

unesp



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DE COMPUTAÇÃO E ESTATÍSTICA

**RESOLUÇÃO NUMÉRICA PARA PROBLEMAS DE
OTIMIZAÇÃO LINEAR E LINEAR-QUADRÁTICO COM
TEMPO CONTÍNUO**

Paulo Sérgio Gonçalves

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada
MAP-055

1910001193



t518.734
G635r

T.1193/03

Rua São Cristóvão Colombo, 2265
Caixa Postal 136
15054-000 - São José do Rio Preto - SP - Brasil
Telefone: (017) 221-2444
Fax: (017) 221-2445

unesp



Resolução Numérica para Problemas de Otimização Linear e Linear-Quadrático com Tempo Contínuo

Paulo Sérgio Gonçalves

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva



L. 1193/03

São José do Rio Preto

28 de março de 2001



Aos meus pais, Otávio e Encarnação.

Aos meus irmãos, Luiz, Celso
e Patrícia,

Dedico



Agradecimentos

Às pessoas que no desenvolvimento deste trabalho que contribuíram de diferentes forma para sua realização.

Ao Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva, pela orientação, incentivo e paciência na elaboração deste trabalho.

A todos professores e funcionários do DCCE que de alguma forma contribuíram para a elaboração deste trabalho, em especial ao Prof. Dr. Roberto Andreani

Aos meus pais e irmãos que sempre me apoiam. Em especial, ao meu irmão Luiz.

Aos amigos pós-graduandos.

À CAPES, e aos meus pais pelo auxílio financeiro.

A Deus, por tudo.



Resumo

Neste trabalho, apresentamos um método de discretização para determinar soluções aproximadas para problemas de otimização linear e linear-quadrático com tempo contínuo no qual a matriz associada com a integral nas restrições é constante e todas as funções são de variação limitada. A seqüência de soluções aproximadas obtidas pela discretização converge quase sempre para a solução ótima do problema com tempo contínuo que é uma função de variação limitada.

O método é ilustrado através de exemplos numéricos. No caso linear a solução analítica é obtida com ajuda da solução numérica aproximada.

Palavras-chave: otimização com tempo contínuo, discretização, programação linear, programação linear-quadrática.



Abstract

In this work, we present a discretization method to determine an approximate solution for linear and linear quadratic continuous-time optimization problems, in which the matrix associated with the integral in the constraints is constant and all functions are of bounded variation. The sequence of approximate solutions obtained by the discretization converges almost everywhere to the optimal solution of the continuous-time problem that is a bounded variation function.

The method is illustrated by numerical examples. In the purely linear case an analytical solution is obtained with the help of the numerical approximate solution.

Keywords: continuous-time optimization, discretization, linear programming, linear quadratic programming.



Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 Funções de Variação Limitada	4
1.2 Regra do Trapézio	7
2 Problema Linear com Tempo Contínuo	11
2.1 Construção da Aproximação Linear	11
2.2 Resultados Teóricos	16
2.3 Resultados Numéricos	24
3 Problema Linear-Quadrático com Tempo Contínuo	36
3.1 Construção da Aproximação	36
3.2 Resultados Teóricos	43
3.3 Resultados Numéricos	49
4 Conclusões	56
Apêndice	58
Referências Bibliográficas	60



Introdução

A classe de problemas estuda aparece em problemas práticos reais do tipo: problemas econômicos, tais como investimento e planejamento; controle ótimo, como enchimento de um reservatório d'água, aquecimento de um quarto; problemas de rede [3] e [7]; também em problemas de engenharia [21].

Estes problemas práticos reais podem ser modelados matematicamente por problemas de otimização linear (ou não linear) com tempo contínuo.

De modo geral estes problemas são formulados do seguinte modo:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \int_0^T f(t, x(t)) dt \\ \text{Sujeito a} & g(t, x(t)) \leq 0 \\ & x(t) \geq 0. \end{array}$$

Esta classe de problema considerada foi introduzido em 1954 por *R. Bellmann* [2] em conexão com problemas de planejamento de produção integrada com estoque quando a linha de produção apresenta gargalo. O tipo de problema de otimização considerado é agora conhecido como problema de programação linear (ou não-linear) com tempo contínuo.

Bellmann, estabeleceu resultados de dualidade fraca. E Tyndall [22] e Levison [11] formulou um teorema de dualidade forte. A partir de então estes resultados foram estendidos por outros autores, por exemplo, Levine e Pomerol [12], Grinold [9].

Problemas de programação linear contínuo separáveis são tratados por



Pullan [19], no qual um método de discretização melhorado é proposto e uma teoria de dualidade é obtida. Detalhes desta teoria para problemas separáveis é apresentado na dissertação de mestrado por *Pires* [18]. Estudos teóricos quanto a condição de otimalidade e dualidade para problemas de programação não-linear com tempo contínuo foram realizados por *Pereira* [17] e *Galetti* [8]. No primeiro trabalho foi realizado um estudo sobre problemas não suaves; no segundo, sobre problemas suaves. Entretanto, nenhum estudo computacional foi realizado para estes problemas.

Para classe de problemas considerada vamos apresentar o método de discretização para determinar uma solução aproximada. O caso em que a função $f(t, x(t))$ é uma função linear é tratado por R. Buie e J. Abraham [4]. Quando a função $f(t, x(t))$ é uma função não-linear apresentaremos o método de discretização para problemas gerais de otimização não-lineares com tempo contínuo. A discussão dos resultados de convergência e testes computacionais será particularizada para o caso linear-quadrático. Acreditamos que a aplicação do método aqui proposto para os problemas lineares-quadráticos é nova, segundo o conhecimento do autor.

O método consiste em tomarmos uma sequência de partições equidistantes do intervalo $[0, T]$ e em cada subintervalo desta aplicamos a regra do trapézio na função objetivo e nas restrições do problema original. Obtendo deste modo um problema de programação linear (ou não-linear) que é uma aproximação do problema original. Daí mostramos que as soluções dos problemas discretizados formam uma sequência que possui subsequência convergente à solução do problema com tempo contínuo.

A dissertação está organizada da seguinte forma. No capítulo 1, apresentamos conceitos e resultados básicos necessários ao desenvolvimento dos próximos capítulos. No capítulo 2, o método de discretização para problemas lineares com tempo contínuo é discutido; também alguns exemplos são apresentados. No capítulo 3, discutimos o método de discretização para problemas



gerais não-lineares com tempo contínuo; depois, particularizaremos para linear-quadrático para a discussão dos resultados de convergência e testes computacionais. Finalmente no capítulo 4, fazemos uma discussão dos resultados obtidos para os problemas linear e linear-quadrático.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Função de Variação Limitada



Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo iremos apresentar algumas definições e resultados básicos, que serão necessários para o desenvolvimento dos próximos capítulos e para o entendimento do trabalho.

1.1 Funções de Variação Limitada

O material aqui citado, pode ser encontrado, em grande parte em, [13] e [14].

Quando trabalharmos com vetores e matrizes usaremos as seguintes definições.

Se $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)' \in \mathbb{R}^N$ usaremos a norma $\| \cdot \|_1$, isto é,

$$\| x \| = \sum_{i=1}^N | x_i |$$

e se $A = (a_{ij})$ é uma matriz $M \times N$ então

$$\| A \| = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N | a_{ij} |$$

Seja f uma função definida no intervalo $[a, b]$. O número dado por

$$V[a, b, f] = \sup_{a=x_0 < \dots < x_n=b} \sum_{i=1}^n | f(x_i) - f(x_{i-1}) | \quad (1.1.1)$$



(finito ou infinito) é chamado de *variação da função* f no intervalo $[a, b]$. A função f é de *variação limitada* (BV) no intervalo $[a, b]$, se $V[a, b, f] < \infty$.

Se $A(t) = (a_{ij}(t))$ é uma matriz de funções definida no intervalo $[a, b]$, então, a variação de $A(t)$ é definida por,

$$V[a, b, A(t)] = \sup_{a=t_0 < \dots < t_m = b} \sum_{i=1}^m \|A(t_i) - A(t_{i-1})\| \quad (1.1.2)$$

sendo o supremo tomado sobre todas as partições possíveis do intervalo $[a, b]$. Diremos que $A(t)$ é uma matriz de *funções de variação limitada* (BV) em $[a, b]$, se $V[a, b, A(t)] < \infty$.

Segue da definição (1.1.1) que a mudança de variável através de uma função contínua e estritamente crescente

$$x = \phi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad a = x(\alpha), b = x(\beta)$$

não altera o valor da variação

$$V[a, b, f] = V[\alpha, \beta, f \circ \phi].$$

Temos uma bijeção entre o conjunto das partições $\alpha = t_0 < \dots < t_n = \beta$ e o conjunto das partições $a = x_0 < \dots < x_n = b$ definido por $x_i = \phi(t_i)$. Portanto o supremo das somas

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n |f(\phi(t_i)) - f(\phi(t_{i-1}))|$$

são iguais. A função f no intervalo $[a, b]$ é uma função de variação limitada se, e somente se, a função $f \circ \phi$ no intervalo $[\alpha, \beta]$ for uma função de variação limitada.

Uma função monótona no intervalo $[a, b]$ é uma função de variação limitada em $[a, b]$ e neste caso a soma

$$\sup_{a=x_0 < \dots < x_n = b} \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

tem o mesmo valor que $|f(b) - f(a)|$, isto é,

$$V[a, b, f] = |f(b) - f(a)|.$$



Se f tem derivadas contínuas, ou mais geral, se f satisfaz a condição de Lipschitz no intervalo $[a, b]$, isto é, existe uma constante M tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|, \quad \text{para todo } x, y \in [a, b],$$

então, f é uma função de variação limitada no intervalo $[a, b]$. E neste caso

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^n M |x_i - x_{i-1}| = M(b - a)$$

ou seja

$$V[a, b, f] = M(b - a).$$

Tem-se os resultados:

Teorema 1.1.1 *Uma função de variação limitada no intervalo $[a, b]$ é uma função limitada no intervalo $[a, b]$.*

Teorema 1.1.2 *Se f é uma função de variação limitada no intervalo $[a, b]$ e contínua a direita (ou a esquerda) em x_0 , então a variação*

$$x \rightarrow V[a, x, f]$$

é uma função contínua a direita (ou a esquerda) em x_0 .

Teorema 1.1.3 *Se $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ no intervalo $[a, b]$, então*

$$V[a, b, f] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf V[a, b, f_n].$$

Corolário 1.1.1 *O limite de uma seqüência de funções convergentes de variação uniformemente limitada é uma função de variação limitada.*

Teorema 1.1.4 (Teorema de Helly) *Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções limitadas no ponto a , ($|f_n(a)| \leq M, \forall n$), e de variação uniformemente limitada no intervalo $[a, b]$, ($V[a, b, f_n] \leq M, \forall n$). Então, existe uma subseqüência de funções que converge em $[a, b]$ para uma função de variação limitada.*



Vamos enunciar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que será de grande importância para a demonstração dos resultados apresentados nos capítulos seguintes.

Teorema 1.1.5 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja (f_n) uma seqüência de funções mensuráveis em E tal que*

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

existe para todo $x \in E$. Se $|f_n(x)| \leq g(x)$ em E , $n = 1, 2, \dots$. Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n - f| d\mu = 0$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

1.2 Regra do Trapézio

Nesta seção iremos fazer uma breve abordagem da aproximação trapezoidal (ou primeira fórmula de Newton-Cotes). O material aqui apresentado pode ser encontrado em [5].

A aproximação trapezoidal é baseada na aproximação de uma função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ por uma reta.

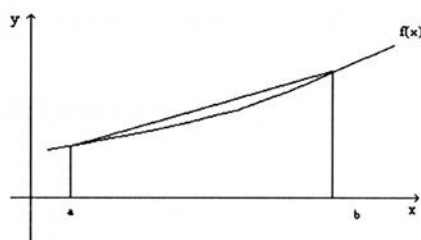


Figura 1.2.1

Queremos calcular

$$\int_a^b f(x) dx \quad (1.2.3)$$

e para isto iremos usar a regra do trapézio que usa somas do tipo

$$\sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

para aproximar (1.2.3).

A regra do trapézio é baseado na interpolação polinomial. Primeiro selecionamos um conjunto de pontos distintos equidistantes $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ no intervalo $[a, b]$. Se P_n é o polinômio de interpolação de Lagrange, temos

$$P_n = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x), \quad (1.2.4)$$

integrando P_n e seu erro de truncamento em $[a, b]$ obtemos,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) dx + \int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i) \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} dx \\ &= \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i) f^{(n+1)}(\xi(x)) dx \end{aligned}$$

sendo $\xi(x) \in [a, b]$ para todo x e

$$a_i = \int_a^b L_i(x) dx, \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, n.$$

Temos assim a fórmula de quadratura

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i),$$

no caso de conhecermos a função f o erro da aproximação é dado por:



$$E(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i) f^{(n+1)}(\xi(x)) dx.$$

Para obtermos a regra do Trapézio para aproximar $\int_a^b f(x)dx$, seja $x_0 = a$, $x_1 = b$, $h = b - a$ e usando o polinômio linear de Lagrange

$$P_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1) \right] dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x)) (x - x_0)(x - x_1) dx. \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Como $(x - x_0)(x - x_1)$ não muda de sinal em $[x_0, x_1]$, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio para integrais no termo do erro, obtendo,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x)) (x - x_0)(x - x_1) dx &= f''(\xi) \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1) dx \\ &= f''(\xi) \left[\frac{x^3}{3} - \frac{(x_1 + x_0)}{2} x^2 + x_0 x_1 x \right]_{x_0}^{x_1} \\ &= -\frac{h^3}{6} f''(\xi). \end{aligned}$$

Consequentemente (1.2.5) implica que

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \left[\frac{(x - x_1)^2}{2(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2(x_1 - x_0)} f(x_1) \right]_{x_0}^{x_1} f''(\xi) \\ &= \frac{(x_1 - x_0)}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi). \end{aligned}$$

Fazendo $h = x_1 - x_0$, obtemos

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi). \quad (1.2.6)$$

Assim para n partições equidistantes do intervalo $[a, b]$ temos a seguinte expressão,

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b) \right] \quad (1.2.7)$$

com, $h = (b - a)/n$ e $x_j = a + jh$, $j = 0, 1, \dots, n$.



Capítulo 2

Problema Linear com Tempo Contínuo

Neste capítulo, apresentamos uma aproximação para *problemas de otimização lineares com tempo contínuo*. Esta aproximação consiste em tomarmos uma seqüência de partições equidistantes no intervalo $[0, T]$ e em cada subintervalo da partição aplicarmos a *regra do trapézio* na função objetivo e nas restrições do problema de otimização linear com tempo contínuo. Obtendo deste modo um problema de programação linear que é uma aproximação do problema original.

