

Universidade Estadual Paulista – UNESP
Instituto de Química de Araraquara
Departamento de Físico-química

O ensino de funções exponenciais e logarítmicas: explorando a Cinética Química e situações cotidianas

Guilherme Gonçalves Costa

Araraquara

2017

Autor: Guilherme Gonçalves Costa

O ensino de funções exponenciais e logarítmicas: explorando a Cinética Química e situações cotidianas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Química de Araraquara, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” para obtenção do título de Bacharel em Química.

Orientadora: Profª. Dra. Érica Regina Filletti Nascimento

Co-orientadora: Profª. Dra. Sidineia Barrozo

Araraquara

2017

GUILHERME GONÇALVES COSTA

O ensino de funções exponenciais e logarítmicas: explorando a Cinética Química e situações cotidianas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Química de Araraquara, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” para obtenção do título de Bacharel em Química.

Araraquara, 11 de dezembro de 2017.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Érica Regina Filletti Nascimento
Instituto de Química – UNESP, Araraquara

Prof. Dr. Marco Aurélio Cebim
Instituto de Química – UNESP, Araraquara

Profa. Dra. Sidineia Barrozo
Instituto de Química – UNESP, Araraquara

*Aos meus estudantes, que me inspiram a lutar
diariamente por uma educação humana, justa,
crítica e reflexiva.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, por prover-me de forças nos momentos de maior necessidade.

À Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” *Campus* Araraquara, seu corpo docente, direção e administração, pelas lições científicas, pedagógicas e humanas.

À Profa. Dra. Érica Regina Filletti Nascimento e à Profa. Dra. Sidineia Barrozo, pelo suporte, entusiasmo e incentivo a esse trabalho.

À Profa. Dra. Carolina Toledo Ferraz, que gentilmente cedeu parte de suas aulas para a realização deste trabalho, acompanhando cada etapa de sua realização.

Agradeço ao meu pai Oswaldo Costa Jr., que mesmo distante sempre me apoiou incondicionalmente nos momentos difíceis e atribulados.

À minha avó Miltes Renzo Costa, com sua infinita paciência ao ouvir-me falar da vida, dos trabalhos acadêmicos e da Química, com carinho e bom humor.

Aos meus irmãos, que, entre perguntas e respostas, sempre me permitiram aprender um pouco mais sobre a Ciência.

A todos os amigos e colegas que fizeram parte disso, apoiando-me nas conquistas, nos tropeços e nas dificuldades.

Aos mentores e mestres Prof. Dr. Marco Aurélio Cebim, Profa. Dra. Maria Helena Bizelli e Prof. Dr. Rodrigo Fernando Costa Marques, por me mostrarem a paixão pelo ensino de maneira inigualável, e por me incentivarem à melhoria contínua, seja na Química, na Matemática ou na vida.

Agradeço em especial aos meus estudantes, pois sem estes não há sentido no que faço.

*“Ensinar não é transferir conhecimento, mas
criar as possibilidades para a sua própria
produção ou a sua construção.”*

Paulo Freire

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo apresentar uma forma diferenciada de ensinar Matemática e Química por meio de uma experiência didática com ingressantes do curso de Bacharelado em Química do Instituto de Química da UNESP, *Campus* Araraquara. A demanda por recursos didáticos alternativos no Ensino Superior é crescente, o que contribui para a falta de motivação e desistência dos estudantes, em especial aqueles que ingressam nos cursos de Ciências Exatas e da Terra. Adotando-se os princípios da Engenharia Didática, esse trabalho foi elaborado visando ao uso de funções exponenciais e logarítmicas no contexto da Química e do cotidiano dos educandos para que estes pudessem compreender melhor a aplicabilidade dos conceitos teóricos ensinados em sala de aula. Apresentaram-se cinco atividades aos alunos, teóricas e práticas, com problemas contextualizados para que se pudesse despertar o interesse sobre como a Matemática pode ser explorada dentro e fora da Química. Duas atividades envolveram funções exponenciais, duas outras envolveram funções logarítmicas, e uma quinta atividade aplicou estes conceitos na Cinética Química. Nas atividades práticas, trabalhou-se com os *softwares* GeoGebra e LibreOffice Calc, utilizando-se a modelagem matemática. Ao fim de cada atividade, os estudantes avaliaram todos os conceitos abordados em forma de escala de Likert, a ferramenta de validação deste trabalho. Os padrões de resposta permitiram concluir que as atividades desenvolvidas causaram impacto benéfico aos estudantes, estimulando-os à curiosidade matemática e química.

Palavras-chave: Funções exponenciais. Funções logarítmicas. Cinética Química. Interdisciplinaridade. Modelagem matemática. Engenharia Didática.

ABSTRACT

The present work aims to introduce a different form of teaching Mathematics and Chemistry through a didactic experience with freshmen from the Bachelor's degree in Chemistry from the Institute of Chemistry of UNESP, *Campus Araraquara*. The demand for alternative didactic resources in Higher Education is increasing, which contributes to the students' lack of motivation and withdrawal, especially those who enroll in Exact Sciences courses. By adopting the Didactic Engineering principles, this work was elaborated seeking the use of exponential and logarithmic functions in the context of Chemistry and pupils' everyday situations for them to understand the applicability of the theoretical concepts taught in class. Five activities were presented to the students, theoretical and practical ones, with contextualized problems so that their interest could be aroused on how Mathematics can be explored inside and outside Chemistry. Two activities involved exponential functions, two others involved logarithmic functions, and a fifth one applied these concepts in Chemical Kinetics. In the practical activities, we worked with the GeoGebra and LibreOffice Calc software, using mathematical modeling. At the end of each activity, the students assessed all concepts approached with the Likert scale, the validation tool of this work. The answering patterns allowed the conclusion that the developed activities caused beneficial impact on students, stimulating them towards mathematical and chemical curiosity.

Keywords: Exponential functions. Logarithmic functions. Chemical Kinetics. Interdisciplinarity. Mathematical modeling. Didactic Engineering.

Lista de Figuras

Figura 1.1 – Questão 15 do ENEM (Caderno Amarelo), aplicado em 1998.....	19
Figura 1.2 – Questão 139 do ENEM (2º dia, Caderno Amarelo, n. 5), aplicado em 2016.	20
Figura 1.3 – Questão 62 do ENEM (Caderno Amarelo), aplicado em 1998.....	21
Figura 1.4 – Questão 60 do ENEM (1º dia, Caderno Azul, n. 1), aplicado em 2016.....	22
Figura 1.5 – Possíveis relações entre as disciplinas de Química, Biologia e Matemática.	24
Figura 2.1 – Funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = (1/2)^x$	34
Figura 2.2 – Obtenção de um gráfico G' por simetria de um gráfico G em relação à reta $y = x$	35
Figura 2.3 – Funções $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \log_{1/2} x$	40
Figura 2.4 – Funções $f(x) = 2^x$, $g(x) = \log_2 x$ e a reta $y = x$	41
Figura 4.1 – Curva $y = ax^2 + bx + c$, com controles deslizantes para os coeficientes a , b e c	75
Figura 4.2 – Curva $P(t) = A \cdot (1/2)^t$, com controle deslizante para a população inicial A	76
Figura 4.3 – Planilha eletrônica fornecida aos estudantes no início do item b).	77
Figura 4.4 – Planilha eletrônica construída pelos estudantes no término do item b).	77
Figura 4.5 – Curva $Q(t) = C \cdot (1+r)^t$, com controles deslizantes para o capital inicial C e a taxa de juros r %.	78
Figura 4.6 – Curva $Q(t) = \left(C + \frac{k}{r}\right) \cdot (1+r)^t - \frac{k}{r}$, com controles deslizantes para o capital inicial C , o depósito fixo k , e a taxa de juros r %, com valores propostos pelo Exercício 4 da Atividade 1.	79
Figura 4.7 – Curva $Q(t) = \left(C + \frac{k}{r}\right) \cdot (1+r)^t - \frac{k}{r}$, com controles deslizantes para o capital inicial C , o saque fixo k , e a taxa de juros r %, com valores propostos pelo Exercício 5 da Atividade 1.	80
Figura 4.8 – Curvas $f(x) = x^a$ e $g(x) = b^x$, com $b > 0$ e $b \neq 1$, com controles deslizantes para a potência a e a base b	81
Figura 4.9 – Curva $\iota(P)$, que calcula o tempo t , em horas, em relação à população de bactérias P	85

Figura 4.10 – Estimativas de $t(1)$, $t(10)$, $t(100)$ e $t(1\ 000)$	86
Figura 4.11 – Curva $t(P)$, com controle deslizante para a população inicial A e reta tangente em $P=100$ bactérias.....	88
Figura 4.12 – Estimativas para os subitens I e II do item b) do Exercício 2 da Atividade 4, utilizando a planilha eletrônica elaborada para a Atividade 2.....	91
Figura 4.13 – Curvas $Q(t)$, sua inversa $t(Q)$, e $y=x$, com controles deslizantes para o capital inicial C e a taxa de juros $r\%$, obtidas no Exercício 3.	91
Figura 4.14 – Curva $t(Q)$ obtida no Exercício 4, com controles deslizantes para o capital inicial C , o depósito ou saque fixo k , e a taxa de juros $r\%$	92
Figura 4.15 – Esboço de curva qualitativa para a reação de decomposição de água oxigenada.....	95
Figura 4.16 – Porcentagens relativas de resposta aos itens a) a e), avaliados de 1 a 5, ou sem resposta (NR), para a Atividade 1.	100
Figura 4.17 – Porcentagens relativas de resposta aos itens a) a e), avaliados de 1 a 5, ou sem resposta (NR), para a Atividade 2.	102
Figura 4.18 – Porcentagens relativas de resposta aos itens a) a e), avaliados de 1 a 5, ou sem resposta (NR), para a Atividade 3.	104
Figura 4.19 – Porcentagens relativas de resposta aos itens a) a e), avaliados de 1 a 5, ou sem resposta (NR), para a Atividade 4.	106
Figura 4.20 – Porcentagens relativas de resposta aos itens a) a e), avaliados de 1 a 5, ou sem resposta (NR), para a Atividade 5.	109

Lista de tabelas

Tabela 4.1 – Somatório dos escores e percentuais de satisfação das Atividades 1 a 5.	110
Tabela 4.2 – Porcentagens médias dos escores relativas às Atividades 1 a 5.	111
Tabela 4.3 – Relação das variáveis macrodidáticas com as Atividades 1 a 5 (A1 a A5). Um “X” indica a contemplação da variável em cada atividade.	113

Lista de abreviaturas e siglas

CUCA	Curso Unificado do <i>Campus</i> de Araraquara
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
FEG	Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá
IQ/CAr	Instituto de Química <i>Campus</i> Araraquara
LDI	Laboratório Didático de Informática
MMC	Mínimo Múltiplo Comum
NR	Não Respondeu
OECD	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PA	Progressão Aritmética
PCN+	Parâmetros Curriculares Nacionais+
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PG	Progressão Geométrica
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Alunos
PPL	Pessoas Privadas de Liberdade
PUCRS	Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UNESP	Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

Lista de símbolos

R	Reagente
P	Produto
$\Delta[R]$	Variação da concentração molar de reagente
$\Delta[P]$	Variação da concentração molar de produto
Δt	Variação de tempo
$v_{\text{méd}}$	Velocidade média de uma reação química
v	Velocidade instantânea de uma reação química
k	Constante de velocidade de uma reação química
ω	Ordem global ou total de uma reação química
$[J]_0$	Concentração molar inicial da espécie química J
$t_{1/2}$	Tempo de meia-vida

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	15
1 O PROBLEMA DE PESQUISA	16
2 TÓPICOS DE MATEMÁTICA	27
2.1 Sequências e progressões	27
2.2 Caracterização da função exponencial	29
2.3 Função inversa	34
2.4 Caracterização da função logarítmica	36
2.5 Derivadas e integrais	41
2.6 Conceitos introdutórios à modelagem matemática	47
3 INTRODUÇÃO À CINÉTICA QUÍMICA	49
3.1 A velocidade das reações químicas	49
3.2 Velocidade média de reação	50
3.3 Velocidade instantânea de reação	51
3.4 Leis de velocidade e ordem de reação	51
3.5 Leis de velocidade integradas	53
3.5.1 Reações de ordem zero	54
3.5.2 Meia-vida de reações de ordem zero	55
3.5.3 Reações de primeira ordem	55
3.5.4 Meia-vida de reações de primeira ordem	56
3.5.5 Reações de segunda ordem	57
3.5.6 Meia-vida de reações de segunda ordem	61
4 METODOLOGIA	62
4.1 Referencial histórico	62
4.2 Análises prévias	63
4.3 Concepção e Análise <i>a Priori</i>	66
4.3.1 Atividades 1 e 3	67
4.3.2 Atividades 2 e 4	68
4.3.3 Atividade 5	68

4.3.4	Comportamentos esperados.....	69
4.4	Experimentação.....	70
4.4.1	Atividade 1	70
4.4.2	Atividade 2	74
4.4.3	Atividade 3	82
4.4.4	Atividade 4	84
4.4.5	Atividade 5	92
4.5	Análise <i>a Posteriori</i> e Validação	98
4.5.1	Análise da Atividade 1	99
4.5.2	Análise da Atividade 2	101
4.5.3	Análise da Atividade 3	103
4.5.4	Análise da Atividade 4	105
4.5.5	Análise da Atividade 5	107
4.5.6	Análise conjunta das Atividades 1 a 5	110
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS.....	114
	REFERÊNCIAS.....	115
	APÊNDICE A	121
	APÊNDICE B.....	122
	APÊNDICE C	124
	APÊNDICE D	128
	APÊNDICE E.....	130
	APÊNDICE F	133
	ANEXO A.....	136
	ANEXO B	139

INTRODUÇÃO

As Ciências Exatas trazem grande desafio aos estudantes, desde o Ensino Fundamental. Um desafio ainda maior é o de ensinar suas disciplinas, que são injustamente estigmatizadas pela sociedade. A necessidade de abordagens diferenciadas nessas disciplinas nos levou a buscar atividades que pudessem despertar o interesse de estudantes do Ensino Superior, com foco especial na presença da Matemática no contexto da Química e de situações cotidianas dos alunos.

Nossos objetivos centrais neste estudo são o de analisar um conjunto de cinco atividades desenvolvidas pelo autor durante o exercício de monitoria na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, e o de propor atividades diferenciadas em sala de aula por meio do uso de recursos tecnológicos no Ensino Superior, podendo também ser aplicadas a outras esferas de ensino. Buscamos a abordagem tanto de problemas comuns do dia-a-dia dos estudantes quanto outros mais específicos para o Curso de Bacharelado em Química, e que pudessem ser solucionados com uso do raciocínio matemático, explorando a teoria do Cálculo. Dessa maneira, optamos por estruturar este trabalho em cinco capítulos.

No primeiro capítulo, elucidaremos inicialmente sobre as dificuldades enfrentadas pelos educandos nas Ciências Exatas. Em seguida, propomos uma reflexão acerca dos conteúdos exigidos no Ensino Médio frente ao que é necessário às disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Superior, culminando nas razões que levaram à escolha do tema deste estudo.

No segundo e terceiro capítulos, respectivamente, introduzimos os conceitos matemáticos e químicos que foram apresentados aos estudantes durante as atividades.

No quarto capítulo, trazemos um aprofundamento na metodologia de pesquisa adotada neste trabalho – a Engenharia Didática –, destacando as motivações que nos levaram a escolhê-la e inter-relacionando-a com a Educação Matemática e Química, a fim de contribuir para a formação continuada de professores na área de Ciências Exatas. Neste capítulo também fazemos a análise e discussão dos dados coletados ao longo de nosso estudo.

No último capítulo, sintetizamos nossas principais conclusões quanto à realização desta experiência didática, e trazemos sugestões de trabalhos futuros que possam ampliar as perspectivas de estudo na área da Educação.

1 O PROBLEMA DE PESQUISA

Neste capítulo, inicialmente apresentamos alguns dados a respeito do desempenho brasileiro nos *rankings* mundiais em educação, com foco na Matemática. Em seguida, relacionamos essas informações ao desempenho dos estudantes do Ensino Superior nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e tentamos, num primeiro momento, explicar parte dos fenômenos observados por meio do conceito de “nativos digitais” de Prensky (2001). Num segundo momento, analisamos os conteúdos de Matemática e Química exigidos nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, os PCNEM e PCN+, e no Currículo do Estado de São Paulo¹, estabelecendo um contraste com o conteúdo exigido nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Superior. Por fim, elencamos alguns trabalhos já realizados com intuito de analisar erros comuns cometidos nessas disciplinas.

Os obstáculos enfrentados por estudantes nas disciplinas pertencentes à área de Ciências Exatas persistem como lugar-comum na realidade brasileira. Muitos alunos, ao se depararem com temas matemáticos de uso cotidiano como frações ou porcentagem, por exemplo, ainda enfrentam dificuldades advindas de um contexto educacional precário pelo qual o país tem passado. Conforme apontado por Costa (2016), essa condição é observável com facilidade por meio de avaliações e pesquisas, como a prova do PISA (Programa Internacional de Avaliação de Alunos), por exemplo, sendo que, na edição de 2015, o Brasil atingiu a 66ª colocação entre os 70 países participantes, com 43,74% dos estudantes abaixo do rendimento mínimo exigido pela prova (OECD, 2015), o que corrobora quão preocupante é nossa situação educacional. Costa (2016) argumenta, ainda, que a dificuldade em matemática persiste nos adultos,

(...) como afirma o instituto “O Ciclo da Matemática no Brasil”, coordenado pelo professor Dr. Flávio Comim da UFRGS, que divulgou uma prévia de um estudo que fez no país com 2.632 adultos (maiores de 25 anos), sobre Matemática. Nesta prévia, publicada por Paulo Saldaña em 01 de novembro de 2015 no jornal “O Estado de São Paulo”, 65% dos entrevistados disseram ter tido dificuldades em Matemática quando estudavam e 60% do total disseram que não gostavam da disciplina. Mais ainda, 43% dos entrevistados consideram Matemática como a disciplina que mais odiavam. A pesquisa também mostrou que a maioria não consegue fazer operações matemáticas simples: 63% não conseguem resolver problemas envolvendo porcentagens; 75% não entendem frações e 69% não sabem fazer contas com taxas de juros. (SALDAÑA apud COSTA, 2016, p. 17).

¹ Cf. BRASIL, 2000; id. 2002; SÃO PAULO, 2011; id. 2012.

A presença da Matemática no dia-a-dia dos alunos é inevitável, e a assimilação do conteúdo ministrado em sala de aula muitas vezes não ocorre. Essa relação conteúdo-cotidiano afeta bastante a aprendizagem, uma vez que o contato do aluno com o ensino tradicional das Ciências Exatas não consegue atingi-los diretamente, seja por ater-se excessivamente a metodologias ortodoxas, seja por ainda carregar aspectos positivistas no seu ensino, em que se trata o que é ensinado como verdade absoluta e universal.

Em diálogo com esse tema, o ensino de Química se vê também prejudicado, uma vez que esta se constitui uma ciência correlata e dependente das ferramentas matemáticas. À luz desses apontamentos, surge a necessidade de se aprimorarem extensivamente os recursos de ensino nas Ciências como um todo.

Com isso em voga, coloca-se a questão: a base matemática construída no Ensino Médio é suficiente para que haja bom aproveitamento dos estudantes nas disciplinas matemáticas do Ensino Superior? Os dados apresentados por Costa (2016) aliados à nossa experiência em sala de aula nos dizem, infelizmente, que não.

À medida que os estudantes ingressam no Ensino Superior em cursos de Ciências Exatas e da Terra, a maioria entra sem o conhecimento necessário ao currículo básico do 1º ano, especialmente para as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I e II². Este é um problema sistêmico que se reproduz no Brasil e no mundo, em universidades públicas e particulares, nos mais diversos cursos. Com isso em mente, pensamos ser fundamental a implementação de novos recursos didáticos no Ensino Superior, visando à abdicação de um modelo arcaico de ensino para um público-alvo carente de conhecimento matemático e cada vez mais composto por estudantes “nativos digitais”, ou seja, que nasceram e cresceram numa sociedade tecnológica e digitalizada, com amplo acesso à informação (Prensky, 2001). É comum que muitos docentes da atualidade ainda não tenham se atentado para essa mudança de gerações sugerida por Prensky (2001) e Tapscott (1998), o que configura a necessidade de reformulação dos meios de ensino e recursos didáticos tradicionais da academia, buscando-se a maior abrangência possível que atenda à demanda tecnológica das novas gerações que já ocupam as universidades brasileiras.

Para a melhor compreensão dessa problemática, é necessário aprofundar-se no que é ensinado nas instituições brasileiras, e como é ensinado, o que não é tarefa fácil. Para tentar elucidar alguns dos aspectos introdutórios a este tema, utilizamos tanto os PCNEM e PCN+

² Para maior aprofundamento neste tema em particular, sugerimos a leitura de HIRST, 2002; CURY, 2003; AGUSTIN e AGUSTIN, 2009; ZANARDI e LIMA, 2009; HASHEMI et al., 2014.

quanto o Currículo do Estado de São Paulo. Em seguida, avaliamos a ementa da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (ver Anexo A) oferecida pelo Instituto de Química da UNESP no *Campus* de Araraquara (IQ/CAr) para o curso de Bacharelado em Química, em conjunto da bibliografia utilizada para a mesma. Por fim, utilizamos os trabalhos de Cury (2003) e Zanardi e Lima (2009) para a análise de alguns erros elementares cometidos por estudantes nas disciplinas de Cálculo.

No Brasil, os PCNEM constituem um conjunto de diretrizes norteadoras para os professores, coordenadores e diretores atuantes no Ensino Médio, das redes de ensino pública ou privada. Os PCNEM têm por objetivo orientar e preparar educadores na articulação e adaptação, quando necessária, dos conteúdos exigidos nas disciplinas escolares a nível nacional (BRASIL, 2000).

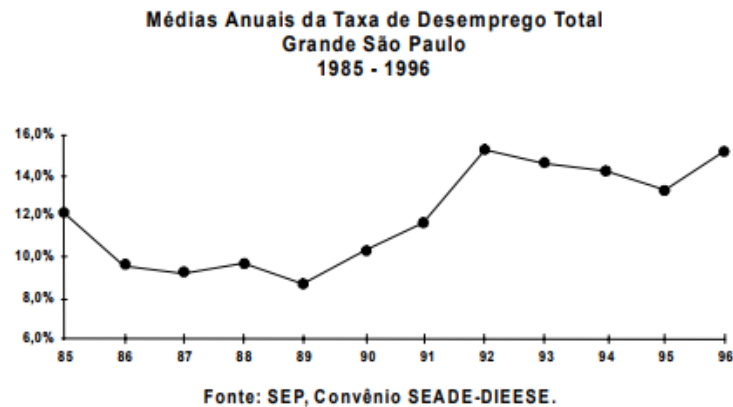
Cada disciplina ou área do saber abrange um conjunto de conhecimentos que não se restringem a tópicos disciplinares ou a competências gerais ou habilidades, mas constituem-se em sínteses de ambas as intenções formativas. Ao se apresentarem dessa forma, esses temas estruturadores do ensino disciplinar e seu aprendizado não mais se restringem, de fato, ao que tradicionalmente se atribui como responsabilidade de uma única disciplina. Incorporam metas educacionais comuns às várias disciplinas da área e das demais e, também por isso, tais modificações de conteúdo implicam modificações em procedimentos e métodos, que já sinalizam na direção de uma nova atitude da escola e do professor. (BRASIL, 2002, p. 13).

Assim, pode-se observar uma forte tendência contrária à compartimentalização de conteúdo, isto é, há a tentativa de trazer aos educandos um maior diálogo entre as disciplinas, exigindo a racionalização para além das especificidades de cada uma. Essa tendência pode ser mais bem visualizada com a análise das provas de ingresso ao Ensino Superior (exames vestibulares) mais atuais. Neste estudo, utilizaremos o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) como parâmetro de comparação. As Figuras 1.1 e 1.2 mostram a abordagem do tópico de porcentagem em duas provas distintas do ENEM, nas edições de 1998 e 2016 (1ª aplicação)³, respectivamente.

³ Desde 2010, o ENEM passou a ser aplicado para pessoas privadas de liberdade e jovens sob medida socioeducativa que incluísse privação de liberdade (conhecido como ENEM PPL), e tem como finalidade principal a avaliação do desempenho escolar e acadêmico ao fim do Ensino Médio. Em 2016, a 1ª aplicação foi o exame comum e a 2ª aplicação foi o ENEM PPL. No entanto, houve a necessidade de uma 3ª aplicação, a fim de que 271.033 candidatos afetados por locais de prova com ocupações estudantis [contra a reforma do Ensino Médio e a PEC do teto de gastos públicos] pudessem realizar o exame (GLOBO.COM, 2016).

Figura 1.1 – Questão 15 do ENEM (Caderno Amarelo), aplicado em 1998.

Um estudo sobre o problema do desemprego na Grande São Paulo, no período 1985-1996, realizado pelo SEADE-DIEESE, apresentou o seguinte gráfico sobre taxa de desemprego.



- 15** Pela análise do gráfico, é correto afirmar que, no período considerado,
- (A) a maior taxa de desemprego foi de 14%.
 - (B) a taxa de desemprego no ano de 1995 foi a menor do período.
 - (C) a partir de 1992, a taxa de desemprego foi decrescente.
 - (D) no período 1985-1996, a taxa de desemprego esteve entre 8% e 16%.
 - (E) a taxa de desemprego foi crescente no período compreendido entre 1988 e 1991.

Fonte: BRASIL, 1998.

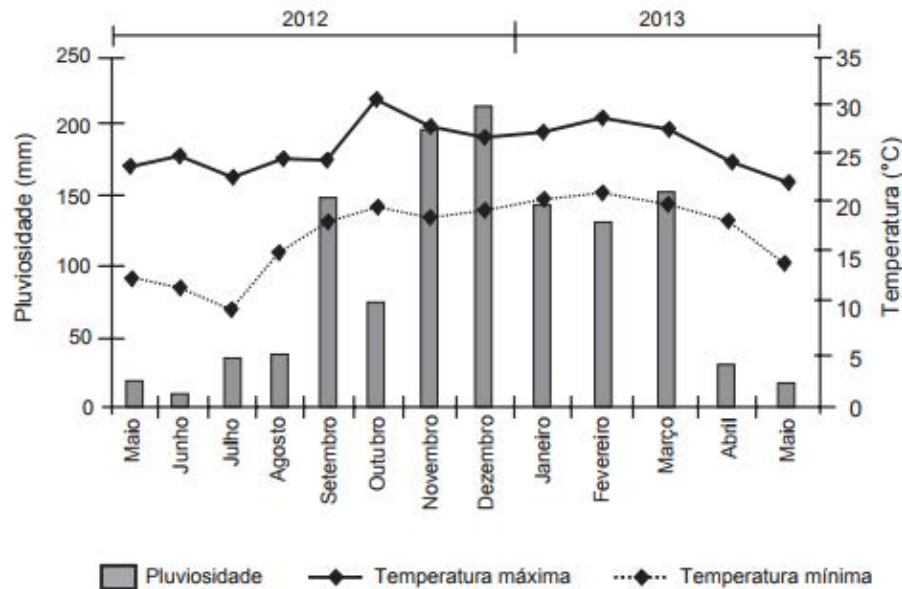
Figura 1.2 – Questão 139 do ENEM (2º dia, Caderno Amarelo, n. 5), aplicado em 2016.

QUESTÃO 139

O cultivo de uma flor rara só é viável se do mês do plantio para o mês subsequente o clima da região possuir as seguintes peculiaridades:

- a variação do nível de chuvas (pluviosidade), nesses meses, não for superior a 50 mm;
- a temperatura mínima, nesses meses, for superior a 15 °C;
- ocorrer, nesse período, um leve aumento não superior a 5 °C na temperatura máxima.

Um floricultor, pretendendo investir no plantio dessa flor em sua região, fez uma consulta a um meteorologista que lhe apresentou o gráfico com as condições previstas para os 12 meses seguintes nessa região.



Com base nas informações do gráfico, o floricultor verificou que poderia plantar essa flor rara.

O mês escolhido para o plantio foi

- ☐ A janeiro.
☐ B fevereiro.
☒ C agosto.
☐ D novembro.
☐ E dezembro.

Fonte: BRASIL, 2016b.

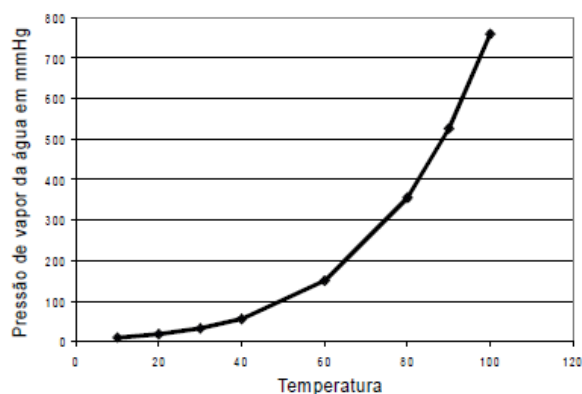
Na Figura 1.1, a questão é bastante objetiva, em que se apresenta um gráfico ao candidato e pede-se a análise imediata do mesmo, sem muita interdisciplinaridade. O mesmo se observa em outras questões de Matemática na prova desta edição. Por outro lado, a questão da prova de 2016 (Figura 1.2), aplicada no ano anterior à realização deste trabalho, ilustra a tendência de interdisciplinaridade comentada anteriormente, em que o mesmo tópico de porcentagem e gráfico similar são apresentados ao candidato. Neste caso, porém, observa-se um grau de exigência maior, no sentido de abranger conteúdos relacionados à Geografia e à Biologia.

Quanto à área de Ciências da Natureza, a situação não é muito diferente. As Figuras 1.3 e 1.4 ilustram esta mesma tendência do ENEM nas questões de Química abordando o tópico de gases, nas edições de 1998 e 2016 (2ª aplicação), respectivamente.

Figura 1.3 – Questão 62 do ENEM (Caderno Amarelo), aplicado em 1998.

A tabela a seguir registra a pressão atmosférica em diferentes altitudes, e o gráfico relaciona a pressão de vapor da água em função da temperatura

Altitude (km)	Pressão atmosférica (mm Hg)
0	760
1	600
2	480
4	300
6	170
8	120
10	100



- 62 Um líquido, num frasco aberto, entra em ebulição a partir do momento em que a sua pressão de vapor se iguala à pressão atmosférica. Assinale a opção correta, considerando a tabela, o gráfico e os dados apresentados, sobre as seguintes cidades:

Natal (RN)	nível do mar.
Campos do Jordão (SP)	altitude 1628m.
Pico da Neblina (RR)	altitude 3014 m.

A temperatura de ebulição será:

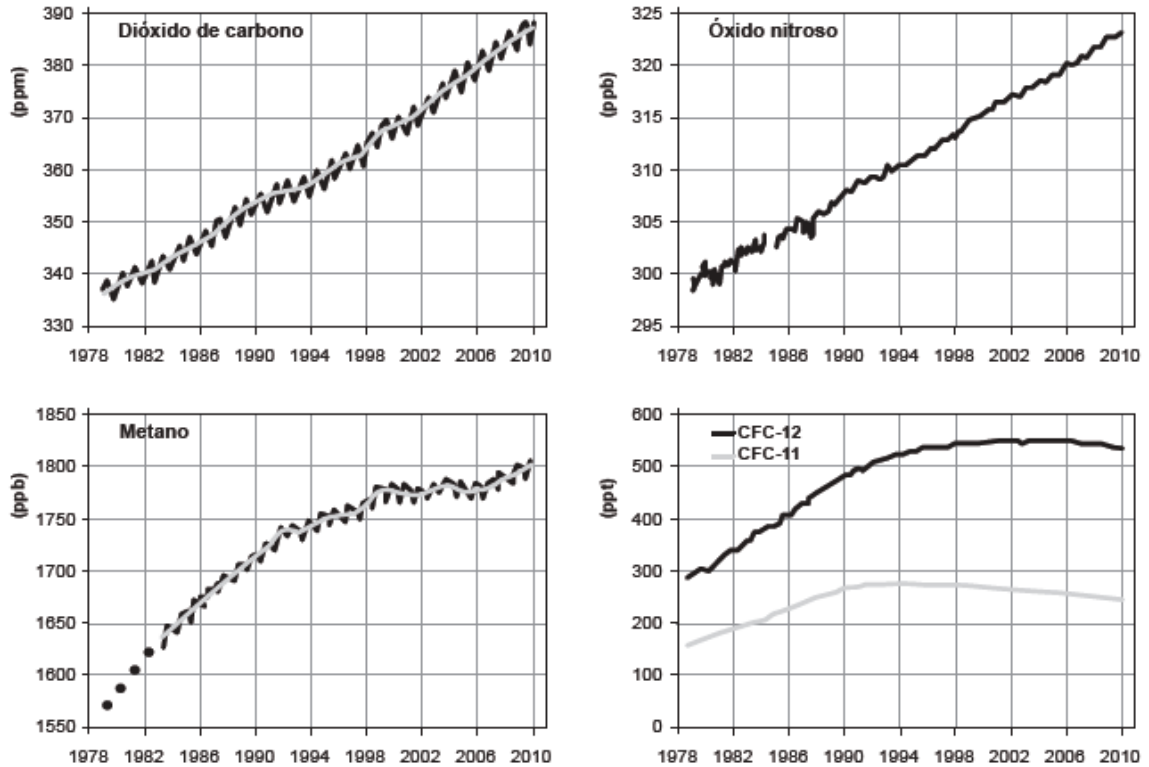
- (A) maior em Campos do Jordão.
- (B) menor em Natal.
- (C) menor no Pico da Neblina.
- (D) igual em Campos do Jordão e Natal.
- (E) não dependerá da altitude.

Fonte: BRASIL, 1998.

Figura 1.4 – Questão 60 do ENEM (1º dia, Caderno Azul, n. 1), aplicado em 2016.

QUESTÃO 60

Os gráficos representam a concentração na atmosfera, em partes por milhão (ppm), bilhão (ppb) ou trilhão (ppt), dos cinco gases responsáveis por 97% do efeito estufa durante o período de 1978 a 2010.



Disponível em: www.esrl.noaa.gov. Acesso em: 6 ago. 2012 (adaptado).

Qual gás teve o maior aumento percentual de concentração na atmosfera nas últimas duas décadas?

- A CO_2
- B CH_4
- C N_2O
- D CFC-12
- E CFC-11

Fonte: BRASIL, 2016a.

Enquanto na questão da Figura 1.3 pede-se a análise do comportamento do estado gasoso em diferentes altitudes e temperaturas, na questão da Figura 1.4 é exigida a comparação de quatro diferentes gráficos quanto à concentração gasosa, havendo ainda a necessidade de conversão para porcentagem. A questão também tem a temática atual do efeito estufa, trazendo ao candidato a interdisciplinaridade entre Química, Matemática e Geografia, o que corrobora as análises anteriores.

O Currículo de Matemática do Estado de São Paulo (2011) estabelece que

Vivemos em uma época em que as atividades interdisciplinares e as abordagens transdisciplinares constituem recursos fundamentais para a construção do significado dos temas estudados, contribuindo de modo decisivo para a criação de centros de interesse nos alunos. (SÃO PAULO, 2011, p. 28, *grifo nosso*).

O Currículo de Ciências da Natureza do Estado de São Paulo (2012), por sua vez, argumenta que

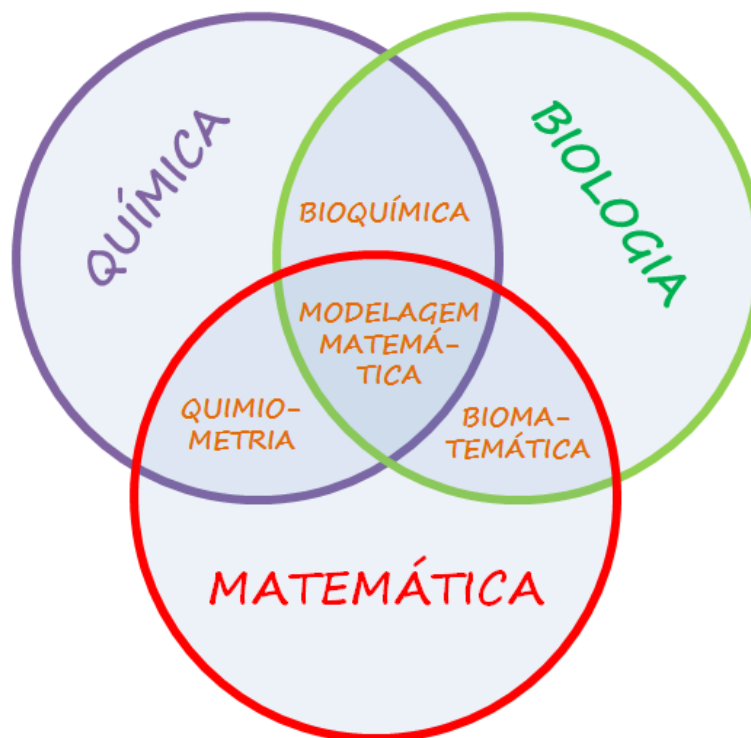
(...) no Ensino Médio, é possível ousar um aprofundamento conceitual na área de conhecimento nas três disciplinas científicas básicas – Biologia, Física e Química –, nas quais as especificidades temática e metodológica se explicitam, permitindo uma organização curricular detalhada. (...) Tal aprofundamento da disciplina não deve significar nenhum exagero propedêutico, o que pode ser evitado quando se explicitam competências relacionadas ao conhecimento científico e aos contextos reais, geralmente interdisciplinares. (SÃO PAULO, 2012, p. 27, *grifo nosso*).

Os PCN+ (2002) colocam, a título de exemplo, como o conceito de “energia” é mutável para as diferentes áreas do conhecimento, adquirindo novas perspectivas em cada abordagem.

Essa articulação interdisciplinar, promovida por um aprendizado com contexto, não deve ser vista como um produto suplementar a ser oferecido eventualmente se der tempo, porque sem ela o conhecimento desenvolvido pelo aluno estará fragmentado e será ineficaz. É esse contexto que dá efetiva unidade a linguagens e conceitos comuns às várias disciplinas, seja a energia da célula, na Biologia, da reação, na Química, do movimento, na Física, seja o impacto ambiental das fontes de energia, em Geografia, a relação entre as energias disponíveis e as formas de produção, na História. Não basta, enfim, que energia tenha a mesma grafia ou as mesmas unidades de medida, deve-se dar ao aluno condições para compor e relacionar, de fato, as situações, os problemas e os conceitos, tratados de forma relativamente diferente nas diversas áreas e disciplinas. (BRASIL, 2002, p. 31, *grifo nosso*).

