

Milena Aparecida Batelo

**Polinômios Similares aos Ortogonais e suas
Combinações Lineares que apresentam
uma Simetria**

1910001069



**Polinômios Similares aos Ortogonais e suas
Combinações Lineares que apresentam uma
Simetria**

Milena Aparecida Batelo

**POLINÔMIOS SIMILARES AOS ORTOGONAIS
E SUAS COMBINAÇÕES LINEARES QUE
APRESENTAM UMA SIMETRIA**

Milena Aparecida Batelo

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada
MAP - 069



Polinômios Similares aos Ortogonais e suas Combinações Lineares que apresentam uma Simetria

Milena Aparecida Batelo

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José
do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática
Aplicada.

Orientadora: Profa. Dra. Cleonice Fátima Bracciali



T 1069/02

São José do Rio Preto

Março de 2002

1517.587
B328p

10100008

Polinômios similares aos ortogonais e suas
combinações lineares que apresentam uma
simetria

Milena Aparecida Batelo

Batelo, Milena Aparecida.

Polinômios similares aos ortogonais e suas combinações lineares que
apresentam uma simetria / Milena Aparecida Batelo. – São José do Rio
Preto : [s.n.], 2002

97 f. : il. ; 30 cm.

Orientadora: Cleonice Fátima Bracciali

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Instituto de
Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. L-polinômios ortogonais. 2. Medidas fortes de Stieltjes simétricas.
3. Combinações lineares de polinômios. I. Bracciali, Cleonice Fátima.
II. Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e
Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.587



“Nada te perturbe, nada te amedronte,
tudo passa, a paciência tudo alcança”.

Sta. Teresa D'avila



Agradecimentos

Aos meus pais Valdemar e Malvina,
aos meus irmãos Marcos e Márcio,
ao José Antônio,
dedico.

Agradecimentos

A Deus, por ter me criado e capacitado para estar cumprindo mais uma etapa de minha vida.

Aos meus pais, que em meio a tantas dificuldades nunca deixaram de apoiar e incentivar meus estudos.

Ao José Antônio, pelo carinho, apoio e compreensão.

À Profa. Dra. Cleonice Fátima Bracciali, pela disponibilidade na orientação deste trabalho, por toda atenção, paciência e amizade.

À Profa. Dra. Eliana X.L. de Andrade, pela orientação durante a iniciação científica e por todas as vezes que prontamente me atendeu nestes anos.

Ao Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga, pela confiança e pelas sugestões e contribuições deixadas neste trabalho.

Aos colegas de pós-graduação: Deise, Janaina, João Carlos, Junior, Fernanda, Oscar, Sonia, Tânia, Vanessa e Weber, pelo agradável convívio.

Às minhas queridas “irmãs”, Andrea, Barbara e Sabrina, pelos momentos de alegria.

A todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

À FAPESP, pelo auxílio financeiro.



Resumo

O principal objetivo deste trabalho é estudar os polinômios similares aos ortogonais, conhecidos como L-polinômios ortogonais, bem como combinações lineares desses polinômios relacionados a medidas fortes de Stieltjes que apresentam certas simetrias. Apresentamos condições para que algumas dessas combinações lineares sejam polinômios β -inversíveis e consideramos também as propriedades simétricas e localização de seus zeros.

Palavras-chave: L-polinômios ortogonais, medidas fortes de Stieltjes simétricas, combinações lineares de polinômios.



Sumário

Abstract

The main purpose of this work is to study orthogonal Laurent polynomials (orthogonal L-polynomials), and some linear combinations of orthogonal L-polynomials, related to strong Stieltjes measures that satisfy a symmetric property. We present conditions such that some of these linear combinations are β -inversive polynomials and we also considering the symmetric properties and location of their zeros.

Keywords: orthogonal L-polynomials, symmetric strong Stieltjes measures, linear combinations of polynomials.

Sumário

Introdução	10
1 Preliminares	15
1.1 Integral de Stieltjes	15
1.1.1 Medidas de Stieltjes	18
1.2 Polinômios ortogonais	19
1.3 Combinações lineares de polinômios ortogonais	22
2 L-polinômios ortogonais	26
2.1 L-polinômios ortogonais	26
2.1.1 Relações entre L-polinômios ortogonais	35
2.2 Medidas fortes de Stieltjes simétricas	38
2.3 L-polinômios ortogonais e medidas de classe $S^3[\omega, \beta, b]$	40
2.4 Polinômios β -invertíveis	42
3 Combinações lineares de L-polinômios ortogonais	44
3.1 Polinômios $B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z)$	44
3.2 Polinômios $B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z)$ associados a medidas de classe $S^3[\omega, \beta, b]$	49

4	Polinômios $B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z)$ e medidas de classe $S^3[\omega, \beta, b]$	53
4.1	Polinômios $B_n(\lambda_{n,1}^{(1)}; z)$ e medidas de classe $S^3[0, \beta, b]$	53
4.1.1	Localização dos zeros de $B_n(\lambda_{n,1}^{(1)\pm}; z)$	56
4.1.2	$B_n(\lambda_{n,1}^{(1)\pm}; z)$ e medidas de classe $S^3[1/2, \beta, b]$	58
4.2	Polinômios $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)}, \lambda_{n,2}^{(2)}; z)$ e medidas de classe $S^3[-1/2, \beta, b]$. . .	59
4.2.1	Localização dos zeros de $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)+}, \lambda_{n,2}^{(2)+}; z)$	65
4.2.2	Localização dos zeros de $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)-}, \lambda_{n,2}^{(2)-}; z)$	66
4.2.3	$B_n(\lambda_{n,1}^{(2)+}, \lambda_{n,2}^{(2)+}; z)$ e medidas de classe $S^3[1/2, \beta, b]$	67
4.2.4	$B_n(\lambda_{n,1}^{(2)-}, \lambda_{n,2}^{(2)-}; z)$ e medidas de classe $S^3[1/2, \beta, b]$	68
4.3	Polinômios $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)}, \lambda_{n,2}^{(3)}, \lambda_{n,3}^{(3)}; z)$ e medidas de classe $S^3[-1, \beta, b]$.	72
4.3.1	Localização dos zeros de $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)+}, \lambda_{n,2}^{(3)+}, \lambda_{n,3}^{(3)+}; z)$	82
4.3.2	Localização dos zeros de $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)-}, \lambda_{n,2}^{(3)-}, \lambda_{n,3}^{(3)-}; z)$	84
4.3.3	$B_n(\lambda_{n,1}^{(3)+}, \lambda_{n,2}^{(3)+}, \lambda_{n,3}^{(3)+}; z)$ e medidas de classe $S^3[\omega, \beta, b]$. .	85
4.3.4	$B_n(\lambda_{n,1}^{(3)-}, \lambda_{n,2}^{(3)-}, \lambda_{n,3}^{(3)-}; z)$ e medidas de classe $S^3[1/2, \beta, b]$. .	89
	Considerações Finais	93
	Referências Bibliográficas	95

Introdução

Uma medida $\psi(t)$, definida em $(a, b) \subseteq (0, \infty)$, cujos momentos

$$\mu_m = \int_a^b t^m d\psi(t), \quad m \in \mathbb{Z},$$

existem é chamada medida forte de Stieltjes.

Os polinômios similares aos ortogonais, $B_n(z)$, $n \geq 0$, associados à medida $\psi(t)$ são definidos por

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n(t) d\psi(t) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1. \quad (1)$$

Os polinômios $B_n(z)$ também são chamados de L-polinômios ortogonais, pois estão relacionados aos polinômios ortogonais de Laurent (veja Cochran e Cooper [8]), e foram primeiramente estudados por Jones, Thron e Waadeland em [10].

Estes polinômios mônicos satisfazem à seguinte relação de recorrência

$$B_{n+1}(z) = (z - \beta_{n+1})B_n(z) - \alpha_{n+1}zB_{n-1}(z), \quad n \geq 1,$$

onde $B_0(z) = 1$, $B_1(z) = z - \beta_1$ e β_n, α_{n+1} , $n \geq 1$, são positivos. Todos os zeros desses polinômios são reais, distintos e pertencem ao intervalo (a, b) .

Várias são as aplicações que surgem do estudo desses polinômios, tais como, aproximantes de Padé de dois pontos, fórmulas de quadratura interpolatórias e interpretações eletrostáticas entre outras. Quando as medidas fortes de Stieltjes

usadas em (1) satisfazem a certas simetrias, o estudo das propriedades desses polinômios e das conseqüentes aplicações torna-se mais amplo.

Em 1999, Bracciali, McCabe e Sri Ranga [6] consideraram medidas fortes de Stieltjes tais que $0 < \beta < b \leq \infty$ e $a = \beta^2/b$, satisfazendo à propriedade de simetria

$$\frac{d\psi(t)}{t^\omega} = -\frac{d\psi(\beta^2/t)}{(\beta^2/t)^\omega}, \quad t \in (a, b), \quad 2\omega \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

denotadas por $S^3[\omega, \beta, b]$. Em inglês, “Medidas S^3 ” significa “Symmetric Strong Stieltjes Measures”.

Embora a notação $S^3[\omega, \beta, b]$ tenha sido adotada em [6], este tipo de simetria começou a ser estudado em 1994 por Sri Ranga [21], quando foram consideradas medidas que satisfazem

$$\frac{d\psi(t)}{\sqrt{t}} = -\frac{d\psi(\beta^2/t)}{\sqrt{\beta^2/t}}, \quad t \in (a, b),$$

ou seja, $\omega = 1/2$. Nesse trabalho foi mostrado que os polinômios $B_n(z)$ satisfazem

$$\frac{z^n B_n(\beta^2/z)}{B_n(0)} = B_n(z), \quad n \geq 0, \quad (3)$$

e $\beta_n = \beta$, $n \geq 1$.

Uma aplicação natural do estudo desses polinômios são as fórmulas de quadraturas interpolatórias baseadas nos zeros de $B_n(z)$.

Sri Ranga, Andrade e McCabe [22] analisaram os polinômios $B_n(z)$ associados a medidas de classe $S^3[0, \beta, b]$, ou seja,

$$d\psi(t) = -d\psi(\beta^2/t), \quad t \in (a, b),$$

e consideraram a combinação linear destes polinômios dada por

$$B_n(\lambda_{n,1}^{(1)}; z) = B_n(z) - \lambda_{n,1}^{(1)} B_{n-1}(z), \quad \lambda_{n,1}^{(1)} \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1.$$



Vários resultados foram obtidos, entre os quais a existência de valores específicos para $\lambda_{n,1}^{(1)}$ para os quais

$$\frac{z^n B_n(\lambda_{n,1}^{(1)}; \beta^2/z)}{B_n(\lambda_{n,1}^{(1)}; 0)} = B_n(\lambda_{n,1}^{(1)}; z), \quad n \geq 1, \quad (4)$$

ou seja, satisfazem a uma relação idêntica a (3). Nesta dissertação, polinômios que satisfazem à relação (3) são chamados de β -inversíveis. Em [2] Andrade, Bracciali e Sri Ranga estudaram polinômios mônicos $R_n(z)$ que satisfazem

$$\frac{z^n R_n(\beta^2/z)}{(-\beta)^n} = R_n(z), \quad n \geq 0,$$

que é uma identidade um pouco mais geral que (3), pois coincide com esta quando os zeros de $R_n(z)$ são todos positivos.

Seqüências de polinômios mônicos $B_n^{(r)}(z)$, $n \geq 0$, $r \in \mathbb{Z}$, definidas por

$$\int_a^b t^{-n+s+r} B_n^{(r)}(t) d\psi(t) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1,$$

foram investigadas por Sri Ranga em [20] e por Bracciali, McCabe e Sri Ranga em [6]. Notemos que $B_n(z) = B_n^{(0)}(z)$, $n \geq 0$, e muitos resultados obtidos para $B_n(z)$ podem ser estendidos para $B_n^{(r)}(z)$, como por exemplo, a relação de recorrência

$$B_{n+1}^{(r)}(z) = (z - \beta_{n+1}^{(r)}) B_n^{(r)}(z) - \alpha_{n+1}^{(r)} z B_{n-1}^{(r)}(z), \quad n \geq 1,$$

onde $B_0^{(r)}(z) = 1$, $B_1^{(r)}(z) = z - \beta_1^{(r)}$ e $\beta_n^{(r)}, \alpha_{n+1}^{(r)}$, $n \geq 1$, são positivos.

Para polinômios $B_n^{(r)}(z)$ associados a medidas de classe $S^3[\omega, \beta, b]$, onde 2ω é ímpar, mostrou-se em [6] que, para $n \geq 0$ e $j = 1/2 - \omega$,

$$\frac{z^n B_n^{(j)}(\beta^2/z)}{B_n^{(j)}(0)} = B_n^{(j)}(z).$$

Motivados pelos estudos em [22] sobre os polinômios $B_n(\lambda_{n,1}^{(1)}; z)$ e também pelos estudos das propriedades de combinações lineares de polinômios ortogonais



(veja [7, 13, 14] e [15]), neste trabalho estudaremos combinações lineares dos polinômios $B_n^{(0)}(z)$ associados a medidas de classe $S^3[\omega, \beta, b]$ dadas por

$$B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z) = B_n^{(0)}(z) + \lambda_{n,1}^{(r)} B_{n-1}^{(0)}(z) + \dots + \lambda_{n,r}^{(r)} B_{n-r}^{(0)}(z), \quad n \geq 0,$$

onde $\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)} \in \mathbb{R}$ e $B_k^{(0)}(z) = 0$ para $k < 0$.

Nosso principal objetivo é encontrar parâmetros $\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}$ tais que

$$\frac{z^n B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; \beta^2/z)}{B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; 0)} = B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z), \quad (5)$$

ou seja, $B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z)$ é β -invertível. Para isso faremos uso do seguinte resultado.

Seja $r \geq 1$ e $\psi(t)$ de classe $S^3[\omega, \beta, b]$, onde $w = (1-r)/2$. Se $n \geq r+1$, então existem valores específicos para $\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)} \in \mathbb{R}$ tais que (5) é satisfeito. Este resultado foi investigado em [22] para $r = 1$ como visto em (4) e, para $r = 2$, por Bracciali em [5]. Neste trabalho apresentaremos os valores de $\lambda_{n,1}^{(3)}, \lambda_{n,2}^{(3)}, \lambda_{n,3}^{(3)}$, ou seja, caso $r = 3$, para os quais

$$\frac{z^n B_n(\lambda_{n,1}^{(3)}, \lambda_{n,2}^{(3)}, \lambda_{n,3}^{(3)}; \beta^2/z)}{B_n(\lambda_{n,1}^{(3)}, \lambda_{n,2}^{(3)}, \lambda_{n,3}^{(3)}; 0)} = B_n(\lambda_{n,1}^{(3)}, \lambda_{n,2}^{(3)}, \lambda_{n,3}^{(3)}; z).$$

Nesta dissertação faremos um estudo detalhado dos trabalhos recentes dos pesquisadores acima citados, principalmente os resultados sobre $B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z)$ e suas relações com medidas de classe $S^3[\omega, \beta, b]$ de forma que possa contribuir para possíveis trabalhos futuros. Nossa dissertação foi dividida da seguinte forma:

No Capítulo 1, apresentamos alguns conceitos matemáticos usados no decorrer de nosso trabalho e resultados sobre polinômios ortogonais e suas combinações lineares.

No Capítulo 2, estudamos detalhadamente os principais resultados sobre os polinômios $B_n^{(r)}(z)$ e suas propriedades simétricas quando os associamos a medidas de classe $S^3[\omega, \beta, b]$.



No Capítulo 3, destacamos as combinações lineares dos L-polinômios ortogonais, denotadas por $B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z)$, associadas a medidas de classe $S^3[\omega, \beta, b]$ onde $\omega = (1 - r)/2$.

No Capítulo 4, fazemos um estudo de $B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z)$ para os casos $r = 1$ e $r = 2$ baseados em [22] e [5], respectivamente. Estendemos esses estudos para os polinômios $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)}, \lambda_{n,2}^{(3)}, \lambda_{n,3}^{(3)}; z)$, que são a principal contribuição deste trabalho.

Em Considerações Finais, deixamos algumas questões que podem ser exploradas em futuros estudos nesta área.



Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo resumimos alguns conceitos matemáticos importantes que serão utilizados no decorrer de nosso trabalho. Apresentamos também resultados sobre os polinômios ortogonais tais como definição, propriedades e relação de recorrência. Todos os resultados cujas demonstrações foram omitidas são encontrados, principalmente, em [3, 7, 9, 12] e [25].

1.1 Integral de Stieltjes

Os assuntos abordados nesta seção podem ser vistos com maiores detalhes em [3] e [9].

Consideremos $f(t)$ uma função definida em um intervalo finito $[a, b]$ e $\psi(t)$ uma função real e não-decrescente em $[a, b]$.

Definição 1.1.1. *Um conjunto finito de números t_i , $i = 0, \dots, m$, tal que $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$, é chamado partição. A norma de uma partição Δ é dada por*

$$\|\Delta\| := \max_{1 \leq k \leq m} |t_k - t_{k-1}|.$$



O conjunto de pontos t'_k que satisfazem $t_{k-1} \leq t'_k \leq t_k$, $1 \leq k \leq m$, será denotado por Θ .

Definição 1.1.2. Dada uma partição Δ e qualquer conjunto de pontos Θ , a soma de Stieltjes com relação a $f(t)$ e $\psi(t)$ em $[a, b]$ é definida por

$$S(\Delta, \Theta) := \sum_{k=1}^m f(t'_k) (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})).$$

Se o limite definido por

$$S = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} S(\Delta, \Theta)$$

existe, então S é chamado Integral de Stieltjes de $f(t)$ com relação a $\psi(t)$ em $[a, b]$ e é denotada por

$$\int_a^b f(t) d\psi(t).$$

Para uma função geral $\psi(t)$ a soma de Stieltjes é interpretada como análoga à soma de Riemann, exceto apenas pelo fato de que não consideramos o comprimento $t_k - t_{k-1}$ do subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$, mas sim a diferença $\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})$.

Um caso bastante interessante é quando $\psi(t)$ é uma função escada com saltos nos pontos $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, definida por

$$\psi(t) = \begin{cases} 0, & a \leq t < \xi_1, \\ \pi_1, & \xi_1 \leq t < \xi_2, \\ \pi_1 + \pi_2, & \xi_2 \leq t < \xi_3, \\ \dots & \\ \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n, & \xi_n \leq t \leq b, \end{cases}$$

onde $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ são números positivos arbitrários que representam o tamanho do salto. Somente os intervalos $[t_{k-1}, t_k)$ que contêm um ponto de salto podem dar uma contribuição não nula para a soma $S(\Delta, \Theta)$. Para $\|\Delta\| < \min(\xi_k - \xi_{k-1})$ a soma será

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k^*) \pi_k,$$

onde $|\xi_k^* - \xi_k| \leq \|\Delta\|$. Se $f(t)$ é contínua, $f(\xi_k^*) \rightarrow f(\xi_k)$ quando $\|\Delta\| \rightarrow 0$, e então,

$$\int_a^b f(t) d\psi(t) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \pi_k.$$

Neste caso, a Integral de Stieltjes foi reduzida a uma soma finita de valores da função $f(x)$.

As propriedades da Integral de Stieltjes são análogas às da Integral de Riemann (veja Bartle [3]).

A seguir, enunciamos um teorema cuja demonstração é encontrada em Henrici [9] e que garante, sob condições gerais, a existência da Integral de Stieltjes.

Teorema 1.1.1. *Se $f(t)$ é contínua e $\psi(t)$ é uma função não-decrescente no intervalo finito $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(t) d\psi(t)$$

existe.

Considerando $f(t)$ contínua e $\psi(t)$ não-decrescente em $[a, \infty)$, temos que as integrais impróprias de Stieltjes podem ser definidas por

$$\int_a^\infty f(t) d\psi(t) := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) d\psi(t),$$

se o limite existir.

Outro critério que garante a existência da integral imprópria é dado pelo próximo teorema (veja Henrici [9]).

Teorema 1.1.2. *Seja $f(t)$ uma função contínua e limitada em $[a, \infty)$ e $\psi(t)$ uma função real, limitada e não-decrescente em $[a, \infty)$. Então,*

$$\int_a^\infty f(t) d\psi(t)$$

existe.



1.1.1 Medidas de Stieltjes

Definição 1.1.3. Seja $\psi(t)$ uma função real, não-decrescente e definida em $[a, b]$. Chamamos de ponto de aumento de $\psi(t)$ qualquer ponto $\xi \in [a, b]$ tal que $\psi(t)$ não é constante em qualquer intervalo $[\xi - \epsilon, \xi + \epsilon]$, $\epsilon > 0$. ξ é um ponto de aumento isolado se existe $\epsilon > 0$ tal que $\psi(t)$ é constante nos intervalos $(\xi - \epsilon, \xi)$ e $(\xi, \xi + \epsilon)$.

Definição 1.1.4. Seja $\psi(t)$ uma função real definida em (a, b) , não-decrescente e limitada com infinitos pontos de aumento em (a, b) de modo que os momentos definidos por

$$\mu_m = \int_a^b t^m d\psi(t), \quad m \in \mathbb{N},$$

existem. Então $\psi(t)$ é chamada medida (ou medida positiva) em (a, b) .

Quando podemos escrever $d\psi(t) = w(t)dt$, onde $w(t) \geq 0$, mas não identicamente nula em (a, b) , $w(t)$ é chamada função peso.

Se $(a, b) \subseteq (0, \infty)$, $\psi(t)$ é chamada medida de Stieltjes. O nome Stieltjes é usado especificamente para indicar que $(a, b) \subseteq (0, \infty)$, numa referência ao problema clássico de momento de Stieltjes (veja Chihara [7, pag.71]).

Se os momentos

$$\mu_m = \int_a^b t^m d\psi(t), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (1.1.1)$$

existem, vamos nos referir a $\psi(t)$ como uma *medida forte de Stieltjes* em (a, b) .

Definição 1.1.5. Os determinantes de Hankel de ordem n são definidos por

$$H_{-1}^{(m)} = 0, \quad H_0^{(m)} = 1 \text{ e}$$

$$H_n^{(m)} = \begin{vmatrix} \mu_m & \mu_{m+1} & \cdots & \mu_{m+n-1} \\ \mu_{m+1} & \mu_{m+2} & \cdots & \mu_{m+n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{m+n-1} & \mu_{m+n} & \cdots & \mu_{m+2n-2} \end{vmatrix}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ e } m \in \mathbb{Z}, \quad (1.1.2)$$

desde que os momentos existam.

Teorema 1.1.3. *Se os momentos μ_m , $m \in \mathbb{N}$, existem, então os determinantes de Hankel são não nulos.*

A demonstração deste teorema é encontrada em Chihara [7].

Teorema 1.1.4. *Para as medidas fortes de Stieltjes os determinantes de Hankel de ordem n , são positivos (veja Andrade [1]).*

Demonstração: Mostremos que a matriz

$$\mathbb{H}_n^{(m)} = \begin{pmatrix} \mu_m & \mu_{m+1} & \cdots & \mu_{m+n-1} \\ \mu_{m+1} & \mu_{m+2} & \cdots & \mu_{m+n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{m+n-1} & \mu_{m+n} & \cdots & \mu_{m+2n-2} \end{pmatrix}$$

é positiva definida.

Seja $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})^t \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{H}_n^{(m)} x, x \rangle &= x^t \mathbb{H}_n^{(m)} x = x_0 \sum_{i=0}^{n-1} x_i \mu_{m+i} + x_1 \sum_{i=0}^{n-1} x_i \mu_{m+i+1} \\ &\quad + \dots + x_{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} x_i \mu_{m+i+n-1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} x_i x_j \mu_{m+i+j} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} x_i x_j \int_a^b t^{m+i+j} d\psi(t) \\ &= \int_a^b t^m \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k \right)^2 d\psi(t) > 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathbb{H}_n^{(m)}$ é uma matriz positiva definida e então $H_n^{(m)} > 0$. ■

1.2 Polinômios ortogonais

Denotaremos por $\mathcal{P}_n$ o espaço dos polinômios reais de grau no máximo n , $n \in \mathbb{N}$.



Definição 1.2.1. Seja $\psi(t)$ uma medida em (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Dizemos que uma sequência de polinômios $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais com relação a $\psi(t)$ em (a, b) se

- i) $P_n(z)$ é um polinômio de grau exatamente n ,
- ii) $\langle P_m, P_n \rangle = \int_a^b P_m(t)P_n(t)d\psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \rho_n > 0, & \text{se } m = n. \end{cases}$

Se $\rho_n = 1$, $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortonormais.

As demonstrações dos próximos resultados podem ser encontradas em [7, 12] e [25].

Teorema 1.2.1. Seja $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios e $\psi(t)$ uma medida definida em (a, b) . As seguintes afirmações são equivalentes:

- i) $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais com relação à medida $\psi(t)$ em (a, b) ,
- ii) $\langle \pi, P_n \rangle = 0, \forall \pi \in \mathcal{P}_{n-1}$,
- iii) $\langle z^m, P_n \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq m \leq n-1 \\ \neq 0, & \text{se } m = n. \end{cases}$

Teorema 1.2.2. (Relação de recorrência de três termos) Seja $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais em (a, b) relativamente à medida $\psi(t)$. Então,

$$P_{n+1}(z) = (\gamma_{n+1}z - \beta_{n+1})P_n(z) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(z), \quad n \geq 0, \quad (1.2.1)$$

com $P_0(z) = 1$, $P_{-1}(z) = 0$ e $\gamma_n, \beta_n, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, onde

$$\gamma_n = \frac{a_{n,n}}{a_{n-1,n-1}} \neq 0, \quad \beta_n = \gamma_n \frac{\langle zP_{n-1}, P_{n-1} \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} \neq 0,$$

$$\text{e } P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_{n,n-k} z^{n-k}.$$

Se $a_{n,n} = 1$, $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais mônicos e consequentemente, $\gamma_{n+1} = 1$.



Teorema 1.2.3. *Os zeros dos polinômios ortogonais $P_n(z)$, $n \geq 1$, associados à medida $\psi(t)$, são reais, distintos e pertencem ao intervalo (a, b) .*

Teorema 1.2.4. (Identidade de Christoffel-Darboux) *Seja $\{P_n^*(z)\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios ortonormais. Então, os polinômios satisfazem*

$$\sum_{k=0}^n P_k^*(z)P_k^*(y) = \frac{a_{n,n}^*}{a_{n+1,n+1}^*} \frac{P_{n+1}^*(z)P_n^*(y) - P_n^*(z)P_{n+1}^*(y)}{z - y}. \quad (1.2.2)$$

Fazendo $z \rightarrow y$ em ambos os membros de (1.2.2) obtemos

$$\sum_{k=0}^n (P_k^*(z))^2 = \frac{a_{n,n}^*}{a_{n+1,n+1}^*} \left[P_n^*(z) (P_{n+1}^*(z))' - P_{n+1}^*(z) (P_n^*(z))' \right] > 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Com este resultado é possível mostrar as seguintes propriedades sobre zeros dos polinômios ortogonais.

Teorema 1.2.5. *Os polinômios ortogonais $P_n(z)$ e $P_{n+1}(z)$, $n \geq 1$, não possuem zeros em comum.*

Teorema 1.2.6. *Entre dois zeros consecutivos do polinômio de grau n , $P_n(z)$, existe um zero de $P_{n+1}(z)$, ou seja, os zeros de polinômios ortogonais de graus consecutivos se entrelaçam.*

Quando a medida $\psi(t)$ está definida em um intervalo simétrico $(-d, d)$, $0 \leq d \leq \infty$, e satisfaz

$$d\psi(t) = -d\psi(-t), \quad t \in (-d, d),$$

os momentos desta medida satisfazem

$$\mu_{2m+1} = \int_{-d}^d t^{2m+1} d\psi(t) = 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Neste caso, $\psi(t)$ é chamada medida simétrica e as seguintes afirmações são equivalentes:



- i) $\psi(t)$ é simétrica (todos os momentos de ordem ímpar são nulos),
- ii) $P_n(z) = (-1)^n P_n(-z)$, $n \geq 0$,
- iii) $\beta_n = 0$ na relação de recorrência (1.2.1) para os polinômios $P_n(z)$, $n \geq 1$, (veja Chihara [7]).

Essas afirmações podem ser vistas mais facilmente quando $d\psi(t) = w(t)dt$. Neste caso, $\psi(t)$ é simétrica se o intervalo é simétrico e $w(t)$ é uma função par, $w(t) = w(-t)$ em $(-d, d)$. Como exemplo, temos os polinômios ortogonais clássicos de Chebyshev, Hermite e Legendre, que são definidos em um intervalo simétrico e $w(t)$ é função par.

Os polinômios ortogonais que satisfazem a essas propriedades são chamados *polinômios ortogonais simétricos*.

1.3 Combinações lineares de polinômios ortogonais

Vários pesquisadores têm investigado o comportamento das combinações lineares de polinômios ortogonais. Tais combinações merecem atenção especial quanto às propriedades de seus zeros (veja Peherstorfer [19]) ou à determinação de condições para que sejam também polinômios ortogonais. Faremos nesta seção um breve resumo do que se tem estudado nesta direção.

Em 1921, M. Riesz introduziu os polinômios quase-ortogonais que foram base para seus estudos sobre “problema de momentos” (veja Chihara [7]).

Esses polinômios, denotados por $q(z)$, são chamados quase-ortogonais de ordem $n + 1$ com relação a $w(t)$ em (a, b) se, e somente se, são de grau no máximo



$n + 1$ e satisfazem

$$\int_a^b t^k q(t) w(t) dt = 0, \quad 0 \leq k \leq n - 1.$$

De acordo com esta definição, os polinômios ortogonais $P_n(z)$ e $P_{n+1}(z)$ são também polinômios quase-ortogonais e, então, o seguinte resultado vale: $q(z)$ é um polinômio quase-ortogonal de ordem $n+1$ se, e somente se, existem constantes não nulas a_1 e a_2 tais que

$$q(z) = a_1 P_{n+1}(z) + a_2 P_n(z), \quad n \geq 0.$$

Quando o polinômio $q(z)$ é real, todos os seus zeros são reais e simples, de modo que esses polinômios podem ser usados para obter uma generalização simples para as fórmulas de quadratura de Gauss (veja Stroud e Secrest [24]).

Peherstorfer em [18] considerou os polinômios $\tilde{S}_n(z) \in \mathcal{P}_n$, que são ortogonais com relação à medida $\sigma(t)$ definida em $[-1, 1]$ a todo polinômio de grau menor ou igual a $n - m - 1$, $0 \leq m \leq n$, e escritos como uma combinação linear dos polinômios ortogonais $P_n(z)$ definidos em $[-1, 1]$, dada por

$$\tilde{S}_n(z) = \sum_{i=0}^m c_i P_{n-i}(z).$$

Determinou-se condições suficientes sobre os números reais c_i para que $\tilde{S}_n(z)$ tenha n zeros reais e simples em $(-1, 1)$.

Considerando a fórmula de quadratura

$$\int_{-1}^1 f(t) d\sigma(t) = \sum_{i=1}^n w_i f(z_i) + E_n(f), \quad (1.3.1)$$

onde os nós z_i são zeros de $\tilde{S}_n(z)$ e $E_n(f) \equiv 0$, $\forall f(t) \in \mathcal{P}_{2n-m-1}$, $0 \leq m \leq n$, foram determinadas, também em [18], restrições sobre os pesos w_i para que sejam positivos, isto é, para que a fórmula de quadratura (1.3.1) seja positiva.



Kwon, Lee e Marcellán [13] consideraram duas seqüências de polinômios ortogonais mônicos, $\{B_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{C_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, com relação às medidas $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$, respectivamente, e a seguinte combinação linear

$$P_n(z) = B_n(z) - \kappa_n C_{n-t}(z), \quad n \geq 0, \quad (1.3.2)$$

onde $C_k(z) = 0$ para $k \leq 0$, $t \in \mathbb{Z}_+^*$ e $\kappa_n \in \mathbb{C}$.

