{l}'\rangle = \delta_{ll'} \langle m|A(a, a^\dagger)|m'\rangle$. O lado direito de (A.50) é média estatística de A com relação ao operador densidade ρ .

A relação

$$\begin{aligned} n &= \langle 0|a^\dagger a|0\rangle \\ &= c_1 c_2 \sum_{m=0}^{\infty} m f^m \\ &= \frac{f}{1-f} \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

nos permite relacionar f com o parâmetro número de partícula n . Neste sentido, encontramos uma igualdade entre o valor esperado no vácuo (um valor esperado num estado puro de um espaço dobrado) e a média estatística (valor esperado num estado misto) [14].

De acordo com (A.45) o vácuo $|0\rangle$ é uma superposição de pares de estado $|m, \tilde{m}\rangle$, com $m = m'$. Mais ainda, quando escolhemos $\alpha = 1/2$ e $c_1 = c_2^*$, $\langle 0|$ torna-se o hermitiano conjugado de $|0\rangle$. Assim, o estado de vácuo em (A.45) está relacionado ao vácuo de $(a, \tilde{a})$, que é $|0, \tilde{0}\rangle$, através de uma transformação de Bogoliubov térmica onde n é dado por (A.51). Isto mostra que o estado puro com ruído considerado nesta seção é obtido através de uma transformação de Bogoliubov térmica.

A expressão (A.51) mostra que o valor esperado no vácuo com $f = \exp[-\beta\omega]$ é idêntico à média térmica à temperatura $T = 1/\beta$. Note que estamos considerando unidades onde K , a constante de Boltzmann, é igual à unidade.

Os cálculos acima se referem à osciladores bosônicos definidos por (A.24) e (A.25). No entanto, um procedimento similar pode ser efetuado no caso fermiônico. De fato, considerando dois osciladores fermiônicos definidos através das relações

$$[a, a^\dagger]_+ = [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger]_+ = 1 \quad (\text{A.52})$$

e

$$[a, \tilde{a}]_+ = [a^\dagger, \tilde{a}^\dagger]_+ = 0, \quad (\text{A.53})$$

pode-se mostrar que a equivalência entre os valores esperados no vácuo e as médias térmicas continua válida. Em particular, através de uma transformação de Bogoliubov, o estado de vácuo para o condensado fermiônico $(a, \tilde{a})$ torna-se

$$|0(\theta)\rangle = e^{[\ln \cosh \theta]} e^{\ln[1+a^\dagger \tilde{a}^\dagger \tanh \theta]} |0\rangle. \quad (\text{A.54})$$

Neste caso,

$$n = \frac{f}{1+f}, \quad (\text{A.55})$$

sendo f definida como no caso bosônico.

Apêndice B

A Lagrangiana de E-K-H via o Método de Fock-Schwinger

Um método alternativo para se derivar a Lagrangiana de Euler-Kockel-Heisenberg (E-K-H) [7] foi proposto por J. Schwinger em 1951 [11]. Utilizando o método das características introduzido em 1937 por V. Fock [12] e insistindo em manter explícita a invariância de calibre da teoria, Schwinger investigou os efeitos da polarização do vácuo na QED em duas situações: para campos constantes e para ondas planas. De uma maneira geral, o método de Fock-Schwinger parte do cálculo da função de Green associada à corrente de polarização do vácuo para obter a modificação da ação original. Para melhor compreender o alcance e a utilidade deste método no caso em que se considera um termo de quebra das simetrias de Lorentz e CPT no setor fermiônico da QED, faremos a seguir um estudo do artigo original de Schwinger [11].

B.1 O Método de Fock-Schwinger

As equações de campo, relações de comutação e o quadrivetor corrente de um campo de Dirac na presença de um dado potencial eletromagnético A_μ são dados pelas equações *

$$\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu(x))\psi(x) - m\psi(x) = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$(-i\partial_\mu - eA_\mu(x))\bar{\psi}(x)\gamma^\mu - m\bar{\psi}(x) = 0, \quad (\text{B.2})$$

*Estaremos considerando unidades onde $\hbar = 1$ e $c = 1$.

$$\{\psi(\mathbf{x}, x_0), \bar{\psi}(\mathbf{x}', x_0)\} = \gamma^0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (\text{B.3})$$

$$j_\mu(x) = \frac{1}{2} e [\bar{\psi}(x), \gamma^\mu \psi(x)], \quad (\text{B.4})$$

onde

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}. \quad (\text{B.5})$$

O operador corrente (B.4), ou seja,

$$j_\mu(x) = -\frac{1}{2} e (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} [\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x)], \quad (\text{B.6})$$

pode ser também simetrizado temporalmente através da introdução do operador de ordenamento cronológico. Para isso, introduzimos a notação

$$(A(x_0)B(x'_0))_+ = \begin{cases} (A(x_0)B(x'_0)) & \text{se } x_0 > x'_0 \\ (B(x'_0)A(x_0)) & \text{se } x_0 < x'_0, \end{cases}$$

e

$$\varepsilon(x - x') = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 > x'_0 \\ -1 & \text{se } x_0 < x'_0, \end{cases}$$

de forma que

$$\begin{aligned} (\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x'))_+ \varepsilon(x - x') &\equiv T(\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x')) \\ &= \begin{cases} (\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x')) & \text{se } x_0 > x'_0 \\ -(\bar{\psi}_\beta(x') \psi_\alpha(x)) & \text{se } x_0 < x'_0, \end{cases} \end{aligned}$$

onde definimos o operador de ordenamento temporal $T^\dagger$. Assim,

$$\frac{1}{2} [\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x)] = (\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x'))_+ \varepsilon(x - x')|_{x' \rightarrow x}, \quad (\text{B.7})$$

o que nos permite escrever o valor esperado (num dado estado) dessa quantidade desde que x' se aproxime de x pelo futuro e pelo passado. Agora, aplicando esse

[†] Através da “função” degrau

$$\theta(x_0 - x'_0) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 > x'_0 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$T(\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x')) = \theta(x_0 - x'_0) \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x') - \theta(x'_0 - x_0) \bar{\psi}_\beta(x') \psi_\alpha(x).$$

resultado à quantidade que realmente nos interessa, obtemos o valor esperado do operador $j_\mu(x)$ no vácuo do campo de Dirac,

$$\langle 0 | j_\mu(x) | 0 \rangle = -ie \operatorname{tr} \gamma_\mu G(x, x')|_{x' \rightarrow x}, \quad (\text{B.8})$$

onde

$$G(x, x') \equiv -i \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(x') | 0 \rangle = -i \langle T \psi(x) \bar{\psi}(x') \rangle \quad (\text{B.9})$$

e “tr” indica o traço em relação aos índices spinoriais.