Assim, é visível a preocupação a nível nacional e estadual com a conexão de conteúdos de disciplinas distintas à primeira vista, porém inter-relacionadas. A Figura 1.5 ilustra uma das possíveis formas de se interligarem as disciplinas de Química, Biologia e Matemática, aparentemente não relacionadas entre si.

Figura 1.5 – Possíveis relações entre as disciplinas de Química, Biologia e Matemática.



Fonte: elaborado pelo autor.

Dessa maneira, optou-se por tomar a interdisciplinaridade como um dos pilares centrais da metodologia que adotaremos neste trabalho, cuja escolha do tema se deu por meio de nossa experiência ministrando aulas de Matemática no Cursinho Unificado do *Campus* de Araraquara (CUCA) – um cursinho pré-vestibular gratuito⁴ voltado para estudantes de baixa renda, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP). Além do CUCA, fomos também contemplados com a oportunidade de monitorias nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I e II, sob a orientação da Profa. Dra. Carolina Toledo Ferraz e da Profa. Dra. Sidineia Barrozo no 1º e 2º semestres de 2017, respectivamente, na mesma universidade.

Buscou-se, ao longo da elaboração das atividades, a construção de uma temática ampla que abarcasse conceitos atuais e cotidianos dos estudantes, além de, naturalmente, abordar o conteúdo tradicional da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, oferecida para o curso de Bacharelado em Química no 1º semestre pelo IQ/CAr da UNESP (INSTITUTO DE QUÍMICA/UNESP, 2006., id. 2007). É uma disciplina com carga horária de 90 horas,

⁴ Os cursinhos pré-vestibulares gratuitos são também chamados por vezes de cursinhos populares, comunitários, alternativos etc.

oferecida no 1º semestre de cada ano, que contempla os seguintes tópicos, de acordo com o Anexo A:

- Funções;
- Limites e continuidade;
- Derivada;
- Integração.

A bibliografia básica utilizada para esta disciplina são os livros intitulados “Cálculo”, de Stewart (2013) e “Cálculo para um Curso de Química”, de Bizelli e Barrozo (2009)⁵. O primeiro livro é frequentemente utilizado nas disciplinas de Cálculo em cursos de graduação, sendo uma referência na área das Ciências Exatas e da Terra. Já o segundo livro constitui uma proposta diferenciada para o curso de Química, uma vez que o foco é para os estudantes deste curso. Bizelli e Barrozo introduzem o livro justificando que os

(...) cursos de Licenciatura e Bacharelado em Química da Unesp, *Campus* de Araraquara (...) concentram o conteúdo de Cálculo Diferencial e Integral em dois semestres, o que os diferenciam da maioria dos cursos da área de exatas, que normalmente distribui tal conteúdo ao longo de quatro semestres, tratando o Cálculo de uma variável nos primeiros dois semestres e do Cálculo de duas variáveis nos dois semestres subsequentes. Esta particularidade sugere um material mais específico, que contemple os tópicos que devam ser trabalhados e, ao mesmo tempo, os apresentem em uma sequência lógica e harmoniosa, focando a compreensão e a aplicação dos conteúdos. (BIZELLI e BARROZO, 2009, p. 3).

As autoras defendem então que, para o curso de Química, há a necessidade de reavaliação da maneira com que o Cálculo é ensinado (BIZELLI e BARROZO, 2009), tendo em vista a falta de tempo hábil para um curso completo e aprofundado.

Um dos grandes problemas enfrentados pelos docentes que ministram esta e outras disciplinas, contudo, é a extensão do material didático disponível. Em livros como o de Stewart (2013), que compreende 664 páginas na 7ª edição traduzida para o português, por exemplo, já se espera que o docente não conclua o livro na sua totalidade. Aliado a isso, o pouco preparo dos ingressantes do curso, com número crescente de alunos advindos da rede pública do Ensino Médio, é outro contratempo. O docente se vê na situação de receber uma turma com mais de 50 alunos – podendo, muitas vezes, chegar a 80 devido ao número elevado de reprovações –, despreparada matematicamente quanto ao que é exigido nos PCNEM, e com um prazo relativamente curto para cumprir os tópicos da ementa nessas condições.

⁵ Para a bibliografia complementar da disciplina, cf. Anexo A.

Neste trabalho, houve a tentativa de repensar o curso de Cálculo Diferencial e Integral I, trazendo aos educandos a oportunidade de realizarem atividades dentro e fora da sala de aula que viessem a aproximá-los melhor do conteúdo dos livros, geralmente considerado abstrato pelos mesmos.

Pode-se ter uma ideia mais clara do preparo dos ingressantes no Ensino Superior por meio do estudo de Cury (2003), que relata alguns erros cometidos num pré-teste aplicado aos calouros do curso de Engenharia Química da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande Sul (PUCRS). O pré-teste contemplou os temas de fatoração e racionalização de denominadores, e contou com uma taxa média de erro de 38,3%. Para Cury (2003), há a necessidade dos estudantes revisarem tais conteúdos pré-requisitos e reavaliarem o hábito de estudo.

Zanardi e Lima (2009) também realizaram a análise de erros na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II, do curso de Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá (FEG) da UNESP. Neste estudo, os autores verificaram que em 13,5% das provas, os alunos cometeram erros no cálculo de determinantes de 3ª ordem, conteúdo também previsto no Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2011, p. 67). Zanardi e Lima (2009) comentam que estes

(...) fatos, em primeira análise, reforçam a tese de que vários conteúdos básicos não foram assimilados, memorizados e compreendidos adequadamente, comprometendo, assim, as aprendizagens posteriores. (ZANARDI e LIMA, 2009, p. 1121).

Os dois últimos exemplos mostram o despreparo dos calouros para o nível de exigência das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, tanto em universidades particulares quanto públicas. Com base nesses estudos, pode-se dizer que, ao menos em parte, a dificuldade em Cálculo dos ingressantes advém do baixo aproveitamento em Matemática no Ensino Médio. Isso reforça a necessidade de intervenções educacionais (ARTIGUE, 1988) que auxiliem os estudantes a compreender melhor o conteúdo ministrado ao longo destas disciplinas.

Nos próximos dois capítulos, faremos uma breve revisão dos conceitos matemáticos e químicos necessários à compreensão das atividades aplicadas neste estudo, as quais serão descritas posteriormente.

2 TÓPICOS DE MATEMÁTICA

Neste capítulo, fazemos uma revisão de tópicos diversos da Matemática, importantes para o desenvolvimento deste trabalho. Com base em Lima (2006; 2013) e Iezzi e colaboradores⁶, são definidas, num primeiro momento, as progressões aritmética e geométrica (PA e PG, respectivamente). Em seguida, caracterizamos as funções exponenciais e as relacionamos com as progressões. Depois, estudamos as funções inversas para que possamos definir as funções logarítmicas, assim como sua caracterização. Além destas funções, utilizamos Stewart (2013) para uma pequena introdução às ferramentas de Cálculo Diferencial e Integral que foram utilizadas ao longo de nosso trabalho. Por fim, nos fundamentamos em Bassanezi (2013), Almeida, Silva e Vertuan (2013), e Biembengut e Hein (2013) para comentarmos brevemente sobre a modelagem matemática e seus aspectos principais para este estudo.

2.1 Sequências e progressões

Para a compreensão das atividades que foram aplicadas neste estudo, definimos nesta seção os conceitos de sequência e progressão. Nas definições que se seguem, adotamos o conjunto numérico dos naturais $\mathbb{N}$ conforme definido em Lima (2013), ou seja, como o conjunto $\{1, 2, 3, \dots\}$, de modo que excluirmos o zero.

Definição 2.1. Uma *sequência infinita* de números reais é uma função $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real x_n , chamado o n -ésimo termo da sequência. Assim, a sequência dada é a função $1 \mapsto x_1, 2 \mapsto x_2, \dots, n \mapsto x_n, \dots$, e escreve-se $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ ou $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou ainda, (x_n) , para indicar a sequência cujo n -ésimo é x_n .

Definição 2.2. Uma *sequência finita* ou uma *lista* de números reais é uma função cujo domínio tem a forma $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Utiliza-se a notação $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, e diz-se que se

⁶ Cf. IEZZI, G.; MURAKAMI, C. (2004), IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. (2004), IEZZI, G.; HAZZAN, S. (2013).

trata de uma sequência com n termos. Notemos que uma sequência (x_1, x_2) com dois termos é o que se chama de *par ordenado*.

Um caso particular das sequências são as progressões, cujas definições apresentamos a seguir:

Definição 2.3. Uma *progressão aritmética* é uma sequência

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (2.1)$$

onde cada termo, a partir do segundo, é a soma do termo anterior mais uma constante r ($x_{n+1} = x_n + r$), chamada *razão* da progressão. De maneira equivalente, a sequência (x_n) chama-se uma progressão aritmética de razão r quando $x_{n+1} - x_n = r$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Na progressão aritmética (x_n) tem-se

$$x_2 = x_1 + r, x_3 = x_2 + r = x_1 + 2r, x_4 = x_1 + 3r, \dots \quad (2.2)$$

e, em geral, $x_{n+1} = x_1 + nr$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

A soma dos termos de uma progressão aritmética finita é dada por

$$S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{n(x_1 + x_n)}{2}, \quad (2.3)$$

cujas demonstração pode ser consultada em Iezzi e Hazzan (2013, p. 15-17).

Definição 2.4. Uma *progressão geométrica* é uma sequência

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (2.4)$$

onde cada termo, a partir do segundo, é o produto do anterior por uma constante q ($x_{n+1} = x_n \cdot q$), chamada *razão* da progressão. Tem-se, portanto,

$$x_2 = x_1 \cdot q, x_3 = x_2 \cdot q = x_1 \cdot q^2, \text{ e, em geral, } x_{n+1} = x_1 \cdot q^n. \quad (2.5)$$

A soma dos termos de uma progressão geométrica finita $1, q, q^2, \dots, q^n$, de verificação imediata pela igualdade $(1-q) \cdot (1+q+\dots+q^n) = 1-q^{n+1}$, é dada por

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad q \neq 1. \quad (2.6)$$

Daí segue-se que, para uma progressão geométrica finita qualquer $x_1, x_2, \dots, x_n$, de razão $q \neq 1$, tem-se

$$S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n = x_1 (1 + q + \dots + q^{n-1}) = x_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}. \quad (2.7)$$

2.2 Caracterização da função exponencial

As funções exponenciais são de grande valia para a resolução de determinados problemas nas Ciências de modo geral. Elas têm particular importância na análise de situações que envolvem crescimento populacional, decaimento radioativo, velocidade de reações químicas, entre outros. Nesta seção, caracterizamos os principais aspectos dessas funções.

Lema 2.1. Fixado o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}_+^*$ existe uma potência a^r , com $r \in \mathbb{Q}$.

Demonstração.

Dados $0 < \alpha < \beta$, devemos achar $r \in \mathbb{Q}$ tal que a potência a^r pertença ao intervalo $[\alpha, \beta]$, isto é, $\alpha \leq a^r \leq \beta$. Por simplicidade, suporemos a e α maiores do que 1. Os demais casos podem ser tratados de modo análogo. Como as potências de expoente natural de números maiores do que um crescem acima de qualquer cota prefixada, podemos obter números naturais M e n tais que

$$\alpha < \beta < a^M \quad \text{e} \quad 1 < \alpha < \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\right)^n. \quad (2.8)$$

Da última relação decorrem sucessivamente

$$1 < a^{1/n} < 1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M} \quad \text{e} \quad 0 < a^M (a^{1/n} - 1) < \beta - \alpha. \quad (2.9)$$

Logo,

$$\frac{m}{n} \leq M \Rightarrow 0 < a^{m/n} (a^{1/n} - 1) < \beta - \alpha \Leftrightarrow 0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha. \quad (2.10)$$

Assim, as potências

$$a^0 = 1, a^{1/n}, a^{2/n}, \dots, a^M \quad (2.11)$$

são extremos de intervalos consecutivos, todos de comprimento menor do que o comprimento $\beta - \alpha$ do intervalo $[\alpha, \beta]$. Como $[\alpha, \beta] \subset [1, a^M]$, pelo menos um desses extremos, digamos $a^{\frac{m}{n}}$, está contido no intervalo $[\alpha, \beta]$. ■

Definição 2.5. Seja a um número real positivo, que suporemos sempre diferente de 1. A *função exponencial de base a* , $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, indicada pela notação $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:

- (1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
- (2) $a^1 = a$;
- (3) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e
 $x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$;
- (4) A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente;
- (5) A função exponencial é contínua;
- (6) A função exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = a^x$, $a \neq 1$, é sobrejetiva.

Teorema 2.1. Caracterização da função exponencial (parte 1).

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente).

As seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;
- (2) $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;
- (3) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração.

Provaremos as implicações $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$. Para mostrarmos que $(1) \Rightarrow (2)$, é necessário notar que a hipótese (1) acarreta que, para todo número racional $r = m/n$ (com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$), tem-se $f(rx) = f(x)^r$. Com efeito, como $nr = m$, podemos escrever

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m, \quad (2.12)$$

logo $f(rx) = f(x)^{m/n} = f(x)^r$.

Assim, se pusermos $f(1) = a$, teremos $f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Suponhamos, ainda, que f seja crescente, logo

$$1 = f(0) < f(1) = a. \quad (2.13)$$

Admitamos, por absurdo, que exista um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$. Digamos, por exemplo, que seja $f(x) < a^x$ (o caso $f(x) > a^x$ seria tratado analogamente). Então, pelo **Lema 2.1.**, existe um número racional r tal que $f(x) < a^r < a^x$, ou seja, $f(x) < f(r) < a^x$. Como f é crescente, tendo $f(x) < f(r)$ concluimos que $x < r$. Por outro lado, temos também $a^r < a^x$, logo $r < x$. Esta contradição completa a prova de que $(1) \Rightarrow (2)$.

Para demonstrar a implicação $(2) \Rightarrow (3)$, tomemos a hipótese (2). Temos que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ distintos entre si, $f(x) = a^x$ e $f(y) = a^y$. Ainda da hipótese (2), $f(x+y) = a^{(x+y)} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$, como queríamos demonstrar (COSTA, 2016).

Por fim, para provarmos $(3) \Rightarrow (1)$, dividiremos a demonstração em duas partes:

i) n é inteiro não negativo.

Tomando-se a hipótese (3), seja $m = nx = x + x + \dots + x$ (n parcelas), tal que $f(m) = f(x) \cdot f(x) \cdot \dots \cdot f(x)$ (n parcelas). Logo, $f(nx) = f(m) = f(x)^n$.

ii) n é inteiro e negativo.

Da hipótese (3), $f(nx + (-nx)) = f(nx) \cdot f(-nx)$. Como $-n > 0$, de i) temos que $f(-nx) = f(x)^{-n}$. Além disso, $f(0) = 1$ e $f(nx) \cdot f(-nx) = f(0)$, o que nos dá $1 = f(nx) \cdot f(x)^{-n}$. Multiplicando-se ambos os lados por $f(x)^n$, em que, por definição $f(x) > 0$, vem $f(x)^n = f(nx) \cdot f(x)^{-n} \cdot f(x)^n = f(nx)$, o que conclui a demonstração (COSTA, 2016). ■

Uma função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ é de *tipo exponencial* quando se tem $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes positivas. Se $a > 1$, g é crescente e se $0 < a < 1$, g é decrescente.

Se a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ é de tipo exponencial, então, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, os quocientes

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)} = a^h - 1 \text{ e } \frac{g(x+h)}{g(x)} = a^h \quad (2.14)$$

dependem apenas de h , mas não de x . A seguir, mostraremos que vale a recíproca.

Teorema 2.2. Caracterização da função exponencial (parte 2).

Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que para $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $[g(x+h)-g(x)]/g(x)$ dependa apenas de h , mas não de x . Então, se $b = g(0)$ e $a = g(1)/g(0)$, tem-se que $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração.

A hipótese realizada acima é equivalente à suposição de que $\varphi(h) = g(x+h)/g(x)$ independe de x . Substituindo $g(x)$ por $f(x) = g(x)/b$, onde $b = g(0)$, obtemos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ monótona injetiva, com $f(x+h)/f(x)$ independente de x e, agora, com $f(0) = 1$. Colocando, então, $x = 0$ na relação $\varphi(h) = f(x+h)/f(x)$, obtemos $\varphi(h) = f(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Assim, a função monótona injetiva f segue $f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$, ou seja, $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Segue-se então do **Teorema 2.2.** que $f(x) = a^x$, logo $g(x) = bf(x) = ba^x$, como queríamos demonstrar. ■

Existe uma relação interessante entre funções exponenciais e progressões, que reproduziremos aqui. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = ba^x$, uma função do tipo exponencial. Se $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ é uma progressão aritmética de razão h , isto é, $x_{n+1} = x_n + h$, então os valores

$$f(x_1) = ba^{x_1}, f(x_2) = ba^{x_2}, \dots, f(x_n) = ba^{x_n}, \dots, \quad (2.15)$$

formam uma progressão geométrica de razão a^h , pois

$$f(x_{n+1}) = ba^{x_{n+1}} = ba^{x_n+h} = (ba^{x_n}) \cdot a^h = f(x_n) \cdot a^h. \quad (2.16)$$

Como o $(n+1)$ -ésimo termo da progressão aritmética dada é $x_{n+1} = x_1 + nh$, segue-se que $f(x_{n+1}) = f(x_1) \cdot A^n$, onde $A = a^h$. Particularmente, se $x_1 = 0$ então $f(x_1) = b$, logo

$f(x_{n+1}) = b \cdot A^n$. Lima (2013) aponta que esse tipo de observação permite tornar discreta a análise de situações em que há crescimento e decrescimento exponencial, por exemplo.

Assim, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.3. Funções exponenciais e progressões.

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) que transforma toda progressão aritmética $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ numa progressão geométrica $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$, $y_n = f(x_n)$. Se pusermos $b = f(0)$ e $a = f(1)/f(0)$ teremos $f(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

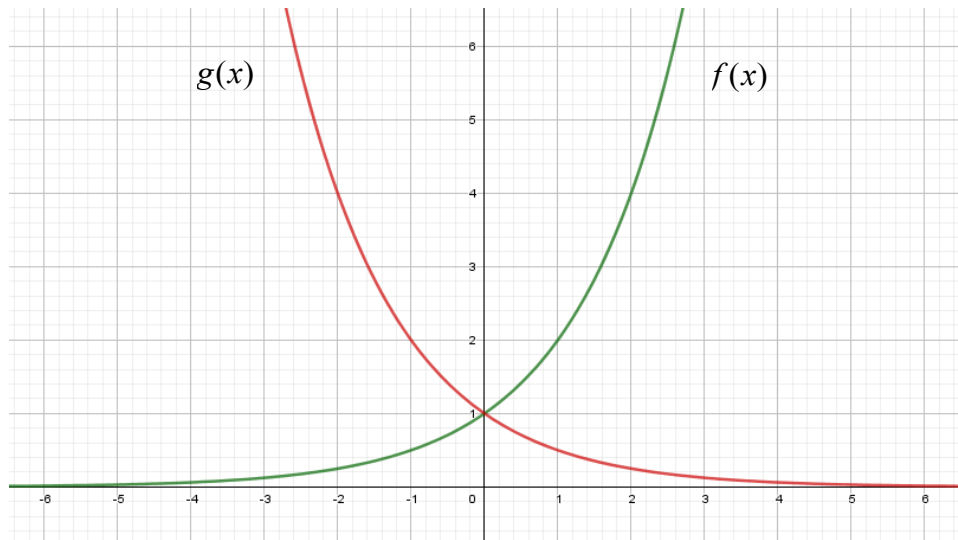
Demonstração.

Seja $b = f(0)$. A função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, definida por $g(x) = f(x)/b$, é monótona injetiva, transforma progressões aritméticas em progressões geométricas, e agora tem-se $g(0) = 1$. Dado $x \in \mathbb{R}$ qualquer, a sequência $x, 0, -x$ é uma progressão aritmética, logo $g(x), g(0), g(-x)$ é uma progressão geométrica de razão $g(-x)$. Segue-se $g(x) = 1/g(-x)$. Sejam agora $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. A sequência $0, x, 2x, \dots, nx$ é uma progressão aritmética, logo $1, g(x), g(2x), \dots, g(nx)$ é uma progressão geométrica, cuja razão é $g(x)$. Então seu $(n+1)$ -ésimo termo é $g(nx) = g(x)^n$. Se $-n$ é um inteiro negativo, então $g(-nx) = 1/g(nx) = 1/g(x)^n = g(x)^{-n}$. Portanto, vale $g(nx) = g(x)^n$ para quaisquer $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$. Segue-se do **Teorema 2.2.** que, fazendo $a = g(1) = f(1)/f(0)$, tem-se $g(x) = a^x$, ou seja, $f(x) = ba^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

Uma aplicação direta da relação entre funções exponenciais e progressões ocorre na Matemática Financeira, onde usualmente se considera um capital inicial Q_0 aplicado a juros compostos fixos, que rendem periodicamente segundo um tempo t . Utilizaremos estes conceitos ao longo das atividades realizadas neste trabalho.

É possível mostrar que uma função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente para $a > 1$ e decrescente para $0 < a < 1$, cruzando o eixo das ordenadas em $y = 1$. A título de exemplo, a Figura 2.1 apresenta as curvas para $f(x) = 2^x$ e $g(x) = (1/2)^x$.

Figura 2.1 – Funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = (1/2)^x$.



Fonte: gráfico gerado pelo autor, com uso do *software* GeoGebra.

2.3 Função inversa

Para a melhor compreensão das funções logarítmicas que veremos na próxima seção, definimos a seguir o conceito de função inversa, tendo em vista que estas funções são obtidas por meio da inversão das funções exponenciais.

Definição 2.6. Uma função $g: Y \rightarrow X$ é dita a *inversa* de $f: X \rightarrow Y$ quando vale $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$, quaisquer que sejam $x \in X$ e $y \in Y$.

Consequentemente, se $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$, temos que para quaisquer $x_1, x_2 \in X$ vale

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2, \quad (2.17)$$

de modo que f é injetiva.

Já a igualdade $f(g(y)) = y$, $y \in Y$, implica f sobrejetiva, pois, para qualquer $y \in Y$, tomamos $x = g(y) \in X$ e tem-se $f(x) = y$.

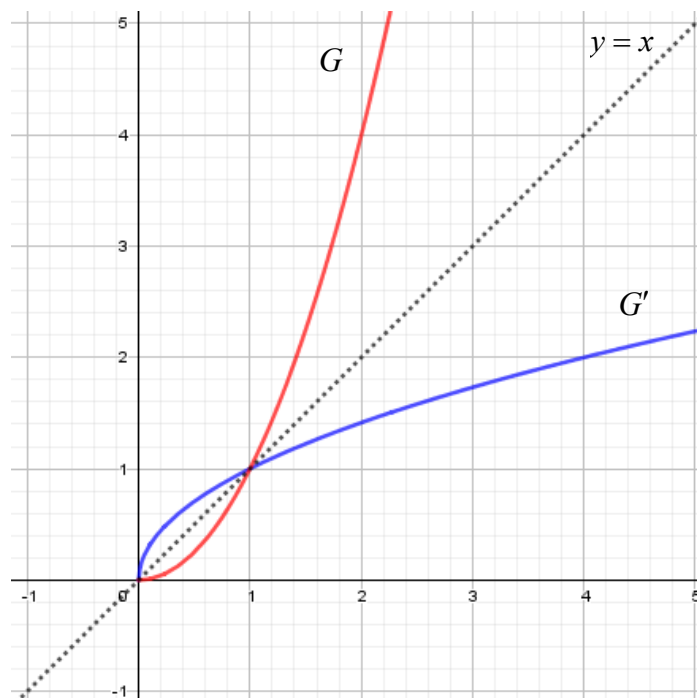
As constatações anteriores permitem-nos concluir que se a função $f: X \rightarrow Y$ possui inversa, então f é injetiva e sobrejetiva, isto é, há uma correspondência biunívoca entre X e Y .

Reciprocamente, se $f: X \rightarrow Y$ é uma correspondência biunívoca entre X e Y , então f possui uma inversa $g: Y \rightarrow X$. Notemos que, como f é sobrejetiva, para todo $y \in Y$ existe algum $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Além disso, f é injetiva, o que garante que x é único. Temos então $g(y) = x$. Assim, $g: Y \rightarrow X$ é a função que associa a cada $y \in Y$ o único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Daí, temos de imediato que $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$, quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}$.

Quando $g: Y \rightarrow X$ é a função inversa de $f: X \rightarrow Y$, escrevemos $g = f^{-1}$, cuja notação não deve ser confundida com uma potência, ou seja, com o inverso multiplicativo.

Podemos definir uma função inversa graficamente. Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$ e $f^{-1}: Y \rightarrow X$ a inversa de $f: X \rightarrow Y$. O gráfico G' da função f^{-1} é simétrico ao gráfico G da função f em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, a função $y = x$, cujo gráfico é a reta formada pelos pontos (x, x) , de abscissa e ordenada iguais entre si. A Figura 2.2 mostra o exemplo de um gráfico G' obtido por simetria de G em relação a $y = x$.

Figura 2.2 – Obtenção de um gráfico G' por simetria de um gráfico G em relação à reta $y = x$.



Fonte: gráfico gerado pelo autor, com uso do *software* GeoGebra.

2.4 Caracterização da função logarítmica

Como mencionamos na seção anterior, as funções exponenciais possuem inversas chamadas funções logarítmicas. Uma característica marcante dessas funções é a propriedade de transformar produtos em somas, que veremos mais adiante. Uma vez que os logaritmos estão relacionados com muitos fenômenos da natureza, estes são de suma importância para a Ciência.

Pode-se escrever a inversa da função exponencial de base a , com $a > 0$ e $a \neq 1$ como

$$\log_a : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} , \quad (2.18)$$

que associa a cada número real positivo x o número real $\log_a x$, que chamamos *logaritmo* de x na base a . Pela **Definição 2.6.** de função inversa (ver seção 2.3), temos que

$$a^{\log_a x} = x \text{ e } \log_a(a^x) = x , \quad (2.19)$$

de modo que $\log_a x$ é o expoente ao qual devemos elevar a base a para obter o número x . Então,

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x . \quad (2.20)$$

As propriedades das potências acompanham os logaritmos. Para $a > 0$ e $a \neq 1$ e quaisquer $m, n \in \mathbb{R}$, temos a relação

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} . \quad (2.21)$$

Vamos mostrar que, a partir de (2.21), podemos escrever

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad (2.22)$$

para quaisquer x e y positivos.

Como m e n são expoentes, tomemos $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tais que $m = \log_a x$ e $n = \log_a y$.

Assim, vale $a^m = x$ e $a^n = y$. Logo, de (2.21), vem

$$xy = a^m \cdot a^n = a^{m+n} , \quad (2.23)$$

isto é, pela definição de logaritmo,

$$\log_a(xy) = m + n = \log_a x + \log_a y . \quad (2.24)$$

Procedendo de maneira similar, se $m = \log_a x$ e $n = \log_a x^k$, com $k \in \mathbb{R}$, temos que

$$n = \log_a x^k \Leftrightarrow a^n = x^k , \quad (2.25)$$

e, portanto, como $m = \log_a x \Leftrightarrow x = a^m$, podemos substituir $x = a^m$ em (2.25), tal que

$$n = \log_a x^k \Leftrightarrow a^n = x^k \Leftrightarrow a^n = (a^m)^k \Leftrightarrow a^n = a^{km} . \quad (2.26)$$

Daí, $n = km$ e podemos substituir n e m pelos logaritmos:

$$\log_a x^k = k \cdot \log_a x \quad (2.27)$$

Uma abordagem alternativa com $k \in \mathbb{N}$ é fazer

$$x^k = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{k \text{ vezes}}, \text{ de modo que}$$

$$\log_a x^k = \log_a (x \cdot x \cdot \dots \cdot x) = \underbrace{\log_a x + \log_a x + \dots + \log_a x}_{k \text{ vezes}} . \quad (2.28)$$

Assim, vale a propriedade $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$.

Utilizando duas bases distintas a e b , positivas e diferentes de um, tomemos

$$m = \log_a x \text{ e } n = \log_b x , \quad x > 0 . \quad (2.29)$$

Assim, valem

$$a^m = x \text{ e } b^n = x . \quad (2.30)$$

Façamos, ainda, $k = \log_a b \Leftrightarrow b = a^k$. De (2.30), temos que $x = a^m = b^n$ e podemos substituir $b = a^k$ tal que

$$x = a^m = b^n = (a^k)^n = a^{kn} . \quad (2.31)$$

Então $m = kn$, ou seja, substituindo-se m e n pelos respectivos logaritmos de (2.29), obtemos

$$\log_a x = k \cdot \log_b x , \quad (2.32)$$

em que $k = \log_a b$ é uma constante. Podemos rearranjar (2.32) isolando-se $\log_b x$ e substituindo k em seguida para obter a Equação (2.33), conhecida como *fórmula de mudança de base*:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{k} = \frac{\log_a x}{\log_a b} \quad (2.33)$$

A Equação (2.33) nos diz que duas funções logarítmicas quaisquer relacionam-se por meio de um fator constante k , e permite-nos escrever um logaritmo de base b como o quociente de outros dois numa base arbitrária a .

Demonstraremos a seguir que, entre as funções monótonas injetivas, somente as funções logarítmicas transformam produtos em somas. Para isso, notemos que se $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $f(y) = \log_a y$ para todo $y \in \mathbb{R}_+^*$, pois $x \mapsto a^x$ é uma função sobrejetiva de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Teorema 2.4. Caracterização da função logarítmica.

Seja $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Então existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Demonstração.

Admitamos f crescente. O outro caso é análogo. $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$, logo $f(1) = 0$. Vamos provar o teorema supondo, inicialmente, que exista $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = 1$. Em seguida, mostraremos que isto ocorre sempre, logo não é uma hipótese adicional. Como f é crescente e $f(a) = 1 > 0 = f(1)$, temos que $a > 1$. Para todo $m \in \mathbb{N}$ vem

$$\begin{aligned} f(a^m) &= f(a \cdot a \cdot \dots \cdot a) \\ &= f(a) + f(a) + \dots + f(a) \\ &= 1 + 1 + \dots + 1 = m, \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} 0 &= f(1) = f(a^m \cdot a^{-m}) \\ &= f(a^m) + f(a^{-m}) = m + f(a^{-m}), \end{aligned} \quad (2.35)$$

logo $f(a^{-m}) = -m$. Se $r = m/n$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, então $rn = m$, portanto

$$m = f(a^m) = f(a^{rn}) = f\left((a^r)^n\right) = n \cdot f(a^r)$$

e daí $f(a^r) = m/n = r$. Se $x \in \mathbb{R}$ é irracional, então para r, s racionais tem-se

$$r < x < s \Rightarrow a^r < a^x < a^s \Rightarrow f(a^r) < f(a^x) < f(a^s) \Rightarrow r < f(a^x) < s. \quad (2.36)$$

Assim, todo número racional r menor do que x é também menor do que $f(a^x)$, e todo número racional s maior do que x é também maior do que $f(a^x)$. Segue-se que $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, portanto $f(y) = \log_a y$ para todo $y > 0$.

Consideremos agora o caso geral, em que se tem uma função $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$g(xy) = g(x) + g(y), \quad (2.37)$$

sem mais nenhuma hipótese. Então $g(1) = 0$ e, como $1 < 2$, devemos ter $g(2) = b > 0$. A nova função $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = g(x)/b$, é crescente, transforma somas em produtos, e cumpre $f(2) = 1$. Logo, pela primeira parte da demonstração, tem-se $f(x) = \log_2 x$ para todo $x > 0$. Isto significa que, para todo $x > 0$, vale

$$x = 2^{f(x)} = 2^{g(x)/b} = \left(2^{1/b}\right)^{g(x)} = a^{g(x)}, \quad (2.38)$$

com $a = 2^{1/b}$. Tomando $\log_a$ de ambos os membros da igualdade $a^{g(x)} = x$ vem, finalmente, $g(x) = \log_a x$. ■

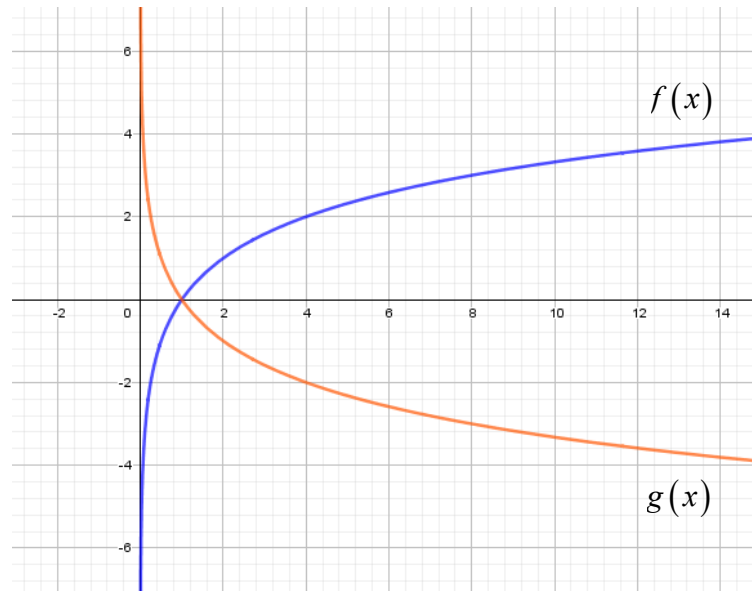
As funções logarítmicas $y = \log_a x$ são crescentes para $a > 1$ e decrescentes para $0 < a < 1$. Além disso, como $a^0 = 1$, então $\log_a 1 = 0$. As bases mais utilizadas para os logaritmos são as bases decimal (base 10), binária (base 2) e natural (base e), em que $e \approx 2,718281828459$ é o número de Euler. Os logaritmos decimais são comumente escritos omitindo-se a base 10 (por exemplo, $\log_{10} 3 \equiv \log 3$). Já os logaritmos naturais são muitas vezes escritos omitindo-se a base e e utilizando-se a notação $\ln$ (por exemplo, $\log_e 3 \equiv \ln 3$).

Uma vez que $\log_a x$ é crescente quando $a > 1$ e $\log_a 1 = 0$, segue-se que, para $a > 1$, os números entre 0 e 1 têm logaritmo negativo e os maiores do que um têm logaritmo

positivo. Analogamente, se $0 < a < 1$ então $\log_a x$ é positivo para $0 < x < 1$ e negativo para $x > 1$.

A Figura 2.3 mostra as curvas para $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \log_{1/2} x$.

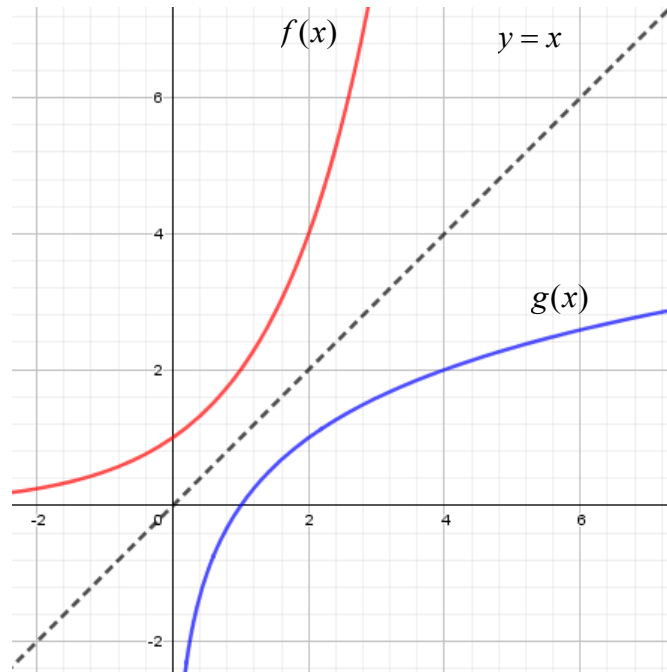
Figura 2.3 – Funções $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \log_{1/2} x$.



Fonte: gráfico gerado pelo autor, com uso do *software* GeoGebra.

Lembremos que as funções exponenciais são funções inversas das logarítmicas. Mostramos, a título de exemplo, os gráficos das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$, inversas entre si, na Figura 2.4.

Figura 2.4 – Funções $f(x) = 2^x$, $g(x) = \log_2 x$ e a reta $y = x$.



Fonte: gráfico gerado pelo autor, com uso do *software* GeoGebra.

2.5 Derivadas e integrais

Nesta seção, apresentaremos, segundo Stewart (2013), as definições matemáticas para as operações de diferenciação e integração, ferramentas importantes do Cálculo para as atividades realizadas neste trabalho.

Definição 2.7. A *derivada* de uma função f em um número a , denotada por $f'(a)$, é dada por

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad (2.39)$$

se o limite existir.

Se escrevermos $x = a + h$, então $h = x - a$ e $h \rightarrow 0$ se, e somente se, $x \rightarrow a$. Consequentemente, (2.39) pode ser reescrita como

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (2.40)$$

A derivada de uma função é interpretada geometricamente como a inclinação da reta tangente à curva dessa função no ponto $P(a, f(a))$, isto é, seu coeficiente angular nesse ponto.

Além disso, a derivada também pode ser vista como a taxa de variação de uma grandeza em relação à outra. Suponhamos que y seja uma quantidade dependente de outra quantidade x . Assim, y é uma função de x e escrevemos $y = f(x)$. Se x variar de x_1 a x_2 , então a variação ou incremento em x será

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad (2.41)$$

e a variação ou incremento correspondente em y será

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1). \quad (2.42)$$

O quociente das diferenças

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (2.43)$$

é chamado *taxa média de variação de y em relação a x* no intervalo $[x_1, x_2]$ e pode ser interpretado como a inclinação da reta secante à curva f .

O limite dessa taxa de variação é denominado *taxa instantânea de variação de y em relação a x em $x = x_1$* , e é a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P(x_1, f(x))$:

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_2 - x_1}, \quad (2.44)$$

que pode também ser escrita na notação de Leibniz como

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_1}. \quad (2.45)$$

De modo geral, a derivada de uma função em qualquer ponto $(x, f(x))$ é definida pela Equação (2.46):

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2.46)$$

Assim, podemos encontrar uma função $f'(x) = dy/dx$ que determina a taxa com que a grandeza y varia em relação à grandeza x em qualquer ponto da curva f . Essa interpretação é crucial para a Ciência e é onde se centram parte das definições do próximo capítulo.

O procedimento algébrico do cálculo de derivadas vai além do escopo deste trabalho, uma vez que compreende um conjunto de regras sistemáticas de derivação. No entanto,

recomendamos a leitura do Capítulo 3 (“Regras de Derivação”) de Stewart (2013) para uma descrição detalhada desse procedimento, assim como a consulta de tabelas de derivadas.

Neste momento, voltaremos nossa atenção para outra ferramenta importante do Cálculo: as integrais. Para apresentarmos os teoremas pertinentes ao processo de integração, faremos uso de alguns teoremas complementares, que poderão ser consultados no Anexo B.

