

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ÁREA DE FÍSICA APLICADA

**Estudo da Dinâmica de Hippocamp:
Futuro Cenário Ressonante 13:11.**

Victor Hugo Mota

**INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS
RIO CLARO - SP**

2023

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

VICTOR HUGO MOTA

Estudo da Dinâmica de Hippocamp: Futuro Cenário Ressonante 13:11

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
do Campus de Rio Claro, da Universidade
Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”,
como parte dos requisitos para obtenção do
título de Mestre em Física.

Orientador: Tadashi Yokoyama

Rio Claro - SP
2023

M917e Mota, Victor Hugo
Estudo da dinâmica de Hippocamp: futuro cenário ressonante
13:11. / Victor Hugo Mota. -- Rio Claro, 2023
76 p. : il., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: Tadashi Yokoyama

1. Astronomia. 2. Ciências Físicas. 3. Mecânica celeste. 4.
Perturbação (Astronomia). 5. Satélites. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

VICTOR HUGO MOTA

Estudo da Dinâmica de Hippocamp: Futuro Cenário Ressonante 13:11

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
do Campus de Rio Claro, da Universidade
Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”,
como parte dos requisitos para obtenção do
título de Mestre em Física.

Prof. Dr. Tadashi Yokoyama
IGCE / UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Marcos Tadeu dos Santos
IGCE / UNESP/Rio Claro (SP)

Profª Drª Silvia Maria Giuliatti Winter
FEG / UNESP/Guaratinguetá (SP)

Conceito: aprovado.

Rio Claro - SP, 06 de setembro de 2023

Agradecimentos

Direciono meus agradecimentos principais a minha mãe, Celma Regina de Araújo, meu pai, Rodolfo Correa Mota, minha irmã, Karoline Mota, minha namorada, Ana Luiza Engelmann, e também, aos meus gatinhos, Penélope, Luna e Motoca, por todo apoio, paciência e motivação que me deram durante este processo e na minha vida. Agradeço o professor e orientador Tadashi Yokoyama, pela amizade, ajuda, gentileza, paciência e atenção, sempre me auxiliando e motivando, em todas as situações. A todos os amigos que fiz e convivi durante esta trajetória, muito obrigado, principalmente à Bodinho, Jão, Japa, Eddie, Gugui, Bioca, Pendrive, Divó, Minimim, Dilove, Pedro, e a todos da República Bagaceira, pela amizade, risadas, churrascos, e o prazer da convivência, por todo esse tempo. Meus agradecimentos aos meus amigos de Diadema, por todo apoio, amizade e cumplicidade. Agradeço a todos os professores, técnicos e servidores, por todo o conhecimento adquirido na minha educação. Por fim, agradeço aos professores que participaram da comissão julgadora deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de financiamento 001

Summertime, and the livin' is easy [...]
(George Gershwin, *Summertime*)

RESUMO

Hippocamp, anteriormente conhecido como S/2004 N 1, é uma lua muito pequena de Netuno, a menor entre as atuais que orbitam o planeta. Foi descoberta por Showalter em 1º de julho de 2013, embora estivesse presente em imagens anteriores fornecidas pelo telescópio Hubble (desde 2004). Similar a outras luas de Netuno, a origem de Hippocamp parece ser muito complicada: acredita-se que essa lua seja o resultado do material re-acrecido proveniente da grande colisão sofrida por Proteus. Evidências dessa colisão são baseadas na cratera Pharos, localizada na superfície de Proteus. Estudos mostram que essa grande colisão ejetou quantidade mais do que suficiente de detritos que se aglutinaram formando Hippocamp. Hoje, os semi-eixos maiores de Hippocamp e Proteus são, respectivamente: 105283 km e 117647 km, de modo que essa clara proximidade é considerada uma consequência do mecanismo de formação de Hippocamp. Note que a relação entre esses semi-eixos maiores é muito próxima à ressonância 13:11. Devido ao efeito das marés, Proteus está se afastando de Netuno, enquanto Hippocamp quase não será afetado, já que sua massa é insignificante. Portanto, este sistema está envolvido em uma evolução convergente em direção à ressonância 13:11. Exemplos de ressonâncias que reúnem pequenas luas foram encontrados pela primeira vez em Saturno, onde o par de objetos já está capturado em uma ressonância de primeira ordem específica. Neste trabalho, usaremos o sistema Hippocamp-Proteus-Tritão para simular a evolução dinâmica do sistema considerando o possível futuro cenário ressonante de segunda ordem 13:11.

Palavras-chave: Dinâmica orbital; Ressonância; Efeito de maré; Pequenos satélites.

ABSTRACT

"Hippocamp, formerly known as S/2004 N 1, is a very small moon of Neptune, the smallest among the current ones orbiting the planet. It was discovered by Showalter on July 1, 2013, although it had been present in earlier images provided by the Hubble telescope (since 2004). Similar to other Neptune's moons, the origin of Hippocamp appears to be very complicated: it is believed that this moon is the result of material re-accreted from the large collision suffered by Proteus. Evidence of this collision is based on the Pharos crater located on the surface of Proteus. Studies show that this large collision ejected more than enough debris that coalesced to form Hippocamp. Today, the major semi-axes of Hippocamp and Proteus are, respectively: 105,283 km and 117,647 km, so this clear proximity is considered a consequence of Hippocamp's formation mechanism. Note that the relationship between these major semi-axes is very close to the 13:11 resonance. Due to tidal effects, Proteus is moving away from Neptune, while Hippocamp will hardly be affected, as its mass is insignificant. Therefore, this system is involved in a convergent evolution towards the 13:11 resonance. Examples of resonances that bring together small moons were first found on Saturn, where the pair of objects is already captured in a specific first-order resonance. In this work, we will use the Hippocamp-Proteus-Triton system to simulate the dynamic evolution of the system considering the possible future second-order 13:11 resonant scenario."

Keywords: Orbital Dynamics; Resonance; Tidal effect; Small Satellites.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação gráfica da disposição das órbitas dos satélites regulares de Netuno	13
Figura 2 – Comparação de tamanho de algumas luas de Netuno.	14
Figura 3 – Imagem representativa da morfografia de Proteus, incluindo sua grande cratera Pharos.	16
Figura 4 – Algumas das efemérides da órbita de Proteus, como: semieixo maior, excentricidade, inclinação e argumento do pericentro.	17
Figura 5 – Imagem das luas de Netuno evidenciando Hippocamp, imagem capturada do telescópio Hubble.	18
Figura 6 – Alguns elementos orbitais de Hippocamp, como: semieixo maior, excentricidade, inclinação e argumento do pericentro.	19
Figura 7 – Evolução do ângulo ressonante entre Anthe e Mimas.	21
Figura 8 – Representação gráfica das funções harmônicas esféricas	26
Figura 9 – Efeito de maré causado por um satélite natural.	29
Figura 10 – Forças envolvidas na interação de maré no caso geral em que os dois corpos são deformados.	31
Figura 11 – Comparativo entre o semieixo maior de Hippocamp nas simulações do sistema Hippocamp-Proteus, contra a introdução de Tritão no problema.	37
Figura 12 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador com um fator de dissipação $Q_n = 20000$, além do angulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=16\text{Myrs}$ a $t=30\text{Myrs}$ aproximadamente.	40
Figura 13 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador com um fator de dissipação $Q_n = 20000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=21\text{Myrs}$ a $t=21.2\text{Myrs}$ aproximadamente.	41
Figura 14 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador com um fator de dissipação $Q_n = 20000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=21.2\text{Myrs}$ a $t=21.3\text{Myrs}$ aproximadamente.	41

Figura 15 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Proteus (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador com um fator de dissipação $Q_n = 20000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=16\text{Myrs}$ a $t=30\text{Myrs}$ aproximadamente.	42
Figura 16 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Proteus (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador com um fator de dissipação $Q_n = 20000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=21\text{Myrs}$ a $t=21.2\text{Myrs}$ aproximadamente.	43
Figura 17 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 60000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=16\text{Myrs}$ a $t=22\text{Myrs}$ aproximadamente.	44
Figura 18 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 60000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=22\text{Myrs}$ a $t=23\text{Myrs}$ aproximadamente.	45
Figura 19 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 60000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=24.6\text{Myrs}$ a $t=25.5\text{Myrs}$ aproximadamente.	45
Figura 20 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 60000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=41.6\text{Myrs}$ a $t=42.5\text{Myrs}$ aproximadamente.	46
Figura 21 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 20000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=44\text{Myrs}$ a $t=45.5\text{Myrs}$ aproximadamente.	46

Figura 22 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 60000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=60\text{Myrs}$ a $t=65\text{Myrs}$ aproximadamente.	47
Figura 23 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 60000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=70\text{Myrs}$ a $t=70.4\text{Myrs}$ aproximadamente.	48
Figura 24 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Proteus (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 60000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=41\text{Myrs}$ a $t=43\text{Myrs}$ aproximadamente.	49
Figura 25 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Proteus (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 60000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=44\text{Myrs}$ a $t=45.5\text{Myrs}$ aproximadamente.	49
Figura 26 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 80000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=16\text{Myrs}$ a $t=90\text{Myrs}$ aproximadamente.	51
Figura 27 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 80000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=30\text{Myrs}$ a $t=35\text{Myrs}$ aproximadamente.	52
Figura 28 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 80000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=65\text{Myrs}$ a $t=70\text{Myrs}$ aproximadamente.	53

Figura 29 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 80000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=75\text{Myrs}$ a $t=80\text{Myrs}$ aproximadamente.	54
Figura 30 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 80000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=85\text{Myrs}$ a $t=90\text{Myrs}$ aproximadamente.	55
Figura 31 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Proteus (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 80000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=16\text{Myrs}$ a $t=90\text{Myrs}$ aproximadamente.	56
Figura 32 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Proteus (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 80000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=65\text{Myrs}$ a $t=70\text{Myrs}$ aproximadamente.	57
Figura 33 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 120000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=25\text{Myrs}$ a $t=30\text{Myrs}$ aproximadamente.	58
Figura 34 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 120000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=35\text{Myrs}$ a $t=40\text{Myrs}$ aproximadamente.	59
Figura 35 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 120000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=45\text{Myrs}$ a $t=50\text{Myrs}$ aproximadamente.	60

Figura 36 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 120000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=75\text{Myrs}$ a $t=76.5\text{Myrs}$ aproximadamente.	61
Figura 37 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 120000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=76.5\text{Myrs}$ a $t=77\text{Myrs}$ aproximadamente.	62
Figura 38 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Proteus (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 120000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=16\text{Myrs}$ a $t=80\text{Myrs}$ aproximadamente.	63
Figura 39 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Proteus (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 120000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=75\text{Myrs}$ a $t=80\text{Myrs}$ aproximadamente.	64
Figura 40 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp e do ângulo ressonante ϕ , simulados em nosso integrador sem migração de maré.	66
Figura 41 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Proteus e do ângulo ressonante ϕ , simulados em nosso integrador sem migração de maré.	67
Figura 42 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Proteus e do ângulo ressonante $\phi = 13\lambda_p - 11\lambda_h - 2\varpi_h$, simulados em nosso integrador sem migração de maré.	68
Figura 43 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Proteus e do ângulo ressonante $\phi = 13\lambda_p - 11\lambda_h - 2\varpi_p$, simulados em nosso integrador sem migração de maré.	69
Figura 44 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Proteus e do ângulo ressonante $\phi = 13\lambda_p - 11\lambda_h - 2\varpi_h$, simulados em nosso integrador sem migração de maré.	70

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Proteus	15
1.2	Hippocamp	17
2	RESSONÂNCIA DE MOVIMENTO MÉDIO	20
2.1	Ressonâncias nas luas do Sistema Solar	20
3	OBJETIVOS	24
4	EQUAÇÕES DO MOVIMENTO	25
4.1	Achatamento Planetário	25
4.1.1	Potencial planetário	27
4.2	Maré	29
4.3	Equações do movimento	31
4.3.1	Condições iniciais	34
5	SIMULAÇÕES	36
5.0.1	$Q_n = 60000$	43
5.1	$Q_n = 80000$	50
5.2	$Q_n = 120000$	58
6	TESTE DE ESTABILIDADE	66
6.0.1	Alterando excentricidade	68
7	CONCLUSÃO	71
	REFERÊNCIAS	74

1 Introdução

Netuno é um planeta gasoso gigante e frio, localizado na periferia do Sistema Solar. O planeta possui atualmente uma coleção de 14 satélites naturais conhecidos.

As luas de Netuno variam muito em tamanho e composição. A maior delas, Tritão, com um diâmetro de cerca de 2.700 quilômetros, é o sétimo maior satélite natural do sistema solar, sendo, também, a única lua grande em nosso Sistema que orbita em uma direção retrógrada, ou seja, oposta à rotação do planeta (MCFADDEN; JOHNSON; WEISSMAN, 2006).

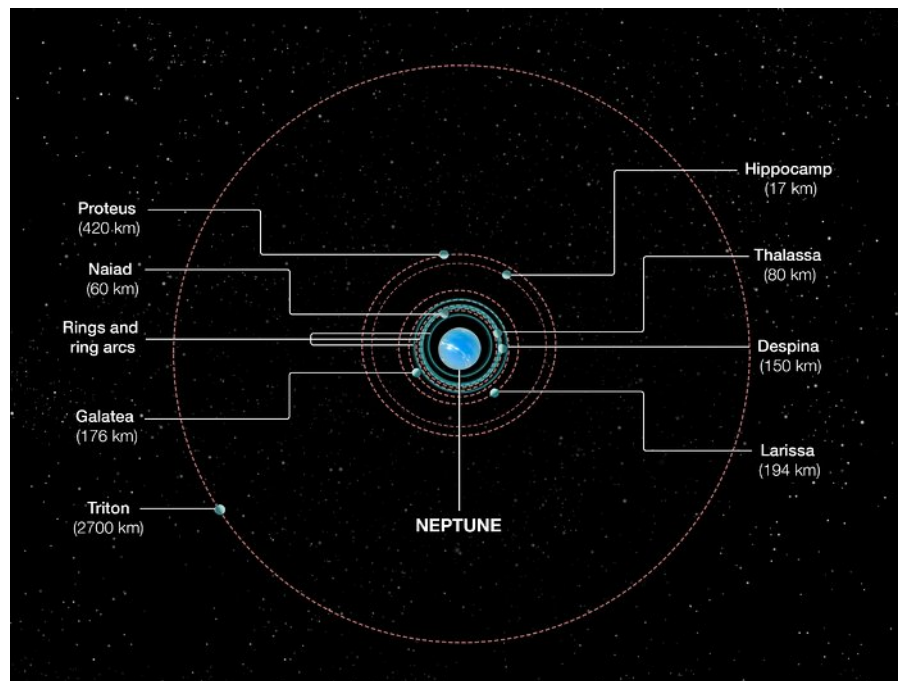


Figura 1 – Representação gráfica da disposição das órbitas dos satélites regulares de Netuno

Fonte: Figura retirada e adaptada de (NASA; (STSCI), 2019).

Tritão é um corpo fascinante por várias razões. Primeiro, é coberto por uma espessa camada de nitrogênio congelado, que lhe confere uma aparência branca e brilhante. Além disso, a superfície de Tritão é marcada por gêiseres ativos que lançam material para o espaço. Estes jatos de material sugerem que Tritão pode ter uma camada de água líquida sob a crosta de gelo (NOGUEIRA; BRASSER; GOMES, 2011).

Podemos citar também, as notáveis luas Proteus, Larissa, Despina e Galatea. Proteus é a segunda maior lua de Netuno, possuindo um diâmetro de cerca de 420 quilômetros. Larissa é uma lua pequena, com um diâmetro de cerca de 194 quilômetros,

descoberta em 1981, pela sonda Voyager 2. Despina também é uma lua pequena, mas irregular, e possui um diâmetro de cerca de 150 quilômetros. Já Galatea, é uma lua pequena e escura que orbita perto do anel Adams de Netuno (GALLARDO et al., 2020).

Lua	$a(km)$	e	$i(graus)$	$P(dias)$	$R(km)$
Tritão	354.800	3.12e-5	157.3	5.876994	1353
Hippocamp	105.300	7.34e-4	0.76	0.950390	*
Proteus	117.600	6.85e-4	1.06	1.122315	210
Larissa	73.500	1.5e-3	1.31	0.554989	97
Despina	52.500	8.22e-4	0.46	0.334656	75
Galatea	59.169	7.77e-4	0.52	0.428744	87
Thalassa	50.100	1.49e-3	0.63	0.311484	41
Naiad	48.200	1.24e-3	5.15	0.293980	33

Tabela 1 – Informações como semieixo maior, excentricidade, inclinação, período orbital, raio de alguns satélites de Netuno

Fonte: Informações retiradas de (NASA, 2023).

As órbitas dos satélites de Netuno são influenciadas por vários fatores, dentre eles, a presença de outros satélites e a massa de Netuno. Alguns satélites, como Nereida, possuem órbitas altamente excêntricas, enquanto outros, como Larissa, têm órbitas mais regulares.

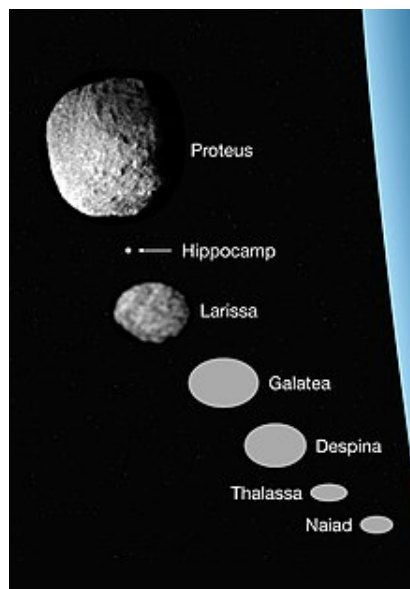


Figura 2 – Comparação de tamanho de algumas luas de Netuno.

Fonte: Figura retirada e adaptada de (HAYNES, 2019).

A estrutura interna dos satélites de Netuno é incerta, mas acredita-se que eles possam ter núcleos sólidos cobertos por camadas de gelo e rochas. Alguns satélites possuem evidências de atividade tectônica recente, indicando que eles poderiam ter

mantido um interior quente o suficiente para permitir o movimento de suas camadas internas.

1.1 Proteus

Os satélites de seu sistema possuem uma história marcada por colisões cometas e de outros objetos vindos do espaço exterior. Com exceção de Proteus, todos os satélites primordiais foram destruídos. Sendo o maior e mais extenso satélite, Proteus foi o único sobrevivente e acredita-se que os demais, de Larissa a Naiad, tenham se formado a partir dos detritos resultantes destas colisões. Mesmo assim, Proteus é considerado um satélite de segunda geração, pois provavelmente sofreu impactos severos e perdeu massa, mas também se beneficiou dos detritos dessas colisões, através do ganho de massa ao longo do tempo ([Hansen; Murray, 2017](#)).

Proteus é a segunda maior lua de Netuno, possuindo um diâmetro de cerca de 420 quilômetros, descoberta em 1989, pela sonda espacial Voyager 2. Sua superfície é marcada por grandes crateras, onde a maior delas é conhecida como Pharos, como pode ser notado pela Figura 3. Isso indica que a lua sofreu um bombardeio intenso durante sua formação. Além disso, a lua tem uma forma bastante irregular, com uma série de saliências e depressões em sua superfície. Estudos sugerem que a lua possivelmente se formou a partir de um processo de acreção de pequenos objetos, que acabaram se fundindo ([CROFT, 1992](#)).

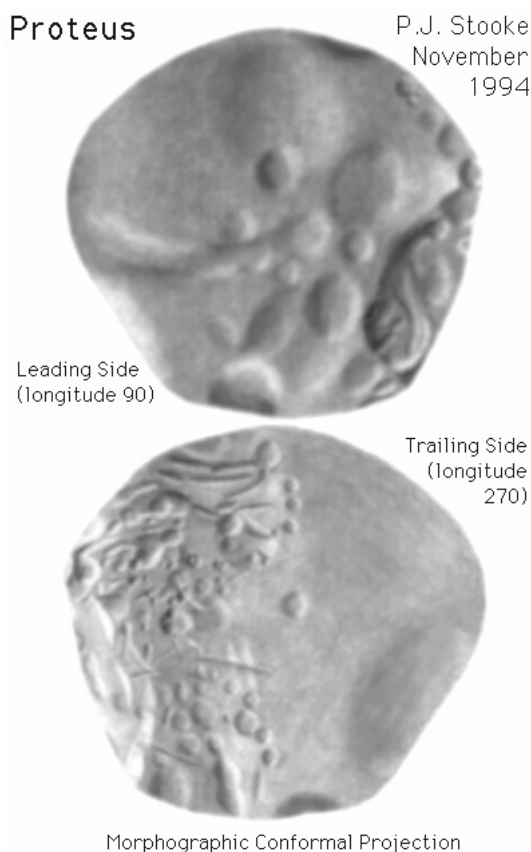


Figura 3 – Imagem representativa da morfografia de Proteus, incluindo sua grande cratera Pharos.

Fonte: Figura retirada e adaptada de ([STOOKE, 1994](#)).

Proteus possui uma densidade média relativamente baixa. Acredita-se que a lua possua um núcleo rochoso e um manto de gelo, com uma crosta fina de material rochoso em sua superfície ([DUMAS; SMITH; TERRILE, 2003](#)).

Uma característica interessante é sua órbita quase circular e quase equatorial em relação a Netuno. Isso sugere que a lua possa ter se formado em uma órbita mais próxima do planeta e empurrada para a sua posição atual, devido a perturbações gravitacionais de outros satélites de Netuno ao longo do tempo ([SHOWALTER et al., 2019](#)).

Desde sua descoberta, Proteus tem sido alvo de estudos científicos para a melhor compreensão de sua história e evolução. Em 2016, a sonda espacial New Horizons, que estava a caminho de Plutão, passou por uma região próxima de Netuno e utilizou de seus instrumentos para fazer observações detalhadas de Proteus. As imagens de alta resolução revelaram novos detalhes da superfície da lua.