2.1 Construção da Aproximação Linear

Apresentamos nesta seção uma aproximação para *problemas de otimização lineares com tempo contínuo*, a qual é apresentada em [4].

Consideremos o seguinte problema (P) de otimização linear com tempo contínuo.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \int_0^T a'(t)x(t) \, dt \\ \text{(P)} \quad \text{Sujeito a} & B(t)x(t) \leq c(t) + \int_0^t K(t,s)x(s) \, ds, \, x(t) \geq 0. \end{array}$$



sendo, $B(t)$ e $K(t, s)$ matrizes $M \times N$, $a(t)$ um vetor de dimensão N , $c(t)$ vetor de dimensão M e $x(t)$ um vetor de dimensão N a ser determinado.

Para o problema (P) temos o seguinte problema dual (D) associado,

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar} && \int_0^T c'(t)w(t) dt \\ (D) \quad & \text{Sujeito a} && B'(t)w(t) \geq a(t) + \int_t^T K'(s, t)w(s) ds \\ & && w(t) \geq 0 \end{aligned}$$

Para construirmos a aproximação linear para o nosso problema de otimização linear com tempo contínuo (P), reescrevendo a restrição do nosso problema (P) na forma,

$$B(t)x(t) - \int_0^t K(t, s)x(s) ds \leq c(t).$$

Usando a aproximação trapezoidal dada pela expressão (1.2.7) vamos construir uma malha de pontos σ_n , tal que na n -ésima partição teremos que $t_i^n = iT/l_n$, $i = 0, 1, \dots, l_n$, sendo l_n o número de subintervalos de σ_n .

Aplicando a aproximação trapezoidal apenas no ponto $t_0^0 = 0$, nas restrições obtemos,

$$B(t_0^0)x(t_0^0) - \frac{1}{2} \int_0^{t_0^0} K(t_0^0, s)x(s) ds \leq c(t_0^0);$$

que implica em

$$B(t_0^0)x(t_0^0) - \frac{1}{2}K(t_0^0, t_0^0)x(t_0^0) \leq c(t_0^0).$$

Para $l_1 = 1$, uma partição, $0 = t_0^1 < t_1^1 = T$, temos:

1) Função objetivo:

$$\int_0^T a'(t)x(t)dt = \int_{t_0^1}^{t_1^1} a'(t)x(t)dt = \frac{h_1}{2} [a'(t_0^1)x(t_0^1) + a'(t_1^1)x(t_1^1)].$$

2) Restrição:

$$B(t_1^1)x(t_1^1) - \int_0^{t_1^1} K(t_1^1, s)x(s) ds \leq c(t_1^1);$$

que implica em

$$B(t_1^1)x(t_1^1) - \frac{h_1}{2} [K(t_1^1, t_0^0)x(t_0^0) + K(t_1^1, t_1^1)x(t_1^1)] \leq c(t_1^1).$$

Para $l_2 = 2$, duas partições, $0 = t_0^2 < t_1^2 < t_2^2 = T$, temos:

1) Função objetivo:

$$\begin{aligned} \int_0^T a'(t)x(t)dt &= \int_{t_0^2}^{t_1^2} a'(t)x(t)dt + \int_{t_1^2}^{t_2^2} a'(t)x(t)dt \\ &= \frac{h_2}{2} [a'(t_0^2)x(t_0^2) + 2a'(t_1^2)x(t_1^2) + a'(t_2^2)x(t_2^2)]. \end{aligned}$$

2) Restrição:

$$B(t_2^2)x(t_2^2) - \int_0^{t_2^2} K(t_2^2, s)x(s) ds \leq c(t_2^2);$$

que implica em

$$B(t_2^2)x(t_2^2) - \frac{h_2}{2} [K(t_2^2, t_0^0)x(t_0^0) + 2K(t_2^2, t_1^2)x(t_1^2) + K(t_2^2, t_2^2)x(t_2^2)] \leq c(t_2^2).$$

Usando a indução matemática podemos concluir que para $l_n = n$, n partições,

$0 = t_0^n < t_1^n \cdots < t_{l_n-1}^n < t_{l_n}^n = T$, temos:

1) Função objetivo:

$$\begin{aligned} \int_0^T a'(t)x(t)dt &= \int_{t_0^n}^{t_1^n} a'(t)x(t)dt + \int_{t_1^n}^{t_2^n} a'(t)x(t)dt + \cdots + \int_{t_{l_n-1}^n}^{t_{l_n}^n} a'(t)x(t)dt \\ &= \frac{h_n}{2} \left[a'(t_0^n)x(t_0^n) + 2 \sum_{i=1}^{l_n-1} a'(t_i^n)x(t_i^n) + a'(t_{l_n}^n)x(t_{l_n}^n) \right]. \end{aligned}$$



2) Restrição:

$$B(t_{l_n}^n)x(t_{l_n}^n) - \int_0^{t_{l_n}^n} K(t_{l_n}^n, s)x(s) ds \leq c(t_{l_n}^n);$$

que implica em

$$B(t_{l_n}^n)x(t_{l_n}^n) - \frac{h_n}{2} \left[K(t_{l_n}^n, t_0^0)x(t_0^0) + 2 \sum_{i=1}^{l_n-1} K(t_{l_n}^n, t_i^n)x(t_i^n) + K(t_{l_n}^n, t_{l_n}^n)x(t_{l_n}^n) \right] \leq c(t_{l_n}^n).$$

Usando o fato que $t_0^n = 0$ e $t_{l_n}^n = T$ podemos escrever função objetivo do problema (P) na forma,

$$h_n \left(\frac{1}{2}a'(0) : a'(t_{l_1}^n) : \dots : a'(t_{l_{n-1}}^n) : \frac{1}{2}a'(T) \right) \begin{pmatrix} x(0) \\ x(t_1^n) \\ \vdots \\ x(t_{l_{n-1}}^n) \\ x(T) \end{pmatrix}$$

sendo $h_n = T/l_n$.

E as restrições na forma,

$$B(0)x(0) - \frac{1}{2}K(0, 0)x(0) \leq c(0);$$

$$B(t_1^n)x(t_1^n) - h_n \left[\frac{1}{2}K(t_1^n, 0)x(0) + \frac{1}{2}K(t_1^n, t_1^n)x(t_1^n) \right] \leq c(t_1^n);$$

$$B(t_2^n)x(t_2^n) - h_n \left[\frac{1}{2}K(t_2^n, 0)x(0) + K(t_2^n, t_1^n)x(t_1^n) + \frac{1}{2}K(t_2^n, t_2^n)x(t_2^n) \right] \leq c(t_2^n);$$

$\vdots$

$$B(t_{l_n}^n)x(t_{l_n}^n) - h_n \left[\frac{1}{2}K(t_{l_n}^n, 0)x(0) + \sum_{i=1}^{l_n-1} K(t_{l_n}^n, t_i^n)x(t_i^n) + \frac{1}{2}K(t_{l_n}^n, t_{l_n}^n)x(t_{l_n}^n) \right] \leq c(t_{l_n}^n).$$

Escrevendo na forma matricial e multiplicando a primeira e última linha por $\frac{1}{2}$, obtemos

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}B_0^n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_1^n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & B_2^n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B_{l_n-1}^n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{2}B_{l_n}^n \end{pmatrix} - \frac{T}{l_n} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}K & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2}K & \frac{1}{2}K & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2}K & K & \frac{1}{2}K & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ \frac{1}{2}K & K & \cdots & K & \frac{1}{2}K & 0 \\ \frac{1}{4}K & \frac{1}{2}K & \cdots & \frac{1}{2}K & \frac{1}{2}K & \frac{1}{4}K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0^n \\ x_1^n \\ x_2^n \\ \vdots \\ x_{l_n-1}^n \\ x_{l_n}^n \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \frac{1}{2}c_0^n \\ c_1^n \\ c_2^n \\ \vdots \\ c_{l_n-1}^n \\ \frac{1}{2}c_{l_n}^n \end{pmatrix}$$

Podemos reescrever o problema de otimização linear contínuo (P) na forma

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \frac{T}{l_n} a'_n x_n \\ \text{(P}_n\text{)} & \text{Sujeito a} \quad G_n x_n \leq c_n, \\ & x_n \geq 0 \end{array}$$

sendo,

$$\begin{aligned} a'_n &= (a'_{n0} : a'_{n1} : \cdots : a'_{nl_n}) \quad \text{com} \quad a_{n0} = \frac{1}{2}a(0), a_{nl_n} = \frac{1}{2}a(T) \quad \text{e} \\ a_{ni} &= a(t_i^n) \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \dots, l_n - 1; \\ c_n &= (c_{n0} : c_{n1} : \cdots : c_{nl_n}) \quad \text{com} \quad c_{n0} = \frac{1}{2}c(0), c_{nl_n} = \frac{1}{2}c(T) \quad \text{e} \\ c_{ni} &= c(t_i^n) \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \dots, l_n - 1; \end{aligned}$$

$$G_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}B_0^n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_1^n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & B_2^n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B_{l_n-1}^n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{2}B_{l_n}^n \end{pmatrix} - \frac{T}{l_n} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}K & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2}K & \frac{1}{2}K & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2}K & K & \frac{1}{2}K & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ \frac{1}{2}K & K & \cdots & K & \frac{1}{2}K & 0 \\ \frac{1}{4}K & \frac{1}{2}K & \cdots & \frac{1}{2}K & \frac{1}{2}K & \frac{1}{4}K \end{pmatrix}.$$

E denotaremos,

$$x_n(t) = (x_{n,i+1} - x_{ni}) \frac{(t - t_i^n)}{l_n} + x_{ni}, \quad \text{para } t_i^n \leq t \leq t_{i+1}^n, i = 0, 1, \dots, l_n - 1.$$

Procedendo de modo análogo temos a aproximação para o problema dual (D) dada por:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & \frac{T}{l_n} c'_n w_n \\ (D_n) \quad \text{Sujeito a} & G'_n w_n \geq a_n, \\ & w_n \geq 0 \end{array}$$

2.2 Resultados Teóricos

Começemos com a introdução das hipótese básicas sobre as funções envolvidas no *problema de otimização linear com o tempo contínuo*. Supomos que:

- I - As matrizes $a(t)$, $c(t)$, $B(t)$ são de variação limitada (BV) e K é uma matriz constante;
- II - Para todo inteiro positivo n , existe uma solução viável para os problema P_n e D_n ;
- III - Existe um inteiro positivo n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$ tem-se,
 - a) $x_n \in \bar{K}(G_n, c_n)$ sendo x_n solução ótima para P_n ;
 - b) $w_n \in \bar{J}(G'_n, a_n)$ sendo w_n solução ótima para D_n .

sendo

$$K(G_n, c_n) = \{x_n; G_n x_n \leq c_n, x_n \geq 0\},$$

$$J(G'_n, a_n) = \{w_n; G'_n w_n \geq a_n, w_n \geq 0\};$$

$x_n \in \bar{K}(G_n, c_n) =$ envoltória convexa dos pontos extremos de $K(G_n, c_n)$,

$w_n \in \bar{J}(G'_n, a_n) =$ envoltória convexa os pontos extremos de $J(G'_n, a_n)$.

Lema 2.2.1 *Seja A uma matriz constante. Então existe um número $\rho > 0$ tal que para quaisquer vetores d, d^* as seguintes implicações se verificam:*

i) $x \in \bar{K}(A, d) \rightarrow \|x\| \leq \rho \|d\|$,

ii) $Y \in \bar{J}(A', d^*) \rightarrow \|Y\| \leq \rho \|d^*\|$.

Demonstração:

Encontra-se em [9]. ■

Lema 2.2.2 *Existe um número positivo R tal que,*

a) $\|x_{nk}\| \leq R$ para todo n, k ($0 \leq k \leq l_n$) e $V[0, T, x_n(t)] \leq R$ para todo n .

b) $\|w_{nk}\| \leq R$ para todo n, k ($0 \leq k \leq l_n$) e $V[0, T, w_n(t)] \leq R$ para todo n .

Demonstração:

a) Defina,

$$\mu = \sup_{0 \leq t \leq T} \|c(t)\|, \quad \tilde{\mu} = \begin{pmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu \end{pmatrix}$$

Para um n arbitrário dado, temos que $x_n(t_0^n) = x_{n0} \geq 0$ e $Bx_n(t_0^n) \leq c_n(t_0^n) \leq \tilde{\mu}$.

Pelo Lema 2.2.1 temos que $\|x_{n0}\| \leq \rho \|\tilde{\mu}\|$.

Dada uma matriz K , seja $\theta \geq 0$ tal que $\|Kx\| \leq \theta \|x\|$ para todo $x \in E^N$.

Afirmamos que: para $0 \leq k \leq l_n$

$$\|x_{nk}\| \leq \rho \|\tilde{\mu}\| (1 + \Delta t^n \theta \rho)^k. \quad (2.2.1)$$

De fato, para $k = 0$, temos

$$\|x_{n0}\| \leq \rho \|\tilde{\mu}\|,$$

que é verdadeiro pelo lema 2.2.1.

Suponhamos que a desigualdade (2.2.1) se verifica para todo ν , $0 \leq \nu \leq k < l_n$. Como $x_n(t_{k+1}^n) \geq 0$ e

$$\begin{aligned} Bx_n(t_{k+1}^n) &\leq c_n(t_{k+1}^n) + \Delta t^n \sum_{\nu=0}^k Kx_n(t_{\nu}^n) \\ &\leq \mu + \Delta t^n \sum_{\nu=0}^k Kx_n(t_{\nu}^n). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|x_n(t_{k+1}^n)\| &\leq \rho \left\{ \|\tilde{\mu}\| + \Delta t^n \sum_{\nu=0}^k \|Kx_n(t_{\nu}^n)\| \right\} \\ &\leq \rho \left\{ \|\tilde{\mu}\| + \Delta t^n \theta \sum_{\nu=0}^k \|x_n(t_{\nu}^n)\| \right\} \\ &\leq \rho \left\{ \|\tilde{\mu}\| + \Delta t^n \theta \sum_{\nu=0}^k \rho \|\tilde{\mu}\| (1 + \Delta t^n \theta \rho)^{\nu} \right\} \\ &= \rho \left\{ \|\tilde{\mu}\| + \Delta t^n \theta \rho \|\tilde{\mu}\| \sum_{\nu=0}^k (1 + \Delta t^n \theta \rho)^{\nu} \right\} \\ &= \rho \|\tilde{\mu}\| (1 + \Delta t^n \theta \rho) \sum_{\nu=0}^k (1 + \Delta t^n \theta \rho)^{\nu} \\ &= \rho \|\tilde{\mu}\| (1 + \Delta t^n \theta \rho)^{k+1}. \end{aligned}$$

Isto é obtido usando indução sobre k .

