



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE MESTRADO

IFT–D.000/14

Estrutura simplética para teorias de spin alto pela descrição de twistors.

Henrique dos Santos Flores

Orientador

Andrei Mikhailov

Março de 2014

Agradecimentos

Quero agradecer a meus pais e minha família, pelo infinito apoio e inspiração; à minha amada namorada pelo suporte, motivação e carinho; e ao meu orientador, Andrei, pela incrível experiência, que sem a menor dúvida, transformou e enriqueceu a minha maneira de pensar.

Resumo

Escrevemos uma forma simplética para teorias com spin diferente de zero utilizando a descrição de twistors. Nossa abordagem segue das equações escritas por Penrose, e nossos resultados sugerem uma ação alternativa a teoria de Fronsdal. Diferenças entre as duas abordagens aparecem, muito embora elas sejam, essencialmente, equivalentes.

Palavras Chaves: estrutura simplética; twistors; teorias de spin alto.

Áreas do conhecimento: Teoria de campos; Física Matemática; Teoria de cordas.

Abstract

We write a symplectic form on higher spin theories using twistor description. Our approach follows from Penrose's equations, and our results seem to suggest an action different from Fronsdal theory. Differences between the two approaches also appear, although they are, essentially, equivalent.

Sumário

1	Introdução.	6
1.1	Estrutura simplética: fatos gerais.	6
1.2	Teorias de campo e simetrias de calibre.	7
1.2.1	Campo eletromagnético.	7
1.3	Twistors.	7
1.3.1	Análise complexa.	7
1.3.2	Espaço-tempo de Minkowski em descrição de twistors.	7
1.4	Teoria de spin alto.	7
1.4.1	Descrição por Fronsdal.	7
1.4.2	Descrição por twistors.	8
1.5	Estrutura simplética em teoria de spin alto.	8
1.5.1	Twistors.	8
1.5.2	Fronsdal.	8
2	Definição de geometria simplética.	10
2.1	Espaços vetoriais simpléticos.	10
2.1.1	O grupo simplético.	13
2.1.2	Planos no espaço simplético.	14
2.2	Estruturas simpléticas e complexas.	16
2.3	Variedades simpléticas.	17
2.3.1	Definição.	17
2.3.2	O fibrado cotangente e sua estrutura simplética.	17
2.4	Campos vetoriais hamiltonianos.	18
2.4.1	Álgebra de campos vetoriais.	20
2.4.2	A álgebra de Lie de funções hamiltonianas.	23
3	Mecânica clássica - construção da estrutura simplética.	26
3.1	Partícula livre não relativística.	26
3.2	Partícula sobre a ação do campo eletromagnético.	28
3.3	Sistemas hamiltonianos com simetrias: teorias de calibre.	29
3.3.1	Ação de Poisson de grupos de Lie.	29
3.3.2	O espaço de fase reduzido.	32
3.4	Teoria de campos.	34
3.4.1	Descrição hamiltoniana de sistemas com campos.	36
3.4.2	Coordenadas no espaço-tempo de Minkowski.	37
3.4.3	Campo escalar real.	37
3.4.4	Campos espinoriais.	37
3.4.5	Eletromagnetismo clássico.	39
4	Um pouco de análise complexa.	41
4.1	Superfícies de Riemann.	41
4.1.1	Variedades complexas.	41
4.1.2	Construção e propriedades.	42
4.2	Fibrados vetoriais.	46
5	Twistors	48
5.1	A esfera de Riemann.	48
5.2	Momentum e momento angular.	48
5.3	Twistors: relação com o espaço-tempo de Minkowski.	50
5.4	Campos.	52
5.4.1	Abordagem de Penrose: campos no espaço de twistors.	52
5.4.2	Sobre a descrição que utilizaremos.	54

6	Teoria de spins altos.	55
6.1	Descrição de Fronsdaal.	55
6.1.1	Partículas massivas: teoria de spins inteiros.	55
6.1.2	Um exemplo: campo de spin 2.	57
6.1.3	Graus de liberdade.	59
6.1.4	Um comentário sobre férmions.	60
6.1.5	Equações de Fronsdaal para spins altos.	62
6.2	Descrição por twistors.	65
6.2.1	Equações para helicidade negativa.	65
6.2.2	Equações para helicidade positiva.	65
7	Estrutura simplética em teoria de spins altos.	67
7.1	Descrição por twistors.	67
7.1.1	Estrutura simplética no eletromagnetismo reescrito.	67
7.1.2	Estrutura simplética para spin qualquer.	68
7.2	Considerações.	69
8	Apêndice 1: uma passagem por grupos e álgebras de Lie.	70
8.1	Definições.	70
8.2	As representações adjunta e coadjunta.	70
8.3	Estrutura simplética na representação coadjunta.	72
9	Apêndice 2: noções de fibrados.	73
9.1	Definição.	73
9.1.1	Fibrados equivalentes.	73
9.1.2	Coordenadas no fibrado.	74
9.2	Fibrado tangente.	74
9.3	Fibrado principal.	74

1 Introdução.

A teoria de spins altos é uma importante generalização natural de teorias físicas básicas como o eletromagnetismo e a gravidade. Uma aplicação importante, porém, foi encontrada no contexto da correspondência AdS/CFT [1]. Conjectura-se que, no limite em que o raio de AdS é muito pequeno, um subconjunto grande das excitações da corda desacopla do resto dos graus de liberdade e é descrito por uma teoria de spin alto não linear de **interação**, que é mal compreendida mesmo no nível clássico. Entendê-la poderia iluminar a correspondência AdS/CFT. Como a constante de acoplamento desta teoria pode ser variada e está relacionada com o número de cores N , obtemos, como um caso especial no limite $N \rightarrow \infty$, uma teoria de spins altos livre. Este caso não é tão difícil de entender-se quanto aquele na presença de interações. Todavia, este regime é muito sutil e nos leva a uma matemática muito interessante.

Nesta tese, nós estudaremos alguns aspectos matemáticos de campos com spins altos. Mais precisamente, descreveremos por twistors os campos livres; em particular, concentraremos-nos em calcular a estrutura simplética. A formulação por twistors é menos conhecida do que a "usual" descrição de Fronsdaal e, apesar das duas descrições serem equivalentes, elas resultam em estruturas simpléticas diferentes. Gostaríamos, futuramente, de estudar a relação entre as duas estruturas simpléticas.

Este trabalho foi amplamente inspirado pelas aulas de Alexei Rosly [12] ministradas no IFT UNESP.

1.1 Estrutura simplética: fatos gerais.

Para entendermos a construção da estrutura simplética em teorias de campo com spins altos utilizando a descrição de twistors cobriremos uma grande variedade de assuntos, tais como variedades simpléticas, grupos e álgebras de Lie, fibrações, e análise complexa. Gostaríamos, também, de fazer um

desenvolvimento fechado, ou seja, que nenhum desses assuntos, necessários para o entendimento do desenvolvimento principal, precisasse ser alguma espécie de pré-requisito. Claro, ressaltamos que o conhecimento básico de geometria será necessário, como por exemplo, a noção de espaços vetoriais e variedades.

Por isso, a primeira sessão é, basicamente, introdutória; lidaremos com a noção de estrutura simplética em um espaço vetorial explorando construções geométricas, tais como superfícies e subconjuntos invariantes. O nosso objetivo neste primeiro capítulo é entender o que significa construir a noção simplética na geometria e como esta estrutura pode ser interpretada e entendida intuitivamente. Os resultados devem ser consultados como dicionário e podem ser pulados em uma primeira leitura caso o leitor já esteja familiarizado com o programa.

1.2 Teorias de campo e simetrias de calibre.

O terceiro capítulo se torna, assim, o primeiro imprescindível para o trabalho. Nele, vamos explorar, por meio de exemplos, a construção explícita da forma simplética em teorias não relativísticas, bem como, também, generalizar para sistemas de campos. Um adendo importante será feito ao tratamento de teorias de calibre, que é necessário, principalmente, porque a estrutura simplética dessas teorias é degenerada. Portanto, precisaremos construir o espaço de fase reduzido ao tratar de sistemas hamiltonianos com simetrias. Grande parte desta seção lidará com álgebras e grupos de Lie, algo que para o leitor sem familiaridade é definido no apêndice 1 na página 70.

1.2.1 Campo eletromagnético.

Desenvolveremos, também, a linguagem geométrica para tratar o campo eletromagnético. Utilizaremos exaustivamente o conceito de fibrados. Novamente, o leitor não familiarizado é encaminhado ao apêndice 2 na página 73. Ressaltamos que os assuntos serão sempre desenvolvidos à medida em que forem necessários para entender o restante do texto, pois a matemática destes tópicos é exaustiva. No entanto, ela bastante necessária para a construção da teoria, bem como para entendermos seus limites de aplicabilidade.

1.3 Twistors.

1.3.1 Análise complexa.

Chegaremos, desta forma, as mesmas conclusões para a sessão 4, na qual lidamos, brevemente, com análise complexa. Precisamos estabelecer a teoria que servirá de base para os nossos desenvolvimentos em geometria de twistors. Construiremos, assim, variedades complexas, fibrados vetoriais e daremos atenção especial a esfera de Riemann. O assunto foi incluído no corpo do desenvolvimento porque assumimos um menor conhecimento da linguagem utilizada, que é bastante necessária para a definição de twistors.

1.3.2 Espaço-tempo de Minkowski em descrição de twistors.

Definiremos twistors explorando sua conexão com o espaço de Minkowski e o grupo de Lorentz. Novamente, os conceitos introduzidos serão explorados em exemplos físicos, tais como o campo eletromagnético, onde definiremos nossa abordagem e as características de nossa descrição utilizadas para a construção das equações de spin alto.

1.4 Teoria de spin alto.

1.4.1 Descrição por Fronsdaal.

Antes de avançarmos ao conteúdo principal, revisitaremos a formulação atual de teoria de spins altos. Ela foi criada por Fronsdaal e pode ser consultada na referência [14]. Brevemente passaremos pelo trabalho explorando apenas os tópicos necessários e importantes. Como, por exemplo, as lagrangianas das teorias de bóson e férmion, as suas equações de movimento, e o número de graus de liberdade da

teoria. Necessitamos do número dos graus de liberdade para verificar se as condições impostas pelo grupo de Poincaré são satisfeitas.

1.4.2 Descrição por twistors.

Aqui, aparecerão, pela primeira vez, as equações que descrevem a teoria de spins altos desenvolvidas por Penrose [11]. Estas equações contêm campos de calibre e são o lugar onde utilizaremos toda a teoria de variedades simpléticas em sistemas reduzidos desenvolvidas no capítulo 3, bem como, também, a descrição geométrica definida no capítulo 4. Temos por objetivo escrever uma estrutura simplética não degenerada para, portanto, definirmos o espaço de fase.

1.5 Estrutura simplética em teoria de spin alto.

1.5.1 Twistors.

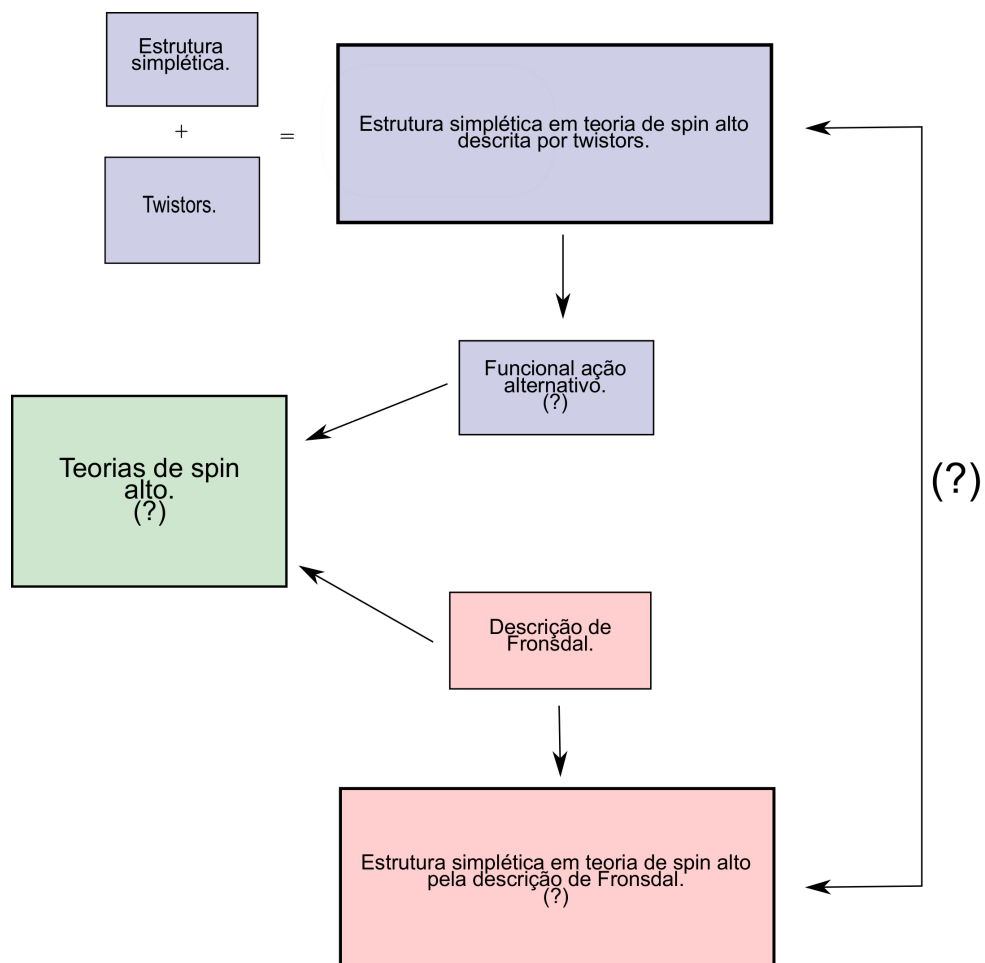
Com as equações escritas por Penrose [9] para a teoria de spins altos definiremos uma forma simplética. Verificaremos todas as propriedades, tais como fechamento e degenerescência.