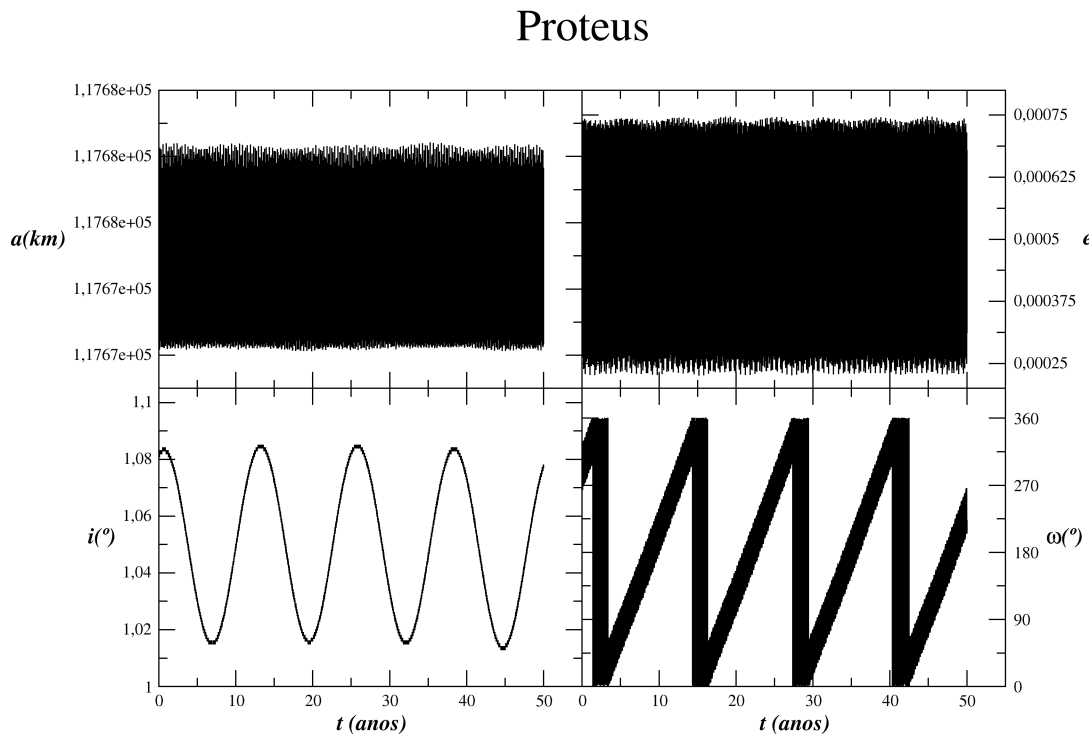


Figura 4 – Algumas das efemérides da órbita de Proteus, como: semieixo maior, excentricidade, inclinação e argumento do pericentro.

Fonte: Dados retirados de (NASA, 2023).

A Figura 4 mostra a dinâmica atual da órbita de Proteus, onde é possível observar que todos seus elementos orbitais apresentadas no gráfico (semieixo maior, excentricidade, inclinação e argumento do pericentro) se encontram em estabilidade e possuem variação periódica dentre o tempo decorrido de integração obtido no banco de dados Horizon, que durou aproximadamente 50 anos.

1.2 Hippocamp

Hippocamp, anteriormente conhecido como S/2004 N 1, é o menor dentre os satélites atuais de Netuno. Ele foi descoberto por Showalter em 1 de julho de 2013, embora já estivesse presente em imagens fornecidas pelo telescópio Hubble, desde 2004.

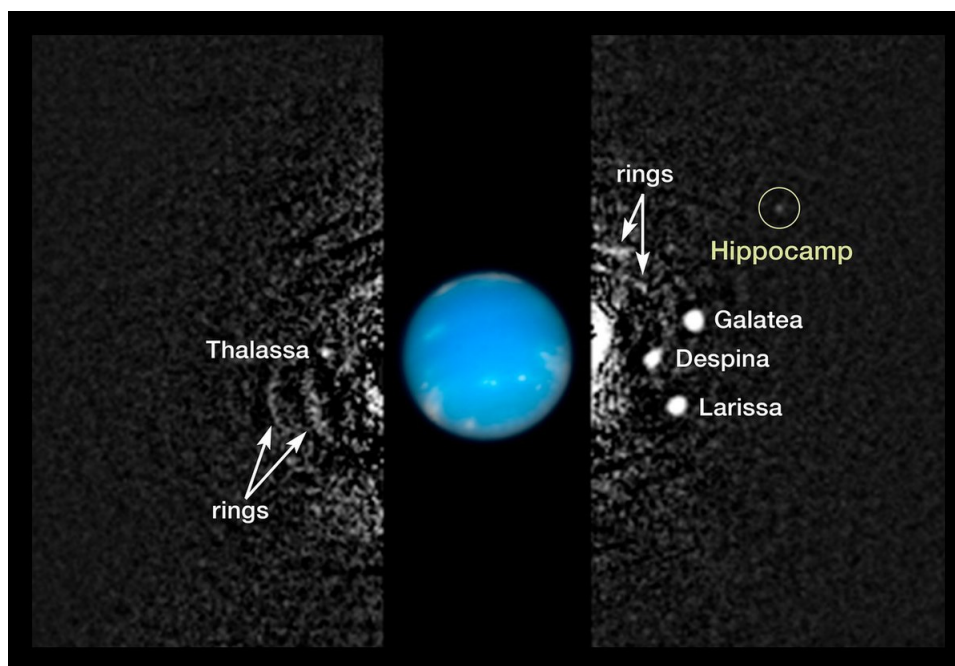


Figura 5 – Imagem das luas de Netuno evidenciando Hippocamp, imagem capturada do telescópio Hubble.

Fonte: Dados retirados de (NASA; INSTITUTE), 2019).

Similarmente a outros satélites de Netuno, a origem de Hippocamp parece ser muito controversa. A teoria aceita é que Hippocamp tenha sido um fragmento do resultado da re-acretação do material proveniente da grande colisão experienciada por Proteus, e também tenha sofrido remodelações devido ao ambiente de muitas colisões. As evidências dessa colisão estão baseadas na grande cratera Pharos, vista na superfície de Proteus. Certamente, essa grande colisão ejetou uma quantidade mais do que suficiente de detritos que se coalesceram, formando Hippocamp.

A proximidade de Hippocamp com Proteus, assim como sua baixa excentricidade e inclinação, reforçam essa ideia. Além disso, após o período de colisões, existe o efeito das marés, que embora sejam lentos, podem causar significativas transformações no sistema (SHOWALTER et al., 2019).

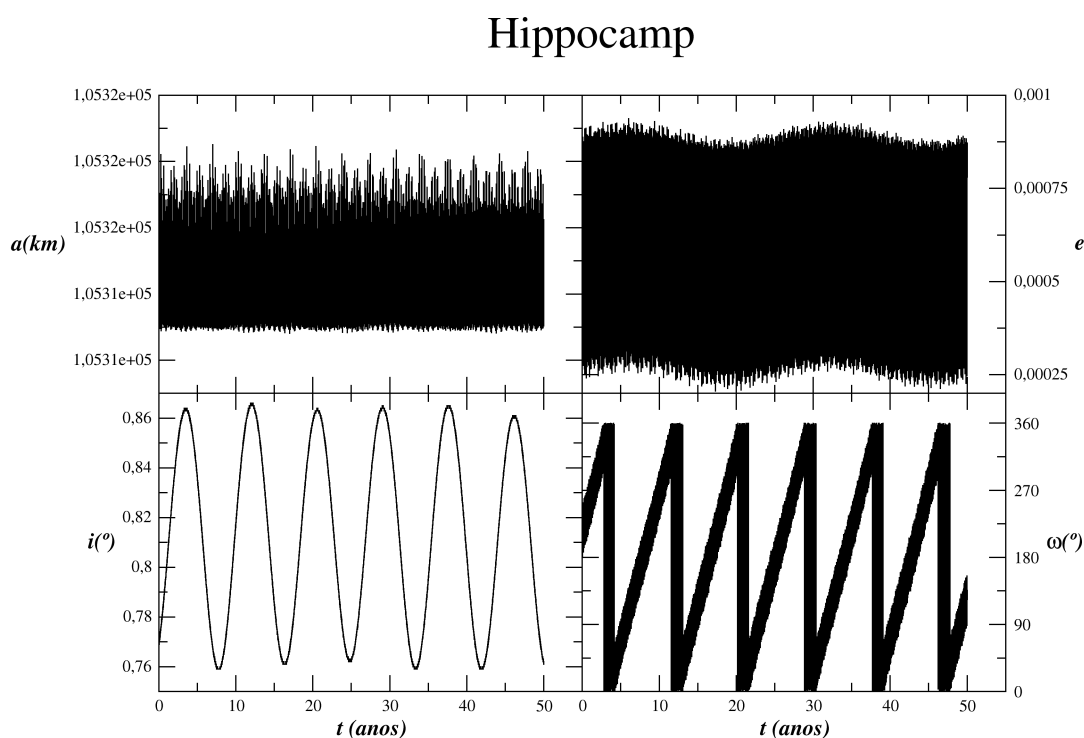


Figura 6 – Alguns elementos orbitais de Hippocamp, como: semieixo maior, excentricidade, inclinação e argumento do pericentro.

Fonte: Dados retirados de (NASA, 2023).

A Figura 6 mostra a dinâmica atual da órbita de Hippocamp, onde é possível verificar que todas as suas efemérides apresentadas no gráfico (semieixo maior, excentricidade, inclinação e argumento do pericentro) se encontram estáveis e possuem variação periódica dentre o tempo decorrido de integração obtidos no banco de dados Horizon, que durou aproximadamente 50 anos.

2 Ressonância de movimento médio

A ressonância orbital de movimento médio é uma configuração dinâmica complexa e importante que pode ser encontrada tanto em sistemas de satélites, quanto em sistemas planetários. Ela ocorre quando duas órbitas estão sincronizadas de tal forma que seus corpos se encontram periodicamente em momentos específicos. Isso acontece quando a relação entre as frequências de movimento dos dois objetos é uma fração exata, por exemplo, 2:3, 3:4, 4:5, etc.

Quando duas órbitas estão em ressonância, suas interações gravitacionais podem se afetar de forma mais intensa. Estas interações são reforçadas, pois durante a evolução orbital poderão ocorrer conjunções, resultado da sincronização de seus períodos. Dependendo das condições da ressonância, podem-se resultar efeitos estabilizantes ou instabilizantes.

Por exemplo, se os momentos de encontro resultam em interações gravitacionais que anulam ou minimizam o impacto gravitacional, a ressonância pode ser estabilizante. Isso pode ajudar a manter as órbitas dos corpos estabilizados, e a prevenir que elas evoluam para uma configuração caótica. Por outro lado, se os momentos de encontro resultam em interações gravitacionais intensas, a ressonância pode desestabilizar a órbita de algum dos corpos envolvidos.

A ressonância de movimento médio também pode resultar na criação de vazios ou “lacunas” em discos de detritos, como observado no Cinturão de Asteroides e no Cinturão de Kuiper. O fenômeno ocorre quando corpos menores, que estão em ressonância com um planeta mais massivo, sofrem perturbações frequentes em suas trajetórias orbitais. Em decorrência, isso pode levar a colisões entre esses corpos ou até mesmo à sua expulsão do sistema, gerando lacunas características nos discos de detritos.

Além disso, o estudo da dinâmica ressonante pode ser utilizado para compreender as dinâmicas do Sistema Solar e outros sistemas planetários, explicar a evolução a de longo período das órbitas dos objetos envolvidos, analisar a interação entre diferentes corpos celestes, e estudar a formação de planetas e sistemas planetários (MURRAY; DERMOTT, 1999)(CALLEGARI, 2006).

2.1 Ressonâncias nas luas do Sistema Solar

Algumas luas dos planetas do Sistema Solar estão em ressonância entre si. Esse efeito, principalmente nas menores luas, pode ter um aspecto de segurança para

sua órbita, pois estar em uma ressonância pode garantir estabilidade orbital.

Planeta	Lua 1	Lua 2	Ressonância
Júpiter	Europa	Io	2:1
Urano	Ariel	Umbriel	4:3
Saturno	Mimas	Anthe	10:11
Saturno	Mimas	Aegaeon	6:7
Saturno	Mimas	Methone	14:15

Tabela 2 – Algumas ressonâncias entre luas do Sistema Solar

Fonte: Dados retirados de (ERSHKOV; LESHCHENKO, 2021),(TITTEMORE; WISDOM, 1990),(CALLEGARI; RODRÍGUEZ; CECCATTO, 2021),(CALLEGARI; RODRÍGUEZ, 2023),(CALLEGARI; YOKOYAMA, 2020)

Em (CALLEGARI; YOKOYAMA, 2020), mostra-se que os satélites Mimas e Anthe estão atualmente presos em uma ressonância de movimento médio de primeira ordem 10:11. Reproduzimos a evolução em função do tempo do ângulo ressonante presente nos resultados deste trabalho utilizando as condições iniciais dos dois satélites disponíveis no catálogo Horizon, como pode-se conferir na Figura 7

11:10 Anthe-Mimas

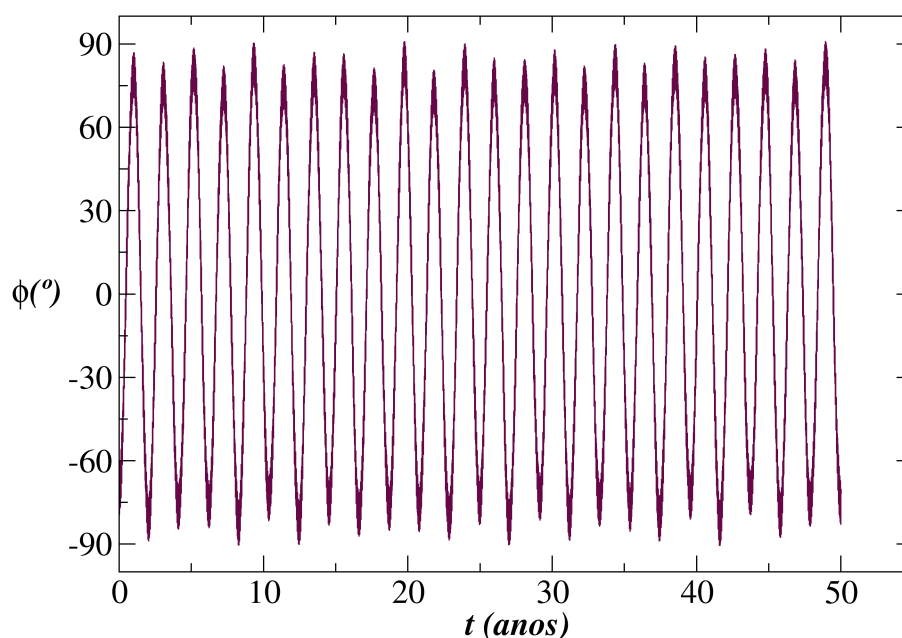


Figura 7 – Evolução do ângulo ressonante entre Anthe e Mimas.

Fonte: Dados retirados de (NASA, 2023).

A Figura 7 representa a evolução do ângulo ressonante entre os dois satélites de Saturno, Anthe e Mimas. Vemos que o ângulo ϕ libra em torno de 0° , com uma amplitude de aproximadamente 90° , onde ϕ representa a combinação entre as longitudes médias dos dois corpos e a longitude do pericentro de Mimas, que nessa disposição é classificado como um ângulo de Lindblad, conforme a Equação 2.1.

$$\phi = 11\lambda_a - 10\lambda_m - \varpi_m \quad (2.1)$$

É importante salientar que a grande maioria das ressonâncias de movimento médio entre as luas regulares do Sistema Solar são classificadas como de primeira ordem, onde seu ângulo ressonante pode apresentar diferentes combinações dentre os parâmetros orbitais dos corpos estudados, conforme a Equação 2.1. Ressonâncias de primeira ordem tendem a ser estatisticamente mais observadas por implicarem em um “acoplamento” gravitacional maior de seus corpos do que ressonâncias de graus mais elevados, implicando em uma atração gravitacional mais forte, o que dificulta que alguma perturbação externa desestabilize sua órbita, tornando assim as ressonâncias de primeira ordem em um mecanismo de proteção mais eficaz.

Possíveis combinações ressonantes

$$\begin{aligned} &j\lambda' + (1-j)\lambda - \varpi \\ &j\lambda' + (1-j)\lambda - \varpi' \\ &j\lambda' + (1-j)\lambda + \varpi' - 2\varpi \\ &j\lambda' + (1-j)\lambda - \varpi' + 2\varpi \\ &j\lambda' + (1-j)\lambda + \varpi - 2\Omega \\ &j\lambda' + (1-j)\lambda + \varpi' - 2\Omega \\ &j\lambda' + (1-j)\lambda - \varpi - \Omega' + \Omega \\ &j\lambda' + (1-j)\lambda - \varpi + \Omega' - \Omega \\ &j\lambda' + (1-j)\lambda + \varpi - \Omega' - \Omega \\ &j\lambda' + (1-j)\lambda - \varpi' - \Omega' + \Omega \\ &j\lambda' + (1-j)\lambda - \varpi' + \Omega' - \Omega \\ &j\lambda' + (1-j)\lambda - \varpi' - \Omega' + \Omega \\ &j\lambda' + (1-j)\lambda + \varpi' - \Omega' - \Omega \\ &j\lambda' + (1-j)\lambda + \varpi - 2\Omega' \\ &j\lambda' + (1-j)\lambda + \varpi' - 2\Omega' \end{aligned}$$

Tabela 3 – Argumentos de primeira ordem (parte direta)

Fonte: Informações retiradas e adaptadas de (MURRAY; DERMOTT, 1999).

A Equação 2.1 indica alguns argumentos de primeira ordem para combinações de ângulos ressonantes, onde j é um número inteiro, λ' , ϖ' e Ω' correspondem à longitude média, longitude do pericentro e longitude do nó ascendente, respectivamente,

do satélite mais externo, enquanto os sem prima correspondem as longitudes do satélite mais interno. Encontrar satélites capturados em uma ressonância de movimento médio de segunda ordem em sua atual conjectura é algo bem incomum, visto que segundo (BROZOVIĆ et al., 2020) atualmente na literatura apenas existem três casos, sendo: 4:2 Mimas-Tethys, 77:75 Anthe-Methone, e o caso aqui estudado, 13:11 Hippocamp-Proteus.

3 Objetivos

Um trabalho recentemente publicado por (BROZOVIC et al., 2020), relata que os satélites Proteus e Hippocamp estão próximos de uma ressonância de segunda ordem 13:11, cuja captura ocorreria daqui a milhões de anos, devido à migração de Proteus em direção oposta a Netuno.

Hoje, os semieixos maiores de Hippocamp e Proteus são aproximadamente: 105283 Km e 117647 km, respectivamente, de modo que essa clara proximidade Hippocamp-Proteus é acreditada como uma consequência do mecanismo de formação de Hippocamp. É importante salientar que a razão entre esses semieixos maiores é muito próxima à ressonância 13:11. Devido ao efeito das marés, Proteus está se afastando de Netuno, enquanto Hippocamp, praticamente não será afetado, pois sua massa é muito pequena comparada a outras luas próximas. Portanto, este sistema está envolvido em uma evolução convergente em direção à ressonância 13:11.

Exemplos de ressonâncias que reúnem pequenos satélites foram encontrados primeiramente em Saturno, onde o par de objetos já está capturado em uma ressonância específica de primeira ordem. Neste trabalho, consideramos o sistema Hippocamp-Proteus, próximos a uma futura ressonância de segunda ordem.

Este projeto tem como foco o estudo e a simulação em nosso integrador numérico da possível captura em ressonância de segunda ordem 13:11 entre Hippocamp-Proteus, além de suas implicações na variação e estabilidade na evolução da órbita destes satélites.

No capítulo 4 mostramos a definição de algumas das variáveis presentes no problema, assim como também é possível ver as equações que regem nossas simulações. No capítulo 5 e 6 apresentamos os resultados e discussões das simulações realizadas para o trabalho. Enquanto no capítulo 7 temos as considerações finais do trabalho e também as perspectivas futuras sobre o problema.

4 Equações do Movimento

Descrevemos neste capítulo os fenômenos que governam a dinâmica do Sistema Proteus-Hippocamp

4.1 Achatamento Planetário

Netuno, assim como os quatro planetas gasosos do Sistema Solar, possui uma alta velocidade de rotação em torno de seu próprio eixo, resultando em uma força centrífuga de direção contrária ao eixo de rotação, ocasionando uma maior concentração de massa em sua região equatorial. De modo geral, quanto mais rápido um corpo celeste gira, maior será seu achatamento. Isso resulta em um bojo de massa em seu equador, que cria uma diferença entre o raio polar e o raio equatorial do planeta, este fenômeno é chamado de achatamento planetário ([MURRAY; DERMOTT, 1999](#)). O achatamento planetário pode ser estudado através dos chamados harmônicos esféricos, sendo eles funções harmônicas que representam a variação espacial de um conjunto ortogonal de soluções da equação de Laplace, quando a solução é expressa em coordenadas esféricas. Neste trabalho, utilizaremos apenas os harmônicos esféricos de caráter zonal (variações latitudinais), devido à simetria azimutal do planeta. A perturbação gravitacional causada por esse achatamento é um dos possíveis responsáveis pela variação dos elementos orbitais dos corpos que orbitam este planeta ([DANBY; TEICHMANN, 1963](#)), principalmente se estes corpos em questão possuírem uma grande proximidade de seu hospedeiro, como os satélites estudados neste trabalho. Tais planetas possuem coeficientes que quantificam a magnitude de seu achatamento em cada ordem harmônica J_n .