Outro caso analisado nesse trabalho foi a combinação convexa

$$P_n(z) = \kappa B_n(z) + (1 - \kappa) C_n(z), \quad n \geq 0 \quad \text{e} \quad \kappa \in \mathbb{C}. \quad (1.3.3)$$

O principal objetivo com relação a (1.3.2) e (1.3.3) foi encontrar condições necessárias e suficientes sobre $\{B_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{C_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ e também para κ_n , $\kappa \in \mathbb{C}$, para que $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ seja uma seqüência de polinômios ortogonais mônicos com relação a uma medida $\varphi(t)$.

Marcellán, Peherstorfer e Steinbauer investigaram em [14] uma seqüência de polinômios ortogonais, $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, com respeito à medida $\mu(t)$ no círculo unitário, e

$$S_n(z) = P_n(z) + \sum_{j=1}^l \nu_{n,j} P_{n-j}(z), \quad n \geq l, \quad \nu_{n,j} \in \mathbb{C},$$

uma seqüência de combinações lineares dos polinômios $P_n(z)$. Foi mostrado que $\{S_n(z)\}_{n=2l}^{\infty}$ é uma seqüência de polinômios ortogonais com relação a uma medida $\bar{\sigma}(t)$ quando as medidas $\mu(t)$ e $\bar{\sigma}(t)$ estão relacionadas por um polinômio trigonométrico.

Os mesmos autores em [15] consideraram duas seqüências de polinômios ortogonais, $\{P_n^{(1)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{P_n^{(2)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$, no círculo unitário com relação às medidas $\sigma_1(t)$ e $\sigma_2(t)$, respectivamente. A principal questão foi descobrir a relação entre as medidas dessas seqüências quando os polinômios estão relacionados por

$$\sum_{j=0}^{l(n)} c_{j,n} P_{n-j}^{(1)}(z) = \sum_{j=0}^{k(n)} d_{j,n} P_{n-j}^{(2)}(z), \quad n \in \mathbb{N}, \quad c_{j,n}, d_{j,n} \in \mathbb{C}.$$



Em [4], Berti e Sri Ranga consideraram duas medidas simétricas $\phi_0(t)$ e $\phi_1(t)$ definidas em $[-d, d]$ por

$$d\phi_1(t) = \frac{c}{1+qt^2} d\phi_0(t),$$

onde q é um valor real tal que $1+qt^2$ não muda de sinal em $[-d, d]$ e c é uma constante tal que $(1+qt^2)/c$ é não negativo em $[-d, d]$. Foi mostrado que as seqüências de polinômios ortogonais $\{P_n^{\phi_0}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{P_n^{\phi_1}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ com relação a $\phi_0(t)$ e $\phi_1(t)$, respectivamente, satisfazem

$$P_n^{\phi_1}(z) = P_n^{\phi_0}(z) + d_{n-2} P_{n-2}^{\phi_0}(z), \quad n \geq 2,$$

onde o parâmetro d_{n-2} é dado por

$$d_{n-2} = \frac{q \int_{-d}^d (P_n^{\phi_1}(t))^2 d\phi_1(t)}{c \int_{-d}^d (P_{n-2}^{\phi_0}(t))^2 d\phi_0(t)}.$$

Pelo que observamos, várias são as contribuições deixadas por estes pesquisadores e servem como motivação para estudos de combinações lineares de outros polinômios. Uma dessas contribuições, por Bracciali, McCabe e Sri Ranga em [6], é estudada neste trabalho no Capítulo 3, onde foram consideradas combinações lineares dos L-polinômios ortogonais estudados no Capítulo 2.



Capítulo 2

L-polinômios ortogonais

Neste capítulo fazemos um estudo detalhado sobre os polinômios similares aos ortogonais, $B_n^{(r)}(z)$, também conhecidos por L-polinômios ortogonais, baseado no que foi investigado primeiramente por Jones e outros em [10, 11] e posteriormente por Sri Ranga em [20].

2.1 L-polinômios ortogonais

Seja $\psi(t)$ uma medida forte de Stieltjes definida no intervalo (a, b) , tal que $a = \beta^2/b$ e $0 < \beta < b \leq \infty$. Consideremos $\{B_n^{(r)\psi}(z)\}_{n=0}^{\infty}$, $r \in \mathbb{Z}$, seqüências de polinômios mônicos, onde

i) $B_n^{(r)\psi}(z)$ é de grau exatamente n e

$$\text{ii) } \int_a^b t^{-n+s+r} B_n^{(r)\psi}(t) d\psi(t) = \begin{cases} 0, & s = 0, 1, \dots, n-1, \\ \rho_{n,r}^{(r)} > 0, & s = n. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

A partir de agora omitiremos o símbolo da medida $\psi(t)$ da notação $B_n^{(r)\psi}(z)$, que indica que o polinômio e seus coeficientes são calculados com relação a esta medida. Este símbolo será usado apenas quando nos referirmos a outras medidas,



$\psi_i(t)$ por exemplo.

Os polinômios $B_n^{(r)}(z)$, $n \geq 0$, $r \in \mathbb{Z}$, podem ser denotados por

$$B_n^{(r)}(z) = \sum_{j=0}^n b_{n,n-j}^{(r)} z^{n-j}, \quad \text{onde } b_{n,n}^{(r)} = 1, \quad (2.1.2)$$

e os números $\rho_{n,k}^{(r)}$ definidos por

$$\rho_{n,k}^{(r)} = \int_a^b t^k B_n^{(r)}(t) d\psi(t), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.1.3)$$

Os polinômios $B_n^{(r)}(z)$ estão relacionados aos polinômios ortogonais de Laurent ou, simplesmente, L-polinômios ortogonais por

$$Q_n(z) = z^{-\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \frac{B_n^{(0)}(z)}{B_n^{(0)}(0)}, \quad n \geq 0,$$

onde $\lfloor x \rfloor$ representa o maior inteiro menor ou igual a x , para $x \in \mathbb{R}$.

Estes polinômios foram estudados por Jones e outros em [10, 11] e definidos por

$$Q_{2n}(z) = \sum_{l=-n}^n q_{2n,l} z^l \quad \text{e} \quad Q_{2n+1}(z) = \sum_{l=-n-1}^n q_{2n+1,l} z^l, \quad n \geq 0,$$

onde $Q_0(z) = 1$ (veja [11, pag.109]). Os polinômios de Laurent satisfazem às seguintes condições de L-ortogonalidade

$$\int_a^b Q_m(t) Q_n(t) d\psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \neq 0, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Sri Ranga, em [21], estudou mais especificamente a sequência de polinômios mônicos $B_n^{(0)}(z)$ definida pelas condições de L-ortogonalidade

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n^{(0)}(t) d\psi(t) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1.$$

Por esta razão, os polinômios $B_n^{(r)}(z)$ podem também ser chamados de L-polinômios ortogonais. Esses polinômios apresentam propriedades similares aos



polinômios ortogonais, por isso são muitas vezes chamados de polinômios similares aos ortogonais.

Fazendo $s = 0, 1, \dots, n$ em (2.1.1) e usando (2.1.2) obtemos o seguinte sistema linear escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} \mu_{r-n} & \mu_{r-n+1} & \cdots & \mu_{r-1} & \mu_r \\ \mu_{r-n+1} & \mu_{r-n+2} & \cdots & \mu_r & \mu_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{r-1} & \mu_r & \cdots & \mu_{r+n-2} & \mu_{r+n-1} \\ \mu_r & \mu_{r+1} & \cdots & \mu_{r+n-1} & \mu_{r+n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{n,0}^{(r)} \\ b_{n,1}^{(r)} \\ \vdots \\ b_{n,n-1}^{(r)} \\ b_{n,n}^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \rho_{n,r}^{(r)} \end{pmatrix}. \quad (2.1.4)$$

Aplicando a regra de Cramer para encontrarmos o coeficiente $b_{n,n}^{(r)}$ e a definição 1.1.5 obtemos

$$b_{n,n}^{(r)} = \rho_{n,r}^{(r)} \frac{H_n^{(-n+r)}}{H_{n+1}^{(-n+r)}}.$$

Como, por definição, $b_{n,n}^{(r)} = 1$ e os determinantes de Hankel são positivos, então

$$\rho_{n,r}^{(r)} = \frac{H_{n+1}^{(-n+r)}}{H_n^{(-n+r)}} > 0, \quad n \geq 0. \quad (2.1.5)$$

Substituindo a última linha do sistema linear (2.1.4) por $B_n^{(r)}(z)$ definido em (2.1.2) obtemos

$$\begin{pmatrix} \mu_{r-n} & \mu_{r-n+1} & \cdots & \mu_{r-1} & \mu_r \\ \mu_{r-n+1} & \mu_{r-n+2} & \cdots & \mu_r & \mu_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{r-1} & \mu_r & \cdots & \mu_{r+n-2} & \mu_{r+n-1} \\ 1 & z & \cdots & z^{n-1} & z^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{n,0}^{(r)} \\ b_{n,1}^{(r)} \\ \vdots \\ b_{n,n-1}^{(r)} \\ b_{n,n}^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B_n^{(r)}(z) \end{pmatrix}.$$

Então, pela regra de Cramer,

$$B_n^{(r)}(z) = \frac{1}{H_n^{(-n+r)}} \begin{vmatrix} \mu_{r-n} & \mu_{r-n+1} & \cdots & \mu_{r-1} & \mu_r \\ \mu_{r-n+1} & \mu_{r-n+2} & \cdots & \mu_r & \mu_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{r-1} & \mu_r & \cdots & \mu_{r+n-2} & \mu_{r+n-1} \\ 1 & z & \cdots & z^{n-1} & z^n \end{vmatrix}. \quad (2.1.6)$$

Fazendo $z = 0$ em (2.1.6) e usando a definição 1.1.5 chegamos que

$$B_n^{(r)}(0) = (-1)^n \frac{H_n^{(-n+r+1)}}{H_n^{(-n+r)}} = b_{n,0}^{(r)} \neq 0.$$

Logo, $z = 0$ não é zero do polinômio $B_n^{(r)}(z)$, $n \geq 1$.

Vamos agora mostrar a existência e unicidade destes polinômios.

Teorema 2.1.1. *Os polinômios $B_n^{(r)}(z)$, $n \geq 0$, existem e são únicos.*

Demonstração: É imediata e segue do fato que os determinantes de Hankel são não nulos e $\rho_{n,r}^{(r)} \neq 0$, $r \in \mathbb{Z}$. Conseqüentemente, existirão únicos coeficientes $b_{n,0}^{(r)}, b_{n,1}^{(r)}, \dots, b_{n,n}^{(r)}$ que formam a solução do sistema linear (2.1.4), ou seja, únicos coeficientes que determinam o polinômio $B_n^{(r)}(z)$. ■

Teorema 2.1.2. *Os zeros dos polinômios $B_n^{(r)}(z)$, $n \geq 1$, são reais, distintos e estão no intervalo (a, b) .*

Demonstração: O polinômio $B_n^{(r)}(z)$ muda de sinal pelo menos uma vez em (a, b) , pois satisfaz (2.1.1). Suponhamos que o polinômio $B_n^{(r)}(z)$ mude m vezes de sinal em (a, b) , $1 \leq m < n$, e estas mudanças ocorrem em $z_{n,1}^{(r)}, z_{n,2}^{(r)}, \dots, z_{n,m}^{(r)}$.

Consideremos o polinômio mônico de grau m

$$\pi(z) = (z - z_{n,1}^{(r)})(z - z_{n,2}^{(r)}) \cdots (z - z_{n,m}^{(r)}) = \sum_{k=0}^m \bar{a}_{m,k} z^k.$$



Multiplicando $\pi(z)$ por $z^{-n+r}B_n^{(r)}(z)$, integrando em (a, b) com relação a $\psi(t)$ e usando (2.1.1) temos que

$$\int_a^b t^{-n+r} \pi(t) B_n^{(r)}(t) d\psi(t) = \sum_{k=0}^m \bar{a}_{m,k} \int_a^b t^{-n+r+k} B_n^{(r)}(t) d\psi(t) = 0. \quad (2.1.7)$$

Por outro lado, podemos escrever $B_n^{(r)}(z) = \pi(z)Q(z)$, onde $Q(z)$ é um polinômio de grau $n - m$ que só tem zeros de multiplicidade par em (a, b) ou complexos. Então, $\pi(z)B_n^{(r)}(z) = \pi^2(z)Q(z)$ é um polinômio que só tem zeros de multiplicidade par em (a, b) ou complexos. Assim,

$$\int_a^b t^{-n+r} \pi(t) B_n^{(r)}(t) d\psi(t) = \int_a^b \overbrace{t^{-n+r}}^{>0} (\pi(t))^2 Q(t) d\psi(t) \neq 0,$$

chegando a uma contradição com (2.1.7). Conseqüentemente $m \geq n$. Como $B_n^{(r)}(z)$ é um polinômio de grau n então $m = n$ e a multiplicidade ímpar dos zeros é 1. Portanto, $B_n^{(r)}(z)$ tem n zeros reais, distintos que estão em (a, b) . ■

Agora, considerando $s = -1$ em (2.1.1), definimos para $n \geq 0$ e $k \in \mathbb{Z}$,

$$\sigma_{n,k}^{(r)} = \int_a^b t^{k-(n+1)} B_n^{(r)}(t) d\psi(t). \quad (2.1.8)$$

Fazendo $k = r$ em (2.1.8) e substituindo (2.1.2) encontramos que

$$\sigma_{n,r}^{(r)} = \mu_{r-n-1} b_{n,0}^{(r)} + \mu_{r-n} b_{n,1}^{(r)} + \dots + \mu_{r-2} b_{n,n-1}^{(r)} + \mu_{r-1} b_{n,n}^{(r)}.$$

Se considerarmos o sistema linear formado por esta linha junto com as n primeiras linhas do sistema (2.1.4) temos

$$\begin{pmatrix} \mu_{r-n-1} & \mu_{r-n} & \dots & \mu_{r-2} & \mu_{r-1} \\ \mu_{r-n} & \mu_{r-n+1} & \dots & \mu_{r-1} & \mu_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{r-2} & \mu_{r-1} & \dots & \mu_{r+n-3} & \mu_{r+n-2} \\ \mu_{r-1} & \mu_r & \dots & \mu_{r+n-2} & \mu_{r+n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{n,0}^{(r)} \\ b_{n,1}^{(r)} \\ \vdots \\ b_{n,n-1}^{(r)} \\ b_{n,n}^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{n,r}^{(r)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Novamente usando a regra de Cramer e a definição 1.1.5 obtemos

$$b_{n,n}^{(r)} = (-1)^n \sigma_{n,r}^{(r)} \frac{H_n^{(-n+r)}}{H_{n+1}^{(-(n+1)+r)}},$$

e, como $b_{n,n}^{(r)} = 1$,

$$\sigma_{n,r}^{(r)} = (-1)^n \frac{H_{n+1}^{(-(n+1)+r)}}{H_n^{(-n+r)}} \neq 0, \quad n \geq 0, \quad r \in \mathbb{Z}. \quad (2.1.9)$$

Teorema 2.1.3. *Os polinômios $B_n^{(r)}(z)$, $r \in \mathbb{Z}$, satisfazem à seguinte relação de recorrência de três termos*

$$B_{n+1}^{(r)}(z) = (z - \beta_{n+1}^{(r)})B_n^{(r)}(z) - \alpha_{n+1}^{(r)}zB_{n-1}^{(r)}(z), \quad n \geq 1, \quad (2.1.10)$$

com $B_0^{(r)}(z) = 1$ e $B_1^{(r)}(z) = z - \beta_1^{(r)}$. Os coeficientes $\beta_n^{(r)}$ e $\alpha_{n+1}^{(r)}$, $n \geq 1$, são positivos e dados por

$$\beta_1^{(r)} = \frac{\mu_r}{\mu_{r-1}}, \quad \alpha_{n+1}^{(r)} = \frac{\rho_{n,r}^{(r)}}{\rho_{n-1,r}^{(r)}} \quad e \quad \beta_{n+1}^{(r)} = -\alpha_{n+1}^{(r)} \frac{\sigma_{n-1,r}^{(r)}}{\sigma_{n,r}^{(r)}}.$$

Demonstração: Consideremos o polinômio de grau $\leq n$

$$B_{n+1}^{(r)}(z) - zB_n^{(r)}(z) = -\beta_{n+1}^{(r)}B_n^{(r)}(z) - \alpha_{n+1}^{(r)}zB_{n-1}^{(r)}(z) + \tilde{P}_{n-1}^{(r)}(z), \quad (2.1.11)$$

onde $\tilde{P}_{n-1}^{(r)}(z) = \sum_{j=0}^{n-1} p_{n-1,j}^{(r)} z^j$ é de grau $n-1$.

Multiplicando (2.1.11) por z^{-n+s+r} e integrando em (a, b) com relação a $\psi(t)$, temos que

$$\begin{aligned} \int_a^b t^{-n+s+r} B_{n+1}^{(r)}(t) d\psi(t) - \int_a^b t^{-n+s+r+1} B_n^{(r)}(t) d\psi(t) &= -\beta_{n+1}^{(r)} \int_a^b t^{-n+s+r} B_n^{(r)}(t) d\psi(t) \\ &- \alpha_{n+1}^{(r)} \int_a^b t^{-n+s+r+1} B_{n-1}^{(r)}(t) d\psi(t) + \int_a^b t^{-n+s+r} \tilde{P}_{n-1}^{(r)}(t) d\psi(t). \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Fazendo $s = 0, 1, \dots, n-1$ em (2.1.12) e substituindo $\tilde{P}_{n-1}^{(r)}(z)$, obtemos o seguinte sistema linear na forma matricial



$$\begin{pmatrix} \mu_{r-n} & \mu_{r-n+1} & \cdots & \mu_{r-2} & \mu_{r-1} \\ \mu_{r-n+1} & \mu_{r-n+2} & \cdots & \mu_{r-1} & \mu_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{r-2} & \mu_{r-1} & \cdots & \mu_{r+n-4} & \mu_{r+n-3} \\ \mu_{r-1} & \mu_r & \cdots & \mu_{r+n-3} & \mu_{r+n-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{n-1,0}^{(r)} \\ p_{n-1,1}^{(r)} \\ \vdots \\ p_{n-1,n-2}^{(r)} \\ p_{n-1,n-1}^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_{n+1}^{(r)} \rho_{n-1,r}^{(r)} - \rho_{n,r}^{(r)} \end{pmatrix}.$$

Se escolhermos $\alpha_{n+1}^{(r)} = \frac{\rho_{n,r}^{(r)}}{\rho_{n-1,r}^{(r)}} > 0$, chegamos ao sistema linear homogêneo

$$\begin{pmatrix} \mu_{r-n} & \mu_{r-n+1} & \cdots & \mu_{r-2} & \mu_{r-1} \\ \mu_{r-n+1} & \mu_{r-n+2} & \cdots & \mu_{r-1} & \mu_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{r-2} & \mu_{r-1} & \cdots & \mu_{r+n-4} & \mu_{r+n-3} \\ \mu_{r-1} & \mu_r & \cdots & \mu_{r+n-3} & \mu_{r+n-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{n-1,0}^{(r)} \\ p_{n-1,1}^{(r)} \\ \vdots \\ p_{n-1,n-2}^{(r)} \\ p_{n-1,n-1}^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

O determinante da matriz deste sistema linear é diferente de zero e, então, a única solução para o sistema é a solução nula. Assim, $p_{n-1,j}^{(r)} = 0$ para $j = 0, 1, \dots, n-1$. Logo, $\tilde{P}_{n-1}^{(r)}(z) \equiv 0$ e, portanto,

$$B_{n+1}^{(r)}(z) = (z - \beta_{n+1}^{(r)})B_n^{(r)}(z) - \alpha_{n+1}^{(r)}zB_{n-1}^{(r)}(z), \quad n \geq 1.$$

Se fizermos $s = -1$ em (2.1.12) e usarmos (2.1.1), temos

$$\beta_{n+1}^{(r)} \int_a^b t^{-n+r-1} B_n^{(r)}(t) d\psi(t) = -\alpha_{n+1}^{(r)} \int_a^b t^{-n+r} B_{n-1}^{(r)}(t) d\psi(t).$$

Assim, por (2.1.8) e (2.1.9), $\beta_{n+1}^{(r)} = -\alpha_{n+1}^{(r)} \frac{\sigma_{n-1,r}^{(r)}}{\sigma_{n,r}^{(r)}} > 0$.

Como $B_n^{(r)}(z)$ é mônico, $B_0^{(r)}(z) = 1$. Seja $B_1^{(r)}(z) = z + b_1^{(r)}$. Então, de (2.1.1), temos

$$\int_a^b t^{-1+r} B_1^{(r)}(t) d\psi(t) = \mu_r + b_1^{(r)} \mu_{r-1} = 0. \quad (2.1.13)$$

Logo, $B_1^{(r)}(z) = z - \mu_r/\mu_{r-1} = z - \beta_1^{(r)}$.

Usando as relações (2.1.5) e (2.1.9), também podemos calcular os valores dos coeficientes $\beta_n^{(r)}$ e $\alpha_{n+1}^{(r)}$, $n \geq 1$, através dos determinantes de Hankel, sendo dados por

$$\beta_{n+1}^{(r)} = \frac{H_n^{(-n+r)} H_{n+1}^{(-n+r)}}{H_n^{(-(n-1)+r)} H_{n+1}^{(-(n+1)+r)}} > 0 \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1}^{(r)} = \frac{H_{n+1}^{(-n+r)} H_{n-1}^{(-(n-1)+r)}}{H_n^{(-n+r)} H_n^{(-(n-1)+r)}} > 0.$$

■

McCabe introduziu em [16] uma forma para calcular os coeficientes da relação de recorrência dos polinômios $B_n^{(r)}(z)$. Os coeficientes $\beta_n^{(r)}$, $\alpha_{n+1}^{(r)}$, $n \geq 1$, são arranjados na seguinte tabela

r	$\beta_1^{(r)}$	$\alpha_2^{(r)}$	$\beta_2^{(r)}$	$\alpha_3^{(r)}$	$\beta_3^{(r)}$	...
$\vdots$	...	...	...	...	...	...
-2	$\beta_1^{(-2)}$	$\alpha_2^{(-2)}$	$\beta_2^{(-2)}$	$\alpha_3^{(-2)}$	$\beta_3^{(-2)}$	...
-1	$\beta_1^{(-1)}$	$\alpha_2^{(-1)}$	$\beta_2^{(-1)}$	$\alpha_3^{(-1)}$	$\beta_3^{(-1)}$	...
0	$\beta_1^{(0)}$	$\alpha_2^{(0)}$	$\beta_2^{(0)}$	$\alpha_3^{(0)}$	$\beta_3^{(0)}$	...
1	$\beta_1^{(1)}$	$\alpha_2^{(1)}$	$\beta_2^{(1)}$	$\alpha_3^{(1)}$	$\beta_3^{(1)}$	...
2	$\beta_1^{(2)}$	$\alpha_2^{(2)}$	$\beta_2^{(2)}$	$\alpha_3^{(2)}$	$\beta_3^{(2)}$	...
$\vdots$	...	...	...	...	...	...

e calculados através do seguinte algoritmo,

Para $r = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

$$\alpha_1^{(r)} = 0, \quad \beta_1^{(r)} = \frac{\mu_r}{\mu_{r-1}}.$$

Para $n = 2, 3, 4, \dots$

Para $r = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

$$\alpha_n^{(r)} = -\beta_{n-1}^{(r)} + \beta_{n-1}^{(r+1)} + \alpha_{n-1}^{(r+1)}, \quad (2.1.14)$$

Para $r = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

$$\beta_n^{(r)} = \frac{\beta_{n-1}^{(r-1)} \alpha_n^{(r)}}{\alpha_n^{(r-1)}}. \quad (2.1.15)$$



Se conhecemos uma linha, a tabela poderá ser construída linha por linha.

Para isso, seja

$$\gamma_n^{(r)} = \beta_n^{(r)} + \alpha_{n+1}^{(r)}, \quad n \geq 1. \quad (2.1.16)$$

Pela relação (2.1.14), $\alpha_{n+1}^{(r)} = -\beta_n^{(r)} + \beta_n^{(r+1)} + \alpha_n^{(r+1)}$. Então, em (2.1.16), temos

$$\gamma_n^{(r)} = \beta_n^{(r)} + \alpha_{n+1}^{(r)} = \beta_n^{(r+1)} + \alpha_n^{(r+1)}, \quad (2.1.17)$$

e de (2.1.15)

$$\beta_n^{(r+1)} = \frac{\beta_{n-1}^{(r)} \alpha_n^{(r+1)}}{\alpha_n^{(r)}}. \quad (2.1.18)$$

Quando substituímos (2.1.18) em (2.1.17) chegamos que

$$\alpha_n^{(r+1)} = \alpha_n^{(r)} \frac{\gamma_n^{(r)}}{\gamma_{n-1}^{(r)}}. \quad (2.1.19)$$

Da mesma forma, substituindo (2.1.19) em (2.1.18), temos

$$\beta_n^{(r+1)} = \beta_{n-1}^{(r)} \frac{\gamma_n^{(r)}}{\gamma_{n-1}^{(r)}}. \quad (2.1.20)$$

Podemos escrever a soma dos zeros do polinômio $B_n^{(r)}(z)$ através dos coeficientes da relação de recorrência:

Teorema 2.1.4. *Sejam $z_{n,1}^{(r)}, z_{n,2}^{(r)}, \dots, z_{n,n}^{(r)}$ os zeros do polinômio $B_n^{(r)}(z)$, $n \geq 1$. Então,*

$$\sum_{k=1}^n z_{n,k}^{(r)} = \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(r)} + \beta_n^{(r)}, \quad n \geq 1. \quad (2.1.21)$$

Demonstração: Lembremos que o polinômio $B_n^{(r)}(z)$ pode ser escrito, através da relação de recorrência, como

$$B_n^{(r)}(z) = (z - \beta_n^{(r)})B_{n-1}^{(r)}(z) - \alpha_n^{(r)}zB_{n-2}^{(r)}(z), \quad n \geq 2,$$

onde $B_1(z) = z - \beta_1^{(r)}$.



Como $z_{n,1}^{(r)}, z_{n,2}^{(r)}, \dots, z_{n,n}^{(r)}$ são os zeros de $B_n^{(r)}(z)$,

$$B_n^{(r)}(z) = (z - z_{n,1}^{(r)})(z - z_{n,2}^{(r)}) \cdots (z - z_{n,n}^{(r)}) = z^n + b_{n,n-1}^{(r)}z^{n-1} + \cdots,$$

ou seja, $b_{n,n-1}^{(r)} = -\sum_{k=1}^n z_{n,k}^{(r)}$.

Substituindo na relação de recorrência temos a seguinte igualdade

$$z^n - \left(\sum_{k=1}^n z_{n,k}^{(r)} \right) z^{n-1} + \dots = z^n - \left(\sum_{k=1}^{n-1} z_{n-1,k}^{(r)} + \beta_n^{(r)} + \alpha_n^{(r)} \right) z^{n-1} + \dots.$$

Igualando os coeficientes de ambos os termos de grau $n - 1$ vemos que

$$\sum_{k=1}^n z_{n,k}^{(r)} = \sum_{k=1}^{n-1} z_{n-1,k}^{(r)} + \beta_n^{(r)} + \alpha_n^{(r)},$$

ou ainda,

$$\sum_{k=1}^n z_{n,k}^{(r)} = \sum_{k=1}^{n-2} z_{n-2,k}^{(r)} + \beta_{n-1}^{(r)} + \alpha_{n-1}^{(r)} + \beta_n^{(r)} + \alpha_n^{(r)},$$

e assim sucessivamente,

$$\sum_{k=1}^n z_{n,k}^{(r)} = \beta_1^{(r)} + \beta_2^{(r)} + \alpha_2^{(r)} + \dots + \beta_{n-1}^{(r)} + \alpha_{n-1}^{(r)} + \beta_n^{(r)} + \alpha_n^{(r)}.$$

Por (2.1.17), $\gamma_n^{(r)} = \beta_n^{(r)} + \alpha_{n+1}^{(r)}$. Logo,

$$\sum_{k=1}^n z_{n,k}^{(r)} = \gamma_1^{(r)} + \gamma_2^{(r)} + \dots + \gamma_{n-1}^{(r)} + \beta_n^{(r)}$$

e, portanto,

$$\sum_{k=1}^n z_{n,k}^{(r)} = \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(r)} + \beta_n^{(r)}, \quad n \geq 1.$$

■

2.1.1 Relações entre L-polinômios ortogonais

Em McCabe [17] foram estabelecidas relações que podem ser estendidas para os polinômios $B_n^{(r-1)}(z)$, $B_{n-1}^{(r)}(z)$, $B_n^{(r)}(z)$, $B_{n+1}^{(r)}(z)$ e $B_n^{(r+1)}(z)$, $n \geq 1$, $r \in \mathbb{Z}$, da seguinte forma.



