

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA**

RUAM CARLOS NEVES PAZINI

**PROJETO DE REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DA SAÍDA PARA
SISTEMAS LINEARES INCERTOS COM RESTRIÇÕES DE D-
ESTABILIDADE**

RUAM CARLOS NEVES PAZINI

**PROJETO DE REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DA SAÍDA PARA
SISTEMAS LINEARES INCERTOS COM RESTRIÇÕES DE D-
ESTABILIDADE**

Trabalho de Graduação apresentado à Faculdade
de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP como
parte dos requisitos para obtenção do diploma no
curso de Graduação em Engenharia Elétrica.

Nome do orientador

Prof. Dr. Flávio Andrade Faria

Ilha Solteira
2025

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvida pela Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação

P348p Pazini, Ruam Carlos.
Projeto de realimentação estática da saída para sistemas lineares incertos com restrições de D-Estabilidade / Ruam Carlos Pazini. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2025
28 f. : il.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Engenharia Elétrica) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2025

Orientador: Flávio Andrade Faria
Inclui bibliografia

1. Engenharia elétrica. 2. Controle linear. 3. D-Estabilidade.

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE GRADUAÇÃO

Aos cinco dias do mês de novembro do ano de dois mil e vinte e cinco, o discente **Ruam Carlos Neves Pazini**, matriculado sob o nº 201051001, tendo como banca examinadora o seu orientador, o *Prof. Dr. Flávio Andrade Faria*, o *Dr. Rafael Fernando Quirino Magossi* e o *Doutorando Hugo Fernando Yamanaka*, apresentou o Trabalho de Graduação intitulado "**Projeto de realimentação estática da saída para sistemas lineares incertos com restrições de D-estabilidade**", obtendo a nota 9,0 (nove) e conceito Aprovado.

Documento assinado digitalmente
 **FLAVIO ANDRADE FARIA**
Data: 05/11/2025 14:50:54-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Flávio Andrade Faria
- Orientador -

Documento assinado digitalmente
 **RUAM CARLOS NEVES PAZINI**
Data: 07/11/2025 16:05:57-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Ruam Carlos Neves Pazini
- Discente -

Documento assinado digitalmente
 **RAFAEL FERNANDO QUIRINO MAGOSSİ**
Data: 06/11/2025 14:21:39-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. Rafael Fernando Quirino Magossi
- Membro da Banca -

Documento assinado digitalmente
 **HUGO FERNANDO YAMANAKA**
Data: 06/11/2025 17:12:37-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Doutorando Hugo Fernando Yamanaka
- Membro da Banca -

AGRADECIMENTOS

Quero dedicar este espaço a todos que, de alguma forma, estiveram presentes nesta caminhada. Meus pais, familiares, amigos e professores foram peças fundamentais para que este trabalho pudesse ser realizado e concluído com sucesso.

Agradeço especialmente à minha família, em particular à minha mãe Joelma Lucia Neves e meu pai Roni Carlo Pazini, pelo amor, apoio incondicional e pela base sólida que sempre me proporcionaram. Foram eles que me ensinaram, desde cedo, o valor do esforço, da disciplina e da honestidade, virtudes que carrego comigo e que foram essenciais nesta trajetória acadêmica.

Aos meus amigos, deixo aqui meu sincero agradecimento pela parceria e companheirismo. Foram presença constante nos momentos difíceis, oferecendo incentivo, e também nos momentos felizes, compartilhando conquistas e tornando a jornada muito mais leve e significativa.

Registro também meu profundo reconhecimento ao meu professor e orientador, Prof. Dr. Flávio Andrade Faria, pela paciência, disponibilidade e pelas valiosas orientações durante o desenvolvimento deste trabalho. Sua dedicação, conhecimento e incentivo foram determinantes para a concretização deste projeto.

Por fim, agradeço a todos que, de maneira direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho e para o meu crescimento pessoal e acadêmico. Cada gesto de apoio, cada palavra de incentivo e cada ensinamento recebido tiveram um papel importante nesta conquista. *“O sucesso é a soma de pequenos esforços repetidos dia após dia.”* — Robert Collier.

Com gratidão,

Ruam Carlos Neves Pazini

RESUMO

Em diversos problemas práticos, a simples estabilização do sistema não é suficiente para assegurar um comportamento dinâmico satisfatório, tornando necessário impor restrições adicionais de desempenho. Sabe-se, conforme amplamente discutido na literatura, que o desempenho de um sistema em malha fechada está diretamente associado à localização de seus polos. Nesse contexto, métodos clássicos existem para projetos baseados em funções de transferência. Em contraste, em modelos em espaço de estado, a interpretação dessas restrições é mais complexa, podendo ser incluídas por meio de condições de D-estabilidade, que confinam os autovalores em regiões específicas do plano complexo. Embora existam métodos consolidados para projetos com realimentação de estados, pouco se explorou sua aplicação para realimentação da saída. Este trabalho de graduação, portanto, propõe um método de controle por realimentação estática da saída para sistemas lineares incertos com restrições de D-estabilidade, visando incorporar parâmetros de desempenho e garantir a estabilidade robusta do sistema em malha fechada. A abordagem baseia-se em resultados da literatura sobre controle de sistemas incertos com realimentação de estados e alocação regional de polos, expandindo-os para a realimentação da saída com condições menos conservadoras. O projeto de controle desenvolvido, então, é descrito por um conjunto de desigualdades matriciais lineares (LMIs), que asseguram os polos do sistema em malha fechada dentro de uma região do plano complexo definida pelo desempenho desejado. Para a solução das LMIs e simulação dos sistemas com a ação de controle projetada, utiliza-se os pacotes YALMIP e SeDuMi do MatLab.