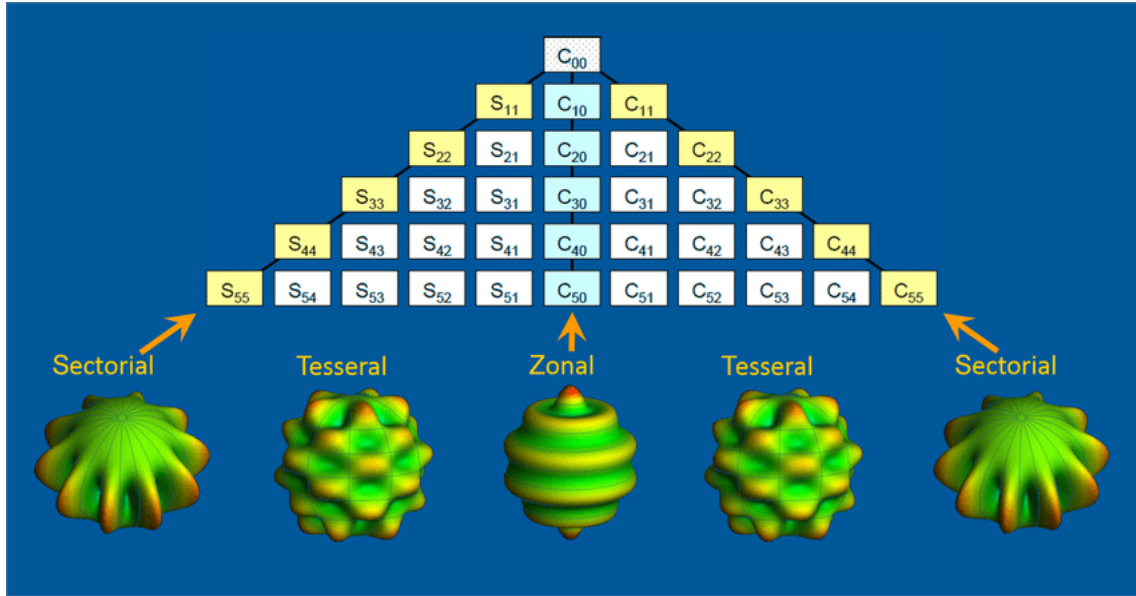


Figura 8 – Representação gráfica das funções harmônicas esféricas

Fonte: Figura retirada e adaptada de (INCE et al., 2019).

A Figura 8 ilustra as implicações físicas de cada tipo de harmônico esférico no corpo achatado, sendo eles zonais, setoriais e tesserais.

- Os harmônicos zonais formalizam as irregularidades latitudinais de um corpo esférico, onde são caracterizados por terem o índice $m = 0$ em seu fator C_{nm} .
- Os harmônicos setoriais formalizam as irregularidades longitudinais de um corpo esférico, onde são caracterizados por terem o índice $m = n$ em seu fator C_{nm} ou fator S_{nm} .
- Os harmônicos tesserais formalizam as irregularidades latitudinais e longitudinais de um corpo esférico, onde são caracterizados por terem o índice $n \neq m$ em seu fator C_{nm} ou fator S_{nm} .

É possível ver que o achatamento caracterizado apenas por perturbações latitudinais corresponde aos fatores C_{nm} onde $m = 0$, que também são chamados por J_n , onde n determina a ordem do achatamento. O fator J_2 por exemplo, corresponde ao bojo presente na região equatorial do planeta, enquanto o J_4 corresponde as saliências presentes nas regiões tropicais e assim sucessivamente.

Utilizamos os fatores J_2 e J_4 de Netuno em nosso integrador para uma realização mais fiel das simulações, visto que estes são os fatores de maior magnitude e consequentemente, representam a maior contribuição da perturbação gravitacional causada pelo achatamento planetário.

4.1.1 Potencial planetário

A característica geométrica oblata de Netuno resulta em uma perturbação gravitacional em todos os satélites de seu sistema, principalmente os mais internos, sendo assim necessário considerar essa perturbação em nossas equações para uma maior precisão em nossas simulações. Esse fato implica que, diferentemente dos satélites que trabalhamos, Netuno não pode ser considerado um corpo com massa pontual, e seu raio precisará ser considerado na formulação. Assim, temos a clássica equação, de acordo com (BROUWER; CLEMENCE, 2013):

$$F = -\frac{GMm}{r^3}\hat{r} \quad (4.1)$$

Onde, pela Segunda Lei de Newton, temos que $F = m\ddot{r}$, assim a Equação 4.1 pode ser escrita como:

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^3}\hat{r} \quad (4.2)$$

Segundo (WALKER; RESNICK; HALLIDAY, 2014), toda força conservativa pode ser escrita como o gradiente de uma função potencial, assim, segundo (BROUWER; CLEMENCE, 2013):

$$\ddot{r} = \nabla U \quad (4.3)$$

Onde U se refere ao próprio potencial de achatamento que aqui descreveremos, que para um corpo de massa pontual se define como:

$$U = \frac{GM}{r} \quad (4.4)$$

Como dito anteriormente, precisamos generalizar o potencial U para um corpo de massa não pontual, para isso, utilizaremos um elemento infinitesimal de massa em um ponto P de nosso corpo central, a fim de obter uma equação que some todas as contribuições infinitesimais de massa. Assim:

$$U = \frac{GM}{d} \quad (4.5)$$

Onde d é a distância do satélite ao ponto P de nosso planeta. Escrevendo d em termos de r e R_p , temos que $d = |r - R_p|$. Pela regra dos cossenos, podemos escrever a distância d como:

$$|r - R_p| = (r^2 + R_p^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{R}_p)^{1/2} = r \left[1 - 2\left(\frac{R_p}{r}\right)\cos(\theta) + \left(\frac{R_p}{r}\right)^2 \right]^{1/2} \quad (4.6)$$

De modo a representar o potencial U em forma de séries de potências, podemos expandir a eq (4.6) em séries de Taylor, logo, o potencial U ganhará a forma:

$$U = \frac{GM}{r} \left[1 + \left(\frac{R_p}{r}\right)\cos(\theta) + \left(\frac{R_p}{r}\right)^2 \frac{1}{2} (3\cos^2(\theta) - 1) + \dots \right] \quad (4.7)$$

Analisando os termos acompanhados por potências de $\left(\frac{R_p}{r}\right)^n$ dentro das chaves na equação (4.7), nota-se que os mesmos podem ser interpretados como Polinômios de Legendre. Tratando o potencial como soma dos n primeiros polinômios de Legendre, chegaremos a expressão:

$$U = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R_p}{r}\right)^n P_n \cos(\theta) \quad (4.8)$$

Onde P_n corresponde ao polinômio de Legendre de grau n que, pela fórmula de Rodrigues, tem a forma:

$$P_n(u) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{du^n} (u^2 - 1)^n \quad (4.9)$$

Devido a esfericidade do nosso corpo central, trataremos o problema em coordenadas esféricas, para podermos escrever o potencial como uma soma dos polinômios associados de Legendre, sendo amplamente utilizados em problemas envolvendo simetria axial. Assim:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \cos \lambda & x' &= s \cos \phi' \cos \lambda' \\ y &= r \cos \phi \sin \lambda & y' &= s \cos \phi' \sin \lambda' \\ z &= r \sin \phi & z' &= s \sin \phi'. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Onde λ e ϕ correspondem a longitude e latitude de r respectivamente, com (x, y, z) representando suas coordenadas. Logo, semelhantemente, λ' e ϕ' representam a longitude e latitude de s , com suas coordenadas sendo (x', y', z') . Segundo (MONTENBRUCK; GILL; LUTZE, 2002), a equação do potencial do achatamento planetário tomará forma de:

$$U = \frac{GM_{\oplus}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^n P_{nm}(\sin \phi) (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)) \quad (4.11)$$

Em que P_{nm} são os polinômios associados de Legendre, que possuem forma de:

$$P_{nm}(u) = (1 - u^2)^{m/2} \frac{d^m}{du^m} P_n(u) \quad (4.12)$$

Onde os coeficientes C_{nm} e S_{nm} presentes na Equação 4.11 descrevem a distribuição espacial da massa do Planeta. Como em nosso problema, Netuno possui contribuições significativas apenas dos coeficientes zonais, ou seja, latitudinais, sendo necessária a adaptação para o nosso propósito. Nota-se que na equação descrita por (MONTENBRUCK; GILL; LUTZE, 2002), os termos C_{nm} e S_{nm} são acompanhados por cossenos e senos que dependem de um multiplicador m da latitude λ do planeta. É fácil notar que se utilizarmos $m = 0$, a contribuição $(C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda))$ se simplifica apenas para o fator C_{nm} , assim:

$$U = \frac{GM_{\oplus}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^n P_{n0}(\sin \phi) C_{n0} \quad (4.13)$$

Concluindo, a Equação 4.13 descreve o potencial de achatamento zonal do Planeta devido a sua rotação.

4.2 Maré

O efeito de maré é um fenômeno dissipativo, que ocorre quando a força gravitacional de um corpo celeste causa deformação na superfície de outro corpo próximo. Isso acontece porque a força gravitacional não é uniforme em toda a extensão do corpo, causando uma diferença nas forças exercidas em distintas partes do objeto. Se tomarmos um exemplo de dois corpos a e b . A força gravitacional entre as partículas do corpo a localizadas na superfície mais próxima do corpo b , é maior do que a força gravitacional entre as partículas no centro do corpo a , que é maior do que a força gravitacional entre as partículas na porção mais distante do corpo a em relação ao corpo b . Portanto, em relação ao centro de a , a superfície mais próxima de b está sendo puxada, enquanto a parte mais longínqua está sendo repelida.

Este efeito é mais facilmente observado na Terra, onde a atração gravitacional da Lua causa a formação de duas protuberâncias de água nos oceanos, conhecidas como marés altas, por dia.

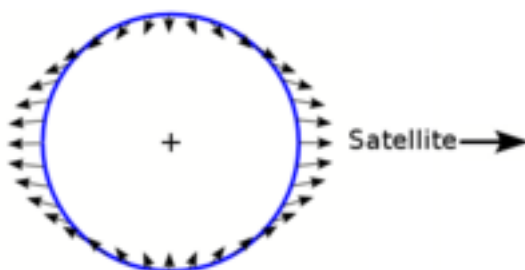


Figura 9 – Efeito de maré causado por um satélite natural.

Fonte: Imagem retirada e adaptada de ([WIKIPEDIA, 2023](#))

A Figura 9 ilustra justamente a protuberância causada pela atração gravitacional do satélite no corpo central. No caso da Terra, o fato dos oceanos serem corpos fluidos, acabam acompanhando a forma dessa protuberância gravitacional, resultando nas marés altas e baixas do dia.

A maré impacta nas alterações significativas da dinâmica orbital e na superfície de, principalmente, corpos próximos ao central. O bojo de maré ocorre pelo fato da maioria dos corpos em questão não serem perfeitamente rígidos, onde o tamanho

do bojo depende da distribuição interna de massa do corpo central. O efeito de maré causado por uma lua em um planeta pode impactar na dinâmica da sua evolução orbital e de rotação do planeta, devido à dissipação de energia causada pela fricção interna do corpo. Da mesma forma, o planeta também levanta uma maré no satélite, o que pode proporcionar efeitos importantes em órbitas excêntricas.

Basicamente, existem dois tipos de aplicações de efeitos de maré, a estática e a dinâmica. Na formulação da maré estática, o corpo central é considerado sendo um corpo deformável, porém elástico, que por definição, um corpo é considerado elástico quando pode ser deformado sem que haja atrito ou fricção interna entre suas partes. Isso significa que as diferentes partes do corpo podem se deslocar umas em relação às outras, sem que haja a perda de energia por atrito. Se a força externa que causou a deformação for removida, o corpo elástico retorna à sua forma original, sem perda de energia por fricção, pois a energia armazenada na deformação é liberada. Pelo fato dos corpos celestes não apresentarem forma elástica, a sua viscosidade implica em um atraso na deformação do corpo quando exposto à força de maré, que diferente da maré estática, o corpo perde energia interna pela fricção. Este efeito é conhecido por maré dinâmica (COLUCCI; FERRAZ-MELLO, 2010). Devido uma maior conexão com a realidade, focaremos em usar a maré dinâmica neste trabalho.

Segundo (ZHANG; HAMILTON, 2007), Proteus migra em direção oposta a Netuno, devido suas interações gravitacionais com a força de maré. (BROZOVIĆ et al., 2020) menciona em seu artigo, que Proteus e Hippocamp entraram em uma ressonância logo após Proteus migrar aproximadamente 40 km. Como é de nosso objetivo tentar reproduzir e analisar essa futura captura de Proteus com Hippocamp, utilizaremos a mesma formulação de maré descrita por (MIGNARD, 1979), que utiliza um modelo linear para relacionar atrasos com as frequências das ondas de maré, e realizar a migração. Segundo (MIGNARD, 1979), a contribuição da maré do corpo central na equação do movimento de um corpo orbitando-o é dada por:

$$\ddot{\mathbf{r}} = [\dots] + \frac{(m_0 + m_1)}{m_0 m_1} f - \frac{(m_0 + m_1)}{m_0 m_1} h \quad (4.14)$$

Onde, o coeficiente h é dado por:

$$h = 3k_{d0} \Delta t_0 \frac{G m_i^2 R_0^5}{r^{10}} [2\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) + r^2(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega}_0 + \mathbf{v})] \quad (4.15)$$

O coeficiente f é dado por:

$$f = -3k_{d1} \Delta t_1 \frac{G m_0^2 R_1^5}{r^{10}} [2\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) + r^2(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega}_1 + \mathbf{v})] \quad (4.16)$$

Os termos h e f representam a força de maré que ocorrem no corpo m_0 e m_1 respectivamente.

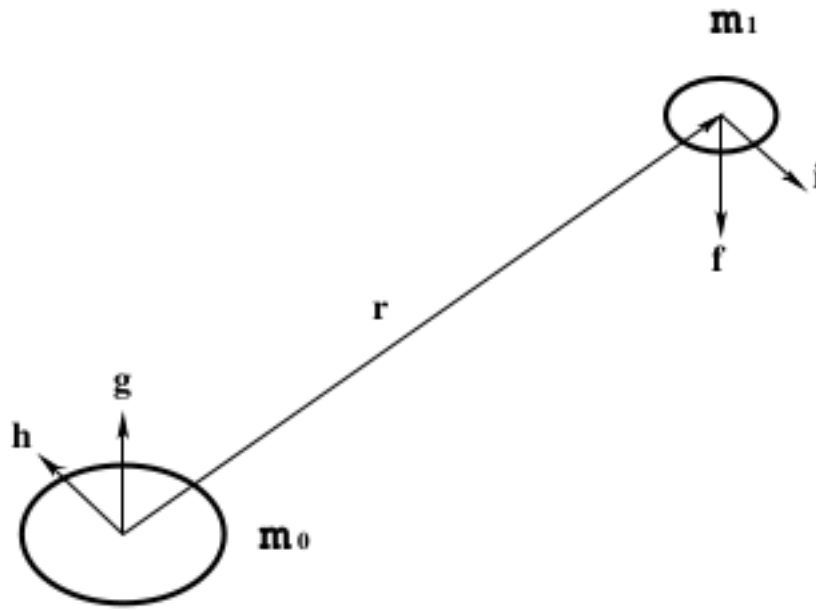


Figura 10 – Forças envolvidas na interação de maré no caso geral em que os dois corpos são deformados.

Fonte: Figura e legenda retiradas e adaptadas de (COLUCCI; FERRAZ-MELLO, 2010)

A Figura 10 demonstra todas as forças envolvidas na interação de maré onde os dois corpos são deformados, incluindo suas respectivas forças de reação, $i = -h$ e $g = -f$. Neste trabalho, utilizamos os satélites envolvidos como massas pontuais, portanto apenas adotamos as contribuições da força h atuando no satélite.

Na Equação 4.14 o primeiro termo será apresentado na próxima sessão, enquanto na Equação 4.16, k_{d0} é o termo de Love do corpo central, Δt_0 é o termo do atraso de frequência, G é a constante de gravitação universal, m_0 e m_1 são as massas do corpo central e do satélite respectivamente, R_0 é o raio equatorial do planeta, r é a distância entre o corpo central e o satélite, $\vec{r}$ e $\vec{v}$ são os vetores, posição e velocidade do satélite respectivamente, e $\vec{\Omega}_0$ representa a velocidade angular de rotação do planeta.

4.3 Equações do movimento

Apresentamos as equações que governam o sistema envolvendo os satélites utilizados no estudo, e o planeta como corpo central em nossas simulações.

O sistema de coordenadas está fixado no plano equatorial do planeta em questão, e sua origem está localizada no centro de massa do mesmo.

A montagem das equações será baseada no mesmo formalismo dado em (LAINEY; DURIEZ; VIENNE, 2004).

Em nossas simulações, utilizamos somente o achatamento planetário em relação aos harmônicos zonais de até ordem 4 (J_2 e J_4), cuja representação é dada pela Equação 4.17.

$$U_k = \sum_{n=2}^{\infty} -\frac{R^n}{r_k^{n+2}} J_n P_n(\sin \phi_k) \quad (4.17)$$

Onde k se refere ao k -ésimo corpo utilizado.

Temos presente na 4.17 $P_n(\sin \phi_k)$ que são os Polinômios de Legendre de grau n , e ϕ_k representa a latitude do k -ésimo corpo do sistema.

Consideramos em nossas integrações as perturbações apenas dos harmônicos esféricos zonais J_2 e J_4 , assim, em $P_n(\sin \phi_k)$ trabalharemos apenas com $n = 2$ e $n = 4$.

Pela fórmula de Rodrigues, temos que:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^n - 1)}{d^n x} \quad (4.18)$$

Logo, se aplicarmos os polinômios de Legendre da 4.17, teremos:

$$P_2(\sin \phi_k) = \frac{1}{2} (3 \sin^2 \phi_k - 1) \quad (4.19)$$

$$P_4(\sin \phi_k) = \frac{1}{8} (35 \sin^4 \phi_k - 30 \sin^2 \phi_k + 3) \quad (4.20)$$

Tem-se que pela geometria da latitude θ :

$$\sin \phi_k = \frac{z_k}{r_k} \quad (4.21)$$

Assim, equações de 4.19 e 4.20 podem ser expressas por:

$$P_2\left(\frac{z_k}{r_k}\right) = \frac{1}{2} \left(3 \frac{z_k^2}{r_k^2} - 1\right) \quad (4.22)$$

$$P_4\left(\frac{z_k}{r_k}\right) = \frac{1}{8} \left(35 \frac{z_k^4}{r_k^4} - 30 \frac{z_k^2}{r_k^2} + 3\right) \quad (4.23)$$

Escrevendo r_k em função das coordenadas cartesianas x, y , e z , teremos:

$$r_k = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4.24)$$

Notamos assim que, U_k pode ser escrita explicitamente em termos de (x_k, y_k, z_k) portanto, todas as contribuições do achatamento de Netuno devido aos harmônicos zonais J_2 e J_4 é conhecida.

Essa contribuição do achatamento se soma então à parte clássica e conhecida do problema de N corpos:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_i = & -\frac{G(m_0 + m_i)}{r_i^3} \vec{r}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N Gm_j \left(\frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{r_{ij}^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right) \\ & + G(m_0 + m_i) \nabla_i U_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N Gm_j \nabla_j U_j \end{aligned} \quad (4.25)$$

Onde a operação $\nabla_i U_i$ se refere ao gradiente do potencial $U_i(x_i, y_i, z_i)$

$$\nabla_i U_i = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \vec{i} + \frac{\partial U_i}{\partial y_i} \vec{j} + \frac{\partial U_i}{\partial z_i} \vec{k} \quad (4.26)$$

Desta maneira, nossas integrações utilizam até 6 corpos (mais o corpo central) nas simulações, ao tomarmos os componentes da Equação 4.25 temos a nossa disposição todas as 9 EDOs de 2ª ordem necessárias para as simulações em nosso integrador RADAU15.

Note que a primeira linha da expressão 4.25 se refere a contribuição clássica do problema de N corpos, e a segunda linha se refere a contribuição do efeito total do achatamento dos harmônicos zonais sob cada corpo do sistema.

Onde:

m_0 é a massa do planeta utilizado.

m_i é a massa de cada um dos 3 satélites utilizados em nossas simulações.

Desta forma, montamos os principais termos das equações que regem nossa simulação, porém, para conseguir reproduzir a captura ressonante de Proteus e Hippocamp, é necessária a utilização de mais um termo em nossas equações que represente a migração de Proteus.

Portanto, em nosso problema utilizamos o formalismo de equações descritas por (MIGNARD, 1979) que usa atrasos com as frequências das ondas de maré, onde:

$$h = 3k_{d0} \Delta t_0 \frac{Gm_i^2 R_0^5}{r^{10}} [2 \vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{v}) + r^2 (\vec{r} \times \vec{\Omega}_0 + \vec{v})] \quad (4.27)$$

Utilizaremos o fator de dissipação Q , que mede a energia dissipada do planeta para relacionar os atrasos de frequência de maré, visto que segundo (NOGUEIRA; BRASSER; GOMES, 2011), $\Delta t = \frac{1}{Q}$, onde Ω_n é a taxa de rotação de Netuno.

Assim, as equações finais que descrevem o movimento de um corpo perturbado pelo achatamento planetário, onde neste trabalho será aplicado apenas a Proteus, além da contribuição gravitacional dos outros n corpos e o efeito de maré, será:

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{r}}_i = & -\frac{G(m_0 + m_i)}{r_i^3} \vec{r}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^6 Gm_j \left(\frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{r_{ij}^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right) \\
& + G(m_0 + m_i) \nabla_i U_i + \sum_{j=1, j \neq i}^6 Gm_j \nabla_j U_j - \frac{m_0 + m_i}{m_0 m_i} h
\end{aligned} \tag{4.28}$$

4.3.1 Condições iniciais

Esta seção é dedicada a apresentar as condições iniciais dos três satélites aqui utilizados, além de outros fatores constantes usadas em nossas simulações.