1)

$$B_n^{(r+1)}(z) = B_n^{(r)}(z) - \alpha_{n+1}^{(r)} B_{n-1}^{(r)}(z). \quad (2.1.22)$$

De fato: considere o polinômio mônico de grau n

$$B_n^{(r)}(z) - \tau_{n,r} B_{n-1}^{(r)}(z).$$

Por (2.1.1)

$$\int_a^b t^{-n+s+r+1} \left(B_n^{(r)}(t) - \tau_{n,r} B_{n-1}^{(r)}(t) \right) d\psi(t) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-2.$$

Fazendo $s = n-1$ e usando (2.1.3) temos que

$$\int_a^b t^r \left(B_n^{(r)}(t) - \tau_{n,r} B_{n-1}^{(r)}(t) \right) d\psi(t) = \rho_{n,r}^{(r)} - \tau_{n,r} \rho_{n-1,r}^{(r)}.$$

Se escolhermos $\tau_{n,r} = \frac{\rho_{n,r}^{(r)}}{\rho_{n-1,r}^{(r)}}$, concluímos que

$$\int_a^b t^{-n+s+r+1} \left(B_n^{(r)}(t) - \tau_{n,r} B_{n-1}^{(r)}(t) \right) d\psi(t) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1.$$

Da relação de recorrência para os polinômios $B_{n+1}^{(r)}(z)$, $\tau_{n,r} = \alpha_{n+1}^{(r)} \neq 0$. Então, o único polinômio mônico de grau n que satisfaz às n condições da integral é $B_n^{(r+1)}(z)$, pois

$$\int_a^b t^{-n+s+r+1} B_n^{(r+1)}(t) d\psi(t) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1.$$

Portanto, $B_n^{(r+1)}(z) = B_n^{(r)}(z) - \alpha_{n+1}^{(r)} B_{n-1}^{(r)}(z)$. ■

2)

$$B_n^{(r+1)}(z) = \frac{1}{z} \left(B_{n+1}^{(r)}(z) + \beta_{n+1}^{(r)} B_n^{(r)}(z) \right). \quad (2.1.23)$$

De fato: da relação de recorrência para os polinômios $B_{n+1}^{(r)}(z)$, temos

$$B_{n+1}^{(r)}(z) + \beta_{n+1}^{(r)} B_n^{(r)}(z) = z \left(B_n^{(r)}(z) - \alpha_{n+1}^{(r)} B_{n-1}^{(r)}(z) \right).$$



Substituindo-se (2.1.22) segue (2.1.23). ■

3)

$$B_n^{(r-1)}(z) = \frac{1}{\gamma_{n+1}^{(r-1)}} \left[(z + \beta_{n+1}^{(r)}) B_n^{(r)}(z) - z B_n^{(r+1)}(z) \right]. \quad (2.1.24)$$

De fato: das relações (2.1.22) e (2.1.23) obtemos, respectivamente,

$$B_{n-1}^{(r-1)}(z) = \frac{1}{\alpha_{n+1}^{(r-1)}} (B_n^{(r-1)}(z) - B_n^{(r)}(z))$$

e

$$B_{n-1}^{(r)}(z) = \frac{1}{z} (B_n^{(r-1)}(z) + \beta_n^{(r-1)} B_{n-1}^{(r-1)}(z)).$$

Substituindo $B_{n-1}^{(r-1)}(z)$ em $B_{n-1}^{(r)}(z)$ temos que

$$B_{n-1}^{(r)}(z) = \frac{1}{z} \left[B_n^{(r-1)}(z) + \frac{\beta_n^{(r-1)}}{\alpha_{n+1}^{(r-1)}} (B_n^{(r-1)}(z) - B_n^{(r)}(z)) \right].$$

Voltando a (2.1.22) encontramos

$$B_n^{(r+1)}(z) = B_n^{(r)}(z) - \frac{\alpha_{n+1}^{(r)}}{z} \left[B_n^{(r-1)}(z) + \frac{\beta_n^{(r-1)}}{\alpha_{n+1}^{(r-1)}} (B_n^{(r-1)}(z) - B_n^{(r)}(z)) \right].$$

Mas, $\beta_n^{(r-1)} = \frac{\beta_{n+1}^{(r)} \alpha_{n+1}^{(r-1)}}{\alpha_{n+1}^{(r)}}$ e, então,

$$(\alpha_{n+1}^{(r)} + \beta_{n+1}^{(r)}) B_n^{(r-1)}(z) = (z + \beta_{n+1}^{(r)}) B_n^{(r)}(z) - z B_n^{(r+1)}(z).$$

Dividindo por $\gamma_{n+1}^{(r-1)} = (\beta_{n+1}^{(r)} + \alpha_{n+1}^{(r)}) \neq 0$ obtemos (2.1.24). ■

4)

$$B_n^{(r-1)}(z) = \frac{1}{\gamma_{n+1}^{(r-1)}} (z B_n^{(r)}(z) - B_{n+1}^{(r)}(z)). \quad (2.1.25)$$

De fato: por (2.1.23) e (2.1.24), temos

$$z B_n^{(r+1)}(z) = B_{n+1}^{(r)}(z) + \beta_{n+1}^{(r)} B_n^{(r)}(z)$$

e

$$z B_n^{(r+1)}(z) = (z + \beta_{n+1}^{(r)}) B_n^{(r)}(z) - \gamma_{n+1}^{(r-1)} B_n^{(r-1)}(z).$$



Igualando as expressões para $zB_n^{(r+1)}(z)$ obtemos (2.1.25). ■

5)

$$B_n^{(r-1)}(z) = \frac{1}{\gamma_n^{(r-1)}} \left(\beta_n^{(r-1)} B_n^{(r)}(z) + \alpha_{n+1}^{(r-1)} z B_{n-1}^{(r)}(z) \right). \quad (2.1.26)$$

De fato: pela relação de recorrência (2.1.10), obtemos

$$zB_n^{(r)}(z) - B_{n+1}^{(r)}(z) = \beta_{n+1}^{(r)} B_n^{(r)}(z) + \alpha_{n+1}^{(r)} z B_{n-1}^{(r)}(z).$$

Então, por (2.1.25), chegamos à relação

$$B_n^{(r-1)}(z) = \frac{1}{\gamma_{n+1}^{(r-1)}} \left(\beta_{n+1}^{(r)} B_n^{(r)}(z) + \alpha_{n+1}^{(r)} z B_{n-1}^{(r)}(z) \right).$$

Das relações (2.1.19) e (2.1.20) temos

$$\frac{\alpha_{n+1}^{(r)}}{\gamma_{n+1}^{(r-1)}} = \frac{\alpha_{n+1}^{(r-1)}}{\gamma_n^{(r-1)}} \quad \text{e} \quad \frac{\beta_{n+1}^{(r)}}{\gamma_{n+1}^{(r-1)}} = \frac{\beta_n^{(r-1)}}{\gamma_n^{(r-1)}}.$$

Substituindo em $B_n^{(r-1)}(z)$ obtemos (2.1.26). ■

2.2 Medidas fortes de Stieltjes simétricas

Consideremos $\psi(t)$ uma medida forte de Stieltjes definida em $(a, b) \subseteq (0, \infty)$ onde $0 < \beta < b \leq \infty$ e $a = \beta^2/b$. Dado $2\omega \in \mathbb{Z}$, dizemos que a medida $\psi(t)$ é de classe $S^3[\omega, \beta, b]$ se satisfaz à seguinte propriedade de simetria

$$\frac{d\psi(t)}{t^\omega} = -\frac{d\psi(\beta^2/t)}{(\beta^2/t)^\omega}, \quad t \in (a, b). \quad (2.2.1)$$

Este tipo de simetria foi primeiramente estudado em 1994 no trabalho de Sri Ranga [21], onde foi considerado $\omega = 1/2$. Em 1995, Sri Ranga, Andrade e McCabe em [22] consideraram o caso $\omega = 0$. Em 1999, esta propriedade de simetria foi generalizada por Bracciali, McCabe e Sri Ranga em [6], que introduziram (2.2.1).



Em [21] também demonstrou-se que se $\psi(t)$ é de classe $S^3[1/2, \beta, b]$ então os polinômios $B_n^{(0)}(z)$ satisfazem

$$\frac{z^n B_n^{(0)}(\beta^2/z)}{B_n^{(0)}(0)} = B_n^{(0)}(z), \quad n \geq 0. \quad (2.2.2)$$

Quando $d\psi(t) = \nu(t)dt$, a relação (2.2.1) terá a forma

$$t^{1-\omega} \nu(t) = (\beta^2/t)^{1-\omega} \nu(\beta^2/t), \quad t \in (a, b), \quad 2\omega \in \mathbb{Z}.$$

Se $\psi(t)$ satisfaz à propriedade (2.2.1), fazendo a mudança de variável $t = \beta^2/t$ em (1.1.1), é possível mostrar que os momentos satisfazem

$$\mu_m = \beta^{2(m+\omega)} \mu_{-m-2\omega}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (2.2.3)$$

Multiplicando-se e dividindo-se o primeiro membro de (2.2.1) por t^m e o segundo por $(\beta^2/t)^m$ temos

$$\frac{t^m d\psi(t)}{t^{\omega+m}} = - \frac{(\beta^2/t)^m d\psi(\beta^2/t)}{(\beta^2/t)^{\omega+m}}, \quad t \in (a, b), \quad m, 2\omega \in \mathbb{Z}. \quad (2.2.4)$$

Assim, $t^m d\psi(t)$ é de classe $S^3[\omega + m, \beta, b]$.

Se multiplicarmos ambos os membros de (2.2.1) por $(t + \beta)/\sqrt{t}$ obtemos

$$\frac{(t + \beta)d\psi(t)}{t^{\omega+\frac{1}{2}}} = - \left(\frac{\beta^2}{t} + \beta \right) \frac{d\psi(\beta^2/t)}{(\beta^2/t)^{\omega+\frac{1}{2}}}, \quad t \in (a, b), \quad 2\omega \in \mathbb{Z}. \quad (2.2.5)$$

Logo, $(t + \beta)d\psi(t)$ é de classe $S^3[\omega + 1/2, \beta, b]$.

Para uma medida de classe $S^3[\omega, \beta, b]$, os determinantes de Hankel definidos por (1.1.2) satisfazem

$$H_n^{(m)} = \beta^{2n(m+\omega+n-1)} H_n^{(-m-2\omega-2n+2)}, \quad n \geq 1, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

De fato: por (2.2.3), para $n \geq 1$ e $m \in \mathbb{Z}$, temos

$$H_n^{(m)} = \begin{vmatrix} \beta^{2(m+\omega)} \mu_{-m-2\omega} & \dots & \beta^{2(m+\omega+n-1)} \mu_{-m-2\omega-n+1} \\ \beta^{2(m+\omega+1)} \mu_{-m-2\omega-1} & \dots & \beta^{2(m+\omega+n)} \mu_{-m-2\omega-n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta^{2(m+\omega+n-1)} \mu_{-m-2\omega-n+1} & \dots & \beta^{2(m+\omega+2n-2)} \mu_{-m-2\omega-2n+2} \end{vmatrix}.$$



Colocando os termos comuns em evidência chegamos que

$$H_n^{(m)} = \beta^{2n(m+\omega)} \beta^{2[2(1+2+3+\dots+n-1)]} \begin{vmatrix} \mu_{-m-2\omega} & \dots & \mu_{-m-2\omega-n+1} \\ \mu_{-m-2\omega-1} & \dots & \mu_{-m-2\omega-n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{-m-2\omega-n+1} & \dots & \mu_{-m-2\omega-2n+2} \end{vmatrix}.$$

Sabemos que

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \geq 1.$$

Usando este resultado e uma conhecida propriedade de determinantes temos que

$$H_n^{(m)} = \beta^{2n(m+\omega+n-1)} \begin{vmatrix} \mu_{-m-2\omega-2n+2} & \dots & \mu_{-m-2\omega-n+1} \\ \mu_{-m-2\omega-2n+3} & \dots & \mu_{-m-2\omega-n+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{-m-2\omega-n+1} & \dots & \mu_{-m-2\omega} \end{vmatrix}.$$

Por (1.1.2), $H_n^{(m)} = \beta^{2n(m+\omega+n-1)} H_n^{(-m-2\omega-2n+2)}, \quad n \geq 1, \quad m \in \mathbb{Z}.$ ■

2.3 L-polinômios ortogonais e medidas de classe

$$S^3[\omega, \beta, b]$$

Em [6] foram introduzidas algumas relações entre os polinômios $B_n^{(l)}(z)$ e $B_n^{(j-l)}(z)$, onde $j = 1 - 2\omega$, associados a uma medida $\psi(t)$ de classe $S^3[\omega, \beta, b]$. Apresentamos aqui apenas as relações que serão usadas posteriormente.

O seguinte resultado nos mostra que quando $\psi(t)$ é de classe $S^3[\omega, \beta, b]$, para $j = 1 - 2\omega$, se invertermos os coeficientes de $B_n^{(l)}(z)$, $l \in \mathbb{Z}$, com relação a β^2 , obtemos $B_n^{(j-l)}(z)$.



Teorema 2.3.1. *Seja $\psi(t)$ de classe $S^3[\omega, \beta, b]$. Então, para $n \geq 0$ e $j = 1 - 2\omega$, os polinômios $B_n^{(l)}(z)$ satisfazem*

$$\frac{z^n B_n^{(l)}(\beta^2/z)}{B_n^{(l)}(0)} = B_n^{(j-l)}(z), \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (2.3.1)$$

Corolário 2.3.1. *Seja $\psi(t)$ de classe $S^3[\omega, \beta, b]$. Então, para $n \geq 0$, os polinômios $B_n^{(l)}(z)$ satisfazem*

i) Para 2ω ímpar e $j = \frac{1}{2} - \omega$,

$$\frac{z^n B_n^{(j+l)}(\beta^2/z)}{B_n^{(j+l)}(0)} = B_n^{(j-l)}(z), \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (2.3.2)$$

ii) Para 2ω par e $j = -\omega$,

$$\frac{z^n B_n^{(j+l)}(\beta^2/z)}{B_n^{(j+l)}(0)} = B_n^{(j+1-l)}(z), \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Agora, veremos um resultado que relaciona os coeficientes da relação de recorrência dos polinômios $B_n^{(l)}(z)$ e $B_n^{(j-l)}(z)$, associados a uma medida $\psi(t)$ de classe $S^3[\omega, \beta, b]$.

Teorema 2.3.2. *Se $\psi(t)$ é de classe $S^3[\omega, \beta, b]$, então, para $j = 1 - 2\omega$ e $l \in \mathbb{Z}$, os coeficientes $\beta_n^{(l)}$ e $\alpha_{n+1}^{(l)}$ satisfazem*

$$\beta_n^{(l)} \beta_n^{(j-l)} = \beta^2 \quad e \quad \frac{\alpha_{n+1}^{(j-l)}}{\alpha_{n+1}^{(l)}} = \frac{\beta_n^{(j-l)}}{\beta_{n+1}^{(l)}}, \quad n \geq 1.$$

Corolário 2.3.2. *Seja $\psi(t)$ de classe $S^3[\omega, \beta, b]$. Então, os coeficientes $\beta_n^{(l)}$ e $\alpha_{n+1}^{(l)}$, $n \geq 1$, satisfazem*

i) Para 2ω ímpar e $j = \frac{1}{2} - \omega$,

$$\beta_n^{(j+l)} \beta_n^{(j-l)} = \beta^2 \quad e \quad \frac{\alpha_{n+1}^{(j+l)}}{\alpha_{n+1}^{(j-l)}} = \frac{\beta_n^{(j+l)}}{\beta_{n+1}^{(j-l)}}, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad (2.3.3)$$

e, quando $l = 0$, $\beta_n^{(j)} = \beta$, $n \geq 1$.

ii) Para 2ω par e $j = -\omega$,

$$\beta_n^{(j+l)} \beta_n^{(j+1-l)} = \beta^2 \quad e \quad \frac{\alpha_{n+1}^{(j+l)}}{\alpha_{n+1}^{(j+1-l)}} = \frac{\beta_n^{(j+l)}}{\beta_{n+1}^{(j+1-l)}}, \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (2.3.4)$$

2.4 Polinômios β -inversíveis

Um polinômio mônico de grau n $R_n(z)$ que satisfaz

$$\frac{z^n R_n(\beta^2/z)}{R_n(0)} = R_n(z) \quad (2.4.1)$$

será chamado de β -inversível. Consideramos $\beta^2 = ab$, onde $0 < a < \beta < b \leq \infty$.

Observamos que se $\psi(t)$ é de classe $S^3[1/2, \beta, b]$, então os polinômios $B_n^{(0)}(z)$ são β -inversíveis (veja (2.2.2)).

Notemos também que para 2ω ímpar e $l = 0$ em (2.3.2) obtemos polinômios β -inversíveis, pois

$$\frac{z^n B_n^{(j)}(\beta^2/z)}{B_n^{(j)}(0)} = B_n^{(j)}(z), \quad \text{para } j = \frac{1}{2} - \omega.$$

Sejam $r_{n,1}, \dots, r_{n,n}$ os zeros de $R_n(z)$, $n \geq 1$. As seguintes propriedades são válidas:

- se $0 < r_{n,1} < \dots < r_{n,m}$, $1 \leq m \leq n$, são os zeros distintos positivos de $R_n(z)$, então, de (2.4.1), satisfazem

$$r_{n,i} = \frac{\beta^2}{r_{n,m+1-i}}, \quad i = 1, \dots, m.$$

- se $0 < r_{n,1} < \dots < r_{n,k}$, $1 \leq k \leq n$, são os zeros distintos negativos de $R_n(z)$, então, de (2.4.1), satisfazem

$$r_{n,i} = \frac{\beta^2}{r_{n,k+1-i}}, \quad i = 1, \dots, k.$$

- se o número de zeros positivos for ímpar, então $z = \beta$ é um zero de multiplicidade ímpar de $R_n(z)$.
- se o número de zeros negativos for ímpar, então $z = -\beta$ é um zero de multiplicidade ímpar de $R_n(z)$.



- se o polinômio $R_n(z)$ tem zeros complexos conjugados então

$$r_{n,i} = \frac{\beta^2}{r_{n,j}},$$

onde o zero $r_{n,j}$ é o conjugado complexo do zero $r_{n,i}$. O módulo de $r_{n,i}$ é igual a β .

- se há um zero em $(0,a)$, então, por (2.4.1), há também um zero em (b,∞) .
- se a é um zero de $R_n(z)$, então b também é um zero de $R_n(z)$, pois $a = \beta^2/b$.

A relação (2.4.1) nos mostra que $R_n(0) = (-\beta)^n$ ou $R_n(0) = -(-\beta)^n$. Em [2], Andrade, Bracciali e Sri Ranga estudaram o caso em que $R_n(0) = (-\beta)^n$ e mostraram que se um polinômio mônico $R_n(z)$ de grau n , $n \geq 0$, satisfaz

$$\frac{z^n R_n(\beta^2/z)}{(-\beta)^n} = R_n(z), \quad z \in (a, b), \quad (2.4.2)$$

então existe um único conjunto de números reais $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_s$, $0 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, tal que

$$R_n(z) = \sum_{k=0}^s \xi_k z^k B_{n-2k}^{(0)}(z), \quad (2.4.3)$$

onde os polinômios $B_n^{(0)}(z)$ estão relacionados com uma medida $\psi(t)$ de classe $S^3[1/2, \beta, b]$.

No restante deste trabalho estudaremos polinômios β -inversíveis que surgem de combinações lineares de L-polinômios ortogonais associadas a medidas de classe $S^3[\omega, \beta, b]$.

Capítulo 3

Combinações lineares de L-polinômios ortogonais

Neste capítulo estudamos polinômios denotados por $B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z)$ que são combinações lineares de L-polinômios ortogonais. Destacamos algumas relações entre estes polinômios, tratamos da localização dos seus zeros e das relações com medidas de classe $S^3[\omega, \beta, b]$. Todos os resultados estudados neste capítulo serão utilizados no Capítulo 4 e desempenham papel importante no que será visto.

3.1 Polinômios $B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z)$

Nesta seção estudamos os polinômios $B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z)$ baseados no trabalho de Bracciali, McCabe e Sri Ranga [6].

Dado $r \in \mathbb{N}^*$, os polinômios reais mônicos $B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z)$ são definidos por uma combinação linear dos polinômios $B_n^{(0)}(z)$, $B_{n-1}^{(0)}(z)$, $\dots$, $B_{n-r}^{(0)}(z)$, dada por

$$B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z) = B_n^{(0)}(z) + \lambda_{n,1}^{(r)} B_{n-1}^{(0)}(z) + \dots + \lambda_{n,r}^{(r)} B_{n-r}^{(0)}(z), \quad (3.1.1)$$



para $n \geq r$, onde $\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)} \in \mathbb{R}$.

Para $n = 1, 2, \dots, r-1, r$,

$$B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z) = B_n^{(0)}(z) + \lambda_{n,1}^{(r)} B_{n-1}^{(0)}(z) + \dots + \lambda_{n,n}^{(r)} B_0^{(0)}(z), \quad (3.1.2)$$

onde $\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,n}^{(r)} \in \mathbb{R}$, $\lambda_{n,n+1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}$ são arbitrários e $B_0(\lambda_{0,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{0,r}^{(r)}; z) = 1$.

Por (2.1.1) e (3.1.1) temos que

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; t) d\psi(t) = 0, \quad r \leq s \leq n-1, \quad n > r, \quad (3.1.3)$$

e deste fato podemos demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 3.1.1. *O polinômio $B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z)$, $n > r$, tem pelo menos $n-r$ zeros distintos de multiplicidade ímpar em (a, b) .*

Demonstração: Para $n > r$, $B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z)$ muda de sinal pelo menos uma vez em (a, b) , pois satisfaz (3.1.3).

Suponhamos que $z_{n,1}^{\lambda^{(r)}}, z_{n,2}^{\lambda^{(r)}}, \dots, z_{n,m}^{\lambda^{(r)}}$, $1 \leq m \leq n$, sejam os zeros distintos de multiplicidade ímpar de $B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z)$ em (a, b) . Consideremos

$$\pi(z) = (z - z_{n,1}^{\lambda^{(r)}})(z - z_{n,2}^{\lambda^{(r)}}) \cdots (z - z_{n,m}^{\lambda^{(r)}}) = \sum_{j=0}^m \tilde{a}_{m,j} z^j.$$

Então, $B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z) = \pi(z)Q(z)$, onde $Q(z)$ é um polinômio de grau $n-m$ que tem apenas zeros de multiplicidade par em (a, b) ou complexos. Logo,

$$\int_a^b t^{-n+r} \pi(t) B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; t) d\psi(t) = \int_a^b \overbrace{t^{-n+r}}^{>0} (\pi(t))^2 Q(t) d\psi(t) \neq 0. \quad (3.1.4)$$

Por outro lado,

$$\int_a^b t^{-n+r} \pi(t) B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; t) d\psi(t) = \sum_{j=0}^m \tilde{a}_{m,j} \overbrace{\int_a^b t^{-n+r+j} B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; t) d\psi(t)}^{=0, \text{ para } 0 \leq j \leq n-1-r}$$



e, então, para que esta integral não se anule devemos ter $j \geq n - r$, isto é, $m \geq n - r$. Portanto, $B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z)$ tem pelo menos $n - r$ zeros distintos de multiplicidade ímpar em (a, b) . Os demais zeros deste polinômio podem ser de multiplicidade par ou ímpar e estar dentro ou fora de (a, b) ou, ainda, ser complexos. Para $n \leq r$ pode ou não haver zeros em (a, b) . ■

Vamos mostrar agora que existem parâmetros $\hat{\lambda}_{n,1}^{(r)}, \dots, \hat{\lambda}_{n,r}^{(r)}$ tais que

$$B_n(\hat{\lambda}_{n,1}^{(r)}, \dots, \hat{\lambda}_{n,r}^{(r)}; z) = B_n^{(r)}(z), \quad n \geq 0$$

(veja Bracciali, McCabe e Sri Ranga [6]).

Observe que

$$\begin{aligned} \int_a^b t^{-n+s} B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; t) d\psi(t) &= \int_a^b t^{-n+s} B_n^{(0)}(t) d\psi(t) + \lambda_{n,1}^{(r)} \int_a^b t^{-n+s} B_{n-1}^{(0)}(t) d\psi(t) \\ &+ \dots + \lambda_{n,r}^{(r)} \int_a^b t^{-n+s} B_{n-r}^{(0)}(t) d\psi(t). \end{aligned}$$

Por (2.1.3),

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; t) d\psi(t) = \rho_{n,-n+s}^{(0)} + \lambda_{n,1}^{(r)} \rho_{n-1,-n+s}^{(0)} + \dots + \lambda_{n,r}^{(r)} \rho_{n-r,-n+s}^{(0)}.$$

Para $n > r$, sabemos que

$$\rho_{n,-n+s}^{(0)} + \lambda_{n,1}^{(r)} \rho_{n-1,-n+s}^{(0)} + \dots + \lambda_{n,r}^{(r)} \rho_{n-r,-n+s}^{(0)} = 0, \quad r \leq s \leq n-1.$$

Suponha ainda que

$$\rho_{n,-n+s}^{(0)} + \lambda_{n,1}^{(r)} \rho_{n-1,-n+s}^{(0)} + \dots + \lambda_{n,r}^{(r)} \rho_{n-r,-n+s}^{(0)} = 0, \quad n \leq s \leq n+r-1.$$

Assim, fazendo $s = n, n+1, \dots, n+r-1$ obtemos o seguinte sistema linear $r \times r$ que, na forma matricial, é dado por

$$\begin{pmatrix} \rho_{n-1,0}^{(0)} & \rho_{n-2,0}^{(0)} & \cdots & \rho_{n-r,0}^{(0)} \\ \rho_{n-1,1}^{(0)} & \rho_{n-2,1}^{(0)} & \cdots & \rho_{n-r,1}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n-1,r-2}^{(0)} & \rho_{n-2,r-2}^{(0)} & \cdots & \rho_{n-r,r-2}^{(0)} \\ \rho_{n-1,r-1}^{(0)} & \rho_{n-2,r-1}^{(0)} & \cdots & \rho_{n-r,r-1}^{(0)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{n,1}^{(r)} \\ \lambda_{n,2}^{(r)} \\ \vdots \\ \lambda_{n,r-1}^{(r)} \\ \lambda_{n,r}^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho_{n,0}^{(0)} \\ -\rho_{n,1}^{(0)} \\ \vdots \\ -\rho_{n,r-2}^{(0)} \\ -\rho_{n,r-1}^{(0)} \end{pmatrix}. \quad (3.1.5)$$



Para $1 \leq n \leq r$, temos que

$$B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,n}^{(r)}; z) = B_n^{(0)}(z) + \lambda_{n,1}^{(r)} B_{n-1}^{(0)}(z) + \dots + \lambda_{n,n}^{(r)} B_0^{(0)}(z)$$

e, então,

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,n}^{(r)}; t) d\psi(t) = \rho_{n,-n+s}^{(0)} + \lambda_{n,1}^{(r)} \rho_{n-1,-n+s}^{(0)} + \dots + \lambda_{n,n}^{(r)} \rho_{0,-n+s}^{(0)}.$$

Suponha agora que

$$\rho_{n,-n+s}^{(0)} + \lambda_{n,1}^{(r)} \rho_{n-1,-n+s}^{(0)} + \dots + \lambda_{n,n}^{(r)} \rho_{0,-n+s}^{(0)} = 0, \quad r \leq s \leq n+r-1.$$

Logo, fazendo $s = r, r+1, \dots, n+r-1$, obtemos o seguinte sistema linear $n \times n$

$$\begin{pmatrix} \rho_{n-1,-n+r}^{(0)} & \rho_{n-2,-n+r}^{(0)} & \cdots & \rho_{0,-n+r}^{(0)} \\ \rho_{n-1,-n+r+1}^{(0)} & \rho_{n-2,-n+r+1}^{(0)} & \cdots & \rho_{0,-n+r+1}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n-1,r-2}^{(0)} & \rho_{n-2,r-2}^{(0)} & \cdots & \rho_{0,r-2}^{(0)} \\ \rho_{n-1,r-1}^{(0)} & \rho_{n-2,r-1}^{(0)} & \cdots & \rho_{0,r-1}^{(0)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{n,1}^{(r)} \\ \lambda_{n,2}^{(r)} \\ \vdots \\ \lambda_{n,n-1}^{(r)} \\ \lambda_{n,n}^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho_{n,-n+r}^{(0)} \\ -\rho_{n,-n+r+1}^{(0)} \\ \vdots \\ -\rho_{n,r-2}^{(0)} \\ -\rho_{n,r-1}^{(0)} \end{pmatrix}. \quad (3.1.6)$$

Sejam $\hat{\lambda}_{n,1}^{(r)}, \dots, \hat{\lambda}_{n,r}^{(r)}$, para $n > r$, a solução de (3.1.5) e $\hat{\lambda}_{n,1}^{(r)}, \dots, \hat{\lambda}_{n,n}^{(r)}$, quando $1 \leq n \leq r$, a solução de (3.1.6). Então,

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n(\hat{\lambda}_{n,1}^{(r)}, \dots, \hat{\lambda}_{n,r}^{(r)}; t) d\psi(t) = 0, \quad r \leq s \leq n+r-1, \quad n \geq 1. \quad (3.1.7)$$

Por (2.1.1), o único polinômio mônico de grau n que satisfaz às n condições de (3.1.7) é $B_n^{(r)}(z)$, pois

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n^{(r)}(t) d\psi(t) = 0, \quad r \leq s \leq n+r-1.$$

Logo,

$$B_n(\hat{\lambda}_{n,1}^{(r)}, \dots, \hat{\lambda}_{n,r}^{(r)}; z) = B_n^{(r)}(z), \quad n \geq 0. \quad (3.1.8)$$

Como encontrar o valor dos parâmetros $\hat{\lambda}_{n,i}^{(r)}$, $i = 1, \dots, r$, não é viável através do sistema linear pois envolve o cálculo de integrais, daremos uma outra forma de obtê-los.



Por (2.1.22) temos

$$B_n^{(r)}(z) = B_n^{(r-1)}(z) - \alpha_{n+1}^{(r-1)} B_{n-1}^{(r-1)}(z), \quad (3.1.9)$$

$$B_n^{(r-1)}(z) = B_n^{(r-2)}(z) - \alpha_{n+1}^{(r-2)} B_{n-1}^{(r-2)}(z) \quad (3.1.10)$$

e

$$B_{n-1}^{(r-1)}(z) = B_{n-1}^{(r-2)}(z) - \alpha_n^{(r-2)} B_{n-2}^{(r-2)}(z). \quad (3.1.11)$$

Substituindo (3.1.10) e (3.1.11) em (3.1.9) obtemos

$$\begin{aligned} B_n^{(r)}(z) &= B_n^{(r-2)}(z) - \left(\alpha_{n+1}^{(r-1)} + \alpha_{n+1}^{(r-2)} \right) B_{n-1}^{(r-2)}(z) \\ &\quad + \alpha_{n+1}^{(r-1)} \alpha_n^{(r-2)} B_{n-2}^{(r-2)}(z). \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Calculando as expressões para $B_n^{(r-2)}(z)$, $B_{n-1}^{(r-2)}(z)$ e $B_{n-2}^{(r-2)}(z)$ através da relação (3.1.9) e substituindo em (3.1.12), chegamos à relação

$$\begin{aligned} B_n^{(r)}(z) &= B_n^{(r-3)}(z) - \left(\alpha_{n+1}^{(r-1)} + \alpha_{n+1}^{(r-2)} + \alpha_{n+1}^{(r-3)} \right) B_{n-1}^{(r-3)}(z) \\ &\quad + \left(\alpha_{n+1}^{(r-1)} \alpha_n^{(r-2)} + \alpha_{n+1}^{(r-1)} \alpha_n^{(r-3)} + \alpha_{n+1}^{(r-2)} \alpha_n^{(r-3)} \right) B_{n-2}^{(r-3)}(z) \\ &\quad - \alpha_{n+1}^{(r-1)} \alpha_n^{(r-2)} \alpha_{n-1}^{(r-3)} B_{n-3}^{(r-3)}(z). \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Substituindo novamente as expressões de $B_n^{(r-3)}(z)$, $B_{n-1}^{(r-3)}(z)$, $B_{n-2}^{(r-3)}(z)$ e $B_{n-3}^{(r-3)}(z)$ dados através de (3.1.9) temos

$$\begin{aligned} B_n^{(r)}(z) &= B_n^{(r-4)}(z) - \left(\alpha_{n+1}^{(r-1)} + \alpha_{n+1}^{(r-2)} + \alpha_{n+1}^{(r-3)} + \alpha_{n+1}^{(r-4)} \right) B_{n-1}^{(r-4)}(z) \\ &\quad + \left(\alpha_{n+1}^{(r-1)} \alpha_n^{(r-2)} + \alpha_{n+1}^{(r-1)} \alpha_n^{(r-3)} + \alpha_{n+1}^{(r-1)} \alpha_n^{(r-4)} + \alpha_{n+1}^{(r-2)} \alpha_n^{(r-3)} \right. \\ &\quad \left. + \alpha_{n+1}^{(r-2)} \alpha_n^{(r-4)} + \alpha_{n+1}^{(r-3)} \alpha_n^{(r-4)} \right) B_{n-2}^{(r-4)}(z) \\ &\quad - \left(\alpha_{n+1}^{(r-1)} \alpha_n^{(r-2)} \alpha_{n-1}^{(r-3)} + \alpha_{n+1}^{(r-1)} \alpha_n^{(r-2)} \alpha_{n-1}^{(r-4)} + \alpha_{n+1}^{(r-1)} \alpha_n^{(r-3)} \alpha_{n-1}^{(r-4)} \right. \\ &\quad \left. + \alpha_{n+1}^{(r-2)} \alpha_n^{(r-3)} \alpha_{n-1}^{(r-4)} \right) B_{n-3}^{(r-4)}(z) + \alpha_{n+1}^{(r-1)} \alpha_n^{(r-2)} \alpha_{n-1}^{(r-3)} \alpha_{n-2}^{(r-4)} B_{n-4}^{(r-4)}(z). \end{aligned}$$

Continuando este raciocínio obtemos

$$\begin{aligned} B_n^{(r)}(z) &= B_n^{(0)}(z) - \left(\alpha_{n+1}^{(r-1)} + \alpha_{n+1}^{(r-2)} + \dots + \alpha_{n+1}^{(1)} + \alpha_{n+1}^{(0)} \right) B_{n-1}^{(0)}(z) \\ &\quad + \left(\alpha_{n+1}^{(r-1)} \alpha_n^{(r-2)} + \alpha_{n+1}^{(r-1)} \alpha_n^{(r-3)} + \dots + \alpha_{n+1}^{(2)} \alpha_n^{(0)} + \alpha_{n+1}^{(1)} \alpha_n^{(0)} \right) B_{n-2}^{(0)}(z) \\ &\quad - \left(\alpha_{n+1}^{(r-1)} \alpha_n^{(r-2)} \alpha_{n-1}^{(r-3)} + \alpha_{n+1}^{(r-1)} \alpha_n^{(r-2)} \alpha_{n-1}^{(r-4)} + \dots + \alpha_{n+1}^{(2)} \alpha_n^{(1)} \alpha_{n-1}^{(0)} \right) B_{n-3}^{(0)}(z) \\ &\quad + \dots + (-1)^r \alpha_{n+1}^{(r-1)} \alpha_n^{(r-2)} \alpha_{n-1}^{(r-3)} \dots \alpha_{n-r+3}^{(1)} \alpha_{n-r+2}^{(0)} B_{n-r}^{(0)}(z). \end{aligned}$$

Como $B_n(\hat{\lambda}_{n,1}^{(r)}, \dots, \hat{\lambda}_{n,r}^{(r)}; z) = B_n^{(r)}(z)$, $n \geq 0$, temos que os parâmetros $\hat{\lambda}_{n,i}^{(r)}$, $i = 1, \dots, r$, são dados por

$$\hat{\lambda}_{n,i}^{(r)} = (-1)^i \sum_{1}^p \prod_{k=1}^i \alpha_{n+2-k}^{(m_k)}, \quad (3.1.14)$$

onde o somatório é sobre as $p = \binom{r}{i}$ maneiras de se escolher i números inteiros $m_1, m_2, \dots, m_i$ que satisfaçam $0 \leq m_i < m_{i-1} < \dots < m_2 < m_1 \leq r-1$.