A função $G(x, x')$ satisfaz uma equação diferencial não homogênea, a qual é obtida notando que

$$\begin{aligned} & [\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu(x)) - m] G(x, x') = \\ &= - i[\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu(x)) - m] \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(x') | 0 \rangle \\ &= - i[\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu(x)) - m] \langle \theta(x^0 - x'^0) \psi(x) \bar{\psi}(x') - \theta(x'^0 - x^0) \bar{\psi}(x') \psi(x) \rangle \\ &= - i(i\gamma^0) \delta(x^0 - x'^0) \langle 0 | \{ \psi(x), \bar{\psi}(x') \} | 0 \rangle \\ &= \delta^4(x - x'). \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

De (B.9), vemos que $G(x, x')$ é a função de Green para o campo de Dirac. Por conveniência, trataremos $G(x, x')$ como elementos de matriz do operador G , cujos estados são denotados pelas coordenadas espaço-temporais e os índices spinoriais são omitidos,

$$G(x, x') = (x | G | x').$$

Desta forma, a equação diferencial (B.10) passa a ser considerada como um elemento de matriz da equação operatorial

$$(\gamma \Pi - m) G = 1, \quad (\text{B.11})$$

onde

$$\Pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$$

é caracterizado pelas seguintes propriedades operatoriais

$$[x_\mu, \Pi_\nu] = i\delta_{\mu\nu}, \quad [\Pi_\mu, \Pi_\nu] = ieF_{\mu\nu} \quad (\text{B.12})$$

e $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor intensidade de campo. Nessa notação, é fácil mostrar que o quadrivetor de corrente do vácuo,

$$\langle j_\mu(x) \rangle = -i \text{ e } \text{tr} \gamma_\mu(x|G|x), \quad (\text{B.13})$$

pode ser obtido a partir de uma ação integral através da variação com relação a $A_\mu(x)$. Para melhor visualizarmos, escrevemos

$$\delta S^{(1)} = \int (dx) \delta A_\mu(x) \langle j^\mu(x) \rangle = i \text{ e } \text{Tr}[\gamma(\delta A)G] \quad (\text{B.14})$$

como uma diferencial total, onde $\delta A_\mu(x)$ vai a zero no infinito. Em (B.14), δA_μ denota o operador com elementos de matriz

$$(x|\delta A_\mu|x') = \delta(x - x') \delta A_\mu(x)$$

e “Tr” indica a soma diagonal sobre as coordenadas do espaço-tempo bem como sobre os índices spinoriais.

Para mostrarmos que $\text{Tr}[\gamma(\delta A)G]$ é, de fato, a variação total de uma ação, tomemos

$$G = \frac{1}{\gamma\Pi - m} = i \int_0^\infty ds \text{ e}^{-i(\gamma\Pi - m)s} \quad (\text{B.15})$$

e

$$-e \gamma \delta A = \delta(\gamma\Pi - m), \quad (\text{B.16})$$

de forma que, usando a propriedade $\text{Tr}AB = \text{Tr}BA$,

$$\begin{aligned} i \text{ e } \gamma (\delta A) G &= -i \delta(\gamma\Pi - m)G = \int_0^\infty ds \delta(\gamma\Pi - m) \text{ e}^{-i(\gamma\Pi - m)s} \\ &= \delta \left\{ i \int_0^\infty ds s^{-1} \text{ e}^{-i(\gamma\Pi - m)s} \right\}, \end{aligned}$$

ou ainda[‡],

$$i \text{ e } \text{Tr}[\gamma(\delta A)G] = \delta \left\{ i \int_0^\infty ds s^{-1} \text{Tr} \text{ e}^{-i(\gamma\Pi - m)s} \right\}.$$

Portanto, a menos de uma constante aditiva,

$$\begin{aligned} S^{(1)} &= i \int_0^\infty ds s^{-1} \text{ e}^{ims} \text{Tr} \text{ e}^{-i\gamma\Pi s} \\ &= \int (dx) \mathcal{L}^{(1)}(x), \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

[‡]Fazendo uso do fato de que $\text{Tr}(\delta A) = \delta \text{Tr}A$.

onde a densidade lagrangiana $\mathcal{L}^{(1)}(x)$ é dada por

$$\mathcal{L}^{(1)}(x) = i \int_0^\infty ds s^{-1} e^{ims} \text{tr} (x|e^{-i\gamma\Pi s}|x). \quad (\text{B.18})$$

A lagrangiana obtida acima é tal que valor esperado da corrente do vácuo é dado por

$$\langle j_\mu \rangle = \frac{\delta S^{(1)}}{\delta A_\mu(x)}. \quad (\text{B.19})$$

Este termo de ação deve ser somado à ação de Maxwell para que a descrição do campo eletromagnético no vácuo seja completa.

Uma representação mais conveniente de (B.19) pode ser obtida notando que

$$\begin{aligned} G &= (-\gamma\Pi - m) \frac{1}{m^2 - \mathbb{M}^2} = \frac{1}{m^2 - \mathbb{M}^2} (-\gamma\Pi - m) \\ &= i \int_0^\infty ds e^{-i(\mathbb{M}^2 - m^2)s} (\gamma\Pi + m). \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Utilizando o fato de que o traço de um número ímpar de matrizes γ é zero, podemos, com a ajuda de (B.16), escrever

$$\begin{aligned} i e \text{Tr}[\gamma(\delta A)G] &= \text{Tr} \delta(\gamma\Pi - m) \int_0^\infty ds e^{-i(\mathbb{M}^2 - m^2)s} (\gamma\Pi + m) \\ &= \text{Tr} \delta(\gamma\Pi) (\gamma\Pi) \int_0^\infty ds e^{-i(\mathbb{M}^2 - m^2)s} \\ &= \delta \left\{ \frac{1}{2} i \int_0^\infty ds s^{-1} e^{-i(\mathbb{M}^2 - m^2)s} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

e, conseqüentemente,

$$\mathcal{L}^{(1)}(x) = \frac{1}{2} i \int_0^\infty ds s^{-1} e^{im^2 s} \text{tr} (x|U(s)|x), \quad (\text{B.22})$$

onde

$$U(s) = e^{-i\mathcal{H}s}, \quad (\text{B.23})$$

$\mathcal{H}$ é o operador dado por

$$\mathcal{H} = (\mathbb{M})^2 = (\gamma\Pi)(\gamma\Pi) = \Pi^2 - \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (\text{B.24})$$

e

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (\text{B.25})$$

Como vemos, a construção de $G(x, x')$ e $\mathcal{L}^{(1)}(x)$ se dá a partir do cálculo de

$$(x'|U(s)|x'') = (x'|e^{-i\mathcal{H}s}|x'') = (x(s)'|x(0)''). \quad (\text{B.26})$$

Na presente notação, somos levados a interpretar $U(s)$ como sendo um operador que descreve a evolução de um sistema governado pela “hamiltoniana” $\mathcal{H}$. Num dado “tempo” s , o elemento de matriz de $U(s)$ pode ser visto como a amplitude de transição que leva o sistema de um estado onde $x_\mu(s=0)$ tem o valor x'' a um estado em que $x_\mu(s)$ tem o valor x' . De fato, deparamo-nos com um problema dinâmico, onde as coordenadas espaço-temporais da “partícula ” dependem do tempo próprio “ s ” segundo as seguintes equações de movimento:

$$\frac{dx^\mu}{ds} = -i[x^\mu, \mathcal{H}] = -2\Pi^\mu, \quad (\text{B.27})$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi^\mu}{ds} &= -i[\Pi^\mu, \Pi^2 - \frac{e}{2}\sigma^{\lambda\omega}F_{\lambda\omega}] \\ &= -2eF^{\mu\lambda}\Pi_\lambda - \frac{e}{2}\sigma^{\lambda\omega}\partial^\mu F_{\lambda\omega} - ie\partial_\lambda F^{\mu\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

A amplitude de transição é caracterizada pelas equações diferenciais [§]

$$i\partial_s(x(s)'|x(0)'') = (x(s)'|\mathcal{H}|x(0)''), \quad (\text{B.29})$$

$$(i\partial'_\mu - eA_\mu(x'))(x(s)'|x(0)'') = (x(s)'|\Pi_\mu(s)|x(0)''), \quad (\text{B.30})$$

$$(-i\partial''_\mu - eA_\mu(x''))(x(s)'|x(0)'') = (x(s)'|\Pi_\mu(0)|x(0)'') \quad (\text{B.31})$$

e pela condição de contorno

$$(x(s)'|x(0)'')|_{s \rightarrow 0} = \delta(x' - x''). \quad (\text{B.32})$$

[§]O problema de uma equação de onda com tempo próprio, em conjunção com o operador de Dirac de segunda ordem, foi discutido por V. Fock em 1937 [12].