Palavras-chave: Controle Linear Robusto. D-estabilidade. Realimentação Estática da Saída. LMIs.

ABSTRACT

In many practical problems, stabilization alone does not ensure satisfactory dynamic behavior, making it necessary to impose performance constraints. It is well established in the literature that the performance of a closed-loop system is directly related to the location of its poles, and classical methods exist for designs based on transfer functions. In contrast, for state-space models, the interpretation of such constraints is more complex, and they can be incorporated through D-stability conditions, which confine the eigenvalues to specific regions of the complex plane. Although consolidated methods exist for state-feedback design, their application to output feedback has been less explored. This undergraduate thesis, therefore, proposes a static output feedback control method for uncertain linear systems with D-stability constraints, aiming to incorporate performance parameters while ensuring robust closed-loop stability. The approach builds upon existing results in the literature on uncertain systems control via state feedback and regional pole placement, extending them to output feedback under less conservative conditions. The proposed control design is formulated as a set of Linear Matrix Inequalities (LMIs), which guarantee that the closed-loop poles remain within a region of the complex plane defined by the desired performance. To solve the LMIs and simulate the systems with the designed control law, the YALMIP and SeDuMi toolboxes of MATLAB are employed.

Keywords: Robust Linear Control. D-stability. Static Output Feedback. LMIs.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Região convexa circular com centro $(-q, 0)$	18
Figura 2	- Região de factibilidade do Teorema 1 ($\circ$) e Teorema 2 ($\times$)	22
Figura 3	- Polos e região de alocação no plano complexo utilizando o Teorema 2	23

LISTA DE SÍMBOLOS

$x(t)$	Vetor de estado do sistema
$u(t)$	Vetor de entrada de controle
$y(t)$	Vetor de saída do sistema
A_i	Matriz de estado associadas aos vértices do politopo
B_i	Matriz de entrada associadas aos vértices do politopo
C	Matriz de saída
N	Números de vértices matriciais do polito
α_i	Coeficientes convexos que ponderam o politopo
K	Matriz de ganho de realimentação
P	Matriz simétrica definida positiva associada à função de Lyapunov
$V(x(t))$	Função de Lyapunov quadrática
q	Centro da região circular de D-estabilidade
r	Raio da região circular de D-estabilidade
t_d	Parâmetro de deslocamento da região circular de D-estabilidade
τ	Parâmetro escalar positivo introduzido como variável de folga
$\mathbb{R}^{n_x}$	Espaço vetorial real de dimensão n_x
n_x	Dimensão do vetor de estado
n_u	Dimensão do vetor de entrada
n_y	Dimensão do vetor da saída
$\dot{x}(t)$	Derivada temporal do vetor de estado
LMI	Desigualdade Matricial Lienar
BMI	Desigualdade Matricial Bilinear
$*$	Termo simétrico ou correspondente nas LMIs
I	Matriz Identidade

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	14
1.1.CONTROLE ROBUSTO	15
1.2.RESTRIÇÕES DE DESEMPENHO	15
1.3.OBJETIVOS	16
2. PROBLEMATIZAÇÃO	17
3. RESULTADOS E EXEMPLOS	22
3.1. REGIÃO DE FACTIBILIDADE	22
3.2 ALOCAÇÃO DE POLOS	24
4. CONCLUSÃO	26

1. INTRODUÇÃO

O projeto de controle para sistemas lineares demanda uma análise criteriosa da estratégia adotada, considerando aspectos como robustez frente a incertezas, restrições de desempenho e a escolha entre realimentação de estados ou de saídas. Garantir apenas a estabilidade do sistema não é suficiente na maioria dos casos, sendo necessário incorporar requisitos adicionais que assegurem um comportamento dinâmico satisfatório em malha fechada (Ogata, 2000).

Em muitos problemas práticos, a presença de incertezas paramétricas torna inviável assumir que o modelo matemático represente fielmente o sistema real. Para lidar com essa limitação, surgem técnicas de controle robusto, que visam preservar a estabilidade e o desempenho mesmo diante de variações nos parâmetros do sistema (Dong; Yang, 2013).