Definição 2.8. Seja f uma função contínua definida em $a \leq x \leq b$, com intervalo $[a, b]$ dividido em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = (b - a) / n$. Sejam $x_0 (= a), x_1, x_2, \dots, x_n (= b)$ as extremidades desses subintervalos, e sejam $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ pontos amostrais arbitrários nesses subintervalos, de forma que x_i^* esteja no i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então a *integral definida de f de a até b* é

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x, \quad (2.47)$$

desde que o limite exista e dê o mesmo valor para todas as possíveis escolhas de pontos amostrais. Se ele existir, dizemos que f é integrável em $[a, b]$.

Geometricamente, a integral definida é interpretada como a área sob a curva que é o gráfico de uma função $y = f(x) \geq 0$ e acima do eixo das abscissas, no intervalo $[a, b]$. Decorre da **Definição 2.8.** que, como podem existir valores de x tais que $f(x) < 0$, surgem “áreas negativas” para esses valores de x , que nesse caso estarão sobre o gráfico de f e abaixo do eixo das abscissas. Como a integral é o limite do somatório das áreas, seu valor numérico resulta da soma das contribuições positivas de área, em que $f(x) > 0$, subtraindo-se as contribuições negativas, em que $f(x) < 0$.

Algebricamente, a interpretação da integral é dada pelos **Teoremas 2.5.** e **2.6.**, que apresentamos a seguir:

Teorema 2.5. Teorema Fundamental do Cálculo (parte 1).

Se f for contínua em $[a, b]$, então a função g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad a \leq x \leq b \quad (2.48)$$

é contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$ e $g'(x) = f(x)$.

Demonstração.

Se x e $x+h$ estão em $]a, b[$, então

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \left(\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt \right) - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)dt \end{aligned}$$

logo, para $h \neq 0$,

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt . \quad (2.49)$$

Admitamos $h > 0$. Como f é contínua em $[x, x+h]$, o Teorema do Valor Extremo (ver **Teorema B.1.** do Anexo B) afirma que há números u e v em $[x, x+h]$ tais que $f(u) = m$ e $f(v) = M$, onde m e M são valores mínimo e máximo absolutos de f em $[x, x+h]$.

Assim, temos que

$$\begin{aligned} mh &\leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq Mh, \text{ isto é,} \\ f(u)h &\leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq f(v)h . \end{aligned} \quad (2.50)$$

Uma vez que $h > 0$, podemos dividir (2.50) por h :

$$f(u) \leq \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \leq f(v)$$

Essa desigualdade pode ser demonstrada de maneira similar para o caso em que $h < 0$.

Agora, tomemos $h \rightarrow 0$. Então $u \rightarrow x$ e $v \rightarrow x$, uma vez que u e v estão entre x e $x+h$. Portanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(u) = \lim_{u \rightarrow x} f(u) = f(x) \text{ e } \lim_{h \rightarrow 0} f(v) = \lim_{v \rightarrow x} f(v) = f(x) \quad (2.51)$$

porque f é contínua em x . Concluimos de (2.51) e do Teorema do Confronto (ver **Teorema B.2.** do Anexo B) que

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x) . \quad (2.52)$$

Se $x = a$ ou b , então a equação acima pode ser interpretada como limite lateral. Então, o **Teorema B.3.** do Anexo B (modificado para limites laterais) mostra que g é contínua em $[a, b]$, concluindo a demonstração. ■

Na notação de Leibniz, podemos escrever o **Teorema 2.5.** como

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (2.53)$$

quando f for contínua. Essa notação nos diz que, se primeiro integrarmos f e, em seguida, derivarmos o resultado, retornaremos à função original f .

Antes de enunciarmos o **Teorema 2.6.**, será necessária a demonstração do seguinte corolário:

Corolário 2.1. Se $f'(x) = g'(x)$ para todo x em um intervalo $]a, b[$, então $f - g$ é constante em $]a, b[$, isto é, $f(x) = g(x) + C$, em que C é uma constante.

Demonstração.

Seja $F(x) = f(x) - g(x)$. Então

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \quad (2.54)$$

para todo x em $]a, b[$. Assim, pelo **Teorema B.7.** do Anexo B, F é constante, isto é, $f - g$ é constante. ■

Tendo em vista o **Corolário 2.1.**, segue-se a segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo:

Teorema 2.6. Teorema Fundamental do Cálculo (parte 2) ou Teorema da Variação Total.

Se f for contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (2.55)$$

onde F é qualquer primitiva de f , isto é, uma função tal que $F' = f$.

Demonstração.

Seja $g(x) = \int_a^x f(t)dt$. Sabemos do **Teorema 2.5.** que $g'(x) = f(x)$, isto é, g é uma primitiva de f . Se F for qualquer outra primitiva de f em $[a, b]$, então sabemos, do **Corolário 2.1.**, que F e g diferem por uma constante:

$$F(x) = g(x) + C \quad (2.56)$$

para $a < x < b$. No entanto, tanto F quanto g são contínuas em $[a, b]$ e, portanto, tomando limites em ambos os lados dessa equação (quando $x \rightarrow a^+$ e $x \rightarrow b^-$), vemos que isso também é válido quando $x = a$ e $x = b$.

Se fizermos $x = a$ na fórmula de $g(x)$, obteremos

$$g(a) = \int_a^a f(t)dt = 0. \quad (2.57)$$

Portanto, com $x = b$ e $x = a$, temos

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [g(b) - C] - [g(a) - C] \\ &= g(b) - g(a) = g(b) = \int_a^b f(t)dt. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (2.58)$$

O **Teorema 2.6.** também é conhecido como Teorema da Variação Total porque, quando integramos uma taxa de variação, obtemos a variação total $F(b) - F(a)$. Essa constatação, sem dúvida, denota a grande importância das integrais na Ciência, que lida o tempo todo com taxas de variação.

Notemos ainda que, como consequência das partes 1 e 2 do Teorema Fundamental do Cálculo, podemos escrever a Equação (2.59):

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a) \quad (2.59)$$

Essa equação nos mostra que a derivação e a integração são processos inversos, conectando duas vertentes aparentemente não relacionadas entre si: o estudo das inclinações de retas tangentes – o Cálculo Diferencial –, e o estudo das áreas – o Cálculo Integral.

Seja $\int f(x)dx$ uma primitiva de f , denominada *integral indefinida*. Logo,

$$\int f(x)dx = F(x) \text{ significa } F'(x) = f(x), \quad (2.60)$$

cujo resultado é uma *família de funções* obtida a partir da integração de $f(x)$. Deve-se, então, adicionar uma constante C a $F(x)$ de modo que haja uma primitiva para cada valor da constante C .

Novamente, o procedimento algébrico do cálculo de integrais vai além dos objetivos deste trabalho, uma vez que também compreende um conjunto de regras sistemáticas, além de técnicas de integração específicas. No entanto, recomendamos a leitura dos Capítulos 5 e 7 (“Integrais” e “Técnicas de Integração”, respectivamente) de Stewart (2013) para maior aprofundamento, bem como a consulta de tabelas de integrais.

2.6 Conceitos introdutórios à modelagem matemática

Nesta seção, trazemos um conceito importante da Matemática Aplicada, o da modelagem matemática, que vai de encontro com os objetivos de nosso estudo. Não pretendemos um grande aprofundamento, contudo pensamos ser de grande valia introduzir o leitor aos aspectos relevantes do tema.

A definição de modelo matemático é bastante abrangente, pois sua concepção varia de acordo com a área, seja ela Matemática Aplicada, Educação, Engenharias, Física, Química etc. Bassanezi (2013, p. 20), por exemplo, considera que um modelo matemático é um “conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado”. Biembengut e Hein (2013, p. 12) complementam que “um modelo pode ser formulado (...) utilizando-se expressões numéricas ou fórmulas, diagramas, gráficos ou representações geométricas, equações algébricas, tabelas, programas computacionais etc.”. Um modelo matemático também pode ser definido como “uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam. Sua formulação, todavia, não tem um fim em si só, mas visa fomentar a solução de algum problema” (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2013, p. 13).

Dessa forma, entendemos por modelo matemático uma construção que, aliada de ferramentas diversas como fórmulas matemáticas, símbolos, gráficos etc., tenta reproduzir com certa fidelidade algo do mundo real, como um objeto ou um fenômeno, por exemplo.

Existem diversos tipos de modelos matemáticos. Temos os “Modelos Objeto”, que simulam fatos e objetos concretos (um fluxograma de determinado processo industrial, por exemplo), e os “Modelos Teóricos”, que são vinculados a uma determinada teoria, como os modelos atômicos na Química. Os modelos podem ainda ser lineares ou não-lineares, estáticos ou dinâmicos, educacionais, estocásticos ou determinísticos (BASSANEZI, 2013).

Assim, a escolha do modelo matemático mais adequado está essencialmente atrelada ao fim que o modelador deseja.

A modelagem matemática é o processo de criação de um modelo, e constitui um processo artístico que exige, naturalmente, conhecimento do fenômeno que será modelado e das ferramentas matemáticas para estudá-lo, e uma boa intuição e criatividade no ato de interpretar o contexto do problema estudado. Além disso, é um processo que exige certo senso lúdico do modelador quando sua finalidade é o ensino-aprendizagem (BIEMBENGUT, M.S. e HEIN, N., 2013). Bassanezi (2013, p. 24) define ainda a modelagem matemática como “um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos”, constituindo “uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências”.

Neste trabalho, foram desenvolvidas cinco atividades com a finalidade de melhor compreensão das funções exponenciais e logarítmicas de ingressantes do curso de Bacharelado em Química do IQ/CAr. A abordagem que escolhemos ao propormos os problemas de cada atividade envolveu o uso da modelagem matemática por meio da apresentação de problemas cujas soluções envolviam uma representação matemática dos fenômenos.

Nos dois casos, objetivaram-se a previsão do comportamento de funções e a estimativa de dados, em problemas contextualizados com a realidade dos estudantes objeto deste trabalho.

É uma tendência cada vez maior utilizar recursos didáticos alternativos em sala de aula. Sob essa perspectiva, pensamos ser importante que os alunos tenham contato com a modelagem matemática, uma excelente ferramenta de entendimento da realidade que os cerca. Ademais, a Ciência trabalha o tempo todo com modelos, e, no contexto do curso de Química, o entendimento da metodologia científica é fundamental logo no início da graduação, uma vez que uma de suas etapas cruciais é a proposição de modelos que expliquem os fenômenos estudados.

Esperamos que, neste capítulo, tenhamos trazido ao leitor a introdução à Matemática necessária e suficiente a este trabalho. No próximo capítulo, voltaremos nossa atenção aos conceitos da Química pertinentes ao desenvolvimento das atividades propostas.

3 INTRODUÇÃO À CINÉTICA QUÍMICA

Neste capítulo, introduziremos os conceitos da Química pertinentes e necessários à realização deste trabalho, mais especificamente no contexto da Cinética Química. A Cinética Química é uma subárea da Físico-química que, em particular, mostrou-se uma excelente candidata para as atividades que foram desenvolvidas neste estudo, uma vez que possui uma linguagem matemática acessível aos ingressantes do Ensino Superior na área de Ciências Exatas e da Terra, que ainda dispõem de poucas ferramentas matemáticas e químicas no início do curso. Inicialmente, damos um breve panorama da importância da Cinética Química e suas principais aplicações. Em seguida, com o auxílio do Cálculo, definimos os conceitos de velocidades de reação, leis de velocidade, e ordem de reação. Por fim, também com a ajuda do Cálculo, conceituamos as leis de velocidade integradas e os tempos de meia-vida de uma espécie química para diferentes ordens de reação. Utilizamos Atkins e Jones (2012), Atkins e de Paula (2008), e Schaal (1974) como base teórica deste capítulo.

3.1 A velocidade das reações químicas

Um dos aspectos essenciais da Química é o monitoramento da velocidade das reações químicas. Ser capaz de prever o comportamento de uma reação química é crucial aos químicos, e parte disso se dá pela Termodinâmica, que nos traz informações a respeito da espontaneidade das reações. Contudo, o enferrujamento de um objeto, por exemplo, é uma reação que, apesar de espontânea, pode levar meses – ou mesmo anos –, para ocorrer. Dessa maneira, a Termodinâmica nos fornece evidências do acontecimento ou não de uma reação química, mas não nos traz informações sobre quão rápido ela se dá. Na tentativa de levantar dados da velocidade das reações, a Ciência do século XIX se voltou, em parte, para o estudo da Cinética Química, quando cientistas passaram a observar as taxas com que as espécies químicas reagem. Atkins e Jones (2012) apontam que

Em nível atômico, a cinética química permite a compreensão da natureza e dos mecanismos das reações químicas. Em nível macroscópico, as informações da cinética química permitem a modelagem [matemática] de sistemas complexos, como os que acontecem no corpo humano e na atmosfera. O desenvolvimento de catalisadores, substâncias que aceleram as reações químicas, é um ramo da cinética química crucial para a indústria química, na solução de problemas muito

importantes, como a fome no mundo e o desenvolvimento de novos combustíveis. (ATKINS e JONES, 2012, p. 561).

Assim, é perceptível a importância dessa área na Química e nas Ciências da Natureza de modo geral. Nas próximas seções, passamos a detalhar alguns conceitos introdutórios importantes para o entendimento da Cinética Química.

3.2 Velocidade média de reação

A velocidade de uma reação química pode ser definida, informalmente, como a rapidez com que produtos são formados ou reagentes são consumidos. Dessa maneira, uma reação rápida seria aquela praticamente instantânea, enquanto uma reação lenta seria aquela que levaria tempos maiores para ocorrer. Entretanto, essa definição não traz informações suficientes para o controle experimental de uma reação química e a determinação quantitativa de sua velocidade.

Quando falamos na *velocidade média de uma reação química*, estamos interessados na taxa média de variação, dada pela Equação (2.43), com que a concentração molar de um reagente, R , $\Delta[R] = [R]_{t_2} - [R]_{t_1}$ (ou de um produto, P , $\Delta[P] = [P]_{t_2} - [P]_{t_1}$) varia em relação a um intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$v_{\text{méd}} = -\frac{\Delta[R]}{\Delta t} \quad (3.1)$$

Como os reagentes são consumidos numa reação, espera-se um valor de $[R]_{t_2}$ menor do que $[R]_{t_1}$, de modo que a variação $\Delta[R]$ é negativa. O sinal negativo em (3.1) é um fator de correção para a velocidade tornar-se positiva, que é a convenção usual da Cinética Química.

Da mesma forma, podemos definir a velocidade média de reação em função dos produtos sendo formados:

$$v_{\text{méd}} = \frac{\Delta[P]}{\Delta t} \quad (3.2)$$

Pelo mesmo motivo que citamos, o sinal negativo não é necessário em (3.2), uma vez que a variação $\Delta[P]$ é positiva. É conveniente relacionar essa definição com o conceito da Mecânica Clássica, na Física, para a velocidade média de um móvel, que, de modo análogo, mede a variação da distância percorrida num dado intervalo de tempo. Além disso, notemos

que as unidades de tempo são relativas, utilizadas conforme a necessidade para reações mais lentas (como as unidades de horas ou dias) ou mais rápidas (como as unidades de segundos ou nanossegundos).

Um fato importante envolvendo as velocidades de reação é a dependência que as mesmas possuem com os respectivos coeficientes estequiométricos. Isso significa que a velocidade com que uma espécie se forma pode ser diferente de outra para uma reação com dois produtos distintos, por exemplo. Essa constatação torna difícil descrever a velocidade de uma reação por meio de um único valor. Por conta dessa ambiguidade, pode-se utilizar a velocidade média única de uma reação, que corrige a velocidade média de cada espécie química dividindo-a por seu respectivo coeficiente estequiométrico. A velocidade média única de uma reação $aA + bB \rightarrow cC + dD$ é qualquer uma das quatro quantidades a seguir:

$$v_{\text{méd}} = -\frac{1}{a} \frac{\Delta[A]}{\Delta t} = -\frac{1}{b} \frac{\Delta[B]}{\Delta t} = \frac{1}{c} \frac{\Delta[C]}{\Delta t} = \frac{1}{d} \frac{\Delta[D]}{\Delta t} \quad (3.3)$$

3.3 Velocidade instantânea de reação

A velocidade de uma reação varia com o tempo, e costuma desacelerar conforme a reação atinge o equilíbrio químico. Isso torna desejável tomar as medidas de velocidade em instantes determinados do curso de uma reação. Para que isso seja possível, é necessário utilizar as ferramentas do Cálculo apresentadas no Capítulo 2.

A *velocidade instantânea de uma reação química* é definida geometricamente como a inclinação da reta tangente a um ponto de interesse da curva de concentração molar *versus* tempo. Isso equivale à definição de derivada que vimos anteriormente na Equação (2.46). Assim, a partir de (3.1) e (3.2), podemos obter as equações:

$$v = -\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta[R]}{\Delta t} = -\frac{d[R]}{dt} \quad \text{e} \quad v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta[P]}{\Delta t} = \frac{d[P]}{dt} \quad (3.4)$$

Com procedimento similar, podemos obter, por derivação, a Equação (3.5) a partir de (3.3):

$$v = -\frac{1}{a} \frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{b} \frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{c} \frac{d[C]}{dt} = \frac{1}{d} \frac{d[D]}{dt} \quad (3.5)$$

3.4 Leis de velocidade e ordem de reação

Para analisarmos as tendências de velocidade numa dada reação química, é comum utilizarmos sua velocidade inicial, isto é, a velocidade instantânea no início da reação. Isso

ocorre porque a presença de produtos no sistema pode interferir na velocidade da reação, o que dificulta as análises.

Assim, para medir a velocidade de uma reação, monitora-se a concentração molar de um reagente em vários instantes de tempo e obtém-se uma curva de concentração molar *versus* tempo. Em seguida, toma-se a concentração inicial dos reagentes e traça-se a reta tangente no instante $t=0$, na unidade apropriada ao sistema considerado. Dessa forma, obtém-se a velocidade inicial da reação.

Observa-se que, no estudo da cinética das reações químicas, existe uma relação de proporcionalidade entre a velocidade inicial da reação e a concentração molar inicial de um dado reagente A , elevada a uma potência α dada por

$$v \propto [A]^\alpha \Leftrightarrow v = k \cdot [A]^\alpha, \quad (3.6)$$

em que k é a constante de proporcionalidade, denominada constante de velocidade da reação. A potência α , que varia conforme a natureza da reação química⁷, indica a ordem da reação com respeito ao reagente A . Então, se $\alpha=0$ e $v=k$, temos uma reação de ordem zero com respeito ao reagente A . No caso de $\alpha=1$ e $v=k \cdot [A]$, tem-se uma reação de primeira ordem com relação a A . Similarmente, se $\alpha=2$ e $v=k \cdot [A]^2$, obtém-se uma reação de segunda ordem em A . É importante observar que a potência α não é necessariamente igual ao coeficiente estequiométrico a do reagente A , e também pode assumir valores fracionários ou, mais raramente, negativos. O tipo de expoente obtido está intimamente relacionado com o mecanismo da reação (ATKINS e DE PAULA, 2008).

Notemos que grande parte das reações químicas não envolve apenas um reagente. Isso implica a existência de ordens de reação distintas com respeito a cada reagente, de maneira que podemos escrever a velocidade inicial de uma reação $aA + bB \rightarrow cC + dD$ como

$$v = k \cdot [A]^\alpha \cdot [B]^\beta. \quad (3.7)$$

A Equação (3.7) é chamada *lei de velocidade* da reação, e é determinada experimentalmente.

⁷ Entende-se aqui por natureza da reação química como a maneira com que os reagentes se combinam em termos de *mecanismo de reação*. Assim, o mecanismo da reação é o fator determinante para o expoente que acompanhará a concentração molar. O aprofundamento nos mecanismos de reação foge do escopo deste trabalho, contudo sugerimos a consulta de Schaal (1974) e dos Capítulos 22 a 24 de Atkins e de Paula (2008) para maior detalhamento no assunto.

Para fins de simplificação, define-se *ordem global* ou *total* ω de uma reação como a soma das ordens referentes a cada reagente. Na Equação (3.7), por exemplo, a ordem global é dada por

$$\omega = \alpha + \beta, \quad (3.8)$$

e dizemos que a reação possui *ordem parcial* α com relação ao reagente A e *ordem parcial* β com relação ao reagente B .

De modo geral, para uma equação química de reagentes $J_1, J_2, \dots, J_n$, com respectivas ordens $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, e constante de velocidade k , temos a Equação (3.9):

$$v = k \cdot \prod_{i=1}^n [J_i]^{\alpha_i} \quad (3.9)$$

Essa equação resume a lei de velocidade para o caso de uma reação química qualquer cuja velocidade inicial dependa apenas dos reagentes. Então, a ordem global ω de uma reação química dada pela Equação (3.9) pode ser calculada pela Equação (3.10):

$$\omega = \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad (3.10)$$

Daqui por diante, quando nos referirmos à ordem de uma reação, estamos nos referindo à sua ordem global, isto é, ao valor de ω .

3.5 Leis de velocidade integradas

As leis de velocidade são excelentes indicadores quantitativos da variação da velocidade com a concentração de um ou mais reagentes. Contudo, suas equações não nos trazem informações – ao menos não diretamente –, sobre as concentrações molares em tempos específicos. Isso significa que, dada uma concentração molar qualquer, pode-se estimar a velocidade da reação, mas não se sabe em que instante essa concentração foi atingida. Para responder a essa questão, recorreremos ao Cálculo.

Na seção anterior, definiu-se lei de velocidade como uma função dada, de modo geral, pela Equação (3.9). Entretanto, a velocidade instantânea de uma reação, definida na seção 3.3, é a derivada da concentração molar de uma espécie química com relação ao tempo, dada pelas equações em (3.4). Para o caso de uma reação do tipo $A \rightarrow P$, podemos escrever

$$v = k \cdot [A]^\alpha, \text{ de modo que}$$

$$v = -\frac{d[A]}{dt} \Rightarrow \frac{d[A]}{dt} = -k \cdot [A]^\alpha . \quad (3.11)$$

Notemos que (3.11) é uma equação diferencial separável, ou seja, podem-se reorganizar as variáveis de maneira que

$$\frac{1}{[A]^\alpha} d[A] = -k dt . \quad (3.12)$$

Observemos que esta equação é, portanto, integrável em ambos os lados (ver seção 2.5). Isso significa que podemos obter uma nova função, integrada a partir da lei de velocidade, que determina a concentração molar do reagente A num instante de tempo t . Por conta disso, essa função é denominada *lei integrada de velocidade*, que estudaremos caso a caso nas próximas subseções.

3.5.1 Reações de ordem zero

As reações químicas do tipo $A \rightarrow P$ de ordem zero possuem leis de velocidade da forma

$$v = k \cdot [A]^0 , \quad (3.13)$$

e, portanto,

$$v = k . \quad (3.14)$$

Isso significa que a velocidade é constante ao longo da reação e não sofre influência da concentração molar de A .

Para obtermos sua lei integrada, é bastante simples:

$$v = k \Leftrightarrow \frac{dC}{dz} = -k , \quad (3.15)$$

onde utilizamos C como variável para a concentração molar e z como variável para o tempo, a fim de evitar confusão com os limites de integração abaixo. Assim, podemos integrar ambos os lados em relação a z , de modo que

$$\int_{[A]_0}^{[A]} \frac{dC}{dz} \cdot dz = -k \int_0^t dz . \quad (3.16)$$

Notemos que à esquerda integramos da concentração inicial $[A]_0$ até a concentração $[A]$ no tempo t , e à direita integramos do tempo inicial $t = 0$ (em unidades apropriadas) até o tempo t . Então, a equação fornece

$$kt = [A]_0 - [A] , \quad (3.17)$$

ou ainda,

$$[A] = [A]_0 - kt . \quad (3.18)$$

As Equações (3.17) e (3.18) são representações equivalentes da lei integrada de velocidade para uma reação de ordem zero do tipo $A \rightarrow P$. Daqui por diante, adotaremos procedimento algébrico semelhante para a obtenção de outras leis integradas, utilizando C e z nas etapas de integração. Posteriormente, retornaremos às representações com $[A]$ e t .

3.5.2 Meia-vida de reações de ordem zero

A *meia-vida*, $t_{1/2}$, de uma substância é o tempo necessário para que a concentração inicial dessa substância seja reduzida à metade. Em reações de ordem zero do tipo $A \rightarrow P$, podemos utilizar a lei integrada da Equação (3.18) para obter o tempo de meia-vida do reagente A , bastando substituir $[A] = (1/2) \cdot [A]_0$:

$$\frac{[A]_0}{2} = [A]_0 - kt_{1/2} , \quad (3.19)$$

que rearranjada fornece

$$t_{1/2} = \frac{[A]_0}{2k} . \quad (3.20)$$

Assim, o tempo de meia-vida de uma reação de ordem zero do tipo $A \rightarrow P$ é tanto maior quanto maior a concentração inicial do reagente A , e tanto menor quanto maior a constante de velocidade k da reação.

3.5.3 Reações de primeira ordem

As reações químicas do tipo $A \rightarrow P$ de primeira ordem possuem leis de velocidade da forma

$$v = k \cdot [A] . \quad (3.21)$$

A Equação (3.21) nos fornece o gráfico de uma reta crescente com início na origem, uma vez que a velocidade e a concentração molar são grandezas positivas.

Sua lei integrada pode ser obtida por integração imediata, conforme demonstramos a seguir:

$$v = k \cdot [A] \Leftrightarrow \frac{d[A]}{dt} = -k \cdot [A] , \text{ ou ainda, } \frac{dC}{dz} = -k \cdot C \quad (3.22)$$

Integrando-se ambos os lados, vem

$$\begin{aligned} \int_{[A]_0}^{[A]} \frac{1}{C} \cdot \frac{dC}{dz} \cdot dz &= -k \int_0^t dz \Rightarrow \ln[A] - \ln[A]_0 = -kt \\ \Rightarrow \ln \frac{[A]}{[A]_0} &= -kt \Rightarrow \frac{[A]}{[A]_0} = e^{-kt} , \end{aligned} \quad (3.23)$$

que rearranjada nos dá a Equação (3.24):

$$[A] = [A]_0 \cdot e^{-kt} \quad (3.24)$$

A Equação (3.24) é a lei integrada de velocidade para uma reação de primeira ordem do tipo $A \rightarrow P$. Alguns autores como Atkins e De Paula (2008) escrevem as leis de velocidade isolando-se o termo kt e fazendo $[A] = [A]_0 - x$. Nessa representação, x é a quantidade de reagente consumido desde o início (tanto maior o valor de x , maior a quantidade de reagente consumido). Assim, a Equação (3.24) também pode ser escrita como

$$kt = \ln \frac{[A]_0}{[A]_0 - x} . \quad (3.25)$$

3.5.4 Meia-vida de reações de primeira ordem

Substituindo o termo $[A] = (1/2) \cdot [A]_0$ na Equação (3.24), obtemos a meia-vida $t_{1/2}$ de uma reação de primeira ordem do tipo $A \rightarrow P$:

$$\frac{[A]_0}{2} = [A]_0 \cdot e^{-kt_{1/2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-kt_{1/2}} \Leftrightarrow -\ln 2 = -kt_{1/2} , \quad (3.26)$$

que rearranjada fornece a Equação (3.27):

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k} \quad (3.27)$$

É interessante observar que a meia-vida de reações de primeira ordem do tipo $A \rightarrow P$ independe da concentração molar inicial $[A]_0$, ou seja, é constante para cada reação.

Isso significa que, para qualquer concentração molar inicial do reagente A , seu tempo de consumo será o mesmo.

3.5.5 Reações de segunda ordem

As reações químicas do tipo $A \rightarrow P$ de segunda ordem possuem leis de velocidade da forma

$$v = k \cdot [A]^2 . \quad (3.28)$$

A Equação (3.28) nos fornece o gráfico da metade direita de uma parábola côncava para cima com vértice na origem, em que o eixo das ordenadas, representado pela concentração molar, é o eixo de simetria. A metade esquerda da parábola não está definida porque a velocidade e a concentração molar são grandezas positivas.

Analogamente às reações de primeira ordem, sua lei integrada também pode ser obtida por integração imediata, conforme demonstramos a seguir:

$$v = k \cdot [A]^2 \Leftrightarrow \frac{d[A]}{dt} = -k \cdot [A]^2 , \text{ ou ainda, } \frac{dC}{dz} = -k \cdot C^2 \quad (3.29)$$

Integrando-se ambos os lados, vem

$$\int_{[A]_0}^{[A]} \frac{1}{C^2} \cdot \frac{dC}{dz} \cdot dz = -k \int_0^t dz \Rightarrow -\frac{1}{[A]} + \frac{1}{[A]_0} = -kt , \quad (3.30)$$

que rearranjada nos dá

$$[A] = \frac{[A]_0}{1 + kt[A]_0} , \text{ ou ainda, } \quad (3.31)$$

reescrita isolando-se o termo kt :

$$kt = \frac{1}{[A]} - \frac{1}{[A]_0} \quad (3.32)$$

Como mencionamos na subseção anterior, podemos também substituir $[A]$ por $[A]_0 - x$ e fazer o MMC, obtendo a Equação (3.33):

$$kt = \frac{x}{[A]_0 ([A]_0 - x)} \quad (3.33)$$

As Equações (3.31), (3.32) e (3.33) são representações equivalentes da lei integrada de velocidade para uma reação de segunda ordem do tipo $A \rightarrow P$.

Outro exemplo de reação de segunda ordem são as reações $A + B \rightarrow P$, com primeira ordem parcial em relação a cada um dos reagentes A e B . Sua lei de velocidade é da forma

$$v = k \cdot [A][B] . \quad (3.34)$$

A lei integrada também pode ser obtida por integração, todavia alguns passos extras são necessários. Primeiramente, fazemos as substituições $[A] = [A]_0 - x$ e $[B] = [B]_0 - x$, em que x representa a quantidade consumida de A e B , respectivamente, governada pela estequiometria da reação. Além disso, derivamos a expressão $[A] = [A]_0 - x$ em relação ao tempo para obter

$$\frac{d[A]}{dt} = -\frac{dx}{dt} , \quad (3.35)$$

uma vez que $[A]_0$ é constante.

Fazendo as substituições necessárias na lei de velocidade (3.34), temos que

$$v = k \cdot [A][B] \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = -k \cdot ([A]_0 - x)([B]_0 - x) , \quad (3.36)$$

Rearranjando, vem

$$\frac{1}{([A]_0 - x)([B]_0 - x)} \cdot \frac{dx}{dt} = -k , \quad (3.37)$$

que reconhecemos como integrável pelo Método das Frações Parciais. Para realizarmos a integração, devemos reescrever $1/([A]_0 - x)([B]_0 - x)$ como uma soma de frações tal que

$$\frac{1}{([A]_0 - x)([B]_0 - x)} = \frac{U}{[A]_0 - x} + \frac{V}{[B]_0 - x} , \quad (3.38)$$

em que U e V são os numeradores de cada “fração parcial” que satisfazem a igualdade em (3.38). Para resolvermos essa equação, tomamos o MMC:

$$\begin{aligned} \frac{U}{[A]_0 - x} + \frac{V}{[B]_0 - x} &= \frac{U([B]_0 - x) + V([A]_0 - x)}{([A]_0 - x)([B]_0 - x)} \\ &= \frac{U[B]_0 - Ux + V[A]_0 - Vx}{([A]_0 - x)([B]_0 - x)} = \frac{(-U - V)x + U[B]_0 + V[A]_0}{([A]_0 - x)([B]_0 - x)} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Para que a igualdade em (3.39) seja satisfeita, devemos resolver o sistema de equações:

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} -U - V = 0 \\ U[B]_0 + V[A]_0 = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} V = -U \\ U[B]_0 - U[A]_0 = 1 \end{cases} \\
& \sim \begin{cases} V = -U \\ U([B]_0 - [A]_0) = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} U = \frac{1}{[B]_0 - [A]_0} \\ V = -\frac{1}{[B]_0 - [A]_0} \end{cases} \quad (3.40)
\end{aligned}$$

Retornando à equação (3.39) e substituindo-se U e V , obtemos

$$\frac{1}{([A]_0 - x)([B]_0 - x)} = \frac{1}{[B]_0 - [A]_0} \cdot \left(\frac{1}{[A]_0 - x} \right) - \frac{1}{[B]_0 - [A]_0} \cdot \left(\frac{1}{[B]_0 - x} \right). \quad (3.41)$$

Similarmente às seções anteriores, reescreveremos (3.37) com Q para a quantidade de reagente consumido e z para o tempo, a fim de evitar confusão com os limites de integração que adotaremos. Podemos então substituir (3.41) em (3.37) e rearranjar:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{([A]_0 - Q)([B]_0 - Q)} \cdot \frac{dQ}{dz} = -k \\
& \Leftrightarrow \left[\frac{1}{[B]_0 - [A]_0} \cdot \left(\frac{1}{[A]_0 - Q} \right) - \frac{1}{[B]_0 - [A]_0} \cdot \left(\frac{1}{[B]_0 - Q} \right) \right] \cdot \frac{dQ}{dz} = -k \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{[B]_0 - [A]_0} \cdot \left(\frac{1}{[A]_0 - Q} - \frac{1}{[B]_0 - Q} \right) \cdot \frac{dQ}{dz} = -k \quad (3.42)
\end{aligned}$$

Integrando-se ambos os lados de (3.42) em relação a z , tem-se

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{[B]_0 - [A]_0} \int_0^x \left(\frac{1}{[A]_0 - Q} - \frac{1}{[B]_0 - Q} \right) \cdot \frac{dQ}{dz} = -k \int_0^t dz \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{[B]_0 - [A]_0} \left(\int_0^x \frac{1}{[A]_0 - Q} dQ - \int_0^x \frac{1}{[B]_0 - Q} dQ \right) = -k \int_0^t dz. \quad (3.43)
\end{aligned}$$

Para calcular as integrais remanescentes do lado esquerdo, basta utilizar o Método da Substituição, tomando-se o cuidado de também substituir os limites de integração. Então, fazendo

$$u = [A]_0 - Q \Leftrightarrow dQ = -du \quad \text{e} \quad v = [B]_0 - Q \Leftrightarrow dQ = -dv, \text{ tem-se}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{[B]_0 - [A]_0} \left(\int_{[A]_0}^{[A]_0 - Q} \frac{1}{u} du - \int_{[B]_0}^{[B]_0 - Q} \frac{1}{v} dv \right) = -k \int_0^t dz \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{[B]_0 - [A]_0} \left(- \int_{[A]_0 - Q}^{[A]_0} \frac{1}{u} du + \int_{[B]_0 - Q}^{[B]_0} \frac{1}{v} dv \right) = -k \int_0^t dz \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{[B]_0 - [A]_0} \left[- \left(\ln \left| \frac{[A]_0}{[A]_0 - Q} \right| \right) + \left(\ln \left| \frac{[B]_0}{[B]_0 - Q} \right| \right) \right] = -kt \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{[B]_0 - [A]_0} \left[\ln \left| \frac{[A]_0 - Q}{[A]_0} \right| - \left(\ln \left| \frac{[B]_0 - Q}{[B]_0} \right| \right) \right] = -kt \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{[B]_0 - [A]_0} \ln \left| \frac{[B]_0 ([A]_0 - Q)}{([B]_0 - Q)[A]_0} \right| = -kt .
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Isolando o termo kt , removendo o módulo (pois o quociente das concentrações molares também é positivo) e retornando Q para a variável x , rearranjamos para chegar à Equação (3.45):

$$kt = \frac{1}{[B]_0 - [A]_0} \ln \frac{[A]_0 ([B]_0 - x)}{([A]_0 - x)[B]_0} , \tag{3.45}$$

que é a lei integrada de velocidade para uma reação de segunda ordem do tipo $A + B \rightarrow P$.

Além da reação $A + B \rightarrow P$, há outros tipos de reação de segunda ordem. Para obter suas leis integradas, o procedimento é semelhante: basta integrar utilizando o Método das Frações Parciais seguido pelo Método da Substituição. Uma reação de segunda ordem do tipo $A + 2B \rightarrow P$, por exemplo, possui lei de velocidade $v = k \cdot [A][B]$ e fornece a lei integrada dada pela Equação (3.46):

$$kt = \frac{1}{[B]_0 - 2[A]_0} \ln \frac{[A]_0 ([B]_0 - 2x)}{([A]_0 - x)[B]_0} \tag{3.46}$$

Já uma reação de segunda ordem do tipo $A \rightarrow P$ com autocatálise possui lei de velocidade $v = k \cdot [A][P]$ e fornece a lei integrada

$$kt = \frac{1}{[B]_0 + [P]_0} \ln \frac{[A]_0 ([P]_0 + x)}{([A]_0 - x)[P]_0} . \tag{3.47}$$

Notemos que uma reação com autocatálise é aquela em que a formação de produto afeta favoravelmente a velocidade da reação, isto é, o produto atua como o próprio catalisador. Dessa maneira, a lei de velocidade apresenta a concentração molar do produto P . Por esse motivo, a Equação (3.47) apresenta as trocas de sinal e a concentração de molar de P .

3.5.6 Meia-vida de reações de segunda ordem

O cálculo da meia-vida de uma reação de segunda ordem do tipo $A \rightarrow P$ adota os mesmos procedimentos anteriores, bastando substituir $[A] = (1/2) \cdot [A]_0$ na lei de velocidade integrada. Fazendo essa substituição na Equação (3.32), temos

$$kt_{1/2} = \frac{2}{[A]_0} - \frac{1}{[A]_0} \Leftrightarrow kt_{1/2} = \frac{1}{[A]_0}, \quad (3.48)$$

que rearranjada nos dá a Equação (3.49):

$$t_{1/2} = \frac{1}{k[A]_0} \quad (3.49)$$

Diferentemente das reações de primeira ordem (ver subseção 3.5.4), a Equação (3.49) mostra que a meia-vida depende da concentração inicial de A . Isso explica o motivo de algumas substâncias nocivas ao meio ambiente demorarem tanto tempo para sofrer decomposição. Caso essas substâncias apresentem cinética de segunda ordem, mesmo concentrações baixas lançadas no meio levam muito tempo para sofrer decomposição.

Esperamos que, com os conceitos desenvolvidos nos Capítulos 2 e 3, seja possível a melhor compreensão das atividades realizadas e da metodologia adotada, que passaremos descrever em detalhe no próximo capítulo.

4 METODOLOGIA

Com a análise do trabalho de Artigue (1988), optamos pela utilização da Engenharia Didática como guia metodológico para o desenvolvimento deste estudo, devido ao caráter essencialmente experimental do mesmo.

Para a melhor compreensão das etapas realizadas neste trabalho, pensamos ser de grande importância a familiarização com a metodologia escolhida. Dessa maneira, neste capítulo iniciamos com um breve referencial histórico da Engenharia Didática, perpassando por suas etapas de aplicação. Em seguida, trazemos ao leitor os resultados obtidos em nosso estudo e tentamos, num último momento, traçar um paralelo entre o uso da Engenharia Didática, a reprodutibilidade da experiência didática realizada e o resgate de situações do cotidiano dos estudantes objeto deste trabalho.