3.2 Polinômios $B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z)$ associados a medidas de classe $S^3[\omega, \beta, b]$

Antes de relacionarmos os polinômios $B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z)$ com medidas de classe $S^3[\omega, \beta, b]$ introduziremos o seguinte resultado.

Lema 3.2.1. *Seja $r \geq 1$ e $Q_n(z)$ um polinômio mônico de grau $n > r$ tal que*

$$\int_a^b t^{-n+s} Q_n(t) d\psi(t) = 0, \quad r \leq s \leq n-1.$$

Então, existem valores reais $\eta_{n,1}^{(r)}, \dots, \eta_{n,r}^{(r)}$ tais que

$$Q_n(z) = B_n(\eta_{n,1}^{(r)}, \dots, \eta_{n,r}^{(r)}; z).$$

Demonstração: Como $Q_n(z) \in \mathcal{P}_n$, $n > r$, vamos escrevê-lo como uma combinação dos polinômios $B_i^{(0)}(z)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Então,

$$Q_n(z) = \sum_{i=0}^n c_i B_i^{(0)}(z), \quad \text{onde } c_n = 1.$$

Deste modo,

$$\int_a^b t^{-n+s} Q_n(t) d\psi(t) = \sum_{i=0}^n c_i \int_a^b t^{-n+s} B_i^{(0)}(t) d\psi(t) = 0, \quad r \leq s \leq n-1.$$

Fazendo $s = r, r+1, \dots, n-1$, obtemos, respectivamente,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^n c_i \int_a^b t^{-n+r} B_i^{(0)}(t) d\psi(t) = 0 \\ \sum_{i=0}^n c_i \int_a^b t^{-n+r+1} B_i^{(0)}(t) d\psi(t) = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^n c_i \int_a^b t^{-2} B_i^{(0)}(t) d\psi(t) = 0 \\ \sum_{i=0}^n c_i \int_a^b t^{-1} B_i^{(0)}(t) d\psi(t) = 0 \end{array} \right.$$

Por (2.1.1) este sistema linear, de ordem $(n-r)$, terá a forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^{n-r-1} c_i \int_a^b t^{-n+r} B_i^{(0)}(t) d\psi(t) = 0 \\ \sum_{i=0}^{n-r-2} c_i \int_a^b t^{-n+r+1} B_i^{(0)}(t) d\psi(t) = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^1 c_i \int_a^b t^{-2} B_i^{(0)}(t) d\psi(t) = 0 \\ \sum_{i=0}^0 c_i \int_a^b t^{-1} B_i^{(0)}(t) d\psi(t) = 0 \end{array} \right.$$



Escrevendo-o na forma matricial e usando (2.1.8) temos

$$\begin{pmatrix} \sigma_{0,-n+r+1}^{(0)} & \sigma_{1,-n+r+2}^{(0)} & \cdots & \sigma_{n-r-2,-1}^{(0)} & \sigma_{n-r-1,0}^{(0)} \\ \sigma_{0,-n+r+2}^{(0)} & \sigma_{1,-n+r+3}^{(0)} & \cdots & \sigma_{n-r-2,0}^{(0)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{0,-1}^{(0)} & \sigma_{1,0}^{(0)} & \cdots & 0 & 0 \\ \sigma_{0,0}^{(0)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r-2} \\ c_{n-r-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\sigma_{n,r}^{(r)} \neq 0$, o determinante desta matriz é diferente de zero. Conseqüentemente, a única solução para o sistema é $c_0 = c_1 = \dots = c_{n-r-2} = c_{n-r-1} = 0$ para $n > r$. Portanto,

$$Q_n(z) = \sum_{i=n-r}^n c_i B_i^{(0)}(z), \quad \text{onde } c_n = 1.$$

Fazendo $c_{n-i} = \eta_{n,i}^{(r)}$, $i = 1, \dots, r$, temos $Q_n(z) = B_n(\eta_{n,1}^{(r)}, \dots, \eta_{n,r}^{(r)}; z)$. ■

Agora, veremos um resultado importante quando os polinômios $B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z)$ estão associados a medidas de classe $S^3[\omega, \beta, b]$.

Teorema 3.2.1. *Sejam $r \geq 1$ e $\psi(t)$ uma medida de classe $S^3[\omega, \beta, b]$ com $\omega = (1-r)/2$. Então, se $n > r$, para quaisquer parâmetros $\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)} \in \mathbb{R}$, tais que $B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; 0) \neq 0$, existem parâmetros correspondentes $\eta_{n,1}^{(r)}, \dots, \eta_{n,r}^{(r)} \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\frac{z^n B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; \beta^2/z)}{B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; 0)} = B_n(\eta_{n,1}^{(r)}, \dots, \eta_{n,r}^{(r)}; z). \quad (3.2.1)$$

Demonstração: Para $n > r$ sabemos que

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; t) d\psi(t) = 0, \quad r \leq s \leq n-1.$$

Fazendo a mudança de variável $t = \beta^2/t$ e usando (2.2.1) obtemos que

$$\int_a^b t^{n-s-2\omega} B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; \beta^2/t) d\psi(t) = 0, \quad r \leq s \leq n-1.$$

Dividindo por $B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; 0)$

$$\int_a^b t^{-s-2\omega} \frac{t^n B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; \beta^2/t)}{B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; 0)} d\psi(t) = 0, \quad r \leq s \leq n-1.$$

Mas, $-2\omega = r-1$. Então,

$$\int_a^b t^{-s+r-1} \frac{t^n B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; \beta^2/t)}{B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; 0)} d\psi(t) = 0, \quad r \leq s \leq n-1.$$

Como $-s+r-1 = -n+s$ para $r \leq s \leq n-1$, obtemos

$$\int_a^b t^{-n+s} \frac{t^n B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; \beta^2/t)}{B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; 0)} d\psi(t) = 0, \quad r \leq s \leq n-1.$$

Portanto, pelo Lema 3.2.1, existem parâmetros $\eta_{n,1}^{(r)}, \dots, \eta_{n,r}^{(r)} \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{z^n B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; \beta^2/z)}{B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; 0)} = B_n(\eta_{n,1}^{(r)}, \dots, \eta_{n,r}^{(r)}; z).$$

■

Nosso objetivo é, dado $r \geq 1$, encontrar parâmetros $\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)} \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{z^n B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; \beta^2/z)}{B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; 0)} = B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z), \quad n > r,$$

ou seja, tais que o polinômio $B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z)$ seja β -inversível. Além disso, escolher parâmetros $\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,n}^{(r)} \in \mathbb{R}$, para $n = 1, \dots, r$, tais que

$$\frac{z^n B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; \beta^2/z)}{B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; 0)} = B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z).$$

Este estudo será feito no Capítulo 4.

Sejam $z_{n,1}^{\lambda^{(r)}}, z_{n,2}^{\lambda^{(r)}}, \dots, z_{n,n}^{\lambda^{(r)}}$, os zeros do polinômio $B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z)$ em ordem crescente. Quando $B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z)$ é um polinômio β -inversível, os zeros satisfazem

$$z_{n,i}^{\lambda^{(r)}} = \frac{\beta^2}{z_{n,n+1-i}^{\lambda^{(r)}}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.2.2)$$

e valem as mesmas propriedades sobre os zeros estabelecidas na seção 2.4.



Capítulo 4

Polinômios $B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z)$ e medidas de classe $S^3[\omega, \beta, b]$

Neste capítulo são feitos estudos detalhados dos polinômios $B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z)$ associados a medidas de classe $S^3[\omega, \beta, b]$, onde $\omega = (1-r)/2$, para $r = 1$, $r = 2$ e $r = 3$. O principal objetivo é determinar valores para $\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}$ para os quais o polinômio seja β -invertível e, além disso, obter informações sobre a localização de seus zeros e relações com outras medidas de classe $S^3[\omega, \beta, b]$.

4.1 Polinômios $B_n(\lambda_{n,1}^{(1)}; z)$ e medidas de classe $S^3[0, \beta, b]$

Como já dissemos, os polinômios $B_n(\lambda_{n,1}^{(1)}; z)$ foram estudados por Sri Ranga, Andrade e McCabe em [22] e são definidos por

$$B_n(\lambda_{n,1}^{(1)}; z) = B_n^{(0)}(z) + \lambda_{n,1}^{(1)} B_{n-1}^{(0)}(z), \quad n \geq 1, \quad (4.1.1)$$

onde $\lambda_{n,1}^{(1)} \in \mathbb{R}$ e $B_0(\lambda_{0,1}^{(1)}; z) = 1$.



Lembremos que esses polinômios mônicos, por (3.1.3), satisfazem

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n(\lambda_{n,1}^{(1)}; t) d\psi(t) = 0, \quad 1 \leq s \leq n-1, \quad n \geq 2, \quad (4.1.2)$$

e, de acordo com o Teorema 3.1.1, têm pelo menos $n-1$ zeros em (a, b) .

De acordo com o Teorema 3.2.1, se $\psi(t)$ é de classe $S^3[0, \beta, b]$ existem valores para $\eta_{n,1}^{(1)} \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{z^n B_n(\lambda_{n,1}^{(1)}; \beta^2/z)}{B_n(\lambda_{n,1}^{(1)}; 0)} = B_n(\eta_{n,1}^{(1)}; z), \quad n \geq 2.$$

Vamos, nesta seção, supor que a medida $\psi(t)$ é de classe $S^3[0, \beta, b]$, ou seja, satisfaz

$$d\psi(t) = -d\psi(\beta^2/t), \quad t \in (a, b),$$

e, então, pelo Teorema 2.3.1

$$\frac{z^n B_n^{(0)}(\beta^2/z)}{B_n^{(0)}(0)} = B_n^{(1)}(z), \quad n \geq 0. \quad (4.1.3)$$

Em [22] os autores fornecem valores para o parâmetro $\lambda_{n,1}^{(1)}$ tais que $B_n(\lambda_{n,1}^{(1)}; z)$ é β -inversível. Apresentamos a seguir um esboço de como esses parâmetros foram obtidos.

Primeiramente, fazendo-se a mudança de variável $z = \beta^2/z$ em (4.1.1) e multiplicando-se por z^n obtemos

$$z^n B_n(\lambda_{n,1}^{(1)}; \beta^2/z) = z^n B_n^{(0)}(\beta^2/z) + \lambda_{n,1}^{(1)} z z^{n-1} B_{n-1}^{(0)}(\beta^2/z). \quad (4.1.4)$$

Por (3.1.14) temos que $B_n(-\alpha_{n+1}^{(0)}; z) = B_n^{(1)}(z)$, $n \geq 0$. Então, de (4.1.3),

$$\frac{z^n B_n^{(0)}(\beta^2/z)}{B_n^{(0)}(0)} = B_n^{(0)}(z) - \alpha_{n+1}^{(0)} B_{n-1}^{(0)}(z).$$

Usando a relação de recorrência para os polinômios $B_{n+1}^{(0)}(z)$, obtemos

$$\frac{z^n B_n^{(0)}(\beta^2/z)}{B_n^{(0)}(0)} = \frac{B_{n+1}^{(0)}(z) + \beta_{n+1}^{(0)} B_n^{(0)}(z)}{z} \quad \text{e} \quad B_n^{(0)}(0) = -\beta_n^{(0)} B_{n-1}^{(0)}(0).$$

Substituindo esses resultados em (4.1.4), temos que

$$\begin{aligned} z^n B_n(\lambda_{n,1}^{(1)}; \beta^2/z) &= \left(-\beta_n^{(0)} B_{n-1}^{(0)}(0) + \lambda_{n,1}^{(1)} B_{n-1}^{(0)}(0) \right) B_n^{(0)}(z) \\ &\quad + \left(\beta_n^{(0)} \alpha_{n+1}^{(0)} B_{n-1}^{(0)}(0) + \beta_n^{(0)} \lambda_{n,1}^{(1)} B_{n-1}^{(0)}(0) \right) B_{n-1}^{(0)}(z). \end{aligned}$$

Observe que se $\lambda_{n,1}^{(1)} \neq \beta_n^{(0)}$, então

$$B_n(\lambda_{n,1}^{(1)}; 0) = \left(-\beta_n^{(0)} + \lambda_{n,1}^{(1)} \right) B_{n-1}^{(0)}(0) \neq 0.$$

Dividindo $z^n B_n(\lambda_{n,1}^{(1)}; \beta^2/z)$ por $B_n(\lambda_{n,1}^{(1)}; 0)$ e usando o Teorema 3.2.1 chegamos que

$$\frac{z^n B_n(\lambda_{n,1}^{(1)}; \beta^2/z)}{B_n(\lambda_{n,1}^{(1)}; 0)} = B_n^{(0)}(z) + \eta_{n,1}^{(1)} B_{n-1}^{(0)}(z),$$

onde

$$\eta_{n,1}^{(1)} = \frac{\beta_n^{(0)} \left(\alpha_{n+1}^{(0)} + \lambda_{n,1}^{(1)} \right)}{-\beta_n^{(0)} + \lambda_{n,1}^{(1)}}, \quad n \geq 1.$$

Como estamos interessados em parâmetros tais que $\eta_{n,1}^{(1)} = \lambda_{n,1}^{(1)}$, devemos encontrar $\lambda_{n,1}^{(1)}$ tais que

$$\lambda_{n,1}^{(1)} = \frac{\beta_n^{(0)} \left(\alpha_{n+1}^{(0)} + \lambda_{n,1}^{(1)} \right)}{-\beta_n^{(0)} + \lambda_{n,1}^{(1)}}. \quad (4.1.5)$$

Resolvendo (4.1.5) obtemos

$$-\beta_n^{(0)} + \lambda_{n,1}^{(1)} = \pm \sqrt{\beta_n^{(0)} \gamma_n^{(0)}}, \quad (4.1.6)$$

onde $\gamma_n^{(0)} = \beta_n^{(0)} + \alpha_{n+1}^{(0)}$. Assim, os valores do parâmetro $\lambda_{n,1}^{(1)}$ tais que o polinômio $B_n(\lambda_{n,1}^{(1)}; z)$ é β -inversível são

$$\lambda_{n,1}^{(1)} = \beta_n^{(0)} \pm \sqrt{\beta_n^{(0)} \gamma_n^{(0)}}.$$

Nesta seção utilizaremos a seguinte notação:

$\lambda_{n,1}^{(1)+}$ para a escolha $\lambda_{n,1}^{(1)+} = \beta_n^{(0)} + \sqrt{\beta_n^{(0)} \gamma_n^{(0)}}$ em (4.1.6),

$\lambda_{n,1}^{(1)-}$ para a escolha $\lambda_{n,1}^{(1)-} = \beta_n^{(0)} - \sqrt{\beta_n^{(0)} \gamma_n^{(0)}}$ em (4.1.6) e

$\lambda_{n,1}^{(1)\pm}$ quando nos referimos a ambas as escolhas.



Vamos agora analisar o comportamento de $B_n(\lambda_{n,1}^{(1)\pm}; 0)$ com o objetivo de obtermos informações sobre os zeros. Esses resultados também foram estudados em [22].

Pela relação de recorrência para os polinômios $B_n^{(0)}(z)$ sabemos que $B_n^{(0)}(0) = (-1)^n \beta_n^{(0)} \beta_{n-1}^{(0)} \cdots \beta_1^{(0)}$, $n \geq 1$. Logo,

$$B_n(\lambda_{n,1}^{(1)\pm}; 0) = (-1)^{n+1} (-\beta_n^{(0)} + \lambda_{n,1}^{(1)\pm}) \beta_{n-1}^{(0)} \beta_{n-2}^{(0)} \cdots \beta_1^{(0)}, \quad n \geq 1. \quad (4.1.7)$$

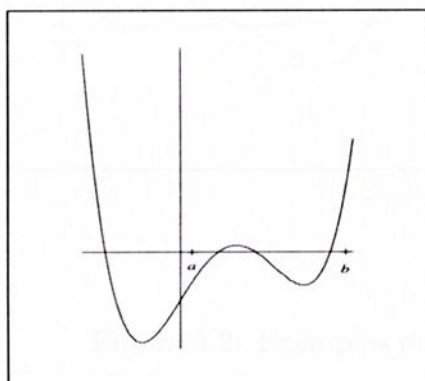
4.1.1 Localização dos zeros de $B_n(\lambda_{n,1}^{(1)\pm}; z)$

Considerando a escolha $-\beta_n^{(0)} + \lambda_{n,1}^{(1)+} = \sqrt{\beta_n^{(0)} \gamma_n^{(0)}}$ em (4.1.6), de (4.1.7) obtemos que

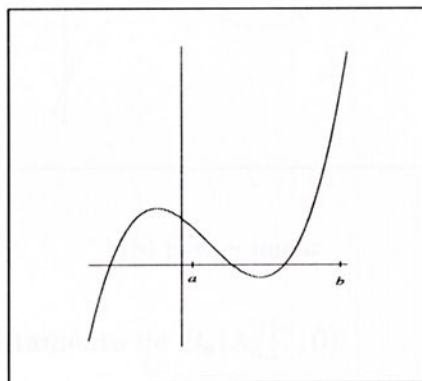
$$B_n(\lambda_{n,1}^{(1)+}; 0) = (-1)^{n+1} \overbrace{\sqrt{\beta_n^{(0)} \gamma_n^{(0)}}}^{> 0} \beta_{n-1}^{(0)} \beta_{n-2}^{(0)} \cdots \beta_1^{(0)}, \quad n \geq 1.$$

e, então,

$$\text{senal} \left(B_n(\lambda_{n,1}^{(1)+}; 0) \right) = (-1)^{n+1}, \quad n \geq 1. \quad (4.1.8)$$



(a) para n par



(b) para n ímpar

Figura 4.1: Exemplos do comportamento de $B_n(\lambda_{n,1}^{(1)+}; 0)$

Como $B_n(\lambda_{n,1}^{(1)+}; z)$ é mônico e tem pelo menos $n - 1$ zeros em (a, b) , a relação (4.1.8) implica que $B_n(\lambda_{n,1}^{(1)+}; z)$ tem um zero negativo (veja Figura 4.1).

De acordo com a propriedade sobre os zeros de $B_n(\lambda_{n,1}^{(1)+}; z)$ onde

$$z_{n,i}^{\lambda^{(r)}} = \frac{\beta^2}{z_{n,n+1-i}^{\lambda^{(r)}}}, \quad i = 1, \dots, n,$$

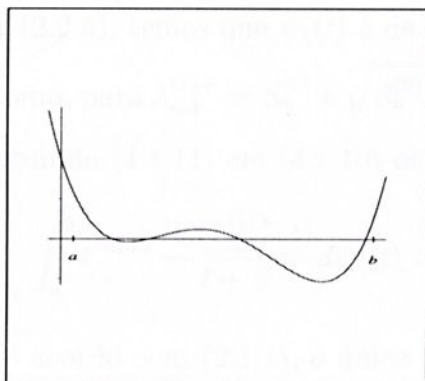
o zero negativo deste polinômio é $-\beta$.

Para a segunda possibilidade de escolha do parâmetro $\lambda_{n,1}^{(1)-}$ para o qual o polinômio é β -inversível, $-\beta_n^{(0)} + \lambda_{n,1}^{(1)-} = -\sqrt{\beta_n^{(0)}\gamma_n^{(0)}}$, temos que

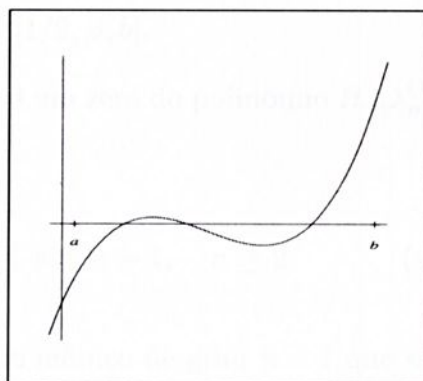
$$B_n(\lambda_{n,1}^{(1)-}; 0) = (-1)^n \overbrace{\sqrt{\beta_n^{(0)}\gamma_n^{(0)}} \beta_{n-1}^{(0)} \beta_{n-2}^{(0)} \cdots \beta_1^{(0)}}^{> 0}, \quad n \geq 1,$$

e

$$\text{senal} \left(B_n(\lambda_{n,1}^{(1)-}; 0) \right) = (-1)^n, \quad n \geq 1. \quad (4.1.9)$$



(a) para n par



(b) para n ímpar

Figura 4.2: Exemplos do comportamento de $B_n(\lambda_{n,1}^{(1)-}; 0)$

Pelo fato de $B_n(\lambda_{n,1}^{(1)-}; z)$ ser mônico e ter pelo menos $n - 1$ zeros em (a, b) , (4.1.9) implica que $B_n(\lambda_{n,1}^{(1)-}; z)$ tem todos os zeros positivos (veja Figura 4.2) e, pela propriedade dos zeros, todos são reais, distintos e estão no intervalo (a, b) .

4.1.2 $B_n(\lambda_{n,1}^{(1)\pm}; z)$ e medidas de classe $S^3[1/2, \beta, b]$

Estudaremos aqui relações existentes entre $B_n(\lambda_{n,1}^{(1)\pm}; z)$ e L-polinômios ortogonais associados a medidas de classe $S^3[1/2, \beta, b]$, baseadas no que foi introduzido por Sri Ranga em [23].

Lembremos que $\psi(t)$ é uma medida forte de Stieltjes de classe $S^3[0, \beta, b]$ e os polinômios $B_n(\lambda_{n,1}^{(1)\pm}; z)$ satisfazem (4.1.2), ou seja,

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n(\lambda_{n,1}^{(1)\pm}; t) d\psi(t) = 0, \quad 1 \leq s \leq n-1, \quad n \geq 2. \quad (4.1.10)$$

Consideremos a medida forte de Stieltjes $\psi_1(t)$ definida por

$$d\psi_1(t) = (t + \beta) d\psi(t), \quad t \in (a, b), \quad (4.1.11)$$

e, por (2.2.5), temos que $\psi_1(t)$ é de classe $S^3[1/2, \beta, b]$.

Como, para $\lambda_{n,1}^{(1)+} = \beta_n^{(0)} + \sqrt{\beta_n^{(0)} \gamma_n^{(0)}}$, $-\beta$ é um zero do polinômio $B_n(\lambda_{n,1}^{(1)+}; z)$, substituindo (4.1.11) em (4.1.10) obtemos

$$\int_a^b t^{-n+s} \frac{B_n(\lambda_{n,1}^{(1)+}; t)}{t + \beta} d\psi_1(t) = 0, \quad 1 \leq s \leq n-1, \quad n \geq 2. \quad (4.1.12)$$

De acordo com (2.1.1), o único polinômio mônico de grau $n-1$ que satisfaz às $n-1$ condições em (4.1.12) é $B_{n-1}^{(0)\psi_1}(z)$, pois

$$\int_a^b t^{-n+s} B_{n-1}^{(0)\psi_1}(t) d\psi_1(t) = 0, \quad 1 \leq s \leq n-1, \quad n \geq 2.$$

Assim,

$$B_n(\lambda_{n,1}^{(1)+}; z) = (z + \beta) B_{n-1}^{(0)\psi_1}(z), \quad n \geq 1.$$

Agora, vamos considerar a escolha $\lambda_{n,1}^{(1)-} = \beta_n^{(0)} - \sqrt{\beta_n^{(0)} \gamma_n^{(0)}}$. Seja $\psi_2(t)$ a medida forte de Stieltjes definida por

$$d\psi_2(t) = \frac{t}{t + \beta} d\psi(t), \quad t \in (a, b),$$



e, por (2.2.4) e (2.2.5), $\psi_2(t)$ é de classe $S^3[1/2, \beta, b]$.

De (2.1.1) seja $B_n^{(0)\psi_2}(z)$ tal que

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n^{(0)\psi_2}(t) d\psi_2(t) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1, \quad (4.1.13)$$

então

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n^{(0)\psi_2}(t) \frac{\beta}{t} d\psi_2(t) = 0, \quad 1 \leq s \leq n, \quad n \geq 1. \quad (4.1.14)$$

Somando-se (4.1.13) e (4.1.14) temos que

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n^{(0)\psi_2}(t) d\psi(t) = 0, \quad 1 \leq s \leq n-1. \quad (4.1.15)$$

Assim, $B_n^{(0)\psi_2}(z)$ e $B_n(\lambda_{n,1}^{(1)-}; z)$ satisfazem as mesmas $n-1$ condições com relação a $\psi(t)$ (veja (4.1.10)) e, como ambos os polinômios são mônicos e β -inversíveis, então

$$B_n(\lambda_{n,1}^{(1)-}; z) = B_n^{(0)\psi_2}(z), \quad n \geq 1.$$

Como $B_0(\lambda_{0,1}^{(1)}; z) = 1$ então $B_n(\lambda_{n,1}^{(1)-}; z) = B_n^{(0)\psi_2}(z)$, $n \geq 0$.

4.2 Polinômios $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)}, \lambda_{n,2}^{(2)}; z)$ e medidas de classe $S^3[-1/2, \beta, b]$

Os polinômios mônicos $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)}, \lambda_{n,2}^{(2)}; z)$ foram investigados por Bracciali em [5] e, como dependem de 2 parâmetros, sabemos que

$$B_n(\lambda_{n,1}^{(2)}, \lambda_{n,2}^{(2)}; z) = B_n^{(0)}(z) + \lambda_{n,1}^{(2)} B_{n-1}^{(0)}(z) + \lambda_{n,2}^{(2)} B_{n-2}^{(0)}(z), \quad n \geq 2, \quad (4.2.1)$$

onde $\lambda_{n,1}^{(2)}, \lambda_{n,2}^{(2)} \in \mathbb{R}$, $B_0(\lambda_{0,1}^{(2)}, \lambda_{0,2}^{(2)}; z) = 1$ e $B_1(\lambda_{1,1}^{(2)}, \lambda_{1,2}^{(2)}; z) = z - \beta_1^{(0)} + \lambda_{1,1}^{(2)}$.

Pelo Teorema 3.1.1 sabemos que os zeros desses polinômios mônicos podem ser reais ou complexos sendo que pelo menos $n-2$ são reais, distintos e estão no intervalo (a, b) .



Os polinômios $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)}, \lambda_{n,2}^{(2)}; z)$ também satisfazem (3.1.3), pois

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n(\lambda_{n,1}^{(2)}, \lambda_{n,2}^{(2)}; t) d\psi(t) = 0, \quad 2 \leq s \leq n-1, \quad n \geq 3. \quad (4.2.2)$$

Nesta seção, consideramos medidas $\psi(t)$ de classe $S^3[-1/2, \beta, b]$, ou seja, que satisfazem

$$\sqrt{t} d\psi(t) = -\sqrt{\beta^2/t} d\psi(\beta^2/t). \quad (4.2.3)$$

Logo, pelo Teorema 3.2.1 sabemos que se $\psi(t)$ é de classe $S^3[-1/2, \beta, b]$, então existem valores $\eta_{n,1}^{(2)}, \eta_{n,2}^{(2)} \in \mathbb{R}$, $n \geq 3$, tais que

$$\frac{z^n B_n(\lambda_{n,1}^{(2)}, \lambda_{n,2}^{(2)}; \beta^2/z)}{B_n(\lambda_{n,1}^{(2)}, \lambda_{n,2}^{(2)}; 0)} = B_n(\eta_{n,1}^{(2)}, \eta_{n,2}^{(2)}; z).$$

Além disso, pelo Teorema 2.3.1, para $\psi(t)$ de classe $S^3[-1/2, \beta, b]$ temos que

$$\frac{z^n B_n^{(0)}(\beta^2/z)}{B_n^{(0)}(0)} = B_n^{(2)}(z) \quad \text{e} \quad \frac{z^n B_n^{(1)}(\beta^2/z)}{B_n^{(1)}(0)} = B_n^{(1)}(z), \quad n \geq 1, \quad (4.2.4)$$

e, de (2.3.3), $\beta_n^{(1)} = \beta$, $n \geq 1$.

O resultado a seguir também foi introduzido por Bracciali em [5] e fornece valores para os parâmetros $\lambda_{n,1}^{(2)}$ e $\lambda_{n,2}^{(2)}$ que tornam o polinômio $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)}, \lambda_{n,2}^{(2)}; z)$ β -inversível.