A nova forma simplética que encontramos fornece indícios para a construção de uma ação alternativa a teoria de Fronsda. No entanto, sua forma explícita permanece um problema para ser tratado no futuro.

1.5.2 Fronsda.

Com o lagrangiano obtido por Fronsda, poderíamos calcular a estrutura simplética, entretanto no atual estágio de desenvolvimento do trabalho, este cálculo ainda deve ser feito. Sua importância consiste na possibilidade de relacionarmos a descrição apresentada aqui com a abordagem de Fronsda, visto que as descrições parecem diferentes à primeira vista.

O desenvolvimento completo do trabalho fica exemplificado no diagrama da próxima página, no qual os símbolos (?) representam os pontos que serão desenvolvidos futuramente. O diagrama também exemplifica a ordem lógica da sucessão de assuntos que aparecem neste trabalho.



2 Definição de geometria simplética.

Teorias de calibre são o principal foco do nosso trabalho, especialmente, a dinâmica hamiltoniana de tais teorias, também conhecida como dinâmica de sistemas hamiltonianos reduzidos. Além disso, buscamos uma descrição independente de coordenadas e bastante geral geometricamente, portanto, utilizaremos variedades diferenciáveis. Em uma variedade, a dinâmica hamiltoniana está ligada à estrutura simplética, que se trata de uma 2-forma fechada e não degenerada. O caráter simplético é puramente geométrico, o que torna interessante entendermos, primeiramente, espaços vetoriais que possuam essa estrutura.

A geometria trazida por formas bilineares é muito diferente e bastante rica quando comparada com a de tensores simétricos. A teoria, em espaços euclidianos, se caracteriza pela constante troca entre formas simétricas e antissimétricas. Analogias entre as duas construções são bastante úteis para demonstrações de teoremas. Não só isso, podemos basear fortemente nossa intuição, trazida do estudo de espaços euclidianos, para o espaço vetorial simplético. Considere, a título de exemplo, que formas simétricas, tais como a métrica, e formas antissimétricas, tais como a estrutura simplética, quando não degeneradas, têm diagonalização comum. Ou ainda, na presença de uma 2-forma, a métrica gera subconjuntos invariantes e estruturas quase complexas. Pontos importantes que exploraremos mais tarde.

Nesse momento, adiamos o uso de variedades, nos limitando apenas a definir a teoria em abertos de espaços vetoriais. Em especial, utilizaremos o conjunto euclidiano de dimensão par $\mathbb{R}^{2n}$. As demonstrações aqui feitas podem ser entendidas, sem dificuldade alguma, como teoremas locais em variedades reais. Nosso objetivo é entender a estrutura simplética, mesmo que intuitivamente, para podermos utilizá-la em casos gerais e construções mais elaboradas.

Os assuntos deste primeiro capítulo podem ser encarados como um dicionário. O leitor que já estiver confortável com as construções pode avançar ao próximo capítulo e voltar apenas para consultar as definições.

2.1 Espaços vetoriais simpléticos.

Consideremos um aberto U contido em $\mathbb{R}^{2n}$.

Definição 2.1. Uma estrutura simplética é uma aplicação bilinear nos reais não degenerada e antissimétrica - também chamada de produto interno antissimétrico - definida sobre vetores em U . Ou seja, dados dois vetores ξ e η temos um número $[\xi, \eta]$. Mais ainda, a operação $[\cdot, \cdot]$ deve satisfazer

$$(2.1) \quad [\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$$

junto com a condição de não degenerescência: para todo η diferente de zero a equação

$$(2.2) \quad [\xi, \eta] = 0$$

implica necessariamente $\xi = 0$.

É evidente que o requerimento (2.2) pode ser reformulado exigindo que o determinante dessa equação linear seja diferente de zero.

Para ganharmos familiaridade e intuição com a nova definição, é interessante considerar o seguinte exemplo. Sejam as coordenadas de um vetor x em U dadas por $\{p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n\}$. Podemos definir uma 2-forma

$$(2.3) \quad \omega = dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n$$

e impor a relação $[\xi, \eta] = \omega(\xi, \eta)$. Esta forma é não degenerada, visto que o determinante das suas componentes é não nulo, e antissimétrica. Desta forma, o espaço vetorial $\mathbb{R}^{2n}$ parametrizado pelas

coordenadas $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ recebe uma estrutura simplética. Aliás, é comum referir-se a (2.3) como estrutura simplética canônica. Repare que ela é, apenas, a soma das áreas orientadas de paralelogramos nos planos (p_i, q_i) .

Dois vetores quaisquer são chamados de anti-ortogonais quando o seu produto interno antissimétrico¹ é zero. Segue, também da antissimetria, que qualquer vetor é ortogonal a si mesmo. A noção de ortogonalidade é importante quando queremos construir estruturas geométricas com a forma simplética, tipo planos, esferas, e afins. Seguindo esta linha de pensamento, podemos, em completa analogia com geometria riemanniana, definir o complemento ortogonal - também chamado de complemento simplético - para algum vetor que pertença a esse espaço vetorial. Note que, como a aplicação simplética é bilinear, o complemento ortogonal também será um espaço vetorial.

Definição 2.2. O complemento simplético de W contido em U é o conjunto

$$(2.4) \quad W^\omega = \{\boldsymbol{\eta} \in U \mid \omega(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = 0, \quad \boldsymbol{\xi} \in W\}.$$

O complemento simplético não é necessariamente transversal a $\boldsymbol{\xi}$. O que motiva chamar W de

- isotrópico, quando $W \subset W^\omega$;
- coisotrópico, quando $W^\omega \subset W$;
- simplético, quando $W^\omega \cap W = \{0\}$;
- lagrangiano, quando $W = W^\omega$.

Dadas as definições, temos que W será isotrópico se e somente se ω é nulo em W . E W só será simplético quando a restrição $\omega|_W$ for não degenerada.

Lema 2.1. Para qualquer subespaço $W \subset U$ vale

$$(2.5) \quad \dim W + \dim W^\omega = \dim V$$

e

$$(2.6) \quad (W^\omega)^\omega = W.$$

O lema é importante por diversas razões. Em sua demonstração, construiremos um isomorfismo entre o espaço vetorial simplético e seu dual, algo que utilizaremos com exatidão em dinâmica hamiltoniana. Mais ainda, poderemos entender o porquê fluxos hamiltonianos (definição na página 19) serão morfismos simpléticos. Mas também, por outro lado, este lema ajuda a construir nossa intuição sobre a geometria de espaços simpléticos, porque vemos que complementos ortogonais simpléticos se comportam da mesma forma que complementos ortogonais métricos.

Demonstração. Seja U^* o dual de U . Definimos uma aplicação $\iota_\omega : U \rightarrow U^*$ por

$$(2.7) \quad \iota_\omega(\mathbf{u})(\mathbf{w}) = \omega(\mathbf{u}, \mathbf{w}).$$

Como ω é não degenerada, ι_ω é um isomorfismo. Portanto, identificamos W^ω com o kernel $W^\perp$ de W em U^* . No entanto, para qualquer subespaço W de algum espaço vetorial V , temos

$$(2.8) \quad \dim W^\perp + \dim W = \dim V. \quad \square$$

¹Sempre que possível omitiremos a palavra antissimétrica das expressões e utilizaremos apenas a palavra ortogonal no lugar de anti-ortogonal.

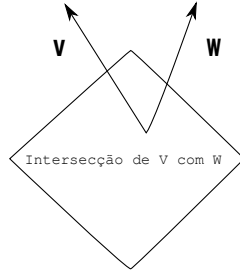


Figura 1: Complemento ortogonal de $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

Vamos tentar entender a demonstração para um caso simples. Consideremos o complemento simplético de um único elemento em U , digamos ξ . Se todo vetor de U estivesse em seu complemento W^ω , a equação (2.2) não teria solução e a definição 2.1 não seria satisfeita. Então, deve existir pelo menos um vetor que não pertence a W^ω , o que, para $n = 1$, torna-se exatamente o caso.

O argumento pode ser generalizado por indução. Considere dois vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ que, necessariamente, não são ortogonais (sabemos, pelo parágrafo anterior, que este par existe). Defina o complemento ortogonal de cada um deles em relação a $\mathbb{R}^{2n}$, os quais serão chamados de V e W respectivamente. Temos que $\mathbf{v} \notin W$ e vice-versa. Agora, se pudéssemos encontrar $\mathbf{u}$ na intersecção desses dois conjuntos que fosse ortogonal a $V \cap W$ teríamos outro vetor não ortogonal a $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Mas isso é impossível, pois a não degenerescência da forma simplética proíbe tal construção. Se $\mathbf{u}$ fosse ortogonal a $V \cap W$, teríamos $\mathbf{u}$ ortogonal a $\mathbb{R}^{2n}$ e ω degenerada. Exemplificamos com a figura 1 que representa os vetores e seus respectivos complementos ortogonais: é impossível construir mais um vetor fora do plano de intersecção.

Em conclusão, há sempre dois vetores não ortogonais. Além disso, esse par é único, o que confirma a prova do lema. Caso fixemos η , temos, por fim, que a dimensão de seu complemento é $2n - 1$.

Todo esse raciocínio pode ser empregado junto com o isomorfismo definido na demonstração do lema para definirmos uma base simplética nesse espaço vetorial.

Definição 2.3. Uma base simplética é um conjunto de $2n$ vetores, $\mathbf{e}_{q_a}$ e $\mathbf{e}_{p_a}$, nos quais $a = 1, \dots, n$; e satisfazem

$$(2.9) \quad [\mathbf{e}_{p_a}, \mathbf{e}_{p_a}] = [\mathbf{e}_{q_a}, \mathbf{e}_{q_a}] = [\mathbf{e}_{p_a}, \mathbf{e}_{q_b}] = 0$$

juntamente com

$$(2.10) \quad [\mathbf{e}_{p_a}, \mathbf{e}_{q_a}] = 1.$$

O isomorfismo encontrado na prova do lema 2.1 permite escrevermos uma base simplética em $\mathbb{R}^{2n}$; na realidade, poderíamos ter definido, primeiramente, uma álgebra simplética de vetores pelas relações (2.9) e (2.10) para depois encontrarmos a forma canônica (2.3). Todos os aspectos da teoria estão ligados exatamente como acontece com geometria riemanniana. Devo ressaltar que a base simplética evidencia as relações que obtemos a partir do lema, porque todo vetor de base é ortogonal a todos os outros, com exceção de apenas um. Mais ainda, as relações podem ser normalizadas, ou seja, o produto dos dois vetores é ± 1 .

Terminamos a seção com o que talvez seja o resultado mais importante de espaços simpléticos, cuja prova repete toda a construção empregada na definição de base simplética. O que, de qualquer forma, evidencia a generalidade das ideias que empregamos. Dentro disso, o teorema preenche o último buraco das construções geométricas, porque mostra que só devemos pensar em transformações lineares aplicadas a base.

Teorema 2.1. Toda estrutura simplética admite uma base simplética, e qualquer vetor diferente de zero, $\mathbf{e}$, pode ser tomado elemento da base.

Demonstração. Como a forma $[,]$ é não degenerada, existe um vetor $\mathbf{u}$ não ortogonal a $\mathbf{e}$. Ajustamos o comprimento desse vetor de forma que o produto escalar dele com $\mathbf{e}$ seja 1, e o teorema está provado para $n = 1$.

Considere, agora, o complemento ortogonal de ambos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{e}$, que chamaremos de V . Esse conjunto pode ser entendido como a intersecção do complemento de $\mathbf{u}$ com o de $\mathbf{e}$; isso significa que a dimensão dele deve ser $2n - 2$, quando $n > 1$, pois $\mathbf{u}$ - que tem complemento com dimensão $2n - 1$ - não está no complemento de $\mathbf{e}$ e vice-versa.

Resta-nos mostrar que V é um espaço simplético; para isso, temos que verificar a não degenerescência de $\omega|_V$. Tome um vetor $\boldsymbol{\xi}$ em V , que por construção é ortogonal tanto a $\mathbf{u}$ quanto a $\mathbf{e}$. Logo, se $\boldsymbol{\xi}$ for ortogonal a V , temos por consequência que ele é ortogonal a $\mathbb{R}^{2n}$ e $[,]$ é, então, degenerada. Assim, é impossível encontrar $\boldsymbol{\xi}$ ortogonal a V e a restrição $\omega|_V$ é injetiva.

Finalmente, se adicionarmos os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{e}$ a base de vetores em V , teremos uma base simplética em $\mathbb{R}^{2n}$ e o teorema está provado por indução em n . $\square$

Corolário 2.1. Espaços simpléticos de mesma dimensão são isomórficos.

2.1.1 O grupo simplético.

Transformações ortogonais preservam a estrutura euclidiana. Estamos interessados em procurar quais transformações preservam a estrutura simplética.

Definição 2.4. Uma transformação linear $S : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ do espaço simplético em si mesmo é chamada simplética se satisfaz

$$(2.11) \quad [S\xi, S\eta] = [\xi, \eta]$$

para todos vetores $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\eta}$ em $\mathbb{R}^{2n}$. O conjunto de todas as transformações simpléticas de $\mathbb{R}^{2n}$ é chamado de grupo simplético, denotado por $Sp(2n)$.

Sendo S uma transformação linear, a composição de duas transformações simpléticas também será simplética. Precisamos mostrar que as transformações possuem inversa; e o jeito mais fácil é calcular o determinante da transformação. Começamos lembrando da estrutura canônica dada pela 2-forma na equação (2.3), que surgiu quando identificamos formas diferenciais com a estrutura simplética. Ou seja, S deve preservar a forma diferencial ω .