4.1 Referencial histórico

A Engenharia Didática surge nos anos 80, na escola francesa da Didática da Matemática, em que Yves Chevallard e Michèle Artigue destacam-se como dois dos pesquisadores pioneiros do ramo. Artigue (1988) define esta metodologia

(...) como uma forma de trabalho didático: aquele comparável ao trabalho de um engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apoia nos conhecimentos científicos de seu domínio, aceita se submeter a um controle de tipo científico mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar com objetos muito mais complexos que os objetos apurados da ciência e então se defronta na prática, em conjunto dos meios que ele dispõe, com os problemas que a ciência não quer ou não pode levar em consideração. (ARTIGUE, 1988, p. 283, *tradução nossa*).

Artigue (1988) também menciona a necessidade de intervenções educacionais, isto é, experimentos em sala de aula para que a Engenharia Didática seja eficaz. Estes experimentos são normalmente sequências didáticas norteadas pela teoria. Citamos como exemplos de referenciais teóricos comumente utilizados a “Teoria das Situações Didáticas” de Guy Brousseau e a “Teoria da Transposição Didática” de Yves Chevallard, abordadas em trabalhos como os de Fonseca (2011), Gravina (2001) e Silva (2011). O aprofundamento nestas teorias não é do escopo deste estudo, portanto não as discutiremos em detalhe. No entanto,

recomendamos a consulta de Brousseau (1997) e Chevallard (1985) para maior investigação do tema.

O uso da Engenharia Didática vem evoluindo desde seu surgimento, o que concebeu diferentes abordagens para a mesma.⁸ A mais amplamente utilizada, chamada Engenharia Didática Clássica, Engenharia Didática de 1ª Geração, ou, ainda, Engenharia Didática de Investigação, visa a avanços no resultado de uma investigação – e, por conta disso, é denominada como tal (ALMOULOUUD e DA SILVA, 2012). Esta é constituída de quatro etapas, a saber: (1) Análises prévias, (2) Concepção e Análise *a Priori*, (3) Experimentação, e (4) Análise *a Posteriori* e Validação (ARTIGUE, 1988).

Uma característica notável desta metodologia é a forma com que a validação dos dados é realizada, constituindo-se na comparação das Análises *a Priori* e *a Posteriori*. Dessa forma, a etapa de validação é considerada um tipo de validação interna, o que permite o trabalho com amostras reduzidas de estudantes, não sendo necessária a utilização dos métodos comparativos clássicos da Estatística (ARAÚJO e IGLIORI, 2009). A seguir, explicitaremos as etapas de nosso trabalho à luz da metodologia proposta.

4.2 Análises prévias

Nesta etapa, deve-se escolher um quadro teórico para fundamentar o trabalho. Para isso, é necessário fazer

(...) inferências, como o levantamento das constatações experimentais, a caracterização das concepções dos sujeitos envolvidos e a análise das condições da realidade sobre a qual a experiência será realizada. (NUNES, 2017, p. 22).

Artigue (1988) considera que as análises prévias podem ser distinguidas em três dimensões:

- a dimensão didática ligada ao sistema de ensino;
- a dimensão epistemológica ou do saber;
- a dimensão cognitiva ligada ao público-alvo do processo de ensino-aprendizagem.

Neste trabalho, a dimensão didática foi tratada no Capítulo 1, no qual desenvolvemos um aprofundamento nos PCNEM, PCN+ e Currículo do Estado de São Paulo, assim como na ementa da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I oferecida pelo IQ/CAr da UNESP. Já

⁸ O leitor pode verificar uma breve revisão das tendências desta metodologia na contemporaneidade consultando Margolinas e Drijvers (2015).

a dimensão epistemológica foi tratada nos Capítulos 2 e 3, nos quais apresentamos os principais conceitos da Matemática e Química, respectivamente, pertinentes às atividades propostas.

Por fim, a dimensão cognitiva é apresentada neste capítulo, levando-se em conta o público-alvo deste estudo, ou seja, os alunos que cursaram a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I no 1º semestre de 2017. Este mesmo público-alvo também justifica nossas escolhas para a maneira com que conduzimos o estudo da dimensão didática, uma vez que eram, em sua maioria, alunos recém-chegados do Ensino Médio.

O grupo de alunos objeto deste trabalho cursou a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, oferecida pelo IQ/CAr da UNESP para o curso de Bacharelado em Química, no período integral. A disciplina contempla 6 créditos obrigatórios aos estudantes do curso.

No início do semestre, a sala era composta por 67 alunos matriculados, dos quais 53 eram calouros e 14 eram veteranos cursando novamente a disciplina. Além disso, a turma continha 43 estudantes do sexo masculino e 24 do sexo feminino. As idades da classe variaram entre 17 e 28 anos, configurando uma turma bastante heterogênea.

Conforme aponta Artigue (1988), as três dimensões desta etapa devem ser retomadas e aprofundadas ao longo de todo o trabalho de pesquisa, segundo as necessidades que surgirem. Dessa forma, apesar desta etapa se intitular “Análises Prévias”, ela pode e deve ser revisitada nas etapas posteriores. Isso torna o termo “prévia” algo relativo, referindo-se apenas à maneira com que a metodologia se organiza e, na realidade, deve ocorrer simultaneamente às etapas subsequentes (ALMOULOUUD e COUTINHO, 2008).

Assim, optou-se pela realização de entrevistas exploratórias após a aplicação das atividades, e tomou-se parte das respostas como referencial de estudo da dimensão cognitiva para as Análises Prévias, e parte como referencial para a Validação das atividades.

Para tal, analisou-se um conjunto de 6 entrevistas voluntárias avaliando as atividades realizadas, tendo em vista as expectativas e contribuições das mesmas para os estudantes. As entrevistas foram conduzidas por via escrita após as atividades desenvolvidas, que, por sua vez, serão descritas na próxima subseção. O modelo contendo as perguntas realizadas nas entrevistas exploratórias encontra-se no Apêndice A.

Com a realização das entrevistas, utilizou-se a Questão 01 como principal indicador de estudo da dimensão cognitiva, enquanto as demais foram utilizadas para a etapa de Análise *a Posteriori* e Validação.

Nesta questão, perguntou-se a respeito das contribuições e impactos causados pelas atividades realizadas. Algumas das respostas obtidas foram:

- **Respondente 1**

(...) eu diria que essas atividades serviram para chamar a atenção de que as Ciências estão interligadas e que, independentemente da área, elas se complementam.

- **Respondente 2**

(...) não tinha a noção do quanto o Cálculo pode ajudar e facilitar algumas interpretações e algumas contas na Química.

- **Respondente 4**

(...) acredito que, com a comparação do mundo cotidiano e científico, utilizando-se problemas variados entre os dois campos, pude alcançar uma maior compreensão de como poderia utilizar integrais e derivadas de forma geométrica e física. Nesse contexto, entendi como funcionam taxas de variação e como chegar às suas inversas.

- **Respondente 6**

Foi mais fácil entender como o Cálculo pode ser uma ferramenta fundamental para a Química, enxergar como podemos aplicá-lo e o quanto essa aplicação pode facilitar o entendimento de assuntos primordiais a um químico como a Cinética Química, a Termoquímica e a Físico-Química.

Confrontando-se os objetivos deste estudo com algumas das respostas às entrevistas, percebemos um grupo cujas expectativas foram relativamente satisfeitas com as atividades. Os **Respondentes 1 e 4** destacam-se por colocarem a importância da interdisciplinaridade das Ciências e da abordagem do cotidiano conforme discutido na subseção anterior. Na argumentação do **Respondente 6**, também há a menção das aplicações do Cálculo na Química e suas subáreas, o que é um indicador positivo para o sucesso das atividades realizadas.

Destacamos, também, os seguintes trechos retirados das Questões 02 a 06:

- **Respondente 1**

(...) aplicar cálculos matemáticos no cotidiano para prever situações futuras.

- **Respondente 2**

As aplicações das funções no cotidiano foram as partes que eu mais gostei.

- **Respondente 5**

(...) essas atividades tiveram um grande impacto na minha visão do Cálculo Diferencial e Integral, pois foi através delas que eu realmente me interessei pelo curso de Cálculo e (...) ainda mais pelo curso de Bacharelado em Química.

- **Respondente 6**

(...) um assunto até então muito abstrato.

Uma forma de facilitar a relação ensino-aprendizagem é observada pelos **Respondentes 1 e 2**, em que a situação cotidiana novamente se mostra uma grande influência para os estudantes. Pelo **Respondente 6**, evidencia-se a necessidade de inclusão de novas propostas de atividade que venham a tornar a Matemática menos abstrata. A interdisciplinaridade já mencionada é uma das maneiras de torná-la mais tangível. Pode-se também destacar como a abordagem da Química por meio do Cálculo impactou favoravelmente o **Respondente 5**. Na próxima seção, destacamos como o cotidiano dos estudantes e a interdisciplinaridade foram aplicados na etapa de Concepção e Análise *a Priori* das atividades realizadas.

4.3 Concepção e Análise *a Priori*

Nesta etapa da metodologia, seleciona-se um número tal de variáveis de comando frente às Análises Prévias, adequando-as ao problema estudado. No presente caso, fez-se necessária a seleção de variáveis envolvendo atividades interdisciplinares de Matemática, tanto no cotidiano de ingressantes no Ensino Superior quanto no contexto do curso de Química em si. Segundo Artigue (1988), as variáveis podem ser classificadas em “variáveis macrodidáticas ou globais”, que envolvem a organização global da Engenharia Didática, ou ainda, em “variáveis microdidáticas ou locais”, que envolvem uma fase ou etapa dentro do contexto global. Para melhor compreensão, Fonseca (2011) descreve as variáveis da Engenharia Didática comparativamente às variáveis consideradas no planejamento estratégico da Engenharia Civil, como “mão de obra, máquinas e equipamentos, recursos físicos e financeiros, orçamento, materiais etc.” (FONSECA, 2011, p. 74).

Com base nos trabalhos de Fonseca (2011) e Nunes (2017), aliados às observações tomadas na etapa de Análises Prévias, elencamos como variáveis macrodidáticas deste trabalho as seguintes: (a) conexão com a situação cotidiana presente; (b) fuga da abstração excessiva; (c) uso de diferentes ambientes de ensino; (d) aplicação de recursos tecnológicos

na aprendizagem; (e) valorização da tomada de decisão coletiva e da discussão de resultados; (f) incentivo à ressignificação de conceitos matemáticos e químicos; (g) reconhecimento do processo criativo; (h) estímulo à visão algébrica e geométrica das funções; (i) fomento da transição entre os significados químico e matemático; (j) incentivo à estimação de resultados; (k) estímulo à crítica e à reflexão; (l) instigação à busca da aplicação de conceitos matemáticos à Química e ao dia-a-dia.

Para as variáveis microdidáticas, levaram-se em conta cada tópico em particular abordado nas 5 atividades realizadas pelos estudantes⁹.

Apresentamos, a seguir, a descrição em detalhe da Concepção das atividades e as variáveis microdidáticas escolhidas em cada uma para a Análise *a Priori*. É importante frisar que, algumas vezes, as variáveis macrodidáticas e microdidáticas se justapõem, isto é, são comuns entre si. Isso ocorre porque existem situações em que uma variável pode ser estudada dentro das especificidades de uma sequência didática – uma variável microdidática –, e também no contexto global do problema, caracterizando uma variável macrodidática.

Para melhor compreensão desta etapa, optou-se, inicialmente, pela separação em atividades teóricas com foco na Matemática (Atividades 1 e 3), atividades práticas em laboratório didático de informática (Atividades 2 e 4), e atividades teóricas com foco na Química (Atividade 5). As atividades teóricas foram realizadas em sala de aula, com o auxílio de lousa e *Datashow*, enquanto as atividades práticas envolveram o uso de lousa, *Datashow* e computadores, todas preparadas para a duração de 2 horas. Num segundo momento, serão descritos alguns comportamentos esperados dos alunos na etapa de Experimentação, desenvolvida em detalhe na seção 4.4.

4.3.1 Atividades 1 e 3

A Atividade 1, com tema de Funções Exponenciais, foi concebida utilizando-se os problemas propostos por Costa (2016) e Barrozo (2017), e planejada de forma guiada, isto é, o professor apresentaria parte da teoria, faria com a classe um exemplo, e deixaria, em seguida, que os alunos realizassem os demais exercícios em duplas, auxiliando conforme necessário.

A Atividade 3 também foi idealizada levando-se em conta os problemas propostos por Costa (2016) e Barrozo (2017), porém com situações envolvendo o tema de Função

⁹ Cf. Apêndices B a F.

Logarítmica, desenvolvida no Capítulo 2. Similarmente, esta atividade também foi planejada de forma guiada.

Nas Atividades 1 e 3, tomaram-se como variáveis microdidáticas as seguintes: (a) percepção das funções exponenciais e logarítmicas no cotidiano; (b) estímulo à observação de padrões; (c) incentivo à obtenção de modelos matemáticos plausíveis às situações apresentadas; (d) uso dos modelos obtidos para a previsão e inferência de dados; (e) manipulação algébrica de funções; (f) resgate de tópicos importantes do Ensino Médio.

4.3.2 Atividades 2 e 4

A Atividade 2 foi concebida utilizando-se os problemas propostos por Costa (2016), e desenvolvida para a realização em laboratório de informática com o auxílio do *software* GeoGebra¹⁰ e do editor de planilhas eletrônicas LibreOffice Calc¹¹, ambos gratuitos. Esta atividade também foi planejada de forma guiada, isto é, o professor apresentaria um roteiro de cada etapa da atividade e deixaria, em seguida, que os alunos realizassem os exercícios em duplas, auxiliando conforme necessário.

A Atividade 4 foi novamente construída levando-se em conta os problemas propostos por Costa (2016), porém com situações envolvendo os conceitos de função logarítmica desenvolvidos na sala de aula até então. Analogamente, a Atividade 4 também foi realizada em laboratório de informática e planejada de forma guiada.

Para as Atividades 2 e 4, tomaram-se como variáveis microdidáticas: (a) o uso de ferramentas gráficas na percepção das funções já estudadas anteriormente; (b) a construção e análise de uma planilha eletrônica; (c) o uso e comparação dos modelos matemáticos obtidos com auxílio da planilha e do GeoGebra; (d) o resgate de tópicos importantes do Ensino Médio e do Cálculo Diferencial e Integral I.

4.3.3 Atividade 5

A Atividade 5 foi concebida adaptando-se tanto um problema do exame vestibular de 2006 da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)¹² quanto um exemplo de Stewart

¹⁰ Disponível para *download* em: <<https://www.geogebra.org/download>>. Acesso em: 20 out. 2017.

¹¹ Disponível para *download* em: <<https://pt-br.libreoffice.org/baixe-ja/libreoffice-novo/>>. Acesso em: 21 out. 2017.

¹² Disponível em: <<https://www.ufmg.br/copeve/Arquivos/2006/ProvasUFMG/1ETAPA/>>. Acesso em: 20 mai. 2017.

(2013) e outro de Atkins e de Paula (2008). Esta atividade também foi planejada de forma guiada, de modo semelhante às Atividades 1 e 3.

Por fim, na etapa de Análise *a Priori* escolheram-se como variáveis microdidáticas: (a) a aplicação de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral na Cinética Química; (b) a retomada de conceitos já estudados no semestre; (c) a interpretação química de dados matemáticos no contexto do Cálculo; (d) o estímulo à observação de padrões, o incentivo à obtenção de modelos matemáticos plausíveis à Cinética Química; (e) o uso dos modelos obtidos para a previsão e inferência de dados; (f) a manipulação algébrica de funções; (g) a inter-relação de todas as sequências didáticas até aqui realizadas.

4.3.4 Comportamentos esperados

Almouloud e Coutinho (2008) argumentam que, em uma Análise *a Priori*, deve-se

Prever comportamentos possíveis e tentar mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervêm, resultam do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem. (ALMOULOUUD e COUTINHO, 2008, p. 67).

Com o intuito de garantir o bom andamento das atividades, buscou-se, na medida do possível, que a turma tivesse o conhecimento necessário para desenvolver as atividades em sua totalidade. Esperou-se, contudo, que haveria alunos com diferentes graus de preparo. Para contornar tal situação, acrescentou-se às atividades propostas o uso de lousa, não apenas para a resolução dos exercícios passo-a-passo, mas também para a revisão de tópicos do Ensino Médio que pudessem estar menos esclarecidos, como as PGs¹³, por exemplo, utilizadas na Atividade 1.

Todas as atividades foram concebidas para serem trabalhadas em duplas e, com isso, visou-se à cooperação mútua e discussão dos problemas. Como é frequente que alguns alunos não se sentem à vontade trabalhando coletivamente, o professor, ao aplicar a atividade, buscou incentivar ao máximo a colaboração dos colegas, uma vez que algumas atividades propostas poderiam se mostrar desafiadoras aos estudantes.

Já no laboratório de informática, previram-se dificuldades no sentido de manusear o GeoGebra, pois grande parte dos alunos nunca havia tido contato com *softwares* gráficos

¹³ Para uma boa revisão do assunto de sequências e progressões, recomendamos a consulta de Iezzi e Hazzan (2013).

anteriormente. Esperou-se que, com a apresentação de um roteiro passo-a-passo pelo professor, este problema seria minimizado.

Outra previsão que se pôde realizar foi o possível questionamento por parte dos estudantes do porquê de se estudarem funções exponenciais e logarítmicas. Para suscitar a resolução desta problemática, apoiou-se a construção de cada atividade tanto na interdisciplinaridade quanto nas situações cotidianas dos estudantes, conforme descrevemos nas seções anteriores. Acreditou-se que, com esta abordagem, os alunos compreenderiam a importância destes tópicos no dia-a-dia e, também, no espectro de habilidades necessárias a um profissional da Química em formação.

Na próxima seção, daremos prosseguimento à descrição da etapa de Experimentação, na qual se realizaram as atividades construídas na etapa descrita previamente.

4.4 Experimentação

Na fase de Experimentação, coloca-se em prática o dispositivo construído na etapa de Concepção e Análise *a Priori*. Neste momento, explicitam-se os objetivos de cada atividade, bem como as condições de realização da pesquisa. Além disso, são aplicados os instrumentos de pesquisa e registram-se as observações feitas (MACHADO, 2008). A seguir, detalhamos as atividades aplicadas à população de alunos submetida a este estudo. As Atividades 1 a 5 podem ser consultadas nos Apêndices B a F, respectivamente.

4.4.1 Atividade 1

A Atividade 1 foi aplicada em 28 de março de 2017, em sala de aula, e teve como objetivos a introdução à modelagem matemática, a retomada dos conceitos de função exponencial, a construção de modelos matemáticos e, por fim, o uso destes modelos para a previsão e inferência de dados.

Inicialmente, o professor entregou as atividades impressas para cada dupla, formadas livremente pelos estudantes. Em seguida, utilizou-se o *Datashow* para apresentar o conceito de modelagem matemática, segundo Stewart (2013), e fornecer exemplos de crescimento e decaimento exponencial. Então, resolveu-se em lousa o Exercício 1, a título de exemplo, e instigou-se à realização independente do Exercício 2. Estes problemas trataram do crescimento exponencial do número de partes em que um papel de *origami* se dividia e do decaimento exponencial de uma população de bactérias, respectivamente. Nesse

procedimento, o professor caminhou pela sala sanando eventuais dúvidas e auxiliando os estudantes quando solicitado.

A resolução do Exercício 1 consistiu na obtenção da quantidade Q de partes em que o *origami* se dividia em função do número de dobraduras feitas n , dada pela Equação (4.1). Nesta resolução, desenvolveu-se o seguinte raciocínio com a sala:

$$\begin{aligned}
 Q(0) &= 1 \\
 Q(1) &= Q(0) \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2 \\
 Q(2) &= Q(1) \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 2^2 \\
 Q(3) &= Q(2) \cdot 2 = 2^2 \cdot 2 = 2^3 \\
 &\dots \\
 Q(n) &= 2^n
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Analogamente, para o Exercício 2, a resolução consistiu, em primeiro momento, na obtenção da população de bactérias P em função do tempo t , em horas, para uma população que caía pela metade a cada hora, com população inicial de 10.000 bactérias. Desenvolveu-se o raciocínio da seguinte maneira, chegando-se à Equação (4.2):

$$\begin{aligned}
 P(0) &= 10\ 000 \\
 P(1) &= P(0) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 10\ 000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \\
 P(2) &= P(1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 10\ 000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 10\ 000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
 P(3) &= P(2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 10\ 000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 10\ 000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\
 &\dots \\
 P(t) &= 10\ 000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

Em seguida, pediu-se a determinação da população após 5 horas, ou seja, $P(5)$. Para este cálculo, bastava a substituição direta na função obtida:

$$P(5) = 10\ 000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cong 312 \text{ bactérias}
 \tag{4.3}$$

Esperava-se que os alunos conseguissem reproduzir as situações apresentadas na linguagem matemática (Exercícios 1 e 2) e realizar previsões a partir das funções obtidas (Exercício 2). Além disso, chamou-se a atenção para o fato de que, na construção deste modelo, levam-se em conta variações discretas, isto é, de uma em uma unidade de tempo (no

caso, horas). Ao obter-se a Equação (4.3), o tempo t passa a ser modelado de forma contínua por todo o domínio de P .

Na sequência, o professor retomou o *Datashow* apresentando o Exercício 3, sob a ótica cotidiana dos estudantes, e, mais uma vez, permitiu que os alunos chegassem às respostas independentemente. Este problema tratou da obtenção de uma lei matemática para a contabilização do valor acumulado após o depósito de uma quantia Q_0 numa caderneta de poupança, inserindo os estudantes neste contexto. O problema também exigiu a inferência de dados a partir da função obtida.

Ao iniciar a resolução deste exercício, esperou-se que os alunos desenvolvessem os seguintes passos, culminando na obtenção da quantidade acumulada Q , em reais, em função do tempo t , em meses, dada pela Equação (4.4):

$$\begin{aligned} Q(0) &= Q_0 \\ Q(1) &= Q_0 + r \cdot Q_0 = Q_0 \cdot (1+r) \\ Q(2) &= Q(1) + r \cdot Q(1) = Q(1) \cdot (1+r) = Q_0 \cdot (1+r) \cdot (1+r) = Q_0 \cdot (1+r)^2 \\ Q(3) &= Q(2) + r \cdot Q(2) = Q(2) \cdot (1+r) = Q_0 \cdot (1+r)^2 \cdot (1+r) = Q_0 \cdot (1+r)^3 \\ &\dots \\ Q(t) &= Q_0 \cdot (1+r)^t \end{aligned} \tag{4.4}$$

Após esse desenvolvimento, perguntou-se qual seria o valor acumulado partindo-se de R\$ 500,00 e taxa de juros de 0,53% ao mês, num período de 4 anos, isto é, 48 meses. A resposta esperada era, segundo a função obtida,

$$Q(48) = 500 \cdot (1,0053)^{48} \cong \text{R\$}644,41. \tag{4.5}$$

Já no Exercício 4, o professor iniciou a resolução conjunta no quadro e, em seguida, permitiu que os alunos tentassem por conta própria desenvolver a questão. O exercício tratou de uma continuidade do problema anterior, porém com o acréscimo de um depósito fixo mensal realizado até a aposentadoria. Os estudantes tiveram, todavia, elevado nível de dificuldade em correlacionar o que foi pedido na questão com o conteúdo de PGs do Ensino Médio. Assim, fez-se necessária a intervenção na lousa para a resolução passo-a-passo, incluindo a revisão deste tópico em particular.

Supondo um capital inicial de C reais, um depósito fixo de k reais, e uma taxa de juros de r % ao mês, o desenvolvimento da quantidade acumulada Q após t meses se deu da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
Q(1) &= C + r \cdot C + k = C \cdot (1+r) + k \\
Q(2) &= Q(1) + r \cdot Q(1) + k = Q(1) \cdot (1+r) + k \\
&= [C \cdot (1+r) + k] \cdot (1+r) + k = C \cdot (1+r)^2 + k \cdot (1+r) + k \\
&= C \cdot (1+r)^2 + k \cdot [(1+r) + 1] \\
Q(3) &= Q(2) + r \cdot Q(2) + k = Q(2) \cdot (1+r) + k \\
&= \{C \cdot (1+r)^2 + k \cdot [(1+r) + 1]\} \cdot (1+r) + k \\
&= C \cdot (1+r)^3 + k \cdot [(1+r)^2 + (1+r) + 1] \\
&\dots
\end{aligned} \tag{4.6}$$

A soma dos termos nos colchetes à direita de (4.6) se trata da soma dos n termos de uma PG de primeiro termo $x_1 = 1$ e razão $q = 1+r$. Assim, podemos utilizar a Equação (2.7) para a soma $1 + (1+r) + (1+r)^2 + \dots + (1+r)^n$:

$$S_n = x_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{1+r - 1} \Rightarrow S_n = \frac{(1+r)^n - 1}{r} \tag{4.7}$$

Supondo-se, ainda, $Q(t)$ uma função contínua para todo $t = n$, vem

$$\begin{aligned}
Q(t) &= C \cdot (1+r)^t + k \cdot \left[\frac{(1+r)^t - 1}{r} \right] \\
&= C \cdot (1+r)^t + \frac{k}{r} \cdot (1+r)^t - \frac{k}{r} .
\end{aligned}$$

Colocando o termo $(1+r)^t$ em evidência, obtemos, então,

$$Q(t) = \left(C + \frac{k}{r} \right) \cdot (1+r)^t - \frac{k}{r} . \tag{4.8}$$

Além da obtenção desta função, requisitou-se dos estudantes a estimativa do valor acumulado partindo-se do capital inicial obtido no Exercício 3, R\$644,41, com depósito fixo de R\$150,00 e taxa de juros 0,7% ao mês, aos 65 anos de idade. Como esta grandeza variou com a idade de cada aluno, mostramos abaixo o exemplo de cálculo para um graduando de 18 anos que se formará aos 22 anos¹⁴:

$$t = (65 - 22) \cdot 12 = 43 \cdot 12 = 516 \text{ meses} \tag{4.9}$$

Assim,

¹⁴ Para fins de simplificação dos cálculos, não consideramos o mês de aniversário do estudante e supusemos o ciclo completo dos 43 anos compreendidos no período dos 22 aos 65 anos de idade. No entanto, deu-se a liberdade para os estudantes calcularem este valor com a precisão que desejassem.

$$Q(516) = \left(644,41 + \frac{150}{0,007} \right) \cdot (1 + 0,007)^{516} - \frac{150}{0,007} \cong \text{R\$}785.932,50. \quad (4.10)$$

O Exercício 5 era bastante similar ao anterior. Desta vez, no entanto, o problema abordou a situação oposta: o estudante passaria a sacar dinheiro da conta poupança, no período dos 65 aos 90 anos de idade. O tratamento algébrico desta questão, por ter semelhança com o Exercício 4, foi deixado a cargo dos estudantes, que conseguiram, em grande parte, chegar à função desejada.

Com procedimento similar ao adotado no exercício anterior, pode-se demonstrar que, supondo um capital inicial de C reais, um saque fixo de w reais, e uma taxa de juros de $r\%$ sobre o que sobra a cada mês, resulta em uma quantidade Q após t meses, dada pela Equação (4.11):

$$Q(t) = \left(C - \frac{w}{r} \right) \cdot (1 + r)^t + \frac{w}{r} \quad (4.11)$$

Para a estimativa do valor acumulado aos 90 anos de idade, bastava utilizar como capital inicial o valor acumulado aos 65 anos obtido no Exercício 4 para um período de 25 anos, isto é, 300 meses, com saque fixo de R\$6.000,00. Assim,

$$Q(300) = \left(785\,932,50 - \frac{6\,000}{0,007} \right) \cdot (1 + 0,007)^{300} + \frac{6\,000}{0,007} \cong \text{R\$}279.865,76. \quad (4.12)$$

Após este exercício, o professor se utilizou da lousa para a caracterização da função exponencial e o fechamento da primeira parte da teoria.

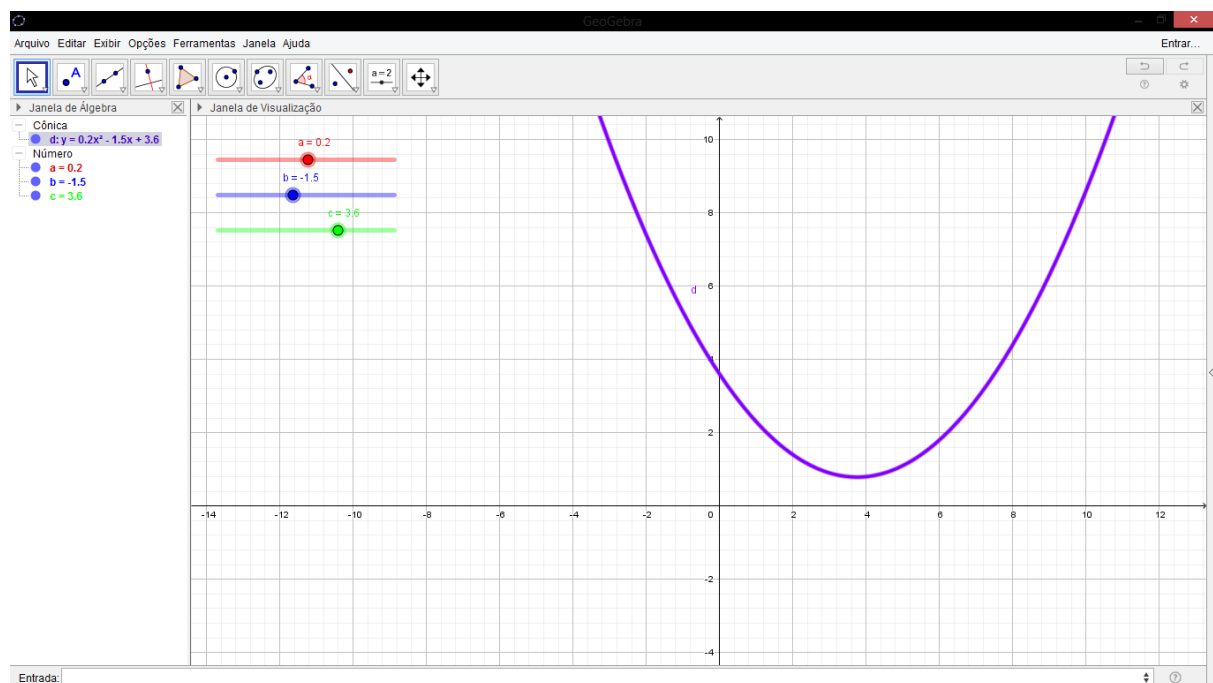
Num último momento, o sexto item tratou da avaliação das atividades propostas, em forma de escala de Likert ou do somatório dos escores, segundo Vieira (2009). Este último será utilizado na etapa de Análise *a Posteriori* e Validação, descrita na última seção deste capítulo.

4.4.2 Atividade 2

A Atividade 2 foi aplicada em 04 de abril de 2017, no Laboratório Didático de Informática (LDI), no IQ/CAR da UNESP. Os objetivos desta foram a introdução à modelagem matemática computacional, a retomada dos conceitos de função exponencial desenvolvidos na Atividade 1, a exploração de recursos gráficos, a construção de planilhas eletrônicas envolvendo os problemas propostos, o uso destes modelos para a previsão e inferência de dados, a observação e percepção do comportamento das funções exponenciais, e o contraste das funções potência e exponencial.

Ao começar a Atividade 2, o professor entregou folhas impressas com os exercícios para cada dupla, formadas livremente pelos estudantes. Em seguida, utilizou-se o *Datashow* para projetar o roteiro das atividades que seriam desenvolvidas, fazendo os exercícios passo-a-passo com os alunos e, ao mesmo tempo, dando-lhes a oportunidade de tentar reproduzi-los por conta própria. Deu-se início, então, ao Exercício 1, que consistiu num tutorial rápido de como manipular o GeoGebra. Os educandos tiveram a oportunidade de compreender as principais ferramentas básicas do *software* e testar a plotagem de uma função afim e uma função quadrática, com e sem controle deslizante. Na construção dos gráficos sem controle deslizante, os estudantes observaram o comportamento de uma curva pré-fixada pelo exercício. Já com o uso do controle deslizante, os alunos puderam perceber como a alteração dos coeficientes modificava a curva em si. A Figura 4.1 mostra o exemplo da curva $y = ax^2 + bx + c$, plotada no GeoGebra com controles deslizantes para cada um dos coeficientes a , b e c .

Figura 4.1 – Curva $y = ax^2 + bx + c$, com controles deslizantes para os coeficientes a , b e c .



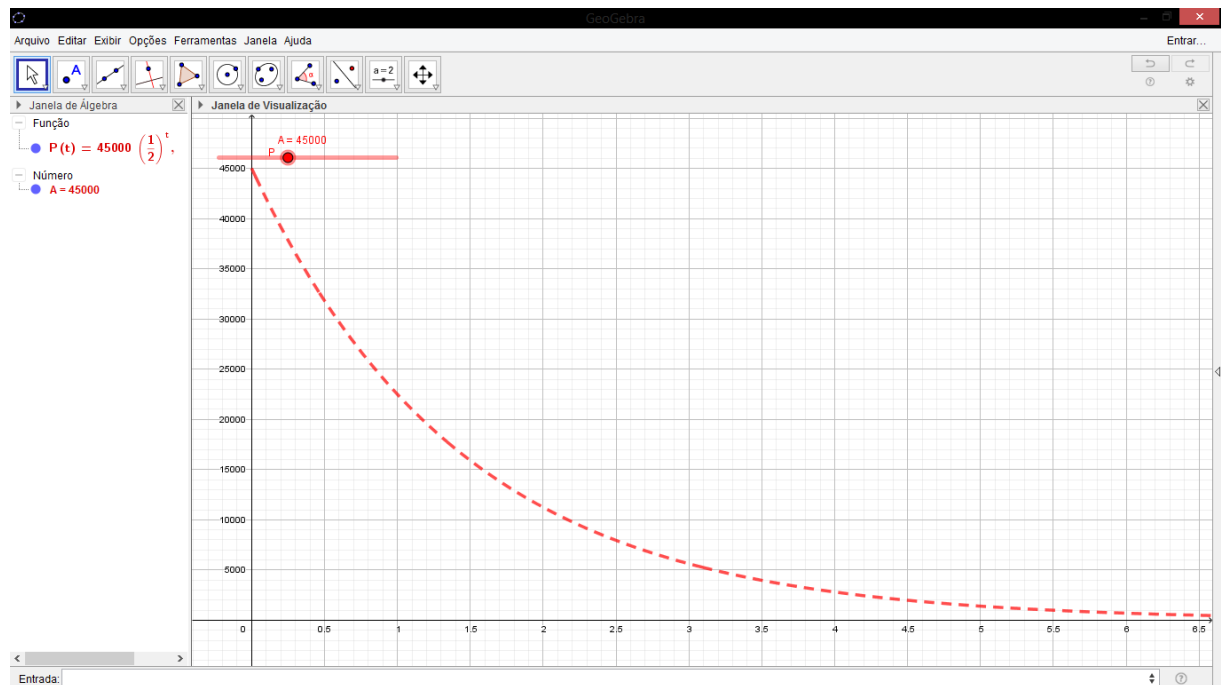
Fonte: gráfico gerado pelo autor, com uso do *software* GeoGebra.

Em seguida, o professor retomou o roteiro com o Exercício 2. No item a), os estudantes construíram, primeiramente, a curva da população P versus tempo t ,

$P(t) = 10\,000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$, que foi obtida no Exercício 2 da Atividade 1, em sala de aula. Utilizando

esta curva, eles fizeram a estimativa de $P(5)$, e, depois, modificaram a função para $P(t) = A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$, com restrição de domínio. Isso possibilitou a percepção do domínio físico da função população, com possibilidade de alteração da população inicial, simbolizada por A na nova função. A Figura 4.2 mostra o resultado final do item a).

Figura 4.2 – Curva $P(t) = A \cdot (1/2)^t$, com controle deslizante para a população inicial A .



Fonte: gráfico gerado pelo autor, com uso do *software* GeoGebra.

No item b), o professor utilizou o editor de planilhas eletrônicas LibreOffice Calc para a construção, passo-a-passo e em conjunto com a turma, de uma planilha que viabilizou a modelagem matemática das funções obtidas nos Exercícios, 3, 4 e 5 da Atividade 1, respectivamente. O objetivo deste item, além da utilização de planilhas eletrônicas para fomentar a compreensão do conceito de modelagem matemática, as quais facilitam as simulações do modelo, foi o de obter boas estimativas para as funções em qualquer tempo desejado, de maneira relativamente simples. Buscou-se, desta forma, que os educandos fossem capazes de assimilar a importância deste tipo de atividade para suas próprias vidas pessoais ao planejar uma previdência privada. As Figuras 4.3 e 4.4 ilustram parte da planilha utilizada pelos alunos no início e fim da atividade, respectivamente.

Figura 4.3 – Planilha eletrônica fornecida aos estudantes no início do item b).

Exercício 2.a)

Capital inicial	Taxa de juros	Tempo de graduação (anos)	Tempo (meses)	Valor da poupança (reais)
Q_0	r	t'	t	Q

$$Q(t) = Q_0 \cdot (1+r)^t$$

Exercício 2.b)

Capital inicial	Taxa de juros	Depósito mensal	Idade de início da graduação (anos)	Tempo (anos)	Tempo (meses)	Valor da poupança (reais)
Q_0	r	k	t'	t'	t	Q

$$Q(t) = \left(Q_0 + \frac{k}{r} \right) \cdot (1+r)^t - \frac{k}{r}$$

Exercício 2.c)

Idade em que iniciou a depositar k reais	Capital inicial	Taxa de juros	Saque mensal	Idade a consultar (anos)	Tempo (meses)	Valor da poupança (reais)
I_2	Q_0	r	w	I_2	t	Q

Fonte: planilha eletrônica gerada pelo autor, com uso do *software* LibreOffice Calc.

Figura 4.4 – Planilha eletrônica construída pelos estudantes no término do item b).