Teorema 4.2.1. *Os valores dos parâmetros $\lambda_{n,1}^{(2)}, \lambda_{n,2}^{(2)}$ que tornam $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)}, \lambda_{n,2}^{(2)}; z)$ β -inversível, isto é,*

$$\frac{z^n B_n(\lambda_{n,1}^{(2)}, \lambda_{n,2}^{(2)}; \beta^2/z)}{B_n(\lambda_{n,1}^{(2)}, \lambda_{n,2}^{(2)}; 0)} = B_n(\lambda_{n,1}^{(2)}, \lambda_{n,2}^{(2)}; z), \quad n \geq 2, \quad (4.2.5)$$

são

$$\lambda_{n,1}^{(2)} = \beta_n^{(0)} + \beta \quad \text{e} \quad \lambda_{n,2}^{(2)} = -\beta \alpha_n^{(0)}, \quad n \geq 2,$$

ou

$$\lambda_{n,1}^{(2)} = \frac{\lambda_{n,2}^{(2)}}{\beta_{n-1}^{(0)}} - \alpha_{n+1}^{(0)} \quad \text{e} \quad \lambda_{n,2}^{(2)} \in \mathbb{R}, \quad n \geq 2.$$

Demonstração: Fazendo-se a mudança de variável $z = \beta^2/z$ em (4.2.1), multiplicando-se por z^n e substituindo-se (4.2.4), obtemos

$$\begin{aligned} z^n B_n(\lambda_{n,1}^{(2)}, \lambda_{n,2}^{(2)}; \beta^2/z) &= B_n^{(0)}(0) B_n^{(2)}(z) + \lambda_{n,1}^{(2)} B_{n-1}^{(0)}(0) z B_{n-1}^{(2)}(z) \\ &\quad + \lambda_{n,2}^{(2)} B_{n-2}^{(0)}(0) z^2 B_{n-2}^{(2)}(z). \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Por (3.1.14), temos que

$$B_n(-\alpha_{n+1}^{(0)} - \alpha_{n+1}^{(1)}, \alpha_n^{(0)} \alpha_{n+1}^{(1)}; z) = B_n^{(2)}(z), \quad n \geq 0. \quad (4.2.7)$$

Das relações (2.1.22) e (2.1.23), sabemos que

$$\begin{aligned} B_n^{(1)}(z) &= B_n^{(0)}(z) - \alpha_{n+1}^{(0)} B_{n-1}^{(0)}(z) \quad \text{e} \\ z B_{n-1}^{(2)}(z) &= B_n^{(1)}(z) + \beta_n^{(1)} B_{n-1}^{(1)}(z). \end{aligned}$$

Substituindo-se $B_n^{(1)}(z)$ e $B_{n-1}^{(1)}(z)$ em $z B_{n-1}^{(2)}(z)$, encontramos que

$$z B_{n-1}^{(2)}(z) = B_n^{(0)}(z) + \left(\beta_n^{(1)} - \alpha_{n+1}^{(0)} \right) B_{n-1}^{(0)}(z) - \alpha_n^{(0)} \beta_n^{(1)} B_{n-2}^{(0)}(z). \quad (4.2.8)$$

De (2.1.23), temos

$$\begin{aligned} z B_{n-2}^{(2)}(z) &= B_{n-1}^{(1)}(z) + \beta_{n-1}^{(1)} B_{n-2}^{(1)}(z), \\ B_{n-1}^{(1)}(z) &= \frac{1}{z} \left(B_n^{(0)}(z) + \beta_n^{(0)} B_{n-1}^{(0)}(z) \right) \quad \text{e} \\ B_{n-2}^{(1)}(z) &= \frac{1}{z} \left(B_{n-1}^{(0)}(z) + \beta_{n-1}^{(0)} B_{n-2}^{(0)}(z) \right). \end{aligned}$$

Substituindo-se $B_{n-1}^{(1)}(z)$ e $B_{n-2}^{(1)}(z)$ em $z B_{n-2}^{(2)}(z)$, obtemos

$$z^2 B_{n-2}^{(2)}(z) = B_n^{(0)}(z) + \left(\beta_n^{(0)} + \beta_{n-1}^{(1)} \right) B_{n-1}^{(0)}(z) + \beta_{n-1}^{(0)} \beta_{n-1}^{(1)} B_{n-2}^{(0)}(z). \quad (4.2.9)$$

Voltando a (4.2.6) e substituindo-se as expressões (4.2.7), (4.2.8) e (4.2.9), chegamos a

$$\begin{aligned} z^n B_n(\lambda_{n,1}^{(2)}, \lambda_{n,2}^{(2)}; \beta^2/z) &= \left(B_n^{(0)}(0) + B_{n-1}^{(0)}(0) \lambda_{n,1}^{(2)} + B_{n-2}^{(0)}(0) \lambda_{n,2}^{(2)} \right) B_n^{(0)}(z) \\ &\quad + \left[- \left(\alpha_{n+1}^{(0)} + \alpha_{n+1}^{(1)} \right) B_n^{(0)}(0) + \left(\beta_n^{(1)} - \alpha_{n+1}^{(0)} \right) B_{n-1}^{(0)}(0) \lambda_{n,1}^{(2)} + \left(\beta_n^{(0)} + \beta_{n-1}^{(1)} \right) B_{n-2}^{(0)}(0) \lambda_{n,2}^{(2)} \right] B_{n-1}^{(0)}(z) \\ &\quad + \left(\alpha_n^{(0)} \alpha_{n+1}^{(1)} B_n^{(0)}(0) - \alpha_n^{(0)} \beta_n^{(1)} B_{n-1}^{(0)}(0) \lambda_{n,1}^{(2)} + \beta_{n-1}^{(0)} \beta_{n-1}^{(1)} B_{n-2}^{(0)}(0) \lambda_{n,2}^{(2)} \right) B_{n-2}^{(0)}(z). \end{aligned}$$

Se $(\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} - \beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(2)} + \lambda_{n,2}^{(2)}) \neq 0$, dividindo-se $z^n B_n(\lambda_{n,1}^{(2)}, \lambda_{n,2}^{(2)}; \beta^2/z)$ por

$$B_n(\lambda_{n,1}^{(2)}, \lambda_{n,2}^{(2)}; 0) = (\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} - \beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(2)} + \lambda_{n,2}^{(2)}) B_{n-2}^{(0)}(0) \neq 0,$$

pois $B_n^{(0)}(0) = -\beta_n^{(0)} B_{n-1}^{(0)}(0) = \beta_n^{(0)} \beta_{n-1}^{(0)} B_{n-2}^{(0)}(0)$, e usando o Teorema 3.2.1 chegamos que

$$\frac{z^n B_n(\lambda_{n,1}^{(2)}, \lambda_{n,2}^{(2)}; \beta^2/z)}{B_n(\lambda_{n,1}^{(2)}, \lambda_{n,2}^{(2)}; 0)} = B_n^{(0)}(z) + \eta_{n,1}^{(2)} B_{n-1}^{(0)}(z) + \eta_{n,2}^{(2)} B_{n-2}^{(0)}(z),$$

onde

$$\eta_{n,1}^{(2)} = \frac{\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)}(\alpha_{n+1}^{(0)} + \alpha_{n+1}^{(1)}) + \beta_{n-1}^{(0)}(\beta_n^{(1)} - \alpha_{n+1}^{(0)})\lambda_{n,1}^{(2)} - (\beta_n^{(0)} + \beta_{n-1}^{(1)})\lambda_{n,2}^{(2)}}{-\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} + \beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(2)} - \lambda_{n,2}^{(2)}}$$

e

$$\eta_{n,2}^{(2)} = \frac{-\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)}\alpha_n^{(0)}\alpha_{n+1}^{(1)} - \beta_{n-1}^{(0)}\alpha_n^{(0)}\beta_n^{(1)}\lambda_{n,1}^{(2)} - \beta_{n-1}^{(0)}\beta_{n-1}^{(1)}\lambda_{n,2}^{(2)}}{-\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} + \beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(2)} - \lambda_{n,2}^{(2)}}.$$

Mas, queremos encontrar os parâmetros de forma que $\eta_{n,1}^{(2)} = \lambda_{n,1}^{(2)}$ e $\eta_{n,2}^{(2)} = \lambda_{n,2}^{(2)}$.

Então,

$$\lambda_{n,1}^{(2)} = \frac{\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)}(\alpha_{n+1}^{(0)} + \alpha_{n+1}^{(1)}) + \beta_{n-1}^{(0)}(\beta_n^{(1)} - \alpha_{n+1}^{(0)})\lambda_{n,1}^{(2)} - (\beta_n^{(0)} + \beta_{n-1}^{(1)})\lambda_{n,2}^{(2)}}{-\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} + \beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(2)} - \lambda_{n,2}^{(2)}} \quad (4.2.10)$$

e

$$\lambda_{n,2}^{(2)} = \frac{-\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)}\alpha_n^{(0)}\alpha_{n+1}^{(1)} - \beta_{n-1}^{(0)}\alpha_n^{(0)}\beta_n^{(1)}\lambda_{n,1}^{(2)} - \beta_{n-1}^{(0)}\beta_{n-1}^{(1)}\lambda_{n,2}^{(2)}}{-\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} + \beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(2)} - \lambda_{n,2}^{(2)}}. \quad (4.2.11)$$

É necessário encontrar os parâmetros $\lambda_{n,1}^{(2)}$ e $\lambda_{n,2}^{(2)}$ que satisfaçam (4.2.10) e (4.2.11) simultaneamente. Multiplicando-se (4.2.10) por $\beta_{n-1}^{(0)}$ e subtraindo-se (4.2.11), temos

$$\beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(2)} - \lambda_{n,2}^{(2)} = \frac{(\beta_{n-1}^{(0)})^2\beta_n^{(0)}(\alpha_{n+1}^{(0)} + \alpha_{n+1}^{(1)}) + (\beta_{n-1}^{(0)})^2(\beta_n^{(1)} - \alpha_{n+1}^{(0)})\lambda_{n,1}^{(2)}}{-\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} + \beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(2)} - \lambda_{n,2}^{(2)}} \quad (4.2.12)$$

$$+ \frac{-\beta_{n-1}^{(0)}(\beta_n^{(0)} + \beta_{n-1}^{(1)})\lambda_{n,2}^{(2)} + \beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)}\alpha_n^{(0)}\alpha_{n+1}^{(1)} + \beta_{n-1}^{(0)}\alpha_n^{(0)}\beta_n^{(1)}\lambda_{n,1}^{(2)} + \beta_{n-1}^{(0)}\beta_{n-1}^{(1)}\lambda_{n,2}^{(2)}}{-\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} + \beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(2)} - \lambda_{n,2}^{(2)}}.$$

Somando-se $-\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)}$ em ambos os membros de (4.2.12) obtemos

$$\begin{aligned} \left(-\beta_n^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)} + \beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(2)} - \lambda_{n,2}^{(2)}\right)^2 &= (\beta_{n-1}^{(0)})^2\beta_n^{(0)}(\alpha_{n+1}^{(0)} + \alpha_{n+1}^{(1)}) - \beta_{n-1}^{(0)}(\beta_n^{(0)} + \beta_{n-1}^{(1)})\lambda_{n,2}^{(2)} \\ &+ (\beta_{n-1}^{(0)})^2(\beta_n^{(1)} - \alpha_{n+1}^{(0)})\lambda_{n,1}^{(2)} + \beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)}\alpha_n^{(0)}\alpha_{n+1}^{(1)} + \beta_{n-1}^{(0)}\alpha_n^{(0)}\beta_n^{(1)}\lambda_{n,1}^{(2)} + \beta_{n-1}^{(0)}\beta_{n-1}^{(1)}\lambda_{n,2}^{(2)} \\ &- \beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)}\left(-\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} + \beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(2)} - \lambda_{n,2}^{(2)}\right). \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

Por (2.1.17), $\beta_n^{(1)} - \alpha_{n+1}^{(0)} = \beta_n^{(0)} - \alpha_n^{(1)}$ e, de (2.1.18), $\alpha_n^{(0)}\beta_n^{(1)} = \beta_{n-1}^{(0)}\alpha_n^{(1)}$. Logo, substituindo-se em (4.2.13), obtemos

$$\begin{aligned} \left(-\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} + \beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(2)} - \lambda_{n,2}^{(2)}\right)^2 &= \beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)}\left[\beta_{n-1}^{(0)}\left(\beta_n^{(0)} + \alpha_{n+1}^{(0)}\right)\right] \\ &+ \beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)}\left(\beta_{n-1}^{(0)}\alpha_{n+1}^{(1)} + \alpha_n^{(0)}\alpha_{n+1}^{(1)}\right). \end{aligned}$$

Como $\beta_n^{(0)} + \alpha_{n+1}^{(0)} = \beta_n^{(1)} + \alpha_n^{(1)}$, então

$$\begin{aligned} \left(-\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} + \beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(2)} - \lambda_{n,2}^{(2)}\right)^2 &= \beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)}\left(\beta_{n-1}^{(0)} + \alpha_n^{(0)}\right)\left(\beta_n^{(1)} + \alpha_{n+1}^{(1)}\right) \\ &= \beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)}\gamma_{n-1}^{(0)}\gamma_n^{(1)}, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$-\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} + \beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(2)} - \lambda_{n,2}^{(2)} = \pm\sqrt{\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)}\gamma_{n-1}^{(0)}\gamma_n^{(1)}}.$$

De (2.1.17) e (2.1.20), $\gamma_n^{(1)} = \beta_n^{(1)} + \alpha_{n+1}^{(1)}$ e $\gamma_{n-1}^{(0)} = \frac{\beta_{n-1}^{(0)}\gamma_n^{(0)}}{\beta_n^{(1)}}$. Então,

$$\sqrt{\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)}\gamma_{n-1}^{(0)}\gamma_n^{(1)}} = \beta_{n-1}^{(0)}\sqrt{\beta_n^{(0)}\gamma_n^{(0)} + \frac{\beta_n^{(0)}\gamma_n^{(0)}\alpha_{n+1}^{(1)}}{\beta_n^{(1)}}}.$$

Como $\beta_n^{(1)} = \beta$, $n \geq 1$, e, por (2.1.18), $\alpha_{n+1}^{(1)} = \frac{\alpha_{n+1}^{(0)}\beta}{\beta_n^{(0)}}$, então

$$-\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} + \beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(2)} - \lambda_{n,2}^{(2)} = \pm\beta_{n-1}^{(0)}\gamma_n^{(0)}. \quad (4.2.14)$$

Logo,

$$\lambda_{n,1}^{(2)} = \frac{\lambda_{n,2}^{(2)}}{\beta_{n-1}^{(0)}} + \beta_n^{(0)} \pm \gamma_n^{(0)}.$$



Se substituirmos $\lambda_{n,1}^{(2)} = \frac{\lambda_{n,2}^{(2)}}{\beta_{n-1}^{(0)}} + \beta_n^{(0)} + \gamma_n^{(0)}$ em (4.2.10) ou (4.2.11), obtemos

$$\lambda_{n,1}^{(2)} = \beta_n^{(0)} + \beta_{n-1}^{(1)} = \beta_n^{(0)} + \beta,$$

$$\lambda_{n,2}^{(2)} = -\alpha_n^{(0)}\beta_n^{(1)} = -\beta\alpha_n^{(0)}, \quad n \geq 2.$$

Da mesma forma, substituindo-se $\lambda_{n,1}^{(2)} = \frac{\lambda_{n,2}^{(2)}}{\beta_{n-1}^{(0)}} + \beta_n^{(0)} - \gamma_n^{(0)}$ em (4.2.10) ou (4.2.11), obtemos

$$\lambda_{n,1}^{(2)} = \frac{\lambda_{n,2}^{(2)}}{\beta_{n-1}^{(0)}} - \alpha_{n+1}^{(0)},$$

$$\lambda_{n,2}^{(2)} \in \mathbb{R}, \quad n \geq 2.$$

■

Denotaremos os parâmetros $\lambda_{n,1}^{(2)}, \lambda_{n,2}^{(2)}$ que satisfazem (4.2.5) de acordo com a escolha feita em (4.2.14), ou seja,

$\lambda_{n,1}^{(2)+}, \lambda_{n,2}^{(2)+}$ para a escolha $-\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} + \beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(2)+} - \lambda_{n,2}^{(2)+} = \beta_{n-1}^{(0)}\gamma_n^{(0)}$ e, então,

$$\lambda_{n,1}^{(2)+} = \beta_n^{(0)} + \beta,$$

$$\lambda_{n,2}^{(2)+} = -\beta\alpha_n^{(0)}; \quad (4.2.15)$$

$\lambda_{n,1}^{(2)-}, \lambda_{n,2}^{(2)-}$ para a escolha $-\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} + \beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(2)-} - \lambda_{n,2}^{(2)-} = -\beta_{n-1}^{(0)}\gamma_n^{(0)}$ e, então,

$$\begin{aligned} \lambda_{n,1}^{(2)-} &= \frac{\lambda_{n,2}^{(2)-}}{\beta_{n-1}^{(0)}} - \alpha_{n+1}^{(0)}, & \text{ou} & & \lambda_{n,1}^{(2)-} &\in \mathbb{R}, \\ \lambda_{n,2}^{(2)-} &\in \mathbb{R} & & & \lambda_{n,2}^{(2)-} &= \left(\lambda_{n,1}^{(2)-} + \alpha_{n+1}^{(0)} \right) \beta_{n-1}^{(0)}; \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

$\lambda_{n,1}^{(2)\pm}, \lambda_{n,2}^{(2)\pm}$ quando nos referimos a ambas as escolhas.

Estudaremos agora o comportamento de $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)\pm}, \lambda_{n,2}^{(2)\pm}; 0)$, que são polinômios β -inversíveis. Da relação de recorrência para os polinômios $B_n^{(r)}(z)$, temos que $B_n^{(0)}(0) = (-1)^n \beta_n^{(0)} \beta_{n-1}^{(0)} \cdots \beta_1^{(0)}$, $n \geq 1$. Então,

$$B_n(\lambda_{n,1}^{(2)\pm}, \lambda_{n,2}^{(2)\pm}; 0) = (-1)^{n+1} \left(-\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} + \beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(2)\pm} - \lambda_{n,2}^{(2)\pm} \right) \beta_{n-2}^{(0)} \cdots \beta_1^{(0)}, \quad n \geq 2. \quad (4.2.17)$$



Para $n = 1$, buscamos $B_1(\lambda_{1,1}^{(2)+}, \lambda_{1,2}^{(2)+}; z)$ β -invertível. Então, se por (4.2.15), escolhemos $\lambda_{1,1}^{(2)+} = \beta_1^{(0)} + \beta$, logo, $B_1(\lambda_{1,1}^{(2)+}, \lambda_{1,2}^{(2)+}; z) = z + \beta$, que é β -invertível e $B_1(\lambda_{1,1}^{(2)+}, \lambda_{1,2}^{(2)+}; 0) > 0$.

4.2.2 Localização dos zeros de $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)-}, \lambda_{n,2}^{(2)-}; z)$

Para a segunda possibilidade, $-\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} + \beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(2)-} - \lambda_{n,2}^{(2)-} = -\beta_{n-1}^{(0)}\gamma_n^{(0)}$ de (4.2.17) encontramos que

$$B_n(\lambda_{n,1}^{(2)-}, \lambda_{n,2}^{(2)-}; 0) = (-1)^n \overbrace{\beta_{n-1}^{(0)}\gamma_n^{(0)}\beta_{n-2}^{(0)} \cdots \beta_1^{(0)}}^{> 0}, \quad n \geq 2,$$

ou seja,

$$\text{ sinal } \left(B_n(\lambda_{n,1}^{(2)-}, \lambda_{n,2}^{(2)-}; 0) \right) = (-1)^n, \quad n \geq 2. \quad (4.2.19)$$

Para $n = 1$, escolhemos $\lambda_{1,1}^{(2)-} = \beta_1^{(0)} - \beta$ em (4.2.1). Logo, $B_1(\lambda_{1,1}^{(2)-}, \lambda_{1,2}^{(2)-}; z) = z - \beta$ é β -invertível e $B_1(\lambda_{1,1}^{(2)-}, \lambda_{1,2}^{(2)-}; 0) < 0$.

Pelo fato de $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)-}, \lambda_{n,2}^{(2)-}; z)$ ser mônico, β -invertível e ter pelo menos $n - 2$ zeros em (a, b) , (4.2.19) nos mostra (veja Figura 4.4) que, dependendo da escolha do parâmetro $\lambda_{n,1}^{(2)-}$ em (4.2.16), temos as seguintes possibilidades para os zeros de $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)-}, \lambda_{n,2}^{(2)-}; z)$:

- 1 zero em $(0, a]$ (pela simetria, 1 zero em $[b, \infty)$) e $n - 2$ zeros distintos em (a, b) ,
- todos os zeros distintos em (a, b) ,
- zero de multiplicidade 2 em β quando n é par ou zero de multiplicidade 3 em β quando n é ímpar, e o restante dos zeros distintos em (a, b) ,
- 2 zeros complexos e $n - 2$ zeros distintos em (a, b) ,
- zero de multiplicidade 2 em $-\beta$ e $n - 2$ zeros distintos em (a, b) ou

Esses resultados sobre o comportamento do polinômio em $z = 0$ são de grande importância para a determinação dos seus zeros. Apresentaremos, agora, algumas contribuições deixadas por Bracciali em [5] e também nossos estudos para a localização dos zeros de $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)\pm}, \lambda_{n,2}^{(2)\pm}; z)$.

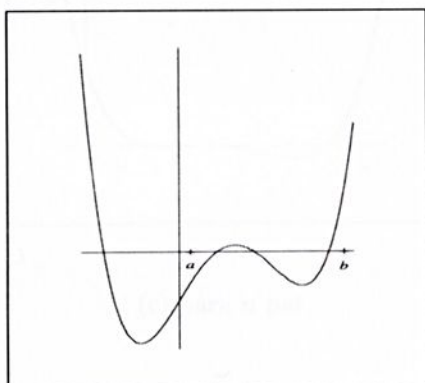
4.2.1 Localização dos zeros de $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)+}, \lambda_{n,2}^{(2)+}; z)$

Como $-\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} + \beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(2)+} - \lambda_{n,2}^{(2)+} = \beta_{n-1}^{(0)}\gamma_n^{(0)}$, observamos, de (4.2.17), que

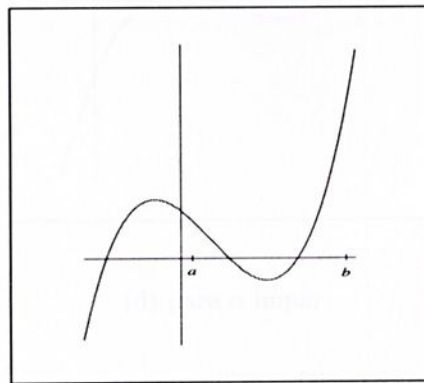
$$B_n(\lambda_{n,1}^{(2)+}, \lambda_{n,2}^{(2)+}; 0) = (-1)^{n+1} \overbrace{\beta_{n-1}^{(0)}\gamma_n^{(0)}\beta_{n-2}^{(0)} \cdots \beta_1^{(0)}}^{> 0}, \quad n \geq 2.$$

Logo,

$$\text{senal} \left(B_n(\lambda_{n,1}^{(2)+}, \lambda_{n,2}^{(2)+}; 0) \right) = (-1)^{n+1}, \quad n \geq 2. \quad (4.2.18)$$



(a) para n par

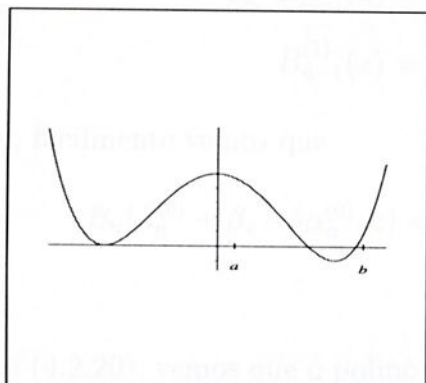


(b) para n ímpar

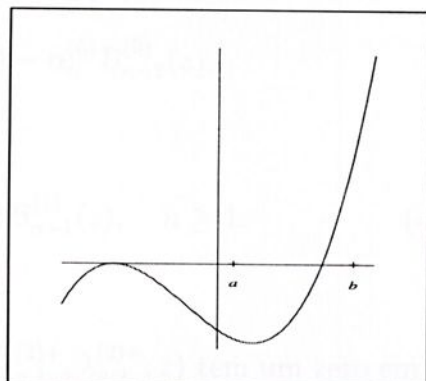
Figura 4.3: Exemplos do comportamento de $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)+}, \lambda_{n,2}^{(2)+}; 0)$

Pelo fato de $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)+}, \lambda_{n,2}^{(2)+}; z)$, $n \geq 2$, ser mônico, β -invertível e ter pelo menos $n - 2$ zeros em (a, b) , (4.2.18) nos mostra que $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)+}, \lambda_{n,2}^{(2)+}; z)$ tem um único zero negativo (veja Figura 4.3). Pela propriedade dos zeros esse zero é $-\beta$ e, além disso, $n - 1$ zeros estão em (a, b) .

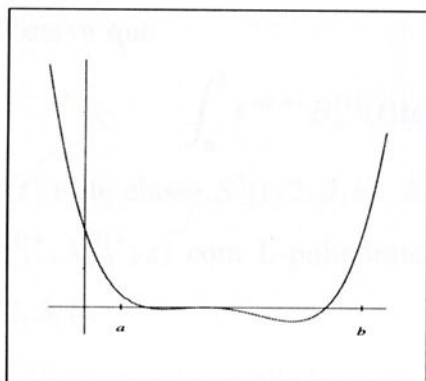
- 2 zeros negativos e $n - 2$ zeros distintos em (a, b) .



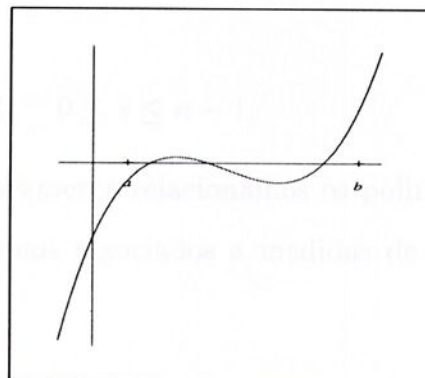
(a) para n par



(b) para n ímpar



(c) para n par



(d) para n ímpar

Figura 4.4: Exemplos do comportamento de $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)-}, \lambda_{n,2}^{(2)-}; 0)$

4.2.3 $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)+}, \lambda_{n,2}^{(2)+}; z)$ e medidas de classe $S^3[1/2, \beta, b]$

Em [5] Bracciali provou que, ao considerarmos $\lambda_{n,1}^{(2)+} = \beta_n^{(0)} + \beta$ e $\lambda_{n,2}^{(2)+} = -\beta\alpha_n^{(0)}$, os polinômios $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)+}, \lambda_{n,2}^{(2)+}; z)$ podem ser escritos como $(z + \beta)B_{n-1}^{(1)}(z)$.

De fato: Sabemos que

$$B_n(\beta_n^{(0)} + \beta, -\beta\alpha_n^{(0)}; z) = B_n^{(0)}(z) + (\beta_n^{(0)} + \beta) B_{n-1}^{(0)}(z) - \beta\alpha_n^{(0)} B_{n-2}^{(0)}(z).$$

De (2.1.23) e (2.1.22), obtemos

$$\beta_n^{(0)} B_{n-1}^{(0)}(z) = z B_{n-1}^{(1)}(z) - B_n^{(0)}(z) \quad \text{e}$$

$$B_{n-1}^{(1)}(z) = B_{n-1}^{(0)}(z) - \alpha_n^{(0)} B_{n-2}^{(0)}(z).$$

Então, facilmente vemos que

$$B_n(\beta_n^{(0)} + \beta, -\beta \alpha_n^{(0)}; z) = (z + \beta) B_{n-1}^{(1)}(z), \quad n \geq 1. \quad (4.2.20)$$

De (4.2.20), vemos que o polinômio $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)+}, \lambda_{n,2}^{(2)+}; z)$ tem um zero em $-\beta$ e, pelo Teorema 2.1.2, $n - 1$ zeros distintos em (a, b) , o que está de acordo com as conclusões da seção 4.2.1.

Observe que

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n^{(1)}(t) t d\psi(t) = 0, \quad 0 \leq s \leq n - 1,$$

e $t d\psi(t)$ é de classe $S^3[1/2, \beta, b]$. Assim, novamente relacionamos os polinômios $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)+}, \lambda_{n,2}^{(2)+}; z)$ com L-polinômios ortogonais associados a medidas de classe $S^3[1/2, \beta, b]$.

4.2.4 $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)-}, \lambda_{n,2}^{(2)-}; z)$ e medidas de classe $S^3[1/2, \beta, b]$

Daremos agora informações sobre a localização dos zeros de $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)-}, \lambda_{n,2}^{(2)-}; z)$, dentro das possibilidades citadas na seção 4.2.2, para alguns valores de $\lambda_{n,1}^{(2)-}$. Para isso, relacionaremos L-polinômios ortogonais associados a medidas de classe $S^3[1/2, \beta, b]$ com os polinômios $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)-}, \lambda_{n,2}^{(2)-}; z)$ associados a $\psi(t)$, que é de classe $S^3[-1/2, \beta, b]$, através do seguinte resultado introduzido por Bracciali em [5].

Os polinômios $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)-}, \lambda_{n,2}^{(2)-}; z)$ satisfazem

$$B_n(\lambda_{n,1}^{(2)-}, \lambda_{n,2}^{(2)-}; z) = B_n^{(1)}(z) + \frac{\lambda_{n,2}^{(2)-}}{\beta_{n-1}^{(0)}} z B_{n-2}^{(1)}(z), \quad n \geq 2. \quad (4.2.21)$$

Como $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)-}, \lambda_{n,2}^{(2)-}; 0) = (-\beta)^n$, o resultado (4.2.21) está de acordo com o que foi estabelecido em (2.4.3), pois o polinômio $B_n^{(1)}(z)$ está relacionado com a medida $\psi_3(t)$ que satisfaz $d\psi_3(t) = td\psi(t)$ e é de classe $S^3[1/2, \beta, b]$, ou seja,

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n^{(1)}(t) d\psi_3(t) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1.$$

Podemos observar que $B_n^{(0)\psi_3}(z) = B_n^{(1)}(z)$, $n \geq 0$.

Demonstração: Temos que

$$B_n(\lambda_{n,1}^{(2)-}, \lambda_{n,2}^{(2)-}; z) = B_n^{(0)}(z) + \left(\frac{\lambda_{n,2}^{(2)-}}{\beta_{n-1}^{(0)}} - \alpha_{n+1}^{(0)} \right) B_{n-1}^{(0)}(z) + \lambda_{n,2}^{(2)-} B_{n-2}^{(0)}(z). \quad (4.2.22)$$

Primeiramente encontremos expressões para $B_n^{(0)}(z)$, $B_{n-1}^{(0)}(z)$ e $B_{n-2}^{(0)}(z)$.

Somando-se e subtraindo-se $\alpha_{n+1}^{(0)} B_n^{(1)}(z)$ na relação (2.1.26), obtemos

$$B_n^{(0)}(z) = \frac{1}{\gamma_n^{(0)}} \left[\left(\beta_n^{(0)} + \alpha_{n+1}^{(0)} \right) B_n^{(1)}(z) + \alpha_{n+1}^{(0)} \left(z B_{n-1}^{(1)}(z) - B_n^{(1)}(z) \right) \right].$$

Da relação de recorrência para os polinômios $B_n^{(1)}(z)$, temos

$$z B_{n-1}^{(1)}(z) - B_n^{(1)}(z) = \beta_n^{(1)} B_{n-1}^{(1)}(z) + \alpha_n^{(1)} z B_{n-2}^{(1)}(z).$$

Voltando a $B_n^{(0)}(z)$ e substituindo-se $z B_{n-1}^{(1)}(z)$, obtemos

$$B_n^{(0)}(z) = B_n^{(1)}(z) + \frac{\alpha_{n+1}^{(0)}}{\gamma_n^{(0)}} \left(\beta_n^{(1)} B_{n-1}^{(1)}(z) + \alpha_n^{(1)} z B_{n-2}^{(1)}(z) \right). \quad (4.2.23)$$

Novamente, de (2.1.26),

$$B_{n-1}^{(0)}(z) = \frac{\beta_{n-1}^{(0)}}{\gamma_{n-1}^{(0)}} B_{n-1}^{(1)}(z) + \frac{\alpha_n^{(0)}}{\gamma_{n-1}^{(0)}} z B_{n-2}^{(1)}(z)$$

e, por (2.1.19) e (2.1.20),

$$B_{n-1}^{(0)}(z) = \frac{\beta_n^{(1)}}{\gamma_n^{(0)}} B_{n-1}^{(1)}(z) + \frac{\alpha_n^{(1)}}{\gamma_n^{(0)}} z B_{n-2}^{(1)}(z). \quad (4.2.24)$$

De (2.1.25), temos

$$B_{n-2}^{(0)}(z) = \frac{1}{\gamma_{n-1}^{(0)}} \left(z B_{n-2}^{(1)}(z) - B_{n-1}^{(1)}(z) \right). \quad (4.2.25)$$



Então, substituindo-se (4.2.23), (4.2.24) e (4.2.25) em (4.2.22), chegamos a

$$B_n(\lambda_{n,1}^{(2)-}, \lambda_{n,2}^{(2)-}; z) = B_n^{(1)}(z) + \left(\frac{\beta_n^{(1)} \lambda_{n,2}^{(2)-}}{\beta_{n-1}^{(0)} \gamma_n^{(0)}} - \frac{\lambda_{n,2}^{(2)-}}{\gamma_{n-1}^{(0)}} \right) B_{n-1}^{(1)}(z) \\ + \left(\frac{\alpha_n^{(1)} \lambda_{n,2}^{(2)-}}{\beta_{n-1}^{(0)} \gamma_n^{(0)}} + \frac{\lambda_{n,2}^{(2)-}}{\gamma_{n-1}^{(0)}} \right) z B_{n-2}^{(1)}(z).$$

Mas, $\frac{1}{\gamma_{n-1}^{(0)}} = \frac{\beta_n^{(1)}}{\beta_{n-1}^{(0)} \gamma_n^{(0)}}$ e, portanto, obtemos (4.2.21). ■

Observe de (4.2.16) que a relação (4.2.21) é equivalente a

$$B_n(\lambda_{n,1}^{(2)-}, \lambda_{n,2}^{(2)-}; z) = B_n^{(1)}(z) + \left(\lambda_{n,1}^{(2)-} + \alpha_{n+1}^{(0)} \right) z B_{n-2}^{(1)}(z), \quad n \geq 2. \quad (4.2.26)$$

Vamos agora encontrar o valor do parâmetro $\lambda_{n,1}^{(2)-}$ para o qual temos um zero em a e, pela simetria dos zeros, um zero em b .