Outro aspecto fundamental no projeto de controladores é a inclusão de restrições de desempenho, que permitem moldar a resposta dinâmica desejada. Essas restrições geralmente têm como objetivo reduzir oscilações indesejadas, melhorar o tempo de acomodação e, em última análise, garantir maior confiabilidade do sistema em operação. Uma forma consolidada de tratar essas restrições é por meio de condições de D-estabilidade, que confinam os polos em regiões predefinidas do plano complexo (Cherifi; Guelton; Arcese, 2015).

Adicionalmente, em muitas aplicações práticas, a realimentação de estados pode se tornar inviável devido a custos elevados ou limitações na medição de variáveis internas (Crusius; Trofino, 1999). Nesse contexto, a realimentação estática da saída surge como alternativa mais viável, utilizando apenas os sinais disponíveis na saída do sistema para realizar o controle, com implementação mais simples e econômica.

A formulação via Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) surge, nesse contexto, como uma abordagem poderosa para integrar os diferentes requisitos do projeto de controle. Por meio delas, é possível tratar simultaneamente critérios de estabilidade robusta, restrições de desempenho e alocação regional de polos, assegurando que o sistema mantenha comportamento adequado mesmo diante de incertezas. Adicionalmente, as LMIs apresentam a vantagem de converter problemas complexos em condições convexas, que podem ser solucionadas de maneira eficiente com ferramentas computacionais modernas. Assim, consolidam-se como uma das principais ferramentas no controle moderno, oferecendo garantias matemáticas e aplicabilidade prática (Chilali; Gahinet, 1996).

1.1 CONTROLE ROBUSTO

Nos projetos de controle clássico, normalmente se assume que o modelo matemático do sistema representa de forma exata a planta real. No entanto, essa hipótese raramente se sustenta em aplicações práticas, uma vez que os sistemas físicos estão sujeitos a incertezas paramétricas e variações dinâmicas decorrentes de fatores como desgaste de componentes, variações de massa, mudanças nas condições de operação ou simplificações adotadas durante a modelagem (Ogata, 2000).

Para lidar com essas situações, utiliza-se o controle robusto, cujo objetivo é projetar leis de controle capazes de garantir a estabilidade e o desempenho do sistema mesmo diante de incertezas. Diferentemente do controle convencional, em que o projeto pode perder validade quando o modelo sofre pequenas variações, o controle robusto busca assegurar propriedades globais de estabilidade em uma região definida de incertezas (Chilali; Gahinet; Apkarian, 1999).

No caso de sistemas lineares contínuos, abordagens baseadas em LMIs tornaram-se ferramentas fundamentais para a síntese de controladores robustos, devido à sua capacidade de formular condições convexas que podem ser verificadas computacionalmente de maneira eficiente (Ebihara; Hagiwara, 2004).

1.2 RESTRIÇÕES DE DESEMPENHO

A estabilização isolada de um sistema dinâmico não assegura, por si só, um desempenho satisfatório. Por essa razão, o projeto de controladores frequentemente impõe restrições adicionais, de modo a garantir propriedades dinâmicas como tempo de resposta limitado, amortecimento adequado e margens de estabilidade compatíveis com a operação segura do sistema (Ogata, 2000). Em sistemas lineares de segunda ordem, tais restrições já se encontram bem consolidadas. No entanto, a extensão desses resultados para sistemas de ordem elevada ou sujeitos a incertezas envolve desafios adicionais, exigindo técnicas mais sofisticadas (Chilali; Gahinet, 1996).

Uma abordagem amplamente empregada para tratar tais restrições é a D-estabilidade, que consiste em restringir os polos do sistema em malha fechada a regiões específicas do plano complexo. Esse problema pode ser formulado por meio das LMIs, permitindo a representação de regiões convexas conhecidas como *regiões LMI* (Chilali; Gahinet; Apkarian, 1999). O

projeto de controle, nesse caso, é convertido na resolução de LMIs que asseguram a permanência dos polos em áreas previamente definidas, garantindo assim o atendimento das especificações de desempenho.

Grande parte dos resultados disponíveis é fundamentada na realimentação de estados, em razão de sua maior viabilidade analítica (Cherifi; Guelton; Arcese, 2015). Na literatura, também são discutidas alternativas baseadas no uso das derivadas dos estados ou na aplicação de observadores. Contudo, essas abordagens apresentam limitações práticas, sobretudo quando a medição de todas as variáveis não é viável ou quando o custo de implementação se torna elevado. (Sadabadi; Peaucelle, 2016).

Nesse cenário, a realimentação estática da saída (SOF) surge como uma alternativa de implementação mais simples e de menor custo. Entretanto, sua aplicação em problemas com restrições de D-estabilidade é desafiadora, pois a formulação direta conduz a desigualdades matriciais bilineares (BMIs), cuja resolução é notoriamente difícil do ponto de vista computacional (Crusius; Trofino, 1999).

Com o intuito de contornar essa limitação, alguns trabalhos propõem métodos em duas etapas, nos quais primeiramente se obtém um ganho estabilizante por realimentação de estados, que é então utilizado como parâmetro no projeto da SOF (Sereni; Assunção; Teixeira, 2019). Apesar de viabilizar soluções em determinados casos, essa abordagem apresenta elevado custo computacional e forte dependência da etapa inicial.