Adicionado a isso, lembremos que ω consiste da soma das áreas de paralelogramos nos planos definidos pelos vetores simpléticos. Podemos, então, construir um elemento de volume vol em $\mathbb{R}^{2n}$ ao tomar a n -ésima potência exterior de ω ,

$$(2.12) \quad \text{vol} = \underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n \text{ vezes}}.$$

Ao reunirmos todas as informações, obtemos que S preserva o elemento de volume de $\mathbb{R}^{2n}$, o que implica $\det S = 1$ (é o jacobiano da transformação de coordenadas).

Teorema 2.2. Uma transformação linear $S : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é simplética se e só se leva uma base simplética em outra base simplética.

Demonstração. O produto interno de dois vetores quaisquer pode ser escrito como combinação linear de vetores da base simplética. Se a transformação não muda o produto interno das bases, então ela não muda o produto interno de nenhum vetor. $\square$

Para deixarmos o desenvolvimento mais concreto, podemos calcular o grupo que contém a transformação S no caso mais simples. Definimos sobre uma base simplética $\{\mathbf{e}_{p_a}, \mathbf{e}_{q_a}\}$ as componentes da forma simplética ω como

$$(2.13) \quad \omega(\mathbf{e}_{p_a}, \mathbf{e}_{q_b}) = \omega_{ab},$$

que satisfazem

$$(2.14) \quad S_c^a \omega_{ab} S_d^b = \omega_{cd}$$

sobre a ação de uma transformação simplética. Podemos escrever as equações, mais facilmente, em forma de matrizes para o caso $n = 1$, utilizando a equação (2.3), e obteremos, em $\mathbb{R}^{2n}$, que

$$(2.15) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{c} \\ \mathbf{b} & \mathbf{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Encontramos que os quatro coeficientes a serem determinados obedecem apenas a relação que já provamos, $\det S = 1$. Não há equações suficientes para fixarmos os parâmetros, no entanto isso é totalmente esperado. Lembra-se, que em $\mathbb{R}^2$, a forma simplética é exatamente o elemento de volume, o que implica

$$(2.16) \quad Sp(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R}).$$

Para dimensões mais altas, isso não acontece. Teremos, em geral, que $Sp(2n)$ está contido em $SL(2n)$ como um subgrupo próprio - nunca exatamente igual.

2.1.2 Planos no espaço simplético.

Utilizaremos os complementos ortogonais que definimos para construção de estruturas geométricas no espaço simplético. Apesar de similaridades com a teoria euclidiana terem sido úteis até o momento, nem todas as superfícies definidas se comportarão da mesma maneira.

De qualquer forma, ainda podemos mostrar que qualquer transformação simplética pode levar qualquer vetor não nulo em qualquer outro. Basta utilizarmos o teorema 2.2, o qual diz que um vetor da base simplética é sempre levado em uma combinação linear de outros vetores de base, o que, no final, apenas ajustaria as coordenadas e mudaria o vetor. Fixaremos a notação escrevendo, para uma base simplética,

$$(2.17) \quad \mathbf{x} = \sum p^a \mathbf{e}_{p_a} + q^a \mathbf{e}_{q_a}$$

para qualquer vetor $\mathbf{x}$ que pertence ao espaço simplético.

Consideremos subespaços isotrópicos, que já foram definidos em 2.2; e tomemos como exemplo a superfície delimitada pelas equações de coordenadas $\{p_1, \dots, p_k\}$, nas quais k é, necessariamente, menor que n e os p 's são constantes. Essa superfície, que chamaremos de W , é isotrópica, pois $p^a \omega_{ab} p^b = 0$, o que significa dizer que a forma simplética é nula em W ; portanto $W \subset W^\omega$.

Entretanto, repare bem que, apesar de qualquer vetor poder ser escrito em termos de outro, subespaços isotrópicos não são equivalentes entre si. Podemos, sem perda de generalidade, pensar em dimensão $n = 2$. Os planos definidos por (p_1, p_2) e (p_1, q_1) nunca poderiam ser levados um no outro, porque o primeiro é isotrópico enquanto o segundo nunca poderia satisfazer esta condição, visto que $p^1 \omega_{11} q^1 = 1$. Na verdade, fica bastante claro que qualquer plano que não seja isotrópico pode ser levado em algum outro plano não isotrópico por uma transformação simplética. Porém, vamos elaborar esse pensamento com mais cuidado ao voltar nossa atenção ao estudo de subespaços isotrópicos.

Torna-se útil para tais cálculos em geometria simplética definir uma estrutura euclidiana por

$$(2.18) \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum p_a^2 + q_a^2.$$

A base simplética é ortonormal diante dessa estrutura por definição. Segue, como as duas estruturas são não degeneradas, que podemos relacioná-las por um operador $I : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ dado por

$$(2.19) \quad [\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \langle I\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

Por consequência, o operador I é antissimétrico, obviamente, em virtude da antissimetria da estrutura simplética. Se utilizarmos as definições (2.18) e (2.15) temos, quando $\mathbf{x} = \mathbf{y}$,

$$(2.20) \quad (\mathbf{p}_a \quad \mathbf{q}_a) \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_a \\ \mathbf{q}_a \end{pmatrix} = (\mathbf{p}_a \quad \mathbf{q}_a) \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{E}_n \\ \mathbf{E}_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_a \\ \mathbf{q}_a \end{pmatrix},$$

o que implica $\mathbf{E}_n = \mathbf{I}_n$, no qual $\mathbf{I}_n$ representa a matriz identidade em dimensão n . Então, em geometria euclidiana, a estrutura simplética consiste apenas de uma rotação por 90° nos planos (p_i, q_i) . Mais ainda, note que $I^2 = -\mathbf{I}_{2n}$.

Teorema 2.3. Uma transformação S é simplética se e somente se a sua matriz, no sistema de coordenadas $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$, satisfaz a relação

$$(2.21) \quad S^t I S = I,$$

na qual

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}$$

e S^t é o transposto de S .

Demonstração. Basta escrevermos a condição de ser simplética,

$$[S\xi, S\eta] = [\xi, \eta],$$

em termos do produto interno euclidiano, por meio do operador I . Desta forma, teremos que

$$\langle IS\xi, S\eta \rangle = \langle I\xi, \eta \rangle,$$

ou

$$\langle S^t I S \xi, \eta \rangle = \langle I \xi, \eta \rangle$$

para todos os vetores. □

Embora estruturas euclidianas e o operador I não sejam invariantes associados ao espaço simplético, ambas são muito convenientes.

Teorema 2.4. Um plano π de um espaço simplético é isotrópico se e somente se o plano $I\pi$ é ortogonal a π .

Demonstração. Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ pertencem a π , então $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = 0$. Isso implica $0 = \langle I\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, no qual $I\mathbf{x}$ pertence a $I\pi$. □

O operador I não é singular, ou seja, π e $I\pi$ devem ter a mesma dimensão. Logo, eles não podem ser ortogonais se $k > n$. Disso tiramos

Corolário 2.2. A dimensão de um subespaço isotrópico em $\mathbb{R}^{2n}$ é menor ou igual a n .

Os subconjuntos isotrópicos que construímos são coleções das n coordenadas que se anulam sobre ação da estrutura simplética. Em geral, podemos construir um plano com qualquer combinação de n coordenadas, o que nos dá um total de C_n^{2n} planos de dimensão n . Dentro deles, temos apenas 2^n planos isotrópicos e é fácil ver o porquê. Dado o conjunto $\{1, \dots, n\}$ de coordenadas, a qualquer partição $(i_1, \dots, i_k), (j_1, \dots, j_{n-k})$ pode ser associado um plano isotrópico do tipo que definimos anteriormente nesta seção. Isso faz o número total de planos ser igual ao número de todos os possíveis subconjuntos do conjunto $\{1, \dots, n\}$, que é 2^n .

Terminamos, elaborando intuitivamente, o porquê planos isotrópicos não são carregados uns nos outros.

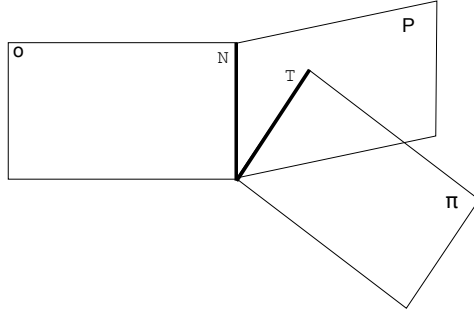


Figura 2: Construção do plano O transversal ao plano π .

Teorema 2.5. Todo plano isotrópico de dimensão n , π , no espaço simplético $\mathbb{R}^{2n}$ é transverso a, pelo menos, um dos outros 2^n planos isotrópicos.

A prova irá se basear na figura 2.

Demonstração. Seja P um plano isotrópico tal como na figura 2 parametrizado por coordenadas $\{p_1, \dots, p_n\}$. Tomemos a intersecção $T = \pi \cap P$ e suponha que sua dimensão é igual a k , $0 \leq k \leq n$. Todo subespaço de dimensão k a um subespaço de dimensão n é transverso a um plano de dimensão $(n - k)$, parametrizado pelas coordenadas

$$N = (p_{i_1}, \dots, p_{i_{n-k}}); \quad T + N = P.$$

Consideramos o plano isotrópico dado por

$$O = (p_{i_1}, \dots, p_{i_n}, q_{j_1}, \dots, q_{j_k}), \quad N = O \cap P.$$

e mostraremos que o plano π é transverso a O : $\pi \cap O = 0$. Porém, nós vemos que

$$T \subset \pi, \pi \text{ é ortogonal a } \pi \Rightarrow T \text{ é ortogonal a } \pi$$

e

$$N \subset O, O \text{ é ortogonal a } O \Rightarrow N \text{ é ortogonal a } O.$$

Assim, pelas considerações de antes obtemos

$$T + N \text{ é ortogonal a } \pi \cap O \Rightarrow P \text{ é ortogonal a } \pi \cap O.$$

Mas como P é um plano isotrópico de dimensão n , todo vetor ortogonal a P pertence a P , ou seja, $\pi \cap O \subset P$ e

$$\pi \cap O = (\pi \cap P) \cap (O \cap P) = T \cap N = 0. \quad \square$$

2.2 Estruturas simpléticas e complexas.

O operador I definido na equação (2.19) satisfaz $I^2 = -I$. Isto significa que não só podemos ter uma estrutura simplética juntamente com euclidiana, mas também uma estrutura complexa, que seria definir multiplicação por $i = \sqrt{-1}$ pela ação do operador I . Identificamos, assim, o espaço vetorial $\mathbb{R}^{2n}$ com o espaço complexo $\mathbb{C}^n$, cujas coordenadas seriam $z_k = p_k + iq_k$.

As transformações lineares que utilizamos em $\mathbb{R}^{2n}$ devem preservar, agora, também, a estrutura simplética; esse grupo chamamos de geral linear e denotamos $GL(n, \mathbb{C})$. Transformações que são ortogonais e simpléticas também serão complexas. Ao passo que, àquelas ambas complexas e ortogonais

são simpléticas, e todas simpléticas e complexas são ortogonais. Portanto, a intersecção de dois dos três grupos é igual a intersecção dos três:

$$(2.22) \quad O(2n) \cap Sp(2n) = Sp(2n) \cap GL(n, \mathbb{C}) = GL(n, \mathbb{C}) \cap O(2n).$$

A essa intersecção chamamos de grupo unitário $U(n)$. Transformações unitárias preservam o produto interno hermitiano

$$(2.23) \quad \langle \xi, \eta \rangle + i [\xi, \eta];$$

os produtos internos e anti-internos em $\mathbb{R}^{2n}$ são, respectivamente, a parte real e imaginária.

2.3 Variedades simpléticas.

2.3.1 Definição.

Consideremos, novamente, um domínio $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ com coordenadas $\{p^1, \dots, p^n; q^1, \dots, q^n\}$, que representamos apenas por $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$. A estrutura simplética sobre U está definida em 2.1. As transformações de U que preservam a estrutura simplética são chamadas de transformações S - transformações simpléticas. Uma variedade simplética é por definição uma variedade colada de domínios n dimensionais U por transformações S .

Poderíamos ter dado uma definição invariante de variedade simplética. Explicitamente, tal variedade pode ser definida como um par (M, ω) , no qual M é uma variedade real e ω é uma 2-forma não degenerada e fechada. Esta definição se torna equivalente a primeira, porque podemos provar o teorema de Darboux: uma 2-forma fechada e não degenerada ω pode, localmente, ser escrita como $d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q}$ por meio de uma escolha de coordenadas $\{p^1, \dots, p^n; q^1, \dots, q^n\}$, que são chamadas coordenadas de Darboux.

Desta maneira, podemos ver que $\omega \in \Omega^2(M)$ é não degenerada se e somente se $\omega^n/n! \in \Omega^{2n}(M)$ é uma forma de volume. Denotaremos tal forma por vol e a chamaremos de forma de Liouville. Repare bem, toda variedade simplética é orientável.

Olharemos, com mais calma, para toda essa estrutura, do ponto de vista clássico. Desta forma, nos encaminhamos para a dinâmica hamiltoniana, que acontece no fibrado cotangente de uma variedade, chamado de espaço de fase. Naturalmente, o espaço de fase possui uma estrutura simplética, que permite definir fluxos de fase por meio de vetores hamiltonianos. O fluxo de fase, dado por um grupo de difeomorfismos parametrizados por um número real, preserva a estrutura simplética.

Vetores hamiltonianos na variedade formam uma álgebra de Lie, cuja operação é o chamado parênteses de Poisson.

2.3.2 O fibrado cotangente e sua estrutura simplética.

Dada uma variedade M , uma 1-forma definida sobre o espaço tangente TM_x de um ponto x de M é chamado de vetor cotangente. O conjunto de todos os vetores cotangentes no ponto x forma um espaço vetorial de dimensão n , o qual chamamos de dual de TM_x . É comum denotá-lo por T^*M_x e chamá-lo de espaço cotangente de M em x .