Suponhamos que $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)-}, \lambda_{n,2}^{(2)-}; a) = B_n(\lambda_{n,1}^{(2)-}, \lambda_{n,2}^{(2)-}; b) = 0$. Então, por (4.2.26), o valor de $\lambda_{n,1}^{(2)-}$ será

$$\lambda_{n,1}^{(2)-} = -\alpha_{n+1}^{(0)} - \frac{B_n^{(1)}(a)}{a B_{n-2}^{(1)}(a)} = -\alpha_{n+1}^{(0)} - \frac{B_n^{(1)}(b)}{b B_{n-2}^{(1)}(b)}.$$

Da mesma forma, queremos encontrar $\lambda_{n,1}^{(2)-}$ para que tenhamos zeros em β . Para n ímpar, β é zero simples de $B_n^{(1)}(z)$ e de $B_{n-2}^{(1)}(z)$. Logo, por (4.2.26), $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)-}, \lambda_{n,2}^{(2)-}; \beta) = 0$ e

$$\frac{B_n(\lambda_{n,1}^{(2)-}, \lambda_{n,2}^{(2)-}; z)}{z - \beta} = \frac{B_n^{(1)}(z)}{z - \beta} + \left(\lambda_{n,1}^{(2)-} + \alpha_{n+1}^{(0)} \right) z \frac{B_{n-2}^{(1)}(z)}{z - \beta}$$

é um polinômio de grau $n - 1$.

Da relação de recorrência $B_n^{(1)}(z) = (z - \beta) B_{n-1}^{(1)}(z) - \alpha_n^{(1)} z B_{n-2}^{(1)}(z)$, temos

$$\frac{B_n(\lambda_{n,1}^{(2)-}, \lambda_{n,2}^{(2)-}; z)}{z - \beta} = B_{n-1}^{(1)}(z) + \left(\lambda_{n,1}^{(2)-} + \alpha_{n+1}^{(0)} - \alpha_n^{(1)} \right) z \frac{B_{n-2}^{(1)}(z)}{z - \beta}.$$

Fazendo $z \rightarrow \beta$ no lado direito da equação acima, obtemos que

$$B_{n-1}^{(1)}(\beta) + \left(\lambda_{n,1}^{(2)-} + \alpha_{n+1}^{(0)} - \alpha_n^{(1)} \right) \beta \tilde{Q}_{n-3}(\beta) = 0,$$



se, e somente se,

$$\lambda_{n,1}^{(2)-} = -\alpha_{n+1}^{(0)} + \alpha_n^{(1)} - \frac{B_{n-1}^{(1)}(\beta)}{\beta \tilde{Q}_{n-3}(\beta)}, \quad (4.2.27)$$

onde $\tilde{Q}_{n-3}(z) = \frac{B_{n-2}^{(1)}(z)}{z - \beta}$.

Para n ímpar, $\lambda_{n,1}^{(2)-}$ é dado por (4.2.27) e o polinômio tem zero de multiplicidade 3 em β .

Para n par sabemos que β é um zero de $B_{n-1}^{(1)}(z)$. Substituindo $B_n^{(1)}(z)$ em (4.2.26), pela relação de recorrência e fazendo $z \rightarrow \beta$ em (4.2.26), obtemos que

$$0 = \left(\lambda_{n,1}^{(2)-} + \alpha_{n+1}^{(0)} - \alpha_n^{(1)} \right) \beta B_{n-2}^{(1)}(\beta)$$

se, e somente se,

$$\lambda_{n,1}^{(2)-} = -\alpha_{n+1}^{(0)} + \alpha_n^{(1)} \quad (4.2.28)$$

e $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)-}, \lambda_{n,2}^{(2)-}; z)$ tem zero de multiplicidade 2 em β .

Se agora supusermos $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)-}, \lambda_{n,2}^{(2)-}; -\beta) = 0$, então, por (4.2.26), o polinômio terá zero de multiplicidade 2 em $-\beta$ se $\lambda_{n,1}^{(2)-}$ for dado por

$$\lambda_{n,1}^{(2)-} = -\alpha_{n+1}^{(0)} + \frac{B_n^{(1)}(-\beta)}{\beta B_{n-2}^{(1)}(-\beta)}, \quad n \geq 2. \quad (4.2.29)$$

Tendo em vista essas possibilidades de escolha para o parâmetro $\lambda_{n,1}^{(2)-}$, fizemos testes usando o software MAPLE VI para valores específicos de n , $n \geq 2$, e observamos que se escolhermos, em (4.2.16), $\lambda_{n,1}^{(2)-}$ tal que

$$\lambda_{n,1}^{(2)-} < -\alpha_{n+1}^{(0)} - \frac{B_n^{(1)}(a)}{a B_{n-2}^{(1)}(a)},$$

o polinômio $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)-}, \lambda_{n,2}^{(2)-}; z)$ tem todos os zeros positivos sendo um em $(0, a)$, $n - 2$ distintos em (a, b) e um zero em (b, ∞) . Se

$$\begin{aligned} -\alpha_{n+1}^{(0)} - \frac{B_n^{(1)}(a)}{a B_{n-2}^{(1)}(a)} &< \lambda_{n,1}^{(2)-} < -\alpha_{n+1}^{(0)} + \alpha_n^{(1)} - \frac{B_{n-1}^{(1)}(\beta)}{\beta \tilde{Q}_{n-3}(\beta)}, & \text{para } n \text{ ímpar,} \\ -\alpha_{n+1}^{(0)} - \frac{B_n^{(1)}(a)}{a B_{n-2}^{(1)}(a)} &< \lambda_{n,1}^{(2)-} < -\alpha_{n+1}^{(0)} + \alpha_n^{(1)}, & \text{para } n \text{ par,} \end{aligned}$$



o polinômio tem n zeros distintos em (a, b) . Se

$$\begin{aligned} -\alpha_{n+1}^{(0)} + \alpha_n^{(1)} - \frac{B_{n-1}^{(1)}(\beta)}{\beta \tilde{Q}_{n-3}(\beta)} &< \lambda_{n,1}^{(2)-} < -\alpha_{n+1}^{(0)} + \frac{B_n^{(1)}(-\beta)}{\beta B_{n-2}^{(1)}(-\beta)}, \quad \text{para } n \text{ ímpar,} \\ -\alpha_{n+1}^{(0)} + \alpha_n^{(1)} &< \lambda_{n,1}^{(2)-} < -\alpha_{n+1}^{(0)} + \frac{B_n^{(1)}(-\beta)}{\beta B_{n-2}^{(1)}(-\beta)}, \quad \text{para } n \text{ par,} \end{aligned}$$

o polinômio tem 2 zeros complexos e $n - 2$ zeros distintos em (a, b) . Finalmente, se

$$\lambda_{n,1}^{(2)-} > -\alpha_{n+1}^{(0)} + \frac{B_n^{(1)}(-\beta)}{\beta B_{n-2}^{(1)}(-\beta)},$$

$B_n(\lambda_{n,1}^{(2)-}, \lambda_{n,2}^{(2)-}; z)$ tem 2 zeros negativos e $n - 2$ zeros distintos em (a, b) .

4.3 Polinômios $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)}, \lambda_{n,2}^{(3)}, \lambda_{n,3}^{(3)}; z)$ e medidas de classe $S^3[-1, \beta, b]$

Motivados pelo que foi introduzido e estudado por Sri Ranga, Andrade e McCabe em [22] e também por Bracciali em [5], nesta seção apresentaremos nossos estudos sobre os polinômios $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)}, \lambda_{n,2}^{(3)}, \lambda_{n,3}^{(3)}; z)$ associados a medidas de classe $S^3[-1, \beta, b]$.

Os polinômios $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)}, \lambda_{n,2}^{(3)}, \lambda_{n,3}^{(3)}; z)$ dependem de três parâmetros, ou seja, são definidos por

$$B_n(\lambda_{n,1}^{(3)}, \lambda_{n,2}^{(3)}, \lambda_{n,3}^{(3)}; z) = B_n^{(0)}(z) + \lambda_{n,1}^{(3)} B_{n-1}^{(0)}(z) + \lambda_{n,2}^{(3)} B_{n-2}^{(0)}(z) + \lambda_{n,3}^{(3)} B_{n-3}^{(0)}(z), \quad (4.3.1)$$

$n \geq 3$, onde $\lambda_{n,1}^{(3)}, \lambda_{n,2}^{(3)}, \lambda_{n,3}^{(3)} \in \mathbb{R}$.

Observe que $B_0(\lambda_{0,1}^{(3)}, \lambda_{0,2}^{(3)}, \lambda_{0,3}^{(3)}; z) = 1$, $B_1(\lambda_{1,1}^{(3)}, \lambda_{1,2}^{(3)}, \lambda_{1,3}^{(3)}; z) = z - \beta_1^{(0)} + \lambda_{1,1}^{(3)}$ e $B_2(\lambda_{2,1}^{(3)}, \lambda_{2,2}^{(3)}, \lambda_{2,3}^{(3)}; z) = B_2^{(0)}(z) + \lambda_{2,1}^{(3)} B_1^{(0)}(z) + \lambda_{2,2}^{(3)}$.

De acordo com o Teorema 3.1.1, o polinômio mônico $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)}, \lambda_{n,2}^{(3)}, \lambda_{n,3}^{(3)}; z)$ tem pelo menos $n - 3$ zeros no intervalo (a, b) e, por (3.1.3), satisfazem

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n(\lambda_{n,1}^{(3)}, \lambda_{n,2}^{(3)}, \lambda_{n,3}^{(3)}; t) d\psi(t) = 0, \quad 3 \leq s \leq n - 1, \quad n \geq 4. \quad (4.3.2)$$

Nesta seção a medida $\psi(t)$ é de classe $S^3[-1, \beta, b]$, ou seja, satisfaz

$$t d\psi(t) = -(\beta^2/t) d\psi(\beta^2/t), \quad t \in (a, b). \quad (4.3.3)$$

Então, pelo Teorema 3.2.1 existem $\eta_{n,1}^{(3)}, \eta_{n,2}^{(3)}, \eta_{n,3}^{(3)} \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{z^n B_n(\lambda_{n,1}^{(3)}, \lambda_{n,2}^{(3)}, \lambda_{n,3}^{(3)}; \beta^2/z)}{B_n(\lambda_{n,1}^{(3)}, \lambda_{n,2}^{(3)}, \lambda_{n,3}^{(3)}; 0)} = B_n(\eta_{n,1}^{(3)}, \eta_{n,2}^{(3)}, \eta_{n,3}^{(3)}; z), \quad n \geq 4.$$

Os L-polinômios ortogonais $B_n^{(l)}(z)$ estão associados com a medida $\psi(t)$ e, pelo Teorema 2.3.1, satisfazem

$$\frac{z^n B_n^{(0)}(\beta^2/z)}{B_n^{(0)}(0)} = B_n^{(3)}(z) \quad \text{e} \quad \frac{z^n B_n^{(1)}(\beta^2/z)}{B_n^{(1)}(0)} = B_n^{(2)}(z), \quad (4.3.4)$$

e, por (2.3.3), $\beta_n^{(0)} \beta_n^{(3)} = \beta^2$ e $\beta_n^{(1)} \beta_n^{(2)} = \beta^2$, para $n \geq 1$.

Vamos agora encontrar os parâmetros $\lambda_{n,1}^{(3)}, \lambda_{n,2}^{(3)}, \lambda_{n,3}^{(3)}$ que tornam o polinômio $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)}, \lambda_{n,2}^{(3)}, \lambda_{n,3}^{(3)}; z)$ β -invertível. A busca desses parâmetros segue o mesmo raciocínio que os casos $r=1$ e $r=2$ vistos nas seções 4.1 e 4.2, respectivamente.

Fazendo-se a mudança de variável $z = \beta^2/z$ em (4.3.1), multiplicando-se por z^n e substituindo-se (4.3.4), obtemos

$$\begin{aligned} z^n B_n(\lambda_{n,1}^{(3)}, \lambda_{n,2}^{(3)}, \lambda_{n,3}^{(3)}; \beta^2/z) &= B_n^{(0)}(0) B_n^{(3)}(z) + \lambda_{n,1}^{(3)} B_{n-1}^{(0)}(0) z B_{n-1}^{(3)}(z) \\ &\quad + \lambda_{n,2}^{(3)} B_{n-2}^{(0)}(0) z^2 B_{n-2}^{(3)}(z) + \lambda_{n,3}^{(3)} B_{n-3}^{(0)}(0) z^3 B_{n-3}^{(3)}(z). \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Encontremos expressões para $B_n^{(3)}(z)$, $z B_{n-1}^{(3)}(z)$, $z^2 B_{n-2}^{(3)}(z)$ e $z^3 B_{n-3}^{(3)}(z)$.

Por (3.1.14) temos que $B_n(\hat{\lambda}_{n,1}^{(3)}, \hat{\lambda}_{n,2}^{(3)}, \hat{\lambda}_{n,3}^{(3)}; z) = B_n^{(3)}(z)$, $n \geq 0$. Então,

$$\begin{aligned} B_n^{(3)}(z) &= B_n^{(0)}(z) - \left(\alpha_{n+1}^{(0)} + \alpha_{n+1}^{(1)} + \alpha_{n+1}^{(2)} \right) B_{n-1}^{(0)}(z) \\ &\quad + \left(\alpha_n^{(0)} \alpha_{n+1}^{(1)} + \alpha_n^{(0)} \alpha_{n+1}^{(2)} + \alpha_n^{(1)} \alpha_{n+1}^{(2)} \right) B_{n-2}^{(0)}(z) - \alpha_{n-1}^{(0)} \alpha_n^{(1)} \alpha_{n+1}^{(2)} B_{n-3}^{(0)}(z). \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Das relações (2.1.22) e (2.1.23) obtemos que

$$\begin{aligned} B_{n-1}^{(1)}(z) &= B_{n-1}^{(0)}(z) - \alpha_n^{(0)} B_{n-2}^{(0)}(z), \\ B_n^{(2)}(z) &= B_n^{(1)}(z) - \alpha_{n+1}^{(1)} B_{n-1}^{(1)}(z) \quad \text{e} \\ z B_{n-1}^{(3)}(z) &= B_n^{(2)}(z) + \beta_n^{(2)} B_{n-1}^{(2)}(z). \end{aligned}$$



Substituindo-se $B_{n-1}^{(1)}(z)$ e $B_{n-2}^{(1)}(z)$ em $B_{n-1}^{(2)}(z)$, encontramos que

$$B_{n-1}^{(2)}(z) = B_{n-1}^{(0)}(z) - (\alpha_n^{(0)} + \alpha_n^{(1)}) B_{n-2}^{(0)}(z) + \alpha_{n-1}^{(0)} \alpha_n^{(1)} B_{n-3}^{(0)}(z)$$

e, então,

$$B_n^{(2)}(z) = B_n^{(0)}(z) - (\alpha_{n+1}^{(0)} + \alpha_{n+1}^{(1)}) B_{n-1}^{(0)}(z) + \alpha_n^{(0)} \alpha_{n+1}^{(1)} B_{n-2}^{(0)}(z).$$

Assim,

$$\begin{aligned} zB_{n-1}^{(3)}(z) &= B_n^{(0)}(z) + \left[-(\alpha_{n+1}^{(0)} + \alpha_{n+1}^{(1)}) + \beta_n^{(2)} \right] B_{n-1}^{(0)}(z) \\ &+ \left[-(\alpha_n^{(0)} + \alpha_n^{(1)}) \beta_n^{(2)} + \alpha_n^{(0)} \alpha_{n+1}^{(1)} \right] B_{n-2}^{(0)}(z) + \alpha_{n-1}^{(0)} \alpha_n^{(1)} \beta_n^{(2)} B_{n-3}^{(0)}(z). \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

De (2.1.23), temos que

$$\begin{aligned} zB_{n-2}^{(3)}(z) &= B_{n-1}^{(2)}(z) + \beta_{n-1}^{(2)} B_{n-2}^{(2)}(z), \\ B_{n-1}^{(2)}(z) &= \frac{1}{z} \left(B_n^{(1)}(z) + \beta_n^{(1)} B_{n-1}^{(1)}(z) \right) \quad e \\ B_{n-2}^{(2)}(z) &= \frac{1}{z} \left(B_{n-1}^{(1)}(z) + \beta_{n-1}^{(1)} B_{n-2}^{(1)}(z) \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$z^2 B_{n-2}^{(3)}(z) = B_n^{(1)}(z) + (\beta_n^{(1)} + \beta_{n-1}^{(2)}) B_{n-1}^{(1)}(z) + \beta_{n-1}^{(1)} \beta_{n-1}^{(2)} B_{n-2}^{(1)}(z).$$

Os polinômios $B_n^{(1)}(z)$, $B_{n-1}^{(1)}(z)$ e $B_{n-2}^{(1)}(z)$ podem ser dados através de (2.1.22) e, portanto,

$$\begin{aligned} z^2 B_{n-2}^{(3)}(z) &= B_n^{(0)}(z) + (-\alpha_{n+1}^{(0)} + \beta_n^{(1)} + \beta_{n-1}^{(2)}) B_{n-1}^{(0)}(z) \\ &+ \left[-\alpha_n^{(0)} (\beta_n^{(1)} + \beta_{n-1}^{(2)}) + \beta_{n-1}^{(1)} \beta_{n-1}^{(2)} \right] B_{n-2}^{(0)}(z) - \alpha_{n-1}^{(0)} \beta_{n-1}^{(1)} \beta_{n-1}^{(2)} B_{n-3}^{(0)}(z). \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

De (2.1.23) obtemos relações para $B_{n-1}^{(1)}(z)$, $B_{n-2}^{(1)}(z)$ e $B_{n-2}^{(2)}(z)$. Deste modo,

$$B_{n-2}^{(2)}(z) = \frac{1}{z^2} \left[B_n^{(0)}(z) + (\beta_n^{(0)} + \beta_{n-1}^{(1)}) B_{n-1}^{(0)}(z) + \beta_{n-1}^{(0)} \beta_{n-1}^{(1)} B_{n-2}^{(0)}(z) \right] \quad e$$



$$B_{n-3}^{(2)}(z) = \frac{1}{z^2} \left[B_{n-1}^{(0)}(z) + \left(\beta_{n-1}^{(0)} + \beta_{n-2}^{(1)} \right) B_{n-2}^{(0)}(z) + \beta_{n-2}^{(0)} \beta_{n-2}^{(1)} B_{n-3}^{(0)}(z) \right].$$

Substituindo-se $B_{n-2}^{(2)}(z)$ e $B_{n-3}^{(2)}(z)$ em $B_{n-3}^{(3)}(z)$ dado por (2.1.23), temos

$$\begin{aligned} z^3 B_{n-3}^{(3)}(z) &= B_n^{(0)}(z) + \left(\beta_n^{(0)} + \beta_{n-1}^{(1)} + \beta_{n-2}^{(2)} \right) B_{n-1}^{(0)}(z) \\ &+ \left[\left(\beta_{n-1}^{(0)} + \beta_{n-2}^{(1)} \right) \beta_{n-2}^{(2)} + \beta_{n-1}^{(0)} \beta_{n-1}^{(1)} \right] B_{n-2}^{(0)}(z) + \beta_{n-2}^{(0)} \beta_{n-2}^{(1)} \beta_{n-2}^{(2)} B_{n-3}^{(0)}(z). \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Substituindo-se (4.3.6), (4.3.7), (4.3.8) e (4.3.9) em (4.3.5), obtemos

$$\begin{aligned} z^n B_n(\lambda_{n,1}^{(3)}, \lambda_{n,2}^{(3)}, \lambda_{n,3}^{(3)}; \beta^2/z) &= \\ &\left(B_n^{(0)}(0) + B_{n-1}^{(0)}(0) \lambda_{n,1}^{(3)} + B_{n-2}^{(0)}(0) \lambda_{n,2}^{(3)} + B_{n-3}^{(0)}(0) \lambda_{n,3}^{(3)} \right) B_n^{(0)}(z) \\ &+ \left\{ \hat{\lambda}_{n,1}^{(3)} B_n^{(0)}(0) + \left[- \left(\alpha_{n+1}^{(0)} + \alpha_{n+1}^{(1)} \right) + \beta_n^{(2)} \right] B_{n-1}^{(0)}(0) \lambda_{n,1}^{(3)} + \left(-\alpha_{n+1}^{(0)} + \beta_n^{(1)} + \beta_{n-1}^{(2)} \right) \right. \\ &\quad \left. B_{n-2}^{(0)}(0) \lambda_{n,2}^{(3)} + \left(\beta_n^{(0)} + \beta_{n-1}^{(1)} + \beta_{n-2}^{(2)} \right) B_{n-3}^{(0)}(0) \lambda_{n,3}^{(3)} \right\} B_{n-1}^{(0)}(z) \\ &+ \left\{ \hat{\lambda}_{n,2}^{(3)} B_n^{(0)}(0) + \left[- \left(\alpha_n^{(0)} + \alpha_n^{(1)} \right) \beta_n^{(2)} + \alpha_n^{(0)} \alpha_{n+1}^{(1)} \right] B_{n-1}^{(0)}(0) \lambda_{n,1}^{(3)} + \left[-\alpha_n^{(0)} \left(\beta_n^{(1)} + \beta_{n-1}^{(2)} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \beta_{n-1}^{(1)} \beta_{n-1}^{(2)} \right] B_{n-2}^{(0)}(0) \lambda_{n,2}^{(3)} + \left[\left(\beta_{n-1}^{(0)} + \beta_{n-2}^{(1)} \right) \beta_{n-2}^{(2)} + \beta_{n-1}^{(0)} \beta_{n-1}^{(1)} \right] B_{n-3}^{(0)}(0) \lambda_{n,3}^{(3)} \right\} B_{n-2}^{(0)}(z) \\ &+ \left(\hat{\lambda}_{n,3}^{(3)} B_n^{(0)}(0) + \alpha_{n-1}^{(0)} \alpha_n^{(1)} \beta_n^{(2)} B_{n-1}^{(0)}(0) \lambda_{n,1}^{(3)} - \alpha_{n-1}^{(0)} \beta_{n-1}^{(1)} \beta_{n-1}^{(2)} B_{n-2}^{(0)}(0) \lambda_{n,2}^{(3)} \right. \\ &\quad \left. + \beta_{n-2}^{(0)} \beta_{n-2}^{(1)} \beta_{n-2}^{(2)} B_{n-3}^{(0)}(0) \lambda_{n,3}^{(3)} \right) B_{n-3}^{(0)}(z) \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

Supondo que $\left(-\beta_{n-2}^{(0)} \beta_{n-1}^{(0)} \beta_n^{(0)} + \beta_{n-2}^{(0)} \beta_{n-1}^{(0)} \lambda_{n,1}^{(2)} - \beta_{n-2}^{(0)} \lambda_{n,2}^{(3)} + \lambda_{n,3}^{(3)} \right) \neq 0$, dividindo-se (4.3.10) por

$$\begin{aligned} B_n(\lambda_{n,1}^{(3)}, \lambda_{n,2}^{(3)}, \lambda_{n,3}^{(3)}; 0) &= \left(B_n^{(0)}(0) + B_{n-1}^{(0)}(0) \lambda_{n,1}^{(3)} + B_{n-2}^{(0)}(0) \lambda_{n,2}^{(3)} + B_{n-3}^{(0)}(0) \lambda_{n,3}^{(3)} \right) \\ &= \left(-\beta_{n-2}^{(0)} \beta_{n-1}^{(0)} \beta_n^{(0)} + \beta_{n-2}^{(0)} \beta_{n-1}^{(0)} \lambda_{n,1}^{(2)} - \beta_{n-2}^{(0)} \lambda_{n,2}^{(3)} + \lambda_{n,3}^{(3)} \right) B_{n-3}^{(0)}(0) \neq 0 \end{aligned}$$

e usando o Teorema 3.2.1, chegamos que

$$\frac{z^n B_n(\lambda_{n,1}^{(3)}, \lambda_{n,2}^{(3)}, \lambda_{n,3}^{(3)}; \beta^2/z)}{B_n(\lambda_{n,1}^{(3)}, \lambda_{n,2}^{(3)}, \lambda_{n,3}^{(3)}; 0)} = B_n^{(0)}(z) + \eta_{n,1}^{(3)} B_{n-1}^{(0)}(z) + \eta_{n,2}^{(3)} B_{n-2}^{(0)}(z) + \eta_{n,3}^{(3)} B_{n-3}^{(0)}(z),$$

com

$$\eta_{n,1}^{(3)} = \frac{C + D \lambda_{n,1}^{(3)} + E \lambda_{n,2}^{(3)} + F \lambda_{n,3}^{(3)}}{-\beta_{n-2}^{(0)} \beta_{n-1}^{(0)} \beta_n^{(0)} + \beta_{n-2}^{(0)} \beta_{n-1}^{(0)} \lambda_{n,1}^{(3)} - \beta_{n-2}^{(0)} \lambda_{n,2}^{(3)} + \lambda_{n,3}^{(3)}},$$



$$\eta_{n,2}^{(3)} = \frac{G + H\lambda_{n,1}^{(3)} + I\lambda_{n,2}^{(3)} + J\lambda_{n,3}^{(3)}}{-\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} + \beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(3)} - \beta_{n-2}^{(0)}\lambda_{n,2}^{(3)} + \lambda_{n,3}^{(3)}}$$

e

$$\eta_{n,3}^{(3)} = \frac{K + L\lambda_{n,1}^{(3)} + M\lambda_{n,2}^{(3)} + N\lambda_{n,3}^{(3)}}{-\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} + \beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(3)} - \beta_{n-2}^{(0)}\lambda_{n,2}^{(3)} + \lambda_{n,3}^{(3)}},$$

onde

$$C = (\alpha_{n+1}^{(0)} + \alpha_{n+1}^{(1)} + \alpha_{n+1}^{(2)})\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)},$$

$$D = (-\alpha_{n+1}^{(0)} - \alpha_{n+1}^{(1)} + \beta_n^{(2)})\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)},$$

$$E = (\alpha_{n+1}^{(0)} - \beta_n^{(1)} - \beta_{n-1}^{(2)})\beta_{n-2}^{(0)},$$

$$F = \beta_n^{(0)} + \beta_{n-1}^{(1)} + \beta_{n-2}^{(2)},$$

$$G = -(\alpha_{n+1}^{(0)}\alpha_{n+1}^{(1)} + \alpha_{n+1}^{(0)}\alpha_{n+1}^{(2)} + \alpha_n^{(1)}\alpha_{n+1}^{(2)})\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)},$$

$$H = (\alpha_{n+1}^{(0)}\alpha_{n+1}^{(1)} - \alpha_n^{(0)}\beta_n^{(2)} - \alpha_n^{(1)}\beta_n^{(2)})\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)},$$

$$I = (\alpha_n^{(0)}\beta_n^{(1)} + \alpha_n^{(0)}\beta_{n-1}^{(2)} - \beta_{n-1}^{(1)}\beta_{n-1}^{(2)})\beta_{n-2}^{(0)},$$

$$J = \beta_{n-1}^{(0)}\beta_{n-1}^{(1)} + \beta_{n-1}^{(0)}\beta_{n-2}^{(2)} + \beta_{n-2}^{(1)}\beta_{n-2}^{(2)},$$

$$K = \alpha_{n-1}^{(0)}\alpha_n^{(1)}\alpha_{n+1}^{(2)}\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)},$$

$$L = \alpha_{n-1}^{(0)}\alpha_n^{(1)}\beta_n^{(2)}\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)},$$

$$M = \alpha_{n-1}^{(0)}\beta_{n-1}^{(1)}\beta_{n-1}^{(2)}\beta_{n-2}^{(0)},$$

$$N = \beta_{n-2}^{(1)}\beta_{n-2}^{(2)}\beta_{n-2}^{(0)}.$$

Como procuramos parâmetros tais que $\eta_{n,1}^{(3)} = \lambda_{n,1}^{(3)}$, $\eta_{n,2}^{(3)} = \lambda_{n,2}^{(3)}$ e $\eta_{n,3}^{(3)} = \lambda_{n,3}^{(3)}$, ou seja, parâmetros para os quais o polinômio seja β -inversível, obtemos

$$\lambda_{n,1}^{(3)} = \frac{C + D\lambda_{n,1}^{(3)} + E\lambda_{n,2}^{(3)} + F\lambda_{n,3}^{(3)}}{-\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} + \beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(3)} - \beta_{n-2}^{(0)}\lambda_{n,2}^{(3)} + \lambda_{n,3}^{(3)}}, \quad (4.3.11)$$

$$\lambda_{n,2}^{(3)} = \frac{G + H\lambda_{n,1}^{(3)} + I\lambda_{n,2}^{(3)} + J\lambda_{n,3}^{(3)}}{-\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} + \beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(3)} - \beta_{n-2}^{(0)}\lambda_{n,2}^{(3)} + \lambda_{n,3}^{(3)}} \quad (4.3.12)$$

e

$$\lambda_{n,3}^{(3)} = \frac{K + L\lambda_{n,1}^{(3)} + M\lambda_{n,2}^{(3)} + N\lambda_{n,3}^{(3)}}{-\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} + \beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(3)} - \beta_{n-2}^{(0)}\lambda_{n,2}^{(3)} + \lambda_{n,3}^{(3)}}. \quad (4.3.13)$$



Vamos então procurar $\lambda_{n,1}^{(3)}$, $\lambda_{n,2}^{(3)}$ e $\lambda_{n,3}^{(3)}$ que satisfaçam (4.3.11), (4.3.12) e (4.3.13) simultaneamente.