Diante disso, ganha relevância a investigação de métodos diretos baseados em LMIs para o projeto de controladores que imponham restrições de desempenho sob SOF. Além de simplificar a formulação, tais métodos podem explorar funções de Lyapunov menos conservadoras, ampliando os resultados clássicos de D-estabilidade para sistemas lineares incertos (Dong; Yang, 2013).

1.3 OBJETIVO

Diante desse cenário, este trabalho tem como objetivo propor um método de controle direto para realimentação estática da saída para sistemas lineares incertos, incorporando restrições de D-estabilidade que assegurem os autovalores, em malha fechada, na região determinadas do plano complexo associadas ao desempenho desejado. A abordagem proposta

baseia-se em expandir as desigualdades matriciais lineares conhecidas e consolidadas na literatura no contexto da realimentação de estados para a realimentação da saída.

2. PROBLEMATIZAÇÃO

Dado a família de sistemas lineares incertos descrita por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (1)$$

sendo $x(t) \in \mathbf{IR}^{n_x}$ o vetor de estado, $u(t) \in \mathbf{IR}^{n_u}$ a entrada de controle, $y(t) \in \mathbf{IR}^{n_y}$ a saída do sistema, $A_i \in \mathbf{IR}^{n_x \times n_x}$, $B_i \in \mathbf{IR}^{n_x \times n_u}$, $C \in \mathbf{IR}^{n_y \times n_x}$ matrizes constantes conhecidas, N o número de vértices matriciais e α_i constantes desconhecidas satisfazendo

$$\forall_i \in K_N, K_N = \{1, 2, \dots, N\}, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1. \quad (2)$$

Partindo de uma entrada de controle baseada na realimentação de estados:

$$u(t) = K_x x(t), \quad (3)$$

sendo $K_x \in \mathbf{IR}^{n_u \times n_x}$, o sistema incerto (1) em malha fechada é

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (A_i + B_i K_x) x(t). \quad (4)$$

Pelo método direto de Lyapunov para uma função quadrática é garantido que, caso exista uma função $V(x(t)): \mathbf{IR}^{n_x} \rightarrow \mathbf{IR}$, $V(x(t)) = x(t)' P x(t)$, que satisfaça

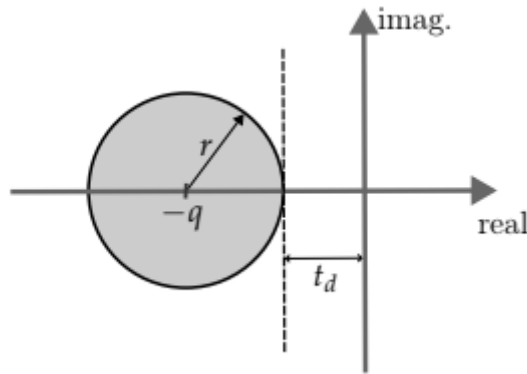
$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \\ P &> 0 \\ (A_i + B_i K_x)' P + P (A_i + B_i K_x) &< 0, \end{aligned} \quad (5)$$

tal que $\forall x(t) \neq 0$, então o sistema (4) é assintoticamente estável.

Dessa forma, as condições em (5) são suficientes para determinar numericamente uma matriz de ganho K_x tal que os autovalores do sistema em malha fechada permaneçam a esquerda do plano complexo (parte real negativa). Contudo, essas condições não garantem a D-estabilidade.

Para garantir requisitos de desempenho no projeto de controle é necessário incluir parâmetros nas condições (5) de modo que os autovalores sejam confinados em regiões mais restritivas do que apenas na parte negativa do plano complexo. Com este objetivo, a Figura 1 ilustra a região de interesse considerada para alocação desejada dos polos em malha fechada.

Figura 1: Região convexa circular com centro $(-q, 0)$.



Fonte: Próprio autor.

A desigualdade que assegura a permanência dos autovalores nessa região é dada por:

$$(A_i + t_d I)W + W(A_i + t_d I)' + \frac{1}{r} (A_i + t_d I)W(A_i + t_d I)' < 0, \quad (6)$$

tal que $W \in R^{n_x \times n_x}$ exista e seja uma matriz simétrica definida positiva.

No entanto, as condições expressas em (6) ainda podem ser consideradas conservadoras, pois se baseiam em uma única matriz de Lyapunov para representar o comportamento de todo o sistema incerto. Essa abordagem tende a restringir o espaço de soluções viáveis e pode levar a controladores com desempenho subótimo ou comprometer a factibilidade das LMIs.

No Teorema 1, proposto por Valter et al (2002), é formulado com base na função de Lyapunov dependente de parâmetros condições menos conservadoras a partir (6).