Fazendo $\Delta t^n = T/l_n$ e usando o fato que $\theta \rho \geq 0$ e segue que

$$\left(1 + \frac{T\theta\rho}{l_n}\right)^k \leq \left(1 + \frac{T\theta\rho}{l_n}\right)^n,$$

para $0 \leq k \leq l_n$.

Portanto para $0 \leq k \leq l_n$,

$$\|x_{nk}\| \leq \rho \|\tilde{\mu}\| \left(1 + \frac{T\theta\rho}{l_n}\right)^n.$$

Sendo a seqüência $\left\{\left(1 + \frac{T\theta\rho}{l_n}\right)^n\right\}$ crescente e $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{T\theta\rho}{l_n}\right)^n = e^{T\theta\rho}$, [10].

Portanto, para $n = 1, 2, \dots$, $0 \leq k \leq l_n$

$$\|x_{nk}\| \leq \rho \|\tilde{\mu}\| \left(1 + \frac{T\theta\rho}{l_n}\right)^k \leq \rho \|\tilde{\mu}\| e^{T\theta\rho} \leq R_1,$$



sendo R_1 o limite superior, R_1 não depende de n e h .

Consideremos agora a seguinte relação

$$\left[(B_k^n : I) - \frac{T}{2l_n}(K : 0) \right] x_{nk} = c_{nk} + \frac{T}{l_n} \left(\frac{1}{2}x_{n0} + x_{n1} + \cdots + x_{n,k-1} \right) \quad (2.2.2)$$

Reescrevendo (2.2.2) para $k = i - 1$ e $k = i$, temos

$$\left[(B_{i-1}^n : I) - \frac{T}{2l_n}(K : 0) \right] x_{n,i-1} = c_{n,i-1} + \frac{T}{l_n} \left(\frac{1}{2}x_{n0} + x_{n1} + \cdots + x_{n,i-2} \right) \quad (2.2.3)$$

e

$$\left[(B_i^n : I) - \frac{T}{2l_n}(K : 0) \right] x_{n,i} = c_{n,i} + \frac{T}{l_n} \left(\frac{1}{2}x_{n0} + x_{n1} + \cdots + x_{n,i-1} \right) \quad (2.2.4)$$

Subtraindo (2.2.3) de (2.2.4), temos

$$\begin{aligned} \left[(B_i^n : I) - \frac{T}{2l_n}(K : 0) \right] x_{n,i} - \left[(B_{i-1}^n : I) - \frac{T}{2l_n}(K : 0) \right] x_{n,i-1} \\ = c_{n,i} - c_{n,i-1} + \frac{T}{l_n} (x_{n,i-1}). \end{aligned}$$

Daí obtemos,

$$\begin{aligned} \left[(B_i^n : I) - \frac{T}{2l_n}(K : 0) \right] (x_{ni} - x_{n,i-1}) &= c_{n,i} - c_{n,i-1} + \frac{T}{l_n} (K : 0) (x_{n,i-1}) \\ &\quad - (B_i^n - B_{i-1}^n : 0) x_{n,i-1} \quad (2.2.5) \end{aligned}$$

Podemos reescrever (2.2.5) como,

$$A_i^n \text{abs}(x_{ni} - x_{n,i-1}) = c_{n,i} - c_{n,i-1} + \frac{T}{l_n} (K : 0) (x_{n,i-1}) - (B_i^n - B_{i-1}^n : 0) x_{n,i-1}.$$

Sendo a matriz A_i^n obtida de $\left[(B_i^n : I) - \frac{T}{2l_n}(K : 0) \right]$.

Fazendo $\theta = \| K \|$ e pelo Lema 2.2.1, temos

$$\| (x_{ni} - x_{n,i-1}) \| \leq \rho (\| c_{n,i} - c_{n,i-1} \| + \frac{T\theta}{l_n} \| x_{n,i-1} \| + \| B_i^n - B_{i-1}^n \| \| x_{n,i-1} \|).$$



Fazendo a soma em i , temos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{l_n} \|x_{ni} - x_{n,i-1}\| &\leq \rho \sum_{i=1}^{l_n} \|c_{n,i} - c_{n,i-1}\| + \frac{T\theta\rho}{l_n} \sum_{i=1}^{l_n} \|x_{n,i-1}\| \\ &\quad + \rho R_1 \sum_{i=1}^{l_n} \|B_i^n - B_{i-1}^n\|, \end{aligned}$$

Portanto,

$$V[0, T, x_n(t)] \leq \rho V[0, T, c(t)] + \|\tilde{\mu}\| e^{T\theta\rho} + \rho R_1 V[0, T, B(t)] = R_2$$

Tomando $R = \max\{R_1, R_2\}$ provamos a parte a) do lema.

b) É provado de modo análogo ao item a).

■

Teorema 2.2.1 *Sejam $(x_n(t))$ e $(w_n(t))$ seqüências de funções geradas a partir das soluções ótimas x_n e w_n de P_n e D_n , respectivamente. Então existem subseqüências $(x_{n_i}(t))$ de $(x_n(t))$ e $(w_{n_i}(t))$ de $(w_n(t))$ que converge quase sempre em $[0, T]$ para funções de variação limitada $\tilde{x}(t)$ e $\tilde{w}(t)$ respectivamente. Além disso,*

$$a) \lim_{n_i \rightarrow \infty} \int_0^T a'(t) x_{n_i}(t) dt = \int_0^T a'(t) \tilde{x}(t) dt;$$

$$b) \lim_{n_i \rightarrow \infty} \int_0^T c'(t) w_{n_i}(t) dt = \int_0^T c'(t) \tilde{w}(t) dt;$$

$$c) \lim_{n_i \rightarrow \infty} \left[(B(t) : I) x_{n_i}(t) - (K : 0) \int_0^t x_{n_i}(s) ds \right] = (B(t) : I) \tilde{x}(t) - (K : 0) \int_0^t \tilde{x}(s) ds;$$

$$d) \lim_{n_i \rightarrow \infty} \left[(B'(t) : I) w_{n_i}(t) - (K' : 0) \int_t^T w_{n_i}(s) ds \right] = (B'(t) : I) \tilde{w}(t) - (K' : 0) \int_t^T \tilde{w}(s) ds.$$

Demonstração:

Pelo Lema 2.2.2 temos que as funções $x_n(t)$ e $w_n(t)$ são uniformemente limitadas em $[0, T]$ e as variações totais também são limitadas em $[0, T]$. Usando o Teorema de Helly (Teorema 1.1.4) segue a afirmação do teorema.

a) Como $x_{n_i}(t) \rightarrow \tilde{x}(t)$ quase sempre em $[0, T]$ e $\tilde{x}(t)$ é uma função de variação limitada, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue que

$$\lim_{n_i \rightarrow \infty} \int_0^T a'(t) x_{n_i}(t) dt = \int_0^T a'(t) \tilde{x}(t) dt.$$

b) Análogo ao item a).

c) Temos que $x_{n_i}(t) \rightarrow \tilde{x}(t)$ quase sempre $[0, T]$ e $\tilde{x}(t)$ é uma função de variação limitada. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue que,

$$\lim_{n_i \rightarrow \infty} \left[(B(t) : I) x_{n_i}(t) - (K : 0) \int_0^t x_{n_i}(s) ds \right] = (B(t) : I) \tilde{x}(t) - (K : 0) \int_0^t \tilde{x}(s) ds.$$

d) Análogo ao item c).

■

Teorema 2.2.2 *Seja σ_{n_i} o refinamento de $\sigma_{n_{i-1}}$ para cada n_i e sejam $(x_{n_i}(t))$ e $(w_{n_i}(t))$ subsequências obtidas a partir das soluções ótimas $x_n(t)$ e $w_n(t)$ respectivamente. E sejam*

$$\tilde{x}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) \quad \text{quase sempre}, \quad \tilde{w}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} w_k(t) \quad \text{quase sempre}.$$

a) $\tilde{x}(t)$ é uma solução viável para o primal;

b) $\tilde{w}(t)$ é uma solução viável para o dual.

Demonstração:

Encontra-se em [4] página 112.

■

Teorema 2.2.3 *Sejam $(x_k(t))$, $(w_k(t))$ subseqüências que convergem quase sempre em $[0, T]$, obtidas a partir das soluções ótimas x_n , w_n de P_n e D_n , respectivamente ($k = n_i$). Então*

$$a) \frac{T}{l_k} a'_k x_k \longrightarrow \int_0^T a'(t) \tilde{x}(t) dt, \text{ quando } k \longrightarrow \infty.$$

$$b) \frac{T}{l_k} c'_k w_k \longrightarrow \int_0^T c'(t) \tilde{w}(t) dt, \text{ quando } k \longrightarrow \infty.$$

$$c) \int_0^T a'(t) \tilde{x} dt = \int_0^T c'(t) \tilde{w}(t) dt, \text{ (otimalidade).}$$

Demonstração:

a) Para esta demonstração vamos introduzir a notação,

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k0} &= \frac{1}{2} \tilde{x}(0), \tilde{x}_{kl_k} = \frac{1}{2} \tilde{x}(T) \text{ e } \tilde{x}_{ki} = \tilde{x}(t_i^k), i = 1, 2, \dots, l_k - 1; \\ \tilde{x}'_k &= (\tilde{x}'_{k0} : \tilde{x}'_{k1} : \dots : \tilde{x}'_{kl_k}); \\ \tilde{x}_k(t) &= (\tilde{x}_{k,i+1} - \tilde{x}_{ki}) \frac{(t - t_i^k)}{l_k} + \tilde{x}_{ki}, \text{ para } t_i^k \leq t \leq t_{i+1}^k, i = 0, 1, \dots, l_k - 1,; \\ &(\text{notemos que } \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{x}_k(t) = \tilde{x}(t) \text{ quase sempre}). \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

$$\begin{aligned} x_{k0} &= \frac{1}{2} x(0), x_{kl_k} = \frac{1}{2} x(T) \text{ e } x_{ki} = x(t_i^k), i = 1, 2, \dots, l_k - 1; \\ x'_k &= (x'_{k0} : x'_{k1} : \dots : x'_{kl_k}); \\ x_k(t) &= (x_{k,i+1} - x_{ki}) \frac{(t - t_i^k)}{l_k} + x_{ki}, \text{ para } t_i^k \leq t \leq t_{i+1}^k, i = 0, 1, \dots, l_k - 1; \end{aligned}$$

$$a'_n = (a'_{n0} : a'_{n1} : \dots : a'_{nl_n}) \quad \text{com} \quad a_{n0} = a(0), a_{nl_n} = a(T) \quad \text{e}$$

$$a_{ni} = a(t_i^n) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, l_n - 1;$$

Vamos aplicar a aproximação trapezoidal em

$$\int_0^T a'(t) \tilde{x}(t) dt$$

e usando a notação definida em (2.2.6) vemos que

$$\int_0^T a'(t) \tilde{x}(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{T}{l_k} a'_k \tilde{x}_k \quad (2.2.7)$$

Mostremos agora que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{T}{l_k} a'_k (\tilde{x}_k - x_k) \right] = 0$$

Temos que,

$$\left| \frac{T}{l_k} a'_k (\tilde{x}_k - x_k) \right| \leq \frac{T}{l_k} \text{abs}(a'_k) \text{abs}(\tilde{x}_k - x_k).$$

Como $a(t)$ é limitada, existe $\lambda > 0$ tal que $|a_k| \leq \lambda E$ para qualquer k , sendo E um vetor com k componentes iguais a um.

Assim,

$$\begin{aligned} \left| \frac{T}{l_k} a'_k (\tilde{x}_k - x_k) \right| &\leq \frac{T}{l_k} \text{abs}(a'_k) \text{abs}(\tilde{x}_k - x_k) \\ &= \lambda \int_0^T E \text{abs}(\tilde{x}_k(t) - x_k(t)) dt. \end{aligned}$$

Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\lambda \int_0^T E \text{abs}(\tilde{x}_k(t) - x_k(t)) dt \longrightarrow 0 \quad \text{quando } k \rightarrow \infty.$$

b) Análogo ao item c).



c) Segue das propriedades do dual dos problemas programação linear e problemas de programação linear contínuo.

■

2.3 Resultados Numéricos

Nesta seção apresentamos alguns exemplos com seus resultados numéricos e a sua solução analítica. Iremos considerar problemas de otimização linear com tempo contínuo da forma,

$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimizar} & \int_0^T a'(t)x(t) dt \\
 \text{(P)} \quad \text{Sujeito a} & B(t)x(t) \leq c(t) + \int_0^t K(t,s)x(s) ds \\
 & x(t) \geq 0.
 \end{array}$$

Para resolvê-los iremos usar a aproximação linear apresentada na seção 2.1 para transforma-los em problemas do tipo

$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimizar} & \frac{T}{l_n} a'_n x_n \\
 \text{(P}_n\text{)} \quad \text{Sujeito a} & G_n x_n \leq c_n, \\
 & x_n \geq 0
 \end{array}$$

Exemplo 2.3.1 Consideremos o problema de otimização linear com tempo contínuo com duas variáveis e duas restrições e com $0 \leq t \leq 1$. Sendo a matrizes $a(t)$, $c(t)$, $B(t)$ e $K(t, s)$ dadas por:



$$a(t) = \begin{pmatrix} -1+t \\ -3+3t \end{pmatrix}, \quad c(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ 8t \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } K = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Observando a solução aproximada deduzimos que para $0 \leq t \leq 1$ contém as bases $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Iremos fazer uso desta informação para obtermos a solução analítica.