	Hippocamp
X (u.a.)	-6.237147062991196E-04
Y (u.a.)	3.257379207008133E-04
Z (u.a.)	6.186056097448509E-06
VX (u.a./dia)	-2.152651365885763E-03
VY (u.a./dia)	-4.126911839356214E-03
VZ (u.a./dia)	-4.721965640708985E-05
GM (km^3/s^2)	0.0014

Fonte: Dados retirados de (NASA, 2023) (BROZOVIĆ et al., 2020). Condições iniciais correspondentes ao dia 01/01/2023 as 00h00

	Proteus
X (u.a.)	-5.770504754447760E-05
Y (u.a.)	-7.838688556795333E-04
Z (u.a.)	-1.428066345213539E-05
VX (u.a./dia)	4.392579407414268E-03
VY (u.a./dia)	-3.215573413292354E-04
VZ (u.a./dia)	-2.253061584420606E-05
GM (km^3/s^2)	2.5886

Fonte: Dados retirados de (NASA, 2023) (BROZOVIĆ et al., 2020). Condições iniciais correspondentes ao dia 01/01/2023 as 00h00.

	Tritão
X (u.a.)	1.980716809408075E-03
Y (u.a.)	-1.142743863129610E-03
Z (u.a.)	-6.280227733096199E-04
VX (u.a./dia)	-1.383537847337433E-03
VY (u.a./dia)	-1.992163057865795E-03
VZ (u.a./dia)	-7.385169839112534E-04
GM (km^3/s^2)	1428.495

Fonte: Dados retirados de (NASA, 2023) (BROZOVIĆ et al., 2020). Condições iniciais correspondentes ao dia 01/01/2023 as 00h00.

	Netuno
GM (km^3/s^2)	6835099.97
Raio (km)	24766
J_2	3408.43e-6
J_4	-33.40e-e
Love	0.407
Ω_0 (rad/dia)	9.3604

Fonte: Dados retirados de (NASA, 2023) (BROZOVIĆ et al., 2020), (NOGUEIRA; BRASSER; GOMES, 2011). Condições iniciais correspondentes ao dia 01/01/2023 as 00h00

5 Simulações

Todas as simulações aqui apresentadas foram realizadas através do integrador numérico RADAU de ordem 15, elaborado por Edgar Everhart ([EVERHART, 1985](#)). O algoritmo utilizado pelo integrador RADAU usa espaçamentos de Gauss-Radau, assim como o integrador Runge-Kutta ([BUTCHER, 1964](#)), porém o RADAU pode ser facilmente escrito em uma ordem de precisão muito mais alta, tornando seus resultados mais confiáveis para simulações de órbitas de corpos celestes. O integrador numérico Radau15 é uma técnica de integração numérica utilizada para resolver equações diferenciais ordinárias (EDOs), com condições iniciais rigorosas.

Para tentar reproduzir a captura ressonante entre Proteus e Hippocamp, simulamos em nosso integrador, a evolução orbital de 3 satélites, fora o planeta central.

Em seu artigo, ([BROZOVIĆ et al., 2020](#)) utiliza o fator de dissipação de maré de Netuno sendo $Q_N = 20000$. Este fator que define a taxa no qual o satélite migra para fora de seu planeta, no caso, Proteus. Nessa etapa, utilizando a formulação de equação de maré de ([MIGNARD, 1979](#)) e o mesmo valor de Q_N que os autores, a captura entre Hippocamp e Proteus ocorre em cerca de 18 milhões de anos, onde Proteus avança cerca de 40 km e entra na região ressonante, assim como descrito no artigo de referência.

Hippocamp

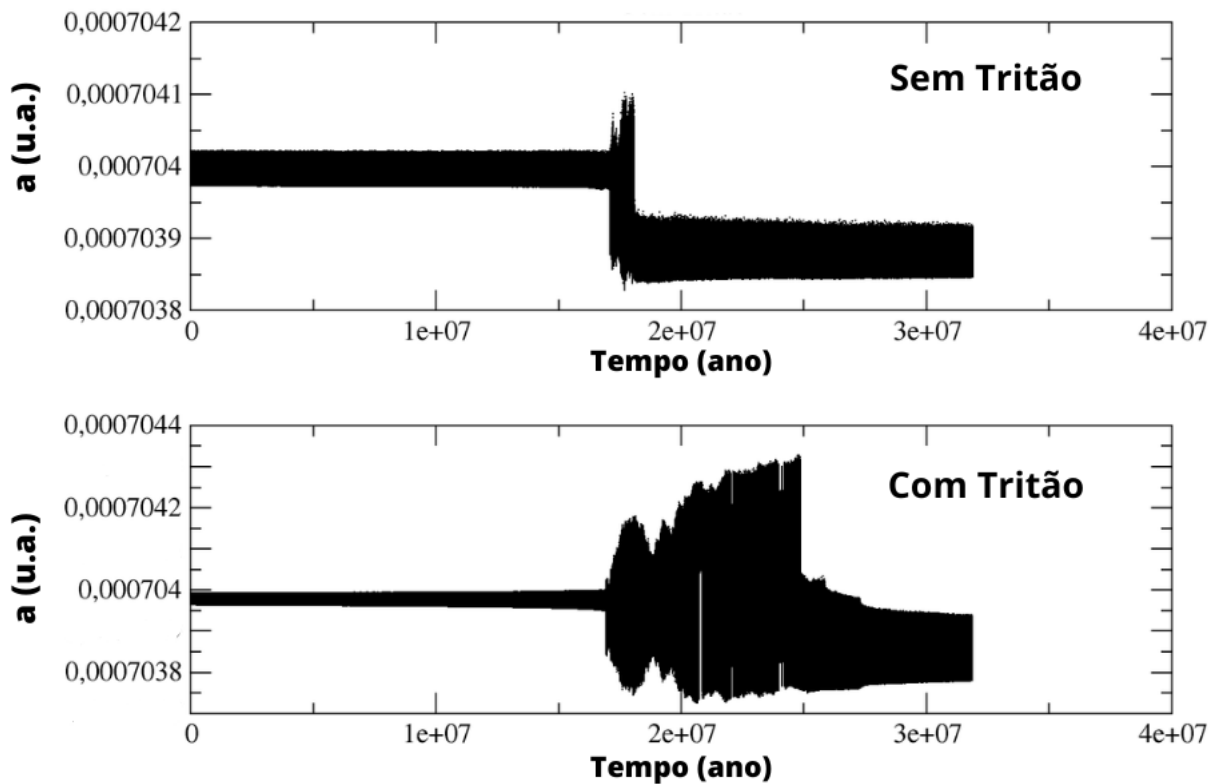


Figura 11 – Comparativo entre o semieixo maior de Hippocamp nas simulações do sistema Hippocamp-Proteus, contra a introdução de Tritão no problema.

Fonte: Figura de autoria própria

A Figura 11 ilustra um exemplo da evolução do semieixo maior de Hippocamp no momento da possível captura, mencionada por volta de 18 milhões de anos. O que de fato se mostra consistente com o relato dos autores.

A presença de Tritão na integração é fundamental devido a sua gigantesca massa em relação aos demais satélites de Netuno, como é possível observar na Figura 11, que mostra a evolução do semieixo maior de Hippocamp adentrando a possível região ressonante 13:11. Onde o gráfico a ilustra o comportamento do semieixo maior de Hippocamp quando é efetuada a simulação com apenas Proteus e Hippocamp, enquanto o gráfico b expõe o comportamento de Hippocamp quando o sistema é simulado junto a Tritão e Proteus.

É possível notar que a perturbação gravitacional de Tritão é suficientemente forte para alterar o comportamento da captura ressonante entre Proteus e Hippocamp. Portanto, a inclusão de Tritão no sistema é fundamental para podermos recriar fielmente

a captura ressonante. É importante mencionar que a partir deste ponto, todos os gráficos referentes as simulações terão a influência de Tritão no sistema, mesmo que não seja apresentado graficamente a evolução de suas órbitas.

Conforme mencionado, (BROZOVIĆ et al., 2020) apresentaram uma primeira simulação do sistema Proteus, Hippocamp e Tritão. A discussão dos autores é extremamente breve, aparentemente um único valor do fator de dissipação foi utilizado ($Q_n = 20000$), e não é informado se de fato no futuro Hippocamp será capturado ou não na ressonância 13:11. Apenas é dada uma menção de que em 18 milhões de anos, Proteus migrará por volta de 40km, quando a ressonância Hippocamp-Proteus deverá ser atingida.

Neste trabalho, foram realizadas várias simulações, partindo de posições originais (catálogo Horizons) usando diferentes fatores de dissipação da maré, porém, uma vez fixados no início, estes fatores são mantidos até o fim da integração, sem interrupção.

Os resultados mostraram que o fato da diminuição da velocidade de migração de Proteus (diferentes valores do fator Q_n), não parece ser um fator determinante no processo de captura em libração ou escape, ou ainda, no intervalo de tempo em que o sistema permanece capturado na ressonância 11:13. As capturas obtidas pouco se diferem entre si, ou seja, tais capturas sempre são sistematicamente temporárias, de durações a princípio aleatórias, de efeitos, a princípio quase desprezíveis. Visando economizar tempo de processamento e de aumentar o número de simulações, adotamos também outra estratégia: evoluímos a integração, usando um fator de dissipação Q_n , similar ou sempre mais lento do que o utilizado por (BROZOVIĆ et al., 2020), até um determinado ponto. Este ponto obviamente não é bem definido e nem único, mas de modo geral, tomamos como referência um ponto (ou tempo) anterior aos 18 milhões de anos apontados por (BROZOVIĆ et al., 2020). A partir deste ponto, redefinimos um novo fator de dissipação Q_n , agora bem maior que o anterior, e a simulação era prosseguida, em geral, até que Hippocamp era desestabilizada. Conforme veremos posteriormente, a desestabilização de Hippocamp parece ser fatal se a simulação atingir um tempo em que o semi-eixo de Proteus seja aproximadamente $a = 117750$ km.

Foram realizadas dezenas de simulações com diferentes Q_n . Em nenhum teste foi possível encontrar uma captura permanente. Em todos os casos, uma captura em libração acaba mudando para circulação, aparentemente sem nenhuma razão específica. O tempo de permanência em libração também não tem nenhuma razão clara. Em todas as simulações, Tritão foi incluído e sua contribuição pôde ser avaliada em algumas simulações feitas como teste no sistema.

Das 22 possíveis combinações de ângulos ressonantes da ressonância 11:13,

as prováveis e dominantes são:

$$\phi_1 = 11\lambda_H - 13\lambda_P + 2\varpi_H \quad (5.1)$$

$$\phi_2 = 11\lambda_H - 13\lambda_P + 2\varpi_P \quad (5.2)$$

E ainda talvez:

$$\phi_3 = 11\lambda_H - 13\lambda_P + 2\Omega_H \quad (5.3)$$

De modo geral, nunca foi percebida alguma libração de ϕ_2 ou ϕ_3

Acredita-se que as ressonâncias de primeira ordem são originárias de um processo final de evolução dinâmica do sistema de satélites de um planeta quando submetidas ao efeito de maré, assim, na grande maioria dos casos, os satélites tendem a se afastar dos planetas quando sujeitos ao arrasto da maré. Dessa forma, ao final do processo de evolução migratório, a posição em que observamos os atuais satélites, pode-se perceber que eles estão aparentemente em posições privilegiadas, onde encontros próximos com outros satélites nunca ocorrem, justamente porque as frequências orbitais dos seus movimentos médios são tais quais conjunções entre eles, e sempre ocorrem em posições de forma que os pericentros de suas órbitas permitam a máxima distância no momento do alinhamento. Ressonâncias de primeira ordem em geral são as ideais neste caso. Como o problema tratado não é um caso de ressonância de primeira ordem, mas sim de segunda ordem, a evolução do nosso sistema não necessariamente terá que conduzir a um estado final que garanta um tipo de evolução final, tal qual se pode notar nos sistemas de primeira ordem. Realizamos enfim uma série de simulações as quais serão mostradas a seguir.

Apresentam-se nas figuras 12 a 14, gráficos da integração que corresponde aos elementos orbitais de Hippocamp, como semieixo maior (em unidade astronômica), excentricidade, inclinação, e o ângulo librante ϕ correspondente a ressonância 13:11. Por ser uma simulação de aproximadamente 30 milhões de anos, selecionamos apenas algumas das figuras mais interessantes para apresentação.

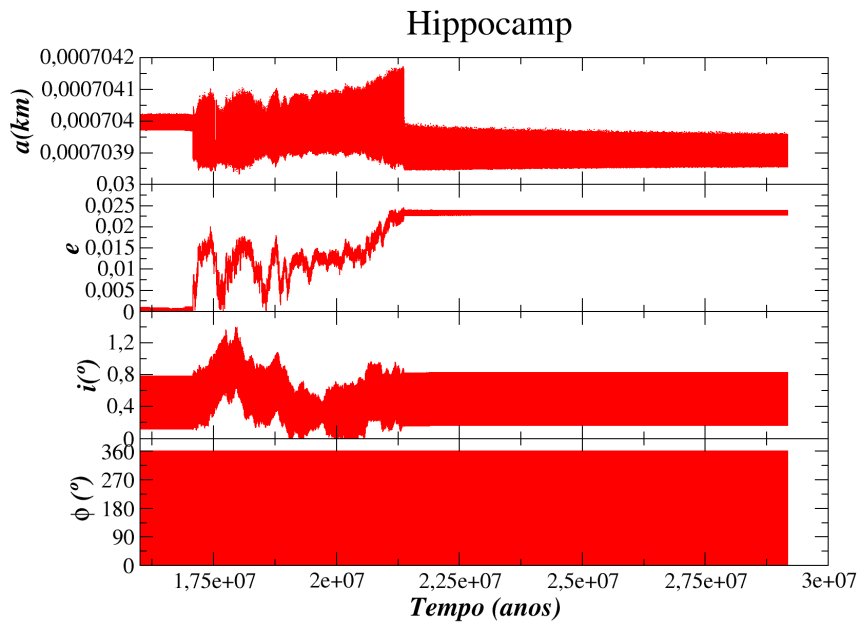


Figura 12 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador com um fator de dissipação $Q_n = 20000$, além do angulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=16\text{Myrs}$ a $t=30\text{Myrs}$ aproximadamente.

A Figura 12 mostra um panorama do comportamento de Hippocamp em toda a integração, onde se nota que sua órbita começa a apresentar um comportamento irregular em torno de 18 milhões de anos, e acaba se estabilizando por volta de 22 milhões de anos.

Agora, para uma melhor visualização do que ocorre na simulação, apresento a Figura 13 que exibe uma ampliação desta simulação no período entre 21 a 21,2 milhões de anos.

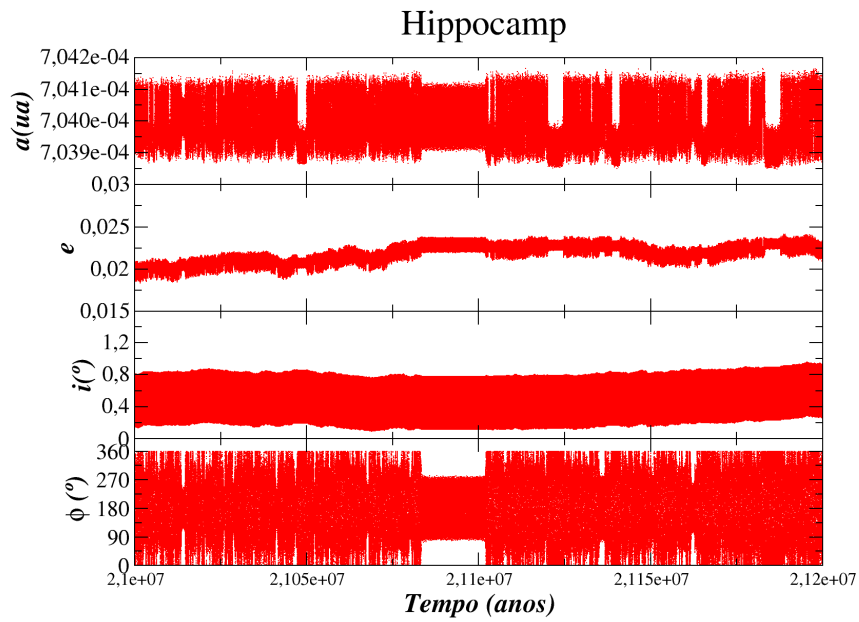


Figura 13 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador com um fator de dissipação $Q_n = 20000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=21\text{Myrs}$ a $t=21.2\text{Myrs}$ aproximadamente.

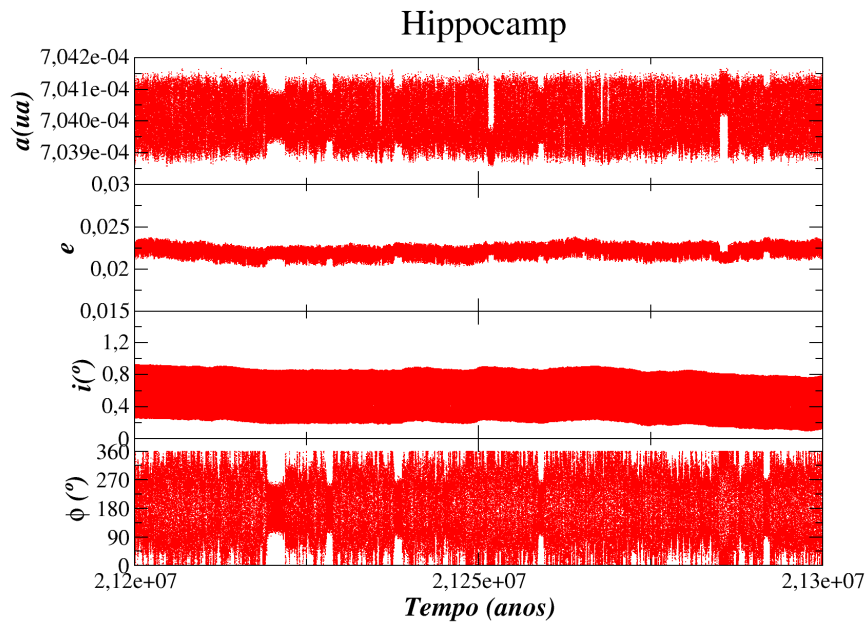


Figura 14 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador com um fator de dissipação $Q_n = 20000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=21.2\text{Myrs}$ a $t=21.3\text{Myrs}$ aproximadamente.

Nas figuras 15 e 16 apresentam-se os gráficos correspondentes a evolução dos elementos orbitais de Proteus para o mesmo período de integração. Onde na Figura 15

mostra-se um panorama da integração, onde pode-se notar que como Proteus migra se afastando de Netuno, seu semieixo maior cresce continuamente. A Figura 16 mostra uma ampliação desta mesma integração no período entre 21 a 21,2 milhões de anos.

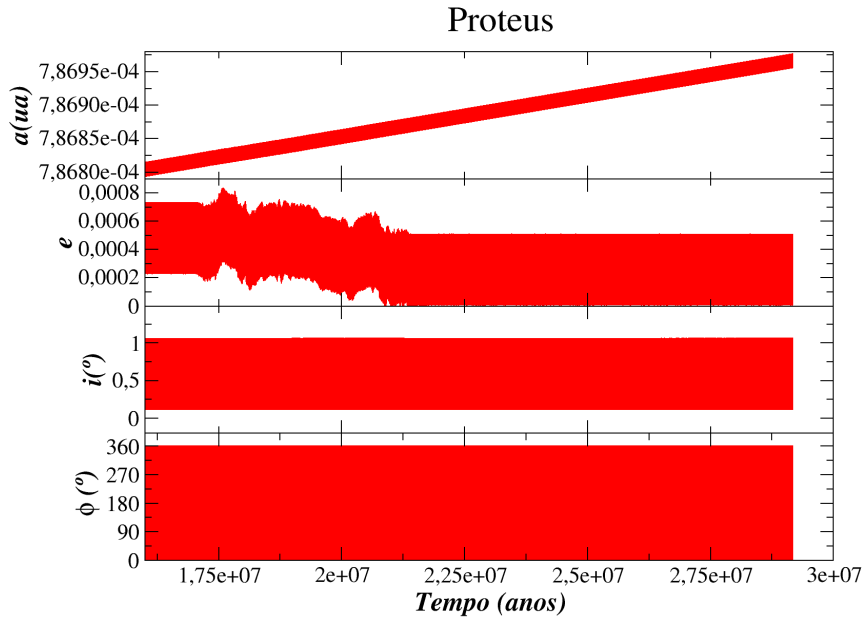


Figura 15 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Proteus (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador com um fator de dissipação $Q_n = 20000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=16\text{Myrs}$ a $t=30\text{Myrs}$ aproximadamente.

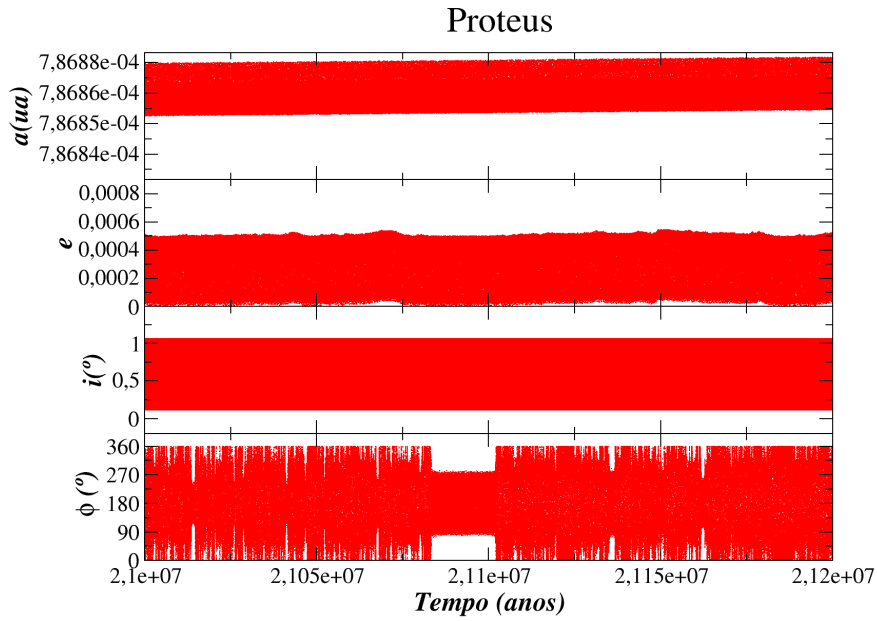


Figura 16 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Proteus (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador com um fator de dissipação $Q_n = 20000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=21\text{Myrs}$ a $t=21.2\text{Myrs}$ aproximadamente.