Teorema 1. Dados os números reais positivos t_d e r , caso existam N matrizes definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $Y \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, tais que as desigualdades em (4) sejam factíveis

$$\begin{aligned} & P_i > 0 \\ & \begin{bmatrix} -rP_i & A_iG + B_iY + qG \\ \star & r(P_i - G - G') \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (7)$$

então G é invertível e o ganho robusto para a realimentação de estados do sistema descrito em (4) é dado por (8)

$$K_x = YG^{-1}. \quad (8)$$

O Teorema 1 apresenta condições suficientes e com pouco conservadorismo para o projeto de controle robusto com parâmetros de desempenho via LMIs dada ação de controle por realimentação de estados – vide formulação em (3) e (4). No entanto, quando se considera a realimentação estática da saída, na qual

$$u(t) = Ky(t), \quad (9)$$

com $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$, tem-se, substituindo (9) em (1), a dinâmica em malha fechada dada por:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (A_i + B_i KC) x(t). \quad (10)$$

Desta forma, passando o Teorema 1 para a realimentação estática da saída, sendo $KC = YG^{-1}$, tem-se a LMI

$$\begin{aligned} & P_i > 0 \\ & \begin{bmatrix} -rP_i & A_iG + B_iKCG + qG \\ \star & r(P_i - G - G') \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (11)$$

Ao aplicar o mesmo desenvolvimento teórico utilizado para o caso de realimentação de estados, observa-se que o produto das matrizes $B_i K C G$ em (11) introduz termos bilineares nas desigualdades matriciais, transformando as LMIs anteriores em BMIs (Bilinear Matrix Inequalities). Essa característica torna o problema não convexo, dificultando sua resolução direta.

Para contornar essa dificuldade, adota-se a decomposição matricial proposta por Dong e Yang (2013), que consiste em desacoplar o ganho K das matrizes associadas à função de Lyapunov. Essa parametrização permite linearizar as restrições e, consequentemente, obter uma formulação em termos de LMIs para o projeto de controladores por realimentação estática da saída, utilizando uma transformação de variáveis simples.

A ideia central da abordagem proposta por Dong e Yang (2013) é eliminar os termos bilineares presentes nas desigualdades matriciais. No contexto da equação (11), busca-se, então, remover o termo $B_i K C G$ presente no elemento a_{12} e seu transposto no a_{21} . Para isso, são incluídas variáveis de folga na LMI de modo que, ao realizar reestruturação da matriz, K não dependa mais do produto com G . Assim, com base nessa decomposição, obtém-se o Teorema 2.

Teorema 2. Dados os números reais positivos τ , t_d e r , $q = t_d + r$, caso existam N matrizes definidas positivas $\mathbf{P}_i \in \mathbf{R}^{n_x \times n_x}$ e $P_i > 0$, matrizes $\mathbf{V} \in \mathbf{R}^{n_y \times n_y}$ e $\mathbf{G} \in \mathbf{R}^{n_x \times n_x}$, $\mathbf{L} \in \mathbf{R}^{n_u \times n_y}$, tal que a desigualdade em (12) seja factível

$$T_{ij} + T'_{ji} < 0, \quad (12)$$

sendo $i \leq j$, então o sistema em malha fechada para a realimentação estática da saída em (10) é D-estável com o ganho robusto dado por $K = LV^{-1}$. Sendo:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} -rP_i & G'_j A'_i + C' L' B'_i + qG'_j & G'_j C' - C' V' \\ A_i G_j + B_i L C + qG_j & r(P_i - G_j - G'_j) & \tau B_i L \\ C G_j - V C & \tau L' B'_i & -\tau(V + V') \end{bmatrix} \quad (13)$$

Demonstração: Para desacoplar o ganho K da matriz G em (11) utiliza-se a matriz dada por:

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & B_i K \end{bmatrix} \quad (14)$$

Multiplicando (13) a esquerda por (14) e a direita pela transposta de (14), é obtido:

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & B_i K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -rP_i & G_j' A_i' + C' V' K' B_i' + qG_j' & G_j' C' - C' V' \\ A_i G_j + B_i K V C + qG_j & r(P_i - G_j - G_j') & \tau B_i K V \\ C G_j - V C & \tau V' K' B_i' & -\tau(V + V') \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = -rP_i$$

$$a_{12} = G_j' A_i' + C' V' K' B_i' + qG_j'$$

$$a_{13} = G_j' C' - C' V'$$

$$a_{21} = A_i G_j + B_i K V C + qG_j + B_i K C G_j - B_i K V C$$

$$a_{22} = r(P_i - G_j - G_j') + B_i K \tau V' K' B_i$$

$$a_{23} = \tau B_i K V - \tau B_i K (V + V')$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & K' B_i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$b_{11} = -rP_i$$

$$b_{12} = G_j' A_i' + C' V' K' B_i' + qG_j' + G_j' C' K' B_i' - C' V' K' B_i'$$

$$b_{21} = A_i G_j + B_i K V C + qG_j + B_i K C G_j - B_i K V C$$

$$b_{22} = r(P_i - G_j - G_j') + B_i K \tau V' K' B_i' + \tau B_i K V K' B_i' - \tau B_i K (V + V') K' B_i'$$