B.2 O Caso do Campo Eletromagnético Constante

Quando consideramos um campo eletromagnético constante [¶], as equações de movimento (B.27) e (B.28) tornam-se

$$\frac{dx^\mu}{ds} = -2\Pi^\mu, \quad (\text{B.33})$$

$$\frac{d\Pi^\mu}{ds} = -2e F^{\mu\lambda}\Pi_\lambda, \quad (\text{B.34})$$

ou, em notação matricial,

$$\frac{dx}{ds} = -2\Pi, \quad (\text{B.35})$$

$$\frac{d\Pi}{ds} = -2e F\Pi. \quad (\text{B.36})$$

A solução simbólica dessas equações é

$$\Pi(s) = e^{-2eFs}\Pi(0), \quad x(s) - x(0) = \left(\frac{e^{-2eFs} - 1}{eF} \right), \quad (\text{B.37})$$

de forma que,

$$\begin{aligned} \Pi(0) &= eF \frac{1}{e^{-2eFs} - 1} (x(s) - x(0)) \\ &= -\frac{1}{2}eFe^{eFs} \sinh^{-1}(eFs)(x(s) - x(0)), \end{aligned}$$

e

$$\Pi(s) = -\frac{1}{2}eFe^{-eFs} \sinh^{-1}(eFs)(x(s) - x(0)).$$

Fazendo uso da propriedade de transposição $\tilde{F} = -F$, temos

$$\begin{aligned} \Pi(s) &= -\frac{1}{2}e(x(s) - x(0)) \sinh^{-1}(e\tilde{F}s)e^{-e\tilde{F}s}\tilde{F} \\ &= -\frac{1}{2}(x(s) - x(0))eFe^{eFs} \sinh^{-1}(eFs). \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

[¶]De fato, estamos consideramos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ que variam tão lentamente no espaço-tempo, i.e.,

$$\omega \ll m \quad |k| \ll m,$$

que podem ser considerados como constantes [9], [10]. Acima, m é a massa de repouso da partícula de Dirac.

De posse do operador $\Pi(s)$, podemos agora partir para a obtenção do operador hamiltoniano

$$\mathcal{H} + \frac{1}{2}e\sigma F = \Pi^2 = (x(s) - x(0))K(x(s) - x(0)), \quad (\text{B.39})$$

onde

$$K = \frac{e^2}{4}F^2 \sinh^{-2}(eFs).$$

Para escrevermos os operadores em (B.39) num ordenamento consistente, faz-se necessário calcular o seguinte comutador

$$\begin{aligned} [x(s), x(0)] &= [x(0) + \frac{e^{-2eFs} - 1}{eF}\Pi(0), x(0)] \\ &= \frac{e^{-2eFs} - 1}{eF}[\Pi(0), x(0)] = i\frac{e^{-2eFs} - 1}{eF}. \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} + \frac{1}{2}e\sigma F &= x(s)Kx(s) - x(0)Kx(s) - x(s)Kx(0) + x(0)Kx(0) = \\ &= x(s)Kx(s) - 2x(s)Kx(0) + x(0)Kx(0) - x(0)Kx(s) + x(s)Kx(0). \end{aligned}$$

Manipulando os dois últimos termos da expressão anterior, obtemos

$$\begin{aligned} x_\mu(s)K^{\mu\nu}x_\nu(0) - x_\mu(0)K^{\mu\nu}x_\nu(s) &= \\ &= x_\mu(s)(Kx(0))^\mu - x_\mu(Kx(s))^\mu \\ &= \text{tr}(x(s)Kx(0) - x(0)Kx(s)) \\ &= \text{tr}\{-[x(0), x(s)]K\} = \frac{i}{4}\text{tr}\{eF(e^{-2eFs} - 1)\sinh^{-2}(eFs)\} \\ &= -\frac{i}{2}\text{tr}\{eF(e^{-eFs} - 1)\sinh^{-1}(eFs)\}, \end{aligned}$$

e, uma vez que $\text{tr}F = 0$,

$$\begin{aligned} x(s)Kx(0) - x(0)Kx(s) &= -\frac{i}{2}\text{tr}\{eF(e^{-eFs} - 1)\sinh^{-1}(eFs)\} \\ &= -\frac{i}{2}\text{tr}\{eF \coth(eFs)\}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{H} + \frac{1}{2}e\sigma F = x(s)Kx(s) - 2x(s)Kx(0) + x(0)Kx(0) - \frac{i}{2}\text{tr}\{eF \coth(eFs)\}. \quad (\text{B.41})$$

Substituindo (B.41) em (B.29), obtemos

$$\begin{aligned}
 i\partial_s(x(s)'|x(0)'') &= (x(s)'|\mathcal{H}|x(0)'') \\
 &= (x(s)'| - \frac{1}{2}e\sigma F - \frac{i}{2}\text{tr}\{eF \coth(eFs)\} \\
 &+ x(s)Kx(s) - 2x(s)Kx(0) + x(0)Kx(0)|x(0)'') \\
 &= [-\frac{1}{2}e\sigma F - \frac{i}{2}\text{tr}\{eF \coth(eFs)\}(x' - x'')K(x' - x'')](x(s)'|x(0)''),
 \end{aligned} \tag{B.42}$$

cujas solução é

$$\begin{aligned}
 (x(s)'|x(0)'') &= C(x', x'') e^{L(s)} s^{-2} \\
 &\times \exp \left[\frac{i}{4}(x' - x'')eF \coth(eFs)(x' - x'') \right] e^{\frac{i}{2}e\sigma Fs}, \tag{B.43}
 \end{aligned}$$

onde

$$L(s) = \frac{1}{2}\text{tr} \ln \frac{\sinh(eFs)}{eFs}. \tag{B.44}$$

Para determinarmos $C(x', x'')$, utilizamos as equações diferenciais

$$\begin{aligned}
 (x(s)'|\Pi(s)|x(0)'') &= -\frac{1}{2}(x' - x'')eFe^{eFs}\sinh^{-1}(eFs)(x(s)'|x(0)'') \\
 &= -\frac{1}{2}(x' - x'')[eF \coth(eFs) + eF](x(s)'|x(0)''),
 \end{aligned} \tag{B.45}$$

e

$$(x(s)'|\Pi(0)|x(0)'') = -\frac{1}{2}(x' - x'')[eF \coth(eFs) - eF](x(s)'|x(0)''), \tag{B.46}$$

junto com a expressão (B.43), para obtermos as equações diferenciais

$$[i\partial'_\mu - eA_\mu(x') - \frac{1}{2}eF_{\mu\nu}(x' - x'')^\nu]C(x', x'') = 0, \tag{B.47}$$

$$[-i\partial''_\mu - eA_\mu(x'') - \frac{1}{2}eF_{\mu\nu}(x' - x'')^\nu]C(x', x'') = 0. \tag{B.48}$$

A solução de (B.47) tem a forma

$$C(x', x'') = C \exp \left\{ -ie \int_{x''}^{x'} dx [A(x) + \frac{1}{2}F(x - x'')] \right\}, \tag{B.49}$$

onde a integração independe do caminho de integração devido ao rotacional de $A(x) + \frac{1}{2}F(x - x'')$ ser nulo. No entanto, se restringirmos o caminho de integração a uma reta conectando x' e x'' podemos, em virtude da antissimetria de F , simplesmente escrever

$$C(x', x'') = C\Phi(x', x''),$$

onde

$$\Phi(x', x'') = e^{-ie \int_{x''}^{x'} dx^\mu A_\mu(x)}$$

e C é uma constante cujo valor é

$$C = -\frac{i}{(4\pi)^2}, \quad (\text{B.50})$$

devido ao fato de o limite de $(x(s)'|x(0)'')$ quando $s \rightarrow 0$ independe do campo externo.