Usando a informação a respeito das bases consideremos

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } K_1 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Temos que $x^{(1)}(t)$ é dado por,

$$x^{(1)}(t) = B_1^{-1} \left\{ c(t) + K_1 \int_0^t x^{(1)}(s) ds \right\}, \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1 \quad (2.3.8)$$

Assim,

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{14}{3} \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \int_0^t x^{(1)}(s) ds, \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1 \quad (2.3.9)$$

Observemos que resolver o nosso problema de otimização linear contínuo é equivalente a resolver a uma equação integral de *Volterra* na forma [4]

$$u(t) = A + Pt + H \int_{t_0}^t u(s) ds \quad (2.3.10)$$

sendo $u(\cdot)$ uma função vetorial a ser determinada, A e P são vetores constantes e H uma matriz não singular. A solução para equação (2.3.10) é dada pela expressão [4]:

$$u(t) = e^{H(t-t_0)}(A + H^{-1}P + Pt_0) - H^{-1}P \quad (2.3.11)$$

A exponencial da matriz pode ser calculada usando a fórmula de interoplação de *Lagrange*. Se todos os autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ da matriz H são distintos temos

$$e^{H(t-t_0)} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i(t-t_0)} H_i \quad (2.3.12)$$

sendo

$$H_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{H - \lambda_j I}{\lambda_i - \lambda_j}. \quad (2.3.13)$$

Os autovalores da matriz H são $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = -2$. Usando a expressão (2.3.13) obtemos,

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando (2.3.12) temos,

$$e^{Ht} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

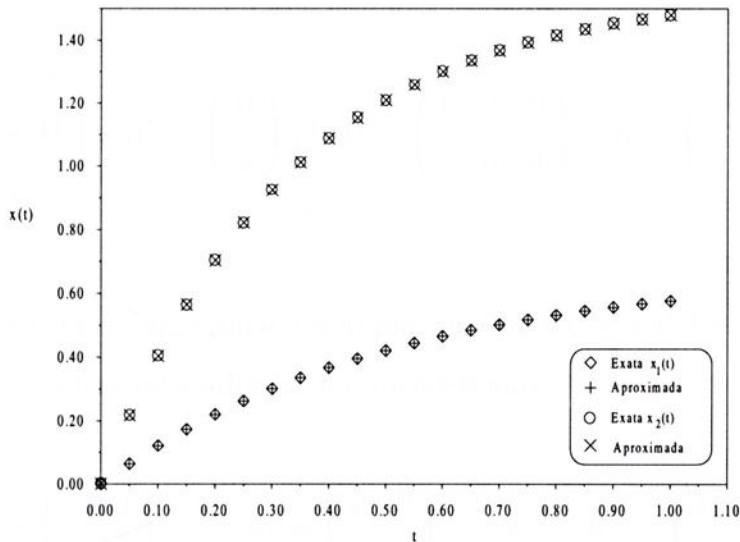
Usando a expressão (2.3.11) obtemos a solução analítica para o nosso problema de otimização com tempo contínuo dada por:

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} - \frac{2}{3}e^{-2t} \\ \frac{14}{9} - \frac{14}{9}e^{-3t} \end{pmatrix}. \quad (2.3.14)$$

Usando (2.3.14) determinamos o valor da função objetivo,

$$\int_0^1 a'(t)x(t) dt = -\frac{79}{54} + \frac{1}{6}e^{-2} + \frac{14}{27}e^{-3} = -1.414591591565.$$

A figura 2.3.1.1 mostra a solução aproximada e a solução exata para $x_1(t)$ e $x_2(t)$ respectivamente, para uma malha de 20 pontos (l_{20}) sobre o intervalo $[0, 1]$.



E na figura 2.3.1.2 podemos observar convergência da solução aproximada para $l_n = 20, 100, 200, 600, 1000$ e 1400 , respectivamente, para a solução ótima obtida através da solução analítica.

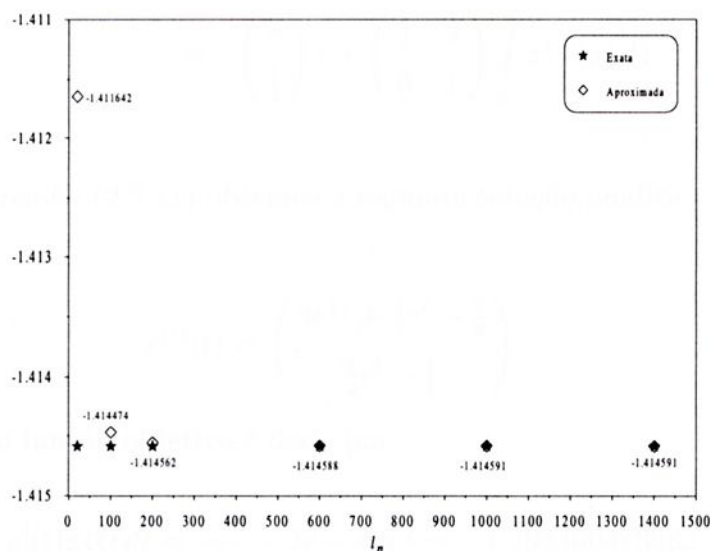


Figura 2.3.1.2

Exemplo 2.3.2 Consideremos o problema de otimização linear com tempo contínuo com três variáveis e duas restrições e com $0 \leq t \leq 1$. Sendo as matrizes $a(t)$, $c(t)$, $B(t)$ e $K(t, s)$ dadas por:

$$a(t) = \begin{pmatrix} -2 + 2t \\ -4 + 4t \\ -2 + 2t \end{pmatrix}, c(t) = \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } K = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Observando a solução aproximada notamos que para $0 \leq t \leq 1$ contém as bases $x_2(t)$ e $x_3(t)$. Usando esta informação consideremos,

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Determinando $x^{(1)}(t)$ temos,

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t) &= B_1^{-1} \left\{ c(t) + K_1 \int_0^t x^{(1)}(s) ds \right\} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \int_0^t x^{(1)}(s) ds \end{aligned}$$

Usando a expressão (2.3.11) obtemos a seguinte solução analítica para $x^{(1)}(t)$,

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 3e^{\frac{1}{2}t} + \frac{1}{2}e^t - \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

O valor para a função objetivo é dado por:

$$\int_0^1 a'(t)x(t) dt = \frac{171}{2} - 3e - 48e^{\frac{1}{2}} = -1.793466478983$$

A figura 2.3.2.1 mostra a solução aproximada e a solução exata para $x_2(t)$ e $x_3(t)$, respectivamente, para uma malha de 20 pontos (l_{20}) sobre o intervalo $[0, 1]$.

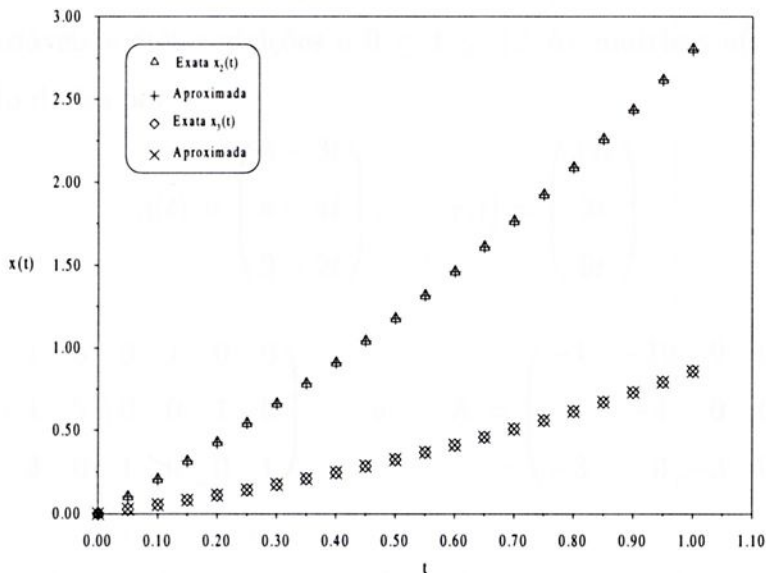


Figura 2.3.2.1

Observando a solução aproximada deduzimos que $x_1(t) \equiv 0$.

Na figura 2.3.2.2 podemos observar convergência da solução aproximada para $l_n = 20, 100, 200, 600, 1000$ e 1400 , respectivamente, para a solução ótima obtida através da solução analítica.

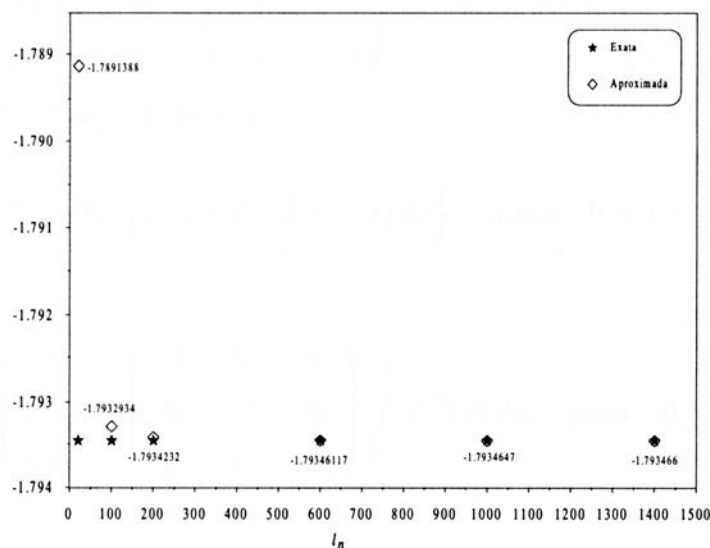


Figura 2.3.2.2

Exemplo 2.3.3 Consideremos o problema de otimização linear com tempo contínuo com três variáveis e três restrições e $0 \leq t \leq 1$. As matrizes $a(t)$, $B(t)$, $c(t)$ e $K(t, s)$ sendo dadas por:

$$a(t) = \begin{pmatrix} 3 - 3t \\ 4 - 4t \\ 2 - 2t \end{pmatrix}, \quad c(t) = \begin{pmatrix} 12t \\ 2t \\ 9t \end{pmatrix}$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad K = \begin{pmatrix} -1 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A partir da solução aproximada deduzimos que existe um número T_0 entre 0.70 e 0.75 (ver tabela 2.3.3.1), que contém as bases $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$ para $0 \leq t \leq T_0$; e para $T_0 < t \leq 1$, contém as bases $x_2(t)$, $x_3(t)$ e $x_4(t)$.

Usando esta informação a respeito das bases construiremos a solução analítica.

Para $0 \leq t \leq T_0$ temos,

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad K_1 = \begin{pmatrix} -1 & -10 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Temos que $x^{(1)}(t)$ será dado por:

$$x^{(1)}(t) = B_1^{-1} \left\{ c(t) + K_1 \int_0^{T_0} x^{(1)}(s) ds \right\}, \quad \text{para } 0 \leq t \leq T_0.$$

Assim,

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \int_0^t x^{(1)}(s) ds, \quad \text{para } 0 \leq t \leq T_0.$$

Usando a expressão (2.3.13) e (2.3.12) obtemos, respectivamente,

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e}$$

$$e^{Ht} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Usando a expressão (2.3.11) obtemos

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 2 - 2e^{-t} \\ 1 - e^{-2t} \\ 1 - e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Fazendo agora para $T_0 < t \leq 1$ temos

$$x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad K_2 = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \end{pmatrix}.$$



Logo

$$x^{(2)}(t) = B_2^{-1} \left\{ c(t) + K_1 \int_0^{T_0} x^{(1)}(s) ds + K_2 \int_{T_0}^t x^{(2)}(s) ds \right\}.$$

Temos que

$$x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -T_0 + e^{-T_0} - e^{-2T_0} \\ -9T_0 - 6e^{-T_0} - e^{-3T_0} + 7 \\ -7T_0 - 7e^{-T_0} + 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \int_{T_0}^t x^{(2)}(s) ds$$

Resolvendo para $x^{(3)}(t) = (x_2(t), x_3(t))'$ obtemos a seguinte equação

$$x^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -T_0 + e^{-T_0} - e^{-2T_0} \\ -9T_0 - 6e^{-T_0} - e^{-3T_0} + 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \int_{T_0}^t x^{(3)}(s) ds.$$

Usando as expressões (2.3.10) obtemos,

$$x^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} e^{T_0-2t} - e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{2(T_0-t)} + \frac{1}{2} \\ -6e^{2T_0-3t} - 3e^{-3t} + 4e^{3(T_0-t)} + 3 \end{pmatrix}, \quad \text{para } T_0 < t \leq 1.$$

e

$$x_4(t) = 7t - 7T_0 - 7e^{-T_0} + 7 \quad (\text{variável de folga}).$$

Portanto, a solução exata é dada por:

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 2 - 2e^{-t} \\ 1 - e^{-2t} \\ 1 - e^{-3t} \end{pmatrix}, \quad \text{para } 0 \leq t \leq T_0 \quad \text{e}$$

$$x^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} e^{T_0-2t} - e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{2(T_0-t)} + \frac{1}{2} \\ -6e^{2T_0-3t} - 3e^{-3t} + 4e^{3(T_0-t)} + 3 \end{pmatrix}, \quad \text{para } T_0 < t \leq 1.$$

O valor da função objetivo para o nosso problema é dado por:

$$\begin{aligned} \int_0^1 a'(t)x(t) dt &= 2.333333334T_0 - 4T_0e^{-T_0} - 2T_0^2 + 0.135335283e^{T_0} \\ &\quad - 1.666666667e^{-T_0} - 0.1340503994e^{2T_0} \\ &\quad + 0.0044255179e^{3T_0} + 3.41626369. \end{aligned}$$

Para $T_0 = 0.74080933$ obtemos:

$$\int_0^1 a'(t)x(t) dt = -2.213204047819.$$

Usando (P_n) obtemos os seguintes resultados aproximados para uma malha de 20 pontos (l_{20}) . Estes resultados são comparados com a solução exata na tabela 2.3.3.1.

Tabela 2.3.3.1

Solução Aproximada				Solução Exata		
t_i^n	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$
0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,05	0,09756	0,09518	0,13931	0,09754	0,09516	0,13929
0,10	0,19036	0,18130	0,25921	0,19033	0,18127	0,25918
0,15	0,27864	0,25923	0,36241	0,27858	0,25918	0,36237
0,20	0,36261	0,32974	0,45123	0,36254	0,32968	0,45119
0,25	0,44248	0,39353	0,52767	0,44240	0,39347	0,52763
0,30	0,51846	0,45126	0,59347	0,51836	0,45119	0,59343
0,35	0,59073	0,50349	0,65011	0,59602	0,50341	0,65006
0,40	0,65947	0,55075	0,69885	0,65936	0,55067	0,69881
0,45	0,72486	0,59351	0,74080	0,72474	0,59343	0,74076
0,50	0,78707	0,63220	0,77691	0,78694	0,63212	0,77687
0,55	0,84623	0,66721	0,80799	0,84610	0,66713	0,80795
0,60	0,90251	0,69888	0,83474	0,90238	0,69881	0,83470
0,65	0,95605	0,72754	0,85776	0,95591	0,72747	0,85773
0,70	1,00697	0,75347	0,87757	1,00683	0,75340	0,87754
0,75	0,00000	0,25572	4,02161	0,00000	0,25402	4,00324
0,80	0,00000	0,27897	3,87929	0,00000	0,27743	3,86635
0,85	0,00000	0,30001	3,75680	0,00000	0,29861	3,74322
0,90	0,00000	0,31905	3,65137	0,00000	0,31777	3,63969
0,95	0,00000	0,33627	3,56063	0,00000	0,33512	3,55059
1,00	0,00000	0,35185	3,50097	0,00000	0,35081	3,47390



Na figura 2.3.3.2 podemos observar convergência da solução aproximada para $l_n = 20, 100, 200, 600, 1000$ e 1400 , respectivamente, para a solução ótima obtida através da solução analítica.