Por fim, efetuando as simplificações, observa-se que a multiplicação de (13) pela matriz (14) a esquerda e pela transposta a direita retorna em (11):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & B_i K \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -rP_i & G_j' A_i' + C' V' K' B_i' + qG_j' & G_j' C' - C' V' \\ A_i G_j + B_i K V C + qG_j & r(P_i - G_j - G_j') & \tau B_i K V \\ C G_j - V C & \tau V' K' B_i' & -\tau(V + V') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & B_i K \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} -rP_i & G_j' A_i' + G_j' C' K' B_i' + qG_j' \\ A_i G_j + B_i K C G_j + qG_j & r(P_i - G_j - G_j') \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Com o Teorema 2, expandiu-se o resultado do Teorema 1 para a realimentação estática da saída por meio da linearização propostas por Dong e Yang (2013). A reestruturação obtida faz com que o ganho K não dependa mais do produto com G , passando a depender apenas da variável V . Dessa forma, o termo originalmente bilinear KCG é substituído por KVC , e com a substituição de variável $L = KV$, o termo é linearizado.

Para viabilizar essa modificação, foi necessária a inclusão artificial de uma terceira linha e coluna na LMI, permitindo a inserção das variáveis de folga responsáveis por eliminar a bilinearidade e garantir a convexidade da formulação.

Essa reformulação fornece uma abordagem mais simples e tratável para o projeto de controladores por realimentação estática da saída, sem perda significativa de generalidade. A seguir, são apresentados os resultados numéricos e exemplos de aplicação que discute a eficácia do método proposto.

3. RESULTADOS E EXEMPLOS

3.1 REGIÃO DE FACTIBILIDADE

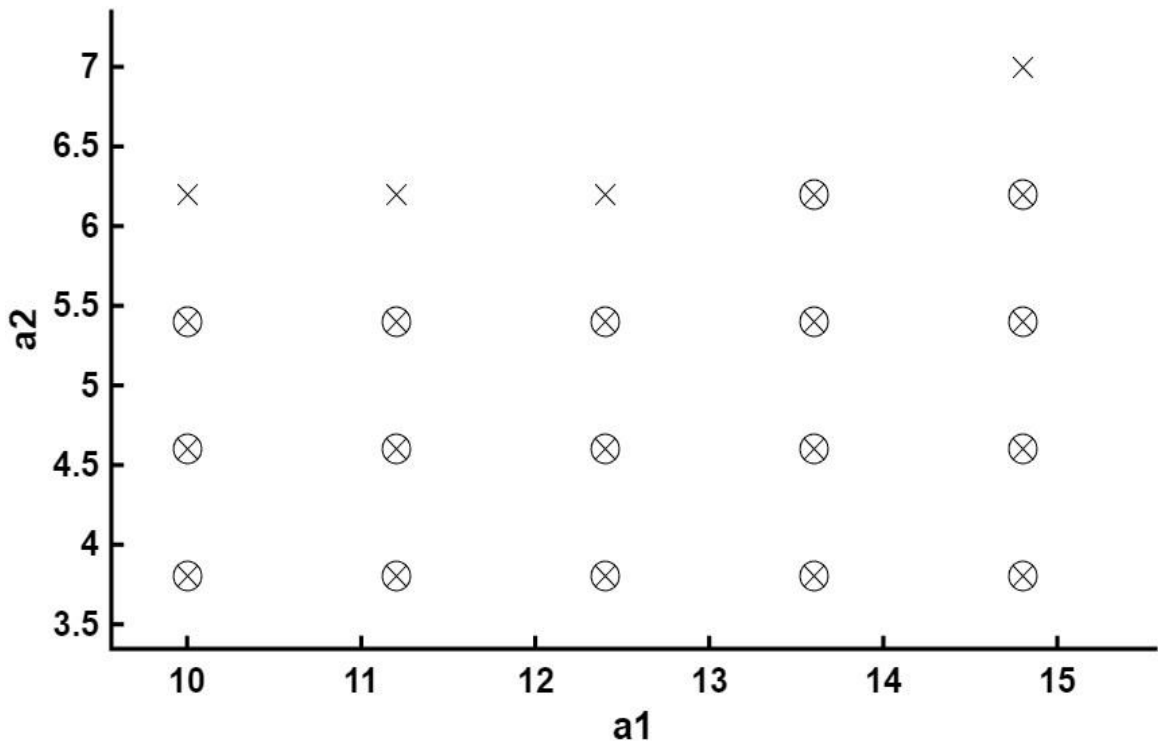
Com o objetivo de avaliar o grau de conservadorismo entre o Teorema 1 e o Teorema 2, resolveram-se as respectivas LMIs para a realimentação de estados utilizando os pacotes “YALMIP” e “SeDuMi” do MATLAB. Foram considerados os parâmetros e $r = 10$, $t_d = 1$,

$\tau \in [0.01, 0.9]$ aplicados ao sistema (1) com matrizes (15) proposto por Faria et al. (2011). A região de factibilidade obtida é apresentada na Figura 2.