Por fim,

$$\begin{aligned} (x(s)'|x(0)'') &= -\frac{i}{(4\pi)^2} \Phi(x', x'') e^{L(s)} s^{-2} \times \\ &\exp \left[\frac{i}{4} (x' - x'') e F \coth(eFs) (x' - x'') \right] e^{\frac{i}{2} e \sigma F s}. \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

Agora, com a ajuda da expressão (B.20), a função de Green $G(x', x'')$ pode ser obtida de duas maneiras equivalentes, escrevendo

$$\begin{aligned} (x'|G|x'') &= i \int_0^\infty ds (x'|(\gamma\Pi + m)e^{-i\mathcal{H}s}|x'') e^{im^2s} \\ &= i \int_0^\infty ds (x'|e^{-i\mathcal{H}s} e^{i\mathcal{H}s} (\gamma\Pi + m) e^{-i\mathcal{H}s}|x'') e^{im^2s}, \end{aligned}$$

de modo que

$$G(x', x'') = i \int_0^\infty ds [(x(s)'|(\gamma^\mu \Pi_\mu(s))x(0)'') + m(x(s)'|x(0)'')] e^{im^2s}. \quad (\text{B.52})$$

Por outro lado, escrevendo

$$\begin{aligned} G(x', x'') &= i \int_0^\infty ds (x'|e^{-i\mathcal{H}s} (\gamma\Pi + m)|x'') e^{im^2s} \\ &= i \int_0^\infty ds (x(s)'|(\gamma^\mu \Pi_\mu(0) + m)|x(0)'') e^{im^2s}, \end{aligned}$$

encontramos

$$G(x', x'') = i \int_0^\infty ds [(x(s)' | (\gamma^\mu \Pi_\mu(0)) | x(0)'') + m(x(s)' | x(0)'')] e^{im^2 s}. \quad (\text{B.53})$$

Para obtermos a lagrangiana $\mathcal{L}^{(1)}(x)$, substituímos (B.51) em (B.22), notando que

$$(x(s)' | x(0)'')|_{x', x'' \rightarrow x} = -\frac{i}{(4\pi)^2} e^{-L(s)} s^{-2} e^{-\frac{i}{2} e \sigma F s}.$$

Como resultado,

$$\mathcal{L}^{(1)}(x) = -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-3} e^{-m^2 s} e^{-l(s)} \text{tr} e^{\frac{i}{2} e \sigma F s}, \quad (\text{B.54})$$

onde deformamos o contorno de integração através da mudança de variável $s \rightarrow is$, para que $\mathcal{L}^{(1)}(x)$ seja expressa como uma quantidade real. Em (B.54),

$$l(s) = L(is) = \frac{1}{2} \text{tr} \ln \frac{\text{sen}(eF s)}{eF s}. \quad (\text{B.55})$$

Para obtermos uma expressão explícita de $\mathcal{L}^{(1)}(x)$ calcularemos, a seguir, os dois traços nela contidos. Em primeiro lugar, trataremos do termo $\text{tr} e^{\frac{i}{2} e \sigma F s}$. Para isso, utilizaremos a identidade

$$\{\sigma^{\mu\nu}, \sigma^{\lambda\kappa}\} = 2g^{\mu\lambda} g^{\nu\kappa} - 2g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} + 2i\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} \gamma^5,$$

a qual nos permite escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} (\sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2 &= \frac{1}{4} \sigma^{\mu\nu} \sigma^{\lambda\kappa} F_{\mu\nu} F_{\lambda\kappa} = \frac{1}{8} \{\sigma^{\mu\nu}, \sigma^{\lambda\kappa}\} F_{\mu\nu} F_{\lambda\kappa} \\ &= \frac{1}{4} (g^{\mu\lambda} g^{\nu\kappa} - g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} + i\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} \gamma^5) F_{\mu\nu} F_{\lambda\kappa} \\ &= \frac{1}{2} F^{\lambda\kappa} F_{\lambda\kappa} + \frac{i}{4} \epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} F_{\mu\nu} F_{\lambda\kappa} \gamma^5. \end{aligned}$$

Em termos do tensor dual

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} F_{\lambda\kappa},$$

segue que

$$\frac{1}{4} (\sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2 = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{i}{2} *F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \gamma^5. \quad (\text{B.56})$$

Introduzindo o escalar $\mathcal{F}$ e o pseudo-escalar $\mathcal{G}$,

$$\mathcal{F} \equiv \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2), \quad (\text{B.57})$$

$$\mathcal{G} \equiv \frac{1}{4} F^{\mu\nu} \star F_{\mu\nu} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \quad (\text{B.58})$$

temos

$$\left(\frac{1}{2} \sigma F \right)^2 = 2(\mathcal{F} + i\gamma^5 \mathcal{G}), \quad (\text{B.59})$$

ou, numa notação matricial,

$$2(\mathcal{F} + i\gamma^5 \mathcal{G}) = 2 \begin{pmatrix} \mathcal{F} & 0 & i\mathcal{G} & 0 \\ 0 & \mathcal{F} & 0 & i\mathcal{G} \\ i\mathcal{G} & 0 & \mathcal{F} & 0 \\ 0 & i\mathcal{G} & 0 & \mathcal{F} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.60})$$

De (B.60) obtemos a equação característica

$$((2\mathcal{F} - \lambda)^2 + 2\mathcal{G})^2 = 0,$$

cujas soluções são

$$\lambda = 2(\mathcal{F} \pm i\mathcal{G}). \quad (\text{B.61})$$

Portanto, os autovalores do operador $(-\frac{1}{2}\sigma F)^2$ são

$$\left(-\frac{1}{2} \sigma F \right)' = \pm \sqrt{2(\mathcal{F} \pm i\mathcal{G})}$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \text{tr exp} \left(-\frac{1}{2} \sigma F \right) &= e^{es\sqrt{2(\mathcal{F}+i\mathcal{G})}} + e^{-es\sqrt{2(\mathcal{F}+i\mathcal{G})}} \\ &+ e^{es\sqrt{2(\mathcal{F}-i\mathcal{G})}} + e^{-es\sqrt{2(\mathcal{F}-i\mathcal{G})}} \\ &= 4 \text{Re cosh} \left(es\sqrt{2(\mathcal{F} + i\mathcal{G})} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