A união dos espaços cotangentes sobre todos os pontos de uma variedade é chamada de fibrado cotangente de M e denotado por T^*M . O conjunto T^*M é uma variedade diferenciável naturalmente, cuja dimensão é $2n$. Um ponto pertencente a T^*M é uma 1-forma sobre o espaço tangente TM e um ponto x em M . Então, se $\mathbf{q}$ for uma escolha de coordenadas locais para algum ponto $x \in M$, a 1-forma é dada por n componentes $\mathbf{p}$. Juntos, esses $2n$ números formam uma coleção de coordenadas para os pontos de T^*M .

Existe uma projecção $\pi : T^*M \rightarrow M$, que manda toda 1-forma em algum ponto da variedade. Essa projecção é diferenciável e, por definição, sobrejetiva. A pré-imagem de algum ponto $x \in M$ sobre π é o espaço cotangente T^*M_x .

Teorema 2.6. O fibrado cotangente T^*M tem estrutura simplética. Nas coordenadas descritas acima, essa estrutura simplética é dada pela fórmula

$$(2.24) \quad \omega = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q} = dp^1 \wedge dq^1 + \cdots dp^n \wedge dq^n.$$

Demonstração. Selecione alguma 1-forma em T^*M , digamos p . E seja ξ o vetor tangente a ela, ou seja, $\xi \in T(T^*M)$. A derivada da projeção, $\pi_* : T(T^*M) \rightarrow TM$, leva este vetor ξ para um vetor $\pi_*\xi$, tangente a M , em cada ponto x em que a 1-forma foi definida. Definimos, por fim, a 1-forma $a(\xi) = p(\pi_*\xi)$, que nas coordenadas locais torna-se $\mathbf{p} d\mathbf{q}$. Segue que seu diferencial é fechado e, pela seção anterior, não degenerado. $\square$

Tome o espaço de configuração como uma variedade M e considere um sistema com lagrangiana L . Em coordenadas locais, a operação $\dot{\mathbf{q}}$ é o vetor tangente a variedade no ponto $\mathbf{q}$, chamado de velocidade. O momento canonicamente conjugado $\mathbf{p} = \partial L / \partial \dot{\mathbf{q}}$ é um vetor cotangente, de forma que $\mathbf{p}\dot{\mathbf{q}}$ é um número real. Portanto, o espaço de fase dado pelas coordenadas $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ de um sistema lagrangiano é o fibrado cotangente da variedade de configuração M . Mais ainda, o teorema acima prova que o espaço cotangente possui uma estrutura simplética canônica. O que revela um aspecto fundamental da geometria simplética: as formas que a definem são localmente rígidas, não somente em vizinhanças de pontos, mas também em certas subvariedades.

Segue disso que a transformação de Legendre não depende de sistema de coordenadas. Ela leva uma função $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ no fibrado tangente para uma função $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ no fibrado cotangente.

Por fim, podemos, então, utilizar todas as construções que fizemos em geometria simplética. Em particular, estamos interessados no isomorfismo que a forma simplética produz entre 1-formas no espaço cotangente e vetores no espaço tangente.

Definição 2.5. A cada vetor ξ tangente a variedade simplética (M, ω) no ponto x , nós associamos uma 1-forma ω_ξ sobre TM_x pela fórmula

$$\omega_\xi(\eta) = \omega(\eta, \xi)$$

para todo vetor η em TM_x .

Lembramos ainda que ω não degenerada implica que tal construção é de fato um isomorfismo entre espaços vetoriais de dimensão $2n$. Em $\mathbb{R}^{2n}$, com coordenadas $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$, uma nova identificação entre vetores e formas é feita pelo produto interno euclidiano (2.18). O que torna a correspondência $\xi \mapsto \omega_\xi$ uma transformação de $\mathbb{R}^{2n}$ em $\mathbb{R}^{2n}$, que denotamos anteriormente por I .

Agora, ajustamos nossa notação de forma que I não terá um papel tão restrito. Simplemente será definido como o isomorfismo de $T^*M_x \rightarrow TM_x$, que construímos na definição 2.5.

2.4 Campos vetoriais hamiltonianos.

Seja I tal como construído acima e deixe H ser uma função na variedade simplética M . Então dH é uma 1-forma em M , e em todo o ponto, portanto, existe um vetor associado a ela; obtemos um campo vetorial IdH em M .

Definição 2.6. O campo IdH é chamado de campo hamiltoniano; H é chamado de função Hamiltoniana.

Na sessão anterior, tínhamos $T^*M = \mathbb{R}^{2n}$ e o isomorfismo torna-se, então, uma transformação do espaço vetorial em si mesmo, de forma que deve existir algum vetor tangente $\dot{\mathbf{x}}$ em TM para algum ponto $x \in M$ que satisfaz

$$(2.25) \quad \dot{\mathbf{x}} = IdH(x) \implies \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial H / \partial \mathbf{p} \\ \partial H / \partial \mathbf{q} \end{pmatrix},$$

ou seja

$$(2.26) \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}.$$

Denotaremos, muitas vezes, o campo hamiltoniano por ξ_H também, apenas por economia de notação. Repare que da forma como foi definido, este vetor deve satisfazer a relação

$$(2.27) \quad i_{\xi_H} \omega = dH,$$

justamente pelo fato de I ser um isomorfismo. Isso nos motiva a dizer que vetores em uma variedade (M, ω) são simpléticos se o seu fluxo preserva a forma ω , ou seja

$$(2.28) \quad L_{\xi} \omega = 0,$$

porque podemos entender melhor as simetrias da forma simplética.

Lema 2.2. Seja (M, ω) uma variedade simplética e $H \in C^\infty(M)$. Então

$$(2.29) \quad L_{\xi_H} H = 0 \quad \text{e} \quad L_{\xi_H} \omega = 0.$$

Demonstração. A primeira parte do lema segue da antissimetria de ω , pois

$$L_{\xi_H} H = dH(\xi_H) = \omega(\xi_H, \xi_H) = 0.$$

Enquanto a segunda parte segue de

$$L_{\xi_H} \omega = i_{\xi_H} d\omega + d(i_{\xi_H} \omega) = 0. \quad \square$$

Imediatamente obtemos que

Corolário 2.3 (Teorema de Liouville). O volume não varia ao longo de um campo hamiltoniano,

$$(2.30) \quad L_{\xi_H} \text{vol} = 0.$$

O lema 2.2 e a equação (2.27) nos mostram que ξ_H é um campo simplético se e somente se $i_{\xi} \omega$ é uma 1-forma fechada, e ξ_H é hamiltoniano se e somente se essa 1-forma é exata. Estas considerações nos remetem a cohomologia *de Rham*, de tal modo que se $H^1_{\text{dR}} = 0$, todo campo simplético é hamiltoniano.

Porém, isso não acontece sempre. Se considerarmos o cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ com coordenadas (θ, h) e a forma $\omega = d\theta \wedge dh$. O campo $\xi = \partial/\partial h$, responsável pelas translações na direção h , é simplético. Mas $i_{\xi} \omega = -d\theta$ não é exata. Logo, ξ não é hamiltoniano.

Na esfera S^2 , a função altura $H(\theta, h) = h$ juntamente com a forma simplética dada pelo elemento de área $d\theta \wedge dh$, implica que $\xi_H = \partial/\partial \theta$ é simplético, uma vez que $i_{\xi_H} (d\theta \wedge dh) = dh$. As órbitas são, portanto, todas periódicas com duas singularidades, como pode ser visto na figura 3.

Fechamos essa sessão definindo fluxos de fase hamiltonianos. Em uma variedade simplética (M, ω) com função hamiltoniana $H : M \rightarrow \mathbb{R}$, se o campo ξ_H gera um grupo de difeomorfismos parametrizados por um número real $g^t : M \rightarrow M$, então o grupo g^t é chamado de fluxo de fase hamiltoniano com função hamiltoniana H . Matematicamente, teremos

$$(2.31) \quad \left. \frac{d}{dt} [g^t \mathbf{x}] \right|_{t=0} = I dH(\mathbf{x}).$$

Mostramos no lema 2.2 que fluxos hamiltonianos preservam a estrutura simplética,

$$(2.32) \quad (g^t)^* \omega = \omega,$$

o que foi usado como uma demonstração para o teorema de Liouville. Além disso, vimos que fluxos hamiltonianos são as simetrias da forma simplética, o que significa que a variedade simplética terá tantas simetrias quantas funções hamiltonianas admissíveis.

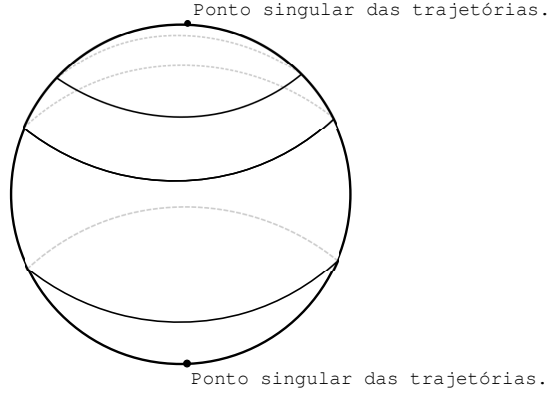


Figura 3: Fluxo hamiltoniano como função da altura.

Teorema 2.7 (Conservação de energia). A função H é a primeira integral do fluxo de fase hamiltoniano.

Demonstração. A derivada de H na direção de ξ_H é igual $dH(\xi_H) = L_{\xi_H}H$. E pelo lema 2.2 o teorema está provado. $\square$

2.4.1 Álgebra de campos vetoriais.

A cada par de campos vetoriais na variedade podemos determinar um novo vetor. A operação é chamada de parênteses de Poisson. Ela transforma o espaço vetorial de funções infinitamente diferenciáveis $C^\infty(M)$ em uma álgebra de Lie.

Lembremos que, em espaços euclidianos de dimensão três, o produto vetorial é bilinear, antissimétrico, e satisfaz a identidade de Jacobi

$$(2.33) \quad [[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0.$$

o que torna este espaço vetorial uma álgebra de Lie. Procederemos para uma definição abstrata, apenas generalizando o exemplo dado acima.

Definição 2.7. Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial L , onde é definida uma operação bilinear antissimétrica de $L \times L$ em L que satisfaz a identidade de Jacobi.

Essa operação geralmente é chamada de comutador - ou parênteses de Lie. É fácil ver que o conjunto de matrizes $n \times n$ torna-se uma álgebra de Lie se definirmos o comutador por $[A, B] = AB - BA$. Adicionado a isso, vemos que qualquer álgebra associativa pode ser levada em uma álgebra de Lie por meio desta operação.

Já no nosso caso, M é uma variedade e X um campo vetorial sobre M (ou seja, para cada ponto $x \in M$, temos um vetor X_x). E apenas podemos, com estas quantidades, construir, para cada campo vetorial, dois objetos:

- O grupo de difeomorfismos com um parâmetro, que seriam funções $g^t : M \rightarrow M$ para as quais X é o campo de velocidade

$$(2.34) \quad \left. \frac{d}{dt} [g^t x] \right|_{t=0} = X_x.$$

- O operador diferencial de primeira ordem. Referimo-nos a diferenciação de funções na direção do campo X , que é definida da seguinte forma: para cada função $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$, a derivada na direção de X é uma nova função $L_X \varphi$, cujo valor no ponto x é

$$(2.35) \quad (L_X \varphi)(x) = \left. \frac{d}{dt} \varphi(g^t x) \right|_{t=0}.$$

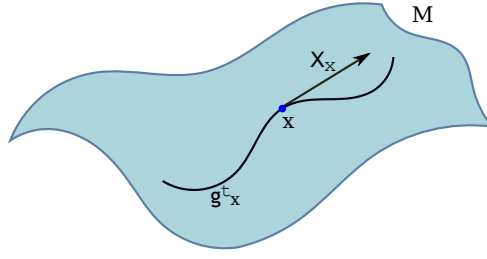


Figura 4: O grupo de difeomorfismos gerado por um campo vetorial.

Estritamente falando, vetores geram difeomorfismos se e só se a variedade for compacta. Como contra exemplo, considere o campo vetorial d/dt definido no aberto $(0, 1)$. No entanto, sempre podemos encontrar um conjunto compacto dentro de qualquer outro; isto implica que podemos definir g^t em regiões suficientemente pequenas da variedade, o que já é bastante suficiente para nossas construções.

Em um sistema de coordenadas locais $(x^1, \dots, x^n)$ para a variedade M , o vetor X é dado por suas componentes $(X_x^1, \dots, X_x^n)$; o fluxo g^t é, portanto, dado pelo conjunto de equações diferenciais

$$(2.36) \quad \dot{x}^1 = X_x^1, \dots, \dot{x}^n = X_x^n.$$

A derivada de $\varphi = \varphi(x^1, \dots, x^n)$ na direção de X é

$$(2.37) \quad L_X \varphi = X_x^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} + \dots + X_x^n \frac{\partial \varphi}{\partial x^n}.$$

Poderíamos dizer que, nas coordenadas definidas, o operador L_X tem a forma

$$(2.38) \quad L_X = X_x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + X_x^n \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

Na realidade, todas essas correspondências entre campos vetoriais, fluxos, e diferenciações são uma a uma. Em outras palavras, todas representam a mesma estrutura, embora pareçam diferentes. A geometria do processo está ilustrada na figura 4.

Suponha que tenhamos dois campos vetoriais diferentes A e B definidos sobre uma variedade M . Os fluxos correspondentes g_a^t e g_b^s , em geral, não comutam:

$$(2.39) \quad g_a^t g_b^s \neq g_b^s g_a^t$$

conforme pode ser visto na figura 5. Obviamente, isso está relacionado com a álgebra de vetores. Podemos definir uma medida do grau de não comutatividade dos dois fluxos considerando sua ação sobre um ponto $x \in M$. Basicamente, estamos interessados na ação da diferença $(g_a^t g_b^s - g_b^s g_a^t)x$. E como queremos relacionar esta diferença com os vetores que geram o fluxo, estimaremos a diferença comparando os pontos resultantes sob a ação de uma função $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$. A diferença

$$(2.40) \quad \Delta(t; s; x) = \varphi(g_a^t g_b^s x) - \varphi(g_b^s g_a^t x)$$

é diferenciável se φ o for. Mais ainda, é zero quando $s = 0$ ou $t = 0$ e note que só precisamos nos preocupar com o termo proporcional a st , pois ele é o único não nulo. Termos de ordem mais alta se anulam na expansão em série de Taylor.