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & A_2 &= \begin{bmatrix} a1 & -10 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & B_2 &= \begin{bmatrix} a2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

Observa-se na Figura 2 que o Teorema 2 apresenta um nível de conservadorismo ligeiramente menor em comparação ao Teorema 1. Essa diferença pode ser explicada pela parametrização apresentada em (13), na qual G_j pode ser expressa em forma de politopo, permitindo que o ganho K seja obtido sem depender da inversão G_j . Em contraste, no Teorema 1, G precisa ser fixado previamente para o cálculo do ganho, o que impõe maior restrição à região de factibilidade.

Figura 2 -Região de factibilidade do Teorema 1 ($\circ$) e Teorema 2 ($\times$).



Fonte: Próprio autor.

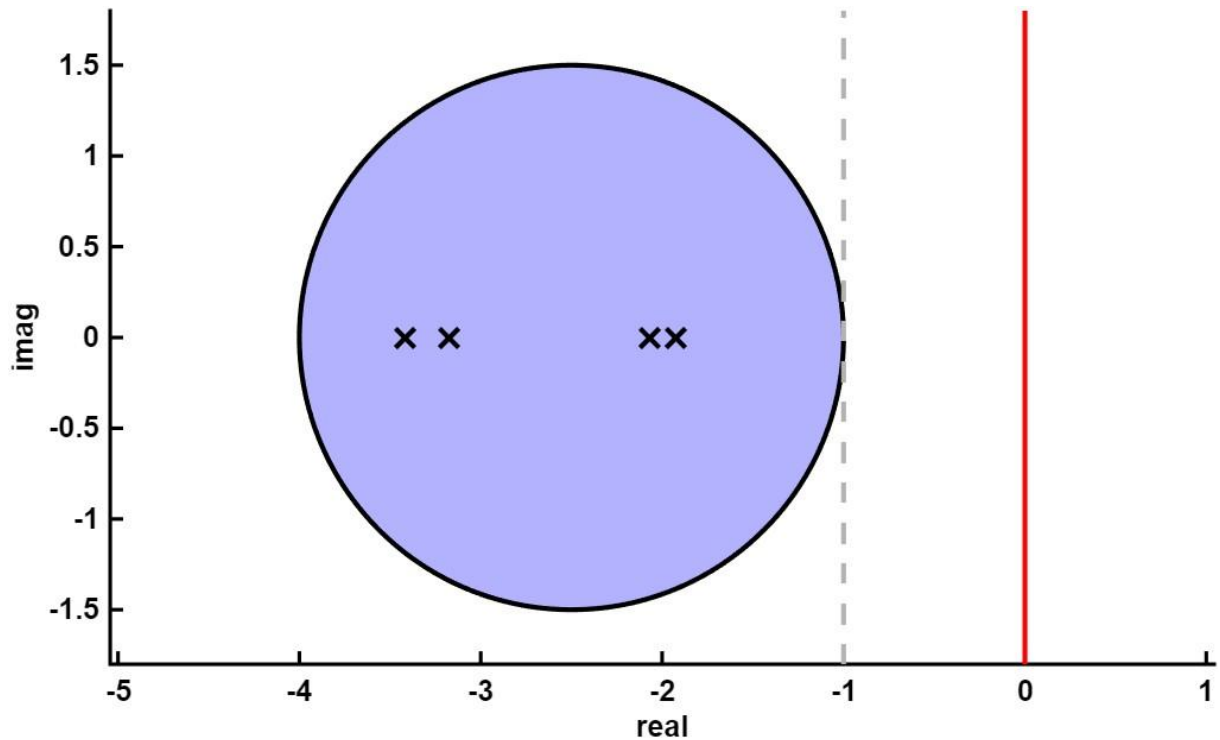
3.2 ALOCAÇÃO DE POLOS

Com o intuito de validar a alocação dos polos do método proposto no Teorema 2, foi considerado $r = 1,5$, $t_d = 1$, $\tau = 0,18$ para o seguinte sistema incerto de Sereni et al. (2022):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} 1,9801 & 1,99 \\ 0,0398 & 1,9801 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} -2,9697 & 3,0348 \\ 0,0607 & 3,0697 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_1 &= \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & & \\ \mathbf{C} &= [1 \quad 0] & & \end{aligned} \quad (16)$$

Utilizando os pacotes “YALMIP” e “SeDuMi” do MATLAB, resolveu-se as LMIs associadas ao Teorema 2 e foi obtido um ganho estabilizante $\mathbf{K} = 5,3414$ para a realimentação estática da saída. Na Figura 3 são apresentados os polos em malha fechada e a região de alocação, centrada em $(-2,5,0)$.

Figura 3 – Polos e região de alocação no plano complexo utilizando o Teorema 2.



Fonte: Próprio autor.

Observa-se na Figura 3 que todos os autovalores do sistema em malha fechada se encontram dentro da região de alocação especificada, o que confirma a efetividade do

Teorema 2 na determinação de um ganho $\mathbf{K}$ estabilizante. Esse resultado evidencia que as condições de projeto apresentadas são suficientes para garantir a estabilidade robusta do sistema, além de permitir a imposição de restrições de desempenho transitório por meio da alocação de polos em regiões desejadas do plano complexo.