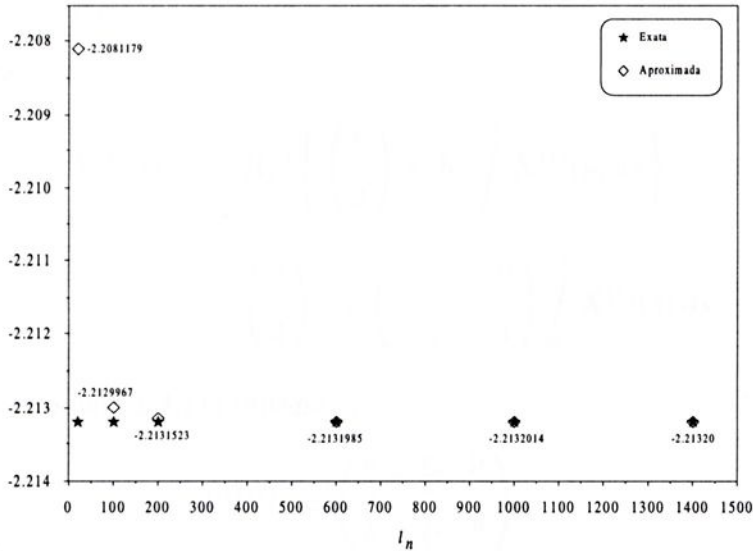


Figura 2.3.3.2

Exemplo 2.3.4 Consideremos o problema de otimização linear com tempo contínuo com quatro variáveis e quatro restrições e $0 \leq t \leq 1$. As matrizes $a(t)$, $B(t)$, $c(t)$ e $K(t, s)$ sendo dadas por:

$$a(t) = \begin{pmatrix} -2 + 2t \\ 2 - 2t \\ 1 - t \\ -3 + 3t \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$c(t) = \begin{pmatrix} 8t \\ 2t \\ 8t \\ 6t \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad K = \begin{pmatrix} -5 & -7 & -4 & -11 \\ -5 & 0 & 8 & -44 \\ -5 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -4 & -22 \end{pmatrix}.$$

Observando a solução aproximada notamos que para $0 \leq t \leq 1$ contém as soluções básicas $x_1(t)$ e $x_3(t)$. Fazendo uso desta informação consideremos

$$X^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad K_1 = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Temos então,

$$\begin{aligned} X^{(1)}(t) &= B_1^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} + K_1 \int_0^t X^{(1)}(s) ds \right\} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \int_0^t X^{(1)}(s) ds \end{aligned}$$

Usando a expressão (2.3.11) obtemos,

$$X^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-5t} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-4t} \end{pmatrix}.$$

A partir da solução aproximada deduzimos que $x_2(t) \equiv 0$ e $x_4(t) \equiv 0$.

A figura 2.3.4.1 mostra a solução aproximada e a solução exata para $x_1(t)$ e $x_3(t)$, respectivamente, para uma malha de 20 pontos (l_{20}) sobre o intervalo $[0, 1]$.

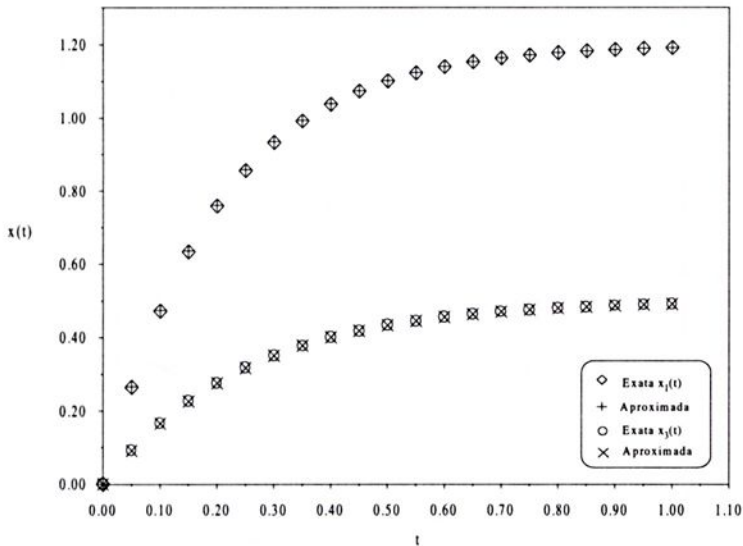


Figura 2.3.4.1

Na figura 2.3.4.2 podemos observar convergência da solução aproximada para $l_n = 20, 100, 200, 600, 1000$ e 1400 , respectivamente, para a solução ótima obtida através da solução analítica.

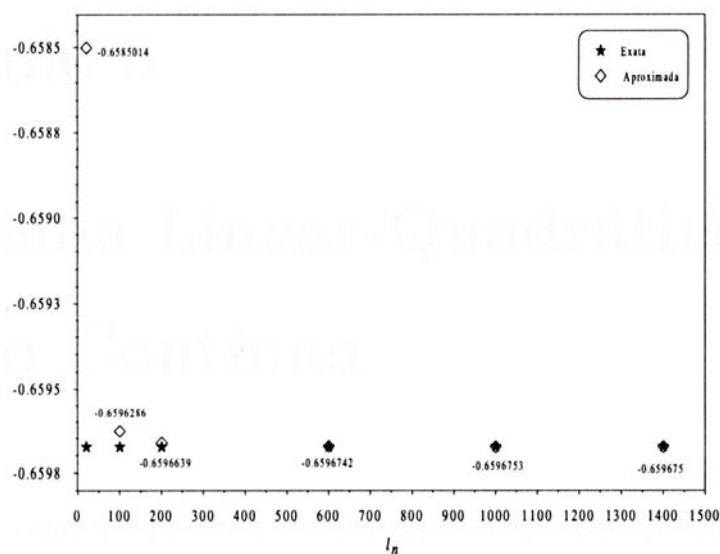


Figura 2.3.4.2

Capítulo 3

Problema Linear-Quadrático com Tempo Contínuo

Neste capítulo apresentamos uma aproximação para problemas de otimização não-lineares com tempo contínuo. Para uma melhor compreensão da construção apresentaremos a discretização para problemas gerais de otimização não-lineares com tempo contínuo. Depois, particularizaremos para o problema linear-quadrático para a discussão dos resultados de convergência e testes computacionais.

3.1 Construção da Aproximação

Consideremos o seguinte problema de otimização não-linear com tempo contínuo.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \int_0^T f(t, x(t)) dt \\ \text{(P1) Sujeito a} & g(t, x(t)) \leq 0 \\ & x(t) \geq 0 \end{array}$$

O dual de Wolfe associado ao problema (P₁) é dado por:



$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar} \quad \int_0^T \left[f(t, x(t)) + w'(t)g(t, x(t)) - \mu'(t)x(t) \right] dt \\
 (D1) \quad & \text{Sujeito a} \quad \int_0^T \left[\nabla_x f(t, x(t)) + w'(t)\nabla_x g(t, x(t)) - \mu(t) \right] dt = 0
 \end{aligned}$$

$$x(t) \geq 0, w(t) \geq 0 \text{ e } \mu(t) \geq 0.$$

Usando a aproximação trapezoidal no problema de otimização não-linear com tempo contínuo (P1) obtemos a seguinte aproximação discretizada (P1_n),

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar} \quad \frac{T}{2l_n} \left[f(t_0^n, x(t_0^n)) + 2 \sum_{i=1}^{l_n-1} f(t_i^n, x(t_i^n)) + f(t_n^n, x(t_n^n)) \right] \\
 (P1_n) \quad & \text{Sujeito a} \quad \frac{T}{2l_n} g(t_0^n, x(t_0^n)) \leq 0 \\
 & \quad \frac{2T}{l_n} \sum_{i=1}^{l_n-1} g(t_i^n, x(t_i^n)) \leq 0 \\
 & \quad \frac{T}{2l_n} g(t_n^n, x(t_n^n)) \leq 0
 \end{aligned}$$

$$x(t_i^n) \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, l_n.$$

As constantes mutiplicativas são incluídas nas restrições para ajustar o primal (P1_n) de forma que a discretização do dual contínuo seja de fato o dual de (P1_n).

Podemos do mesmo modo obter uma discretização (D1_n) para o problema dual (D1), dada por:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar} \quad \frac{T}{2l_n} \left[f(t_0^n, x(t_0^n)) + w'(t_0^n)g(t_0^n, x(t_0^n)) - \mu'(t_0^n)x(t_0^n) + \right. \\
 & \quad \left. 2 \sum_{i=1}^{l_n-1} \left(f(t_i^n, x(t_i^n)) + w(t_i^n)g(t_i^n, x(t_i^n)) - \mu'(t_i^n)x(t_i^n) \right) + \right. \\
 & \quad \left. f(t_n^n, x(t_n^n)) + w(t_n^n)g(t_n^n, x(t_n^n)) - \mu'(t_n^n)x(t_n^n) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f(t_n^n, x(t_n^n)) + w'(t_n^n)g(t_n^n, x(t_n^n)) - \mu'(t_n^n)x(t_n^n) \Big] \\
(D1_n) \quad & \text{Sujeito a } \frac{T}{2l_n} \left[\nabla_x f(t_0^n, x(t_0^n)) + w'(t_0^n) \nabla_x g(t_0^n, x(t_0^n)) - \mu(t_0^n) + \right. \\
& 2 \sum_{i=1}^{l_n-1} \left(\nabla_x f(t_i^n, x(t_i^n)) + w'(t_i^n) \nabla_x g(t_i^n, x(t_i^n)) - \mu(t_i^n) \right) + \\
& \left. \nabla_x f(t_n^n, x(t_n^n)) + w'(t_n^n) \nabla_x g(t_n^n, x(t_n^n)) - \mu(t_n^n) \right] = 0 \\
& x(t_i^n) \geq 0, w(t_i^n) \geq 0 \quad \text{e} \quad \mu(t_i^n) \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, l_n
\end{aligned}$$

Iremos particularizar o nosso problema de otimização não-linear com tempo contínuo para um problema de otimização linear-quadrático com tempo contínuo. Consideremos então que as funções $f(t, x(t))$ e $g(t, x(t))$ sejam dadas por:

$$f(t, x(t)) = \frac{1}{2} x'(t) Q(t) x(t) + a'(t) x(t)$$

e

$$g(t, x(t)) = B(t)x(t) - \int_0^t K(t, s)x(s) ds - c(t),$$

sendo, $B(t)$ e $K(t, s)$ matrizes $M \times N$, $a(t)$ um vetor de dimensão N , $Q(t)$ matriz $N \times N$ simétrica e definida positiva, $c(t)$ vetor de dimensão M e $x(t)$ um vetor de dimensão N a ser determinado.

Usando a discretização $(P1_n)$ e $(D1_n)$ para $0 \leq t_i^n \leq T$, $i = 0, 1, \dots, l_n$, sendo l_n o número de subintervalos da partição $[0, T]$ e $t_i^n = iT/l_n$, $i = 0, 1, \dots, l_n$. Substituindo as funções f e g na função objetivo e nas restrições iremos obter um problema de programação Matemática que é uma aproximação em dimensão finita do problema original com tempo contínuo. Estas hipóteses serão usadas para obtenção dos resultados de convergência.

Substituindo a função f na função objetivo do problema $(P1_n)$.

Para $l_1 = 1$, uma partição $0 = t_0^1 < t_1^2 = T$ obtemos,

$$\frac{T}{2l_1} \left[\frac{1}{2} x'(0) Q(0) x(0) + a'(0) x(0) + \frac{1}{2} x'(T) Q(T) x(T) + a'(T) x(T) \right];$$

Para $l_2 = 2$, duas partições, $0 = t_0^2 < t_1^2 < t_2^2 = T$,

$$\frac{T}{2l_2} \left[\frac{1}{2} x'(0) Q(0) x(0) + a'(0) x(0) + x'(t_1^2) Q(t_1^2) x(t_1^2) + 2a'(t_1^2) x(t_1^2) + \right. \\ \left. \frac{1}{2} x'(T) Q(T) x(T) + a'(T) x(T) \right];$$

Usando a indução matemática podemos concluir que para $l_n = n$, n partições, $0 = t_0^n < t_1^n \cdots < t_{l_n-1}^n < t_{l_n}^n = T$ temos,

$$\frac{T}{2l_n} \left[\frac{1}{2} x'(0) Q(0) x(0) + a'(0) x(0) + 2 \sum_{i=1}^{l_n-1} \left(\frac{1}{2} x'(t_i^n) Q(t_i^n) x(t_i^n) + a'(t_i^n) x(t_i^n) \right) + \right. \\ \left. \frac{1}{2} x'(t_{l_n}^n) Q(t_{l_n}^n) x(t_{l_n}^n) \right].$$

Como as restrições do nosso problema (P1) são da mesma forma que as do problema (P) iremos usar a aproximação obtida no Capítulo 2 para o problema (P).

Podemos assim escrever o problema (P1_n) de otimização linear-quadrático na forma,

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && \frac{T}{l_n} \left[\frac{1}{2} x'_n Q_n x_n + a'_n x_n \right] \\ (P1_n) & \text{Sujeito a} && G_n x_n \leq c_n \\ & && x_n \geq 0 \end{aligned}$$

sendo,

$$a'_n = (a'_{n0} : a'_{n1} : \cdots : a'_{nl_n}) \quad \text{com} \quad a_{n0} = \frac{1}{2} a(0), a_{nl_n} = \frac{1}{2} a(T) \quad \text{e}$$



$$a_{ni} = a(t_i^n) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, l_n.$$

$$c'_n = (c'_{n0} : c'_{n1} : \dots : c'_{nl_n}) \quad \text{com } c_{n0} = \frac{1}{2}c(0), c_{nl_n} = \frac{1}{2}c(T) \quad \text{e}$$

$$c_{ni} = c(t_i^n) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, l_n.$$

$$Q_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}Q_0^n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_1^n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & Q_2^n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & Q_{l_n-1}^n & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}Q_{l_n}^n \end{pmatrix}$$

$$G_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}B_0^n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_1^n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B_2^n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & B_{l_n-1}^n & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{2}B_{l_n}^n \end{pmatrix} - \frac{T}{l_n} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}K & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2}K & \frac{1}{2}K & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2}K & K & \frac{1}{2}K & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \frac{1}{2}K & K & \dots & K & \frac{1}{2}K & 0 \\ \frac{1}{4}K & \frac{1}{2}K & \dots & \frac{1}{2}K & \frac{1}{2}K & \frac{1}{4}K \end{pmatrix}$$

E denotaremos,

$$x_n(t) = (x_{n,i+1} - x_{ni}) \frac{(t - t_i^n)}{l_n} + x_{ni}, \quad \text{para } t_i^n \leq t \leq t_{i+1}^n, i = 0, 1, \dots, l_n - 1.$$

Vamos construir o problema aproximado para o dual (D1) usando a discretização (D1_n). Substituindo as funções f e g na função objetivo e nas restrições do problema discretizado (D1_n) para $0 \leq t_i^n \leq T, i = 0, 1, \dots, l_n$.