Exercício 2.a)

Capital inicial	Taxa de juros	Tempo de graduação (anos)	Tempo (meses)	Valor da poupança (reais)
Q_0	r	t'	t	Q
R\$ 500,00	0,53%	4	48	R\$ 644,41

$$Q(t) = Q_0 \cdot (1+r)^t$$

Exercício 2.b)

Capital inicial	Taxa de juros	Depósito mensal	Idade de início da graduação (anos)	Tempo (anos)	Tempo (meses)	Valor da poupança (reais)
Q_0	r	k	t'	t'	t	Q
R\$ 644,41	0,70%	R\$ 150,00	16	45	540	R\$ 933,069,62
			17	44	528	R\$ 856,423,76
			18	43	516	R\$ 785,932,52
			19	42	504	R\$ 721,101,71
			20	41	492	R\$ 661,476,79
			21	40	480	R\$ 606,639,73
			22	39	468	R\$ 556,206,07
			23	38	456	R\$ 509,822,21
			24	37	444	R\$ 467,162,96
			25	36	432	R\$ 427,929,24
			26	35	420	R\$ 391,845,96
			27	34	408	R\$ 358,660,16
			28	33	396	R\$ 328,139,17
			29	32	384	R\$ 300,069,01
			30	31	372	R\$ 274,252,86

Exercício 2.c)

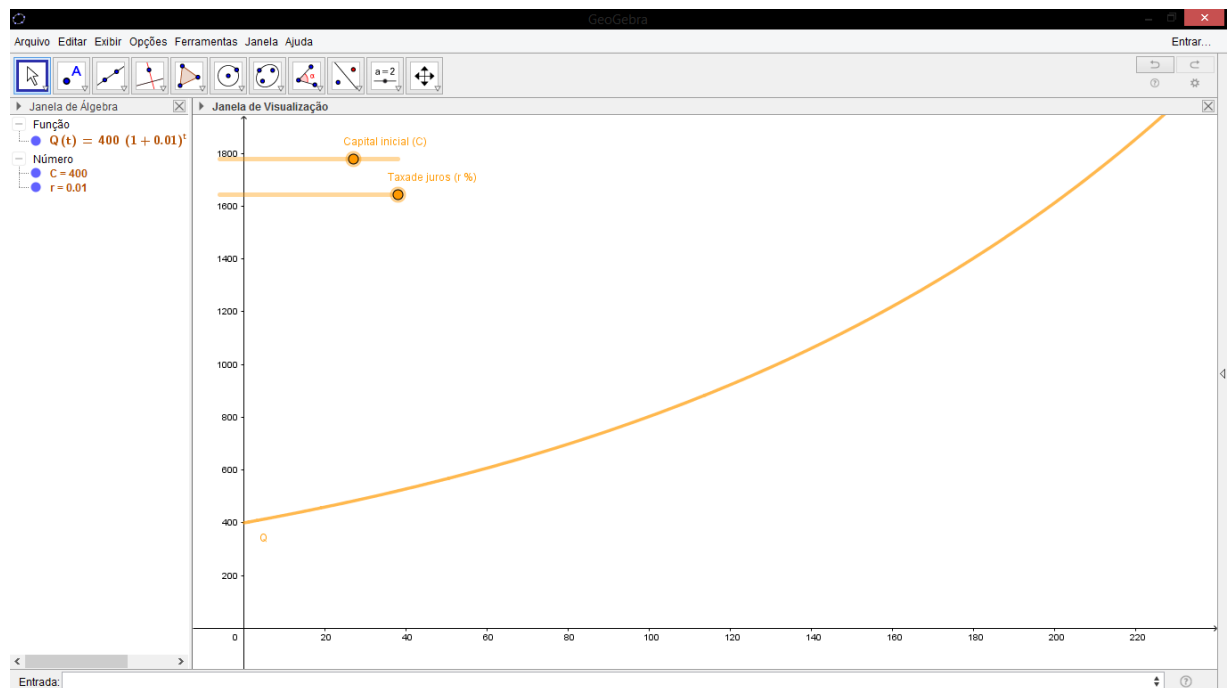
Idade em que iniciou a depositar k reais	Capital inicial	Taxa de juros	Saque mensal	Idade a consultar (anos)	Tempo (meses)	Valor da poupança (reais)
I_2	Q_0	r	w	I_2	t	Q

Fonte: planilha eletrônica gerada pelo autor, com uso do *software* LibreOffice Calc.

Após a construção da planilha no item b), os alunos foram estimulados a compará-la com modelos gráficos que seriam obtidos pelo GeoGebra. Assim, no item c) os estudantes

construíram, primeiramente, a curva de capital Q versus tempo t , $Q(t) = 500 \cdot (1,0053)^t$, $t \geq 0$, referente aos valores utilizados tanto na planilha eletrônica quanto na Atividade 1 realizada anteriormente. Em seguida, construíram a curva geral $Q(t) = C \cdot (1+r)^t$, $t \geq 0$, permitindo a alteração do capital inicial C e da taxa mensal de juros r %, com o auxílio de controles deslizantes no GeoGebra. A Figura 4.5 mostra o gráfico desta última situação.

Figura 4.5 – Curva $Q(t) = C \cdot (1+r)^t$, com controles deslizantes para o capital inicial C e a taxa de juros r %.

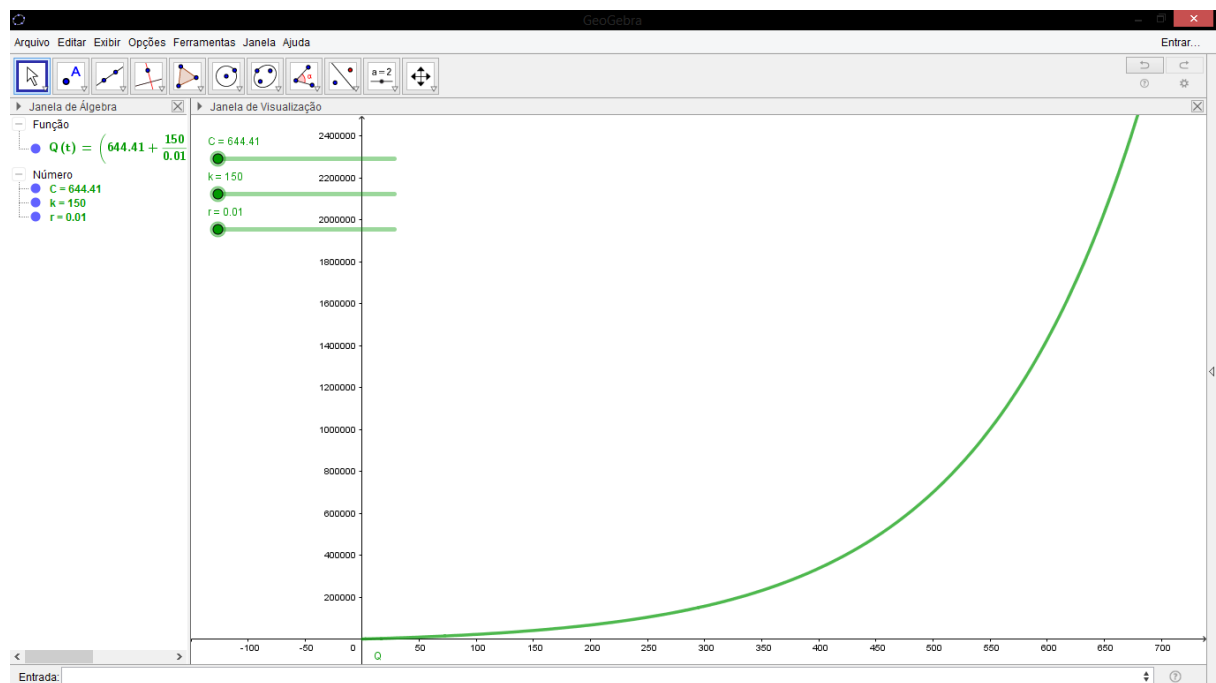


Fonte: gráfico gerado pelo autor, com uso do *software* GeoGebra.

Já no item d), os alunos exploraram o uso da função quantidade acumulada com depósitos ou saques mensais sucessivos de valor fixo, obtida nos Exercícios 4 e 5 da Atividade 1. Aqui, chamou-se a atenção para a semelhança das duas funções e da possibilidade de escrever uma única função para elas, bastando a consideração de que os valores fixos de depósito ou saque, k e w , respectivamente, seriam uma única constante que poderia tomar valores positivos (depósitos mensais) ou negativos (saques mensais). Assim, supôs-se k como depósito ou saque mensal fixo, e plotou-se com os alunos a curva de capital Q versus tempo t , $Q(t) = \left(C + \frac{k}{r}\right) \cdot (1+r)^t - \frac{k}{r}$, $t \geq 0$, com controles deslizantes para o capital inicial C , o valor fixo de depósito ou saque k , e a taxa de juros r %. Escolheram-se os valores mínimo, máximo e incrementos adequados em cada caso.

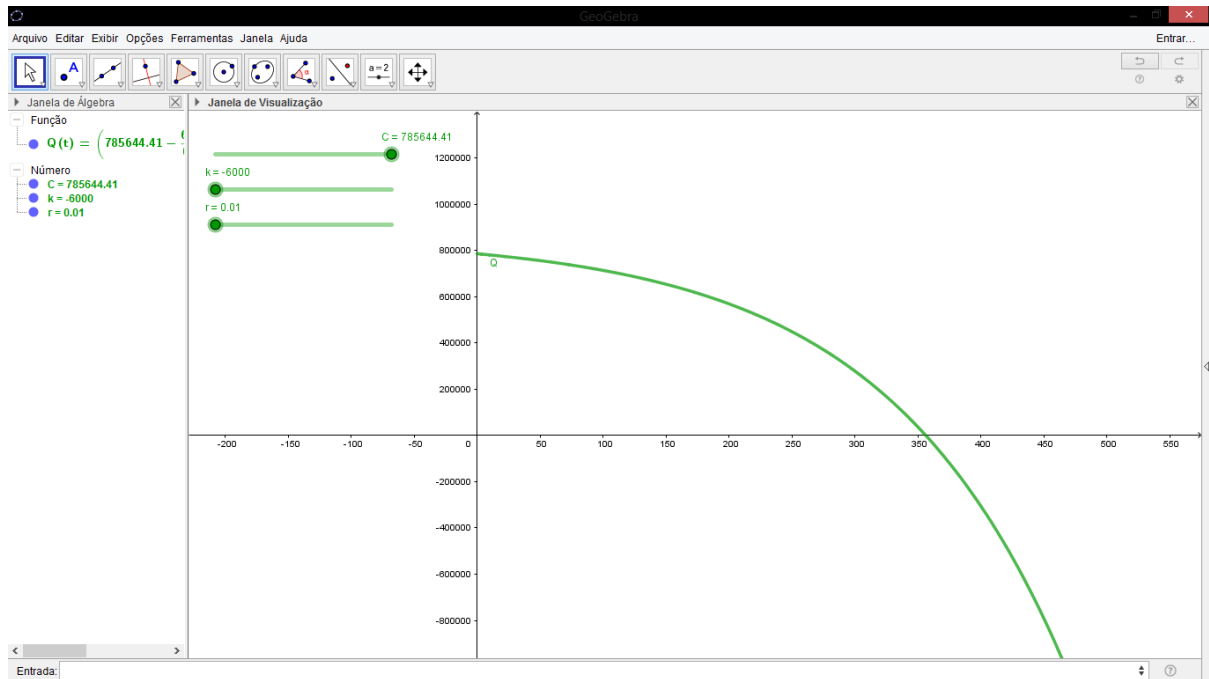
Com a construção desse gráfico no GeoGebra, esperava-se que os estudantes conseguissem estimar razoavelmente bem os mesmos valores obtidos pela planilha eletrônica, bastando para isso escolhas adequadas para C , k e r . As Figuras 4.6 e 4.7 mostram as respectivas curvas plotadas com as constantes dos Exercícios 4 e 5 da Atividade 1.

Figura 4.6 – Curva $Q(t) = \left(C + \frac{k}{r}\right) \cdot (1+r)^t - \frac{k}{r}$, com controles deslizantes para o capital inicial C , o depósito fixo k , e a taxa de juros r %, com valores propostos pelo Exercício 4 da Atividade 1.



Fonte: gráfico gerado pelo autor, com uso do *software* GeoGebra.

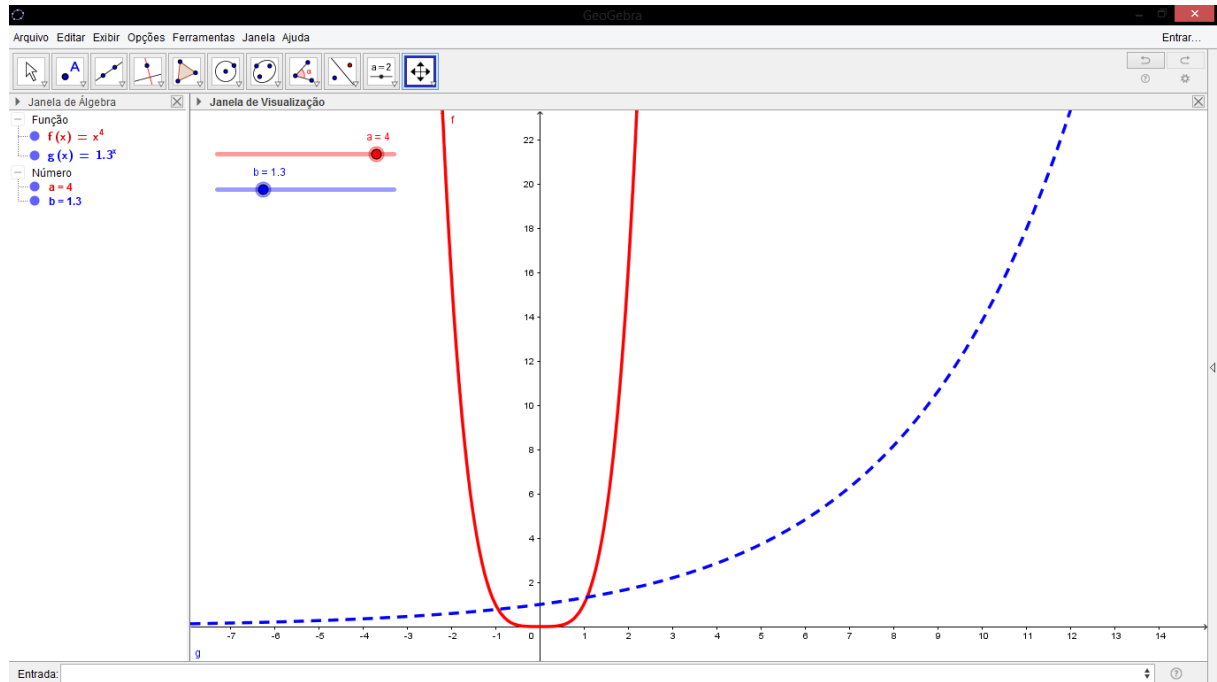
Figura 4.7 – Curva $Q(t) = \left(C + \frac{k}{r}\right) \cdot (1+r)^t - \frac{k}{r}$, com controles deslizantes para o capital inicial C , o saque fixo k , e a taxa de juros r %, com valores propostos pelo Exercício 5 da Atividade 1.



Fonte: gráfico gerado pelo autor, com uso do *software* GeoGebra.

No item e), houve uma breve comparação das funções potência e exponencial visando à elucidação de seu aspecto gráfico, uma vez que a confusão entre elas é frequente entre os estudantes. O exercício era simples: pediu-se que os alunos plotassem as funções $f(x) = x^a$ (função potência) e $g(x) = b^x$, com $b > 0$ e $b \neq 1$ (função exponencial), ambas com controles deslizantes em a e b para fins de comparação. A Figura 4.8 traz um exemplo de plotagem para o item e).

Figura 4.8 – Curvas $f(x) = x^a$ e $g(x) = b^x$, com $b > 0$ e $b \neq 1$, com controles deslizantes para a potência a e a base b .



Fonte: gráfico gerado pelo autor, com uso do *software* GeoGebra.

Num último momento, o terceiro item tratou da avaliação das atividades propostas, utilizando a escala de Likert, similarmente à Atividade 1.

Dois problemas significativos enfrentados ao longo da execução desta atividade foram: 1) a falta de assentos e computadores para a turma toda, e 2) problemas com o GeoGebra em alguns computadores em específico. No primeiro caso, houve divergência de informações, já que o total de alunos que realizou a atividade foi superior ao número de assentos disponíveis (40), e, ainda assim, somente 34 entregaram a avaliação ao final da Atividade 2. Pode-se atribuir esta divergência à saída de alguns estudantes antes do término da atividade. No segundo caso, alguns dos computadores disponíveis não estavam executando certas funções do GeoGebra, o que pode ter prejudicado substancialmente a aprendizagem dos alunos que utilizaram estes computadores. Diante desta situação, orientou-se aos alunos que observassem a dupla vizinha na plotagem de gráficos. Entre os erros relatados, o mais comum foi a impossibilidade de estimar valores diretamente do gráfico por meio da ferramenta “Ponto”.

4.4.3 Atividade 3

Aplicou-se a Atividade 3 em 05 de abril de 2017, em condições similares à Atividade 1: execução em sala de aula, com uso de lousa e *Datashow*. Esta teve como objetivos a retomada dos conceitos de função logarítmica, a inversão das funções obtidas nos modelos matemáticos da Atividade 1, e o uso destes modelos para a previsão e inferência de dados.

Ao iniciar a atividade, o professor entregou os exercícios por impresso para cada dupla, formadas livremente pelos estudantes e, em seguida, utilizou-se o *Datashow* para apresentar brevemente a história dos logaritmos e fornecer exemplos aplicados como a Teoria da Informação (COVER e THOMAS, 2006), o estudo da Acidez e Basicidade, a Termodinâmica e a Cinética Química (ATKINS e JONES, 2012). Após esta introdução, os alunos trabalharam na resolução de cada problema apresentado, durante a qual o professor caminhou pela sala sanando eventuais dúvidas e auxiliando conforme necessário. Neste procedimento, permitiu-se tempo suficiente para que os estudantes resolvessem o Exercício 1 e corrigiu-se na lousa em conjunto da turma. Adotaram-se procedimentos similares para os demais exercícios.

A resolução do item a) do Exercício 1 consistiu no uso da função obtida no Exercício 2 da Atividade 1 para estimar o tempo t , em horas, com que uma população de 10.000 bactérias, caindo pela metade a cada hora, atingiria o número de 100 bactérias. Nesta resolução, partiu-se da Equação (4.2), de maneira que

$$100 = 10\,000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t \Leftrightarrow 10^2 = 10^4 \cdot 2^{-t} \Leftrightarrow 10^{-2} = 2^{-t}$$

$$\Leftrightarrow \log 10^{-2} = \log 2^{-t} \Leftrightarrow -2 = -t \cdot \log 2 \Leftrightarrow t = \frac{2}{\log 2} \cong 6,64 \text{ h} \cong 6\text{h}38\text{min.} \quad (4.13)$$

Já os itens b) e c) avaliaram a compreensão da caracterização das funções exponenciais realizada na Atividade 1. No item b), perguntou-se se havia possibilidade de extinção da colônia de bactérias. Uma vez que a função exponencial obtida não assume valor nulo, esperava-se que os alunos respondessem negativamente a esta questão, o que de fato ocorreu durante o exercício. No item c), questionou-se a possibilidade de restar apenas uma bactéria, bem como a previsão do tempo necessário para que tal condição ocorresse. Como a função exponencial deste exercício está definida para a população de uma bactéria, a resolução se deu da seguinte maneira:

$$1 = 10\,000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t \Leftrightarrow 10^0 = 10^4 \cdot 2^{-t} \Leftrightarrow 10^{-4} = 2^{-t}$$

$$\Leftrightarrow \log 10^{-4} = \log 2^{-t} \Leftrightarrow -4 = -t \cdot \log 2 \Leftrightarrow t = \frac{4}{\log 2} \cong 13,29 \text{ h} \cong 13\text{h}17\text{min} \quad (4.14)$$

No Exercício 2, retomou-se o Exercício 3 da Atividade 1, envolvendo a quantidade acumulada Q , em reais, em função do tempo t , em meses, sob taxa de juros compostos de $r\%$ ao mês. No item a), exigiu-se a obtenção da função inversa $t(Q)$. Houve certa dificuldade por parte dos alunos na manipulação de logaritmos para esta questão. No entanto, a maioria conseguiu chegar à resposta esperada após a revisão de algumas propriedades de logaritmos. A função desejada está representada pela Equação (4.15), a partir do desenvolvimento de (4.4):

$$Q(t) = Q_0 \cdot (1+r)^t \Leftrightarrow \frac{Q}{Q_0} = (1+r)^t \quad (4.15)$$

Aplicando-se a função inversa $\log_{(1+r)}$ em ambos os lados, obtém-se

$$t(Q) = \log_{(1+r)} \left(\frac{Q}{Q_0} \right). \quad (4.16)$$

No item b), pediu-se a estimativa do tempo necessário para que o capital inicial dobrasse sob taxa de 0,53% ao mês. Perguntou-se, ainda, se este tempo dependia do capital inicial. A resolução esperada foi

$$t(2Q_0) = \log_{(1+0,0053)} \left(\frac{2Q_0}{Q_0} \right) = \log_{1,0053} 2 = \frac{\log 2}{\log 1,0053} \cong 131,13 \text{ meses} \cong 11 \text{ anos}. \quad (4.17)$$

Esperava-se que os alunos, em conjunto da resposta acima, chegassem à conclusão de que o tempo necessário não dependia do capital inicial, uma vez que os termos se cancelam no logaritmando.

Na resolução do Exercício 3, era preciso realizar uma estimativa de tempo para atingir R\$2.000.000,00 nas mesmas condições do Exercício 4 da Atividade 1. Para chegar à resposta, os alunos tiveram que inverter a função quantidade acumulada Q após t meses, supondo capital inicial R\$644,41 rendendo a 0,7% ao mês, com depósitos mensais de R\$150,00. O procedimento de cálculo esperado é como se segue:

$$Q(t) = \left(C + \frac{k}{r} \right) \cdot (1+r)^t - \frac{k}{r} \Leftrightarrow \frac{\left(Q + \frac{k}{r} \right)}{\left(C + \frac{k}{r} \right)} = (1+r)^t \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{rQ+k}{r} \right)}{\left(\frac{rC+k}{r} \right)} = (1+r)^t$$

$$\Leftrightarrow \frac{rQ+k}{rC+k} = (1+r)^t \Leftrightarrow t(Q) = \log_{(1+r)} \left(\frac{rQ+k}{rC+k} \right) \quad (4.18)$$

Utilizando-se a Equação (4.18), pôde-se fazer a estimativa pedida como

$$t(2\,000\,000) = \log_{(1+0,007)} \left(\frac{0,007 \cdot 2\,000\,000 + 150}{0,007 \cdot 644,41 + 150} \right) \cong 647,57 \text{ meses} \cong 54 \text{ anos.} \quad (4.19)$$

O Exercício 4 era bastante similar ao anterior. Desta vez, no entanto, pediu-se o tempo necessário para que o dinheiro acumulado até os 65 anos acabasse, nas mesmas condições do Exercício 4 da Atividade 1, isto é, capital inicial de R\$785.932,52 rendendo a 0,7% ao mês, com saques mensais de R\$6.000,00. Adotando-se procedimento semelhante ao Exercício 3, obteve-se a Equação (4.20), que determina o tempo t em meses necessário para que se tenha um valor acumulado Q , partindo-se de um capital inicial C rendendo com uma taxa de juros de $r\%$ ao mês, com saques mensais de w reais:

$$t(Q) = \log_{(1+r)} \left(\frac{rQ-w}{rC-w} \right) \quad (4.20)$$

Analogamente, utilizando-se a Equação (4.20), pôde-se fazer a estimativa pedida como

$$t(0) = \log_{(1+0,007)} \left(\frac{0,007 \cdot 0 - 6000}{0,007 \cdot 785\,932,52 - 6000} \right) \cong 356,67 \text{ meses} \cong 29 \text{ anos e 9 meses.} \quad (4.21)$$

A interpretação desejada era de que levariam, a partir dos 65 anos de idade, aproximadamente 30 anos para acabar o dinheiro, isto é, não haveria mais dinheiro somente próximo dos 95 anos de idade. Os estudantes conseguiram, em sua maioria, chegar aos resultados esperados.

Após este exercício, o professor se utilizou da lousa para a caracterização da função logarítmica e o fechamento da segunda parte da teoria.

O último item tratou da avaliação das atividades propostas, utilizando a escala de Likert, similarmente às atividades anteriores.

4.4.4 Atividade 4

A Atividade 4 foi realizada em 11 de abril de 2017, também no LDI do IQ/CAr da UNESP. Esta atividade objetivou a retomada dos conceitos de função logarítmica desenvolvidos na Atividade 3, a exploração de recursos gráficos, a comparação destes modelos com o uso de planilhas para a previsão e inferência de dados, a observação e percepção do comportamento das funções logarítmicas, e a correlação das atividades

anteriores com o Cálculo. Diferentemente da Atividade 2, nesta atividade os alunos já estavam minimamente familiarizados com o uso do GeoGebra. Assim, propusemos exercícios mais desafiadores aos estudantes que também contemplaram parte do conhecimento adquirido até então na disciplina de Cálculo.

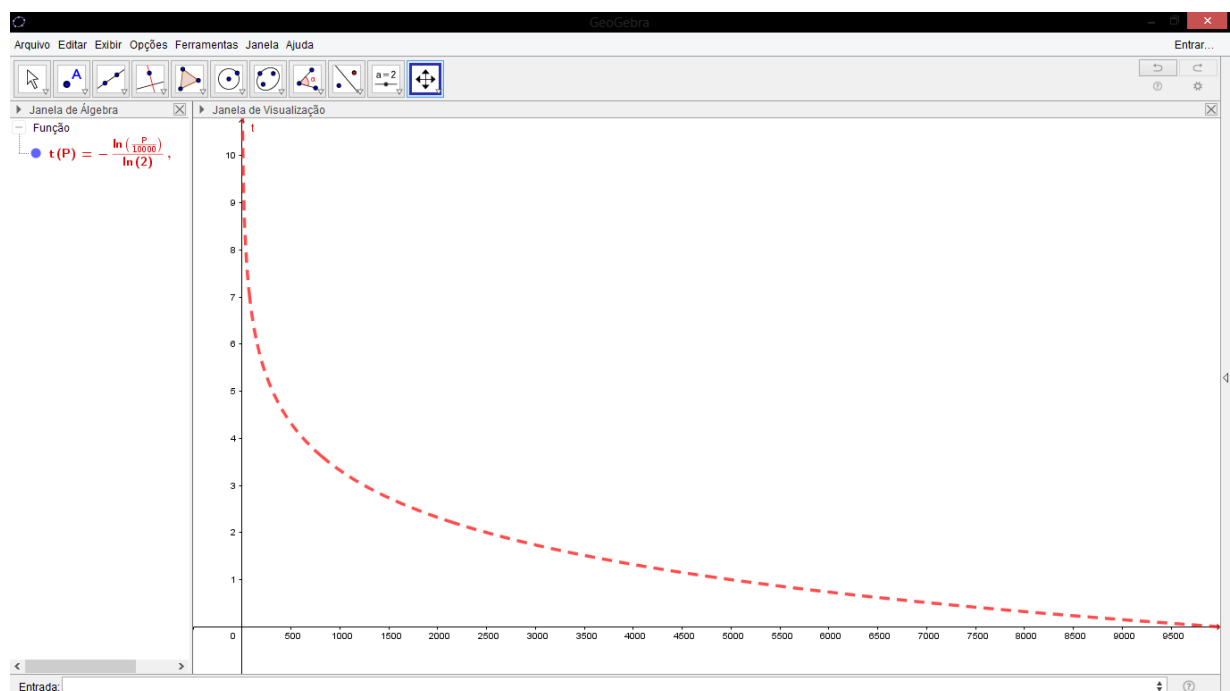
Similarmente à Atividade 2, o professor entregou folhas impressas com os exercícios para cada dupla, formadas livremente pelos estudantes. Então, utilizou-se o *Datashow* para projetar o roteiro das atividades que seriam desenvolvidas, dando aos alunos a oportunidade de tentar reproduzir os exercícios por conta própria.

O item a) do Exercício 1 envolveu a plotagem da função inversa $t(P)$ da Equação (4.2), que previa o tempo t , em horas, em relação à população de bactérias P , usada na estimativa do Exercício 1 da Atividade 3. Pediu-se a plotagem da função

$$t(P) = -\frac{\ln\left(\frac{P}{10\,000}\right)}{\ln 2}, \quad (4.22)$$

em que se utilizou a fórmula de mudança de base dos logaritmos, dada pela Equação (2.33), para permitir o reconhecimento dos comandos no GeoGebra. A Figura 4.9 mostra essa plotagem.

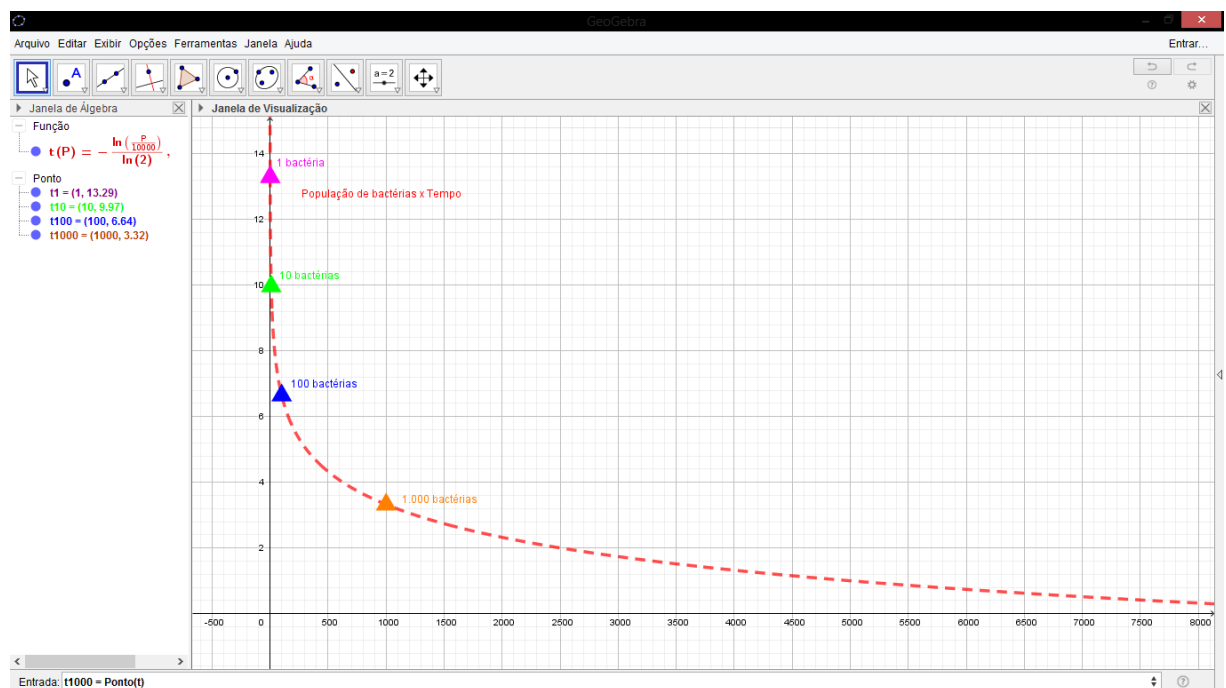
Figura 4.9 – Curva $t(P)$, que calcula o tempo t , em horas, em relação à população de bactérias P .



Fonte: gráfico gerado pelo autor, com uso do *software* GeoGebra.

Demandou-se, ainda, a estimativa de $t(1)$, $t(10)$, $t(100)$ e $t(1\ 000)$ pelo *software*, utilizando a ferramenta “Ponto”. Para tal, bastava que os estudantes selecionassem essa ferramenta e clicassem sobre o gráfico, criando um ponto. Em seguida, eles podiam modificar a cor, estilo, legenda etc. do mesmo e movê-lo livremente pelo gráfico até a vizinhança de interesse – aquela na qual se pediu a estimativa. A Figura 4.10 mostra como ficaram marcados os pontos dessas estimativas após a conclusão desta parte do exercício.

Figura 4.10 – Estimativas de $t(1)$, $t(10)$, $t(100)$ e $t(1\ 000)$.



Fonte: gráfico gerado pelo autor, com uso do *software* GeoGebra.

Os alunos obtiveram os valores aproximados de $t(1) \cong 13\text{h}17\text{min}$, $t(10) \cong 9\text{h}58\text{min}$, $t(100) \cong 6\text{h}38\text{min}$ e $t(1\ 000) \cong 3\text{h}19\text{min}$, conforme esperado. Estes valores também foram previstos no Exercício 1 da Atividade 3 para uma população de 100 e 1 bactérias, nos itens a) e c), respectivamente.

Ainda no item a), perguntou-se no subitem I em qual desses pontos o tempo estava diminuindo mais lentamente em relação ao número de bactérias, assim como a taxa de variação do tempo em relação à população de bactérias nesse ponto. Já no subitem II pediu-se o oposto: em qual desses pontos o tempo estava diminuindo mais rapidamente em relação ao número de bactérias, bem como a taxa de variação do tempo em relação à população de bactérias nesse ponto. Para resolver estas questões, foi necessário que os alunos recorressem

ao Cálculo Diferencial, derivando a função $t(P)$ em relação a P e substituindo os pontos de menor e maior inclinações (subitens I e II, respectivamente), concluindo o item a). A resolução esperada para esta parte do exercício foi, então,

$$t(P) = -\frac{\ln\left(\frac{P}{10\,000}\right)}{\ln 2} \Rightarrow \frac{dt}{dP} = -\frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{P}{10\,000}\right)} \cdot \frac{1}{10\,000} = -\frac{1}{P \ln 2} . \quad (4.23)$$

Observando-se a Figura 4.10, conclui-se que o ponto cuja reta tangente possui menor inclinação é o ponto referente à população de 1.000 bactérias. A taxa de variação nesse ponto é, então, dada por

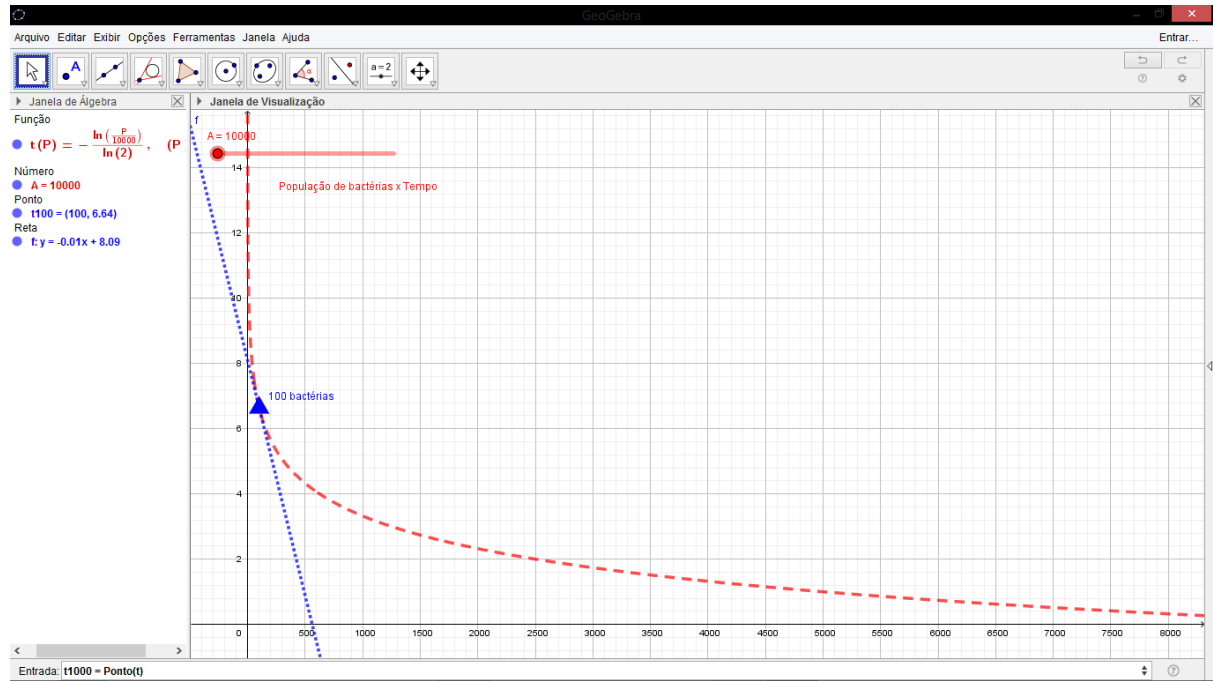
$$\left. \frac{dt}{dP} \right|_{P=1\,000} = -\frac{1}{1\,000 \cdot \ln 2} \cong -1,44 \cdot 10^{-3} \text{ h / bactéria.} \quad (4.24)$$

Analogamente, o ponto cuja reta tangente possui maior inclinação é o ponto referente à população de 1 bactéria. Assim, a taxa de variação nesse ponto é

$$\left. \frac{dt}{dP} \right|_{P=1} = -\frac{1}{1 \cdot \ln 2} \cong -1,44 \text{ h / bactéria.} \quad (4.25)$$

Nos itens b) e c) do Exercício 1, orientou-se para a criação do mesmo gráfico, porém com controle deslizante para a população inicial A variando de 10.000 a 100.000 bactérias. O gráfico obtido está ilustrado na Figura 4.11, com o acréscimo de uma reta tangente em $P=100$ bactérias, a fim de ilustrar o próximo item.

Figura 4.11 – Curva $t(P)$, com controle deslizante para a população inicial A e reta tangente em $P = 100$ bactérias.



Fonte: gráfico gerado pelo autor, com uso do *software* GeoGebra.

No item d), pediu-se, primeiramente, que os alunos obtivessem a equação de uma reta tangente em $P = 100$ bactérias com duas populações iniciais distintas, $A = 10\,000$ e $A = 50\,000$ bactérias. Perguntou-se, ainda, o que significavam as inclinações dessas retas. No ponto $(100 ; 6,64)$, a taxa de variação é dada por

$$\left. \frac{dt}{dP} \right|_{P=100} = -\frac{1}{100 \cdot \ln 2} \cong -1,44 \cdot 10^{-2} \text{ h / bactéria.} \quad (4.26)$$

Assim, para uma população inicial de 10.000 bactérias, a equação da reta tangente à curva nesse ponto é

$$t(P) = \left. \frac{dt}{dP} \right|_{P=100} \cdot (P - 100) + 6,64 \Leftrightarrow t(P) = -0,0144P + 8,08. \quad (4.27)$$

Já para uma população inicial de 50.000 bactérias, vem

$$t(P) = -\frac{\ln\left(\frac{P}{50\,000}\right)}{\ln 2} \Leftrightarrow \frac{dx}{dP} = -\frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{P}{50\,000}\right)} \cdot \frac{1}{50\,000} = -\frac{1}{P \ln 2}. \quad (4.28)$$

Esperava-se, nesta etapa do exercício, que os alunos fossem capazes de perceber que a derivada não era influenciada pela população inicial de bactérias. De maneira análoga, a taxa de variação no ponto (100 ; 8,97) se mantém, e é dada por

$$\left. \frac{dx}{dP} \right|_{P=100} = -\frac{1}{100 \cdot \ln 2} \cong -1,44 \cdot 10^{-2} \text{ h / bactéria.} \quad (4.29)$$

Assim, para uma população inicial de 50.000 bactérias, a equação da reta tangente à curva nesse ponto é

$$t(P) = \left. \frac{dt}{dP} \right|_{P=100} \cdot (P - 100) + 8,97 \Leftrightarrow t(P) = -0,0144P + 10,41. \quad (4.30)$$

O objetivo, neste momento, era que os alunos comparassem as duas curvas $t(P)$ por meio do controle deslizante, e verificassem que estas se deslocavam verticalmente para cima conforme o aumento da população de bactérias.