Prosseguindo o cálculo dos traços de $\mathcal{L}^{(1)}(x)$, passemos agora à obtenção dos autovalores do operador $e^{l(s)}$. No entanto, devemos antes encontrar os autovalores do tensor de campo $F_{\mu\nu}$. Para isto, lançamos mão das seguintes relações

$$F_{\mu\lambda} * F^{\lambda\nu} = -\delta_\mu^\nu \mathcal{G} \quad (\text{B.63})$$

$$F_{\mu\lambda} * F^{\lambda\nu} - F_{\mu\lambda} F^{\lambda\nu} = 2\delta_\mu^\nu \mathcal{F}. \quad (\text{B.64})$$

Considerando que os autovalores de $F_{\mu\nu}$ são determinados através da equação

$$F_{\mu\nu}\psi^\nu = F'\psi_\mu, \quad (\text{B.65})$$

e, notando que

$$F_{\mu\lambda} * F^{\lambda\nu}\psi_\nu = -\mathcal{G}\psi_\mu, \quad (\text{B.66})$$

$$(F^{-1})^{\omega\mu} F_{\mu\lambda} * F^{\lambda\nu}\psi_\nu = -\mathcal{G}(F^{-1})^{\omega\mu}\psi_\mu, \quad (\text{B.67})$$

$$\delta_\lambda^\omega * F^{\lambda\nu}\psi_\nu = -\frac{\mathcal{G}}{F'}\psi^\omega, \quad (\text{B.68})$$

onde (B.63) e (B.64) foram usadas, concluimos que

$$*F^{\omega\nu}\psi_\nu = -\frac{\mathcal{G}}{F'}\psi^\omega$$

ou ainda,

$$F_{\mu\nu}F^{\nu\lambda}\psi_\lambda = (F')^2\psi_\mu, \quad (\text{B.69})$$

$$F_{\mu\lambda} * F^{\lambda\nu}\psi_\nu = \frac{\mathcal{G}^2}{(F')^2}\psi_\mu. \quad (\text{B.70})$$

Assim, equacionando as expressões (B.63), (B.64) e (B.69), (B.70), chegamos à seguinte equação para os autovalores F' de F

$$(F')^4 + 2\mathcal{F}(F')^2 - \mathcal{G}^2 = 0$$

cujas soluções são $\pm F^{(1)}$ e $\pm F^{(2)}$, com

$$F^{(1)} = \frac{i}{\sqrt{2}} \left[(\mathcal{F} + i\mathcal{G})^{\frac{1}{2}} + (\mathcal{F} - i\mathcal{G})^{\frac{1}{2}} \right], \quad (\text{B.71})$$

$$F^{(2)} = \frac{i}{\sqrt{2}} \left[(\mathcal{F} + i\mathcal{G})^{\frac{1}{2}} - (\mathcal{F} - i\mathcal{G})^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (\text{B.72})$$

Em termos de tais soluções,

$$\begin{aligned} l(s) &= \frac{1}{2} \text{tr} \ln \frac{\text{sen}(eF s)}{eF s} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 2 \ln \frac{\text{sen}(eF^{(1)} s)}{eF^{(1)} s} + 2 \ln \frac{\text{sen}(eF^{(2)} s)}{eF^{(2)} s} \right\} \\ &= \ln \frac{\text{sen}(eF^{(1)} s) \text{sen}(eF^{(2)} s)}{e^2 s^2 F^{(1)} F^{(2)}}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 e^{-l(s)} &= \frac{e^2 s^2 F^{(1)} F^{(2)}}{\text{sen}(eF^{(1)}s)\text{sen}(eF^{(2)}s)} \\
 &= \frac{2e^2 s^2 F^{(1)} F^{(2)}}{\cos(es[F^{(1)} - F^{(2)}]) - \cos(es[F^{(1)} + F^{(2)}])} \\
 &= \frac{e^2 s^2 \mathcal{G}}{\text{Im} \cosh(esX)},
 \end{aligned} \tag{B.73}$$

onde fizemos uso da identidade $F^{(1)}F^{(2)} = -i\mathcal{G}$ e definimos

$$X \equiv \sqrt{2}(\mathcal{F} + i\mathcal{G})^{\frac{1}{2}}.$$

Substituindo (B.62) e (B.73) em (B.54),

$$\mathcal{L}^{(1)} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-3} e^{-m^2 s} \frac{\text{Re} \cosh(esX)}{\text{Im} \cosh(esX)} e^2 s^2 \mathcal{G} \tag{B.74}$$

$$= -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-3} e^{-m^2 s} \left[e^2 s^2 \mathcal{G} \frac{\text{Re} \cosh(esX)}{\text{Im} \cosh(esX)} - 1 \right], \tag{B.75}$$

onde um termo constante foi introduzido em (B.74) a fim de que $\mathcal{L}^{(1)}$ se anule na ausência dos campos. Ademais, analisando a expressão (B.75), vemos que, para campos fracos,

$$\frac{\text{Re} \cosh(esX)}{\text{Im} \cosh(esX)} \simeq 1 + \frac{2}{3} e^2 s^2 \mathcal{F} - \frac{e^4 s^4}{45} (4\mathcal{F}^2 + 7\mathcal{G}^2) + \dots$$

e, portanto, a contribuição dominante é dada pelo segundo termo da expansão,

$$\mathcal{L}^{(1)} \simeq -\frac{e^2}{12\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-1} e^{-m^2 s} \mathcal{F}.$$

Sendo esta uma contribuição (infinita) de ordem e^2 , podemos incluí-la na Lagrangiana de Maxwell (a qual é da mesma ordem), de forma que $\mathcal{L}^{(1)}$ contenha apenas as contribuições de ordem superior, i.e.,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & - \left[1 + \frac{e^2}{12\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-1} e^{-m^2 s} \right] \mathcal{F} \\
 & - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-3} e^{-m^2 s} \left[e^2 s^2 \mathcal{G} \frac{\text{Re} \cosh(esX)}{\text{Im} \cosh(esX)} - 1 - \frac{2}{3} e^2 s^2 \mathcal{F} \right].
 \end{aligned}$$

Definindo

$$C \equiv \frac{e^2}{12\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-1} e^{-m^2 s}$$

e identificando as quantidades utilizadas até agora com o subíndice “0”, introduzimos um novo conjunto de unidades de intensidade de campo e carga através das relações

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= (1 + Ce_0^2)\mathcal{F}_0, \\ \mathcal{G} &= (1 + Ce_0^2)\mathcal{G}_0, \\ e &= \frac{e_0^2}{1 + Ce_0^2},\end{aligned}$$

de forma que

$$\mathcal{L} = -\mathcal{F} - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-3} e^{-m^2 s} \left[e^2 s^2 \mathcal{G} \frac{\text{Re} \cosh(esX)}{\text{Im} \cosh(esX)} - 1 - \frac{2}{3} e^2 s^2 \mathcal{F} \right].$$

Esta densidade lagrangiana invariante de calibre é conhecida como Lagrangiana de Euler-Kockel-Heisenberg e foi obtida, segundo a presente abordagem, por J. Schwinger em 1951 [11].

Apêndice C

A Anomalia Axial

C.1 Introdução

Neste apêndice, apresentaremos de forma sistemática os cálculos que levam à *anomalia ABJ* [40]-[41] seguindo a notação e o texto de Ta-Pei Cheng e Ling-Fong Li [42]. Tal estudo tem por objetivo evidenciar a estreita semelhança existente entre a estrutura do tensor $\Pi_b^{\mu\nu}$, expressão (4.10), e a expressão associada aos diagramas de triângulo no estudo da anomalia. De fato, este tipo de similaridade já foi explorada e discutida por R. Jackiw e A. V. Kostelecký [30] e, mais lucidamente, por G. Bonneau [37].