Para $l_1 = 1$, uma partição $0 = t_0^1 < t_1^1 = T$, temos

1) Função objetivo:

$$\begin{aligned} & \frac{T}{2l_1} \left\{ \frac{1}{2}x'(0)Q(0)x(0) + a'(0)x(0) - \mu'(0)x(0) + \right. \\ & \quad w'(0) \left(B(0)x(0) - \frac{T}{2l_1}K(0,0)x(0) - c(0) \right) + \\ & \quad \frac{1}{2}x'(T)Q(T)x(T) + a'(T)x(T) - \mu'(T)x(T) + \\ & \quad \left. w'(T) \left[B(T)x(T) - \frac{T}{2l_1} \left(K(T,0)x(0) + K(T,T)x(T) \right) - c(T) \right] \right\}; \end{aligned}$$

2) Restrição:

$$\frac{T}{2l_1} \left\{ Q(0)x(0) + a(0) - \mu(0) + w'(0) \left(B(0) - \frac{T}{2l_1} K(0, 0) \right) + \right. \\ \left. Q(T)x(T) + a(T) - \mu(T) + w'(T) \left[B(T) - \frac{T}{2l_1} (K(T, 0) + K(T, T)) \right] \right\};$$

Para $l_2 = 2$, duas partições, $0 = t_0^2 < t_1^2 < t_2^2 = T$ temos,

1) Função objetivo:

$$\frac{T}{2l_2} \left\{ \frac{1}{2} x'(0) Q(0)x(0) + a'(0)x(0) - \mu'(0)x(0) + \right. \\ w'(0) \left(B(0)x(0) - \frac{T}{2l_2} K(0, 0)x(0) - c(0) \right) + \\ 2 \left[\frac{1}{2} x'(t_1^2) Q(t_1^2)x(t_1^2) + a'(t_1^2)x(t_1^2) - \mu'(t_1^2)x(t_1^2) + \right. \\ \left. w'(t_1^2) \left[B(t_1^2)x(t_1^2) - \frac{T}{2l_2} (K(t_1^2, 0)x(0) + K(t_1^2, t_1^2)x(t_1^2)) - c(t_1^2) \right] + \right. \\ \left. \frac{1}{2} x'(T) Q(T)x(T) + a'(T)x(T) - \mu'(T)x(T) + w'(T) \left(B(T)x(T) - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{T}{2l_2} (K(T, 0)x(0) + 2K(T, t_1^2)x(t_1^2) + K(T, T)x(T)) - c(T) \right) \right\};$$

2) Restrição:

$$\frac{T}{2l_2} \left\{ Q(0)x(0) + a(0) - \mu(0) + w'(0) \left(B(0) - \frac{T}{2l_2} K(0, 0) \right) + \right. \\ 2 \left[Q(t_1^2)x(t_1^2) + a(t_1^2) - \mu(t_1^2) + w'(t_1^2) \left(B(t_1^2) - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{T}{2l_2} (K(t_1^2, 0) + K(t_1^2, t_1^2)) \right) \right] + Q(T)x(T) + a(T) - \mu(T) + \\ \left. w'(T) \left[B(T) - \frac{T}{2l_2} (K(T, 0) + 2K(T, t_1^2) + K(T, T)) \right] \right\};$$

Usando a indução Matemática podemos concluir que para $l_n = n$, n partições,

$0 = t_0^n < t_1^n \cdots < t_n^n = T$ temos,



1) Função objetivo:

$$\begin{aligned} & \frac{T}{2l_n} \left\{ \frac{1}{2} x'(0) Q(0) x(0) + a'(0)(0) - \mu'(0) x(0) + \right. \\ & \quad w'(0) \left(B(0) x(0) - \frac{T}{2l_n} K(0, 0) x(0) - c(0) \right) + \\ & \quad 2 \sum_{i=1}^{l_n-1} \left[\frac{1}{2} x'(t_i^n) Q(t_i^n) x(t_i^n) + a'(t_i^n)(t_i^n) - \mu'(t_i^n) x(t_i^n) + \right. \\ & \quad w'(t_i^n) \left(B(t_i^n) x(t_i^n) - \frac{T}{2l_n} \left(K(t_i^n, t_0^n) x(t_0^n) + 2 \sum_{j=1}^{i-1} K(t_i^n, t_j^n) x(t_j^n) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. K(t_i^n, t_i^n) x(t_i^n) \right) - c(t_i^n) \right] + \frac{1}{2} x'(T) Q(T) x(T) + a'(T)(T) - \\ & \quad \mu'(T) x(T) + w'(T) \left[B(T) x(T) - \frac{T}{2l_n} \left(K(T, 0) x(0) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 2 \sum_{j=1}^{l_n-1} K(T, t_j^n) x(t_j^n) + K(T, T) x(T) \right) - c(T) \right] \Big\}, \end{aligned}$$

2) Restrição:

$$\begin{aligned} & \frac{T}{2l_n} \left\{ Q(0) x(0) + a'(0) - \mu(0) + w'(0) \left[B(0) - \frac{T}{2l_n} K(0, 0) \right] + \right. \\ & \quad 2 \sum_{i=1}^{l_n-1} \left[Q(t_i^n) x(t_i^n) + a'(t_i^n) - \mu(t_i^n) + w'(t_i^n) \left(B(t_i^n) - \frac{T}{2l_n} \left(K(t_i^n, t_0^n) + \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 2 \sum_{j=1}^{i-1} K(t_i^n, t_j^n) + K(t_i^n, t_i^n) \right) \right] + Q(T) x(T) + a'(T) - \mu(T) + \\ & \quad \left. w'(T) \left[B(T) - \frac{T}{2l_n} \left(K(T, 0) + 2 \sum_{j=1}^{l_n-1} K(T, t_j^n) + K(T, T) \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

Podemos escrever o problema discretizado (D1_n) na forma,

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar} && \frac{T}{l_n} \left[\frac{1}{2} x'_n Q_n x_n + a'_n x_n + w'_n (G_n x_n - c_n) - \mu'_n x_n \right] \\ (D1_n) & \text{Sujeito a} && \frac{T}{l_n} [Q_n x_n + a_n + G'_n w_n - \mu_n] = 0 \end{aligned}$$

$$w_n \geq 0, x_n \geq 0 \text{ e } \mu_n \geq 0.$$

sendo Q_n , a_n , G_n , c_n e $x_n(t)$ dados como para o problema $(P1_n)$ e denotaremos,

$$w_n(t) = (w_{n,i+1} - w_{ni}) \frac{(t - t_i^n)}{l_n} + w_{ni}, \quad \text{para } t_i^n \leq t \leq t_{i+1}^n, i = 0, 1, \dots, l_n - 1,$$

$$\mu_n(t) = (\mu_{n,i+1} - \mu_{ni}) \frac{(t - t_i^n)}{l_n} + \mu_{ni}, \quad \text{para } t_i^n \leq t \leq t_{i+1}^n, i = 0, 1, \dots, l_n - 1.$$

3.2 Resultados Teóricos

Para efeito de obtenção dos resultados teóricos de convergência vamos reformular os problemas duais com tempo contínuo e o discretizado, obtendo deste modo problemas de otimização em função apenas das variáveis duais.

Para isto usamos as restrições dos problemas duais com tempo contínuo e do discretizado para eliminar as variáveis primais das funções objetivos do dual $(D1)$ e sua discretização $(D1_n)$, respectivamente. Obtemos desta forma o problema dual contínuo equivalente a $(D1)$,

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & \int_0^T \left[-\frac{1}{2} w'(t) G(t) Q^{-1}(t) G'(t) w(t) + w'(t) \left(-c(t) \right. \right. \\ & \left. \left. - G(t) Q^{-1}(t) a(t) \right) + \mu'(t) Q^{-1}(t) G'(t) w(t) + \mu'(t) Q^{-1}(t) a(t) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \mu'(t) Q^{-1}(t) \mu - \frac{1}{2} a'(t) Q^{-1}(t) a(t) \right] dt \end{aligned}$$

$$\text{Sujeito a} \quad w(t) \geq 0 \quad \text{e} \quad \mu(t) \geq 0,$$

$$\text{sendo} \quad G(t) = B(t) - \int_0^t K(t, s) ds.$$

Podemos ainda reescrever este problema de uma forma mais simplificada

$$\text{Maximizar} \quad \int_0^T \left[-\frac{1}{2} \theta'(t) M(t) \theta(t) + N'(t) \theta(t) + R(t) \right] dt$$

$$\text{Sujeito a} \quad \theta(t) \geq 0$$

sendo,

$$M(t) = \begin{pmatrix} G(t)Q^{-1}(t)G'(t) & -G(t)Q^{-1}(t) \\ -Q^{-1}(t)G'(t) & Q^{-1}(t) \end{pmatrix},$$

$$N(t) = \begin{pmatrix} -c(t) - G(t)Q^{-1}(t)a(t) \\ Q^{-1}(t)a(t) \end{pmatrix},$$

$$R(t) = (-\frac{1}{2}a'(t)Q^{-1}(t)a(t)) \quad \text{e} \quad \theta(t) = \begin{pmatrix} w(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix}.$$

E o dual discretizado equivalente (D1_n) sem as variáveis primais é:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & \frac{T}{l_n} \left\{ -\frac{1}{2}w'_n G_n Q_n^{-1} G'_n w_n + w'_n (-c_n - G_n Q_n^{-1} a_n) \right. \\ & \left. \mu'_n Q_n^{-1} G'_n w_n + \mu'_n Q_n^{-1} a_n - \frac{1}{2}\mu'_n Q_n^{-1} \mu - \frac{1}{2}a'_n Q_n^{-1} a_n \right\} \end{aligned}$$

$$\text{Sujeito a} \quad w_n(t) \geq 0 \quad \text{e} \quad \mu(t)_n \geq 0.$$

Podendo também ser simplificado na forma:

$$\text{Maximizar} \quad -\frac{1}{2}\theta'_n M_n \theta_n + N'_n \theta_n + R_n$$

$$\text{Sujeito a} \quad \theta_n \geq 0$$

sendo,

$$M_n = \begin{pmatrix} G_n Q_n^{-1} G'_n & -G_n Q_n^{-1} \\ -Q_n^{-1} G'_n & Q_n^{-1} \end{pmatrix}, N_n = \begin{pmatrix} -c_n - G_n Q_n^{-1} a_n \\ Q_n^{-1} a_n \end{pmatrix},$$

$$R_n = (-\frac{1}{2}a'_n Q_n^{-1} a_n) \quad \text{e} \quad \theta_n = \begin{pmatrix} w_n \\ \mu_n \end{pmatrix}.$$

Iremos fazer as seguintes hipóteses sobre as funções envolvidas no nosso problema de otimização linear-quadrático com tempo contínuo para obtermos os resultados de convergência.

Supomos que:

- I - As matrizes $a(t)$, $c(t)$, $B(t)$ são de variação limitada (BV), $Q(t)$ é uma matriz de funções contínuas e K é uma matriz constante;
- II - Para todo inteiro positivo n , existe uma solução viável para os problema $P1_n$ e $D1_n$;
- III - Existe um inteiro positivo n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$ tem-se,
 - a) $x_n \in \bar{K}(G_n, c_n)$ sendo x_n solução ótima para $P1_n$;
- IV - Existe $L > 0$ suficientemente grande tal que $\|\theta_n\| \leq L$ e $V_T[0, t, \theta_n] \leq L \forall n \geq n_0$;

A condição (IV) é uma condição técnica, para as demonstrações dos resultados de convergência. Entretanto, tal condição de limitação do conjunto de soluções factíveis é razoável na prática.

Lema 3.2.1 *Existe um número positivo R tal que,*

- a) $\|x_{nk}\| \leq R$ para todo n, k ($0 \leq k \leq l_n$) e $V[0, T, x_n(t)] \leq R$ para todo n .
- b) $\|\theta_{nk}\| \leq R$ para todo n, k ($0 \leq k \leq l_n$) e $V[0, T, \theta_n(t)] \leq R$ para todo n .

Demonstração:

- a) Análoga ao item a) do Teorema 2.2.2.
- b) Segue da hipótese (IV).

■

Teorema 3.2.1 *Seja σ_{n_i} o refinamento de σ_{n_i-1} para cada k , e sejam $(x_{n_i}(t))$ e $(\theta_{n_i}(t))$ subsequências obtidas a partir das soluções ótimas $x_n(t)$ e $\theta_n(t)$ respectivamente.*



E sejam

$$\tilde{x}(t) = \lim_{n_i \rightarrow \infty} x_{n_i}(t) \quad \text{quase sempre}, \quad \tilde{\theta}(t) = \lim_{n_i \rightarrow \infty} \theta_{n_i}(t) \quad \text{quase sempre}.$$

Então,

- a) $\tilde{x}(t)$ é uma solução viável para o primal;
- b) $\tilde{\theta}(t)$ é uma solução viável para o dual.

Demonstração:

- a) Análoga ao item a) do Teorema 2.2.2.
- b) Segue do fato de que o limite de uma seqüência de funções não negativas (quase sempre) é uma função não negativa quase sempre.