No Exercício 2, requisitou-se o uso das planilhas eletrônicas construídas no Exercício 2, item b), da Atividade 2. Pediu-se, no item b), que os alunos utilizassem suas calculadoras para a estimativa dos subitens I, II e III, em conjunto das planilhas para confirmar os resultados. Para a resolução destes subitens, bastava a manipulação algébrica das funções obtidas para a quantidade acumulada Q nas três situações distintas propostas na Atividade 2.

No subitem I, perguntou-se qual seria o dinheiro acumulado após 4 anos de rendimento a uma taxa de 0,8% ao mês, sem depósitos mensais, com capital inicial de R\$700,00. Para tal estimativa, os educandos deveriam utilizar a Equação (4.4). Abaixo, reproduzimos o procedimento algébrico esperado por parte dos alunos neste subitem:

$$t = 4 \cdot 12 = 48 \text{ meses, tal que}$$

$$Q(t) = Q_0 \cdot (1+r)^t \Rightarrow Q(48) = 700 \cdot (1+0,008)^{48} = 700 \cdot (1,008)^{48} \cong \text{R\$1.026,13.} \quad (4.31)$$

Já no subitem II, pediu-se que os alunos estimassem quanto dinheiro eles deveriam depositar por mês, com o restante rendendo a uma taxa de 0,8%, para que, depois de formados, pudessem comprar um imóvel de R\$1.500.000,00 aos 65 anos, partindo-se do capital inicial obtido no subitem anterior. Esperava-se a seguinte resolução, utilizando-se a Equação (4.8):

$$t = (65 - 22) \cdot 12 = 516 \text{ meses, tal que}$$

$$Q(t) = \left(C + \frac{k}{r} \right) \cdot (1+r)^t - \frac{k}{r}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 1\,500\,000 = \left(1\,026,13 + \frac{k}{0,008}\right) \cdot (1 + 0,008)^{516} - \frac{k}{0,008} \\
&\Leftrightarrow 1\,500\,000 + \frac{k}{0,008} = 1\,026,13 \cdot (1,008)^{516} + \frac{k}{0,008} \cdot (1,008)^{516} \\
&\Leftrightarrow \frac{k}{0,008} - \frac{k}{0,008} \cdot (1,008)^{516} = 1\,026,13 \cdot (1,008)^{516} - 1\,500\,000 \\
&\Leftrightarrow k \cdot \left(\frac{1 - (1,008)^{516}}{0,008}\right) = 1\,026,13 \cdot (1,008)^{516} - 1\,500\,000 \\
&\Leftrightarrow k \cong \text{R\$}191,51 \text{ por mês.}
\end{aligned}
\tag{4.32}$$

Para o subitem III, os alunos optariam, numa situação hipotética, pela não aquisição do imóvel do subitem II, guardando para si o dinheiro. Assim, deveriam prever o valor máximo que poderiam sacar, com taxa de 0,8% ao mês, até os 80 anos de idade, para que deixassem uma herança de R\$200.000,00 à família, partindo-se de capital inicial de R\$1.500.000,00. Recorrendo-se à Equação (4.11), a resolução esperada foi:

$$\begin{aligned}
&t = (80 - 65) \cdot 12 = 180 \text{ meses, tal que} \\
&Q(t) = \left(C - \frac{w}{r}\right) \cdot (1 + r)^t + \frac{w}{r} \\
&\Rightarrow 200\,000 = \left(1\,500\,000 - \frac{w}{0,008}\right) \cdot (1 + 0,008)^{180} + \frac{w}{0,008} \\
&\Leftrightarrow 200\,000 - \frac{w}{0,008} = 1\,500\,000 \cdot (1,008)^{180} - \frac{w}{0,008} \cdot (1,008)^{180} \\
&\Leftrightarrow -\frac{w}{0,008} + \frac{w}{0,008} \cdot (1,008)^{180} = 1\,500\,000 \cdot (1,008)^{180} - 200\,000 \\
&\Leftrightarrow w \cdot \left(\frac{(1,008)^{180} - 1}{0,008}\right) = 1\,500\,000 \cdot (1,008)^{180} - 200\,000 \\
&\Leftrightarrow w \cong \text{R\$}15.253,47 \text{ por mês, no máximo.}
\end{aligned}
\tag{4.33}$$

Esperava-se que, além dos valores obtidos na calculadora, os estudantes confrontassem os resultados com a planilha eletrônica. A Figura 4.12 mostra um exemplo de estimativa para os subitens I e II, utilizando a planilha construída anteriormente.

Figura 4.12 – Estimativas para os subitens I e II do item b) do Exercício 2 da Atividade 4, utilizando a planilha eletrônica elaborada para a Atividade 2.

Exercício 2.a)					$Q(t) = Q_0 \cdot (1+r)^t$
Capital inicial	Taxa de juros	Tempo de graduação (anos)	Tempo (meses)	Valor da poupança (reais)	
Q_0	r	t'	t	Q	
R\$ 700,00	0,80%	4	48	R\$ 1.026,13	

Exercício 2.b)						
Capital inicial	Taxa de juros	Depósito mensal	Idade de início da graduação (anos)	Tempo (anos)	Tempo (meses)	Valor da poupança (reais)
Q_0	r	k	t'	t'	t	Q
R\$ 1.026,13	0,80%	R\$ 191,52	16	45	540	R\$ 1.821.239,48
			17	44	528	R\$ 1.652.929,56
			18	43	516	R\$ 1.500.063,08
			19	42	504	R\$ 1.361.090,89
			20	41	492	R\$ 1.234.791,42
			21	40	480	R\$ 1.120.009,07
			22	39	468	R\$ 1.015.693,59
			23	38	456	R\$ 920.890,53
			24	37	444	R\$ 834.732,46
			25	36	432	R\$ 756.431,05
			26	35	420	R\$ 685.269,86
			27	34	408	R\$ 620.597,78
			28	33	396	R\$ 561.823,08
			29	32	384	R\$ 508.407,98
			30	31	372	R\$ 459.863,74

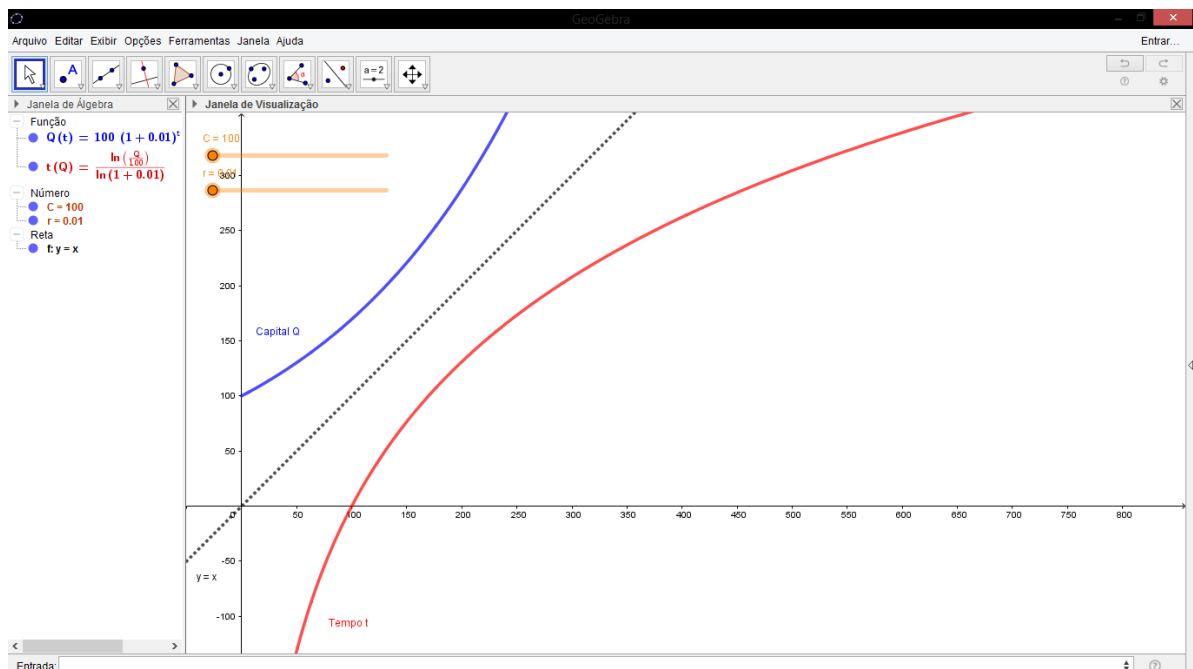
$$Q(t) = \left(Q_0 + \frac{k}{r} \right) \cdot (1+r)^t - \frac{k}{r}$$

Fonte: planilha eletrônica gerada pelo autor, com uso do *software* LibreOffice Calc.

Nos Exercícios 3 e 4, utilizou-se novamente o GeoGebra para a construção dos gráficos das funções inversas obtidas na Atividade 3. Os principais objetivos eram que os alunos observassem o comportamento das curvas, visualizassem a simetria dos mesmos em torno de $y = x$, e realizassem previsões e estimativas.

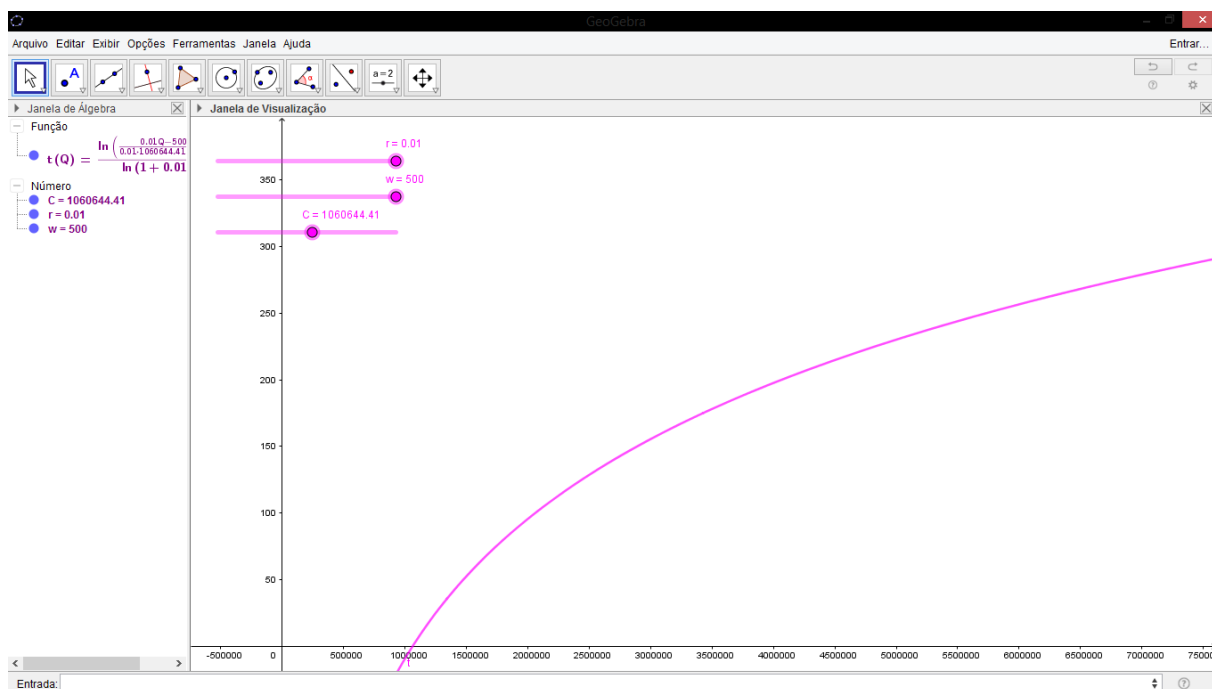
As Figuras 4.13 e 4.14 mostram os gráficos obtidos nos Exercícios 3 e 4, respectivamente.

Figura 4.13 – Curvas $Q(t)$, sua inversa $t(Q)$, e $y = x$, com controles deslizantes para o capital inicial C e a taxa de juros r %, obtidas no Exercício 3.



Fonte: gráfico gerado pelo autor, com uso do *software* GeoGebra.

Figura 4.14 – Curva $t(Q)$ obtida no Exercício 4, com controles deslizantes para o capital inicial C , o depósito ou saque fixo k , e a taxa de juros r %.



Fonte: gráfico gerado pelo autor, com uso do *software* GeoGebra.

Os educandos conseguiram, de maneira geral, compreender os exercícios propostos e enfrentaram menos dificuldades do que na Atividade 2, em que tiveram o primeiro contato com o GeoGebra. Observou-se que a maturidade em lidar com o Cálculo também se mostrou maior entre os estudantes para a realização dos problemas, dado que esta atividade foi realizada em abril, dois meses após o início do ano letivo.

De forma análoga às atividades anteriores, o último item tratou da avaliação das atividades propostas, utilizando a escala de Likert.

4.4.5 Atividade 5

A Atividade 5 foi aplicada em 30 de maio de 2017, em sala de aula, e visou à introdução à Cinética Química, ao uso do Cálculo para a interpretação química, à construção de modelos matemáticos que se aplicassem à Cinética Química, e ao uso destes modelos para a previsão e inferência de dados. Esta atividade encerrou o ciclo de atividades envolvendo funções exponenciais e logarítmicas, e buscou, em suma, conectar por definitivo todos os conceitos até aqui abordados e aplicá-los ao contexto do Curso de Química, trazendo aos alunos a oportunidade de compreender as aplicações destas funções na formação de um profissional da área. Nesse contexto, o tema escolhido foi a Cinética Química, assunto pelo

qual muitos alunos demonstram interesse no Ensino Médio, porém pouco explorado devido à falta de recursos matemáticos e experimentais.

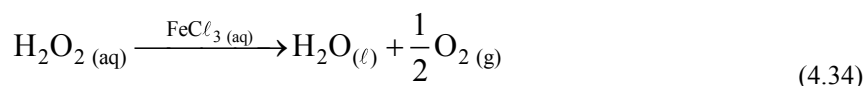
Esta atividade foi preparada para a apresentação em *Datashow*, em forma expositiva, com pausas para a resolução de exercícios na lousa, similarmente às Atividades 1 e 3. Estimulou-se, no entanto, que os estudantes tentassem ao máximo chegar às respostas independentemente do professor, em duplas e utilizando as ferramentas adquiridas nas últimas quatro atividades. Apresentaram-se aos estudantes alguns conceitos importantes à Cinética Química, listados a seguir:

- velocidade média de reação;
- velocidade instantânea de reação;
- noções de equilíbrio químico;
- leis de velocidade;
- leis de velocidade integradas;

dos quais demonstraram-se as fórmulas de duas leis integradas: a lei integrada de primeira ordem do tipo $A \rightarrow B$, obtida por integração imediata, e a lei integrada de segunda ordem do tipo $A + B \rightarrow P$, obtida por integração pelo Método das Frações Parciais (ver subseção 3.5.5).

O objetivo desta introdução não foi o de grande aprofundamento nos conceitos – o qual também não seria possível com o tempo necessário ao desenvolvimento da atividade –, mas da correlação dos mesmos com o Cálculo Diferencial e Integral e as funções exponenciais e logarítmicas.

No Exercício 1, os alunos foram apresentados à reação de decomposição da água oxigenada, produzindo água líquida e oxigênio gasoso na presença de catalisador, conforme a Equação (4.34):



Neste exercício, os estudantes se viram numa situação hipotética de Iniciação Científica, em que teriam que investigar a Cinética Química desta reação. Para tal, forneceu-se um gráfico (ver Apêndice F) que monitorava a concentração de água oxigenada, em mol/L, com o passar do tempo, em segundos.

No item a), pediu-se a velocidade média aproximada da reação de decomposição da água oxigenada no intervalo de 500 a 1.500 segundos, explicando brevemente o significado químico deste valor. Esperava-se que os alunos utilizassem o conceito de velocidade média de

reação para obter a resposta, conforme o raciocínio a seguir, tomando-se o devido cuidado com a correção de sinal convencionada na Cinética Química:

$$v_{\text{méd}} = -\frac{\Delta[\text{H}_2\text{O}_2(\text{aq})]}{\Delta t} = -\left(\frac{0,1200 - 0,0200}{500 - 1\,500}\right) = 1,000 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1} \quad (4.35)$$

Esperava-se que os alunos interpretassem que esta velocidade, compreendida no intervalo de tempo de 500 a 1.500 s, representava um valor médio ao longo deste espaço de tempo.

No item b), exigiu-se a obtenção da equação de uma reta secante aos pontos (500 ; 0,1200) e (1 500 ; 0,0200), bastando para isso a escolha de um dos pontos e o uso da velocidade média, calculada no item a), como coeficiente angular da mesma, acrescida do sinal negativo:

$$\begin{aligned} [\text{H}_2\text{O}_2(\text{aq})] - [\text{H}_2\text{O}_2(\text{aq})]_0 &= v_{\text{méd}} \cdot (t - t_0) \\ [\text{H}_2\text{O}_2(\text{aq})] - 0,0200 &= -1,000 \cdot 10^{-4} \cdot (t - 1\,500) \\ [\text{H}_2\text{O}_2(\text{aq})] &= -1,000 \cdot 10^{-4} \cdot t + 0,1700 \end{aligned} \quad (4.36)$$

A interpretação química esperada para os coeficientes angular e linear eram, respectivamente, a velocidade média de reação no intervalo de 500 a 1.500 segundos, e a concentração de água oxigenada aos 500 segundos.

Para o item c), demandou-se o cálculo da velocidade instantânea da reação de decomposição da água oxigenada no tempo de 950 s, explicando brevemente o significado químico deste valor. Esperava-se que os estudantes utilizassem a inclinação da reta tangente à curva no ponto (950 ; 0,0500) para a obtenção do resultado, conforme mostramos a seguir:

$$v = -\frac{0,1000 - 0,0500}{500 - 950} \cong 1,111 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1} \quad (4.37)$$

Analogamente, no item d) pediu-se a equação da reta tangente à curva no ponto (950 ; 0,0500). Para isso, os alunos deveriam proceder de maneira similar ao item b), utilizando, porém, os valores da reta tangente:

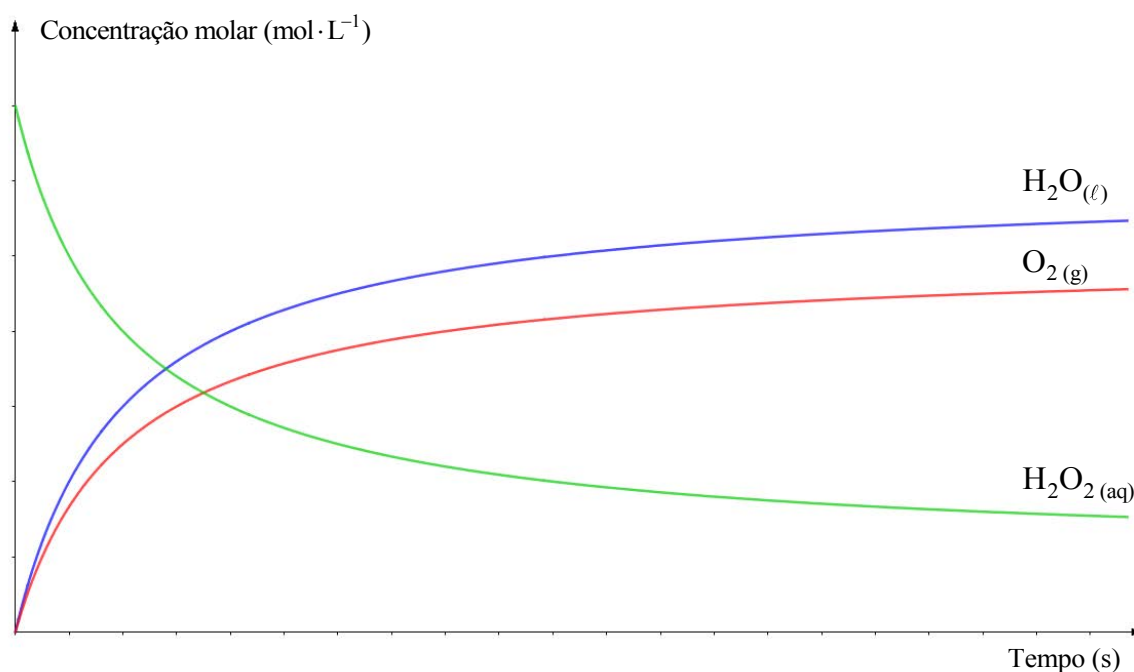
$$\begin{aligned} [\text{H}_2\text{O}_2(\text{aq})] - [\text{H}_2\text{O}_2(\text{aq})]_0 &= v \cdot (t - t_0) \\ [\text{H}_2\text{O}_2(\text{aq})] - 0,0500 &= -1,111 \cdot 10^{-4} \cdot (t - 950) \\ [\text{H}_2\text{O}_2(\text{aq})] &= -1,111 \cdot 10^{-4} \cdot t + 0,1555 \end{aligned} \quad (4.38)$$

Já no item e), era requerida a resposta se a velocidade de reação diminuía, aumentava, ou permanecia constante. Para responder a essa questão, os estudantes precisaram analisar a mudança da inclinação da reta tangente ao longo do gráfico, verificando a diminuição da sua inclinação e, conseqüentemente, da velocidade de reação. Quimicamente, esperava-se também que eles interpretassem essa diminuição como: 1) o consumo de reagente à medida que a reação ocorria, e 2) a tendência ao equilíbrio no infinito.

O item f) foi concebido como questão auxiliar, a título de sanar a curiosidade dos estudantes a respeito da Química. Neste item, pediu-se um esboço qualitativo da curva para o caso da concentração de catalisador ser reduzida à metade. Explicou-se que, nessa situação, o gráfico sofreria um “achatamento”, de maneira que as velocidades instantâneas e, portanto, as inclinações de cada reta tangente em todos os pontos da curva, seriam proporcionalmente reduzidas à metade.

Por fim, no item g), pediu-se um esboço qualitativo das curvas de todas as espécies químicas presentes, no mesmo plano cartesiano: $[\text{H}_2\text{O}_{2(\text{aq})}]$ (mol/L) *versus* t (s), $[\text{H}_2\text{O}_{(\ell)}]$ *versus* t (s) (mol/L), e $[\text{O}_{2(\text{g})}]$ (mol/L) *versus* t (s). O objetivo deste item era o de ilustrar o aspecto gráfico de uma reação química atingindo o equilíbrio, e não o de quantificar exatamente cada espécie química do exercício. A Figura 4.15 mostra um exemplo de gráfico qualitativo para a resolução deste item.

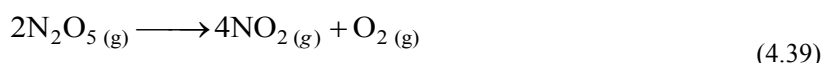
Figura 4.15 – Esboço de curva qualitativa para a reação de decomposição de água oxigenada.



Fonte: gráfico gerado pelo autor, com uso do *software* GeoGebra.

Ainda no item g), perguntou-se o que acontecia com cada espécie quando o tempo tendia ao infinito. Esperava-se a resposta de que as espécies atingiriam o equilíbrio. Além disso, questionou-se o significado químico das interseções das curvas. A resposta desejada era a que indicasse que as interseções representavam os tempos em que as concentrações de cada espécie se igualavam entre si.

No Exercício 2, exploram-se conceitos químicos elementares nos itens iniciais, e conceitos mais específicos da Cinética Química nos itens subsequentes. A questão baseia-se na reação de decomposição do pentóxido de dinitrogênio, com liberação de oxigênio, ambos gasosos. No item a), pediu-se a equação química balanceada, mostrada a seguir:



No item b), perguntou-se a constante de velocidade k , e sua unidade, sabendo-se que o tempo estava cronometrado em segundos. Para esta resolução, os alunos necessitaram da lei de velocidade fornecida no exercício, dada pela Equação (4.41):

$$-\frac{d[\text{N}_2\text{O}_5(\text{g})]}{dt} = 0,0005[\text{N}_2\text{O}_5(\text{g})] \quad (4.40)$$

Conforme a equação, os alunos observaram que $k = 0,0005 \text{ s}^{-1}$, por análise dimensional das unidades.

Para o item c), exigiu-se a obtenção da concentração de $\text{N}_2\text{O}_5(\text{g})$ após t segundos. Nesta etapa do exercício, fez-se necessário o uso do Cálculo Diferencial e Integral para a obtenção da lei integrada de velocidade. O raciocínio desenvolvido pelos alunos era esperado partindo-se da Equação (4.40), como se segue:

$$\begin{aligned} -\frac{d[\text{N}_2\text{O}_5(\text{g})]}{dt} &= 0,0005[\text{N}_2\text{O}_5(\text{g})] \\ \Leftrightarrow \frac{d[\text{N}_2\text{O}_5(\text{g})]}{[\text{N}_2\text{O}_5(\text{g})]} &= -0,0005 dt \\ \Leftrightarrow \int_{[\text{N}_2\text{O}_5(\text{g})]_0}^{[\text{N}_2\text{O}_5(\text{g})]} \frac{1}{[\text{N}_2\text{O}_5(\text{g})]} d[\text{N}_2\text{O}_5(\text{g})] &= -\int_0^t 0,0005 dt \\ \Leftrightarrow \ln[\text{N}_2\text{O}_5(\text{g})] - \ln[\text{N}_2\text{O}_5(\text{g})]_0 &= -0,0005t \\ \Leftrightarrow \ln \frac{[\text{N}_2\text{O}_5(\text{g})]}{[\text{N}_2\text{O}_5(\text{g})]_0} &= -0,0005t \Leftrightarrow \frac{[\text{N}_2\text{O}_5(\text{g})]}{[\text{N}_2\text{O}_5(\text{g})]_0} = e^{-0,0005t}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

que nos fornece, por fim, a concentração a qualquer tempo, conforme pedido pelo item c):

$$[N_2O_5(g)] = [N_2O_5(g)]_0 e^{-0,0005t}. \quad (4.42)$$

Os itens d) a f) utilizaram a função obtida no item c) para a previsão de tempos específicos para diferentes concentrações de $N_2O_5(g)$. Enquanto o item d) questionou o tempo necessário para o consumo de 75% do $N_2O_5(g)$, o item e) demandou o tempo de meia-vida do $N_2O_5(g)$. Entende-se por tempo de meia-vida o tempo necessário para que 50% do reagente seja consumido (ver seção 3.5). Tratam-se, então, de problemas similares. Já no item f) perguntou-se em quanto tempo o $N_2O_5(g)$ seria extinto. Mostramos, a seguir, os respectivos resultados esperados:

$$\begin{aligned} [N_2O_5(g)] &= [N_2O_5(g)]_0 \cdot e^{-0,0005t} \\ \Rightarrow 0,25 \cdot [N_2O_5(g)]_0 &= [N_2O_5(g)]_0 \cdot e^{-0,0005t} \\ \Leftrightarrow 0,25 &= e^{-0,0005t} \Leftrightarrow t \cong 2\,772,59\text{ s} \cong 46\text{ min}13\text{s para o item d), e} \\ 0,50 \cdot [N_2O_5(g)]_0 &= [N_2O_5(g)]_0 \cdot e^{-0,0005t_{1/2}} \\ \Leftrightarrow 0,50 &= e^{-0,0005t_{1/2}} \Leftrightarrow t_{1/2} \cong 1\,386,29\text{ s} \cong 23\text{min}06\text{s para o item e).} \end{aligned} \quad (4.43)$$

O item f) não está definido nem matematicamente nem quimicamente, uma vez que, do ponto de vista matemático, a função exponencial não assume valor nulo, e, do ponto de vista químico, sempre haverá pelo menos uma molécula de $N_2O_5(g)$ no sistema considerado.

O Exercício 3, por fim, reproduziu a obtenção de uma lei integrada para uma reação de segunda ordem, do tipo $A \rightarrow P$, com lei de velocidade $v = k \cdot [A]^2$.

No item a), pediu-se a lei integrada para esta função, obtida por integração imediata, como demonstramos na subseção 3.5.5, e é dada pela Equação (3.31).

Para o item b), pediu-se uma fórmula para o tempo de meia-vida de um composto que seguisse este mecanismo de reação. O raciocínio esperado dos alunos foi demonstrado na subseção 3.5.6, na obtenção da Equação (3.49).

O último item tratou da avaliação das atividades propostas por meio da escala de Likert.

Ao longo das cinco atividades realizadas neste estudo, percebeu-se grande interesse por parte da turma na Atividade 5, mais ainda do que nas Atividades 2 e 4, desenvolvidas no

LDI com o auxílio do GeoGebra. Esse era um resultado relativamente previsível, uma vez que esta foi uma das poucas vezes que o Cálculo Diferencial e Integral se aproximou tanto do contexto do Curso de Química, fornecendo uma ferramenta útil – e necessária –, aos olhos dos estudantes para as disciplinas futuras que viriam a cursar.

4.5 *Análise a Posteriori* e Validação

Como destacam Artigue (1988) e Machado (2008), a etapa que segue a Experimentação é a de *Análise a Posteriori* e Validação, e esta representa a confrontação dos objetivos do trabalho com os resultados da Experimentação. A *Análise a Posteriori*

(...) se apoia no conjunto de dados recolhidos durante a experimentação: observações realizadas sobre as sessões de ensino e as produções dos alunos em sala de aula ou fora dela. Esses dados são, às vezes, completados por dados obtidos pela utilização de metodologias externas: questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, realizadas em diversos momentos do ensino (ALMOULOUD e COUTINHO, 2008, p. 68, *grifo nosso*).

Além disso, exploram-se os dados coletados que, por sua vez, “contribuem para a melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições da transmissão do saber em jogo” (ALMOULOUD e COUTINHO, 2008, p. 68).

A Validação ocorre concomitantemente à *Análise a Posteriori*, em que se inter-relacionam as observações com os objetivos estipulados na *Análise a Priori* e verifica-se a reprodutibilidade da experiência. Segundo Araújo e Igliori (2009),

A metodologia de Engenharia Didática se caracteriza também, em relação a outros tipos de pesquisas norteadas pelas experimentações em classe, pelo registro no qual ela se situa e os modos de validação que lhe são associados. De fato, as pesquisas que recorrem às experimentações em classe se situam o mais frequente numa abordagem comparativa com validação externa baseada na comparação estatística de procedimentos de grupos experimentais e de grupos testemunha. Esse paradigma não é o da Engenharia Didática, que se situa, no oposto, no registro dos estudos de caso que a validação é essencialmente interna, fundamentada sobre a confrontação entre *análise a priori* e *análise a posteriori*. (ARAÚJO e IGLIORI, 2009, p. 136, *grifo nosso*).

Assim, nessa seção do trabalho descreveremos as conclusões imediatas oriundas das observações anteriores durante cada atividade e, em seguida, apresentaremos as respostas às entrevistas e aos questionários tomados ao fim destas, em formato de escala de Likert. Nesta escala, os estudantes responderam a um conjunto de cinco questões por atividade – de a) até e) –, cada qual avaliando um aspecto da mesma, variando de 1 a 5, sendo 1 “nenhum pouco” e

5 “com certeza”. Para as questões deixadas em branco, considerou-se como “Não Respondeu” (NR). No final, somam-se os escores acumulados para cada questão, permitindo a tomada de conclusões baseando-se nas tendências de resposta. Neste trabalho, as questões a) a d) avaliaram aspectos pertinentes a cada atividade, e a questão e) avaliou o desempenho e impacto geral da atividade para o estudante. Os Apêndices B a F contêm as questões das Atividades 1 a 5, respectivamente.

Num último momento, comentamos brevemente sobre a experiência didática na sua totalidade, perpassando pelas etapas anteriores.

4.5.1 Análise da Atividade 1

Com a aplicação da Atividade 1, percebeu-se, de início, relativo interesse da turma no conteúdo a ser explorado, fugindo da abordagem mais tradicional da Matemática. Nas entrevistas realizadas neste estudo, a Questão 02 tratou da Atividade 1 em particular, questionando o que os alunos mais gostaram e o que menos gostaram na mesma. Algumas das respostas obtidas foram:

- **Respondente 2**

Eu gostei da forma como foram apresentadas as aplicações de funções exponenciais no cotidiano (...)

- **Respondente 3**

(...) Gostei do fato da aula ter deixado uma noção de como se organizar financeiramente de acordo com os juros cobrados pelo banco e rendimento da poupança.

- **Respondente 4**

Gostei da aplicação de funções exponenciais em um modo prático, possuindo uma abrangência que alcança desde o cotidiano, com o acúmulo de capital por juros compostos no banco, até uma prática laboratorial, com o crescimento de uma população de bactérias em determinado tempo. No entanto, não gostei da falta de complexidade dos cálculos, acredito que poderiam possuir uma gama maior de dificuldade em suas análises.

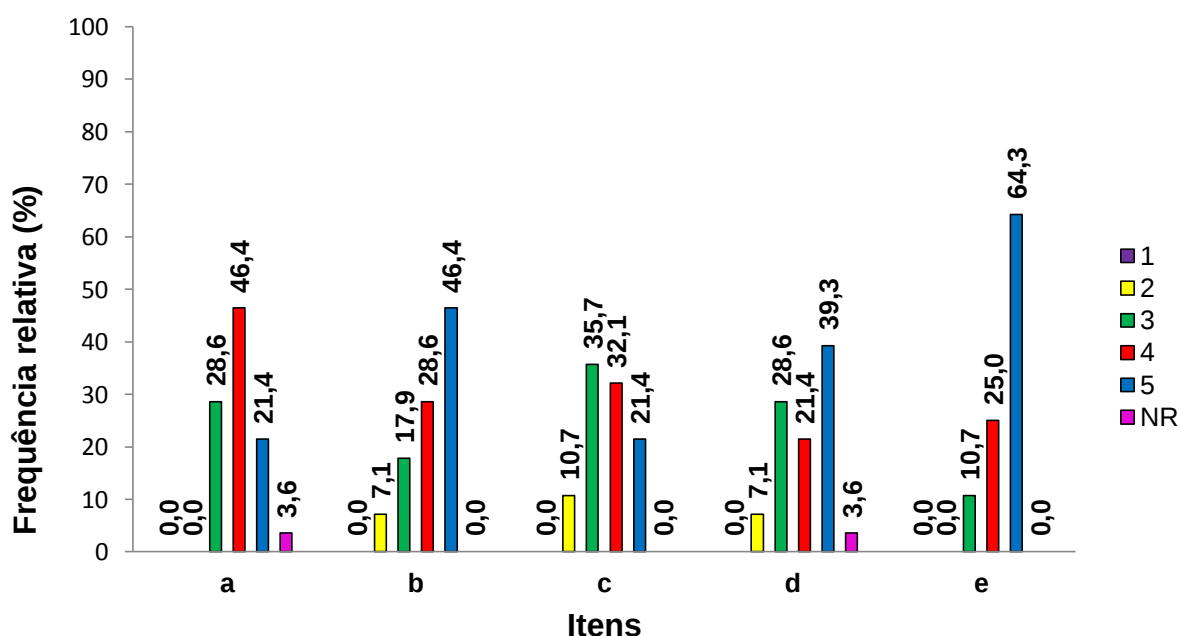
Pode-se dizer que, de maneira geral, a atividade agradou aos estudantes, apesar do relato da falta de complexidade dos problemas apresentados. Todavia, a maior parte dos

alunos enfrentou dificuldades com o desenvolvimento da soma dos n termos de uma PG (ver subseção 4.4.1), o que contrasta com a opinião do **Respondente 4**. Dessa forma, supõe-se que este estudante, em particular, tenha maior facilidade com o conteúdo de Matemática que os demais.

A fim de complementar as entrevistas exploratórias, também utilizamos os resultados para a escala de Likert aplicados à Atividade 1. Nesta avaliação, obtivemos 28 respostas ao todo, com somatório de escores podendo variar de 140 a 700, em que 140 representa a insatisfação total com a atividade, e 700 representa o extremo oposto. O somatório dos escores para a Atividade 1 foi de 558, representando um percentual de satisfação de 74,6%.

A Figura 4.16 mostra as porcentagens relativas de resposta dos itens a) a e) da Atividade 1.

Figura 4.16 – Porcentagens relativas de resposta aos itens a) a e), avaliados de 1 a 5, ou sem resposta (NR), para a Atividade 1.



Fonte: elaborado pelo autor.

A baixa frequência relativa de respostas 1 e 2 indica que, de maneira geral, a atividade não foi mal avaliada, ou seja, houve boa primeira impressão dos estudantes para com a aula. O item a) questionou o entendimento acerca de modelagem matemática, assunto introduzido pela primeira vez aos alunos. A quantidade de respostas positivas (números 4 e 5), um total de 67,8%, reflete o cumprimento dos objetivos com sucesso. Enquanto o item b) avaliou a compreensão das aplicações da função exponencial, com 46,4% de respostas 5, o

item c) verificou a identificação e previsão do comportamento exponencial numa situação cotidiana, com 35,7% e 32,1% de respostas 3 e 4, respectivamente. Este é um indicativo de que muitos estudantes entenderam onde se inserem as funções exponenciais no cotidiano, porém não se sentem confiantes para realizar previsões e obter os modelos matemáticos por conta própria. Na sequência, o item d) questionou acerca da caracterização da função exponencial, realizada no fim da sessão de ensino. A turma se mostrou dividida entre as respostas 3, 4 e 5, com porcentagens respectivas de 28,6, 21,4 e 39,3%. Contudo, as respostas positivas 4 e 5, somando 60,7%, implicam mais da metade da turma avaliando boa compreensão do tema. Por fim, no item e) perguntou-se acerca da contribuição da atividade para os estudantes, com 64,3% de respostas 5, e 25,0% de respostas 4. Assim, pensamos ser seguro afirmar que a Atividade 1 cumpriu seus objetivos frente às avaliações deste último item.

4.5.2 Análise da Atividade 2

Na Atividade 2, a turma mostrou-se entusiasmada com o uso do computador e do GeoGebra. Ao longo das entrevistas, a Questão 03 abordou esta atividade por meio de questionamento similar à Questão 02: o que os alunos mais gostaram e o que menos gostaram na atividade. Algumas das respostas obtidas foram:

- **Respondente 3**

Gostei de aprender a plotar gráficos em programas, porém o programa utilizado (GeoGebra) deixou a desejar, visto que apresentava alguns defeitos.

- **Respondente 5**

O que eu mais gostei foi de aprender a aplicar essa teoria em softwares que eu desconhecia, e que nesse momento estão sendo muito importantes para o meu aprendizado na graduação.