Pelos diversos gráficos apresentados em nossas integrações com $Q_n = 20000$, de fato, Proteus e Hippocamp entraram em uma região ressonante 13:11, pois ainda que por um curto período, o ângulo ϕ librou em torno de 180 graus. Testamos todas as 22 combinações ressonantes de 2ª ordem disponíveis em (MURRAY; DERMOTT, 1999), entretanto, apenas a combinação de Lindblad apresentou a captura.

A Figura 13 exibe o ângulo $\phi = 13\lambda_p - 11\lambda_h - 2\varpi_h$ evoluindo com o tempo. Nota-se que a maior captura da ressonância aparece por volta de 26 milhões de anos, onde o ângulo ϕ passa a librar por um período, porém volta a circular novamente.

Em toda a simulação, o ângulo ressonante não apresenta aspecto estável, pois o mesmo em diversas ocasiões passa a ser de caráter oscilatório para caráter circular. Isso pode significar que a captura não ocorreu, visto que o Hippocamp passa a ter um aspecto caótico por um curto período em sua órbita, como pode ser visto na Figura 12.

5.0.1 $Q_n = 60000$

Agora, visto que não obtivemos estabilidade na captura de Hippocamp e Proteus, decidimos utilizar o fator de dissipação $Q_n = 60000$, ou seja, Proteus passa a migrar cerca de 3 vezes mais lento que na primeira simulação, pois uma hipótese era que Proteus entrou na captura, mas saiu muito rápido devido a sua velocidade de migração.

Assim, as figuras 17 a 23 correspondem a evolução dos elementos orbitais

de Hippocamp, a medida que Proteus migra com uma velocidade 3 vezes mais lenta do que na primeira simulação. Por se tratar de uma simulação de aproximadamente 70 milhões de anos, foram selecionadas apenas as figuras que apresentam alguma variação interessante em sua evolução.

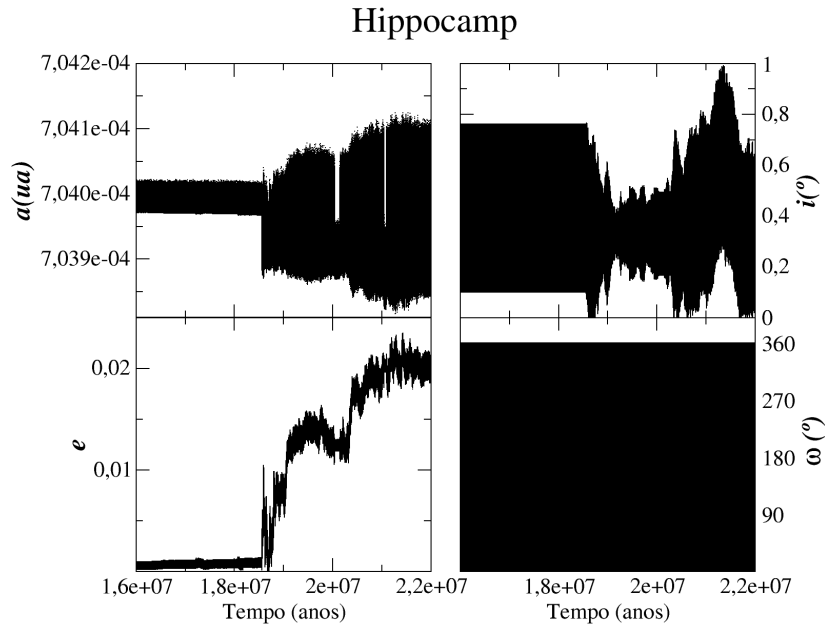


Figura 17 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 60000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=16\text{Myrs}$ a $t=22\text{Myrs}$ aproximadamente.

Observemos agora as Figura 18, Figura 19, Figura 20 e Figura 21, onde temos uma típica captura temporária, bastante natural, onde o semieixo maior, excentricidade e inclinação permanecem estáveis no mesmo período em que o ângulo ressonante apresenta libração.

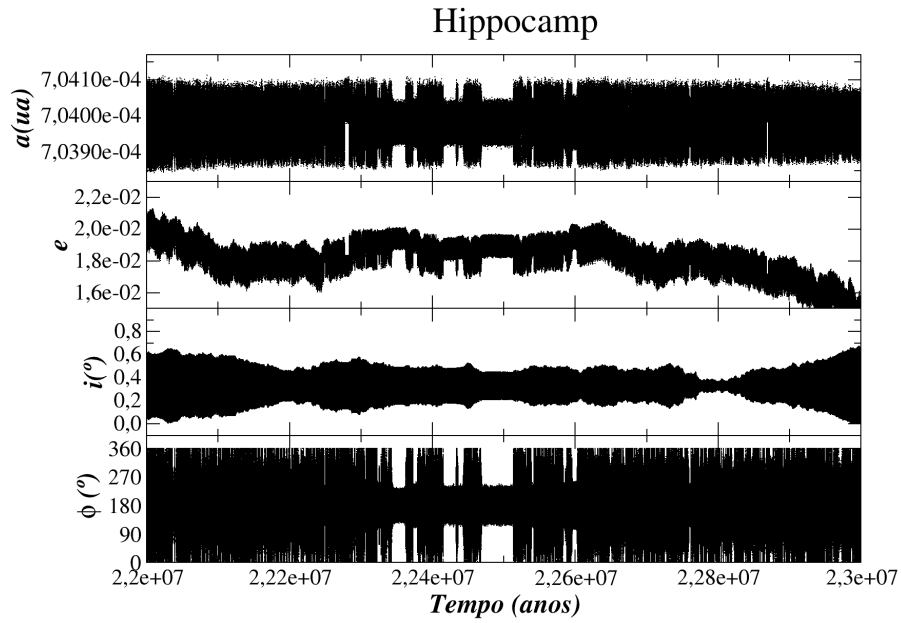


Figura 18 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 60000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=22\text{Myrs}$ a $t=23\text{Myrs}$ aproximadamente.

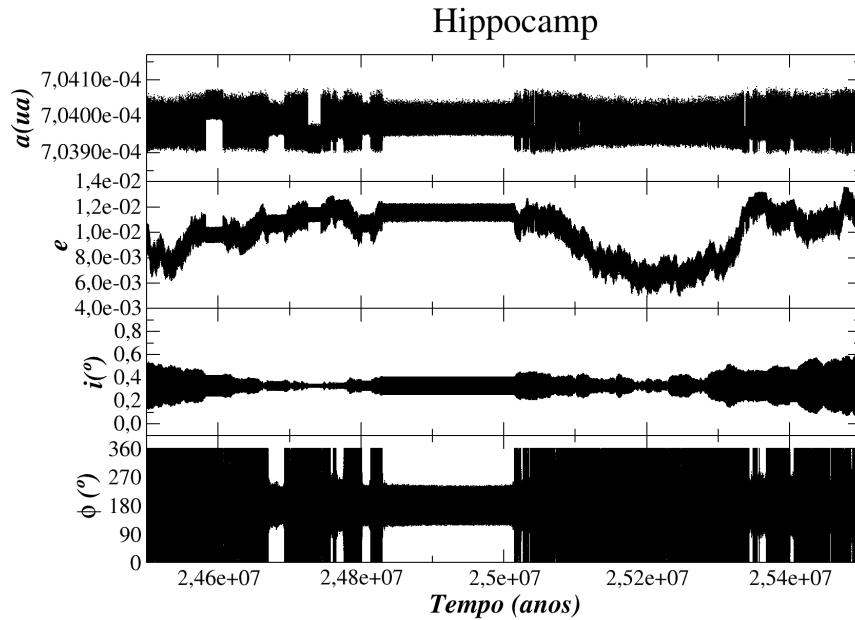


Figura 19 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 60000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=24.6\text{Myrs}$ a $t=25.5\text{Myrs}$ aproximadamente.

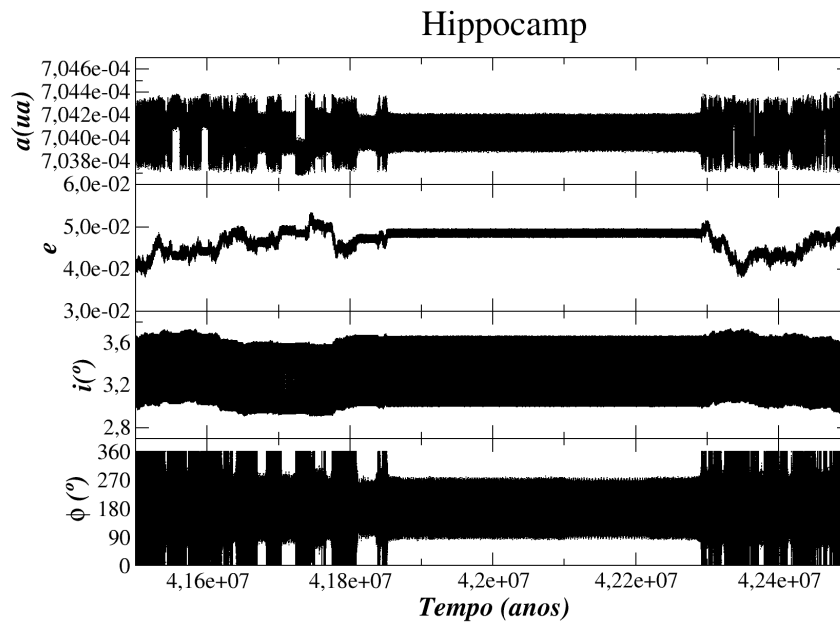


Figura 20 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 60000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=41.6\text{Myrs}$ a $t=42.5\text{Myrs}$ aproximadamente.

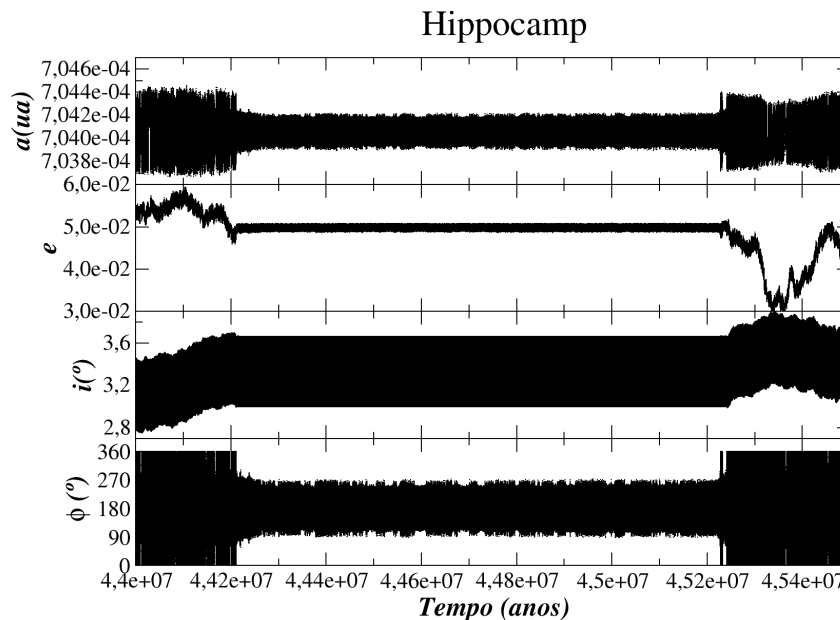


Figura 21 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 20000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=44\text{Myrs}$ a $t=45.5\text{Myrs}$ aproximadamente.

As figuras 22 e 23 ilustram a evolução de Hippocamp após alguns milhões de anos, onde ao final da Figura 22 percebesse um aumento expressivo sem seu

semieixo e excentricidade, e por fim na Figura 23, Hippocamp sofre um crítico aumento em seu semieixo, excentricidade e inclinação, até escapar de sua órbita, pois sua excentricidade chega a $e = 1$.

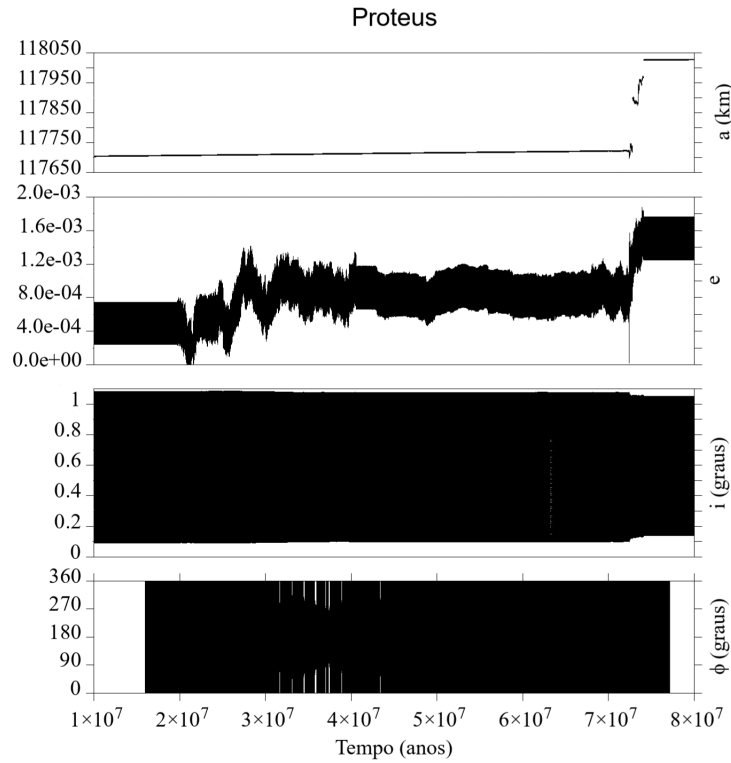


Figura 22 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 60000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=60\text{Myrs}$ a $t=65\text{Myrs}$ aproximadamente.

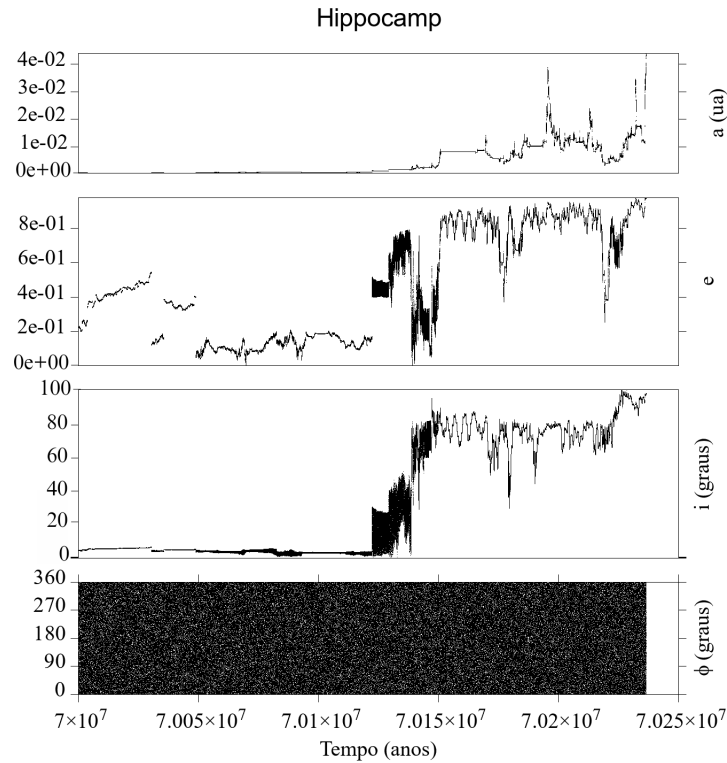


Figura 23 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 60000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=70\text{Myrs}$ a $t=70.4\text{Myrs}$ aproximadamente.

Da mesma simulação, temos nas figuras 24 e 25, os gráficos que correspondem a evolução dos elementos orbitais de Proteus, no mesmo período de integração. As Figura 24 e Figura 25 mostram que a excentricidade de Proteus permanece estável no mesmo período em que o ângulo ressonante libra. Fato que corrobora que houve apenas uma captura temporária.

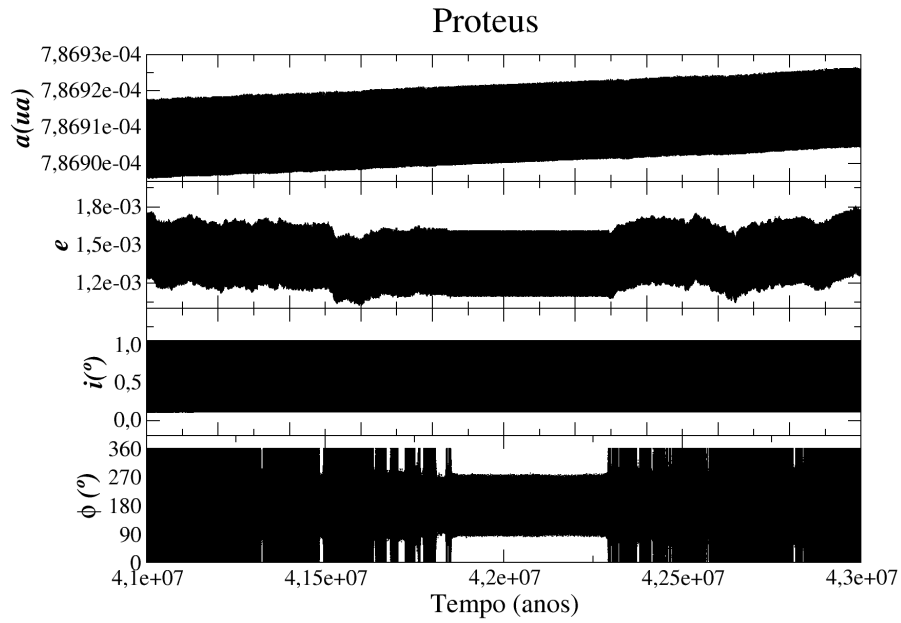


Figura 24 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Proteus (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 60000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=41\text{Myrs}$ a $t=43\text{Myrs}$ aproximadamente.

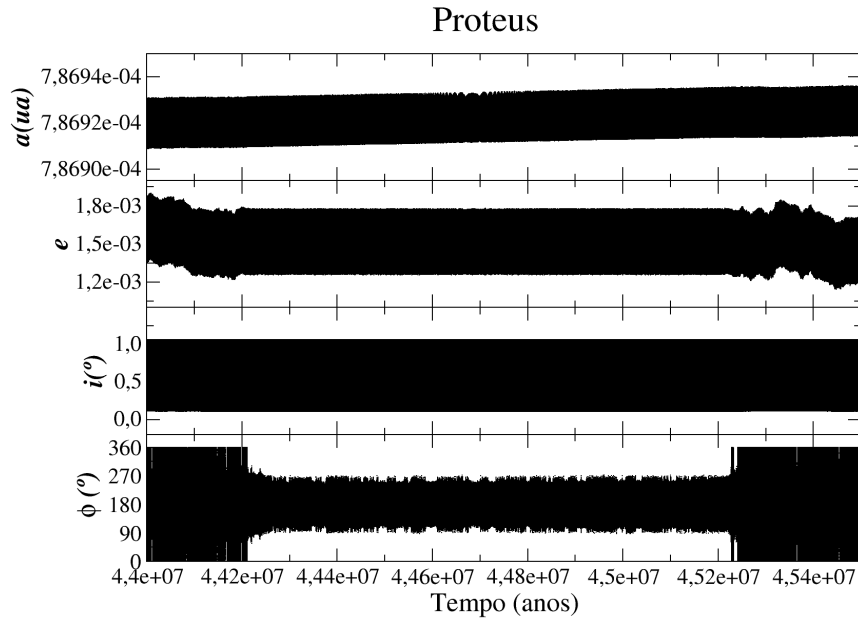


Figura 25 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Proteus (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 60000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=44\text{Myrs}$ a $t=45.5\text{Myrs}$ aproximadamente.

Através das figuras, nota-se que nesta simulação o ângulo ressonante $\phi = 13\lambda_p - 11\lambda_h - 2\varpi_h$ librou rapidamente em períodos distintos da integração, é interessante

a dinâmica presente na Figura 21, onde ϕ permanece librando por volta de 1 milhão de anos, tempo total maior que qualquer outra libração obtida na primeira simulação. Porém, conclui-se que ainda assim, a captura não ocorreu com sucesso, pois os dois satélites não permaneceram capturados em ressonância por um período maior que aproximadamente 1 milhão de anos, pois assim como anteriormente, ϕ hora se manifesta em caráter libratório, e hora em caráter circular.

Dado que os semieixos maiores de Proteus e Hippocamp ainda não estão em uma razão exata 11:13, a medida que o semieixo maior do primeiro cresce lentamente, e com o semieixo maior de Hippocamp praticamente estacionário (não sofre o efeito da maré), a razão 11:13 lentamente vai sendo atingida. Uma vez que isso ocorre, o ângulo ressonante, inicialmente em circulação, tende a librar (PEALE, 1999). De fato, na Figura 18, Figura 19 e Figura 20 nota-se o aparecimento da libração, mas ela tem um tempo de vida razoavelmente curto, pois logo escapa e surge a circulação. Observe que durante a libração, o semieixo maior de Hippocamp, sua excentricidade e inclinação permanecem praticamente constantes nesse intervalo de tempo. Por alguma razão ainda incerta, essa libração termina e o ângulo ϕ começa a circular. Em muitos problemas clássicos, uma vez em libração, a dinâmica do problema não permite que algumas aproximações (conjunções) críticas do satélite (Hippocamp) com o vizinho (Proteus) possam ocorrer, ou seja, se uma sequência de aproximações críticas desta natureza ocorrerem, o satélite (Hippocamp) poderia se desestabilizar, dependendo da sua excentricidade e também da de Proteus. Nas outras seções, veremos casos muito semelhantes a esses.