Como veremos, os procedimentos e análises aqui apresentados podem ser úteis na análise de (4.10), sobretudo no que se refere à ambigüidade advinda do processo de renormalização e à conservação das simetrias fundamentais da teoria.

Iniciemos nosso estudo sobre anomalia considerando um modelo contendo um campo fermiônico de massa m acoplado a um campo de gauge vetorial V^μ e a um campo de gauge axial A_5^μ . A Lagrangiana em questão é uma extensão axial da Lagrangiana usual da QED, i.e.,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - e\not{A} - m - \not{b}\gamma_5)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_5^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^5, \quad (\text{C.1})$$

onde as correntes de Noether vetorial e vetor axial são dadas por

$$V_\mu = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x), \quad (\text{C.2})$$

$$A_\mu = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x), \quad (\text{C.3})$$

e os tensores de campo têm a mesma forma que na QED usual.

Devido à invariância de (C.1) sobre as simetrias $U(1)$ de carga elétrica e $U(1)$ axial, segue-se que

$$\partial^\mu V_\mu(x) = 0, \quad (C.4)$$

$$\partial^\mu A_\mu(x) = 2imP(x), \quad (C.5)$$

onde $P(x)$ é a corrente pseudoescalar definida como

$$P = \bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x). \quad (C.6)$$

Para vermos por que tais simetrias (e as respectivas regras de conservação) podem ser violadas na teoria quântica baseada em (C.1), consideremos o acoplamento entre duas correntes vetoriais e a corrente vetor axial. Mais precisamente, consideremos a funções de três pontos (no espaço de momentos)

$$T_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, q) = i \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | T(V_\mu(x_1)V_\nu(x_2)A_\lambda(0)) | 0 \rangle e^{ik_1 \cdot x_1 + ik_2 \cdot x_2}, \quad (C.7)$$

onde $q = k_1 + k_2$. Essa é a contribuição de mais baixa ordem correspondente aos diagramas de triângulo mostrados na Fig:1.1.

Das propriedades de simetria da Lagrangiana podemos encontrar as identidades de Ward relacionadas a $T_{\mu\nu\lambda}$ e que serão úteis nos deselvolvimentos subseqüentes. Tomando emprestado da teoria de Álgebras de Correntes [43] a identidade

$$\partial_x^\mu (T(J_\mu(x)\mathcal{O}(y))) = T(\partial^\mu J_\mu(x)\mathcal{O}(y)) + [J_0(x), \mathcal{O}(y)]\delta(x_0 - y_0), \quad (C.8)$$

onde $J_\mu(x)$ e $\mathcal{O}(y)$ são operadores locais bem definidos, e levando em conta o fato de que

$$[V_0(x), A_0(y)]\delta(x_0 - y_0) = 0, \quad (C.9)$$

podemos calcular explicitamente as contrações de $T_{\mu\nu\lambda}$ com k_1^μ, k_2^ν e q^λ e obter as identidades

$$k_1^\mu T_{\mu\nu\lambda} = k_2^\nu T_{\mu\nu\lambda} = 0, \quad (C.10)$$

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda} = 2mT_{\mu\nu}, \quad (C.11)$$

onde

$$T_{\mu\nu}(k_1, k_2, q) = i \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | T(V_\mu(x_1)V_\nu(x_2)P(0)) | 0 \rangle e^{ik_1 \cdot x_1 + ik_2 \cdot x_2} \quad (C.12)$$

As identidades (C.10) e (C.11) são conhecidas como identidades de Ward vetorial e axial, respectivamente.

C.2 Anomalias Advindas do Processo de Renormalização

Quando calculamos as contribuições de baixa ordem para $T_{\mu\nu\lambda}$ e $T_{\mu\nu}$ (veja os diagramas abaixo), concluímos que as identidades de Ward (C.10) e (C.11) não são, de fato, satisfeitas. Explicitamente, temos

$$T_{\mu\nu\lambda} = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (-1) \left\{ \text{tr} \left[\frac{i}{\not{p} - m} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{i}{(\not{p} - \not{q}) - m} \gamma_\nu \frac{i}{(\not{p} - \not{k}_1) - m} \gamma_\mu \right] + \left(\begin{matrix} k_1 \leftrightarrow k_2 \\ \mu \leftrightarrow \nu \end{matrix} \right) \right\}, \quad (\text{C.13})$$

correspondendo aos diagramas (a) e (b) (Fig 1.1) e

$$T_{\mu\nu} = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (-1) \left\{ \text{tr} \left[\frac{i}{\not{p} - m} \gamma_5 \frac{i}{(\not{p} - \not{q}) - m} \gamma_\nu \frac{i}{(\not{p} - \not{k}_1) - m} \gamma_\mu \right] + \left(\begin{matrix} k_1 \leftrightarrow k_2 \\ \mu \leftrightarrow \nu \end{matrix} \right) \right\}, \quad (\text{C.14})$$

correspondendo aos diagramas (c) e (d) (Fig 2.1).

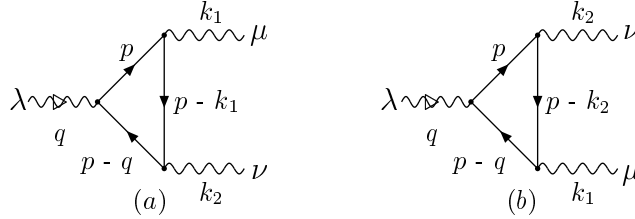


Fig. 1.1: Contribuição de mais baixa ordem para $T_{\mu\nu\lambda}$.

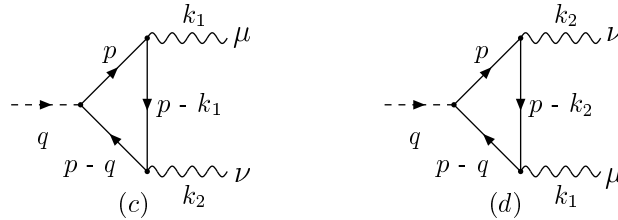


Fig. 2.1: Contribuição de mais baixa ordem para $T_{\mu\nu}$.

Para verificarmos as identidades de Ward, em particular a identidade axial, fazemos uso da relação

$$\not{q}\gamma_5 = \gamma_5(\not{p} - \not{q} - m) + (\not{p} - m)\gamma_5 + 2m\gamma_5 \quad (\text{C.15})$$

para escrever (C.11) como

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda} = 2mT_{\mu\nu} + \Delta_{\mu\nu}^{(1)} + \Delta_{\mu\nu}^{(2)}, \quad (\text{C.16})$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu}^{(1)} &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left\{ \frac{i}{\not{p} - m} \gamma_5 \gamma_\nu \frac{i}{(\not{p} - \not{k}_1) - m} \gamma_\mu \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{(\not{p} - \not{k}_2) - m} \gamma_5 \gamma_\nu \frac{i}{(\not{p} - \not{q}) - m} \gamma_\mu \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu}^{(2)} &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left\{ \frac{i}{\not{p} - m} \gamma_5 \gamma_\mu \frac{i}{(\not{p} - \not{k}_2) - m} \gamma_\nu \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{(\not{p} - \not{k}_1) - m} \gamma_5 \gamma_\mu \frac{i}{(\not{p} - \not{q}) - m} \gamma_\nu \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Diante disso, vemos que para que a identidade de Ward (C.11) seja satisfeita é preciso que as integrais em $\Delta_{\mu\nu}^{(i)}$ vão a zero. Superficialmente, isto parece ser o caso, pois, se pudermos efetuar a mudança da variável de integração de p para $p + k_2$ no segundo termo de (C.17), as duas integrais em $\Delta_{\mu\nu}^{(1)}$ se cancelam mutuamente. De maneira similar, o outro par de integrais em (C.18) deve se cancelar. Contudo, devido ao fato de ambas integrais serem linearmente divergentes, o recurso de se transladar a variável de integração produz termos extras [44] com $\Delta_{\mu\nu}^{(1)} \neq 0$ e $\Delta_{\mu\nu}^{(2)} \neq 0$, o que provoca a violação da referida identidade de Ward.