4. CONCLUSÃO

Neste trabalho, foram investigadas condições para o projeto de controladores por realimentação estática da saída aplicados a sistemas lineares incertos, sob restrições de D-estabilidade. O estudo baseou-se em resultados consolidados na literatura sobre projeto de controladores robustos com alocação de polos por realimentação de estados via LMIs. A problemática envolvia o fato dessas desigualdades, quando estendidas diretamente ao caso de realimentação da saída, assumirem a forma de desigualdades matriciais bilineares (BMIs), as quais são não convexas e de difícil resolução.

A adoção da parametrização de Dong e Yang (2013) mostrou-se eficiente para desacoplar o ganho de realimentação das matrizes associadas à função de Lyapunov, possibilitando a linearização das restrições e a obtenção de condições viáveis para o cálculo do controlador. Os resultados obtidos evidenciam que o Teorema 2 apresenta um grau de conservadorismo menor em relação ao Teorema 1, ampliando ligeiramente a região de factibilidade e garantindo a estabilidade robusta do sistema em malha fechada.

A análise numérica demonstrou que, para os sistemas avaliados, todos os polos foram alocados dentro das regiões de desempenho especificadas, confirmando a validade teórica do método proposto. A implementação computacional via MATLAB, com os pacotes YALMIP e SeDuMi, comprovou a aplicabilidade prática da abordagem e sua capacidade de síntese de ganhos estabilizantes de forma automatizada e eficiente.

Em síntese, o método desenvolvido representa uma alternativa viável e de baixo conservadorismo para o projeto de controladores robustos baseados em LMIs para a realimentação estática da saída com restrições de desempenho.

Como continuação e aprofundamento desta pesquisa, sugerem-se a implementação em um sistema real para observação do sistema completo, bem como o estudo para as faixas em o parâmetro τ apresenta maior factibilidade.

REFERÊNCIAS

- APKARIAN, P.; TUAN, H. D.; BERNUSSOU, J. *Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and H_2 synthesis with enhanced linear matrix inequalities (LMI) characterizations*. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 46, n. 12, p. 1941–1946, 2001.
- CHERIFI, A.; GUELTON, K.; ARCESE, L. *Quadratic design of D-stabilizing Non-PDC controllers for Quasi-LPV/T-S models*. **IFAC-PapersOnLine**, v. 48, n. 26, p. 164–169, 2015. 1st IFAC Workshop on Linear Parameter Varying Systems (LPVS 2015).
- CHERIFI, A.; GUELTON, K.; ARCESE, L. *Uncertain T-S model-based robust controller design with D-stability constraints – a simulation study of quadrotor attitude stabilization*. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, v. 67, p. 419–429, 2018.
- CHILALI, M.; GAHINET, P. *H_∞ design with pole placement constraints: An LMI approach*. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 41, n. 3, p. 358–367, 1996.
- CHILALI, M.; GAHINET, P.; APKARIAN, P. *Robust pole placement in LMI regions*. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 44, n. 12, p. 2257–2270, 1999.
- CRUSIUS, C. A. R.; TROFINO, A. *Sufficient LMI conditions for output feedback control problems*. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 44, n. 5, p. 1053–1057, 1999.
- DONG, J.; YANG, G. H. *Robust static output feedback control synthesis for linear continuous systems with polytopic uncertainties*. **Automatica**, v. 49, n. 6, p. 1821–1829, 2013.
- EBIHARA, Y.; HAGIWARA, T. *New dilated LMI characterizations for continuous-time multiobjective controller synthesis*. **Automatica**, v. 40, n. 11, p. 2003–2009, 2004.
- FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; SILVA, N. A. P. da. *Robust state-derivative pole placement LMI-based designs for linear systems*. **International Journal of Control**, v. 82, n. 1, p. 1–12, 2009.
- FARIA, F. A.; SILVA, G. N.; OLIVEIRA, V. A.; CARDIM, R.; MOREIRA, M. R.; SILVA, E. R. P. da. *D-estabilização de sistemas fuzzy TS usando funções de Lyapunov fuzzy*. In: **X Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications**, Águas de Lindóia, SP. SBMAC, 2011. p. 4.
- LEITE, V. J. S.; MONTAGNER, V. F.; PERES, P. L. D. *Robust pole location by parameter dependent state feedback control*. In: **Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control**, v. 2, p. 1864–1869, 2002.
- LÖFBERG, J. *YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB*. In: **IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design**, Taipei, China, 2004. p. 284–289.
- OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2000.

SADABADI, M. S.; PEAUCELLE, D. *From static output feedback to structured robust static output feedback: A survey*. **Annual Reviews in Control**, v. 42, p. 11–26, 2016.

SERENI, B.; BETETO, M. A. L.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. *Pole placement LMI constraints for stability and transient performance of LPV systems with incomplete state measurement*. **Journal of the Franklin Institute**, v. 359, n. 2, p. 837–858, 2022.