5.1 $Q_n = 80000$

Na seção anterior, os resultados das simulações mostraram que diminuir a velocidade de migração de Proteus implica em um período maior em que o par de satélites permanecem na captura antes de escapar. Visto isso, agora diminuámos ainda mais a taxa com que Proteus migra, pois por hipótese, se reduzirmos mais a velocidade de migração de Proteus, o esperado é que a captura ressonante seja mais estável em um período maior de tempo. Utilizamos agora o fator $Q_n = 80000$ para colocar em teste essa hipótese, resultando em uma taxa de migração de Proteus 4 vezes mais lenta que a simulação original.

Abaixo temos as figuras dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior “a”, excentricidade “e”, inclinação “i”), assim como o ângulo ressonante ϕ , onde $\phi = 13\lambda_p - 11\lambda_h - 2\varpi_h$, correspondentes com a simulação integrada utilizando o fator $Q_n = 80000$.

A Figura 26 expõe um panorama do comportamento de Hippocamp em toda

a integração, onde sua órbita começa a desestabilizar radicalmente em torno de 80 milhões de anos.

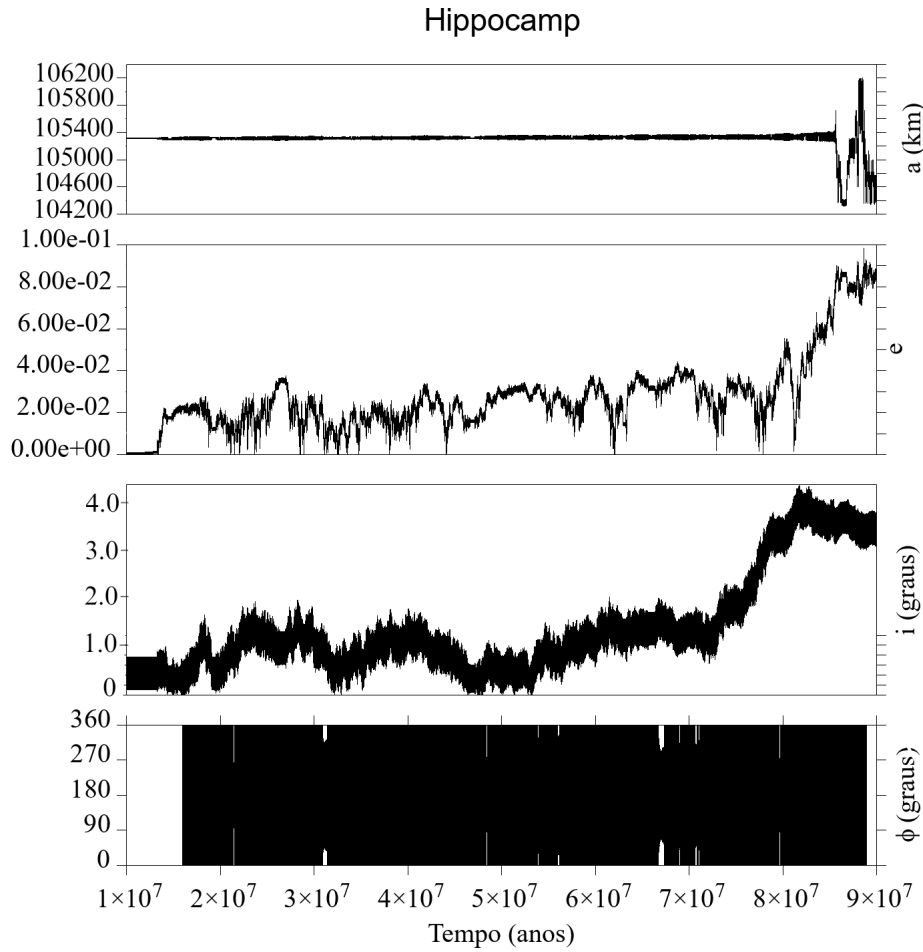


Figura 26 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 80000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=16\text{Myrs}$ a $t=90\text{Myrs}$ aproximadamente.

Agora, para uma melhor visualização do que ocorre na simulação, apresento a Figura 27 que demonstra uma ampliação desta simulação no período entre 30 a 35 milhões de anos. Nota-se que, novamente, a estabilidade de seus elementos, juntamente com o ângulo ressonante, aponta uma clássica captura temporária. O mesmo ocorre com a Figura 28, onde a janela temporal utilizada é de $t=65\text{myrs}$ até $t=70\text{myrs}$.

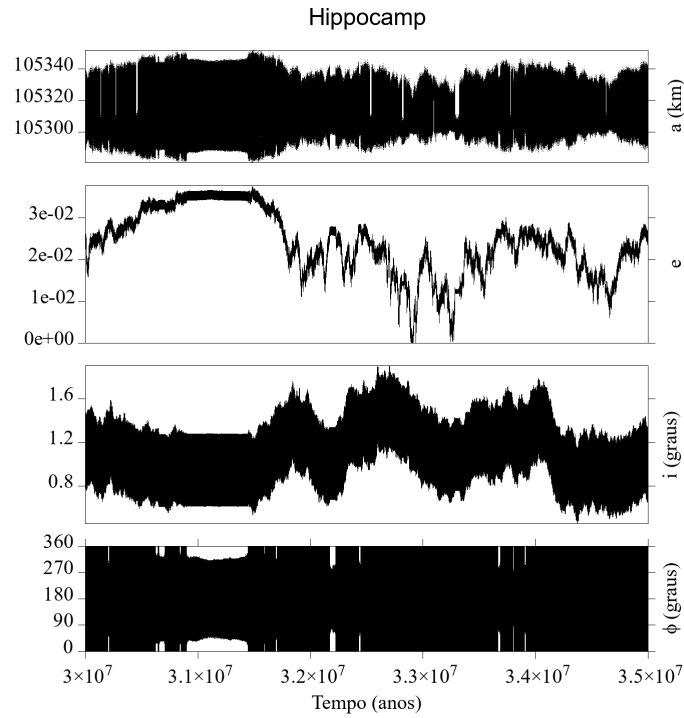


Figura 27 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 80000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=30\text{Myrs}$ a $t=35\text{Myrs}$ aproximadamente.

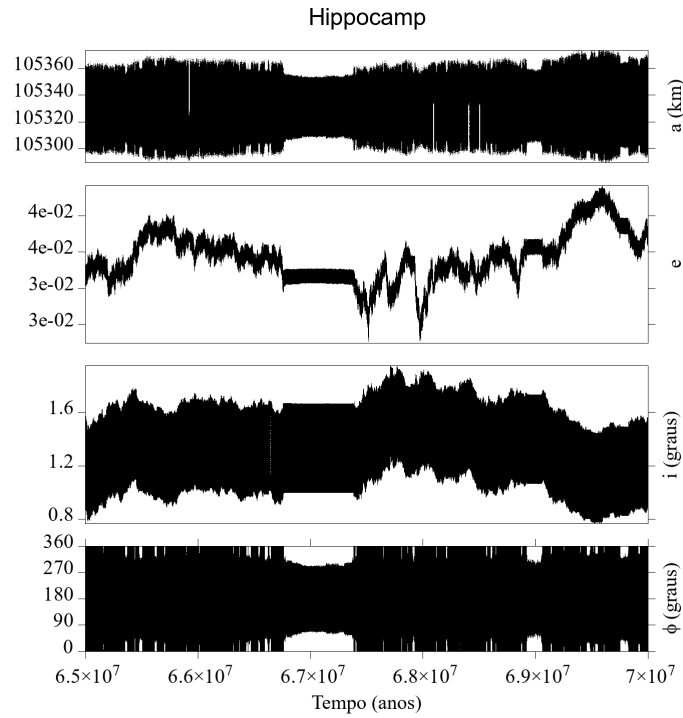


Figura 28 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 80000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=65\text{Myrs}$ a $t=70\text{Myrs}$ aproximadamente.

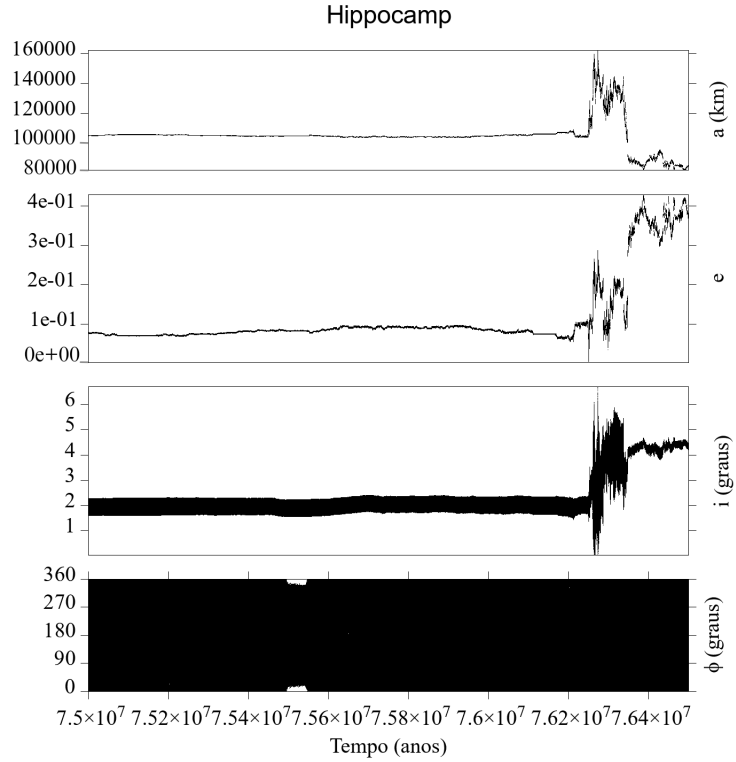


Figura 29 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 80000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=75\text{Myrs}$ a $t=80\text{Myrs}$ aproximadamente.

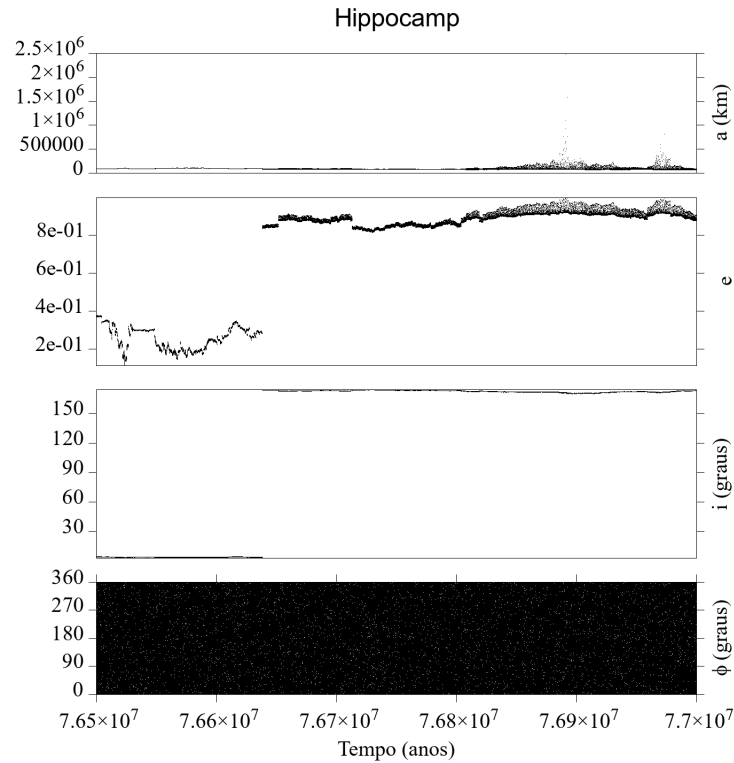


Figura 30 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 80000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=85\text{Myrs}$ a $t=90\text{Myrs}$ aproximadamente.

O regime caótico da órbita instável de Hippocamp ocasionou um aumento de sua excentricidade, que pela Figura 30 a mesma apresenta valores próximos a $e = 0.1$, algo bem expressivo comparado a valores atuais de excentricidade do satélite, apresentados aqui neste trabalho anteriormente. Porém, é possível que esse valor seja maior ainda, visto que esta simulação foi interrompida antes do previsto, por motivos técnicos.

Da mesma simulação, temos nas Figuras 31 e 32 um gráfico geral da evolução de Proteus e outro que corresponde a ampliação na evolução da sua órbita da mesma simulação, que coincide ao período de integração entre 65 a 70 milhões de anos. Nota-se que na Figura 32 sua excentricidade e ângulo ressonante apresentam estabilidade igualmente com os dados apresentados de Hippocamp para a mesma época (ver Figura 28). Fato que corrobora ainda mais com a hipótese de captura temporária.

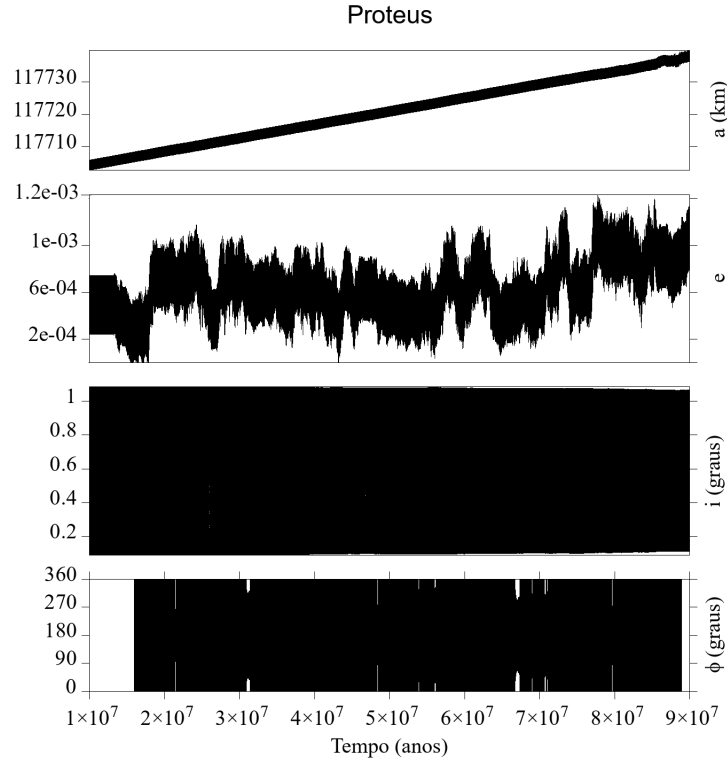


Figura 31 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Proteus (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 80000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=16\text{Myrs}$ a $t=90\text{Myrs}$ aproximadamente.

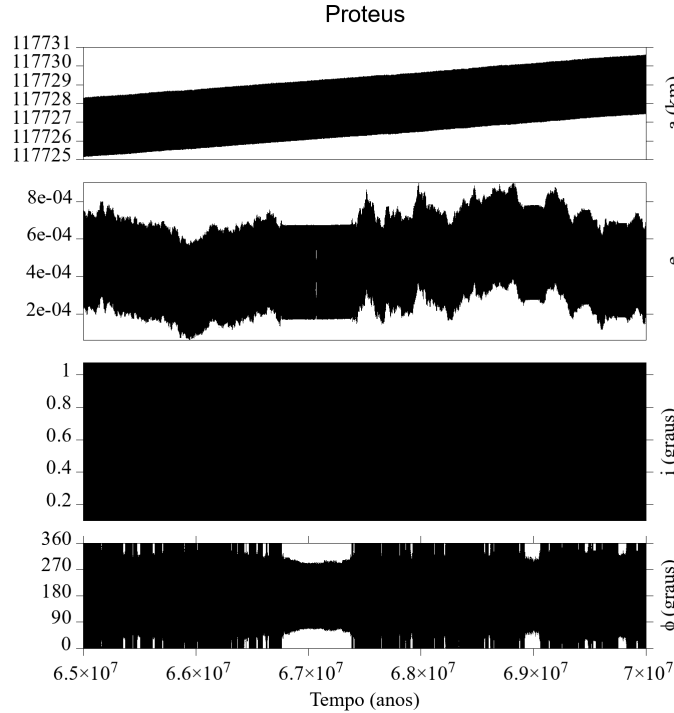


Figura 32 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Proteus (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 80000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=65\text{Myrs}$ a $t=70\text{Myrs}$ aproximadamente.

Analisando os resultados desta simulação, nota-se que o ângulo ressonante ϕ , onde $\phi = 13\lambda_p - 11\lambda_h - 2\varpi_h$, ainda não apresentou libração temporária maior que 1 milhão de anos, assim, diferentemente do esperado, diminuir ainda mais a velocidade de migração de Proteus parece não resultar em uma maior estabilidade de captura.

Uma característica muito marcante é que durante o processo de libração, o semieixo maior de Hippocamp é aparentemente estacionário no tempo (note que, em geral, este elemento está perturbado com claras oscilações de curto período). Por outro lado, para que a libração se mantenha, o semieixo maior de Proteus também deveria se sincronizar com o de Hippocamp, ou seja, a razão 13:11 deveria ser preservada. Porém, não é o que ocorre. O semieixo maior de Proteus, como sofre o efeito direto da maré, segue crescendo. Isto é, tudo indica que a maré é suficientemente forte e o semieixo maior de Hippocamp não acompanha uma evolução secular capaz de garantir a manutenção da ressonância 13:11. Por exemplo, Figura 31 mostra o acentuado crescimento secular contrastando com o de Hippocamp. Isto parece sugerir que o fator de dissipação deveria ser ainda maior, ou seja, a evolução do semieixo maior de Proteus deveria ser bem mais lenta.

5.2 $Q_n = 120000$

Novamente, reduzindo a velocidade de Proteus para aproximadamente 6 vezes menor que na simulação feita por (BROZOVIĆ et al., 2020), utilizamos as mesmas condições iniciais que na simulação anterior, porém, foi alterado apenas o valor do fator de dissipação, passando para $Q_n = 120000$.

As figuras 33 a 37 apresentam a evolução dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior “a”, excentricidade “e”, inclinação “i”), assim como o ângulo ressonante ϕ , correspondentes com a simulação integrada usando o fator $Q_n = 120000$.

A figura Figura 33 ilustra a evolução de Hippocamp na região ressonante (aproximadamente 25,5 milhões de anos), onde todos os seus elementos orbitais apresentados sentem o impacto da possível captura. Enquanto a Figura 34 mostra que ao longo da integração houveram também algumas “janelas” de captura temporária.

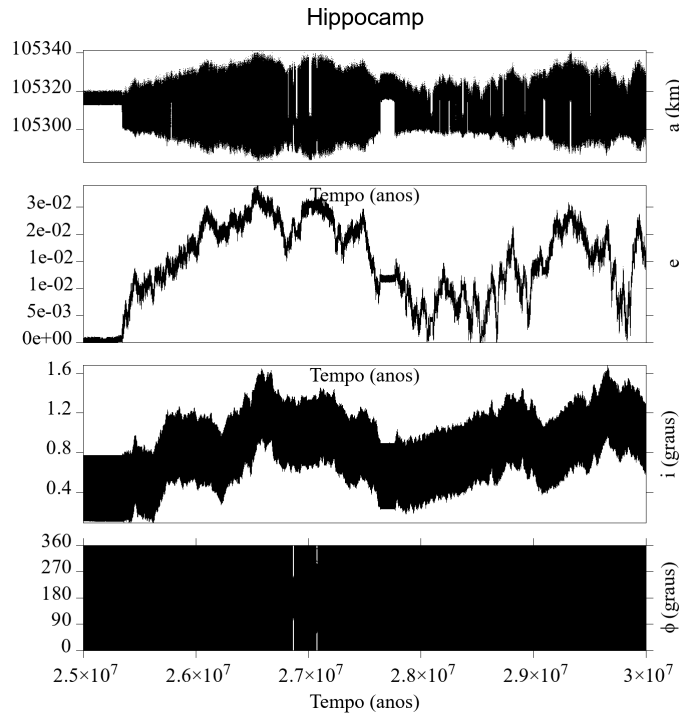


Figura 33 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 120000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=25\text{Myrs}$ a $t=30\text{Myrs}$ aproximadamente.

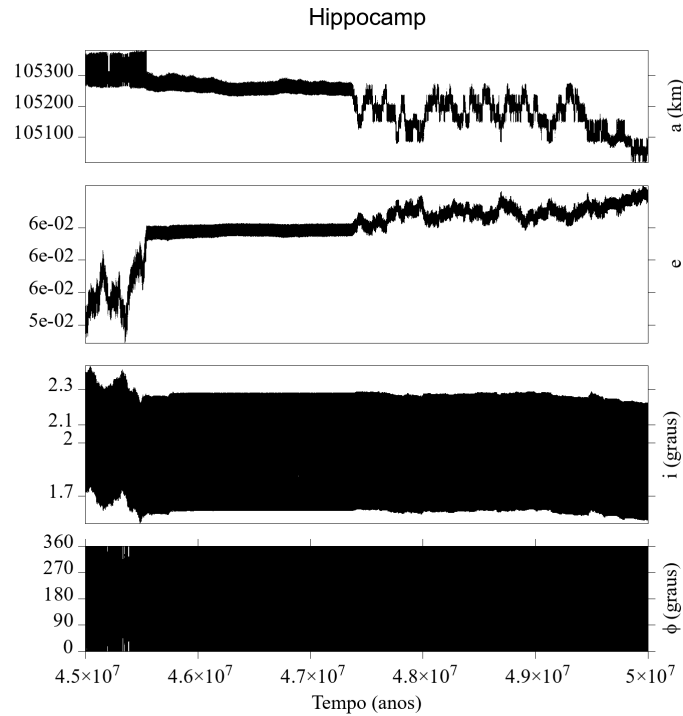


Figura 34 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 120000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=35\text{Myrs}$ a $t=40\text{Myrs}$ aproximadamente.