C.3 O Termo de Superfície em Integrais Linearmente Divergentes

Pode ser demonstrado para o caso unidimensional que o método de integração através do deslocamento da variável de integração torna-se ilegítimo se a integral em questão apresentar uma divergência linear ou superior*. Tomemos, por exemplo, a quanti-

*Optamos aqui por seguir a abordagem desenvolvida na referência [44].

dade

$$\Delta(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx [f(x+a) - f(x)]. \quad (\text{C.19})$$

Para verificarmos sob quais condições $\Delta(a)$ passa a ser não nula, expandimos o integrando em (C.19). Como resultado

$$\begin{aligned} \Delta(a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[a f'(x) + \frac{a^2}{2} f''(x) + \dots \right] \\ &= a[f(\infty) - f(-\infty)] + \frac{a^2}{2}[f'(\infty) - f'(-\infty)] + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

onde $(')$ significa diferenciação. Assim, quando

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad (\text{C.21})$$

converge (ou, no máximo, diverge logaritmicamente), teremos $0 = f(\pm\infty) = f'(\pm\infty) = \dots$, e $\Delta(a)$ vai a zero. Entretanto, para uma integral linearmente divergente, $0 \neq f(\pm\infty)$, $0 = f'(\pm\infty) = \dots$ e $\Delta(a)$ não necessariamente vai a zero. De fato, teremos

$$\Delta(a) = a[f(\infty) - f(-\infty)]. \quad (\text{C.22})$$

Esta contribuição remanescente corresponde a um “termo de superfície”. A generalização para o caso n -dimensional é direta

$$\begin{aligned} \Delta(a) &= \int d^n r [f(r+a) - f(r)] \\ &= \int d^n r \left[a^\tau \frac{\partial}{\partial r_\tau} f(r) + a^\tau \frac{\partial}{\partial r_\tau} a^\sigma \frac{\partial}{\partial r_\sigma} f(r) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Assim, aplicando o teorema de Gauss termo a termo na expansão acima, vemos que todos os termos vão a zero na superfície $r = R \rightarrow \infty$, exceto o primeiro, que contribui com

$$\Delta(a) = a^\tau \frac{R_\tau}{R} f(R) S_n(R) \quad (\text{C.24})$$

onde $S_n(R)$ é a área superficial da hipersfera de raio R . Para o caso do espaço 4-dimensional de Minkowski, teremos

$$\Delta(a) = a^\tau \int d^4 r \partial_\tau f(r) = 2i\pi^2 a^\tau \lim_{R \rightarrow \infty} R^2 R_\tau f(R). \quad (\text{C.25})$$

C.4 Ambigüidades em $T_{\mu\nu}$

Devido ao fato da amplitude a 1-loop $T_{\mu\nu\lambda}$ ser linearmente divergente por contagem de potências, a mesma não está unicamente definida. A expressão (C.13) implica em um particionamento particular para o momento de loop p ; a linha fermiônica entre os vértices vetorial e axial carrega momento p . Entretanto, podemos escolher um particionamento diferente, de tal forma que a linha fermiônica passe a carregar momento $p + a$, onde a é alguma combinação linear (arbitrária) de k_1 e k_2

$$a = \alpha k_1 + (\alpha - \beta) k_2. \quad (\text{C.26})$$

Portanto, devido ao fato da integral ser linearmente divergente, segue que $T_{\mu\nu\lambda}$ possui uma ambigüidade em sua definição dada pela quantidade

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu\lambda} &= T_{\mu\nu\lambda}(a) - T_{\mu\nu\lambda}(0) \\ &= (-1) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \\ &\quad \left\{ \text{tr} \left[\frac{1}{(\not{p} + \not{q}) - m} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{1}{(\not{p} + \not{q} - \not{q}) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(\not{p} + \not{q} - \not{k}_1) - m} \gamma_\mu \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{1}{\not{p} - m} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{1}{(\not{p} - \not{q}) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(\not{p} - \not{k}_1) - m} \gamma_\mu \right] + \left(\begin{matrix} k_1 \leftrightarrow k_2 \\ \mu \leftrightarrow \nu \end{matrix} \right) \right\} \\ &\equiv \Delta_{\mu\nu\lambda}^{(1)} + \Delta_{\mu\nu\lambda}^{(2)} \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

Aplicando o resultado (C.25), obtemos

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu\lambda}^{(1)} &= (-1) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} a^\tau \frac{\partial}{\partial p_\tau} \text{tr} \left[\frac{1}{\not{p} - m} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{1}{(\not{p} - \not{q}) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(\not{p} - \not{k}_1) - m} \gamma_\mu \right] \\ &= \frac{-i2\pi^2 a^\tau}{(2\pi)^4} \lim_{p \rightarrow \infty} p^2 p_\tau \text{tr}(\gamma_\alpha \gamma_\lambda \gamma_5 \gamma_\beta \gamma_\nu \gamma_\delta \gamma_\mu) p^\alpha p^\beta p^\delta / p^6 \\ &= \frac{i2\pi^2 a_\sigma}{(2\pi)^4} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p^\sigma p^\rho}{p^2} 4i\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}. \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Substituindo $p^\sigma p^\rho / p^2$ por $g^{\sigma\rho} / 4$,

$$\Delta_{\mu\nu\lambda}^{(1)} = \epsilon_{\rho\mu\nu\lambda} a^\rho / 8\pi^2. \quad (\text{C.29})$$

Visto que $\Delta_{\mu\nu\lambda}^{(2)}$ está relacionado com (C.29) através das trocas $k_1 \leftrightarrow k_2$ e $\mu \leftrightarrow \nu$, encontramos, através das equações (C.26), (C.27) e (C.29),

$$\Delta_{\mu\nu\lambda} = \Delta_{\mu\nu\lambda}^{(1)} + \Delta_{\mu\nu\lambda}^{(2)} = \frac{\beta}{8\pi^2} \epsilon_{\rho\mu\nu\lambda} (k_1 - k_2)^\rho. \quad (\text{C.30})$$

Portanto, a definição de $T_{\mu\nu\lambda}$ possui uma ambigüidade associada ao parâmetro arbitrário β de forma que

$$T_{\mu\nu\lambda}(a) = T_{\mu\nu\lambda}(0) - \frac{\beta}{8\pi^2} \epsilon_{\rho\mu\nu\lambda} (k_1 - k_2)^\rho \equiv T_{\mu\nu\lambda}(\beta). \quad (\text{C.31})$$

Tal ambigüidade tem implicações na análise da conservação das simetrias originais da teoria e, no caso da anomalia ABJ, a escolha do parâmetro β é feita à luz de dados experimentais, levando a violação parcial da corrente axial (PCAC).