- **Respondente 6**

A forma como foi abordado o assunto, de uma maneira mais descontraída e com uma linguagem mais facilmente entendida. Não há nada que não tenha gostado.

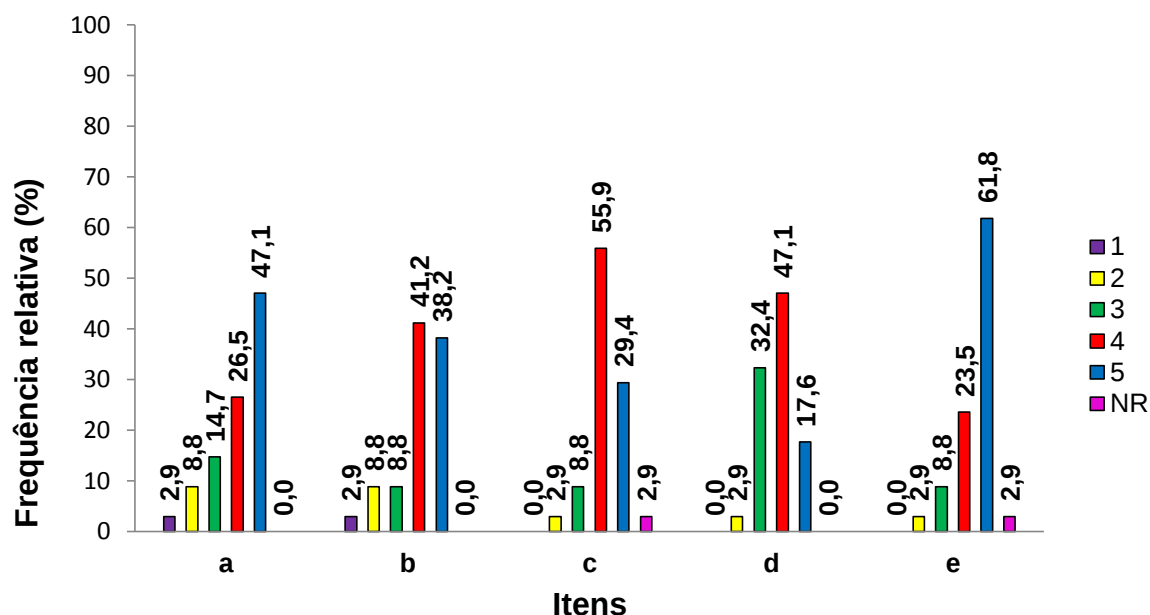
Pelas afirmações, é perceptível como o uso de recursos tecnológicos é importante para a aprendizagem dos estudantes. A plotagem de gráficos, assim como a sua visualização, e a percepção das funções no cotidiano se mostraram ferramentas poderosas nas mãos do

educador. Um problema colocado pelo **Respondente 3** foi a dificuldade de manusear o GeoGebra por problemas de compatibilidade de versão com os computadores disponíveis.

Na escala de Likert aplicada à Atividade 2, coletaram-se 34 respostas, com somatório de escores podendo variar de 170 a 850, em que, novamente, 170 representa a insatisfação total com a atividade, e 850 representa o caso contrário. O somatório dos escores para a Atividade 2 foi de 689, representando um percentual de satisfação 76,3%, 1,70% maior do que na primeira atividade. Pode-se atribuir este aumento ao uso do GeoGebra, ao menos parcialmente, por ser um *software* inédito para os estudantes do curso.

A Figura 4.17 mostra as porcentagens relativas de resposta dos itens a) a e) da Atividade 2.

Figura 4.17 – Porcentagens relativas de resposta aos itens a) a e), avaliados de 1 a 5, ou sem resposta (NR), para a Atividade 2.



Fonte: elaborado pelo autor.

Observou-se um aumento percentual de 1,47% na média das respostas 1 e 2 relativamente à Atividade 1, o que indica a possibilidade de descontentamento com os problemas de execução do GeoGebra. O item a) avaliou a compreensão das ferramentas básicas do GeoGebra. Houve um número considerável de respostas 4 e 5, somando 73,6%. Isso pode caracterizar que, apesar dos problemas sinalizados pelos alunos, os objetivos foram cumpridos com a maior parte da turma. O item b) perguntou acerca da plotagem de gráficos de funções com o auxílio do GeoGebra, totalizando 79,4% de respostas 4 e 5. Já o item c)

avaliou o entendimento da construção de planilhas eletrônicas por meio do LibreOffice Calc, com 85,3% de respostas positivas, o que pode argumentar favoravelmente à maior facilidade na manipulação de planilhas do que no uso de *softwares* gráficos. Pode-se inferir este resultado do fato dos estudantes estarem cursando a disciplina de Introdução à Computação no semestre em que esta atividade foi aplicada, cuja ementa previa aulas práticas envolvendo o LibreOffice Calc. O item d) averiguou a capacidade de realizar estimativas com o auxílio de planilhas eletrônicas. Neste item, houve maior incidência de respostas neutras (número 3), um total de 32,4%, o que indica falta de segurança de parte considerável da turma na previsão de dados. Por último, o item e) avaliou a contribuição da atividade para os estudantes, analogamente à Atividade 1. Houve 85,3% de respostas positivas dos estudantes, o que nos leva à afirmação de que a Atividade 2 também cumpriu seus objetivos propostos.

4.5.3 Análise da Atividade 3

Nas entrevistas exploratórias, a Questão 04 avaliou o que os alunos mais gostaram e o que menos gostaram nesta atividade. Obtivemos algumas respostas que reproduzimos a seguir:

- **Respondente 1**

O que mais gostei foi do aprofundamento sobre o tema de Cálculo no dia-a-dia de uma maneira diferente do que foi visto anteriormente na primeira aula.

- **Respondente 3**

Contribuiu ainda mais para o entendimento sobre juros e rendimento bancário. Não tenho nenhuma crítica.

- **Respondente 4**

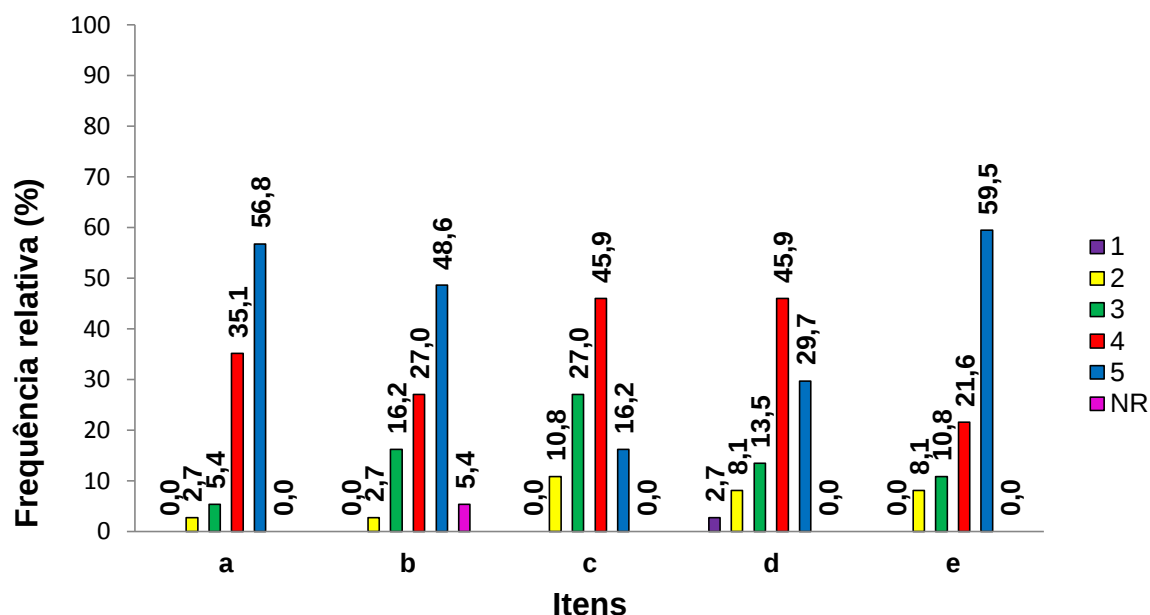
Gostei da visibilidade de como se podem utilizar funções logarítmicas para se analisarem de modo inverso as exponenciais, mas não gostei da dificuldade algébrica dos cálculos, pois em certas partes se tornavam muito manuais.

De acordo com as três respostas, pode-se verificar que, de fato, a Atividade 3 trouxe contribuição adicional aos estudantes, complementando os conceitos de função exponencial com sua inversa, a função logarítmica. O **Respondente 4** alerta para o excesso de cálculos manuais, tornando o procedimento mecânico. Pode-se apreender desta constatação a necessidade de exercícios mais abrangentes e menos repetitivos.

Na escala de Likert aplicada à Atividade 3, coletamos 37 respostas, com somatório de escores podendo variar de 185 a 925, em que, similarmente às outras atividades, 185 representa a insatisfação total com a atividade, e 925 representa o oposto. O somatório dos escores para a Atividade 3 foi de 756, um percentual de satisfação de 77,2%, 0,9% superior ao percentual da segunda atividade. Este aumento pode ser atribuído ao interesse crescente da turma no tema, que, quando complementado com as funções logarítmicas, assume maior abrangência no cotidiano dos alunos enquanto estudantes de Química. Isso provavelmente ocorre porque muitas das grandezas químicas e físicas são definidas logaritmicamente.

A Figura 4.18 mostra as porcentagens relativas de resposta dos itens a) a e) da Atividade 3.

Figura 4.18 – Porcentagens relativas de resposta aos itens a) a e), avaliados de 1 a 5, ou sem resposta (NR), para a Atividade 3.



Fonte: elaborado pelo autor.

Apesar do aumento no percentual de satisfação, também foi observado um aumento percentual de 0,54% na média das respostas 1 e 2 relativamente à Atividade 2. O item a) verificou a definição de logaritmo, sobre a qual 91,9% afirmam ter conhecimento (respostas 4 e 5). O item b) questionou sobre as aplicações das funções logarítmicas, apresentando 75,6% de respostas 4 e 5, número significativamente menor que no item a). Isso é um indicativo de que os alunos sabem calcular logaritmos, mas não sabem aplicá-los sob contextualização. O item c), por sua vez, avaliou a identificação e previsão do comportamento logarítmico numa

situação cotidiana, apresentando um alto índice de respostas neutras (número 3), 27,0% das respostas. Como observado nas Atividades 1 e 2, pode-se afirmar, mais uma vez, que os estudantes não se sentem seguros na estimativa e previsão de dados. No item d) avaliou-se a compreensão acerca da caracterização da função logarítmica. Neste item, houve um número maior de respostas 5, totalizando 29,7% das respostas. Isso corrobora a hipótese de que os educandos compreendem o conteúdo previsto no Ensino Médio para logaritmos e funções logarítmicas, mas não sabem, ao menos em parte, aplicar este conteúdo. A título de exemplo, um aluno, ao ser questionado sobre estas funções, saberia dizer o domínio, a imagem e o aspecto gráfico das mesmas. Contudo, teria dificuldades em compreender a restrição de domínio positivo para decaimento radioativo na Química. Finalmente, o item e) analisou a contribuição da atividade para os estudantes, similarmente às outras. Houve 81,1% de respostas positivas dos educandos, o que nos leva a supor que a Atividade 3 cumpriu seus objetivos propostos. Entretanto, houve queda percentual de 4,2% nas respostas 4 e 5 relativamente à Atividade 2.

4.5.4 Análise da Atividade 4

Para a Atividade 4, a Questão 05 das entrevistas também avaliou o que os alunos mais gostaram e o que menos gostaram nesta atividade. Algumas respostas encontram-se a seguir:

- **Respondente 1**

O que mais gostei do laboratório também foi o aprofundamento sobre o uso de programas de modelagem e como posso me utilizar deles para o uso cotidiano.

- **Respondente 2**

Eu gostei muito de plotar gráficos logarítmicos. Foi algo muito significativo no meu aprendizado, o software (GeoGebra) é muito bom, e não teve nada que não me agradou.

- **Respondente 5**

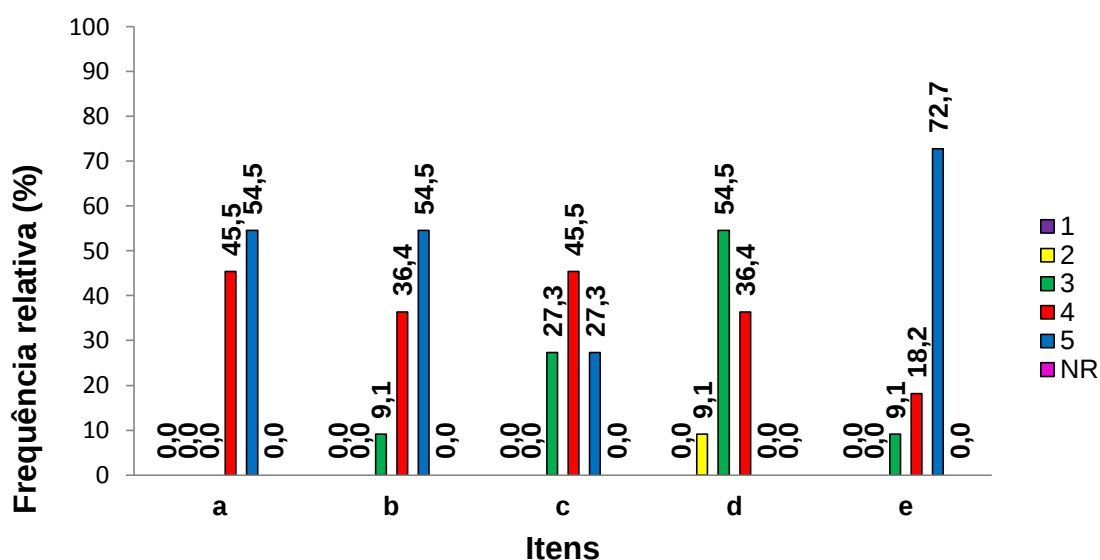
Novamente, o que mais gostei foi aprender a utilizar e aplicar a teoria dessas funções em softwares que ajudam o aluno a ter outra perspectiva e a entender melhor o comportamento desse tipo de função.

Por meio dos relatos, verificam-se, igualmente à Atividade 2, os benefícios do uso de recursos tecnológicos no ensino concedidos aos estudantes. O **Respondente 2** chama a atenção para o quanto a atividade se mostrou relevante para a formação do entrevistado. Isso mostra que, com o funcionamento do GeoGebra e o preparo adequado das aulas em laboratório de informática, a construção e visualização de funções em *softwares* gráficos traz bons diferenciais na formação dos estudantes.

Na escala de Likert aplicada à Atividade 4, coletamos apenas 11 respostas. Acredita-se que parte da turma se ausentou por conta de provas e atividades extracurriculares, concomitantes à semana em que a mesma foi aplicada. Esta atividade teve somatório de escores podendo variar de 55 a 275, em que 55 representa a insatisfação total com a atividade, e 275 representa o outro extremo. O somatório dos escores para a Atividade 4 foi de 230, um percentual de satisfação de 79,5%, 2,30% superior ao percentual da terceira atividade.

A Figura 4.19 mostra as porcentagens relativas de resposta dos itens a) a e) da Atividade 4.

Figura 4.19 – Porcentagens relativas de resposta aos itens a) a e), avaliados de 1 a 5, ou sem resposta (NR), para a Atividade 4.



Fonte: elaborado pelo autor.

É interessante observar a queda percentual de 5,21% na média das respostas negativas (números 1 e 2) relativamente à Atividade 3. Mesmo com o número reduzido de estudantes, pode-se inferir que estavam presentes aqueles que melhor aproveitaram as atividades anteriores, o que nos leva a concluir que a atividade cumpriu seus fins para estes

alunos. O item a) avaliou a compreensão das ferramentas do GeoGebra utilizadas nesta atividade. As respostas 4 e 5 somaram 100% conjuntamente, com porcentagens respectivas de 45,5 e 54,5%, o que configura uma situação bastante favorável para o entendimento e uso do *software* proposto nas Atividades 2 e 4. O item b), similarmente à Atividade 2, verificou a plotagem de gráficos de funções com o auxílio do GeoGebra, totalizando 90,9% de respostas positivas (números 4 e 5), 11,5% superior à Atividade 2, o que nos mostra que houve evolução de uma atividade para a outra. No item c), questionou-se o a capacidade de extração de informação de planilhas eletrônicas por meio do LibreOffice Calc, com aumento significativo de respostas neutras (número 3), totalizando 27,3%. Essa constatação era esperada frente aos resultados das atividades anteriores, em que os estudantes mostraram-se relativamente inseguros na previsão de dados, que envolveram a extração de informação de planilhas eletrônicas. O item d) analisou a capacidade de realizar estimativas com o auxílio de planilhas eletrônicas e gráficos gerados pelo GeoGebra, no qual houve a maior quantidade de respostas 3, 54,5%, o que corrobora a última conclusão. Já o item e) avaliou a contribuição da atividade para os estudantes, analogamente às anteriores. Com 72,7% de respostas 5 dos estudantes, permite-se inferir que a Atividade 4 cumpriu sua proposta didática.

4.5.5 Análise da Atividade 5

Durante a aplicação da Atividade 5, a turma mostrou-se mais disposta e animada, uma vez que o conteúdo abordado seria no contexto da Química, mais especificamente da Cinética Química. Nas entrevistas exploratórias, a Questão 06 tratou da Atividade 5, também questionando o que os alunos mais gostaram e o que menos gostaram na mesma. Algumas das respostas obtidas foram:

- **Respondente 3**

Gostei que [a atividade] melhorou a compreensão dos cálculos envolvidos em assuntos relacionados à Cinética Química. Particularmente, tenho um pouco de dificuldade nesse assunto e sendo assim, fiquei um pouco confusa, porém, não tenho nenhuma crítica em relação à aula ministrada.

- **Respondente 4**

Adorei a dinâmica com que se apresentou a aula, com slides interativos e uma aula descontraída. Além disso, a possibilidade de entrar em maior contato com o

mundo químico tornou a aula muito mais apreciativa. Não gostei do pouco tempo de aula, acredito que poderíamos ter um conteúdo aprofundado.

- **Respondente 5**

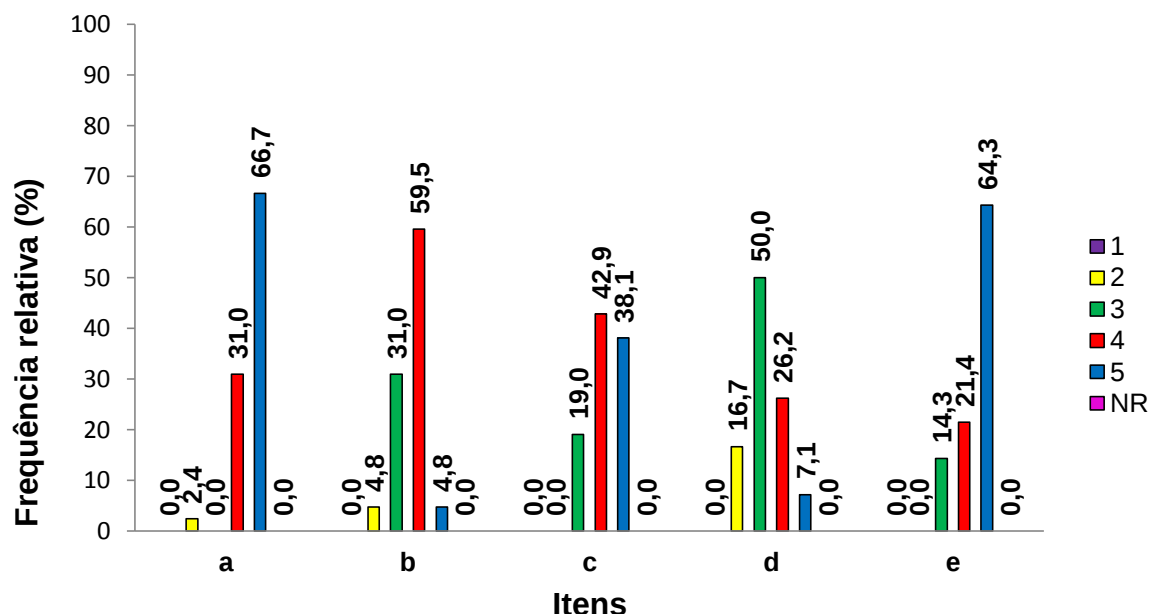
O que eu mais gostei foi perceber o quanto o Cálculo Diferencial e Integral está relacionado com o curso de Química. Além disso, essa aula mostrou como o Cálculo é importante e aplicável no nosso cotidiano e, principalmente, no cotidiano de um químico. Pra mim, foi a melhor aula que tive, pois, em minha opinião, quando a aula envolve vários conteúdos e matérias, o aluno consegue, através dessas várias perspectivas, aprender melhor e fixar melhor o conteúdo, sem muito esforço.

Pelas respostas que obtivemos, é perceptível que a atividade agradou bastante aos estudantes. O **Respondente 4** coloca o desejo de maior tempo para aprofundamento no conteúdo. Entretanto, a atividade, tendo sido preparada para a duração de 2 horas, não permitia tal detalhamento no conteúdo, o que fugiria do escopo da proposta. Por sua vez, o **Respondente 5** reconhece a importância das ferramentas fornecidas pelo Cálculo na Química. Pode-se verificar também que esta atividade foi uma boa oportunidade de aproveitamento da interdisciplinaridade da Matemática e da Química para os alunos do curso.

Quanto à escala de Likert aplicada à Atividade 5, coletaram-se ao todo 42 respostas, sendo a atividade com maior número de estudantes presentes. O somatório de escores variou de 210 a 1050, em que 210 representa a insatisfação total com a atividade, e 1050 representa a situação contrária. O somatório dos escores para a Atividade 5 foi de 848, representando um percentual de satisfação de 76,0%. Houve pequena queda do percentual na satisfação, uma diminuição de 0,9% em relação à média do percentual de satisfação das atividades anteriores. Essa queda diverge das respostas obtidas nas entrevistas, o que pode sinalizar a necessidade de um número maior de respondentes, ou ainda, a presença de estudantes que se ausentaram nas outras atividades. No caso da segunda hipótese, é natural que estes tenham avaliado a atividade com escores pequenos, uma vez que a Atividade 5 foi concebida de maneira continuada às atividades anteriores, sendo uma complementação do conteúdo que dependia da presença nas mesmas para aproveitamento máximo. Isso claramente não ocorreu com todos os estudantes.

A Figura 4.20 mostra as porcentagens relativas de resposta dos itens a) a e) da Atividade 5.

Figura 4.20 – Porcentagens relativas de resposta aos itens a) a e), avaliados de 1 a 5, ou sem resposta (NR), para a Atividade 5.



Fonte: elaborado pelo autor.

Houve aumento percentual de 3,04% na média das respostas negativas (números 1 e 2) relativamente à Atividade 4, conforme previsto pela porcentagem de satisfação. O item a) verificou o entendimento da importância do Cálculo Diferencial e Integral na Cinética Química, com 97,7% de respostas positivas. As respostas 4 e 5 somaram praticamente a totalidade das respostas, com porcentagens de 31,0 e 66,7%, respectivamente. Isso propõe que houve compreensão para a maioria da turma. O item b) avaliou a interpretação de taxas de reação com o Cálculo, com 31,0% de respostas neutras (número 3), o que mostra a dificuldade dos alunos transportarem as ferramentas matemáticas do Cálculo para a contextualização da Química. No entanto, 64,3% das respostas foram positivas (números 4 e 5), o que permite concluir a efetividade do cumprimento da proposta didática. No item c), perguntou-se sobre a compreensão de um gráfico de equilíbrio químico e sua interpretação, em que houve aumento das respostas 5, que somaram 38,1%. Isso mostra que os estudantes conseguem compreender os conceitos químicos melhor por gráficos do que por equações. O item d) analisou a capacidade de obtenção de leis integradas de velocidade com o auxílio do Cálculo. Neste item, houve 50,0% de respostas 3, permitindo inferir que os estudantes tiveram dificuldades na integração de funções, mesmo com regras simples de integração, como a regra da potência. O item e), como nas atividades anteriores, avaliou a contribuição desta atividade

para os estudantes. Com 85,7% de respostas 4 e 5, pode-se afirmar que a Atividade 5 cumpriu com seus objetivos.

4.5.6 Análise conjunta das Atividades 1 a 5

Pelas constatações anteriores, as Atividades 1 a 5 cumpriram suas propostas individuais, pautadas nas variáveis microdidáticas selecionadas para cada uma. Abaixo, resumimos, na Tabela 4.1, os escores obtidos nas atividades e os respectivos percentuais de satisfação.

Tabela 4.1 – Somatório dos escores e percentuais de satisfação das Atividades 1 a 5.

Atividade	Soma mínima dos escores	Soma máxima dos escores	Soma real dos escores	% de satisfação
1	140	700	558	74,6
2	170	850	689	76,3
3	185	925	756	77,2
4	55	275	230	79,5
5	210	1050	848	76,0

Fonte: elaborado pelo autor.

Levando-se em conta os percentuais de satisfação, obteve-se uma média percentual de satisfação de 76,7% com as atividades realizadas, o que pode indicar um bom aproveitamento por parte dos estudantes ao longo do desenvolvimento didático proposto de uma atividade para a outra.

A fim de melhor comparação, a Tabela 4.2 apresenta o percentual médio dos escores dos cinco itens avaliados em cada atividade.

Tabela 4.2 – Porcentagens médias dos escores relativas às Atividades 1 a 5.

Atividade	Resposta	% média dos escores
1	1	0,00
	2	5,00
	3	24,3
	4	30,7
	5	38,6
	NR	1,43
2	1	1,18
	2	5,29
	3	14,7
	4	38,8
	5	38,8
	NR	1,18
3	1	0,54
	2	6,49
	3	14,6
	4	35,1
	5	42,2
	NR	1,08
4	1	0,00
	2	1,82
	3	20,0
	4	36,4
	5	41,8
	NR	0,00
5	1	0,00
	2	4,76
	3	22,9
	4	36,2
	5	36,2
	NR	0,00

Fonte: elaborado pelo autor.

A maior incidência de respostas negativas (números 1 e 2) se deu na Atividade 3, totalizando uma média de 7,03% das respostas totais. Isso pode ter sido ocasionado pela utilização dos mesmos problemas da Atividade 1, envolvendo as respectivas funções inversas. Uma possibilidade seria a readequação do conteúdo com propostas de problema dentro da mesma temática, porém com situações diferentes das trabalhadas anteriormente. As respostas neutras (número 3) estão em maior quantidade na Atividade 1, com média de 24,3% de respostas totais. Esse resultado reflete a insegurança mencionada anteriormente. Neste caso, entretanto, supõe-se a insegurança dos estudantes estar mais associada ao primeiro contato com as atividades do que com a previsão de dados em si. Já as respostas positivas, de números 4 e 5, estão concentradas na Atividade 4, com percentual médio de 78,2% do total de respostas. Pode-se inferir que, devido ao número menor de estudantes realizando a atividade, houve melhor aproveitamento por conta de computadores sem problemas de compatibilidade

com o GeoGebra disponíveis para todos os alunos. Contudo, pelos padrões de resposta analisados, as entrevistas exploratórias da Atividade 5 se mostraram mais favoráveis ao aproveitamento dos estudantes do que as da Atividade 4. Uma análise mais aprofundada e com número maior de entrevistados poderia responder a esta questão de aproveitamento.

Tentamos, à medida que se construíram as atividades, desde as Análises Prévias, resgatar situações cotidianas dos estudantes que viessem a contribuir para a aprendizagem, de modo que selecionamos exemplos de aplicação ao dia-a-dia, como a contabilização bancária de juros, e de aplicação específica ao curso de Química, como o estudo da velocidade de uma reação química, por exemplo.

Com a consulta da literatura, observa-se que grande parte dos artigos publicados utilizando a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa é da área de Matemática. Mesmo com o envolvimento da Química, ela mostrou-se eficaz frente às necessidades de nosso estudo, permitindo uma análise profunda dos conceitos que envolveram as etapas de desenvolvimento deste trabalho, dentro do escopo pretendido. Assim, foi possível aplicar a metodologia sem grandes contratempos, o que abre um leque de possibilidades de aplicação desta nas Ciências da Natureza.

Conforme descrito nas seções anteriores, a etapa de Análise *a Priori* envolveu a seleção das variáveis micro e macrodidáticas deste trabalho. Cada atividade em particular, tendo atingido seus propósitos, tanto pelas respostas às entrevistas exploratórias quanto pelos percentuais de satisfação, contemplou, de fato, suas variáveis microdidáticas. Numa perspectiva global, as variáveis macrodidáticas também foram contempladas com sucesso ao longo do estudo. A Tabela 4.3 elenca as variáveis macrodidáticas e as correlaciona às Atividades 1 a 5 (A1 a A5).

Tabela 4.3 – Relação das variáveis macrodidáticas com as Atividades 1 a 5 (A1 a A5). Um “X” indica a contemplação da variável em cada atividade.

Variáveis macrodidáticas	A1	A2	A3	A4	A5
conexão com a situação cotidiana presente	X	X	X	X	X
fuga da abstração excessiva	X	X	X	X	X
uso de diferentes ambientes de ensino		X		X	
aplicação de recursos tecnológicos na aprendizagem		X		X	
valorização da tomada de decisão coletiva e da discussão de resultados	X	X	X	X	X
incentivo à ressignificação de conceitos matemáticos e químicos	X	X	X	X	X
reconhecimento do processo criativo	X	X	X	X	X
estímulo à visão algébrica e geométrica das funções	X	X	X	X	X
fomento da transição entre os significados químico e matemático					X
incentivo à estimativa de resultados	X	X	X	X	X
estímulo à crítica e à reflexão	X	X	X	X	X
instigação à busca da aplicação de conceitos matemáticos à Química e ao dia-a-dia	X	X	X	X	X

Fonte: elaborado pelo autor.

Pode-se observar pela Tabela 4.3 que houve a tentativa de contemplação das variáveis no máximo de atividades possíveis, exceto em situações restritivas como o caso de mudança de ambiente de ensino, por exemplo.

Como a etapa de *Análise a Posteriori* possibilitou a constatação de que se contemplaram, de fato, as variáveis micro e macrodidáticas elencadas na etapa de *Análise a Priori*, os resultados levam à conclusão de que houve Validação da experiência didática proposta por este estudo. Além disso, tomou-se o cuidado com o detalhamento das atividades dentro da metodologia adotada, para que a reprodutibilidade da experiência não seja comprometida.

Assim, por meio das conclusões deste estudo, incentivamos o uso da Engenharia Didática não só pela Matemática, mas também pelas Ciências da Natureza, possibilitando propostas diferenciadas de ensino, pautadas na interdisciplinaridade e no cotidiano dos educandos, assim como novas perspectivas de pesquisa na área de Didática.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS

Ao longo do presente trabalho, foi possível o aprofundamento num tema relevante à atualidade no que tange a educação brasileira, bem como suas particularidades e problemáticas, assuntos pouco debatidos dentro do ambiente acadêmico, ao menos nos cursos de Bacharelado. Além disso, este estudo possibilitou a compreensão das relações complexas que existem no ato de conceber sequências didáticas e apresentá-las aos educandos, e das razões que os levam a se interessar mais pela Matemática ou pela Química, utilizando ferramentas como a interdisciplinaridade e a contextualização no cotidiano.

O levantamento das respostas às entrevistas exploratórias, assim como os percentuais de satisfação obtidos pela escala de Likert, permitiram concluir que as atividades desenvolvidas causaram impacto benéfico aos estudantes que foram submetidos a este trabalho, estimulando-os à curiosidade matemática e química.

Para dar continuidade à temática aqui debatida, sugerimos estudos futuros que elaborem sequências didáticas a fim de evitar a mecanicidade na resolução de problemas, e que se proponham ao aprofundamento nas razões que levam os estudantes à insegurança na previsão e estimativa de dados. Além disso, também sugerimos trabalhos que desenvolvam a aplicação da Engenharia Didática nas disciplinas de Química, Física, Biologia e afins.

Buscamos, no decorrer deste estudo, tornar a Matemática e a Química mais tangíveis aos educandos, para que sejam estimulados à reflexão e ao questionamento da Ciência como um todo, qualidade fundamental aos cientistas. Para nós, é imprescindível que a universidade seja um agente de transformação social e, para que possamos atingir tal objetivo, convidamos os educadores a adotarem uma postura também democrática e inclusiva, possibilitando o livre acesso ao conhecimento científico em âmbito nacional e em todas as esferas de ensino.

Dada a importância ao assunto, esperamos que tenhamos trazido alternativas viáveis na Educação Matemática e Química, incentivando a busca e implementação de metodologias e recursos tecnológicos inovadores no ensino de Matemática e Ciências.

REFERÊNCIAS

AGUSTIN, Z. N.; AGUSTIN, M. A. Algebra and Precalculus Skills and Performance in First-semester Calculus. **International Journal of Case Method Research & Application**, Boston, v. 21, n. 3, p. 232-236, Sep. 2009.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2013. 157 p.

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPED¹⁵. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 3, n. 1, p. 62-77, jan. 2008. ISSN 1981-1322. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/13031>>. Acesso em: 4 ago. 2017. doi: <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2008v3n1p62>.

ALMOULOUD, S. A.; DA SILVA, M. J. F. Engenharia Didática: evolução e diversidade *Didactic engineering: evolution and diversity*. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, p. 22-52, dez. 2012. ISSN 1981-1322. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p22>>. Acesso em: 28 set. 2017. doi: <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p22>.

ARAÚJO, P. C.; IGLIORI, S. B. C. Engenharia didática como uma estatística não-paramétrica. **Caderno de Física da UEFS**, Feira de Santana, (01 e 02), n. 7, p. 133-142, 2009.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.

ATKINS, P.; DE PAULA, J. As velocidades das reações químicas. In: _____. **Físico-química**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008. v. 2, Cap. 22, p. 216-251.

¹⁵ GT-19 / ANPED: Grupo de trabalho 19 da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (Brasil).

ATKINS, P.; JONES, L. **Princípios de química**: questionando a vida moderna e o meio ambiente. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. 1.026 p.

BARROZO, S. **Roteiro de atividades para as aulas sobre exponenciais e logaritmos**. Araraquara: [s.n.], 2017. 3 f.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2013. 389 p.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2013. 127 p.

BIZELLI, M. H. S. S.; BARROZO, S. **Cálculo para um Curso de Química**: Volume 1. São Paulo: Cultura Acadêmica: Universidade Estadual Paulista, Pró-Reitoria de Graduação, 2009. 406 p.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Exame Nacional do Ensino Médio**. Brasília: INEP/MEC, 1998. 23 p. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/1998/1998_amarela.pdf>. Acesso em: 05 out. 2017.

_____. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Exame Nacional do Ensino Médio**: Prova de Ciências Humanas e suas Tecnologias; Prova de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. 2ª aplicação. Brasília: INEP/MEC, 2016a. 32 p. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/CAD_ENEM_2016_DIA_1_01_AZUL_2.pdf>. Acesso em: 06 out. 2017.

_____. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Exame Nacional do Ensino Médio**: Prova de Redação e de Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Prova de Matemática e suas Tecnologias. 1ª aplicação. Brasília: INEP/MEC, 2016b. 32 p. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/CAD_ENEM_2016_DIA_2_05_AMARELO.pdf>. Acesso em: 05 out. 2017.

_____. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Brasília: Semtec/MEC, 2000. 71 p.

_____. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio**: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: Semtec/MEC, 2002. 144 p.

BROUSSEAU, G. **Theory of didactical situations in mathematics**: didactique des mathématiques, 1970-1990 (editado e traduzido por N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield). Dordrecht: Kluwer, 1997. 306 p.

CHEVALLARD, Y. **Sur l'ingénierie didactique**. Texte préparé pour la deuxième École d'Été de Didactique des Mathématiques, Orléans, 1982.

CHEVALLARD, Y.; JOSHUA, M. **La transposition didactique**: du savoir savant au savoir enseigné. Paris: La Pensée Sauvage, 1985. 240 p.

COSTA, M. M. **O ensino das funções exponenciais**: uma proposta alternativa por meio de contextualização, modelagem matemática e recursos tecnológicos. 2016. 113 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2016.

COVER, T. M.; THOMAS, J. A. **Elements of information theory**. 2nd ed. New York: Wiley, 2006. 792 p.

CURY, H. N. Análise de erros em cálculo diferencial e integral: resultados de investigações em cursos de engenharia. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 31., 2003, Porto Alegre. **Anais...** Porto Alegre, 2003.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino de matemática no Brasil. **Revista Zetetiké**, Campinas, v. 3, n. 4, p. 1-37, nov. 1995.

FONSECA, L. S. **A aprendizagem das funções trigonométricas na perspectiva da Teoria das Situações Didáticas**. 2011. 195 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e

Matemática) – Núcleo de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Federal do Sergipe, São Cristóvão, 2011.

GLOBO.COM. **Veja 10 polêmicas envolvendo o Enem**: Furto de provas, vazamento de redação, ocupações estudantis, foto no Instagram... Confira as polêmicas que já afetaram o maior exame do país. Disponível em:

<<https://g1.globo.com/educacao/enem/2016/noticia/veja-10-polemicas-envolvendo-o-enem.ghtml>>. Acesso em: 18 nov. 2017.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001. 262 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Curso de Pós-Graduação Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

HASHEMI, N. et al. Undergraduate Students' Difficulties in Conceptual Understanding of Derivation. **Procedia Social and Behavioral Sciences**, Nicosia, v. 143, p. 358-366, Aug. 2014.

HIRST, K. E. Classifying Students' Mistakes in Calculus. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE TEACHING OF MATHEMATICS, 2nd, 2002, Athens. **Proceedings...** Atenas: ICTM, 2002.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar, 1**: conjuntos, funções. 8. ed. São Paulo: Atual, 2004. 374 p.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar, 2**: logaritmos. 8. ed. São Paulo: Atual, 2004. 198 p.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar, 4**: sequências, matrizes, determinantes, sistemas. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013. 282 p.

INSTITUTO DE QUÍMICA/UNESP: Conselho de Curso de Graduação. **PROJETO PEDAGÓGICO DO CURSO DE BACHARELADO EM QUÍMICA E EM QUÍMICA TECNOLÓGICA**. Araraquara, out. 2006. Disponível em:

<<http://iq.unesp.br/Home/graduacao/projeto-pedagogico-bq-bqt.pdf>>. Acesso em: 02 out. 2017.

INSTITUTO DE QUÍMICA/UNESP. **Resolução nº 87**, de 11 de dezembro de 2007. Estabelece a estrutura curricular do Bacharelado em Química e do Bacharelado em Química Tecnológica. Disponível em:
<<http://iq.unesp.br/Home/graduacao/curriculo-bq-2013.pdf>>. Acesso em: 06 ago. 2017.