A Figura 35 expõe que abruptamente o semieixo maior e a excentricidade de Hippocamp acabaram em um curto período, aparentemente se estabilizando por volta de 46 milhões de anos. Provavelmente, a captura 13:11 não foi a causa desta estabilização, pois nenhuma das 22 combinações ressonantes apresentaram libração nesta época.

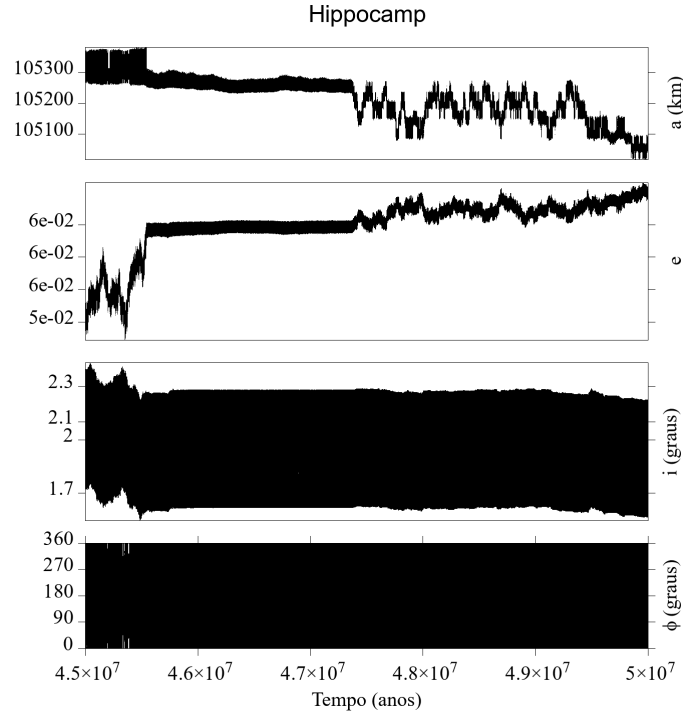


Figura 35 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 120000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=45\text{Myrs}$ a $t=50\text{Myrs}$ aproximadamente.

A Figura 36 e a Figura 37 mostram, respectivamente, que houve repentinamente uma enorme variação nos elementos orbitais de Hippocamp, e por fim um escape do satélite, onde sua excentricidade atingiu o valor crítico de $e = 1$.

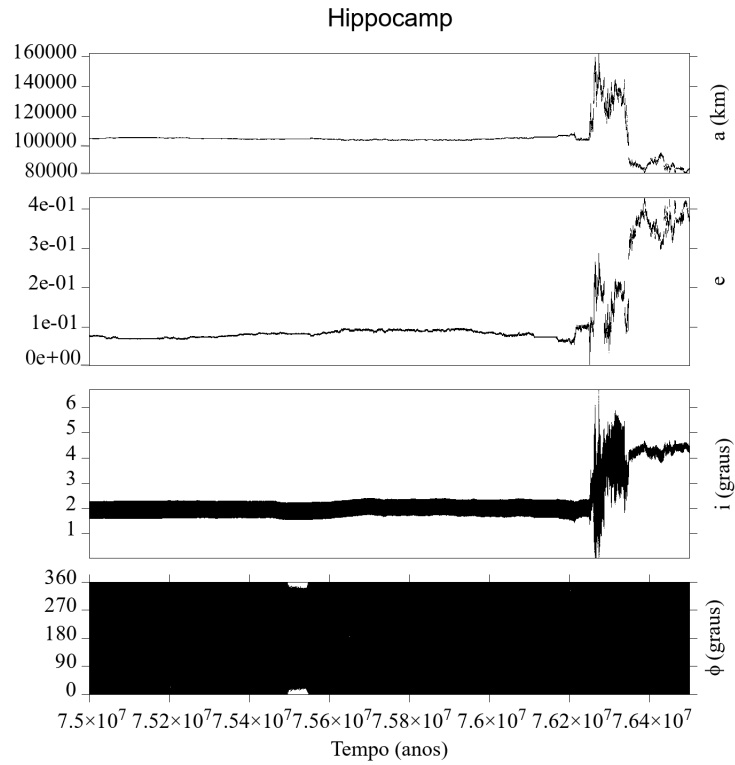


Figura 36 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 120000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=75\text{Myrs}$ a $t=76.5\text{Myrs}$ aproximadamente.

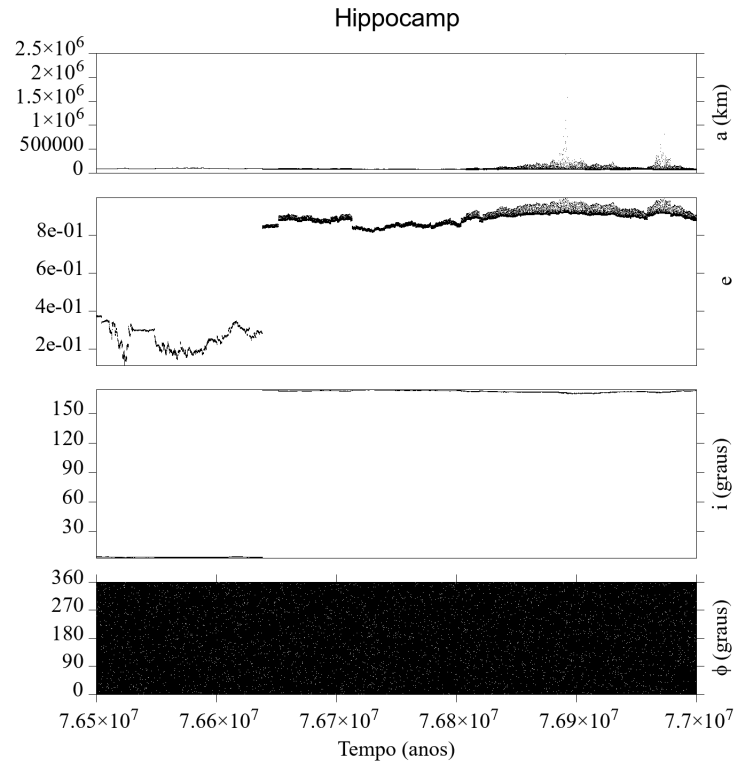


Figura 37 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 120000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=76.5\text{Myrs}$ a $t=77\text{Myrs}$ aproximadamente.

Da mesma simulação, são apresentados nas Figuras 38 e 39, os gráficos que correspondem a evolução dos elementos orbitais de Proteus e do ângulo ressonante, no mesmo período de integração.

A Figura 38 mostra um panorama do comportamento de Hippocamp em toda a integração.

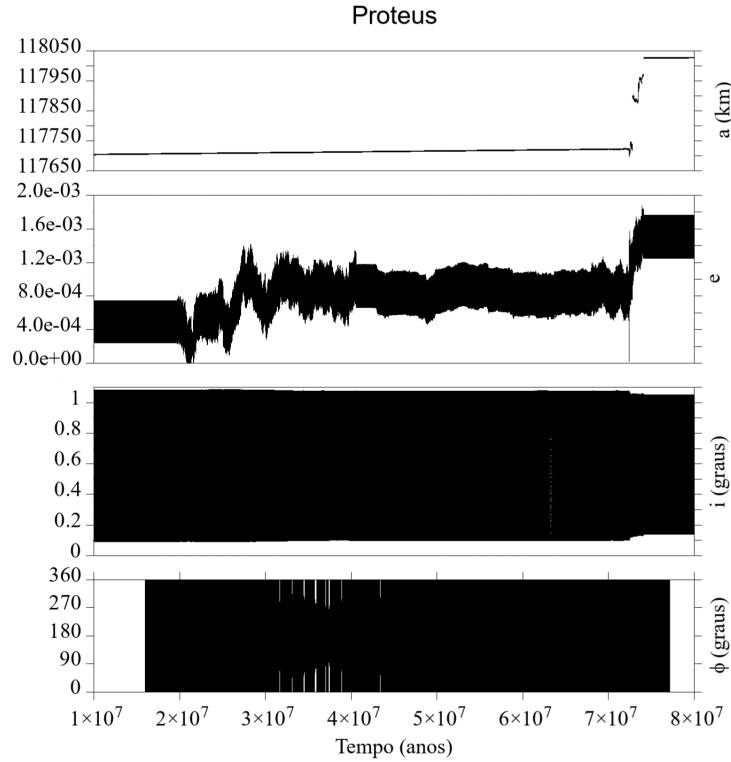


Figura 38 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Proteus (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 120000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=16\text{Myrs}$ a $t=80\text{Myrs}$ aproximadamente.

A Figura 39 exibe a evolução de Proteus no final da simulação, onde pode-se notar que após o escape de Hippocamp, Proteus aparentemente se estabiliza na órbita.

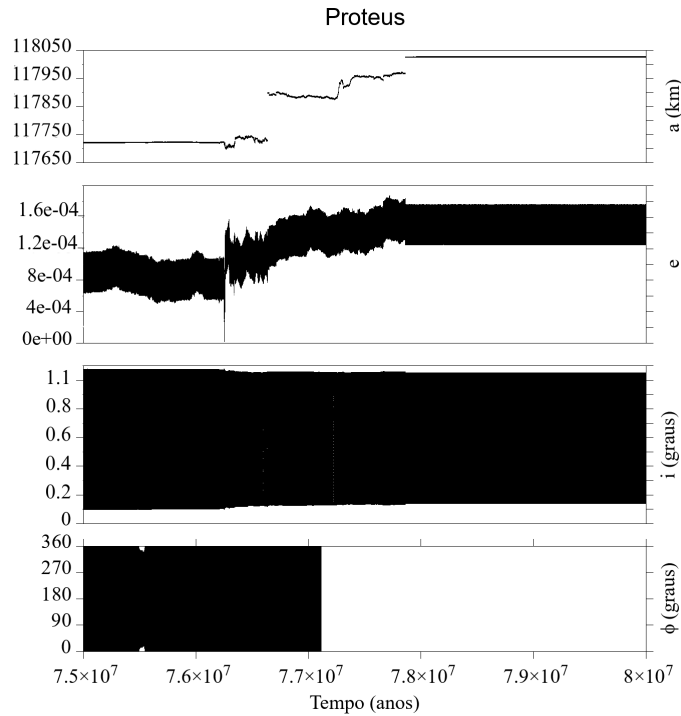


Figura 39 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Proteus (semieixo maior, excentricidade, inclinação) simulados em nosso integrador, com um fator de dissipação $Q_n = 120000$, além do ângulo ressonante ϕ . Recorte correspondente ao período entre $t=75\text{Myrs}$ a $t=80\text{Myrs}$ aproximadamente.

Primeiramente, nota-se que mesmo Proteus migrando mais lentamente, a captura ressonante não se mostrou mais estável que antes.

Realizamos diversas simulações entre Proteus, Hippocamp e Tritão, tanto com coordenadas iniciais, como também, fatores de dissipação diferentes. Os resultados mostraram que o fato de mudar as coordenadas iniciais ou diminuir a velocidade de migração de Proteus, ocasiona em uma evolução orbital divergente para cada caso.

Um exemplo disso é a simulação que realizamos com as mesmas coordenadas iniciais dos três satélites, porém, em uma foi utilizado o fator $Q_n = 80000$ e em outra o fator $Q_n = 120000$, ou seja, a taxa de migração de Proteus sendo 4x e 6x mais lenta que a simulação original.

Conforme esperado, é óbvio que a medida que o tempo aumenta, Proteus se aproxima de Tritão. Neste caso, Proteus recebe uma forte excitação a qual poderia influenciar diretamente Hippocamp. As nossas simulações indicam que para um tempo elevado, aproximadamente 22 Mys, 90 Mys e $Q_n = 60000$, $Q_n = 80000$, há uma forte excitação em Proteus, cuja excentricidade pode aumentar para valores três vezes o seu valor inicial. Desta forma, escapes inevitavelmente de Hippocamp irão ocorrer. Antes, porém, podemos avaliar a interessante dinâmica deste problema, por exemplo, na Figura 29, onde a inclinação de Hippocamp atinge 3 graus, excentricidade chega a 0,05

e mesmo assim existem transições de estados de libração e circulação semelhantes aos vistos com excentricidades e inclinações bem menores. Na Figura 37 temos um caso de escape, onde neste caso, o fator de dissipação adotado foi 120000. Novamente, é curioso observar que aparentemente aqui também ainda parece ser possível a sobrevivência de cenários semelhantes aos anteriores, onde o semieixo maior de Proteus era menor que deste caso.

É importante salientar que nosso integrador não simula colisões entre os corpos simulados, assim, devido ao grande aumento de excentricidade, inclinação e semieixo maior antes do escape de Hippocamp, pode ser que tenha ocorrido alguma colisão sua com Proteus.

6 Teste de Estabilidade

Certamente, deixar Proteus migrando em todo período de integração fará com que o mesmo adentre a região ressonante próxima e por sequência da migração, a atravesse em algum momento. Um dos desafios é saber precisamente quando (e se) a força de maré é dissipada, implicando que Proteus pare de migrar e permaneça estável na região ressonante.

De modo a testar a estabilidade dessa captura, utilizamos novamente a integração que obteve um maior período de estabilidade de ϕ (ver subseção 5.0.1), para simulá-la novamente, porém, desta vez retiramos por completo a migração de Proteus da simulação, fazendo assim com que seu semieixo maior fique estagnado no período correspondente aquela maior “janela” de libração do ângulo ressonante que observamos na Figura 21.

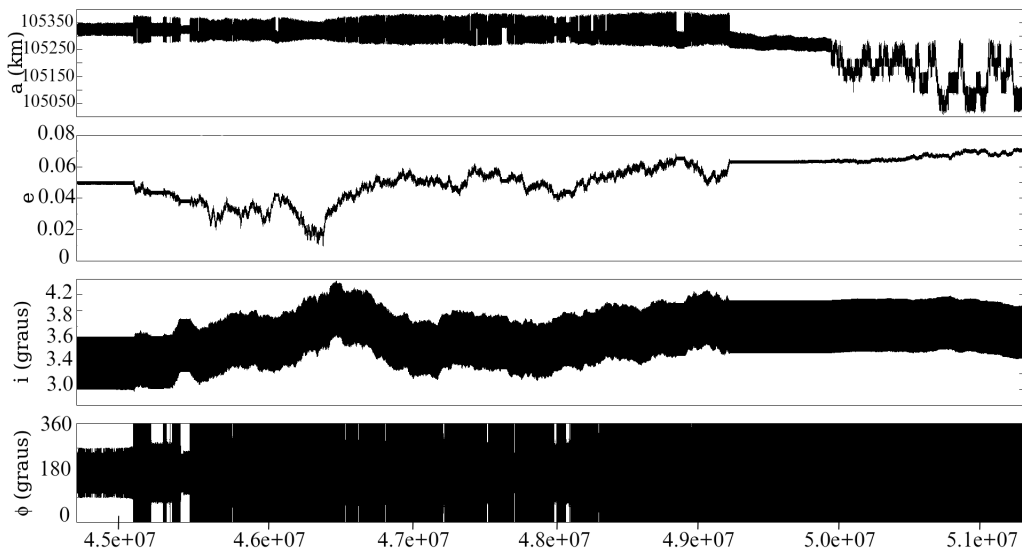


Figura 40 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Hippocamp e do ângulo ressonante ϕ , simulados em nosso integrador sem migração de maré.

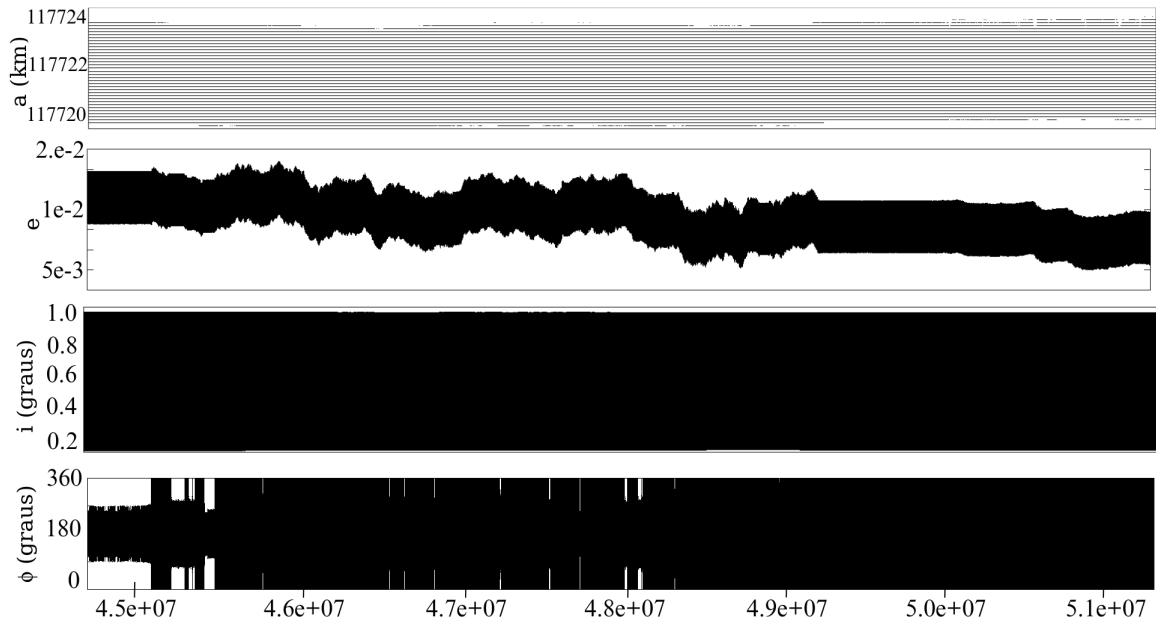


Figura 41 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Proteus e do ângulo ressonante ϕ , simulados em nosso integrador sem migração de maré.

Podemos perceber que mesmo Proteus, inserido em uma região em que sua órbita aparenta estabilidade e ângulo ressonante $\phi = 13\lambda_p - 11\lambda_h - 2\varpi_h$, apresenta libração temporária, ainda a captura não é permanente, mesmo quando o efeito de forças dissipativas retiradas do sistema.

6.0.1 Alterando excentricidade

Uma das hipóteses do problema é que a baixa excentricidade dos satélites impedisse a captura ressonante. Um novo teste consistiu em retirar o efeito de maré de Proteus, e utilizar os parâmetros de semieixo maior e inclinação originais dos dois corpos e apenas alterar os valores de excentricidade de cada um, além de “forçar” os outros parâmetros angulares para que o valor resultante das combinações ressonantes de Lindblad e Co-rotação fossem $\phi = 0$ ou $\phi = 180$, desta forma, Hippocamp e Proteus já iniciam a simulação dentro da ressonância 13:11.

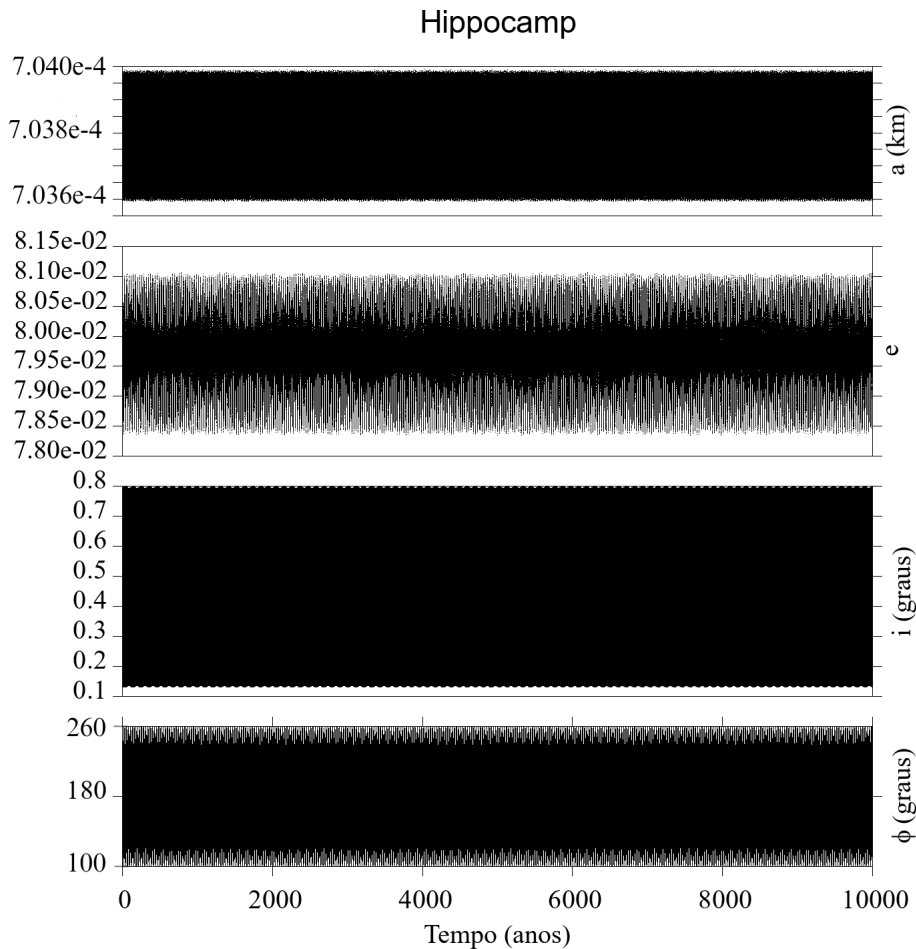


Figura 42 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Proteus e do ângulo ressonante $\phi = 13\lambda_p - 11\lambda_h - 2\varpi_h$, simulados em nosso integrador sem migração de maré.

Na Figura 42 apresenta gráficos de semieixo maior, excentricidade, inclinação e o ângulo ressonante $\phi = 13\lambda_p - 11\lambda_h - 2\varpi_h$.

Nesta simulação alteramos os valores de excentricidade dos dois corpos de modo que a excentricidade de Hippocamp tivesse um valor maior que a excentricidade de Proteus, onde $e_h = 0.08$ e $e_p = 0.008$.