Lema 2.3. As derivadas mistas $\partial^2 \Delta / \partial s \partial t$ em 0 são iguais ao comutador do diferencial nas direções A e B :

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \left[\varphi(g_a^t g_b^s x) - \varphi(g_b^s g_a^t x) \right] = (L_B L_A \varphi - L_A L_B \varphi)(x).$$

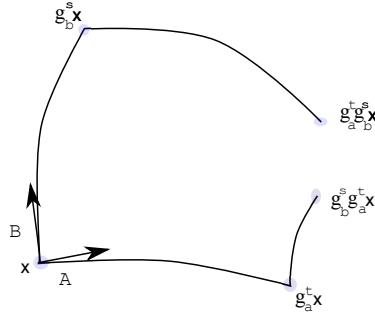


Figura 5: Fluxos em uma variedade não comutam.

Demonstração. Pela definição de L_A ,

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} [\varphi(g_a^t g_b^s x)] \right|_{t=0} = (L_A \varphi)(g_b^s x),$$

e pela definição de L_B ,

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} [\psi(g_b^s x)] \right|_{s=0} = (L_B \psi)(x).$$

Basta tomarmos $\psi = L_A \varphi$, que

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \varphi(g_a^t g_b^s x) = (L_B L_A \varphi)(x). \quad \square$$

À primeira vista, pode parecer que o operador diferencial que encontramos é de segunda ordem. No entanto, se utilizarmos coordenadas locais, podemos ver facilmente que a diferença

$$(2.41) \quad (L_B L_A - L_A L_B) \varphi = \sum_{a,b=1}^n \left(B^a \frac{\partial A^b}{\partial x^a} - A^a \frac{\partial B^b}{\partial x^a} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x^b}$$

é de primeira ordem. Mais ainda, pelas considerações que fizemos, esse operador diferencial deve ter um campo vetorial correspondente, o que nos motiva definir

Definição 2.8. O parênteses de Poisson (ou comutador) de dois campos vetoriais $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ em uma variedade M é o campo vetorial para o qual

$$L_C = L_B L_A - L_A L_B.$$

Geralmente, o parênteses de Poisson para dois campos vetoriais é denotado por

$$\mathbf{C} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}].$$

As componentes dele, em um sistema de coordenadas locais, já foram calculadas na equação (2.41). Resta-nos provar que esta operação transforma o espaço vetorial de campos vetoriais de uma variedade numa álgebra de Lie.

Teorema 2.8. O parênteses de Poisson transforma o espaço vetorial de campos definidos sobre variedades em uma álgebra de Lie.

Demonstração. Antissimetria e linearidade são válidas por construção. Temos que verificar a identidade de Jacobi, ou seja, devemos abrir cada um dos termos, onde teremos coisas do tipo

$$L_{[[A,B],C]} = L_C L_{[A,B]} - L_{[A,B]} L_C = L_C L_B L_A - L_C L_A L_B + L_A L_B L_C - L_B L_A L_C.$$

No total, há 12 termos na soma

$$L_{[[A,B],C]} + L_{[[B,C],A]} + L_{[[C,A],B]},$$

e cada termo aparece duas vezes, com sinais opostos. Isso pode ser visto permutando-se as letras na equação acima. $\square$

2.4.2 A álgebra de Lie de funções hamiltonianas.

Os campos hamiltonianos de uma variedade simplética formam uma subálgebra da álgebra de Lie de campos vetoriais. As funções hamiltonianas também formam uma álgebra de Lie, cuja operação é o parênteses de Poisson de funções; e as primeiras integrais do fluxo de fase hamiltoniano formam uma subálgebra da álgebra de Lie das funções hamiltonianas.

Definição 2.9. O parênteses de Poisson (F, H) de funções F e H definidas sobre uma variedade simplética (M, ω) é a derivada da função F na direção do fluxo de fase da função hamiltoniana H ,

$$(2.42) \quad (F, H)(x) = \left. \frac{d}{dt} \left[F(g_H^t(x)) \right] \right|_{t=0}.$$

Acontece que o parênteses de Poisson de duas funções em M será também uma função em M . Mais ainda, invariantes canônicos não variam na direção do fluxo hamiltoniano, de forma que obtemos facilmente

Corolário 2.4. A função F é uma primeira integral do fluxo de fase com hamiltoniano H se e somente se o seu parênteses de Poisson com H é identicamente nulo, $(F, H) = 0$.

Pela equação (2.34), o campo hamiltoniano ξ_H gera o fluxo g_H^t , em outras palavras, o vetor $\xi_H = \text{Id}H$ é o campo velocidade de g_H^t . Aliado a isso, o isomorfismo estabelece

$$\xi_H \mapsto dH,$$

o que juntamente com a definição de parênteses de Poisson nos permite imediatamente mostrar

Corolário 2.5. O parênteses de Poisson das funções F e H é igual ao valor da 1-forma dF no vetor ξ_H , o gerador do fluxo de fase. Assim

$$(2.43) \quad (F, H) = dF(\xi_H).$$

E com o lema 2.2, nós teremos

Corolário 2.6. O parênteses de Poisson das funções F e H é igual ao produto interno antissimétrico dos vetores que geram os fluxos de fase com hamiltonianos F e H :

$$(F, H) = \omega(\xi_H, \eta_F).$$

Todas propriedades usuais do parênteses de Poisson decorrem do corolário 2.6, tais como antissimetria e bilinearidade sobre os reais. Os argumentos utilizados em todas as demonstrações são bastante diretos. Mesmo assim, os seus resultados combinados levam ao teorema de Noether.

Teorema 2.9 (Teorema de Noether). Se o hamiltoniano H em uma variedade simplética (M, ω) admite um grupo parametrizado por um número de real de transformações canônicas dadas pelo hamiltoniano F , então F é a primeira integral do sistema com hamiltoniano H .

Demonstração. Pelo corolário 2.4, H é a primeira integral do fluxo g_F^t , pois $(H, F) = 0$. Então $(F, H) = 0$, pelas propriedades do corolário 2.6, e F é uma primeira integral, se contarmos novamente o corolário 2.4. $\square$

Novamente, entender os desenvolvimentos em um exemplo torna-se ilustrativo. Tomemos $M = \mathbb{R}^{2n}$; pela definição, em coordenadas locais $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$, o parênteses de Poisson pode ser escrito

$$(2.44) \quad (F, H) = \omega(\boldsymbol{\xi}_H, \boldsymbol{\eta}_F) = \langle I\boldsymbol{\xi}_H, \boldsymbol{\eta}_F \rangle,$$

o que implica

$$(2.45) \quad (F, H) = \left(-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \\ \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \end{pmatrix} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}},$$

como é usualmente conhecido na literatura. Ressalto que, neste caso, I é tal como no teorema 2.3. Em particular, as funções coordenadas satisfazem relações similares as da base simplética,

$$(p_i, p_j) = (q_i, q_j) = (p_i, q_j) = 0, \quad \text{se } i \neq j$$

e

$$(q_i, p_j) = -(p_j, q_i) = 1.$$

Teorema 2.10. O parênteses de Poisson satisfaz a identidade de Jacobi

$$((A, B), C) + ((B, C), A) + ((C, A), B) = 0.$$

Demonstração. A soma na qual estamos interessados representa a diferença de fluxos que computamos no lema 2.3, uma vez que observamos a definição do parênteses de Poisson. Teremos, então,

$$((A, B), C) + ((C, A), B) = (\mathbf{L}_C \mathbf{L}_B - \mathbf{L}_B \mathbf{L}_C) A,$$

no qual $\mathbf{L}$ é exatamente o operador definido no referido lema. Essa diferença deveria corresponder a um operador de segunda ordem, no entanto vimos, em coordenadas locais, que isso não é verdade. Ou seja, não há termos em derivada segunda de A nesta soma assim como para nenhuma das outras funções. Então, a soma é zero. $\square$

Corolário 2.7 (Teorema de Poisson). O parênteses de Poisson de duas integrais do fluxo F_1 e F_2 do sistema com hamiltoniano H é também uma integral do fluxo.

Demonstração. Pela identidade de Jacobi,

$$((F_1, F_2), H) = (F_1, (F_2, H)) + (F_2, (H, F_1)) = 0. \quad \square$$

O teorema de Poisson nos diz que sabendo duas quantidades conservadas podemos encontrar outras. No entanto, nem todos os invariantes no tempo serão encontradas desta maneira. Em geral, não há mais que $2n$ funções independentes. Mesmo assim, é um processo que pode revelar algo novo; em uma aplicação mais simples, podemos rapidamente ver que em um sistema físico no qual duas componentes do momento angular são conservadas temos necessariamente que a terceira também será.

Um subespaço vetorial de uma álgebra de Lie é chamado de subálgebra se o comutador de dois elementos do subespaço também pertence ao subespaço. Ou seja, uma subálgebra é também uma álgebra de Lie. Em particular

Corolário 2.8. Os campos hamiltonianos em uma variedade simplética formam uma subálgebra de álgebra de Lie de campos vetoriais.

A álgebra de Lie de funções hamiltonianas pode ser mapeada, naturalmente, na álgebra de vetores hamiltonianos. Nós associamos a cada função H um campo $\boldsymbol{\xi}_H$. Este mapa é um homomorfismo entre as álgebras. Seu kernel consiste de funções localmente constantes. Se M for conexa, o kernel é unidimensional, porque nosso mapa é linear e

Corolário 2.9. Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ campos hamiltonianos correspondentes as funções A e B . O parênteses de Poisson $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ é hamiltoniano e corresponde a função (A, B) .

Demonstração. Deixe $(A, B) = D$. A identidade de Jacobi pode ser escrita como

$$(C, D) = ((C, A), B) - ((C, B), A) \Rightarrow \mathbf{L}_D = \mathbf{L}_B \mathbf{L}_A - \mathbf{L}_A \mathbf{L}_B,$$

que é igual a $\mathbf{L}_{[A, B]}$. □

Ou seja, carregamos parênteses de Poisson definido em funções para parênteses definidos em campos vetoriais. O kernel, portanto, consiste de funções H para as quais $\text{Id}H$ é nula. Como I é um isomorfismo

$$\text{d}H = 0 \mapsto H = \text{constante}.$$

Corolário 2.10. Os fluxos de fase com funções hamiltonianas H_1 e H_2 comutam e somente se o seu parênteses de Poisson é localmente constante.

Demonstração. Pelo teorema de Frobenius é necessário e suficiente $[\boldsymbol{\xi}_{H_1}, \boldsymbol{\eta}_{H_2}] = 0$; e por nossas considerações do último parágrafo, essa condição é equivalente a $\text{d}(H_1, H_2) = 0$. □

O teorema diz que dado um fluxo que comuta com outro, nós podemos construir uma constante de movimento (primeira integral). Esse resultado é, em certo sentido, uma generalização do teorema de Noether.

3 Mecânica clássica - construção da estrutura simplética.

Um sistema físico é descrito em termos de estados e observáveis. Na descrição hamiltoniana da mecânica clássica, os estados formam uma variedade simplética (M, ω) e os observáveis são funções definidas sobre M . A dinâmica do sistema é descrita por um grupo de difeomorfismos simpléticos parametrizados por uma variável real, cuja função geradora é chamada de Hamiltoniano - ou energia. O sistema é dito livre se o par (M, ω) é uma variedade simplética afim e o movimento é dado por um grupo de difeomorfismos simpléticos parametrizados por um número. Por muitas vezes, a dinâmica da teoria está imersa em um grupo de simetria; por exemplo, em teorias de campo relativísticas, se assume que (M, ω) fica definida sob a ação de uma representação do grupo de Poincaré.

Muitos sistemas admitem descrição lagrangiana, na qual (M, ω) é derivada da chamada densidade lagrangiana. Uma das qualidades desta descrição é que quantidades conservadas podem ser calculadas diretamente; em teorias de campo, teremos uma corrente, chamada corrente de Noether, que implica não só localmente como também globalmente em leis de conservação. Isto tem enormes consequências fisicamente, pois nos permite medir energia, por exemplo, em qualquer região do espaço, não apenas a quantidade total disponível. No entanto, nem todas teorias clássicas de campo podem ser descritas por lagrangianos. Para teorias conformes de duas dimensões, o campo quiral livre é um exemplo.

A equação de movimento para um sistema mecânico é a equação de Euler-Lagrange. Ela surge da prescrição utilizada para se calcular extremos de um certo funcional. Disso, podemos construir uma 2-forma fechada ω na variedade $\mathcal{M}$ de soluções clássicas. Acontece que ω é não degenerada, e $\mathcal{M}$ é, então, uma variedade simplética.