■

Teorema 3.2.2 *Sejam $(x_n(t))$ e $(\theta_n(t))$ seqüências de funções geradas a partir das soluções ótimas x_n e θ_n de $P1_n$ e $D1_n$ respectivamente. Então existem subseqüências $(x_{n_i}(t))$ de $(x_n(t))$ e $(\theta_{n_i}(t))$ de $(\theta_n(t))$ que converge quase sempre em $[0, T]$ para funções de variação limitada $\tilde{x}(t)$ e $\tilde{\theta}(t)$, respectivamente. Além disso,*

a)

$$\lim_{n_i \rightarrow \infty} \int_0^T \left[\frac{1}{2} x'_{n_i}(t) Q(t) x_{n_i}(t) + a'(t) x_{n_i}(t) \right] dt = \int_0^T \left[\frac{1}{2} \tilde{x}'(t) Q(t) \tilde{x}(t) + a'(t) \tilde{x}(t) \right] dt;$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{n_i \rightarrow \infty} \int_0^T \left[-\frac{1}{2} \theta'_{n_i}(t) M(t) \theta_{n_i}(t) + N'(t) \theta_{n_i}(t) + R(t) \right] dt = \\ = \int_0^T \left[-\frac{1}{2} \tilde{\theta}'(t) M(t) \tilde{\theta}(t) + N'(t) \tilde{\theta}(t) + R(t) \right] dt; \end{aligned}$$

c)

$$\lim_{n_i \rightarrow \infty} \left[(B(t) : I) x_{n_i}(t) - (K : 0) \int_0^t x_{n_i}(s) ds \right] = (B(t) : I) \tilde{x}(t) - (K : 0) \int_0^t \tilde{x}(s) ds;$$

Demonstração:

Segue do Teorema Helly e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. ■

Teorema 3.2.3 *Sejam $(x_k(t))$, $(\theta_k(t))$ subsequências, convergem quase sempre em $[0, T]$, obtidas a partir das soluções ótimas x_n , θ_n de $P1_n$ e $D1_n$, respectivamente, $(k = n_i)$. Então*

a)

$$\frac{T}{l_k} \left[\frac{1}{2} x'_k Q_k x_k + a'_k x_k \right] \longrightarrow \int_0^T \left[\frac{1}{2} \tilde{x}(t)' Q(t) \tilde{x}(t) + a'(t) \tilde{x}(t) \right] dt, \text{ quando } k \longrightarrow \infty.$$

b)

$$\frac{T}{l_k} \left[-\frac{1}{2} \theta'_k M_k \theta_k + N'_k \theta_k - R_k \right] \longrightarrow \int_0^T \left[-\frac{1}{2} \tilde{\theta}'(t) M(t) \tilde{\theta}(t) + N'(t) \tilde{\theta}(t) + R(t) \right] dt,$$

quando $k \longrightarrow \infty$.

c)

$$\int_0^T \left[\frac{1}{2} \tilde{x}'(t) Q(t) \tilde{x}(t) + a'(t) \tilde{x}(t) \right] dt = \int_0^T \left[-\frac{1}{2} \tilde{\theta}'(t) M(t) \tilde{\theta}(t) + N'(t) \tilde{\theta}(t) + R(t) \right] dt,$$

Demonstração:

a) Para esta demonstração vamos introduzir a notação,

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k0} &= \frac{1}{2} \tilde{x}(0), \tilde{x}_{kl_k} = \frac{1}{2} \tilde{x}(T) \text{ e } \tilde{x}_{ki} = \tilde{x}(t_i^k), i = 1, 2, \dots, l_k - 1; \\ \tilde{x}'_k &= (\tilde{x}'_{k0} : \tilde{x}'_{k1} : \dots : \tilde{x}'_{kl_k}); \\ \tilde{x}_k(t) &= (\tilde{x}_{k,i+1} - \tilde{x}_{ki}) \frac{(t - t_i^k)}{l_k} + \tilde{x}_{ki}, \text{ para } t_i^k \leq t \leq t_{i+1}^k, i = 0, 1, \dots, l_k - 1,; \\ &(\text{notemos que } \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{x}_k(t) = \tilde{x}(t) \text{ quase sempre}). \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

$$\begin{aligned}
x_{k0} &= \frac{1}{2}x(0), x_{kl_k} = \frac{1}{2}x(T) \text{ e } x_{ki} = x(t_i^k), i = 1, 2, \dots, l_k - 1; \\
x'_k &= (x'_{k0} : x'_{k1} : \dots : x'_{kl_k}); \\
x_k(t) &= (x_{k,i+1} - x_{ki}) \frac{(t - t_i^k)}{l_k} + x_{ki}, \text{ para } t_i^k \leq t \leq t_{i+1}^k, i = 0, 1, \dots, l_k - 1;
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

$$Q_n = \begin{pmatrix} Q_0^n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_1^n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & Q_2^n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & Q_{l_n-1}^n & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & Q_{l_n}^n \end{pmatrix}. \tag{3.2.3}$$

$$\tag{3.2.4}$$

Aplicando a aproximação trapeizodal em

$$\int_0^T \left[\frac{1}{2} \tilde{x}' Q(t) \tilde{x} + a'(t) \tilde{x}(t) \right] dt$$

e usando a notação definida em (3.2.1) vemos que

$$\int_0^T \left[\frac{1}{2} \tilde{x}' Q(t) \tilde{x} + a'(t) \tilde{x}(t) \right] dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{T}{l_k} \left[\frac{1}{2} \tilde{x}'_k Q_k \tilde{x}_k + a'_k \tilde{x}_k \right].$$

Mostremos agora que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{T}{2l_k} (\tilde{x}'_k Q_k \tilde{x}_k - x'_k Q_k x_k) = 0.$$

A parte linear é análoga ao do problema de otimização linear com tempo contínuo.

Temos que,

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{T}{2l_k} (\tilde{x}'_k Q_k \tilde{x}_k - x'_k Q_k x_k) \right\| &\leq \frac{T}{2l_k} \|\tilde{x}'_k Q_k \tilde{x}_k - \tilde{x}'_k Q_k x_k\| + \\
&\quad \frac{T}{2l_k} \|\tilde{x}'_k Q_k x_k - x'_k Q_k x_k\| \\
&\leq \frac{T}{2l_k} \|\tilde{x}'_k\| \|Q_k\| \|(\tilde{x}_k - x_k)\| + \\
&\quad + \frac{T}{2l_k} \|\tilde{x}'_k - x'_k\| \|Q_k\| \|x_k\|
\end{aligned}$$

Como $\|Q_k\|$, $\tilde{x}_k$ e x_k são limitadas então existem constantes α e β tais que $\text{abs}(\tilde{x}'_k Q_k) \leq \alpha E$ e $\text{abs}(Q_k x_k) \leq \beta E$, para qualquer k , sendo $E' = (1, 1, \dots, 1)$ com k componentes.

Logo

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T}{2l_k} (\tilde{x}'_k Q_k \tilde{x}_k - x'_k Q_k x_k) \right\| &\leq \alpha E \frac{T}{2l_k} \text{abs}(\tilde{x}_k - x_k) + \beta E \frac{T}{2l_k} \text{abs}(\tilde{x}_k - x_k) \\ &= \alpha \int_0^T E \text{abs}(\tilde{x}_k(t) - x_k(t)) dt \\ &\quad + \beta \int_0^T E \text{abs}(\tilde{x}_k(t) - x_k(t)) dt \end{aligned}$$

Usando o Terema da Convergência Dominada Lebesgue temos que,

$$\alpha \int_0^T E \text{abs}(\tilde{x}_k(t) - x_k(t)) dt \longrightarrow 0, \text{ quando } k \longrightarrow \infty,$$

e

$$\beta \int_0^T E \text{abs}(\tilde{x}_k(t) - x_k(t)) dt \longrightarrow 0, \text{ quando } k \longrightarrow \infty.$$

b) Análogo ao item (a).

c) Segue das propriedades do dual dos problemas de otimização linear-quadrático e problemas de otimização não-lineares com tempo contínuo.

■

3.3 Resultados Numéricos

Nesta seção apresentamos alguns exemplos com seus resultados numéricos. Consideramos problemas de otimização linear-quadrático com tempo contínuo (P1) e para obter a solução ótima usamos a aproximação (P1_n).

Exemplo 3.3.1 Consideremos o problema de otimização linear-quadrático com tempo contínuo com duas variáveis e duas restrições e com $0 \leq t \leq 1$. Sendo as matrizes $a(t)$, $c(t)$, $B(t)$, $Q(t)$ e $K(t, s)$ dadas por:

$$a(t) = \begin{pmatrix} -2 + 2t \\ -4 + 4t \end{pmatrix}, \quad c(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ 4t \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } K = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Aplicando o algoritmo obtemos os seguintes soluções aproximadas para $x_1(t)$ e $x_2(t)$ para l_{20} e l_{80} . Na tabela 3.3.1 podemos verificar a convergência de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ a medida que aumentamos n .

Tabela 3.3.1

t^n	$x_1(t) - l_{20}$	$x_2(t) - l_{80}$	$x_1(t) - l_{20}$	$x_2(t) - l_{80}$
0.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.05	0.045154	0.035540	0.045150	0.035546
0.10	0.087788	0.070688	0.087778	0.070700
0.15	0.127959	0.105367	0.127945	0.105383
0.20	0.165731	0.139503	0.165711	0.139523
0.25	0.201168	0.173034	0.201141	0.173055
0.30	0.234335	0.205900	0.234303	0.205923
0.35	0.265304	0.238051	0.265265	0.238075
0.40	0.282902	0.276400	0.282524	0.276734
0.45	0.299951	0.311995	0.299487	0.312283
0.50	0.321743	0.341805	0.321185	0.342055
0.55	0.348861	0.366171	0.348199	0.366391
0.60	0.381922	0.385399	0.381147	0.385593
0.65	0.350000	0.350000	0.350000	0.350000
0.70	0.300000	0.300000	0.300000	0.300000
0.75	0.250000	0.250000	0.250000	0.250000
0.80	0.200000	0.200000	0.200000	0.200000
0.85	0.150000	0.150000	0.150000	0.150000
0.90	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000
0.95	0.050000	0.050000	0.050000	0.050000
1.00	0.000112	0.000081	0.000135	0.000098

Na figura 3.3.1 e podemos observar a convergência do custo aproximado para $l_n = 20, 100, 200, 600, 1000$ e 1400 .



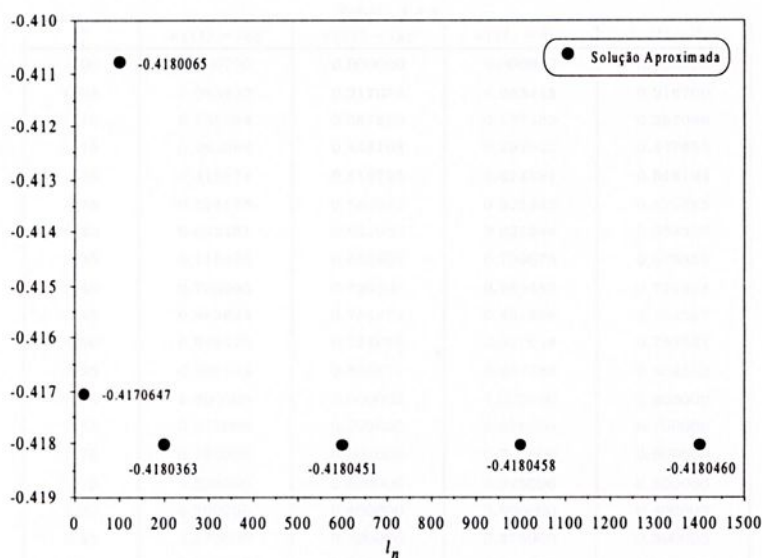


Figura 3.3.1

Exemplo 3.3.2 Consideremos o problema de otimização linear-quadrático com tempo contínuo com duas variáveis e duas restrições e com $0 \leq t \leq 1$. Sendo as matrizes $a(t)$, $c(t)$, $B(t)$, $Q(t)$ e $K(t, s)$ dadas por:

$$a(t) = \begin{pmatrix} -1 + 1t \\ -3 + 3t \end{pmatrix}, \quad c(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ 8t \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$Q(t) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } K = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Aplicando o algoritmo obtemos os seguintes soluções aproximadas para $x_1(t)$ e $x_2(t)$ para l_{20} e l_{80} . Na tabela 3.3.2 podemos verificar novamente convergência de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ a medida que aumentamos n .

Exemplo 3.3.3 Consideremos o problema de otimização linear-quadrático com tempo contínuo com duas variáveis e duas restrições e com $0 \leq t \leq 1$. Sendo as matrizes $a(t)$, $c(t)$, $B(t)$, $Q(t)$ e $K(t, s)$ dadas por:

Tabela 3.3.2

t_i^n	$x_1(t) - l_{20}$	$x_2(t) - l_{80}$	$x_1(t) - l_{20}$	$x_2(t) - l_{80}$
0.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.05	0.063492	0.217054	0.063445	0.216700
0.10	0.158084	0.367539	0.157389	0.367069
0.15	0.293694	0.448163	0.292940	0.447655
0.20	0.415174	0.518723	0.414381	0.518194
0.25	0.524178	0.580323	0.523365	0.579785
0.30	0.622181	0.633933	0.621359	0.633397
0.35	0.710495	0.680409	0.709675	0.679883
0.40	0.790293	0.720503	0.789483	0.719994
0.45	0.862624	0.754874	0.861828	0.754387
0.50	0.928426	0.784096	0.927648	0.783637
0.55	0.988544	0.808671	0.987786	0.808243
0.60	1.000000	0.800000	1.000000	0.800000
0.65	0.875000	0.700000	0.875000	0.700000
0.70	0.750000	0.600000	0.750000	0.600000
0.75	0.625000	0.500000	0.625000	0.500000
0.80	0.500000	0.400000	0.500000	0.400000
0.85	0.375000	0.300000	0.375000	0.300000
0.90	0.250000	0.200000	0.250000	0.200000
0.95	0.125000	0.100000	0.125000	0.100000
1.00	0.000469	0.000357	0.000548	0.000408

Na figura 3.3.2 e podemos observar a convergência da solução aproximada para $l_n = 20, 100, 200, 600, 1000$ e 1400 .

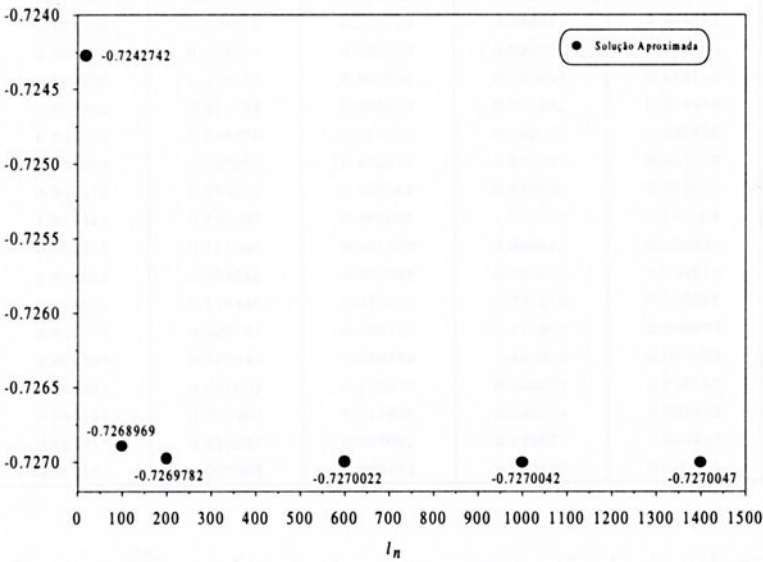


Figura 3.3.2

Exemplo 3.3.3 Consideremos o problema de otimização linear-quadrático com tempo contínuo com três variáveis e três restrições e com $0 \leq t \leq 1$. Sendo a matrizes $a(t), c(t), B(t), Q(t)$ e $K(t, s)$ dadas por:

$$a(t) = \begin{pmatrix} 2 - 2t \\ 4 - 4t \\ 2 - 2t \end{pmatrix}, \quad Q(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad c(t) = \begin{pmatrix} 12t \\ 2t \\ 9t \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad K = \begin{pmatrix} -1 & -10 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Aplicando o algoritmo obtemos os seguintes soluções aproximadas para $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$ para l_{20} e l_{80} . Na tabela 3.3.3 podemos verificar convergência de $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$ a medida que aumentamos n .