Nota-se que os elementos orbitais de Hippocamp permaneceram estáveis em todo o período de integração, além disso, o ângulo ressonante de Lindblad apresentou libração em todo o tempo de integração, com uma amplitude de aproximadamente 80 graus.

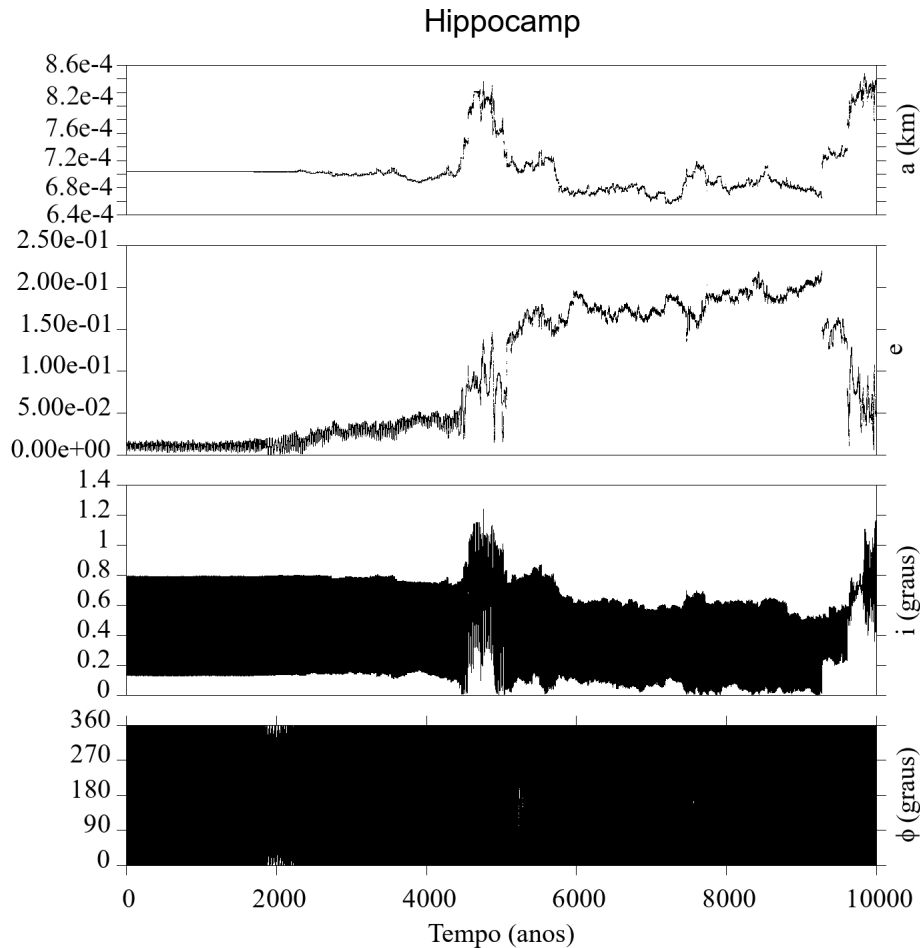


Figura 43 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Proteus e do ângulo ressonante $\phi = 13\lambda_p - 11\lambda_h - 2\varpi_p$, simulados em nosso integrador sem migração de maré.

Na Figura 43 apresenta gráficos de semieixo maior, excentricidade, inclinação e o ângulo ressonante $\phi = 13\lambda_p - 11\lambda_h - 2\varpi_p$.

Nesta simulação alteramos os valores de excentricidade dos dois corpos, porém, desta vez, de modo que a excentricidade de Proteus tivesse um valor maior que a excentricidade de Hippocamp, onde $ep = 0.08$ e $eh = 0.008$.

Nota-se que os elementos orbitais de Hippocamp apresentam um comportamento irregular em na maior parte do período de integração, e, além disso, o ângulo ressonante de Co-rotação apresentou uma leve libração em torno de 2000 anos e 5000 anos. Aproximações mais finas sobre o comportamento da libração do ângulo de

Co-rotação, além de sua amplitude de libração estão em andamento.

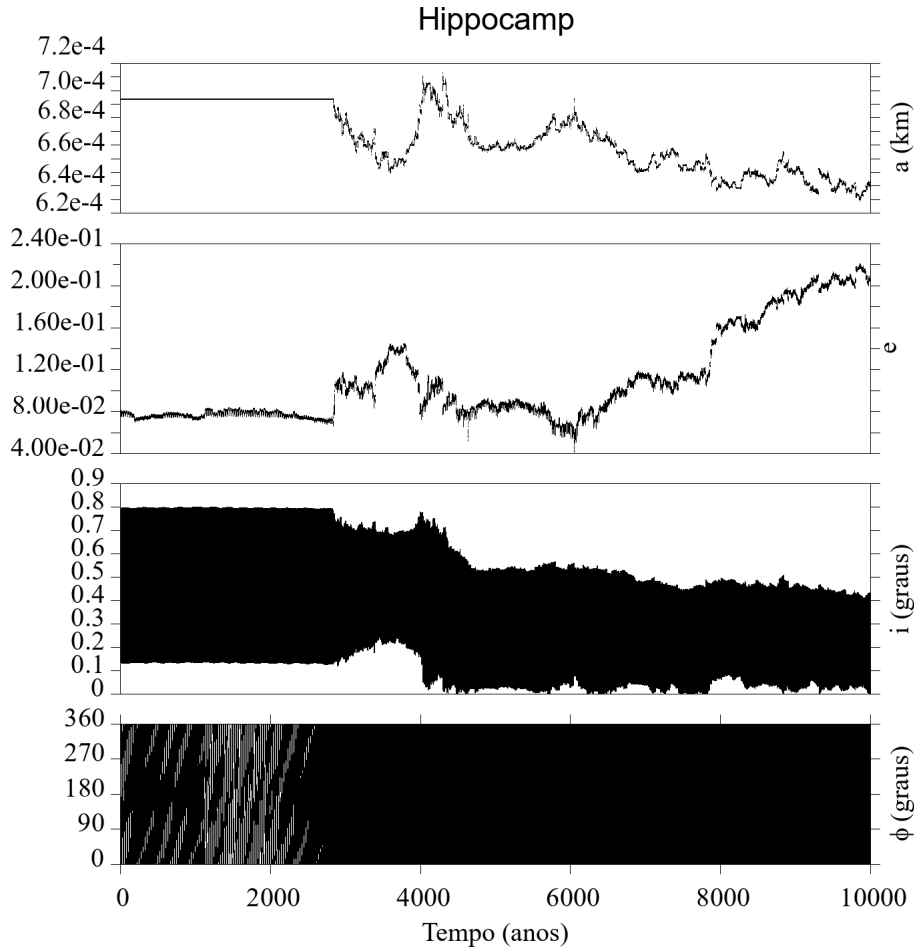


Figura 44 – Gráfico de alguns dos elementos orbitais de Proteus e do ângulo ressonante $\phi = 13\lambda_p - 11\lambda_h - 2\varpi_h$, simulados em nosso integrador sem migração de maré.

Na Figura 42 apresenta gráficos de semieixo maior, excentricidade, inclinação e o ângulo ressonante $\phi = 13\lambda_p - 11\lambda_h - 2\varpi_h$.

Nesta simulação alteramos os valores de excentricidade dos dois corpos de modo que a excentricidade de Hippocamp tivesse um valor igual que a de Proteus, onde $eh = ep = 0.08$.

Nota-se que os elementos orbitais de Hippocamp apresentaram um comportamento regular até um período de aproximadamente 3000 anos, após isso, seus elementos mudaram para uma característica irregular até o fim da simulação. O ângulo ressonante de Lindblad apresentou até o período de 3000 anos um comportamento irregular, após isso, houve circulação do ângulo até o final da simulação. O estudo sobre a transição dos elementos de comportamento regular para irregular que ocorreu no período de aproximadamente 3000 anos está sendo alvo de estudos no momento.

7 Conclusão

A descoberta do minúsculo satélite Hippocamp de Netuno por (SHOWALTER et al., 2019), é bastante recente. Por outro lado, é mais recente ainda a suspeita que este satélite poderia estar em ressonância 13:11 com Proteus. Essa suspeita foi anunciada em 2020, por (BROZOVIĆ et al., 2020). Nesta oportunidade, os autores comentaram brevemente sobre uma simulação numérica, afirmando apenas que a princípio, por efeito de maré, esse par de satélites deverá encontrar o ponto ressonante 13:11 em aproximadamente 18 milhões de anos.

Neste trabalho, o objetivo era fazer um primeiro estudo numérico, visando conhecer melhor a evolução da dinâmica deste problema, em particular, neste período de aproximadamente 18 milhões de anos, ou ainda, até o tempo necessário para que a razão dos semieixos maiores de Proteus e de Hippocamp atinja valores que caracterizem uma passagem pela ressonância, que pode ou não originar uma captura.

No primeiro estudo, consideramos então o sistema Netuno-Tritão-Proteus e Hippocamp. O modelo de maré utilizado foi o de (MIGNARD, 1979), onde apenas Proteus é afetado diretamente, pois a massa de Hippocamp é praticamente desprezível em razão do efeito de maré que atua em Proteus. Tritão é o maior dos satélites de Netuno, e seu efeito é fundamental. Em seguida, temos Proteus, sendo o segundo maior satélite e certamente também possui influência direta na dinâmica de Hippocamp. Para o achatamento de Netuno, tomamos J_2 e J_4 . Usamos diferentes valores do termo Q_n , dito fator de dissipação. Tais valores foram: $Q_n = 20000$, $Q_n = 60000$, $Q_n = 80000$ e $Q_n = 120000$. Isso significa que usamos velocidades de migração até 6 vezes mais lento do que aquela usada por (BROZOVIĆ et al., 2020). Utilizando então o integrador Radau, as condições iniciais dadas pelo Horizons, e também algumas outras fornecidas por Brozovic, as simulações podem ser realizadas sem muitos problemas.

Um ponto determinante sempre foi observado: para todos os fatores de dissipação acima mencionados, nenhuma captura permanente foi detectada. Todas as capturas foram temporárias, de duração, em um modo geral, menor do que um milhão de anos. Essas capturas temporárias sempre foram as de Lindblad (estamos usando a mesma terminologia da ressonância de primeira ordem). Não obtivemos a ressonância de Co-rotação. Analogamente, não se observou nenhuma ressonância do tipo inclinação. Um aspecto interessante foi observado nestas capturas temporárias: em geral enquanto dura a libração, o semieixo maior e excentricidade de Hippocamp permanecem praticamente congelados, em alguns casos, até mesmo a inclinação. O fato do semieixo maior de Hippocamp permanecer estacionário, parece estar conforme

a existência da libração temporária, pois para a libração ser permanente, seria necessário que o semieixo maior de Hippocamp também variasse em conjunto, sincronizado com o semieixo maior de Proteus, pois este sempre varia devido ao efeito imposto pela maré. Logo, se o semieixo maior de Hippocamp se estaciona e o de Proteus continua evoluindo, é impossível manter constante a relação de ressonância 13:11. Assim, ocorrer o escape é o mais esperado. Aparentemente, isso parecia sugerir que a velocidade de maré estaria muito rápida, mas mesmo reduzindo-a em seis vezes a situação não se alterou. Posteriormente, mesmo zerando a maré, ainda assim o escape ocorria. Isto e o fato de haver constantes transições de libração e circulação, nos leva a concluir que o sistema deva ser bastante caótico. Uma tentativa de usar o estimador MEGNO para comprovar a existência de caos não foi adiante devido ao alto custo computacional.

Mostramos também que em algumas simulações, Hippocamp pode escapar. Isto decorre como consequência imediata do contínuo afastamento de Proteus provocado pela maré. Neste processo, ele se aproxima de Tritão e sua órbita se torna suficientemente excêntrica, trazendo consequências óbvias em Hippocamp. É fato que Hippocamp seja desestabilizado e expulso do sistema. Em pelo menos 4 simulações foi notado o seu escape. Na Figura 32 e Figura 46, com $Q_n = 60000$ e $Q_n = 120000$, por volta de 70Myrs podemos ter um eventual escape de Hippocamp, se mantido os dados de maré usados em (BROZOVIĆ et al., 2020).

Notamos que ao alterar a excentricidade de Hippocamp e Proteus em três modos, onde $eh > ep$, $eh = ep$, $eh < ep$. Obtemos três configurações diferentes de evolução da órbita destes corpos, onde até mesmo as combinações ressonantes de Co-rotação e Lindblad apresentaram libração, mesmo não utilizando migração de maré. Estudos acerca da dinâmica destes testes e como Proteus se comporta nestas condições estão em andamento.

Uma das hipóteses para explicar a captura mal sucedida é presença de ressonâncias secundárias atuando com a principal. Uma ressonância secundária acontece quando a frequência de libração de uma ressonância principal é comensurável com a frequência de circulação de outra ressonância próxima, fato que pode levar a uma perturbação mútua na dinâmica evolutiva das capturas. Este fenômeno pode explicar o motivo de ocorrerem várias janelas de libração do ângulo ressonante e nenhuma delas pendurar por tempo suficiente até que haja uma captura permanente (TITTEMORE; WISDOM, 1990) (MALHOTRA; DERMOTT, 1990).

Neste trabalho, ainda não foi possível o estudo de alguma ressonância de inclinação. Conforme pode-se notar, a evolução da inclinação no tempo aparenta ter algumas perturbações não desprezíveis. Talvez exista alguma associação com ressonância de inclinação.

Estudos sobre a possível existência de ressonâncias secundárias e como a sua presença afeta o sistema, serão o próximo o passo do desenvolvimento desta pesquisa.

Como vimos, neste trabalho estudamos o sistema Hippocamp-Proteus-Tritão, tendo como ponto principal de partida, as presentes condições iniciais destes 3 elementos. A dinâmica futura foi exaustivamente estudada e conforme dito na conclusão, nossos cálculos indicam a impossibilidade deste sistema ser capturado na ressonância 13:11. Por outro lado, simulações adicionais, também aparentam que caso algumas das excentricidades (por exemplo, de Hippocamp ou ainda de Proteus), seja ligeiramente aumentado, o sistema pode permanecer plenamente capturado na ressonância de Lindblad, de forma estável, sem ocorrer nenhum caso de escape. Um aspecto interessante, foi observado é que esses estados libratórios surgem sem necessidade de alguma evolução de mare, ou seja, a simples mudança na excentricidade de Hippocamp, e posicionando o ângulo ressonante em 180 graus, gera naturalmente uma libração permanente. Em alguns raros casos, libração incomum, aparenta ser possível até mesmo em 0 graus. Como perspectivas futuras, vemos que este estudo parece ser promissor e poderá ser continuado, tomando condições iniciais mais gerais, isto é, estudar a possibilidade de ocorrência destas capturas de forma dinâmica, ou seja, tomando o semi-eixo maior de Proteus com valores menores do que os valores de hoje, e propagando-o pela maré, tal que uma inicial circulação seja transformada numa libração permanente. Acreditamos ser isso um estudo relevante e promissor.

Referências

- BROUWER, D.; CLEMENCE, G. M. *Methods of celestial mechanics*. [S.l.]: Elsevier, 2013. Citado na página 27.
- BROZOVIĆ, M. et al. Orbits and resonances of the regular moons of neptune. *Icarus*, Elsevier, v. 338, p. 113462, 2020. Citado 10 vezes nas páginas 23, 24, 30, 34, 35, 36, 38, 58, 71 e 72.
- BUTCHER, J. C. Implicit runge-kutta processes. *Mathematics of computation*, v. 18, n. 85, p. 50–64, 1964. Citado na página 36.
- CALLEGARI, N. Ressonâncias e marés em sistemas de satélites naturais. *Revista Latino-Americana de Educação em Astronomia*, n. 3, p. 39–57, 2006. Citado na página 20.
- CALLEGARI, N.; RODRÍGUEZ, A. The orbit of aegaeon and the 7: 6 mimas-aegaeon resonance. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Springer, v. 135, n. 2, p. 21, 2023. Citado na página 21.
- CALLEGARI, N.; RODRÍGUEZ, A.; CECCATTO, D. T. The current orbit of methone (s/2004 s 1). *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Springer, v. 133, n. 11-12, p. 49, 2021. Citado na página 21.
- CALLEGARI, N.; YOKOYAMA, T. Dynamics of the 11: 10 corotation and lindblad resonances with mimas, and application to anthe. *Icarus*, Elsevier, v. 348, p. 113820, 2020. Citado na página 21.
- COLUCCI, A. R.; FERRAZ-MELLO, S. Evolução orbital de planetas quentes atribuída ao efeito de maré. 2010. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.
- CROFT, S. K. Proteus: Geology, shape, and catastrophic destruction. *Icarus*, Elsevier, v. 99, n. 2, p. 402–419, 1992. Citado na página 15.
- DANBY, J.; TEICHMANN, T. Fundamentals of celestial mechanics. *Physics Today*, AIP Publishing, v. 16, n. 1, p. 63–63, 1963. Citado na página 25.
- DUMAS, C.; SMITH, B. A.; TERRILE, R. J. Hubble space telescope nicmos multiband photometry of proteus and puck. *The Astronomical Journal*, v. 126, n. 2, p. 1080, aug 2003. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1086/375909>>. Citado na página 16.
- ERSHKOV, S.; LESHCHENKO, D. On the stability of laplace resonance for galilean moons (io, europa, ganymede). *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, SciELO Brasil, v. 93, 2021. Citado na página 21.
- EVERHART, E. An efficient integrator that uses gauss-radau spacings. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. *International Astronomical Union Colloquium*. [S.l.], 1985. v. 83, p. 185–202. Citado na página 36.

GALLARDO, D. G. et al. Analysing the region of the rings and small satellites of neptune. *Astrophysics and Space Science*, Springer, v. 365, n. 1, p. 5, 2020. Citado na página 14.

Hansen, B. M. S.; Murray, C. D. Triton's Evolution with a Primordial Neptunian Satellite System. , v. 154, n. 6, p. 218, dez. 2017. Citado na página 15.

HAYNES, K. *Meet Neptune's new moon, Hippocamp*. Astronomy, 2019. Acessado em 09/06/2023. Disponível em: <<https://www.astronomy.com/science/meet-neptunes-new-moon-hippocamp/>>. Citado na página 14.

INCE, E. S. et al. Icgem—15 years of successful collection and distribution of global gravitational models, associated services, and future plans. *Earth system science data*, Copernicus GmbH, v. 11, n. 2, p. 647–674, 2019. Citado na página 26.

LAINEY, V.; DURIEZ, L.; VIENNE, A. New accurate ephemerides for the galilean satellites of jupiter-i. numerical integration of elaborated equations of motion. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 420, n. 3, p. 1171–1183, 2004. Citado na página 31.

MALHOTRA, R.; DERMOTT, S. F. The role of secondary resonances in the orbital history of miranda. *Icarus*, Elsevier, v. 85, n. 2, p. 444–480, 1990. Citado na página 72.

MCFADDEN, L.-A.; JOHNSON, T.; WEISSMAN, P. *Encyclopedia of the solar system*. [S.l.]: Elsevier, 2006. Citado na página 13.

MIGNARD, F. The evolution of the lunar orbit revisited. i. *Moon and Planets*, v. 20, p. 301–315, 1979. Citado 4 vezes nas páginas 30, 33, 36 e 71.

MONTENBRUCK, O.; GILL, E.; LUTZE, F. Satellite orbits: models, methods, and applications. *Appl. Mech. Rev.*, v. 55, n. 2, p. B27–B28, 2002. Citado na página 28.

MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. *Solar system dynamics*. [S.l.]: Cambridge university press, 1999. Citado 4 vezes nas páginas 20, 22, 25 e 43.

NASA. *Horizons System*. NASA Jet Propulsion Laboratory (JPL), 2023. Acessado em 09/06/2023. Disponível em: <<https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/>>. Citado 6 vezes nas páginas 14, 17, 19, 21, 34 e 35.

NASA, E.; INSTITUTE), M. S. S. *Hubble data showing Neptune's inner moons*. esa hubble, 2019. Acessado em 09/06/2023. Disponível em: <<https://esahubble.org/images/heic1904b/>>. Citado na página 18.

NASA, E.; (STSCI), A. F. *Orbits of Neptune's inner moons*. esa hubble, 2019. Acessado em 09/06/2023. Disponível em: <<https://esahubble.org/images/heic1904c/>>. Citado na página 13.

NOGUEIRA, E.; BRASSER, R.; GOMES, R. Reassessing the origin of triton. *Icarus*, Elsevier, v. 214, n. 1, p. 113–130, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 13, 33 e 35.

PEALE, S. Origin and evolution of the natural satellites. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 37, n. 1, p. 533–602, 1999. Citado na página 50.

SHOWALTER, M. R. et al. The seventh inner moon of neptune. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 566, n. 7744, p. 350–353, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 16, 18 e 71.

STOOKE, P. J. The surfaces of larissa and proteus. *Earth, Moon, and Planets*, Springer, v. 65, n. 1, p. 31–54, 1994. Citado na página 16.

TITTEMORE, W. C.; WISDOM, J. Tidal evolution of the uranian satellites: lii. evolution through the miranda-umbriel 3: 1, miranda-ariel 5: 3, and ariel-umbriel 2: 1 mean-motion commensurabilities. *Icarus*, Elsevier, v. 85, n. 2, p. 394–443, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 72.

WALKER, J.; RESNICK, R.; HALLIDAY, D. *Halliday and resnick fundamentals of physics*. [S.l.]: Wiley, 2014. Citado na página 27.

WIKIPEDIA. *Força de maré*. wikipedia, 2023. Acessado em 12/06/2023. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Field_tidal.png>. Citado na página 29.

ZHANG, K.; HAMILTON, D. P. Orbital resonances in the inner neptunian system: I. the 2: 1 proteus–larissa mean-motion resonance. *Icarus*, Elsevier, v. 188, n. 2, p. 386–399, 2007. Citado na página 30.