3.1 Partícula livre não relativística.

Seja $X = \mathbb{R}^n$ o espaço euclidiano com produto interno padrão $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Uma partícula de massa m tem sua evolução descrita por um mapa $x : \mathbb{R} \rightarrow X$, em que² $t \mapsto \mathbf{x}(t)$. A densidade lagrangiana é

$$(3.1) \quad L = \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{x}}|^2 dt,$$

na qual $|\dot{\mathbf{x}}|^2$ é o produto interno $\langle d\mathbf{x}/dt, d\mathbf{x}/dt \rangle$. A integral da densidade lagrangiana,

$$(3.2) \quad S = \int_{t_0}^{t_1} L,$$

do tempo t_0 até o tempo t_1 é chamada de funcional ação, ou simplesmente ação. Se deformarmos x teremos

$$(3.3) \quad \delta L = m \langle \dot{\mathbf{x}}, \delta \dot{\mathbf{x}} \rangle dt = -m \langle \ddot{\mathbf{x}}, \delta \mathbf{x} \rangle dt + d[m \langle \dot{\mathbf{x}}, \delta \mathbf{x} \rangle].$$

Aqui, δ é o diferencial no espaço $\mathcal{F}$ de trajetórias $\mathbf{x}$ da partícula, d é o diferencial em $\mathbb{R}$. Ao integrar, obteremos

$$(3.4) \quad \delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} L = - \int_{t_0}^{t_1} dt m \langle \ddot{\mathbf{x}}, \delta \mathbf{x} \rangle + [m \langle \dot{\mathbf{x}}, \delta \mathbf{x} \rangle]_{t_0}^{t_1}.$$

A condição de extremo é que a 1-forma δS em $\mathcal{F}$ anule-se sobre deformações de $\mathbf{x}$ ³. Isso nos leva as equações de movimento

$$(3.5) \quad \ddot{\mathbf{x}} = 0,$$

²A variável t é chamada tempo.

³Estritamente falando, a integral precisa estar definida. Então, estas deformações precisam ter suporte compacto em (t_0, t_1) .

cujas soluções são trajetórias com velocidade constante. O termo de fronteira nos conduz, para cada tempo t , a 1-forma

$$(3.6) \quad \alpha(t) = m\langle \dot{\mathbf{x}}(t), \delta\mathbf{x}(t) \rangle$$

definida em $\mathcal{F}$ para todas as trajetórias $\mathbf{x}(t)$. No subespaço $\mathcal{M}$ de extremos - soluções da equação (3.5) - a ação S é uma função cujo diferencial é

$$(3.7) \quad \delta S = \alpha(t_1) - \alpha(t_0) \quad \text{em } \mathcal{M}.$$

Segue que a 2-forma definida por

$$(3.8) \quad \omega(t) = \delta\alpha(t) = m\langle \delta\dot{\mathbf{x}}(t) \wedge \delta\mathbf{x}(t) \rangle$$

é independente do tempo. E por uma razão bastante específica, a equação (3.7), que necessita da condição de compatibilidade

$$(3.9) \quad \int_{t_0}^{t_1} L + \int_{t_1}^{t_2} L = \int_{t_0}^{t_2} L.$$

Se fixarmos $t_0 \in \mathbb{R}$, o mapa $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}(t_0), \dot{\mathbf{x}}(t_0))$ do conjunto de extremos da ação, $\mathcal{M}$, para o fibrado tangente TX de X é um isomorfismo. E novamente podemos usar ω para levar do espaço tangente para o espaço cotangente. Mais precisamente, α é o pull-back da 1-forma canônica do espaço cotangente.

Podemos generalizar para um sistema de muitas partículas; o espaço de configuração se torna uma variedade riemanniana X , na qual a própria estrutura riemanniana é proporcional ao termo cinético. A evolução é dada pela função lagrangiana de X em $\mathbb{R}$, cuja forma é

$$(3.10) \quad L = \left(\frac{1}{2} |\dot{\mathbf{x}}|^2 + V(\mathbf{x}) \right) dt;$$

na expressão, colocamos a massa como um fator dentro da métrica. Temos, também, que o campo de forças que atua sobre a partícula, ou representa a interação entre diferentes partículas, é descrito por um potencial, uma função de X em $\mathbb{R}$.

Todo o processo pode ser repetido novamente. A equação de Euler-Lagrange é, agora, a lei de Newton

$$(3.11) \quad \nabla_t \dot{\mathbf{x}} + \nabla V = 0,$$

na qual ∇_t é a derivada compatível com a métrica riemanniana. A 1-forma no espaço de extremos é

$$(3.12) \quad \alpha(t) = \langle \dot{\mathbf{x}}(t), \delta\mathbf{x}(t) \rangle.$$

E a forma simplética

$$(3.13) \quad \omega = \langle \dot{\mathbf{x}}(t) \wedge \delta\mathbf{x}(t) \rangle.$$

A identificação do espaço de soluções com condições iniciais em tempo fixo acontece do mesmo jeito.

3.2 Partícula sobre a ação do campo eletromagnético.

Um fibrado principal G é um fibrado $\pi : P \rightarrow X$ juntamente com a ação contínua de um grupo de Lie G pela direita $P \times G \rightarrow P$ tal que G preserva as fibras, ou seja, dado $x \in X$ e $y \in P_x$, então $yg \in P_x$ para todo elemento do grupo ⁴. Com estas implicações, é possível mostrar que o fibrado é homeomórfico ao grupo G , pois sua ação de preservar fibras significa, também, que G age transitivamente e livremente em P .

O conjunto

$$(3.14) \quad G(x) = \{xg, g \in G\}$$

é chamado de órbita de G . Decorre, das propriedades listadas acima, que as órbitas de G são exatamente as fibras, o que nos permite definir uma relação de equivalência entre dois pontos em P . Precisamente, dois pontos serão equivalentes se pertencerem a mesma fibra. Naturalmente, tais fibras tem estruturas de G -torsors. O que nos permite obter o espaço P/G homeomórfico ao espaço base X . A estrutura diferenciável da variedade transforma os homeomorfismos em difeomorfismos.

Assim, no espaço-tempo $\mathbb{R} \times X$, um campo eletromagnético pode ser descrito por um $\mathbb{R}$ -torsor dado pela conexão (P, ∇) definida sobre o espaço-tempo. Matematicamente, uma fixação de calibre é uma seção (local) em P . Ela se torna uma 1-forma a após uma trivialização do fibrado. Em componentes temos

$$(3.15) \quad a = Vdt + A,$$

com V sendo o potencial escalar e A o potencial vetor. A evolução de uma partícula é dada pela função $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow X$, assim como anteriormente. O Lagrangiano torna-se, para uma partícula com massa m e carga q ,

$$(3.16) \quad L = \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{x}}|^2 dt - qx^*(a).$$

A ação $S = \int_{t_0}^{t_1} L$ é a soma do termo cinético com q vezes o transporte paralelo de $\mathbf{x}(t_0)$ para $\mathbf{x}(t_1)$ ao longo de $\mathbf{x}$. A variação δL tem como termo de fronteira

$$(3.17) \quad \alpha(t) = m\langle \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t) \rangle - qA(\delta \mathbf{x}(t)).$$

Se fixarmos t_i , então o mapa $\mathbf{x} \mapsto (\dot{\mathbf{x}}(t_i), \mathbf{x}(t_i))$ identifica o conjunto de extremos $\mathcal{M}$ com o espaço tangente TX . E o isomorfismo do espaço cotangente para o espaço tangente, dado pelo diferencial da equação (3.17), é exatamente igual ao caso anterior, porém transladado de qA . Se mudarmos o calibre escolhido, o espaço de extremos da ação não muda, pois tal mudança na trivialização seria um isomorfismo entre $\mathbb{R}$ -torsores com conexões para diferentes escolhas de tempo (estas mudanças são controladas pela ação). Neste exemplo, a ação não precisa ser um número real, mas sim um elemento de um $\mathbb{R}$ -torsor.

Daqui por diante, estaremos interessados em sistemas com simetrias de calibre. Eles serão utilizados na nossa descrição de teorias de spin alto. Mais ainda, lidaremos com estruturas simpléticas em teorias de campo, nas quais a forma é degenerada por causa do grupo de simetria adicional G . Faremos, então, uma pausa para discutir o espaço de fase reduzido, antes mesmo de começarmos a lidar com teorias de campo, porque essa construção nos permitirá tratar uma estrutura simplética que tem núcleo diferente de zero.

⁴Para mais detalhes, consulte o apêndice da página 73.

3.3 Sistemas hamiltonianos com simetrias: teorias de calibre.

Brevemente discutiremos a dinâmica de sistemas no espaço de fase reduzido e sua relação com variedades invariantes no espaço de fase original. Nosso principal objetivo é poder descrever como a estrutura simplética dá a dinâmica quando ela se torna degenerada, ou, em outras palavras, quando o seu kernel é diferente de zero. Necessitamos do formalismo desenvolvido aqui para tratar teorias de calibre, que são um ingrediente essencial em nossa formulação de teorias de spin alto. Desenvolveremos os assuntos à medida que forem necessários para o entendimento do núcleo do trabalho; nós não exploraremos toda a estrutura matemática do espaço de fase reduzido. Por isso, para mais detalhes, encaminhamos o leitor às referências [7] e [4]. Além disso, o leitor não familiarizado com os conceitos de álgebra de Lie e representação coadjunta é encaminhado para o apêndice 1 na página 70.

Pelo teorema de E. Noether, se o sistema físico admite um grupo adicional G , há mais primeiras integrais (funções da variedade nos reais que não variam no tempo). Todo difeomorfismo de G parametrizado por um número age como fluxo de fase, e cada curva de nível das primeiras integrais é invariante por este fluxo. Os subgrupos de G que levam estas subvariedades invariantes nelas mesmas nos permitem definir um quociente; explicitamente, estaremos interessados nesses subconjuntos módulo a ação deste subgrupo. Tal quociente é chamado de espaço de fase reduzido e possui uma estrutura simplética natural não degenerada.

3.3.1 Ação de Poisson de grupos de Lie.

Geralmente, dada uma variedade simplética (M, ω) e um grupo de Lie G que age sobre ela gerando difeomorfismos simpléticos, cada subgrupo de G , parametrizado por um número, age, localmente, como um fluxo de fase hamiltoniano em M . A título de exemplo, se M for um fibrado cotangente, como no caso do espaço de fase, todo difeomorfismo leva 1-formas em 1-formas. Assim, dado que temos uma forma canônica α , que gera uma estrutura simplética ($\omega = d\alpha$), a ação do grupo G em M é simplética, pois preserva α e, por consequência, ω . O subgrupo g^t de G define um fluxo hamiltoniano em M com função hamiltoniana dada pela fórmula

$$(3.18) \quad H(x) = \alpha \left(\frac{d}{dt} g^t x \right)_{t=0}.$$

Nós, simplesmente, generalizaremos a ideia ao assumir que, dado um grupo de Lie G agindo simplcticamente sobre a variedade conexa M , há para todo a na álgebra de Lie de G um grupo de difeomorfismos simpléticos com um parâmetro que tem como função hamiltoniana H_a . Estes hamiltonianos podem ser determinados de tal forma que sua dependência em a seja linear⁵.

Portanto, dada uma ação simplética de um grupo de Lie G e um hamiltoniano em M , construímos um mapa linear da álgebra de Lie de G na álgebra de Lie de funções hamiltonianas em M . A função $H_{[a,b]}$ associada ao comutador de dois elementos na álgebra é igual ao parênteses de Poisson (H_a, H_b) podendo, no máximo, diferir por uma constante:

$$(3.19) \quad H_{[a,b]} = (H_a, H_b) + C(a, b).$$

Cabe mencionar que a função C está relacionada com a existência de uma classe de cohomologia de dimensão 2 da álgebra de Lie de campos hamiltonianos globais. Na verdade, a ação simplética do grupo G , para o qual funções hamiltonianas bem definidas existem, define uma cohomologia da álgebra de Lie G . Esta cohomologia mede o desvio ao escolhermos o comutador de dois elementos igual ao parênteses de Poisson de suas funções hamiltonianas.

Definição 3.1. A ação de um grupo de Lie conexo sobre uma variedade simplética é chamada de ação Poisson se as funções hamiltonianas para os grupos com um parâmetro são bem definidas e escolhidas de forma que o hamiltoniano dependa linearmente do elementos da álgebra. Mais ainda, exigimos

⁵Repare, pela equação (3.15), o hamiltoniano fica definido a menos de uma constante. Assim, ao especificarmos constantes suficientes de forma a determinar a dependência em uma base da álgebra de G , teremos especificado para todas as funções hamiltonianas.

$$H_{[a,b]} = (H_a, H_b).$$

O que, em outras palavras, significa que a função hamiltoniana do comutador é igual a parênteses de Poisson das funções hamiltonianas.

Para exemplificar a dar intuição a nova definição, consideremos o seguinte exemplo. Seja V uma variedade diferenciável e G um grupo de Lie que age em V como o grupo de difeomorfismos. Deixe $M = T^*V$ ser o fibrado cotangente da variedade V com estrutura simplética usual $\omega = d\alpha$. As funções hamiltonianas criadas a partir dos grupos com um parâmetro são definidas exatamente como em (3.15). Pela definição da 1-forma α , as funções hamiltonianas H_a são lineares em $\mathbf{p}$, ou seja, em todo espaço cotangente. Portanto, o seu parênteses de Poisson é linear. A função $H_{[a,b]} - (H_a, H_b)$ é também linear em $\mathbf{p}$. E dado que ela é constante, então só pode ser zero. Concluimos, então, que a ação de um grupo de difeomorfismos simpléticos sobre um espaço cotangente é Poisson.

Outro exemplo, talvez mais interessante, é quando V é o espaço euclidiano tridimensional e G é o grupo de movimentos com dimensão 6 (3 translações e 3 rotações). Uma base para a álgebra de Lie são os seis grupos parametrizados por um número real:

- as translações com velocidade 1 ao longo das coordenadas q_1, q_2 e q_3 ;
- as rotações com velocidade angular 1 ao redor das mesmas coordenadas.

Pela fórmula (3.15) teremos as funções hamiltonianas correspondentes - em sua notação usual - p_1, p_2, p_3 e L_1, L_2, L_3 , com $L_1 = q_2 p_3 - q_3 p_2$, etc. Verifiquemos o termo L_1 rapidamente. Dado $x \in T^*V$, em coordenadas locais, podemos escrever a ação de uma rotação em torno do eixo 1, $g^t x$, como

$$(3.20) \quad g^t x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & -\sin(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(t) & -\sin(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix},$$

o que, quando derivado em relação a t e avaliado no ponto $t = 0$, nos dá o vetor

$$(3.21) \quad \left(\frac{d}{dt} g^t x \right)_{t=0} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -p_3 \\ p_2 \\ 0 \\ -q_3 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

Por fim, ao aplicarmos a forma α , teremos

$$(3.22) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -p_3 \\ p_2 \\ 0 \\ -q_3 \\ q_2 \end{pmatrix} = q_2 p_3 - q_3 p_2 = L_1.$$

E o teorema nos diz que os parênteses de Poisson de cada par de dessas seis funções é igual a função hamiltoniana correspondente ao comutador (parênteses de Poisson) dos grupos de um parâmetro.