LIMA, E. L. **Análise real**: volume 1. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. 189 p. (Coleção Matemática Universitária).

LIMA, E. L. **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 297 p. (Coleção PROFMAT).

MACHADO, S. D. A. **Educação matemática**: uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: Educ, 2008. 247 p.

MARGOLINAS, C.; DRIJVERS, P. Didactical engineering in France; an insider's and an outsider's view on its foundations, its practice and its impact. **ZDM Mathematics Education**, v. 47, n. 6, p. 893-903, oct. 2015. ISSN 1863-9690. Disponível em:
<<https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2Fs11858-015-0698-z.pdf>>. Acesso em: 01 out. 2017. doi: <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0698-z>.

NUNES, L. F. **Modelos de crescimento e decaimento aplicados ao ensino de funções exponenciais e logarítmicas**. 2017. 145 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal dos Vales de Jequitinhonha e Mucuri, Teófilo Otoni, 2017.

OECD (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico). **Programme for international student assessment (PISA)**: results from PISA 2015, 2016.

PRENSKY, M. Digital Natives, Digital Immigrants Part 1. **On the Horizon**, v. 9, n. 5, p. 1-6, set./out. 2001.

SALDAÑA, P. **Adultos não sabem Matemática Básica, segundo pesquisa**. O Estado de São Paulo, 1 nov. 2015.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias**. São Paulo: SEE, 2011. 72 p.

_____. Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Ciências da Natureza e suas Tecnologias**. São Paulo: SEE, 2012. 152 p.

SCHAAL, R. **Chemical kinetics of homogenous systems**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1974. 180 p.

SILVA, J. V. G. **Análise da abordagem de comprimento, perímetro e área em livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental sob a ótica da teoria antropológica do didático**. 2011. 194 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

STEWART, J. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Brooks/Cole, 2013. v. 1. 664 p.

TAPSCOTT, D. **Growing Up Digital: The Rise of the Net Generation**. New York: McGraw-Hill, 1998. 338 p.

VIEIRA, S. As escalas para mensuração de conceitos. In: _____. **Como elaborar questionários**. São Paulo: Atlas, 2009. Cap. 5, p. 71-102.

ZANARDI, M. C.; LIMA, J. C. Análise de Erros na Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II do Curso de Engenharia Mecânica Noturno da FEG/UNESP. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 32., 2009, São Paulo. **Anais...** CD-ROM, v. 2, p. 1121-1122, São Paulo, 2009.

APÊNDICE A

Modelo da entrevista exploratória realizada com os estudantes

Idade:

- 01) Em sua opinião, as atividades tiveram algum impacto na sua visão do Cálculo Diferencial e Integral? Descreva sucintamente a(s) contribuição(ões) das atividades para seu futuro no Curso de Química.
- 02) O que você mais gostou na atividade teórica de Funções Exponenciais? E o que você menos gostou?
- 03) O que você mais gostou na atividade de laboratório de Funções Exponenciais? E o que você menos gostou?
- 04) O que você mais gostou na atividade teórica de Funções Logarítmicas? E o que você menos gostou?
- 05) O que você mais gostou na atividade de laboratório de Funções Logarítmicas? E o que você menos gostou?
- 06) O que você mais gostou na atividade teórica de Cinética Química? E o que você menos gostou?

APÊNDICE B

Atividade 1 desenvolvida pelos estudantes

Data: 28/03/2017

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral I

Exercícios em Sala (1º dia)

1. Você, que gosta muito de *origami*, pegou uma folha de papel e começou a dobrá-la ao meio sucessivamente. Em seguida, percebeu que, a cada dobradura, o número de partes em que o papel se dividia dobrava. Encontre uma função que descreva a quantidade de partes em que o papel se divide após n dobraduras.
2. Uma colônia de bactérias tem, inicialmente, 10.000 organismos. Após a aplicação de um antibiótico, verificou-se que, a cada hora, o número de bactérias caía pela metade. Determine uma função $P(t)$ que calcule a quantidade de bactérias após t horas. Quantas bactérias ainda existirão após 5 horas?
3. Suponha que, ao entrar na universidade, você tenha ganhado uma quantia Q_0 reais de presente e resolveu guardá-la em uma caderneta de poupança que rende r % de juros ao mês. Deduza uma função matemática que calcule o valor acumulado deste dinheiro após x meses. Utilizando essa função e supondo $Q_0 = R\$500,00$ e $r = 0,53\%$ ao mês, descubra quanto você terá ao finalizar seu curso, considerando que se formará em 4 anos.
4. Agora suponha que, após formado(a), você sabiamente tenha decidido utilizar esta poupança para sua seguridade previdenciária (aposentadoria). Assim, você mudará seu investimento para uma aplicação mais rentável, depositando k reais todo mês (k fixo) e não fará saques. Deduza uma função matemática que calcule o valor acumulado após x meses, no caso geral. Utilizando esta função, $r = 0,7\%$ e $k = R\$150,00$, descubra quanto você terá quando fizer 65 anos de idade.

5. Suponha agora que, ao fazer 65 anos, você pare de fazer depósitos e comece a retirar um valor mensal (finalmente a aposentadoria chegou!!!). Supondo que seu saldo seja igual a Q , que você retirará w reais todo mês e que a taxa de juros seja $r\%$ ao mês, encontre a função que representa seu saldo em um tempo t qualquer, após iniciar a retirada do dinheiro. Utilizando o valor de Q calculado no problema anterior, $r = 0,7\%$ e $w = \text{R\$}6.000,00$, calcule seu saldo ao fazer 90 anos de idade.

6. Indique nas escalas abaixo o que se pede:

- a) Entendo o que significa modelagem matemática.

1 (nenhum pouco)	2	3	4	5 (com certeza)
------------------	---	---	---	-----------------

- b) Sou capaz de citar algumas aplicações da função exponencial.

1 (nenhum pouco)	2	3	4	5 (com certeza)
------------------	---	---	---	-----------------

- c) Consigo prever o comportamento geral de uma função exponencial numa situação-problema do cotidiano.

1 (nenhum pouco)	2	3	4	5 (com certeza)
------------------	---	---	---	-----------------

- d) Consigo entender as propriedades, domínio, imagem e gráfico da função exponencial.

1 (nenhum pouco)	2	3	4	5 (com certeza)
------------------	---	---	---	-----------------

- e) As atividades contribuíram para a minha melhor compreensão dos conceitos e das propriedades das funções exponenciais.

1 (nenhum pouco)	2	3	4	5 (com certeza)
------------------	---	---	---	-----------------

APÊNDICE C

Atividade 2 desenvolvida pelos estudantes

Data: 04/04/2017

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral I

Exercícios no Laboratório (2º dia)

O GeoGebra é um *software* gratuito muito útil para o ensino e visualização de problemas de modelagem em geral, pois é capaz de representar funções gráfica e algebricamente, permitindo a alteração de parâmetros nas expressões. Sendo assim, realizaremos uma atividade-tutorial para entender melhor o funcionamento do GeoGebra.

Layout e Design:

- Janela de Álgebra:

Aqui podemos visualizar as **expressões algébricas** inseridas como pontos, retas, funções etc. escritos **algebricamente**.

- Janela de Visualização:

Aqui podemos visualizar as **expressões algébricas** inseridas como gráficos de funções, polígonos, pontos etc. desenhados **graficamente**. Para mover a tela basta clicar e arrastar. Para dar *zoom* basta usar a rolagem do mouse.

- Entrada:

Aqui podemos **inserir** quaisquer expressões matemáticas no *software*.

- Ferramentas:

Mover: podemos mover os objetos desenhados ou a tela **clcando e arrastando**;

Ponto: podemos inserir um **ponto**;

Reta: podemos criar uma **reta** que passa por **dois pontos** selecionados;
além de outras ferramentas.

Exemplo aplicado:

- I) Plotar $y = 2x + 1$;
- II) Alterar legenda para r , cor para vermelho e espessura para 5;
- III) Criar controle deslizante m de -10 a 10 , incremento 0.1 ;
- IV) Criar controle deslizante b de -10 a 10 , incremento 0.1 ;
- V) Alterar para $y = mx + b$;
- VI) Observar como a reta muda à medida que mexemos nos controles deslizantes.

1. Exercício:

- I) Plotar $y = ax^2 + bx + c$;
- II) Alterar legenda para p , cor para azul e espessura máxima;
- III) Criar controles deslizantes a , b e c de -10 a 10 , incremento 0.1 ;
- IV) Observar como a parábola muda à medida que mexemos nos controles deslizantes.

2. Agora aplicaremos as **funções exponenciais** que encontramos na última aula no GeoGebra e no LibreOffice Calc.

a) Colônia de bactérias:

- I) Plotar como $P(t) = 10\,000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$ e observar o comportamento do gráfico.

Alterar *zoom*, cor e espessura para melhor visualização. Estime $P(5)$ pelo gráfico.

- II) Criar controle deslizante para a população inicial A de 10.000 a 100.000 , incremento 1.000 .

- III) Plotar como $P(t) = A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$ com restrição de domínio. Alterar *zoom*, cor e espessura para melhor visualização.

Comando: Função[$A \cdot (1/2)^t$, $0, 100$]

Alterar o intervalo do domínio para $D = [0; +\infty[$ manualmente,

ou ainda $P(t) = A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$, $t \geq 0$.

- IV) Observar como a população se comporta à medida que mexemos nos controles deslizantes.

b) Atividade da planilha “Aposentadoria”.

c) Poupança sem depósitos mensais:

- I) Plotar como $Q(t) = 500 \cdot (1,0053)^t$ e observar o comportamento do gráfico. Alterar *zoom*, cor e espessura para melhor visualização. Estime $Q(48)$ pelo gráfico.
- II) Criar controles deslizantes para o capital inicial C e para a taxa de juros r . Escolha incrementos adequados.
- III) Plotar como $Q(t) = C \cdot (1+r)^t$ com restrição de domínio. Alterar *zoom*, cor e espessura para melhor visualização.

$$\text{Comando: Função}[C \cdot (1+r)^t, 0, 100]$$
ou ainda $Q(t) = C \cdot (1+r)^t, t \geq 0$.
- IV) Observar como o capital se comporta à medida que mexemos nos controles deslizantes.

d) Poupança com depósitos ou saques mensais:

- I) Criar controles deslizantes para o capital inicial C , para a taxa de juros r e para o capital depositado mensalmente k . Escolha incrementos adequados.
- II) Plotar como $Q(t) = \left(C + \frac{k}{r}\right) \cdot (1+r)^t - \frac{k}{r}$ com restrição de domínio. Alterar *zoom*, cor e espessura para melhor visualização. Use o comando como nos exemplos anteriores para restringir o domínio para $D = [0; +\infty[$.
- III) Observar como o capital se comporta à medida que mexemos nos controles deslizantes. O que acontece se k for negativo?

e) Função exponencial e função potência:

- I) Plotar os gráficos de $f(x) = x^a$ e $g(x) = b^x$ com controles deslizantes a e b . Alterar *zoom*, cor e espessura para melhor visualização. Utilizar incrementos adequados.
- II) Observar como as funções se comportam à medida que mexemos nos controles deslizantes. Qual função cresce ou decresce mais rapidamente para $a = b$, com a e b positivos e diferentes de 1?

3. Indique nas escalas abaixo o que se pede:

- a) Entendo como utilizar as ferramentas básicas do GeoGebra que foram abordadas na atividade.

1 (nenhum pouco)	2	3	4	5 (com certeza)
------------------	---	---	---	-----------------

- b) Sou capaz de plotar gráficos de funções com controle deslizante no GeoGebra e extrair informações dos mesmos.

1 (nenhum pouco)	2	3	4	5 (com certeza)
------------------	---	---	---	-----------------

- c) Consigo montar uma planilha eletrônica básica no LibreOffice Calc, aplicando fórmulas e formatando células.

1 (nenhum pouco)	2	3	4	5 (com certeza)
------------------	---	---	---	-----------------

- d) Consigo fazer estimativas razoáveis de funções exponenciais utilizando uma planilha eletrônica.

1 (nenhum pouco)	2	3	4	5 (com certeza)
------------------	---	---	---	-----------------

- e) As atividades de laboratório contribuíram para a minha melhor compreensão dos conceitos e das propriedades das funções exponenciais.

1 (nenhum pouco)	2	3	4	5 (com certeza)
------------------	---	---	---	-----------------

APÊNDICE D

Atividade 3 desenvolvida pelos estudantes

Data: 05/04/2017

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral I

Exercícios em Sala (3º dia)

1. No Exercício 2 da Atividade 1 encontramos uma função $P(t) = 10\,000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$ que modelava uma população de bactérias diminuindo com a administração de um antibiótico.
 - a) Suponha agora que você deseje controlar o tempo de exposição para atingir uma população limite de 100 bactérias. Após quanto tempo a população atingirá esse limite?
 - b) É possível extinguir a colônia de bactérias utilizando este modelo matemático? Por quê?
 - c) É possível restar uma única bactéria? Se sim, quanto tempo levará? Se não, por que não é possível?
2. No Exercício 3 da Atividade 1 encontramos uma função $Q(t) = Q_0 \cdot (1+r)^t$ que modelava a quantia em dinheiro numa poupança rendendo a uma taxa de juros $r\%$ ao mês.
 - a) Encontre $t(Q)$.
 - b) Com uma taxa de 0,53% ao mês, quanto tempo levará para que você possua o dobro do valor depositado inicialmente? Este tempo depende do valor inicial?
3. No Exercício 4 da Atividade 1 encontramos uma função $Q(t) = \left(C + \frac{k}{r}\right) \cdot (1+r)^t - \frac{k}{r}$ que modelava a quantia em dinheiro numa poupança rendendo a uma taxa de juros $r\%$ ao mês, depositando-se k reais por mês nela. Supondo um valor inicial de R\$644,41 rendendo a 0,7% ao mês, com depósitos mensais de R\$150,00, quanto tempo você levará para juntar R\$2.000.000,00?

4. No Exercício 5 da Atividade 1 encontramos uma função $Q(t) = \left(C - \frac{w}{r}\right) \cdot (1+r)^t + \frac{w}{r}$ que modelava a quantia em dinheiro numa poupança rendendo a uma taxa de juros $r\%$ ao mês, sacando-se w reais por mês dela. Supondo um valor inicial de R\$785.932,52 rendendo a $0,7\%$ ao mês, com saques mensais de R\$6.000,00, quanto tempo levará para acabar o dinheiro?

5. Indique nas escalas abaixo o que se pede:

- a) Entendo o significado matemático de um logaritmo.

1 (nenhum pouco)	2	3	4	5 (com certeza)
------------------	---	---	---	-----------------

- b) Sou capaz de citar algumas aplicações da função logarítmica.

1 (nenhum pouco)	2	3	4	5 (com certeza)
------------------	---	---	---	-----------------

- c) Consigo prever o comportamento geral de uma função logarítmica numa situação-problema do cotidiano.

1 (nenhum pouco)	2	3	4	5 (com certeza)
------------------	---	---	---	-----------------

- d) Consigo entender as propriedades, domínio, imagem e gráfico da função logarítmica.

1 (nenhum pouco)	2	3	4	5 (com certeza)
------------------	---	---	---	-----------------

- e) As atividades contribuíram para a minha melhor compreensão dos conceitos e das propriedades das funções logarítmicas.

1 (nenhum pouco)	2	3	4	5 (com certeza)
------------------	---	---	---	-----------------

APÊNDICE E

Atividade 4 desenvolvida pelos estudantes

Data: 11/04/2017

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral I

Exercícios no Laboratório (4º dia)

1. Na aula anterior exploramos algumas aplicações das **funções logarítmicas**. Agora aplicaremos esses conceitos no GeoGebra e no LibreOffice Calc.

a) Colônia de bactérias:

Plote como $t(P) = -\frac{\ln\left(\frac{P}{10\,000}\right)}{\ln 2}$ e observe o comportamento do gráfico. Ajuste *zoom*,

cor e espessura para melhor visualização. Estime $t(1)$, $t(10)$, $t(100)$ e $t(1\,000)$ pelo gráfico marcando os respectivos pontos em diferentes cores com legendas “1 bactéria”, “10 bactérias”, “100 bactérias” e “1.000 bactérias”. Ajuste o zoom para visualizar todos os pontos.

I) Em qual desses pontos o número de bactérias está diminuindo mais lentamente? Obtenha a taxa de variação nesse ponto.

II) Em qual desses pontos o número de bactérias está diminuindo mais rapidamente? Obtenha a taxa de variação nesse ponto.

b) Crie um controle deslizante para a população inicial A de 10.000 a 100.000, com incremento adequado.

c) Altere para $t(P) = -\frac{\ln\left(\frac{P}{A}\right)}{\ln 2}$ com restrição de domínio para $D = [0; +\infty[$. Ajuste *zoom*, cor e espessura para melhor visualização.

Para restringir o domínio, use $t(P) = -\frac{\ln\left(\frac{P}{A}\right)}{\ln 2}$, $P \geq 0$.

- d) Obtenha a equação de uma reta tangente em $P=100$ bactérias para $A=10\,000$ e $A=50\,000$. O que significam as inclinações dessas retas? O que ocorre com o gráfico de $t(P)$ quando a população da colônia se altera? O que ocorre com a taxa de variação? Ela depende da população inicial de bactérias? Explique.

2. Atividade da planilha “Aposentadoria”:

- a) Abra a planilha “Aposentadoria (Completo)”.
- b) Utilize a calculadora para estimar:
 - I) O dinheiro acumulado após 4 anos de rendimento a uma taxa de 0,8 % ao mês, sem depósitos mensais, com valor inicial de R\$700,00.
 - II) Quanto dinheiro você deve depositar por mês (com taxa de 0,8%) após formado(a) para comprar um imóvel de R\$1.500.000,00 aos 65 anos.
 - III) O valor máximo que você pode sacar (com taxa de 0,8%) até os 80 anos para que você deixe R\$200.000,00 de herança para sua família.
 Confirme seus resultados pela planilha.

3. Poupança sem depósitos mensais:

- I) Plote $Q(t) = 500 \cdot (1,0053)^t$, sua inversa, e $y = x$. Observe o comportamento do gráfico. Ajuste *zoom*, cor e espessura para melhor visualização.
- II) Refaça o gráfico apenas da inversa e estime quanto tempo levará para juntar R\$1.200,00 pelo gráfico.
- III) Crie controles deslizantes para o capital inicial C e para a taxa de juros r . Escolha incrementos adequados.
- IV) Plote $Q(t) = C(1+r)^t$ com $t \geq 0$ e sua inversa, assim como $y = x$. Ajuste *zoom*, cor e espessura para melhor visualização. Deixe a escala em 1:1 e altere a Janela de Visualização para melhor observação.
- V) Observe como o capital se comporta à medida que mexemos nos controles deslizantes.

4. Poupança com depósitos ou saques mensais:

- I) Obtenha uma inversa para $Q(t) = \left(C + \frac{k}{r}\right) \cdot (1+r)^t - \frac{k}{r}$.

- II) Plote o gráfico dessa inversa com capital inicial de R\$1.000.000,00, taxa de 0,8% ao mês e saques de R\$10.000,00. Altere zoom, cor e espessura para melhor visualização.
- III) Use o gráfico para estimar quanto tempo levará para acabar o dinheiro.
- IV) Repita o procedimento com depósitos de R\$600,00, taxa de 0,8% ao mês e capital inicial de R\$100,00.
- V) Use o gráfico para estimar quanto tempo levará para juntar R\$1.500.000,00.

5. Indique nas escalas abaixo o que se pede:

- a) Entendo como utilizar as ferramentas básicas do GeoGebra que foram abordadas na atividade.

1 (nenhum pouco)	2	3	4	5 (com certeza)
------------------	---	---	---	-----------------

- b) Sou capaz de plotar gráficos de funções com controle deslizante no GeoGebra e extrair informações dos mesmos.

1 (nenhum pouco)	2	3	4	5 (com certeza)
------------------	---	---	---	-----------------

- c) Consigo utilizar uma planilha eletrônica do LibreOffice Calc, extraindo informações pertinentes da mesma.

1 (nenhum pouco)	2	3	4	5 (com certeza)
------------------	---	---	---	-----------------

- d) Consigo fazer estimativas razoáveis de funções logarítmicas utilizando uma planilha eletrônica e gráficos gerados pelo GeoGebra.

1 (nenhum pouco)	2	3	4	5 (com certeza)
------------------	---	---	---	-----------------

- e) As atividades de laboratório contribuíram para a minha melhor compreensão dos conceitos e das propriedades das funções logarítmicas.

1 (nenhum pouco)	2	3	4	5 (com certeza)
------------------	---	---	---	-----------------

APÊNDICE F

Atividade 5 desenvolvida pelos estudantes

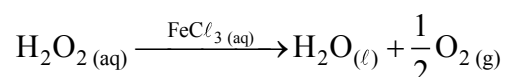
Data: 30/05/2017

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral I

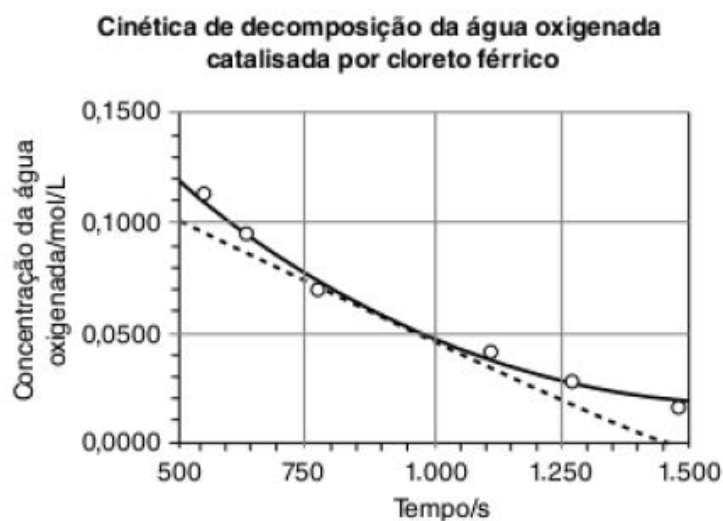
Exercícios em Sala (5º dia)

1. (UFMG 2006 – adaptado)

Na presença de catalisador, a reação de decomposição da água oxigenada produz água líquida e oxigênio gasoso conforme a reação a seguir:



Ao iniciar seu projeto de Iniciação Científica no Departamento de Físico-química, você decidiu investigar a cinética química dessa reação, e, portanto, acompanhou-a, determinando a concentração de água oxigenada periodicamente. Assim, você obteve uma curva cujo gráfico representa a variação de $\text{H}_2\text{O}_{2(\text{aq})}$ em função do tempo (linha cheia):



A linha tracejada no gráfico mostra a reta tangente para o tempo de 950 s.

- a) Calcule a velocidade média aproximada da reação de decomposição da água oxigenada no intervalo de tempo de 500 a 1.500 s. Explique brevemente o significado químico desse valor.
- b) Obtenha a equação de uma reta secante que passa pelos pontos (500 ; 0,1200) e (1 500 ; 0,0200) . Interprete o significado de 1) seu coeficiente angular e 2) seu coeficiente linear.
- c) Calcule a velocidade instantânea da reação de decomposição da água oxigenada no tempo de 950 s. Explique brevemente o significado químico desse valor.
- d) Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico no ponto fornecido. Interprete o significado de 1) seu coeficiente angular e 2) seu coeficiente linear.
- e) Indique se a velocidade da reação diminui, permanece constante ou aumenta à medida que o tempo de reação passa. Justifique sua resposta.
- f) Esboce no gráfico uma representação qualitativa da curva da concentração de água oxigenada em função do tempo, caso a concentração do catalisador $\text{FeCl}_{3(\text{aq})}$ fosse reduzida à metade. Justifique a forma da curva apresentada.
- g) Faça um esboço qualitativo, isto é, sem valores, das curvas:
 - 1) $[\text{H}_2\text{O}_{2(\text{aq})}] \times t(\text{s})$;
 - 2) $[\text{H}_2\text{O}_{(\ell)}] \times t(\text{s})$;
 - 3) $[\text{O}_{2(\text{g})}] \times t(\text{s})$;
 num mesmo plano cartesiano. O que acontece com cada espécie quando $t \rightarrow \infty$? Qual é o significado químico dos pontos de interseção entre as curvas 1) e 2)? E 1) e 3)? Justifique suas respostas.

2. O dióxido de nitrogênio é um gás altamente tóxico que é produzido pela decomposição do pentóxido de dinitrogênio com a liberação de oxigênio, ambos gasosos, e constitui uma reação química de primeira ordem.

A 45°C, experimentos mostram que $\text{N}_2\text{O}_{5(\text{g})}$ é consumido da seguinte forma:

$$-\frac{d[\text{N}_2\text{O}_{5(\text{g})}]}{dt} = 0,0005[\text{N}_2\text{O}_{5(\text{g})}]$$

- a) Escreva a equação química balanceada da decomposição do pentóxido de dinitrogênio.
- b) Qual é a constante de velocidade? Qual é sua unidade?

- c) Encontre uma expressão para a concentração de $\text{N}_2\text{O}_{5(g)}$ após t segundos.
- d) Preveja o tempo necessário para que 75% do $\text{N}_2\text{O}_{5(g)}$ seja consumido na reação.
- e) Preveja o tempo de meia-vida do $\text{N}_2\text{O}_{5(g)}$.
- f) Em quanto tempo o $\text{N}_2\text{O}_{5(g)}$ será completamente extinto? Justifique sua resposta matemática e quimicamente.
3. Uma reação de segunda ordem do tipo $A \rightarrow P$ possui lei de velocidade $v = -k \cdot [A]^2$.
- a) Obtenha a lei de velocidade integrada para este tipo de reação.
- b) Obtenha uma fórmula para a meia-vida de um composto que siga este mecanismo de reação.
4. Indique nas escalas abaixo o que se pede:
- a) Entendo a importância do Cálculo Diferencial e Integral na Cinética Química e Equilíbrios Químicos.
- | | | | | |
|------------------|---|---|---|-----------------|
| 1 (nenhum pouco) | 2 | 3 | 4 | 5 (com certeza) |
|------------------|---|---|---|-----------------|
- b) Sou capaz de interpretar taxas de reação utilizando o Cálculo Diferencial e Integral.
- | | | | | |
|------------------|---|---|---|-----------------|
| 1 (nenhum pouco) | 2 | 3 | 4 | 5 (com certeza) |
|------------------|---|---|---|-----------------|
- c) Consigo prever o comportamento gráfico de uma reação à medida que se aproxima do equilíbrio químico, assim como interpretá-lo.
- | | | | | |
|------------------|---|---|---|-----------------|
| 1 (nenhum pouco) | 2 | 3 | 4 | 5 (com certeza) |
|------------------|---|---|---|-----------------|
- d) Consigo partir de leis de velocidade razoavelmente simples para a obtenção de leis integradas de velocidade utilizando o Cálculo.
- | | | | | |
|------------------|---|---|---|-----------------|
| 1 (nenhum pouco) | 2 | 3 | 4 | 5 (com certeza) |
|------------------|---|---|---|-----------------|
- e) As atividades contribuíram para a minha melhor compreensão dos conceitos que envolvem a Cinética Química.
- | | | | | |
|------------------|---|---|---|-----------------|
| 1 (nenhum pouco) | 2 | 3 | 4 | 5 (com certeza) |
|------------------|---|---|---|-----------------|

ANEXO A

Ementa da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do curso de Bacharelado em Química oferecida pelo IQ/CAR

UNIDADE UNIVERSITÁRIA: Instituto de Química					
CURSO: Bacharelado em Química e Bacharelado em Química Tecnológica					
DEPARTAMENTO RESPONSÁVEL: Físico-Química					
IDENTIFICAÇÃO:					
CÓDIGO	NOME DA DISCIPLINA OU ESTÁGIO			SERIAÇÃO IDEAL	
FQ16000	Cálculo Diferencial e Integral I			1 Semestre	
TIPO	PRÉ-REQUISITOS			CO-REQUISITOS	
Obrigatória	Não há			Não há	
CRÉDITOS	CARGA HORÁRIA TOTAL	DISTRIBUIÇÃO DA CARGA HORÁRIA			
		TEÓRICA	PRÁTICA	TEO/PRAT	OUTRAS
6	90	90			
NÚMERO MÁXIMO DE ALUNOS POR TURMA					
AULAS TEÓRICAS	AULAS PRÁTICAS		A. TEOR/PRÁTICAS		OUTRAS
60					

OBJETIVOS (Ao término da disciplina o aluno deverá ser capaz de:)

Compreender e utilizar corretamente os conceitos e técnicas fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral de funções reais de uma variável real. Desenvolver a capacidade crítica para a análise e resolução de problemas, integrando conhecimentos multidisciplinares. Compreender e saber utilizar a linguagem matemática como ferramenta essencial na Ciência.

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO (Título e discriminação das unidades)

1. Funções reais de uma variável real: conceito, gráficos; funções polinomiais, potências, racionais, definidas por partes, módulo; funções compostas, inversas e implícitas; funções trigonométricas diretas e inversas, exponenciais e logarítmicas.
2. Limites e continuidade: conceito e interpretação gráfica de limites; propriedades, cálculo de limites, limites laterais, limites envolvendo infinito; continuidade.
3. Derivada: definição; interpretação geométrica e física: retas tangentes e normais, taxas de variação; regras de derivação, derivada da função composta e implícita; derivadas de ordem superior.
4. Aplicações das derivadas: taxas relacionadas; teorema de L'Hospital; traçado de gráficos de funções a partir da análise das derivadas; problemas de otimização; diferenciais, aproximação linear. Fórmula de Taylor.
5. Integral indefinida: antiderivação e primitiva; principais integrais imediatas; regra da potência com expoentes reais; método da substituição de variáveis; integração por partes; método das frações parciais; utilização de tabela de integrais para os demais casos.
6. Integral definida: definição, interpretação geométrica, propriedades; Teorema Fundamental do Cálculo; integrais impróprias.
7. Aplicações das integrais: cálculo de áreas de regiões planas; Teorema do Valor Médio; comprimento de arco.

METODOLOGIA DE ENSINO

Período Normal: Aulas teóricas utilizando método expositivo e estudo dirigido. O ensino será desenvolvido de forma intuitiva enfatizando os aspectos geométricos e as aplicações físicas e químicas. As aulas teóricas serão ministradas de forma expositiva e interativa.

Processo de Recuperação:

- Aulas de revisão e discussão de conceitos
- Aulas de resolução e discussão de exercícios
- Prova escrita

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA BÁSICA

01. STEWART, James Cálculo, Vol 1 e 2, quarta edição, São Paulo: Pioneira – Thomson Learning, 2001.
02. BIZELLI, Maria Helena S. S.; BARROZO, Sidinéia Cálculo para um Curso de Química, Vol 1, Editora Cultura Acadêmica, 2009.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

01. ANTON, Howard Cálculo, um novo horizonte, Vol 1 e 2, 6ª ed., Porto Alegre: Bookman, 2000.
02. NETTO, João Cardoso Pereira, Física, Matemática e Química – Um Modelo de Interdisciplinaridade, vol. 1, 2, 3 4, 1ª ed., Editora e Gráfica Brasil, 2003.
03. THOMAS, GEORGE B Cálculo, Vol 1, 11a ed., Editora ADDISON WESLEY BRA, 2008.
04. DOGGET, G. And SUTCLIFFE, B., Mathematics for Chemistry, New York, Long. Scientific & Technical, 1995.

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

Serão realizadas duas provas teóricas durante o período letivo, com a finalidade de avaliar o aprendizado na disciplina. A média final será calculada pela fórmula:

$$MF = 0,5 P1 + 0,5 P2 ,$$

onde:

P1 = nota obtida na 1ª prova teórica,

P2 = nota obtida na 2ª prova teórica.

Para que o aluno seja considerado aprovado deve obter média igual ou maior que 5,0 e ter frequência mínima de 70%.

Ao aluno com frequência mínima de 70% reprovado por não ter atingido a nota 5,0 será concedida a oportunidade de um único exame final. A nota final será a média aritmética simples entre a média do período regular e a nota do exame final.

ANEXO B

Teoremas e demonstrações complementares

Teorema B.1. Teorema do Valor Extremo ou Teorema de Weierstrass.

Se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume um valor máximo absoluto $f(u)$ e um valor mínimo absoluto $f(v)$ em certos valores u e v .

Omitiremos a demonstração do **Teorema B.1.** devido à complexidade da mesma fugir do escopo deste trabalho.

Teorema B.2. Teorema do Confronto.

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x em um intervalo aberto que contenha a (exceto possivelmente em a) e

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L, \text{ então}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$

Demonstração.

Consideremos $\varepsilon > 0$. Uma vez que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, há um número $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ então } L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon.$$

Uma vez que $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$, há um número $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ então } |h(x) - L| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ então } L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon.$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Se $0 < |x - a| < \delta$ então $0 < |x - a| < \delta_1$ e $0 < |x - a| < \delta_2$, de modo que

$$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon.$$

Em particular,

$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon ,$$

isto é, $|g(x) - L| < \varepsilon$. Portanto, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ (STEWART, 2013). ■

Teorema B.3. Continuidade e diferenciabilidade.

Se f for diferenciável em a , então f é contínua em a .

Demonstração.

Para demonstrar que f é contínua em a , mostraremos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Fazemos isso ao mostrar que a diferença $f(x) - f(a)$ tende a 0.

Como, por hipótese, f é diferenciável em a , isto é,

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe.}$$

Dividindo e multiplicando-se $f(x) - f(a)$ por $x - a$, dado que $x \neq a$, temos que

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) .$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \\ &= f'(a) \cdot 0 = 0 . \end{aligned}$$

Para usar esse resultado, vamos começar com $f(x)$, e somar e subtrair $f(a)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} [f(a) + (f(x) - f(a))] \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(a) + \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] \\ &= f(a) + 0 = f(a) \end{aligned}$$

Consequentemente, f é contínua em a (STEWART, 2013). ■

Teorema B.4. Teorema de Fermat.

Se f tiver um máximo ou mínimo local¹⁶ em c e se $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$.

¹⁶ O número $f(c)$ é um valor máximo local de f se $f(c) \geq f(x)$ quando x está próximo de c . Ao contrário, o número $f(c)$ é um valor mínimo local de f se $f(c) \leq f(x)$ quando x está próximo de c .

Demonstração.

Suponha que f tenha um máximo local em c . Então $f(c) \geq f(x)$ se x for suficientemente próximo de c . Isso implica que, se h for suficientemente próximo de 0, com h sendo positivo ou negativo, então

$$f(c) \geq f(c+h)$$

e, portanto,

$$f(c+h) - f(c) \leq 0.$$

Podemos dividir ambos os lados de uma desigualdade por um número positivo. Assim, se $h > 0$ e h for suficientemente pequeno, temos

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0.$$

Tomando o limite à direita de ambos os lados dessa desigualdade obtemos

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} 0 = 0.$$

Mas, uma vez que $f'(c)$ existe, temos

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h},$$

e assim mostramos que $f'(c) \leq 0$.

Se $h < 0$, então o sentido da desigualdade é invertido quando dividimos por h :

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0, \quad h < 0$$

Logo, tomando o limite à esquerda, temos

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0.$$

Mostramos que $f'(c) \geq 0$ e também que $f'(c) \leq 0$. Uma vez que ambas as desigualdades devem ser verdadeiras, a única possibilidade é que $f'(c) = 0$.

Demonstramos o Teorema de Fermat para o caso de um máximo local. O caso de mínimo local é análogo (STEWART, 2013). ■

Teorema B.5. Teorema de Rolle.

Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

- (1) f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$;
- (2) f é derivável no intervalo aberto $]a, b[$;

$$(3) \quad f(a) = f(b).$$

Então, existe um número c em $]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração.

São três casos a considerar:

- Caso I: $f(x) = k$, uma constante.

Então $f'(x) = 0$, assim, o número pode ser tomado como qualquer número em $]a, b[$.

- Caso II: $f(x) > f(a)$ para algum x em $]a, b[$.

Pelo **Teorema B.1.**, que pode ser aplicado pela hipótese (1), f tem um valor máximo em algum lugar de $[a, b]$. Como $f(a) = f(b)$, ele deverá ter esse valor máximo em um número c num intervalo aberto $]a, b[$. Então f tem um máximo local em c e, pela hipótese (2), f é derivável em c . Portanto $f'(c) = 0$ pelo **Teorema B.4.**

- Caso III: $f(x) < f(a)$ para algum x em $]a, b[$.

Pelo **Teorema B.1.**, f tem um valor mínimo em $[a, b]$ e, uma vez que $f(a) = f(b)$, ela assume esse valor mínimo em um número c em $]a, b[$.

Novamente $f'(c) = 0$ pelo **Teorema B.4.** (STEWART, 2013). ■

Teorema B.6. Teorema do Valor Médio.

Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

- (1) f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$.
- (2) f é derivável no intervalo aberto $]a, b[$.

Então, existe um número c em $]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ou, de maneira equivalente,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Demonstração.

Aplicamos o **Teorema B.5.** a uma nova função h definida como a diferença entre f e a função cujo gráfico é a reta secante AB . A inclinação de AB é dada por

$$m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

de modo que a equação da reta AB pode ser escrita como

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

ou como

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Assim,

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Verifiquemos que h satisfaz as três hipóteses do **Teorema B.5.**

- (1) A função h é contínua em $[a, b]$, pois é a soma de f e uma função polinomial de primeiro grau, ambas contínuas.
- (2) A função h é derivável em $]a, b[$, pois tanto f quanto a função polinomial de primeiro grau são deriváveis. Com efeito, podemos calcular h' diretamente da última equação:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(3)

$$h(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$$

$$\begin{aligned} h(b) &= f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) \\ &= f(b) - f(a) - [f(b) - f(a)] = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $h(a) = h(b)$.

Uma vez que h satisfaz as hipóteses do **Teorema B.5.**, esse teorema afirma que existe um número c em $]a, b[$ tal que $h'(c) = 0$. Portanto,

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

e, assim,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (\text{STEWART, 2013}). \quad \blacksquare$$

Teorema B.7.

Se $f'(x) = 0$ para todo x em um intervalo $]a, b[$, então f é constante em $]a, b[$.

Demonstração.

Sejam x_1 e x_2 dois números quaisquer em $]a, b[$, sendo $x_1 < x_2$. Como f é derivável em $]a, b[$, ela deve ser derivável em $]x_1, x_2[$ e contínua em $[x_1, x_2]$. Aplicando o **Teorema B.6.** a f no intervalo $[x_1, x_2]$, obtemos um número c tal que $x_1 < c < x_2$ e

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Uma vez que $f'(x) = 0$ para todo x , temos $f'(c) = 0$, e essa equação fica

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \quad \text{ou} \quad f(x_2) = f(x_1).$$

Portanto, f tem o mesmo valor em quaisquer dois números x_1 e x_2 em $]a, b[$. Isso significa que f é constante em $]a, b[$ (STEWART, 2013). $\blacksquare$