Referências

- [1] R. F. Streater and A. S. Wightman, “PCT, Spin, Statistics and All That”, Benjamin, NY (1964).
- [2] V. A. Kostelecký, ed., *CPT and Lorentz Symmetry I*, World Scientific, Singapore, (1999) and, V. A. Kostelecký, ed., *CPT and Lorentz Symmetry II*, World Scientific, Singapore (2002).
- [3] L. P. Kadonoff and G. Baym, “Quantum Statistical Mechanics”, Addison-Wesley Publishing Co., Inc. (1989).
- [4] T. Matsubara, Prog. Theor. Phys. **14**, 351 (1955); L. V. Keldysh, Sov. Phys. JETP, **20**, No. 4, 1018 (1965).
- [5] H. A. Weldon, Phys. Rev. D **26**, N.6, 1394 (1982).
- [6] W. Israel, Ann. Phys. **100**, 310 (1976); Physica A **106**, 204 (1981).
- [7] H. Euler and B. Kockel, Naturwiss. **23**, 246 (1935); H. Euler, Ann. Physik. V **26**, 398 (1936).
- [8] W. Heisenberg and H. Euler, Zeits. für Phys. **98**, 714 (1936).
- [9] V. Weisskopf, Kgl. Danske Videnskab. Selskab. **14**, No. 6 (1936). A tradução deste artigo para o inglês pode ser encontrada em A. I. Muller, *Early Quantum Electrodynamics: a source book*, Cambridge University Press, (1995).
- [10] V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, *Quantum Electrodynamics*, Butterworth Heinemann, Second Edition (1982), Reprinted (1997).
- [11] J. Schwinger, Phys. Rev., **82**, 664 (1951).

- [12] V. Fock, Physik. Z. Sowjetunion **12** 404 (1937).
- [13] W. Dittrich and H. Gies, *Probing the Quantum Vacuum: Perturbative Effective Action Approach in Quantum Electrodynamics and Its Applications*, Springer-Verlag-NY (2000).
- [14] H. Umezawa and Y. Takahashi, Int. J. Mod. Phys. B **10**, 1755 (1996).
- [15] H. Umezawa, “Advanced Field Theory”, AIP Press, NY (1995).
- [16] E. R. Speer, J. Math. Phys. **9**, 1404 (1968).
- [17] G. Rayski, Acta Phys. Polonica **9** 129 (1948); W. Pauli and F. Villars, Rev. Mod. Phys. **21** 434 (1949).
- [18] W. Dittrich, Phys. Rev. D **19**, 2385 (1979).
- [19] G. Barton, Ann. Phys. **200**, 271 (1990).
- [20] M. Loewe and J. C. Rojas, Phys. Rev. D **46**, 2689 (1992).
- [21] P. Elmfors, D. Persson and B. S. Skagerstam, Phys. Rev. Lett. **71**, 480 (1993); and Astropart. Phys., **2**, 299 (1994).
- [22] F. T. Brandt, J. Frenkel and J. C. Taylor, Phys. Rev D **50**, 4110, (1994); F. T. Brandt and J. Frenkel, Phys. Rev. Lett. **74**, 1705 (1995).
- [23] J. L. Tomazelli and L. C. Costa, Eur. Phys. J. C **31**, 239 (2003).
- [24] S. Carroll, G. Field and R. Jackiw, Phys. Rev. D **41** 1231 (1990).
- [25] M. Goldhaber and V. Trimble, J. Astrophys. Astr. **17** 17 (1996).
- [26] Colladay and V. A. Kostelecký, Phys. Rev. D **55** 6760 (1997).
- [27] Colladay and V. A. Kostelecký, Phys. Rev. D **58** 116002 (1998).
- [28] S. Coleman and S. Glashow, Phys. Rev. D **59** 116008 (1999).
- [29] S. S. Chern and J. Simons, Ann. Math. **99** 48 (1974).

- [30] R. Jackiw and V. A. Kostelecký, Phys. Rev. Lett. **82** 3572 (1999) (arXiv:hep-th/9901358).
- [31] M. Pérez-Victoria, Phys. Rev. Lett. **83**, 2518 (1999).
- [32] J. M. Chung, Phys. Lett. B **461**, 138 (1999).
- [33] J. M. Chung and P. Oh, Phys. Rev. D **60**, 067702 (1999).
- [34] L. H. Chan, hep-th/9907349.
- [35] J. M. Chung and B. K. Chung, Phys. Rev. D **63**, 1050015 (2001).
- [36] M. Chaichian, W. F. Chen and R. González Felipe, Phys. Lett. B **503**, 215 (2001).
- [37] G. Bonneau, Nucl. Phys. B **593** 398 (2001).
- [38] Yu. A. Sitenko and K. Yu. Rulik, Eur. J. Phys. C (2003).
- [39] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Ann. Phys. **140** 372 (1982).
- [40] S. L. Adler, Phys. Rev. **177**, 2426 (1969) and in *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory*, Proc. 1970 Brandeis Summer Institute (ed. S. Deser *et al*) MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- [41] J. S. Bell and R. Jackiw, Nuovo Cimento **60A**, 47 (1969).
- [42] Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Clarendon Press - Oxford (1984) - Reprinted (1994).
- [43] S. L. Adler and R. F. Dashen, *Current Algebras and Applications to Particle Physics*, W. A. Benjamin - NY (1968).
- [44] Artigo de R. Jackiw em S. B. Treiman, R. Jackiw and D. J. Gross, *Lectures on Current Algebra and its Applications*, Princeton University Press, (1972).
- [45] S. L. Adler and W. A. Bardeen, Phys. Rev. **182**, 1717 (1969).

- [46] G. Scharf, W. F. Wreszinski, B. M. Pimentel and J. L. Tomazelli, *Ann. Phys.*, **231**, 185 (1994).
- [47] F. J. Dyson, *Phys. Rev.* **75**, 1736 (1949); J. Schwinger, *Proc. Nat. Acad. Sc.*, **37**, 452 e 455 (1951).
- [48] J. L. Tomazelli, in *arXiv:hep-th/0201204 v2* (2002).
- [49] I. Ojima, *Ann. Phys.* **137**, 1 (1981); H. Matsumoto, I.Ojima and H. Umezawa, *ibid.* **152**, 348 (1984).
- [50] J. I. Kapusta, *Finite Temperature Field Theory*, Cambridge University Press (1989).
- [51] J. R. Nascimento, R. F. Ribeiro and N. F. Svaiter, *hep-th/0012039*.
- [52] L. Cervi, L. Griguolo and D. Seminara, *Phys. Rev. D* **64**, 105003 (2001).
- [53] R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **131** (1963) 2766.
- [54] A. Mann, M. Revzen, H. Umezawa and Y. Yamanaka, *Phys. Lett.* **140A**, 475 (1989).
- [55] H. Matsumoto, Y. Nakano and H. Umezawa, *Phys. Rev. D* **31**, 429 (1985).
- [56] G. Bonneau, *Int. J. Mod. Phys. A* **5**, 3831 (1990).
- [57] J. L. Tomazelli and L. C. Costa, em preparação.
- [58] G. Bonneau, L. C. Costa and J. L. Tomazelli, em preparação.