Multiplicando-se (4.3.11) por $\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}$, (4.3.12) por $-\beta_{n-2}^{(0)}$ e somando-se membro a membro as equações, chegamos a

$$\begin{aligned} \beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(2)} - \beta_{n-2}^{(0)}\lambda_{n,2}^{(2)} = & \frac{\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)} \left(C + D\lambda_{n,1}^{(3)} + E\lambda_{n,2}^{(3)} + F\lambda_{n,3}^{(3)} \right)}{-\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} + \beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(3)} - \beta_{n-2}^{(0)}\lambda_{n,2}^{(3)} + \lambda_{n,3}^{(3)}} \\ & + \frac{-\beta_{n-2}^{(0)} \left(G + H\lambda_{n,1}^{(3)} + I\lambda_{n,2}^{(3)} + J\lambda_{n,3}^{(3)} \right)}{-\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} + \beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(3)} - \beta_{n-2}^{(0)}\lambda_{n,2}^{(3)} + \lambda_{n,3}^{(3)}}. \end{aligned}$$

Somando-se $-\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)}$ em ambos os membros e somando o resultado a (4.3.13) obtemos

$$\begin{aligned} & \left(-\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} + \beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(3)} - \beta_{n-2}^{(0)}\lambda_{n,2}^{(3)} + \lambda_{n,3}^{(3)} \right)^2 = (\beta_{n-2}^{(0)})^2(\beta_{n-1}^{(0)})^2(\beta_n^{(0)})^2 \\ & + \beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}C - \beta_{n-2}^{(0)}G + K + \left(\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}D - \beta_{n-2}^{(0)}H + L - (\beta_{n-2}^{(0)})^2(\beta_{n-1}^{(0)})^2\beta_n^{(0)} \right) \lambda_{n,1}^{(3)} \\ & + \left(\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}E - \beta_{n-2}^{(0)}I + M + (\beta_{n-2}^{(0)})^2\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} \right) \lambda_{n,2}^{(3)} + \left(\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}F - \beta_{n-2}^{(0)}J + N \right. \\ & \left. - \beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} \right) \lambda_{n,3}^{(3)}. \end{aligned}$$

Usando as relações (2.1.17) e (2.1.18) observamos que

$$\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}D - \beta_{n-2}^{(0)}H + L - (\beta_{n-2}^{(0)})^2(\beta_{n-1}^{(0)})^2\beta_n^{(0)} = 0,$$

$$\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}E - \beta_{n-2}^{(0)}I + M + (\beta_{n-2}^{(0)})^2\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} = 0$$

e

$$\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}F - \beta_{n-2}^{(0)}J + N - \beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \left(-\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} + \beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(3)} - \beta_{n-2}^{(0)}\lambda_{n,2}^{(3)} + \lambda_{n,3}^{(3)} \right)^2 = \\ & (\beta_{n-2}^{(0)})^2(\beta_{n-1}^{(0)})^2(\beta_n^{(0)})^2 + \beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}C - \beta_{n-2}^{(0)}G + K \end{aligned}$$

e, das relações (2.1.17) e (2.1.20),

$$\begin{aligned} & \left(-\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} + \beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(3)} - \beta_{n-2}^{(0)}\lambda_{n,2}^{(3)} + \lambda_{n,3}^{(3)} \right)^2 = \\ & \left[\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\gamma_n^{(0)} + (\alpha_{n+1}^{(1)} + \alpha_{n+1}^{(2)})\beta_{n-2}^{(0)}\gamma_{n-1}^{(0)} + \gamma_{n-2}^{(0)}\alpha_n^{(1)}\alpha_{n+1}^{(2)} \right] \beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)}. \end{aligned}$$



De (2.1.17) e (2.1.20) sabemos que $\gamma_n^{(1)} = \beta_n^{(1)} + \alpha_{n+1}^{(1)}$, $\beta_{n-2}^{(0)}\gamma_{n-1}^{(0)} = \gamma_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(1)}$ e $\beta_{n-1}^{(0)}\gamma_n^{(0)} = \gamma_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(1)}$. Então,

$$(-\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} + \beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(3)} - \beta_{n-2}^{(0)}\lambda_{n,2}^{(3)} + \lambda_{n,3}^{(3)})^2 = \left(\beta_{n-2}^{(0)}\gamma_{n-1}^{(0)}\gamma_n^{(1)} + \beta_{n-2}^{(0)}\gamma_{n-1}^{(0)}\alpha_{n+1}^{(2)} + \gamma_{n-2}^{(0)}\alpha_n^{(1)}\alpha_{n+1}^{(2)} \right) \beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)}.$$

Como $\beta_{n-2}^{(0)}\gamma_{n-1}^{(0)} = \gamma_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(1)}$, $\gamma_n^{(1)} = \beta_n^{(2)} + \alpha_n^{(2)}$ e $\alpha_n^{(1)}\beta_n^{(2)} = \beta_{n-1}^{(1)}\alpha_n^{(2)}$, obtemos

$$(-\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} + \beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(3)} - \beta_{n-2}^{(0)}\lambda_{n,2}^{(3)} + \lambda_{n,3}^{(3)})^2 = \beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)}\gamma_{n-2}^{(0)}\gamma_{n-1}^{(1)}\gamma_n^{(2)}.$$

Da relação (2.1.20) podemos encontrar que

$$\gamma_{n-2}^{(0)} = \frac{\beta_{n-2}^{(0)}\gamma_{n-1}^{(0)}}{\beta_{n-1}^{(1)}}, \quad \gamma_{n-1}^{(0)} = \frac{\beta_{n-1}^{(0)}\gamma_n^{(0)}}{\beta_n^{(1)}} \quad \text{e} \quad \gamma_{n-1}^{(1)} = \frac{\beta_{n-1}^{(1)}\gamma_n^{(1)}}{\beta_n^{(2)}}.$$

Deste modo,

$$\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)}\gamma_{n-2}^{(0)}\gamma_{n-1}^{(1)}\gamma_n^{(2)} = \frac{(\beta_{n-2}^{(0)})^2(\beta_{n-1}^{(0)})^2\beta_n^{(0)}\gamma_n^{(0)}\gamma_n^{(1)}\gamma_n^{(2)}}{\beta^2}.$$

Pelas relações entre os coeficientes, temos que $\beta_n^{(0)}\beta_n^{(3)} = \beta^2$ e $\gamma_n^{(2)} = \frac{\gamma_{n-1}^{(2)}\beta_n^{(3)}}{\beta_{n-1}^{(2)}}$.

Logo,

$$\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)}\gamma_{n-2}^{(0)}\gamma_{n-1}^{(1)}\gamma_n^{(2)} = \frac{(\beta_{n-2}^{(0)})^2(\beta_{n-1}^{(0)})^2\gamma_n^{(0)}\gamma_n^{(1)}\gamma_{n-1}^{(2)}}{\beta_{n-1}^{(2)}}.$$

Mas, $\gamma_{n-1}^{(2)} = \beta_{n-1}^{(2)} + \alpha_n^{(2)}$ e, pela simetria, $\alpha_n^{(1)}\beta_{n-1}^{(2)} = \beta_n^{(1)}\alpha_n^{(2)}$. Então,

$$\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)}\gamma_{n-2}^{(0)}\gamma_{n-1}^{(1)}\gamma_n^{(2)} = (\beta_{n-2}^{(0)})^2(\beta_{n-1}^{(0)})^2(\gamma_n^{(0)})^2\frac{\gamma_n^{(1)}}{\beta_n^{(1)}}$$

e, portanto,

$$-\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} + \beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(3)} - \beta_{n-2}^{(0)}\lambda_{n,2}^{(3)} + \lambda_{n,3}^{(3)} = \pm \beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\gamma_n^{(0)}\sqrt{\frac{\gamma_n^{(1)}}{\beta_n^{(1)}}}.$$

Multiplicando-se e dividindo-se por $\sqrt{\beta_n^{(1)}}$ e usando que $\beta_{n-1}^{(0)}\gamma_n^{(0)} = \gamma_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(1)}$, obtemos

$$-\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} + \beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(3)} - \beta_{n-2}^{(0)}\lambda_{n,2}^{(3)} + \lambda_{n,3}^{(3)} = \pm \beta_{n-2}^{(0)}\gamma_{n-1}^{(0)}\sqrt{\beta_n^{(1)}\gamma_n^{(1)}}. \quad (4.3.14)$$

Novamente há duas possibilidades de solução para (4.3.11), (4.3.12) e (4.3.13), ou seja, podemos escolher

$$\lambda_{n,3}^{(3)} = \beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} - \beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(3)} + \beta_{n-2}^{(0)}\lambda_{n,2}^{(3)} + \beta_{n-2}^{(0)}\gamma_{n-1}^{(0)}\sqrt{\beta_n^{(1)}\gamma_n^{(1)}}$$

ou

$$\lambda_{n,3}^{(3)} = \beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} - \beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(3)} + \beta_{n-2}^{(0)}\lambda_{n,2}^{(3)} - \beta_{n-2}^{(0)}\gamma_{n-1}^{(0)}\sqrt{\beta_n^{(1)}\gamma_n^{(1)}}.$$

De modo análogo aos anteriores usaremos a notação $\lambda_{n,1}^{(3)+}, \lambda_{n,2}^{(3)+}, \lambda_{n,3}^{(3)+}$, e $\lambda_{n,1}^{(3)-}, \lambda_{n,2}^{(3)-}, \lambda_{n,3}^{(3)-}$ para as respectivas escolhas em (4.3.14) e $\lambda_{n,1}^{(3)\pm}, \lambda_{n,2}^{(3)\pm}, \lambda_{n,3}^{(3)\pm}$ quando nos referimos a ambas.

Considerando a escolha positiva

$$\lambda_{n,3}^{(3)+} = \beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} - \beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(3)+} + \beta_{n-2}^{(0)}\lambda_{n,2}^{(3)+} + \beta_{n-2}^{(0)}\gamma_{n-1}^{(0)}\sqrt{\beta_n^{(1)}\gamma_n^{(1)}}, \quad (4.3.15)$$

substituindo-a em (4.3.11), (4.3.12) ou (4.3.13) temos, para $\lambda_{n,3}^{(3)+} \in \mathbb{R}$, $n \geq 3$,

$$\lambda_{n,1}^{(3)+} = \delta_1^+ \lambda_{n,3}^{(3)+} + \delta_2^+ \quad (4.3.16)$$

e, substituindo (4.3.16) em (4.3.15), obtemos

$$\lambda_{n,2}^{(3)+} = \delta_3^+ \lambda_{n,3}^{(3)+} + \delta_4^+, \quad (4.3.17)$$

onde

$$\begin{aligned} \delta_1^+ &= -\frac{\alpha_{n-1}^{(1)}\beta_{n-1}^{(2)} + \beta^2 - \gamma_{n-1}^{(0)}\sqrt{\beta_n^{(1)}\gamma_n^{(1)}}}{\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\alpha_{n-1}^{(1)}\gamma_{n-1}^{(2)}}, \\ \delta_2^+ &= \frac{(\beta_n^{(0)}\beta_{n-1}^{(2)} - \alpha_{n+1}^{(0)}\alpha_n^{(2)})\beta_{n-1}^{(0)} + \beta_{n-1}^{(2)}\gamma_{n-1}^{(0)}\sqrt{\beta_n^{(1)}\gamma_n^{(1)}}}{\beta_{n-1}^{(0)}\gamma_{n-1}^{(2)}}, \\ \delta_3^+ &= -\frac{-\alpha_{n-1}^{(1)}\alpha_n^{(2)} + \beta^2 - \gamma_{n-1}^{(0)}\sqrt{\beta_n^{(1)}\gamma_n^{(1)}}}{\beta_{n-2}^{(0)}\alpha_{n-1}^{(1)}\gamma_{n-1}^{(2)}} \quad \text{e} \\ \delta_4^+ &= -\frac{\beta_n^{(1)}\alpha_n^{(2)}\gamma_{n-1}^{(0)} + \alpha_n^{(2)}\gamma_{n-1}^{(0)}\sqrt{\beta_n^{(1)}\gamma_n^{(1)}}}{\gamma_{n-1}^{(2)}}. \end{aligned}$$



Assim, para cada escolha $\lambda_{n,3}^{(3)+} \in \mathbb{R}$ através de (4.3.16) e (4.3.17), obtemos valores para $\lambda_{n,1}^{(3)+}$ e $\lambda_{n,2}^{(3)+}$, respectivamente, que tornam $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)+}, \lambda_{n,2}^{(3)+}, \lambda_{n,3}^{(3)+}; z)$ β -invertível.

Os valores de $\lambda_{n,2}^{(3)+}$ e $\lambda_{n,3}^{(3)+}$ também podem ser dados em função do parâmetro $\lambda_{n,1}^{(3)+}$. Para isso, substituímos $\lambda_{n,3}^{(3)+}$ em (4.3.11), (4.3.12) ou (4.3.13) e obtemos $\lambda_{n,2}^{(3)+}$ em função de $\lambda_{n,1}^{(3)+}$. Voltando em (4.3.15) e substituindo-se $\lambda_{n,2}^{(3)+}$ temos $\lambda_{n,3}^{(3)+}$ em função de $\lambda_{n,1}^{(3)+} \in \mathbb{R}$, ou seja, para $n \geq 3$,

$$\begin{aligned}\lambda_{n,1}^{(3)+} &\in \mathbb{R}, \\ \lambda_{n,2}^{(3)+} &= \sigma_1^+ \lambda_{n,1}^{(3)+} + \sigma_2^+ \quad \text{e} \\ \lambda_{n,3}^{(3)+} &= \sigma_3^+ \lambda_{n,1}^{(3)+} + \sigma_4^+, \end{aligned} \tag{4.3.18}$$

onde

$$\begin{aligned}\sigma_1^+ &= \frac{\left(-\alpha_{n-1}^{(1)}\alpha_n^{(2)} + \beta^2 - \gamma_{n-1}^{(0)}\sqrt{\beta_n^{(1)}\gamma_n^{(1)}}\right)\beta_{n-1}^{(0)}}{\alpha_{n-1}^{(1)}\beta_{n-1}^{(2)} + \beta^2 - \gamma_{n-1}^{(0)}\sqrt{\beta_n^{(1)}\gamma_n^{(1)}}}, \\ \sigma_2^+ &= \frac{\left[\gamma_{n-1}^{(0)}\gamma_n^{(1)} + \left(\gamma_{n-1}^{(0)} + \alpha_n^{(1)}\right)\alpha_{n+1}^{(2)} - \beta^2\right]\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} - \left(\beta_n^{(2)}\gamma_n^{(0)} - \beta_n^{(0)}\gamma_{n-1}^{(0)}\right)\beta_{n-1}^{(0)}\sqrt{\beta_n^{(1)}\gamma_n^{(1)}}}{\alpha_{n-1}^{(1)}\beta_{n-1}^{(2)} + \beta^2 - \gamma_{n-1}^{(0)}\sqrt{\beta_n^{(1)}\gamma_n^{(1)}}}, \\ \sigma_3^+ &= \frac{-\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\alpha_{n-1}^{(1)}\gamma_{n-1}^{(2)}}{\alpha_{n-1}^{(1)}\beta_{n-1}^{(2)} + \beta^2 - \gamma_{n-1}^{(0)}\sqrt{\beta_n^{(1)}\gamma_n^{(1)}}} \quad \text{e} \\ \sigma_4^+ &= \frac{\left(\beta_n^{(0)}\beta_{n-1}^{(2)} - \alpha_{n+1}^{(0)}\alpha_n^{(2)}\right)\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\alpha_{n-1}^{(1)} + \beta_{n-2}^{(0)}\alpha_{n-1}^{(1)}\beta_{n-1}^{(2)}\gamma_{n-1}^{(0)}\sqrt{\beta_n^{(1)}\gamma_n^{(1)}}}{\alpha_{n-1}^{(1)}\beta_{n-1}^{(2)} + \beta^2 - \gamma_{n-1}^{(0)}\sqrt{\beta_n^{(1)}\gamma_n^{(1)}}}.\end{aligned}$$

Se considerarmos a escolha negativa em (4.3.14)

$$\lambda_{n,3}^{(3)-} = \beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\beta_n^{(0)} - \beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\lambda_{n,1}^{(3)-} + \beta_{n-2}^{(0)}\lambda_{n,2}^{(3)-} - \beta_{n-2}^{(0)}\gamma_{n-1}^{(0)}\sqrt{\gamma_n^{(1)}\beta_n^{(1)}}$$

e substituímos em (4.3.11), (4.3.12) ou (4.3.13), analogamente, para $n \geq 3$, encontraremos

$$\lambda_{n,3}^{(3)-} \in \mathbb{R},$$

$$\lambda_{n,1}^{(3)-} = \delta_1^- \lambda_{n,3}^{(3)-} + \delta_2^- \quad \text{e}$$

$$\lambda_{n,2}^{(3)-} = \delta_3^- \lambda_{n,3}^{(3)-} + \delta_4^-,$$

onde

$$\begin{aligned} \delta_1^- &= -\frac{\alpha_{n-1}^{(1)}\beta_{n-1}^{(2)} + \beta^2 + \gamma_{n-1}^{(0)}\sqrt{\beta_n^{(1)}\gamma_n^{(1)}}}{\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\alpha_{n-1}^{(1)}\gamma_{n-1}^{(2)}}, \\ \delta_2^- &= \frac{(\beta_n^{(0)}\beta_{n-1}^{(2)} - \alpha_{n+1}^{(0)}\alpha_n^{(2)})\beta_{n-1}^{(0)} - \beta_{n-1}^{(2)}\gamma_{n-1}^{(0)}\sqrt{\beta_n^{(1)}\gamma_n^{(1)}}}{\beta_{n-1}^{(0)}\gamma_{n-1}^{(2)}}, \\ \delta_3^- &= -\frac{-\alpha_{n-1}^{(1)}\alpha_n^{(2)} + \beta^2 + \gamma_{n-1}^{(0)}\sqrt{\beta_n^{(1)}\gamma_n^{(1)}}}{\beta_{n-2}^{(0)}\alpha_{n-1}^{(1)}\gamma_{n-1}^{(2)}} \quad \text{e} \\ \delta_4^- &= -\frac{\beta_n^{(1)}\alpha_n^{(2)}\gamma_{n-1}^{(0)} - \alpha_n^{(2)}\gamma_{n-1}^{(0)}\sqrt{\beta_n^{(1)}\gamma_n^{(1)}}}{\gamma_{n-1}^{(2)}}. \end{aligned}$$

Neste caso, de modo análogo à escolha positiva, podemos escrever os valores de $\lambda_{n,2}^{(3)-}$, $\lambda_{n,3}^{(3)-}$ em função de $\lambda_{n,1}^{(3)-} \in \mathbb{R}$, ou seja, para $n \geq 3$,

$$\lambda_{n,1}^{(3)-} \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_{n,2}^{(3)-} = \sigma_1^- \lambda_{n,1}^{(3)-} + \sigma_2^- \quad \text{e} \quad (4.3.19)$$

$$\lambda_{n,3}^{(3)-} = \sigma_3^- \lambda_{n,1}^{(3)-} + \sigma_4^-,$$

onde

$$\begin{aligned} \sigma_1^- &= \frac{\left(-\alpha_{n-1}^{(1)}\alpha_n^{(2)} + \beta^2 + \gamma_{n-1}^{(0)}\sqrt{\beta_n^{(1)}\gamma_n^{(1)}}\right)\beta_{n-1}^{(0)}}{\alpha_{n-1}^{(1)}\beta_{n-1}^{(2)} + \beta^2 + \gamma_{n-1}^{(0)}\sqrt{\beta_n^{(1)}\gamma_n^{(1)}}}, \\ \sigma_2^- &= \frac{\left[\gamma_{n-1}^{(0)}\gamma_n^{(1)} + (\gamma_{n-1}^{(0)} + \alpha_n^{(1)})\alpha_{n+1}^{(2)} - \beta^2\right]\beta_{n-1}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)} + (\beta_n^{(2)}\gamma_n^{(0)} - \beta_n^{(0)}\gamma_{n-1}^{(0)})\beta_{n-1}^{(0)}\sqrt{\beta_n^{(1)}\gamma_n^{(1)}}}{\alpha_{n-1}^{(1)}\beta_{n-1}^{(2)} + \beta^2 + \gamma_{n-1}^{(0)}\sqrt{\beta_n^{(1)}\gamma_n^{(1)}}}, \\ \sigma_3^- &= \frac{-\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\alpha_{n-1}^{(1)}\gamma_{n-1}^{(2)}}{\alpha_{n-1}^{(1)}\beta_{n-1}^{(2)} + \beta^2 + \gamma_{n-1}^{(0)}\sqrt{\beta_n^{(1)}\gamma_n^{(1)}}} \quad \text{e} \\ \sigma_4^- &= \frac{(\beta_n^{(0)}\beta_{n-1}^{(2)} - \alpha_{n+1}^{(0)}\alpha_n^{(2)})\beta_{n-2}^{(0)}\beta_{n-1}^{(0)}\alpha_{n-1}^{(1)} - \beta_{n-2}^{(0)}\alpha_{n-1}^{(1)}\beta_{n-1}^{(2)}\gamma_{n-1}^{(0)}\sqrt{\beta_n^{(1)}\gamma_n^{(1)}}}{\alpha_{n-1}^{(1)}\beta_{n-1}^{(2)} + \beta^2 + \gamma_{n-1}^{(0)}\sqrt{\beta_n^{(1)}\gamma_n^{(1)}}}. \end{aligned}$$



Encontrados os parâmetros que tornam o polinômio β -invertível, como nas seções anteriores vamos analisar $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)\pm}, \lambda_{n,2}^{(3)\pm}, \lambda_{n,3}^{(3)\pm}; z)$ em $z = 0$ e obter informações sobre o comportamento dos seus zeros. Da relação de recorrência de $B_n^{(0)}(z)$ obtemos

$$B_n(\lambda_{n,1}^{(3)\pm}, \lambda_{n,2}^{(3)\pm}, \lambda_{n,3}^{(3)\pm}; 0) = (-1)^{n+1} \left(-\beta_{n-2}^{(0)} \beta_{n-1}^{(0)} \beta_n^{(0)} + \beta_{n-2}^{(0)} \beta_{n-1}^{(0)} \lambda_{n,1}^{(3)\pm} - \beta_{n-2}^{(0)} \lambda_{n,2}^{(3)\pm} + \lambda_{n,3}^{(3)\pm} \right) \beta_{n-3}^{(0)} \cdots \beta_1^{(0)}.$$

4.3.1 Localização dos zeros de $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)+}, \lambda_{n,2}^{(3)+}, \lambda_{n,3}^{(3)+}; z)$

De acordo com as possibilidades de escolha dos parâmetros, na escolha positiva em (4.3.14) temos que

$$B_n(\lambda_{n,1}^{(3)+}, \lambda_{n,2}^{(3)+}, \lambda_{n,3}^{(3)+}; 0) = (-1)^{n+1} \overbrace{\beta_{n-2}^{(0)} \gamma_{n-1}^{(0)} \sqrt{\beta_n^{(1)} \gamma_n^{(1)} \beta_{n-3}^{(0)} \cdots \beta_1^{(0)}}}^{> 0}, \quad n \geq 3.$$

Logo,

$$\text{sinal} \left(B_n(\lambda_{n,1}^{(3)+}, \lambda_{n,2}^{(3)+}, \lambda_{n,3}^{(3)+}; 0) \right) = (-1)^{n+1}, \quad n \geq 3. \quad (4.3.20)$$

Para $n = 1$, escolhemos $\lambda_{1,1}^{(3)+} = \beta_1^{(0)} + \beta$ em (4.3.1). Então, temos que o polinômio $B_1(\lambda_{1,1}^{(3)+}, \lambda_{1,2}^{(3)+}, \lambda_{1,3}^{(3)+}; z) = z + \beta$ é β -invertível e também satisfaz $B_1(\lambda_{1,1}^{(3)+}, \lambda_{1,2}^{(3)+}, \lambda_{1,3}^{(3)+}; 0) > 0$.

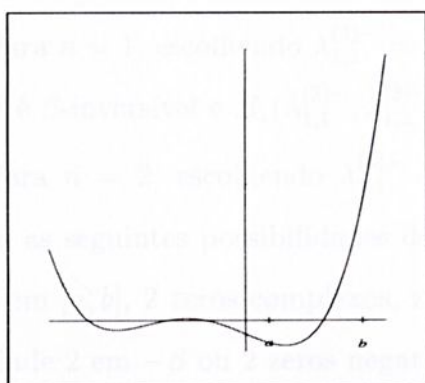
Para $n=2$, pela simetria temos que $B_2(\lambda_{2,1}^{(3)+}, \lambda_{2,2}^{(3)+}, \lambda_{2,3}^{(3)+}; z) = (z + \beta)(z - \beta)$ é β -invertível e $B_2(\lambda_{2,1}^{(3)+}, \lambda_{2,2}^{(3)+}, \lambda_{2,3}^{(3)+}; 0) < 0$.

O polinômio $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)+}, \lambda_{n,2}^{(3)+}, \lambda_{n,3}^{(3)+}; z)$ é mônico, β -invertível e tem pelo menos $n-3$ zeros em (a, b) . Então (4.3.20) nos mostra (veja Figura 4.5) as possibilidades de localização dos zeros:

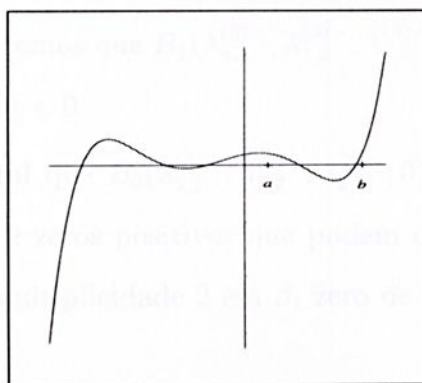
- 1 zero em $-\beta$, 1 zero em $(0, a]$ (pela simetria 1 zero em $[b, \infty)$) e $n-3$ zeros distintos em (a, b) ,
- 1 zero em $-\beta$ e $n-1$ zeros distintos em (a, b) ,



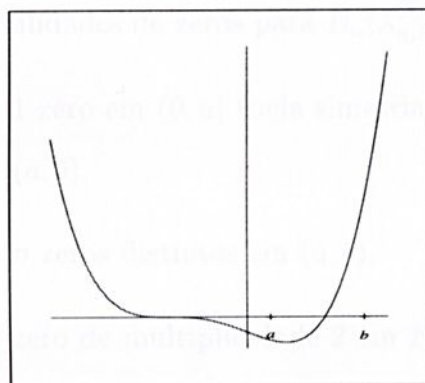
- 1 zero em $-\beta$, zero de multiplicidade 2 em β quando n é par ou multiplicidade 3 quando n é ímpar, e o restante distintos em (a, b) ,
- zero de multiplicidade 3 em $-\beta$ e $n - 3$ zeros distintos em (a, b) ,
- 1 zero em $-\beta$, 2 zeros complexos e $n - 3$ zeros distintos em (a, b) ou
- 1 zero em $-\beta$, 2 zeros negativos e $n - 3$ zeros distintos em (a, b) .



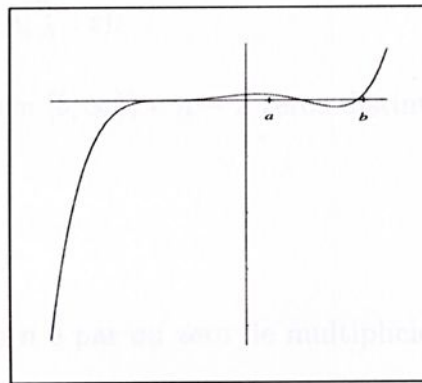
(a) para n par



(b) para n ímpar



(c) para n par



(d) para n ímpar

Figura 4.5: Exemplos do comportamento de $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)+}, \lambda_{n,2}^{(3)+}, \lambda_{n,3}^{(3)+}; 0)$

4.3.2 Localização dos zeros de $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)-}, \lambda_{n,2}^{(3)-}, \lambda_{n,3}^{(3)-}; z)$

Para a escolha negativa em (4.3.14)

$$B_n(\lambda_{n,1}^{(3)-}, \lambda_{n,2}^{(3)-}, \lambda_{n,3}^{(3)-}; 0) = (-1)^n \overbrace{\beta_{n-2}^{(0)} \gamma_{n-1}^{(0)} \sqrt{\beta_n^{(1)} \gamma_n^{(1)}} \beta_{n-3}^{(0)} \cdots \beta_1^{(0)}}^{> 0}, \quad n \geq 3,$$

e, portanto,

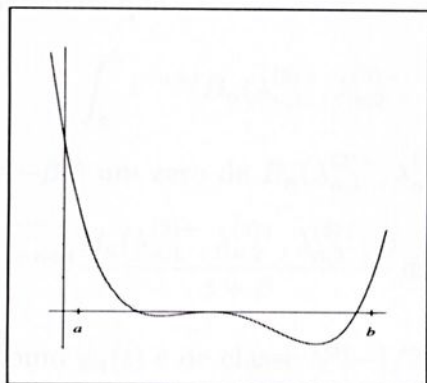
$$\text{senal} \left(B_n(\lambda_{n,1}^{(3)-}, \lambda_{n,2}^{(3)-}, \lambda_{n,3}^{(3)-}; 0) \right) = (-1)^n, \quad n \geq 3. \quad (4.3.21)$$

Para $n = 1$, escolhendo $\lambda_{1,1}^{(3)-} = \beta_1^{(0)} - \beta$ temos que $B_1(\lambda_{1,1}^{(3)-}, \lambda_{1,2}^{(3)-}, \lambda_{1,3}^{(3)-}; z) = z - \beta$ é β -inversível e $B_1(\lambda_{1,1}^{(3)-}, \lambda_{1,2}^{(3)-}, \lambda_{1,3}^{(3)-}; 0) < 0$.

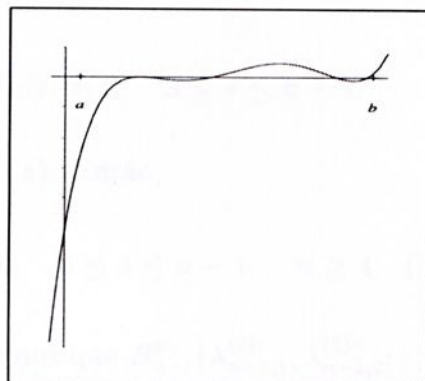
Para $n = 2$, escolhendo $\lambda_{2,1}^{(3)-}$ e $\lambda_{2,2}^{(3)-}$ tal que $B_2(\lambda_{2,1}^{(3)-}, \lambda_{2,2}^{(3)-}, \lambda_{2,3}^{(3)-}; 0) > 0$, temos as seguintes possibilidades de zeros: 2 zeros positivos que podem ou não estar em $[a, b]$, 2 zeros complexos, zero de multiplicidade 2 em β , zero de multiplicidade 2 em $-\beta$ ou 2 zeros negativos.

Para $n > 2$, como o polinômio $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)-}, \lambda_{n,2}^{(3)-}, \lambda_{n,3}^{(3)-}; z)$ é mônico, β -inversível e, por (4.3.21), tem $n - 2$ zeros em (a, b) (veja Figura 4.6), temos as seguintes possibilidades de zeros para $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)-}, \lambda_{n,2}^{(3)-}, \lambda_{n,3}^{(3)-}; z)$:

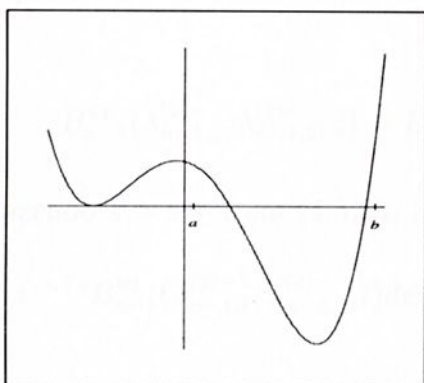
- 1 zero em $(0, a]$ (pela simetria 1 zero em $[b, \infty)$) e $n - 2$ zeros distintos em (a, b) ,
- n zeros distintos em (a, b) ,
- zero de multiplicidade 2 em β quando n é par ou zero de multiplicidade 3 em β quando n é ímpar e o restante dos zeros distintos também em (a, b) ,
- 2 zeros complexos e $n - 2$ zeros distintos em (a, b) ,
- zero de multiplicidade 2 em $-\beta$ e $n - 2$ zeros distintos em (a, b) ou
- 2 zeros negativos e $n - 2$ zeros distintos em (a, b) .