A ação Poisson de um grupo G em uma variedade simplética M define um mapa

$$(3.23) \quad P : M \rightarrow \mathfrak{g}^*,$$

da variedade no espaço dual da álgebra de Lie do grupo G . A construção é como se segue; fixamos um ponto $x \in M$ e consideramos a função na álgebra de Lie que associa a cada elemento $a \in \mathfrak{g}$ o valor do hamiltoniano H_a em x :

$$(3.24) \quad p_x(a) = H_a(x).$$

Esse p_x é uma função linear em $\mathfrak{g}$ e o leva em um número real, portanto pertence a $\mathfrak{g}^*$. Mais ainda, está associada ao elemento x da variedade M , o que torna conveniente escrever $P(x) = p_x$. Seguindo definição usual na literatura[13], nós chamamos o mapa P de momentum, que é sempre um vetor em $\mathfrak{g}^*$.

Vamos detalhar a construção no nosso exemplo padrão. Seja V uma variedade, G um grupo de Lie agindo em V como grupo de difeomorfismos, $M = T^*V$ o fibrado cotangente e H_a a função hamiltoniana construída em (3.15) de G em M . O mapa momentum $P : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ é construído da seguinte forma: defina $\Phi : G \rightarrow M$, que nada mais é do que a ação dos elementos de G em um ponto de M , algo como $\Phi(g) = gx$. A forma canônica α em M induz uma 1-forma em G , $\Phi^*\alpha$. Sua restrição ao espaço tangente ao redor da identidade de G define uma 1-forma na álgebra de Lie. Então, para cada ponto $x \in M$, nós definimos uma função linear na álgebra de Lie. Este mapa é o momento de nossa ação Poisson.⁶

Teorema 3.1. Sobre o mapa momentum P , uma ação Poisson de um grupo de Lie é a ação coadjunta de G no espaço dual $\mathfrak{g}^*$ de sua álgebra, de forma que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & M \\ P \downarrow & & \downarrow P \\ \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{Ad_g^*} & \mathfrak{g}^* \end{array}$$

comuta.

O teorema nos encaminha direto para o resultado

Corolário 3.1. Se uma função hamiltoniana $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ é invariante sobre a ação Poisson de um grupo G que age em M . Então, o momentum é a primeira integral do sistema com hamiltoniano H .

Demonstração do corolário. A derivada, na direção do fluxo de fase com função hamiltoniana definida em M , de cada componente do momentum é zero, porque é igual a derivada da função H na direção do fluxo de fase correspondente ao subgrupo (de um parâmetro) em G . $\square$

Demonstração do teorema. O teorema afirma que a função hamiltoniana H_a gerada pelo grupo $\mathfrak{g}_H^t$ é levada, pelo difeomorfismo g , a função hamiltoniana $H_{Ad_g a}$, correspondente ao grupo $g\mathfrak{g}_H^t g^{-1}$. É suficiente mostrarmos que as derivadas das funções $H_a(g^s x)$ e $H_{Ad_g s_a}(x)$ são iguais para todo grupo parametrizado por um número real g^s .

A primeira dessas derivadas é (H_a, H_b) avaliado no ponto x . A segunda é $H_{[a,b]}(x)$. Como esta ação é Poisson, o teorema está provado. $\square$

⁶Em particular, caso V seja o espaço euclidiano de três dimensões e G o seu grupo de rotações em torno do ponto 0. Então, os valores do momentum são os vetores usuais de momento angular.

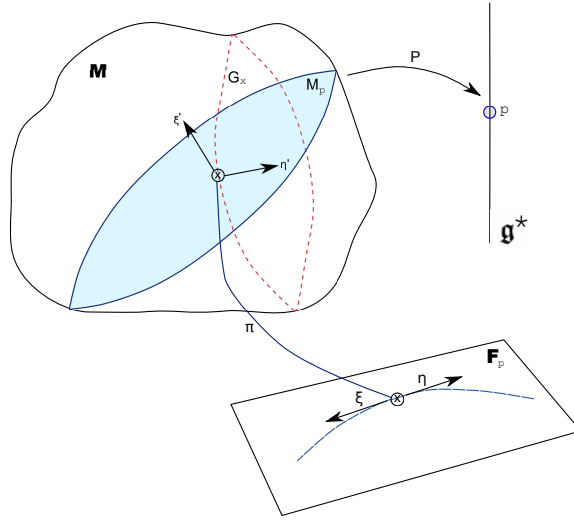


Figura 6: Espaço de fase reduzido.

3.3.2 O espaço de fase reduzido.

Suponhamos que a ação Poisson de algum grupo de Lie G em uma variedade simplética M seja dada. Consideremos as curvas de nível da função momentum (a imagem inversa de algum ponto $p \in \mathfrak{g}^*$ sobre o mapa P). Representaremos esse conjunto pela letra M_p , ou seja,

$$(3.25) \quad M_p = P^{-1}(p), \quad p \in \mathfrak{g}^*.$$

O conjunto M_p será uma variedade em nosso caso, porque o diferencial do mapa P em cada ponto do conjunto M_p mapeia o espaço tangente de M em todo o espaço tangente de $\mathfrak{g}^*$, assim todo valor em algum p é regular.

Em geral, o grupo G levaria M_p em algum outro subconjunto de M . No entanto, o subgrupo estacionário ao ponto p na representação coadjunta⁷ deixa M_p invariante. Chamaremos este subgrupo de G_p ; e ele será um grupo de Lie que age no conjunto de curvas de nível M_p .

O espaço de fase reduzido é o espaço fator de G_p em M_p . Para que esse quociente faça sentido, são necessárias algumas hipóteses, por exemplo

- O conjunto M_p precisa ser variedade. Isso significa que p é um valor regular;
- O grupo G_p é compacto;
- Os elementos do grupo G_p agem sobre M sem pontos fixos, ou seja, $g \in G_p$ e $x \in M_p$ nunca nos darão $gx = x$.

Se todas essas condições forem satisfeitas, podemos dar uma estrutura de variedade às órbitas de G_p em M_p . Uma carta, na vizinhança de um ponto $x \in M_p$ é fornecida por qualquer órbita transversal a $G_p x$. A variedade resultante é chamada de espaço de fase reduzido do sistema com simetria. A cada valor de momento p , o espaço reduzido será denotado por F_p (figura 6). Essa variedade é a base da fibração $\pi : M_p \rightarrow F_p$ com cada fibra difeomórfica a G_p .

Há uma estrutura simplética no espaço de fase reduzido F_p . Considere dois vetores ξ e η tangentes a F_p no ponto f . O ponto f é uma das órbitas do grupo G_p na variedade M_p . Seja x um ponto nessa órbita. Os vetores ξ e η tangentes em F_p são obtidos dos vetores ξ' e η' tangentes a M_p no ponto x pela projeção $\pi : M_p \rightarrow F_p$.

⁷O subgrupo no qual g em G deixa $Ad_g^* p = p$.

Definição 3.2. O produto escalar antissimétrico de dois vetores ξ e η , que são tangentes ao espaço de fase reduzido no mesmo ponto, é o produto escalar antissimétrico dos vetores correspondentes ξ' e η' , tangentes a variedade simplética original M . Ou seja

$$[\xi, \eta]_p = [\xi', \eta'].$$

Teorema 3.2. O produto escalar antissimétrico dos vetores ξ e η não depende da escolha do ponto x e nem de seus vetores correspondentes ξ' e η' . Mais ainda, é uma estrutura simplética no espaço de fase reduzido.

Demonstração do teorema. Considere os subconjuntos do espaço tangente de M no ponto x :

- $T(M_p)$, o espaço tangente a variedade de nível M_p , e
- $T(G_x)$, o espaço tangente a órbita do grupo G .

Lema 3.1. Estes dois espaços são complementos ortogonais (veja página 11 definição 2.2) um do outro.

Devido a classe de equivalência, os vetores ξ' e η' são definidos até a adição de um vetor do plano tangente a órbita do grupo G_p . Mas este plano tangente é a intersecção dos planos de G_x e M_p pelo teorema 3.2. Consequentemente, a adição de um elemento de $T(G_p x)$ a ξ' não muda o produto interno com qualquer vetor η' em TM_p , pois pelo lema 3.1 eles são ortogonais. Então, mostramos a independência em relação a ξ' e η' .

A quantidade $[\xi, \eta]_p$ é independente devido a ação simplética do grupo G em M juntamente com a invariância de M_p . Assim, definimos uma 2-forma diferencial em F_p por

$$\Omega_p(\xi, \eta) = [\xi, \eta]_p.$$

Ela é não degenerada porque caso $\Omega_p(\xi, \eta) = 0$ para todo $\eta \in TF_p$, então o correspondente ξ' é ortogonal a todos os vetores em TM_p . Portanto, ξ' está no complemento ortogonal de TM_p em TM . E pelo lema 3.1, $\xi' = 0$.

A forma é fechada; verificaremos considerando um sistema de coordenadas em M_p que intersecta a órbita do grupo G_p em apenas um ponto. A forma Ω_f é representada, então, pela indução da 2-forma ω definida em toda variedade M por meio de uma imersão. Como ω é fechada, então sua induzida também o será. $\square$

Demonstração do lema. Um vetor ζ pertence ao complemento ortogonal de um vetor tangente ao plano de uma órbita do grupo G se e somente se o produto escalar do ζ com as velocidades do fluxo de fase hamiltoniano do grupo G são zero. No entanto, estes produtos internos (antissimétricos) são as derivadas das funções hamiltonianas na direção de ζ . Então, o vetor ζ pertence ao complemento ortogonal da órbita de G se e somente se a derivada do momento na direção de ζ é igual a zero, ou seja, se $\zeta \in TM_p$. $\square$

Vamos tentar entender todas essas construções em um exemplo. Seja $M = \mathbb{R}^{2n}$ o espaço euclidiano de dimensão $2n$ com coordenadas p_k, q_k , e a 2-forma $\omega = \sum dp_k \wedge dq_k$. Seja $G = S^1$ o círculo e sua ação sobre M dada pelo hamiltoniano do oscilador harmônico

$$(3.26) \quad H = \frac{1}{2} \sum (p_k^2 + q_k^2).$$

A função hamiltoniana é, obviamente, invariante por G , pois dado $x \in M$, em coordenadas locais, teremos

$$(3.27) \quad \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \mapsto \exp(i\theta) \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

quando x for atuado por G . Segue da estrutura do produto interno em $\mathbb{R}^{2n8}$, que é H , a invariância. Mais ainda, $\theta \in \mathfrak{g} = \mathbb{R}$, ou seja, temos $\mathfrak{g}^* = \mathbb{R}$. Isso torna H nossa função momentum, pois $H : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Dado um ponto $p \in \mathbb{R}$, as curvas de nível são dadas pela equação

$$(3.28) \quad \sum p_k^2 + q_k^2 = E, \quad E \in \mathbb{R}.$$

Obtemos, assim, as curvas de nível como superfícies de energia constante, que definem uma esfera S^{2n-1} . E, por fim, o quociente é $S^{2n-1}/S^1 = \mathbb{CP}^{n-1}$, que é chamado de espaço projetivo complexo.

O último teorema define uma estrutura simplética neste espaço complexo, que é igual (até uma constante multiplicativa) a forma do apêndice 1 na página 70.

3.4 Teoria de campos.

Seja M uma variedade de dimensão n chamada de espaço-tempo afim. Quando $n = 1$, M é uma variedade afim de tempo, o espaço-tempo da mecânica clássica. No caso geral, campos em M são seções suaves do fibrado $\pi : E \rightarrow M$, mas em uma teoria de calibre, o campo básico é a conexão a com grupo de calibre sendo um grupo de Lie G . Ao fixarmos um fibrado principal G por $\pi : P \rightarrow M$, então a torna-se uma sessão de certos espaços fibrados. Denotemos $\mathcal{F}$ o conjunto dos campos ϕ .

No geral, estaremos interessados em vários campos e então $E = \times E_i$ é o produto de fibras. Cada fibra carrega uma representação do grupo de Lorentz, que determina o tipo de campo, no entanto sua forma precisa depende do exemplo. Um campo p -forma é uma p -forma definida para cada ponto em M . Por vícios de notação, é comum chamar o campo p -forma de campo vetorial, assim como dizer campo de calibre para a conexão. Estaremos interessados, também, em operadores locais, que denotaremos normalmente por um subíndice *local*.

Definição 3.3. Uma forma $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{F} \times M)$ é dita local se para algum k , em qualquer $\phi \in \mathcal{F}$, o valor $\alpha(\phi, \xi_1, \dots, \xi_p)$ em $x \in M$ depende apenas de potências k de $\phi, \xi_1, \dots, \xi_p$, onde ξ_i é conjunto de vetores tangentes em $\mathcal{F}$ em ϕ .

Nossos operadores básicos serão os operadores de *de Rham* em $\mathcal{F} \times M$. Assim, em nossa notação, δ é a derivada exterior em $\mathcal{F}$, d a derivada exterior em formas de M , e $D = \delta + d$ o diferencial total;

- é importante ressaltar que δ e d comutam.

Simetrias de calibre locais agem nos campos: uma p -forma a é equivalente de calibre a forma $a + d\epsilon$ para qualquer ϵ que é $p - 1$ -forma. Simetrias locais são sessões das fibras do grupo de age sobre M . Portanto, continuaremos a construção da sessão passada e denotamos por $\tilde{\mathcal{F}}$ o quociente do espaço $\mathcal{F}$ de campos pela ação de simetrias locais; em outras palavras, o espaço de fase reduzido. Seguindo as mesmas considerações, tratamos $\tilde{\mathcal{F}}$ como uma variedade, embora nem sempre seja verdade.