Tabela 3.3.3

t_i^n	$x_1(t) - l_{20}$	$x_2(t) - l_{20}$	$x_3(t) - l_{20}$	$x_1(t) - l_{80}$	$x_2(t) - l_{80}$	$x_3(t) - l_{80}$
0.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.05	0.097561	0.095238	0.139535	0.097542	0.095167	0.139307
0.10	0.207134	0.178132	0.211626	0.206775	0.178045	0.211533
0.15	0.317928	0.251848	0.254876	0.317553	0.251718	0.254782
0.20	0.422469	0.318710	0.294519	0.422081	0.318546	0.294424
0.25	0.521179	0.379347	0.330722	0.520779	0.379156	0.330630
0.30	0.614456	0.434330	0.363641	0.614047	0.434118	0.363553
0.35	0.702702	0.474324	0.393343	0.702286	0.474428	0.393253
0.40	0.786518	0.403370	0.419258	0.786097	0.403476	0.419174
0.45	0.865872	0.333532	0.442627	0.865447	0.333638	0.442551
0.50	0.941072	0.264732	0.463542	0.940644	0.264839	0.463475
0.55	1.012414	0.196897	0.482085	1.011983	0.197004	0.482028
0.60	0.984615	0.153846	0.461538	0.984615	0.153846	0.461538
0.65	0.861538	0.134615	0.403846	0.861538	0.134615	0.403846
0.70	0.738462	0.115385	0.346154	0.738462	0.115385	0.346154
0.75	0.615385	0.096154	0.288462	0.615385	0.096154	0.288462
0.80	0.492308	0.076923	0.230769	0.492308	0.076923	0.230769
0.85	0.369231	0.057692	0.173077	0.369231	0.057692	0.173077
0.90	0.246154	0.038462	0.115385	0.246154	0.038462	0.115385
0.95	0.123077	0.019231	0.057692	0.123077	0.019231	0.057692
1.00	0.000151	0.000083	0.000152	0.000220	0.000145	0.000237

Na figura 3.3.3 e podemos observar a convergência da solução aproximada para $l_n = 20, 100, 200, 600$ e 1000 .



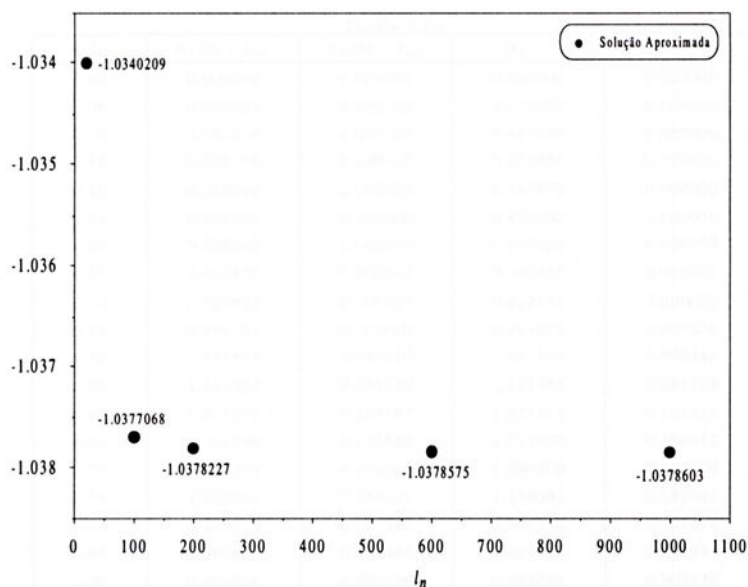


Figura 3.3.3

Exemplo 3.3.4 Consideremos o problema de otimização linear-quadrático com tempo contínuo com três variáveis e três restrições e com $0 \leq t \leq 1$. Sendo as matrizes $a(t)$, $c(t)$, $B(t)$, $Q(t)$ e $K(t, s)$ dadas por:

$$a(t) = \begin{pmatrix} -4 + 4t \\ -4 + 2t \\ -3 + 3t \end{pmatrix}, \quad Q(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ -1 & -2 & 12 \end{pmatrix}, \quad c(t) = \begin{pmatrix} 8t \\ 9t \\ 3t \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad K = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -6 \\ -6 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Aplicando o algoritmo obtemos os seguintes soluções aproximadas para $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t) \equiv 0$ para l_{20} e l_{80} . Na tabela 3.3.4 podemos verificar novamente convergência de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ a medida que aumentamos n .

Tabela 3.3.4

t_i^n	$x_1(t) - l_{20}$	$x_2(t) - l_{20}$	$x_1(t) - l_{80}$	$x_2(t) - l_{80}$
0.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.05	0.077922	0.000000	0.077887	0.000000
0.10	0.161916	0.000000	0.161839	0.000000
0.15	0.252455	0.000000	0.252331	0.000000
0.20	0.350049	0.000000	0.349871	0.000000
0.25	0.455247	0.000000	0.455007	0.000000
0.30	0.568643	0.000000	0.568333	0.000000
0.35	0.690875	0.000000	0.690485	0.000000
0.40	0.822632	0.000000	0.822151	0.000000
0.45	0.964655	0.000000	0.964072	0.000000
0.50	1.051898	0.040240	1.051835	0.040443
0.55	1.131387	0.085540	1.131255	0.085703
0.60	1.217625	0.126187	1.217421	0.126313
0.65	1.311308	0.162520	1.311026	0.162611
0.70	1.390909	0.190909	1.390909	0.190909
0.75	1.159091	0.159091	1.159091	0.159091
0.80	0.927273	0.127273	0.927273	0.127273
0.85	0.695455	0.095455	0.695455	0.095455
0.90	0.463636	0.063636	0.463636	0.063636
0.95	0.231818	0.031818	0.231818	0.031818
1.00	0.000132	0.000083	0.000268	0.000167

Na figura 3.3.4 e podemos observar a convergência da solução aproximada para $l_n = 20, 100, 200, 600$ e 1000 .

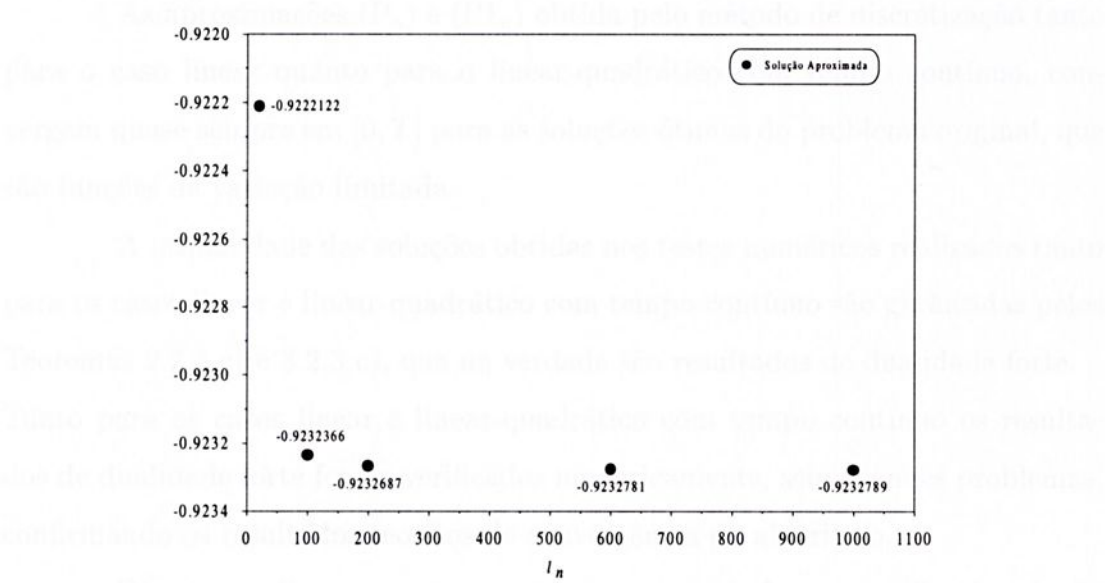


Figura 3.3.4

Capítulo 4

Conclusões

Após uma análise dos resultados teóricos e dos resultados numéricos obtemos algumas conclusões do algoritmo construído para resolver problemas de otimização linear e linear-quadrático com tempo contínuo, respectivamente.

As aproximações (P_n) e $(P1_n)$ obtida pelo método de discretização tanto para o caso linear quanto para o linear-quadrático com tempo contínuo, convergem quase sempre em $[0, T]$ para as soluções ótimas do problema original, que são funções de variação limitada.

A otimalidade das soluções obtidas nos testes numéricos realizados tanto para os casos linear e linear-quadrático com tempo contínuo são garantidas pelos Teoremas 2.2.3 c) e 3.2.3 c), que na verdade são resultados de dualidade forte. Tanto para os casos linear e linear-quadrático com tempo contínuo os resultados de dualidade forte foram verificados numericamente, sem grandes problemas, confirmando os resultados teóricos de convergência do algoritmo.

Para o caso linear com tempo contínuo a partir de uma análise da solução numérica é possível construir a solução analítica [4] para o problema de otimização com tempo contínuo. Para o caso linear-quadrático ainda não sabemos se é possível construirmos a solução analítica para o problema de otimização com



tempo contínuo.

A discretização foi implementada utilizando a linguagem de programação C, para modelagem do problema para parte linear foi usado software MPL [16] e a para a parte quadrática foi implementado um programa em C. Para otimização dos problemas foram utilizados o software comercial CPLEX 6.6 [6] e o pacote acadêmico EASY [15]. O mesmos resultados foram obtidos usando CPLEX 6.6 e o EASY.

Os resultados numéricos foram obtidos usando um computador Pentium III, 700 MHz e 128 MB de RAM.

Apêndice

O CPLEX6.6 [6] é uma ferramenta para resolução de problemas de Programação Linear, Programação Inteira Pura, Programação Inteira Mista e Problemas Quadráticos.

Quando o problema é linear o default é o método Simplex. No caso de problemas inteiros o default é o método Branch and Bound. Existem opções de outros métodos de resolução. E no caso de problemas quadráticos o CPLEX usa o método Barrier, que trabalha com a função objetivo quadrática e as restrições lineares.

Através do uso de comandos específicos pode-se realizar várias modificações no modelo: adicionar restrições, mudar o valor de variáveis e modificar parâmetros de resolução como por exemplo, o número máximo de nós ou tempo de processamento.

O software possui também um conjunto de subrotinas prontas, CPLEX Callable Library, que facilita o desenvolvimento de programas que resolvem, modificam ou interpretam os resultados dos problemas.

A linguagem de programação mais apropriada é a linguagem C pois o CPLEX está implementado nesta.

Para usarmos o software CPLEX, é necessário gerarmos os problemas em formatos específicos para o software CPLEX, como os formatos MPS e LP. Para gerarmos os modelos em um desses formatos utilizamos o software de modelagem MPL [16].



O MPL trabalha na interface entre o programador e o software de otimização. Além de ler os arquivos onde estão os dados e modelá-los no formato necessário para o software de otimização, ele permite a inclusão de comentários no modelo, o que melhora a documentação deste.

O EASY [15] é um pacote acadêmico para resolução de problemas de programação linear ou não-linear na função objetivo e nas restrições. Este pacote está escrito na linguagem de programação Fortran.



Referências Bibliográficas

- [1] Anderson, E.J., Philpott, A.B., *On the Solutions of a Class of Continuous Linear programs*. SIAM J. Control and Optimization 32(5), 1289-1296, 1994.
- [2] Bellmann, R.E., *Dynamic Programming of Continuous Processes*. The Rand Corporation, Santa Mônica, Califônia 1954.
- [3] Bellmann, R.E., *Dynamic Programming*, Princeton, 1972.
- [4] Buie, R.N., Abrham J., *Numerical Solutions to Continuous Linear Programming Problems*. Zeitschrift für Operations Research, nº 17, 107-117, 1973.
- [5] Burden, R.L., Faires, J.D., *Numerical Analysis*. PWS Publishing Company, Boston, 1993.
- [6] CPLEX6.6 Optimization, Inc., 2000.
- [7] Dantzig, G.B., *Large Scale System Optimization with Applications to Energy*, Technical Report SOL 77-3, Department of Operations Research, Stanford Unirvesity, Stanford, California, april 1977.
- [8] Galleti, R.A., *Problemas Diferenciáveis Não-Linear com Tempo Contínuo*, Dissertação de Mestrado, UNESP, São José do Rio Preto, 1999.
- [9] Grinold, R.C., *Continuous Programming*, Doctoral Thesis, University of California Berkeley, 1968.



- [10] Guidorizi, H.L., Um curso de Cálculo. LTC, Vol. 1, 1987.
- [11] Levinson, N., *A Class of Continuous Linear Programming Problems*, J. Math. Anal. Appl. vol. 16, 78-83.
- [12] Levine, P. and Pomerol, J.C., *C-Closed Mappings and Kuhn-Tucker Vectors in convex Programming* Discussion paper 7620, Center for Operations Research and Economics, Universite Catholique de Louvian, Heverlee, Belgium 1976.
- [13] Lojasiewicz, S., An Introduction to the Theory of Real Functions. John Wley & Sons, 1988.
- [14] Luenberger, D.G., Optimization by Vector Space Methods. Jonh Wiley & Sonss, 1969.
- [15] Martinez, J. M., EASY, Easy-to-uso code for constrained minimization, 1999. (<http://www.ime.unicamp.br/martinez/software.htm>)
- [16] MPL Modeling System Realease 4.0, Copyright 1988-1998 Maximal Software.
- [17] Pereira, E., Dualidade e condições de Otimalidade em Programação Não-Linear com Tempo Contínuo, Dissertação de Mestrado, UNESP, São José do Rio Preto, 1999.
- [18] Pires, C.M.S., Programação Linear Contínua, Dissertação de Mestrado, UNESP, São José do Rio Preto, 1997.
- [19] Pullan, M.C., *An Algorithm for a Class of Continuous Linear Programs*. SIAM J. Control and Optimization, 31(6), 1558-1577, 1993.
- [20] Reiland, T.W., *Lagrangian Duality for a Class of Infinite Programming Problems*. Numer. Funct. Anal. and Optimization, 2(6), 507-530, 1980.



- [21] Teren, F., *Minimum Time acceleration of Aircraft Turbofan Engines by Using an Algorithm based on Nonlinear Programming*, NASA Technical Memorandum TM-73741 Lewis Research Center, Cleveland, Ohio, september 1977.

- [22] Tyndall, W.F., *A Duality Theorem for a Class of Continuous Linear Programming Problems*. Siam J. Appl. Math. 13, 644-666, 1965.