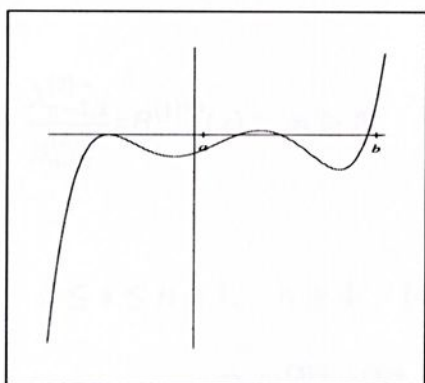
(a) para n par



(b) para n ímpar



(c) para n par



(d) para n ímpar

Figura 4.6: Exemplos do comportamento de $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)-}, \lambda_{n,2}^{(3)-}, \lambda_{n,3}^{(3)-}; 0)$

4.3.3 $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)+}, \lambda_{n,2}^{(3)+}, \lambda_{n,3}^{(3)+}; z)$ e medidas de classe $S^3[\omega, \beta, b]$

Tendo em vista a localização dos zeros de $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)+}, \lambda_{n,2}^{(3)+}, \lambda_{n,3}^{(3)+}; z)$ dada na seção 4.3.1, vamos relacionar esses polinômios com medidas de classe $S^3[\omega, \beta, b]$ e encontrar o valor do parâmetro $\lambda_{n,1}^{(3)+}$ que fornece algumas das possibilidades citadas.

Consideremos a medida $\psi_4(t)$ de classe $S^3[-1/2, \beta, b]$, relacionada com $\psi(t)$ de classe $S^3[-1, \beta, b]$, dada por

$$d\psi_4(t) = (t + \beta)d\psi(t), \quad t \in (a, b).$$

Sabemos que

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n(\lambda_{n,1}^{(3)+}, \lambda_{n,2}^{(3)+}, \lambda_{n,3}^{(3)+}; t) d\psi(t) = 0, \quad 3 \leq s \leq n-1,$$

e que $-\beta$ é um zero de $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)+}, \lambda_{n,2}^{(3)+}, \lambda_{n,3}^{(3)+}; z)$. Então,

$$\int_a^b t^{-n+s} \frac{B_n(\lambda_{n,1}^{(3)+}, \lambda_{n,2}^{(3)+}, \lambda_{n,3}^{(3)+}; t)}{t + \beta} d\psi_4(t) = 0, \quad 3 \leq s \leq n-1, \quad n \geq 4. \quad (4.3.22)$$

Como $\psi_4(t)$ é de classe $S^3[-1/2, \beta, b]$, temos que $B_{n-1}^{\psi_4}(\lambda_{n-1,1}^{(2)-}, \lambda_{n-1,2}^{(2)-}; z)$ satisfaz, por (4.2.2),

$$\int_a^b t^{-(n-1)+s} B_{n-1}^{\psi_4}(\lambda_{n-1,1}^{(2)-}, \lambda_{n-1,2}^{(2)-}; t) d\psi_4(t) = 0, \quad 2 \leq s \leq n-2, \quad (4.3.23)$$

onde

$$B_{n-1}^{\psi_4}(\lambda_{n-1,1}^{(2)-}, \lambda_{n-1,2}^{(2)-}; z) = B_{n-1}^{(1)\psi_4}(z) + \frac{\lambda_{n-1,2}^{(2)-}}{\beta_{n-2}^{(0)\psi_4}} z B_{n-3}^{(1)\psi_4}(z), \quad n \geq 3.$$

Fazendo $s = s + 1$ em (4.3.23) obtemos

$$\int_a^b t^{-n+s} B_{n-1}^{\psi_4}(\lambda_{n-1,1}^{(2)-}, \lambda_{n-1,2}^{(2)-}; t) d\psi_4(t) = 0, \quad 3 \leq s \leq n-1, \quad n \geq 4. \quad (4.3.24)$$

Observando (4.3.22) e (4.3.24), vemos que os polinômios $\frac{B_n(\lambda_{n,1}^{(3)+}, \lambda_{n,2}^{(3)+}, \lambda_{n,3}^{(3)+}; z)}{z + \beta}$ e $B_{n-1}^{\psi_4}(\lambda_{n-1,1}^{(2)-}, \lambda_{n-1,2}^{(2)-}; z)$ satisfazem às mesmas $n-3$ condições e também são mônicos e β -inversíveis.

Vamos comparar $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)+}, \lambda_{n,2}^{(3)+}, \lambda_{n,3}^{(3)+}; z)$ com $(z + \beta)B_{n-1}^{\psi_4}(\lambda_{n-1,1}^{(2)-}, \lambda_{n-1,2}^{(2)-}; z)$.

Temos, pela definição, que

$$\begin{aligned} B_n(\lambda_{n,1}^{(3)+}, \lambda_{n,2}^{(3)+}, \lambda_{n,3}^{(3)+}; z) &= B_n^{(0)}(z) + \lambda_{n,1}^{(3)+} B_{n-1}^{(0)}(z) + \lambda_{n,2}^{(3)+}(z) B_{n-2}^{(0)}(z) + \lambda_{n,3}^{(3)+} B_{n-3}^{(0)}(z) \\ &= z^n + \left(- \sum_{k=1}^n z_{n,k}^{(0)} + \lambda_{n,1}^{(3)+} \right) z^{n-1} + \dots \end{aligned}$$

Como, de (2.1.21), $\sum_{k=1}^n z_{n,k}^{(0)} = \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)} + \beta_n^{(0)}$, então

$$B_n(\lambda_{n,1}^{(3)+}, \lambda_{n,2}^{(3)+}, \lambda_{n,3}^{(3)+}; z) = z^n + \left(- \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)} - \beta_n^{(0)} + \lambda_{n,1}^{(3)+} \right) z^{n-1} + \dots$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} (z + \beta)B_{n-1}^{\psi_4}(\lambda_{n-1,1}^{(2)-}, \lambda_{n-1,2}^{(2)-}; z) &= (z + \beta) \left(B_{n-1}^{(1)\psi_4}(z) + \frac{\lambda_{n-1,2}^{(2)-}}{\beta_{n-2}^{(0)\psi_4}} z B_{n-3}^{(1)\psi_4}(z) \right) \\ &= z^n + \left(-\sum_{k=1}^{n-1} z_{n-1,k}^{(1)\psi_4} + \frac{\lambda_{n-1,2}^{(2)-}}{\beta_{n-2}^{(0)\psi_4}} + \beta \right) z^{n-1} + \dots \end{aligned}$$

e

$$(z + \beta)B_{n-1}^{\psi_4}(\lambda_{n-1,1}^{(2)-}, \lambda_{n-1,2}^{(2)-}; z) = z^n + \left(-\sum_{k=1}^{n-2} \gamma_k^{(1)\psi_4} - \beta_{n-1}^{(1)\psi_4} + \frac{\lambda_{n-1,2}^{(2)-}}{\beta_{n-2}^{(0)\psi_4}} + \beta \right) z^{n-1} + \dots$$

Igualando-se os coeficientes dos termos de grau $n - 1$ obtemos que se

$$\lambda_{n,1}^{(3)+} = \frac{\lambda_{n-1,2}^{(2)-}}{\beta_{n-2}^{(0)\psi_4}} + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)} + \beta_n^{(0)} - \sum_{k=1}^{n-2} \gamma_k^{(1)\psi_4} - \beta_{n-1}^{(1)\psi_4} + \beta \quad (4.3.25)$$

então,

$$B_n(\lambda_{n,1}^{(3)+}, \lambda_{n,2}^{(3)+}, \lambda_{n,3}^{(3)+}; z) = (z + \beta)B_{n-1}^{\psi_4}(\lambda_{n-1,1}^{(2)-}, \lambda_{n-1,2}^{(2)-}; z), \quad n \geq 3.$$

Para $n = 2$, $B_2(\lambda_{2,1}^{(3)+}, \lambda_{2,2}^{(3)+}, \lambda_{2,3}^{(3)+}; z)$ tem um zero em $-\beta$ e, pela simetria, o outro está em β . Logo,

$$B_2(\lambda_{2,1}^{(3)+}, \lambda_{2,2}^{(3)+}, \lambda_{2,3}^{(3)+}; z) = (z + \beta)B_1^{\psi_4}(\lambda_{1,1}^{(2)-}, \lambda_{1,2}^{(2)-}; z) = (z + \beta)(z - \beta).$$

Do mesmo modo, para $n = 1$,

$$B_1(\lambda_{1,1}^{(3)+}, \lambda_{1,2}^{(3)+}, \lambda_{1,3}^{(3)+}; z) = (z + \beta)B_0^{\psi_4}(\lambda_{0,1}^{(2)-}, \lambda_{0,2}^{(2)-}; z) = z + \beta.$$

Portanto,

$$B_n(\lambda_{n,1}^{(3)+}, \lambda_{n,2}^{(3)+}, \lambda_{n,3}^{(3)+}; z) = (z + \beta)B_{n-1}^{\psi_4}(\lambda_{n-1,1}^{(2)-}, \lambda_{n-1,2}^{(2)-}; z), \quad n \geq 1.$$

Neste caso, o polinômio $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)+}, \lambda_{n,2}^{(3)+}, \lambda_{n,3}^{(3)+}; z)$ tem um zero em $-\beta$ e todas as possibilidades de zeros do polinômio $B_{n-1}^{\psi_4}(\lambda_{n-1,1}^{(2)-}, \lambda_{n-1,2}^{(2)-}; z)$ vistas na seção 4.2.2.



Observe que se substituirmos o valor de $\lambda_{n-1,1}^{(2)-}$, que produz zero de multiplicidade 2 em $-\beta$ (veja (4.2.29)), em $\lambda_{n,1}^{(3)+}$ dado por (4.3.25), então o polinômio $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)+}, \lambda_{n,2}^{(3)+}, \lambda_{n,3}^{(3)+}; z)$ terá zero de multiplicidade 3 em $-\beta$.

Este valor de $\lambda_{n,1}^{(3)+}$ também pode ser obtido de outra maneira. Para isso, seja $\psi_5(t)$ uma medida de classe $S^3[1/2, \beta, b]$ definida por

$$d\psi_5(t) = (t + \beta)^3 d\psi(t), \quad t \in (a, b).$$

Por (4.3.2),

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n(\lambda_{n,1}^{(3)+}, \lambda_{n,2}^{(3)+}, \lambda_{n,3}^{(3)+}; t) d\psi(t) = 0, \quad 3 \leq s \leq n-1, \quad n \geq 4.$$

Como $-\beta$ é um zero de multiplicidade 3 temos

$$\int_a^b t^{-n+s} \frac{B_n(\lambda_{n,1}^{(3)+}, \lambda_{n,2}^{(3)+}, \lambda_{n,3}^{(3)+}; t)}{(t + \beta)^3} d\psi_5(t) = 0, \quad 3 \leq s \leq n-1.$$

De (2.1.1), o único polinômio mônico de grau $n-3$ que satisfaz às condições da integral acima é $B_{n-3}^{(0)\psi_5}(z)$, pois

$$\int_a^b t^{-n+s} B_{n-3}^{(0)\psi_5}(t) d\psi_5(t) = 0, \quad 3 \leq s \leq n-1.$$

Logo,

$$B_n(\lambda_{n,1}^{(3)+}, \lambda_{n,2}^{(3)+}, \lambda_{n,3}^{(3)+}; z) = (z + \beta)^3 B_{n-3}^{(0)\psi_5}(z), \quad n \geq 3.$$

Comparando os coeficientes dos termos de grau $n-1$ de $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)+}, \lambda_{n,2}^{(3)+}, \lambda_{n,3}^{(3)+}; z)$ e $(z + \beta)^3 B_{n-3}^{(0)\psi_5}(z)$ temos que o valor do parâmetro $\lambda_{n,1}^{(3)+}$, que fornece zero de multiplicidade 3 em $-\beta$, será

$$\lambda_{n,1}^{(3)+} = \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)} + \beta_n^{(0)} - \sum_{k=1}^{n-4} \gamma_k^{(0)\psi_5} - \beta_{n-3}^{(0)\psi_5} + 3\beta.$$



4.3.4 $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)-}, \lambda_{n,2}^{(3)-}, \lambda_{n,3}^{(3)-}; z)$ e medidas de classe $S^3[1/2, \beta, b]$

Vamos agora mostrar um resultado que ajudará na localização dos zeros de $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)-}, \lambda_{n,2}^{(3)-}, \lambda_{n,3}^{(3)-}; z)$. De acordo com o que foi introduzido em (2.4.2) e (2.4.3), esses polinômios são relacionados com medidas de classe $S^3[1/2, \beta, b]$.

Observe que como $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)-}, \lambda_{n,2}^{(3)-}, \lambda_{n,3}^{(3)-}; 0) = (-\beta)^n$, por (2.4.3) existem valores reais $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_s, 0 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, tais que

$$B_n(\lambda_{n,1}^{(3)-}, \lambda_{n,2}^{(3)-}, \lambda_{n,3}^{(3)-}; z) = \sum_{k=1}^s \xi_k z^k B_{n-2k}^{(0)}(z), \quad n \geq 3.$$

Mostraremos que o polinômio $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)-}, \lambda_{n,2}^{(3)-}, \lambda_{n,3}^{(3)-}; z)$ satisfaz

$$B_n(\lambda_{n,1}^{(3)-}, \lambda_{n,2}^{(3)-}, \lambda_{n,3}^{(3)-}; z) = B_n^{(0)\psi_6}(z) + \xi_1 z B_{n-2}^{(0)\psi_6}(z), \quad n \geq 3, \quad (4.3.26)$$

onde $\xi_1 = \lambda_{n,1}^{(3)-} - \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)} - \beta_n^{(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)\psi_6} + \beta_n^{(0)\psi_6}$, e os polinômios $B_n^{(0)\psi_6}(z)$ e seus coeficientes estão relacionados com a medida $\psi_6(t)$ de classe $S^3[1/2, \beta, b]$ definida por

$$d\psi_6(t) = \frac{t^2}{t + \beta} d\psi(t).$$

De fato: consideremos o polinômio mônico e β -invertível

$$A_n^{\psi_6}(z) = B_n^{(0)\psi_6}(z) + \xi_1 z B_{n-2}^{(0)\psi_6}(z), \quad n \geq 3.$$

Temos que

$$\int_a^b t^{-n+s} A_n^{\psi_6}(t) d\psi_6(t) = 0, \quad 1 \leq s \leq n-2.$$

Então,

$$\int_a^b t^{-n+s} A_n^{\psi_6}(t) d\psi(t) = 0, \quad 3 \leq s \leq n-1. \quad (4.3.27)$$

Por (4.3.2),

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n(\lambda_{n,1}^{(3)-}, \lambda_{n,2}^{(3)-}, \lambda_{n,3}^{(3)-}; t) d\psi(t) = 0, \quad 3 \leq s \leq n-1. \quad (4.3.28)$$

Igualando os coeficientes dos termos de grau $n - 1$ dos polinômios $A_n^{\psi_6}(z)$ e $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)-}, \lambda_{n,2}^{(3)-}, \lambda_{n,3}^{(3)-}; z)$ obtemos

$$\xi_1 = \lambda_{n,1}^{(3)-} - \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)} - \beta_n^{(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)\psi_6} + \beta_n^{(0)\psi_6}. \quad (4.3.29)$$

Como $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)-}, \lambda_{n,2}^{(3)-}, \lambda_{n,3}^{(3)-}; z)$ e $A_n^{\psi_6}(z)$ são mônicos, β -inversíveis, satisfazem $A_n^{\psi_6}(0) = B_n(\lambda_{n,1}^{(3)-}, \lambda_{n,2}^{(3)-}, \lambda_{n,3}^{(3)-}; 0) = (-\beta)^n$ então se ξ_1 é dado por (4.3.29) temos

$$B_n(\lambda_{n,1}^{(3)-}, \lambda_{n,2}^{(3)-}, \lambda_{n,3}^{(3)-}; z) = B_n^{(0)\psi_6}(z) + \xi_1 z B_{n-2}^{(0)\psi_6}(z), \quad n \geq 3.$$

Encontremos agora o valor do parâmetro $\lambda_{n,1}^{(3)-}$ para o qual o polinômio tem um zero em a e como $a = \beta^2/b$, um zero em b .

Suponhamos que $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)-}, \lambda_{n,2}^{(3)-}, \lambda_{n,3}^{(3)-}; a) = B_n(\lambda_{n,1}^{(3)-}, \lambda_{n,2}^{(3)-}, \lambda_{n,3}^{(3)-}; b) = 0$. Fazendo $z = a$ em (4.3.26) obtemos

$$B_n^{(0)\psi_6}(a) + \xi_1 z B_{n-2}^{(0)\psi_6}(a) = 0.$$

Substituindo ξ_1 temos que o valor do parâmetro procurado é

$$\begin{aligned} \lambda_{n,1}^{(3)-} &= \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)} + \beta_n^{(0)} - \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)\psi_6} - \beta_n^{(0)\psi_6} - \frac{B_n^{(0)\psi_6}(a)}{a B_{n-2}^{(0)\psi_6}(a)} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)} + \beta_n^{(0)} - \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)\psi_6} - \beta_n^{(0)\psi_6} - \frac{B_n^{(0)\psi_6}(b)}{b B_{n-2}^{(0)\psi_6}(b)}. \end{aligned}$$

Estamos também interessados em determinar $\lambda_{n,1}^{(3)-}$ para que tenhamos zeros em β . Para n ímpar, β é zero de $B_n^{(0)\psi_6}(z)$ e, por (4.3.26), $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)-}, \lambda_{n,2}^{(3)-}, \lambda_{n,3}^{(3)-}; \beta) = 0$. Então, podemos escrever

$$\frac{B_n(\lambda_{n,1}^{(3)-}, \lambda_{n,2}^{(3)-}, \lambda_{n,3}^{(3)-}; z)}{z - \beta} = \frac{B_n^{(0)\psi_6}(z)}{z - \beta} + \xi_1 z \frac{B_{n-2}^{(0)\psi_6}(z)}{z - \beta}.$$

Pela relação de recorrência para os polinômios $B_n^{(0)\psi_6}(z)$ temos que

$$\frac{B_n(\lambda_{n,1}^{(3)-}, \lambda_{n,2}^{(3)-}, \lambda_{n,3}^{(3)-}; z)}{z - \beta} = B_{n-1}^{(0)\psi_6}(z) + \left(\xi_1 - \alpha_n^{(0)\psi_6} \right) z \frac{B_{n-2}^{(0)\psi_6}(z)}{z - \beta}.$$



Fazendo $z \rightarrow \beta$ obtemos que

$$B_{n-1}^{(0)\psi_6}(\beta) + (\xi_1 - \alpha_n^{(0)\psi_6}) \beta \bar{Q}_{n-3}(\beta) = 0$$

se, e somente se,

$$\lambda_{n,1}^{(3)-} = \alpha_n^{(0)\psi_6} + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)} + \beta_n^{(0)} - \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)\psi_6} - \beta_n^{(0)\psi_6} - \frac{B_{n-1}^{(0)\psi_6}(\beta)}{\beta \bar{Q}_{n-3}(\beta)}, \quad (4.3.30)$$

onde $\bar{Q}_{n-3}(z) = \frac{B_{n-2}^{(0)\psi_6}(z)}{z - \beta}$.

Para n ímpar, β é um zero de $B_{n-2}^{(0)\psi_6}(z)$. Portanto, $\lambda_{n,1}^{(3)-}$ é dado por (4.3.30) e $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)-}, \lambda_{n,2}^{(3)-}, \lambda_{n,3}^{(3)-}; z)$ tem zero de multiplicidade 3 em β .

Para n par, β é um zero de $B_{n-1}^{(0)\psi_6}(z)$. Usando a relação de recorrência para os polinômios $B_n^{(0)\psi_6}(z)$ e substituindo em (4.3.26) obtemos

$$(\xi_1 - \alpha_n^{(0)}) \beta B_{n-2}^{(0)\psi_6}(\beta) = 0,$$

se, e somente se,

$$\lambda_{n,1}^{(3)-} = \alpha_n^{(0)\psi_6} + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)} + \beta_n^{(0)} - \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)\psi_6} - \beta_n^{(0)\psi_6},$$

e $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)-}, \lambda_{n,2}^{(3)-}, \lambda_{n,3}^{(3)-}; z)$ tem zero de multiplicidade 2 em β .

Finalmente, suponhamos que $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)-}, \lambda_{n,2}^{(3)-}, \lambda_{n,3}^{(3)-}; -\beta) = 0$. Assim, por (4.3.26) o valor do parâmetro $\lambda_{n,1}^{(3)-}$ que gera zero de multiplicidade 2 em $-\beta$ será

$$\lambda_{n,1}^{(3)-} = \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)} + \beta_n^{(0)} - \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)\psi_6} - \beta_n^{(0)\psi_6} + \frac{B_n^{(0)\psi_6}(-\beta)}{\beta B_{n-2}^{(0)\psi_6}(-\beta)}.$$

Com base nesses estudos, fizemos testes usando o software MAPLE VI e observamos que se escolhermos $\lambda_{n,1}^{(3)-}$, $n \geq 3$, em (4.3.19) tal que

$$\lambda_{n,1}^{(3)-} < \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)} + \beta_n^{(0)} - \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)\psi_6} - \beta_n^{(0)\psi_6} - \frac{B_n^{(0)\psi_6}(a)}{a B_{n-2}^{(0)\psi_6}(a)},$$



o polinômio $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)-}, \lambda_{n,2}^{(3)-}, \lambda_{n,3}^{(3)-}; z)$ tem um zero em $(0, a)$, $n - 2$ zeros distintos em (a, b) e um zero em (b, ∞) . Se, para n ímpar,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)} + \beta_n^{(0)} - \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)\psi_6} - \beta_n^{(0)\psi_6} - \frac{B_n^{(0)\psi_6}(a)}{aB_{n-2}^{(0)\psi_6}(a)} < \lambda_{n,1}^{(3)-} < \alpha_n^{(0)\psi_6} + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)} + \beta_n^{(0)} - \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)\psi_6} - \beta_n^{(0)\psi_6} - \frac{B_{n-1}^{(0)\psi_6}(\beta)}{\beta Q_{n-3}(\beta)},$$

e para n par,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)} + \beta_n^{(0)} - \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)\psi_6} - \beta_n^{(0)\psi_6} - \frac{B_n^{(0)\psi_6}(a)}{aB_{n-2}^{(0)\psi_6}(a)} < \lambda_{n,1}^{(3)-} < \alpha_n^{(0)\psi_6} + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)} + \beta_n^{(0)} - \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)\psi_6} - \beta_n^{(0)\psi_6},$$

$B_n(\lambda_{n,1}^{(3)-}, \lambda_{n,2}^{(3)-}, \lambda_{n,3}^{(3)-}; z)$ tem n zeros distintos em (a, b) . Da mesma forma, se n é ímpar,

$$\alpha_n^{(0)\psi_6} + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)} + \beta_n^{(0)} - \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)\psi_6} - \beta_n^{(0)\psi_6} - \frac{B_{n-1}^{(0)\psi_6}(\beta)}{\beta Q_{n-3}(\beta)} < \lambda_{n,1}^{(3)-} < \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)} + \beta_n^{(0)} - \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)\psi_6} - \beta_n^{(0)\psi_6} + \frac{B_n^{(0)\psi_6}(-\beta)}{\beta B_{n-2}^{(0)\psi_6}(-\beta)},$$

e, se n par,

$$\alpha_n^{(0)\psi_6} + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)} + \beta_n^{(0)} - \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)\psi_6} - \beta_n^{(0)\psi_6} < \lambda_{n,1}^{(3)-} < \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)} + \beta_n^{(0)} - \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)\psi_6} - \beta_n^{(0)\psi_6} + \frac{B_n^{(0)\psi_6}(-\beta)}{\beta B_{n-2}^{(0)\psi_6}(-\beta)}.$$

Então, o polinômio tem 2 zeros complexos e $n - 2$ zeros distintos em (a, b) . Se

$$\lambda_{n,1}^{(3)-} > \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)} + \beta_n^{(0)} - \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(0)\psi_6} - \beta_n^{(0)\psi_6} + \frac{B_n^{(0)\psi_6}(-\beta)}{\beta B_{n-2}^{(0)\psi_6}(-\beta)},$$

$B_n(\lambda_{n,1}^{(3)-}, \lambda_{n,2}^{(3)-}, \lambda_{n,3}^{(3)-}; z)$ tem 2 zeros negativos e $n - 2$ zeros distintos em (a, b) .

Observamos que este é um comportamento análogo aos experimentos feitos com às escolhas de $\lambda_{n,1}^{(2)-}$ para $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)-}, \lambda_{n,2}^{(2)-}; z)$ vistos na seção 4.2.4.

Considerações Finais

O principal objetivo de nosso trabalho é estudar os polinômios $B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z)$ que são combinações lineares dos L-polinômios ortogonais vistos no Capítulo 2. Esses polinômios vêm sendo estudados nos últimos anos e, como vimos, várias descobertas foram feitas.

O estudo de $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)}, \lambda_{n,2}^{(3)}, \lambda_{n,3}^{(3)}; z)$, onde apresentamos os valores dos parâmetros $\lambda_{n,1}^{(3)}$, $\lambda_{n,2}^{(3)}$, e $\lambda_{n,3}^{(3)}$ que tornam este polinômio β -inversível, e a localização de seus zeros para determinadas escolhas do parâmetro $\lambda_{n,1}^{(3)}$, foi nossa principal contribuição neste trabalho.

Observamos que várias semelhanças ocorrem no comportamento dos polinômios $B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z)$ quando consideramos $r = 1$, $r = 2$ e $r = 3$, entre elas destacamos o sinal do polinômio em $z = 0$, a multiplicidade ímpar do zero $-\beta$ no polinômio $B_n(\lambda_{n,1}^{(r)+}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)+}; z)$ e a multiplicidade par deste zero no polinômio $B_n(\lambda_{n,1}^{(r)-}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)-}; z)$. Ressaltamos o fato de que sempre há duas possibilidades de solução para as equações que fornecem os valores dos parâmetros $\lambda_{n,1}^{(r)\pm}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)\pm}$, tais que os polinômios $B_n(\lambda_{n,1}^{(r)\pm}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)\pm}; z)$ são β -inversíveis.

Os experimentos numéricos mostram que nos polinômios $B_n(\lambda_{n,1}^{(2)-}, \lambda_{n,2}^{(2)-}; z)$ e $B_n(\lambda_{n,1}^{(3)-}, \lambda_{n,2}^{(3)-}, \lambda_{n,3}^{(3)-}; z)$, para a mesma variação de escolha dos parâmetros $\lambda_{n,1}^{(2)-}$ e $\lambda_{n,1}^{(3)-}$ na reta real, respectivamente, encontramos o mesmo comportamento dos 2 zeros que podem estar ou não dentro do intervalo (a, b) , como foi visto nas



seções 4.2.4 e 4.3.4.

Como continuidade a este trabalho sugerimos o estudo do caso $r = 4$, encontrando principalmente os valores dos parâmetros que tornam o polinômio β -inversível e informações sobre a localização dos seus zeros. Vale lembrar que este trabalho fica cada vez mais difícil, pois envolve uma quantidade maior de cálculos e, quanto aos zeros, temos mais possibilidades de localização fora do intervalo $[a, b]$. Esses resultados podem contribuir para obter uma possível expressão geral para os parâmetros $\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}$.

A determinação dos valores de $\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}$ tais que $B_n(\lambda_{n,1}^{(r)}, \dots, \lambda_{n,r}^{(r)}; z)$ tem todos os zeros distintos em (a, b) é importante para aplicações em teoria de fórmulas de quadratura utilizando estes zeros como os nós da quadratura.



Referências Bibliográficas

- [1] E.X.L. de Andrade, *Sobre Polinômios Similares aos Ortogonais Associados a uma Classe Especial de Distribuições*, Tese de Doutorado, UNICAMP, Campinas, SP, 1995.
- [2] E.X.L. de Andrade, C.F. Bracciali, A. Sri Ranga, Inversely symmetric interpolatory quadrature rules, *Acta Applicandae Mathematicae*, 61, 15-28, (2000).
- [3] R.G. Bartle, *Elementos de Análise Real*, trad. de A.A. de Farias, Editora Campus, Rio de Janeiro, 1983.
- [4] A.C. Berti, A. Sri Ranga, Companion orthogonal polynomials: some applications, *Appl. Num. Math.*, 39, 127-149, (2001).
- [5] C.F. Bracciali, *Some Consequences of a Symmetry in Strong Stieltjes Distributions*, Ph.D. thesis, University of St. Andrews, Scotland, UK, 1998.
- [6] C.F. Bracciali, J.H. McCabe, A. Sri Ranga, On a symmetry in strong distributions, *J. Comp. Appl. Math.*, 105, 187-198, (1999).
- [7] T.S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Mathematics and its Applications, vol. 13, Gordon & Breach, New York, 1978.



- [8] L. Cochran, S.C. Cooper, Orthogonal Laurent polynomials on the real line, *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, 154, 47-100, (1994).
- [9] P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis*, vol. 2, John Wiley & Sons, New York, 1977.
- [10] W.B. Jones, W.J. Thron, H. Waadeland, A strong Stieltjes moment problem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 261, 503-528, (1980).
- [11] W.B. Jones, O. Njåstad, W.J. Thron, Two-point Padé expansions for a family of analytic functions, *J. Comp. Appl. Math.*, 9, 105-123, (1983).
- [12] V.I. Krylov, *Approximate Calculation of Integrals*, 1st English Edition, Macmillan, New York, 1962.
- [13] K.H. Kwon, J.H. Lee, F. Marcellán, Orthogonality of linear combinations of two orthogonal polynomial sequences, *J. Comp. Appl. Math.*, 137, 109-122, (2001).
- [14] F. Marcellán, F. Peherstorfer, R. Steinbauer, Orthogonality properties of linear combinations of orthogonal polynomials, *Adv. Comp. Math.*, 5, 281-295, (1996).
- [15] F. Marcellán, F. Peherstorfer, R. Steinbauer, Orthogonality properties of linear combinations of orthogonal polynomials II, *Adv. Comp. Math.*, 7, 401-428, (1997).
- [16] J.H. McCabe, A formal extension of the Padé table to include two-point Padé quotients, *J. Inst. Math. Appl.*, 15, 363-372, (1975).
- [17] J.H. McCabe, The quotient-difference algorithm and the Padé table: an alternative form and a general continued fraction, *Math. Comp.*, 41, 183-197, (1983).



- [18] F. Peherstorfer, Linear combinations of orthogonal polynomials generating positive quadrature formulas, *Math. Comp.*, 55, 231-241, (1990).
- [19] F. Peherstorfer, Zeros of linear combinations of orthogonal polynomials, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 117, 533-544, (1995).
- [20] A. Sri Ranga, *Continued Fractions which Correspond to Two Series Expansions, and the Strong Hamburger Moment Problem*, Ph.D.thesis, University of St. Andrews, Scotland, UK, 1983.
- [21] A. Sri Ranga, Another quadrature rule of highest algebraic degree of precision, *Numer. Math.*, 68, 283-294, (1994).
- [22] A. Sri Ranga, E.X.L. de Andrade, J.H. McCabe, Some consequences of a symmetry in strong distributions, *J. Math. Anal. Appl.*, 193, 158-168, (1995).
- [23] A. Sri Ranga, Companion orthogonal polynomials, *J. Comp. Appl. Math.*, 75, 23-33, (1996).
- [24] A.H. Stroud, D. Secrest, *Gaussian Quadrature Formulas*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1966.
- [25] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, Colloq. Publ., vol. 23, 2nd Edition, Amer. Math. Soc., New York, 1959.