O ingrediente básico em teoria de campos é a densidade lagrangiana

$$(3.29) \quad L \in \Omega_{local}^0(\mathcal{F} \times M);$$

a notação indica que para cada ϕ em $\mathcal{F}$ teremos uma densidade $L(\phi)$ em M . Tipicamente, $L(\phi)$ é uma função local de ϕ , porque, caso contrário, sua integral $\int_M L(\phi)$ seria divergente. Mesmo restringindo a campos que decaem rapidamente ao infinito, para que a integral entre duas hiper-superfícies do tipo espaço convirja, a integração no tempo diverge. Desta forma, a estrutura simplética que procuramos, no espaço de extremos, seria nula. Entretanto, para uma deformação com suporte compacto de ϕ , e se assumirmos L local, então $\delta L(\phi)$ é a densidade com suporte compacto, que pode, então, ser integrada. Diremos que ϕ_0 é extremo se $\int \delta L = 0$ para tal deformação de ϕ_0 .

⁸Veja equação (2.18).

Seja $\mathcal{M}$ o espaço de extremos. Estamos interessados em construir uma estrutura simplética Ω para teorias com qualquer campo em $\mathcal{M}$. Sejam Σ_1 e Σ_2 hiper-superfícies do tipo-espaço e considere

$$(3.30) \quad \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} L(\phi),$$

que assumimos convergente. Se ϕ_0 é extremo, então $\delta \int L(\phi)$ deve ser zero, mas para isso acontecer, o suporte da deformação deve estar entre Σ_1 e Σ_2 , o que reflete a propagação com velocidade finita das soluções. Em tais condições, teremos a diferença de termos de fronteira

$$(3.31) \quad \delta \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} L(\phi) = \Gamma_2 - \Gamma_1.$$

Nessa fórmula, Γ é uma 1-forma em $\mathcal{F}$ definida apenas sobre o espaço de extremos $\mathcal{M}$. Definimos a 2-forma canônica em $\mathcal{M}$ por

$$(3.32) \quad \Omega = \delta\Gamma.$$

Note que, se a integral de $L(\phi)$ em todo $\mathcal{M}$ fizesse sentido, nossa construção não existiria. O termo $\Gamma_2(\phi)$ seria a derivada da integral de $L(\phi)$ do passado infinito até Σ_2 , o que nos daria $\Omega = \delta\Gamma_2 = 0$.

Precisamos definir melhor o operador de *de Rham* em $\mathcal{F}$ para construirmos a versão local de Ω . Entendemos como um extremo da equação $\int \delta L = 0$, alguma deformação ϕ_0 que a anula. Baseado nisso, entenderemos δ da seguinte maneira: considere uma família de campos $\phi[u]$ tais que $\phi[0] = \phi_0$ de tal forma que a densidade

$$(3.33) \quad \frac{d}{du} \int_M L(\phi[u]) = 0$$

tenha suporte compacto. A condição de extremo é, portanto, que a integral se anule para qualquer u . Como vimos, campos são uma seção do fibrado $\pi : E \rightarrow M$, assim, para uma deformação $\phi[u]$ de ϕ_0 , a densidade (3.33) em $u = 0$ depende apenas de campos $d\phi/du$ em E de tal forma que a sessão fica definida por

$$(3.34) \quad \int_M D\mathcal{L}$$

para um $D\mathcal{L}$ avaliado como uma forma no fibrado dada a função $\mathcal{L} = L + \alpha$.

Definição 3.4. O espaço $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ de soluções clássicas é o conjunto de ϕ tais que a restrição $D\mathcal{L}$ a $\{\phi\} \times M$ se anule:

$$(3.35) \quad D\mathcal{L} = \delta L + d\alpha = 0, \quad \text{em } \mathcal{M} \times M.$$

Referimo-nos a subvariedade $\mathcal{M} \times M$ como camada de massa ou espaço de fase. Seu complemento em $\mathcal{F}$ é dito fora da camada de massa. O quociente de $\mathcal{M}$ por transformações de calibre será denotado por $\tilde{\mathcal{M}}$; assim como tratamos $\tilde{\mathcal{F}}$, trataremos $\tilde{\mathcal{M}}$ como uma variedade.

No caso de teorias de calibre, mesmo que L e α sejam invariantes por transformações de calibre, devemos esperar que α se anule na direção das órbitas do grupo. O par (L, α) define uma teoria de campo de forma que $D\mathcal{L} = \delta L + d\alpha = 0$ é a camada de massa.

3.4.1 Descrição hamiltoniana de sistemas com campos.

Suponha que podemos separar o espaço-tempo em $M = \mathbb{R} \times N$, para alguma variedade N . Veremos $\mathbb{R}$ como tempo enquanto N será o espaço. Uma estrutura de fibra pode ser dada a construção $E \rightarrow \mathbb{R} \times N$ por meio do levantamento das translações de N , ou matematicamente, por pull-backs de uma fibra de N . Assim, faz sentido integrar a forma simplética local ω para obter uma 2-forma fechada Ω no espaço de fase $\mathcal{M}$; obtemos

$$(3.36) \quad \Omega = \int_{\{t\} \times N} \omega, \quad \omega = \delta\alpha.$$

Este α é a versão local da 1-forma Γ_Σ em $\mathcal{M}$ ligada as superfícies tipo espaço Σ . De fato, Γ_Σ é a integral de α em Σ . Temos, então, que derivar exteriormente em $\mathcal{F}$ nos dá um análogo de Ω : ela é a integral sobre Σ de $\omega = \delta\alpha$. Essa integral é uma 2-forma em todo $\mathcal{F}$ e a chamamos de forma simplética local em $\Omega_{local}^2(\mathcal{F} \times M)$. Quando restritos ao espaço de soluções clássicas, temos

$$(3.37) \quad \omega = D\mathcal{L} \quad \text{em } \mathcal{M} \times M,$$

e por consequência

$$(3.38) \quad D\omega = 0 \quad \text{em } \mathcal{M} \times M.$$

Nós atuamos com Ω em vetores tangentes a $\mathcal{M}$ que decaiam suficientemente rápido no infinito. As equações de movimento relativísticas requerem propagação com velocidade finita das soluções clássicas, o que possibilita o decaimento. O lado direito da equação (3.36) é independente do tempo e a forma Ω é fechada. A forma local ω avaliada em duas regiões diferentes do espaço-tempo, pelo teorema de Stokes, tem sua ação definida sobre uma hiper-superfície do tipo-espaço; a independência no tempo garante que o resultado da integral é o mesmo independentemente da hiper-superfície final. A construção da superfície está na figura 7

Nesta construção, uma simetria local é dada por um fibrado vetorial V em M de forma que para cada seção ξ , o vetor X_ξ em $\mathcal{F}$ altera o lagrangiano por uma derivada total, ou seja, $\mathcal{L}_{X_\xi} L = d\lambda_\xi$ ⁹. O exemplo básico é a álgebra de calibre infinitesimal. Na presença de tais simetrias, a 2-forma Ω é degenerada, o que significa dizer que X_ξ está no kernel de Ω . Da forma como tudo foi construído aqui, isso pode ser visto porque o suporte de ξ é pequeno, logo podemos escolher $\{t\}$ fora dessa região de forma que Ω não o veja. Assim, esperamos que exista $\bar{\Omega}$ no quociente $\tilde{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{M}$ por simetrias locais e que $\bar{\Omega}$ seja simplética.

Procederemos a uma série de exemplos, nos quais construiremos a forma simplética para cada caso. Em seguida, verificaremos sua independência no tempo, que é importante para a estrutura da dinâmica hamiltoniana.

⁹Utilizávamos L para escrever a derivada de Lie, no entanto, para evitar confusão com o lagrangiano de um sistema, mudamos nossa notação para a letra $\mathcal{L}$.



Figura 7: A integral da forma simplética em diferentes pontos do espaço-tempo define, em sua fronteira, uma hiper-superfície tipo-espaço; o valor da integral, e por consequência da forma simplética Ω , é invariante com respeito a deformações desta superfície.

3.4.2 Coordenadas no espaço-tempo de Minkowski.

Seja M uma variedade com dimensão n afim. Com um sistema de coordenadas $x^0, x^1, \dots, x^{n-1}$ no qual a métrica é

$$(3.39) \quad \eta = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - \dots - (dx^{n-1})^2,$$

o operador de laplace em funções é

$$(3.40) \quad \square = d \star d = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial^\mu \partial_\mu,$$

no qual $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ e $\star$ é a chamada operação estrela de Hodge. Deste modo, para um função f temos

$$(3.41) \quad d \star df = \square f.$$

3.4.3 Campo escalar real.

O campo escalar real é um mapa $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$. O lagrangiano que descreve sua dinâmica para $m \geq 0$ é

$$(3.42) \quad L = \frac{1}{2} (|d\phi|^2 - m^2 \phi^2) d^n x = \frac{1}{2} d\phi \wedge \star d\phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 d^n x.$$

O diferencial de L ao longo do espaço de campos ϕ é

$$(3.43) \quad \delta L = d\delta\phi \wedge \star d\phi - m^2 \phi \delta\phi d^n x = -\delta\phi \wedge [d \star d\phi + m^2 \phi \delta\phi d^n x] + d(\delta\phi \wedge \star d\phi).$$

Então de (3.41) a equação de movimento é

$$(3.44) \quad (\square + m^2) \phi = 0$$

e a 1-forma canônica é

$$(3.45) \quad \alpha = \delta\phi \wedge \star d\phi.$$

A forma simplética local $\omega = \delta\alpha$ é dada então por

$$(3.46) \quad \omega = \delta\phi \wedge \star d\delta\phi.$$

3.4.4 Campos espinoriais.

Seja V o espaço vetorial sobre o espaço-tempo de Minkowski M . O grupo de Lorentz em quatro dimensões, quando complexificado, é localmente isomórfico a $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$. Portanto, suas representações são classificadas por números do tipo (m, n) , com m e n inteiros ou semi-inteiros. Seja S uma representação real dos vetores em que $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$ age. Podemos utilizar os mapas

$$(3.47a) \quad \gamma : S^* \otimes S^* \rightarrow V$$

$$(3.47b) \quad \tilde{\gamma} : S \otimes S \rightarrow V$$

que satisfazem a álgebra

$$(3.48) \quad \{\gamma, \tilde{\gamma}\} = 2\eta.$$

Seja $\{e_\mu\}$ e $\{f^a\}$ uma base para V e S respectivamente com seus duais $\{e^\mu\}$ e $\{f_a\}$ em V^* e S^* . Definimos

$$(3.49a) \quad \gamma(f_a, f_b) = \gamma_{ab}^\mu e_\mu,$$

$$(3.49b) \quad \tilde{\gamma}(f^a, f^b) = \tilde{\gamma}^{\mu ab} e_\mu,$$

para que a relação (3.48) se torne

$$(3.50) \quad \tilde{\gamma}^{\mu ab} \gamma_{bc}^\nu + \tilde{\gamma}^{\nu ab} \gamma_{bc}^\mu = 2g^{\mu\nu} \delta_c^a.$$

Denotaremos por ΠS o espaço vetorial criado a partir de S por elementos que satisfazem a álgebra de Grassmann. Um espinor - férmion de spin $1/2$ - é um mapa $\psi : M \rightarrow \Pi S$ dito de quiralidade negativa e se transforma por $(1/2, 0)$. Com relação a base que definimos, podemos escrever

$$(3.51) \quad \psi(x) = \psi_a(x) f^a.$$

Um espinor dual é definido de maneira análoga, ou seja, como um mapa $\lambda : M \rightarrow \Pi S^*$. Da mesma forma, um espinor de quiralidade positiva é um mapa $\phi : M \rightarrow \Pi S$ que se transforma sobre $(0, 1/2)$. Na base que definimos

$$(3.52) \quad \phi(x) = \phi_{\dot{a}} f^{\dot{a}}.$$

A notação utilizada, índices com ponto e índices sem ponto, refere-se apenas sobre qual SL o dito espinor se transforma.

Índices espinoriais serão levantados e abaixados com o tensor totalmente antissimétrico e normalizado ϵ_{ab} e seu inverso ϵ^{ab} (que é definido por $\epsilon^{ab}\epsilon_{bc} = \delta_c^a$). Esta construção nos permite criar quantidades que preservam a estrutura $SL(2)$, ou seja, invariantes de Lorentz. Dados dois espinores λ_1 e λ_2 , ambos de quiralidade negativa, podemos formar o invariante $\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \epsilon_{ab} \lambda_1^a \lambda_2^b$. Note que $\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle = -\langle \lambda_2, \lambda_1 \rangle$. As mesmas considerações se aplicam para a quiralidade positiva.

Com este invariante, podemos escrever um termo de massa $\lambda_1 m \lambda_2 = m \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$. Já o termo cinético é construído com as funções γ , onde definimos

$$(3.53) \quad \lambda_1 \not{D} \lambda_2 = \tilde{\gamma}(\lambda_1, \partial_\mu \lambda_2) = \tilde{\gamma}^{\mu ab} \lambda_a^1 \partial_\mu \lambda_b^2.$$

A equação (3.53) nos dá uma forma bilinear simétrica a menos de uma derivada total. O lagrangiano livre é, então,

$$(3.54) \quad L = \left[\frac{1}{2} \psi \not{D} \psi - \frac{1}{2} \psi M \psi \right] d^n x.$$

A variação de L é

$$(3.55) \quad \delta L = \left[\frac{1}{2} \delta \psi \not{D} \psi + \frac{1}{2} \psi \not{D} \delta \psi - \delta \psi M \psi \right] d^n x$$

e como

$$(3.56) \quad \psi \not{D} \delta \psi = \tilde{\gamma}^{\mu ab} \psi_a \partial_\mu \delta \psi_b = -\tilde{\gamma}^{\mu ab} \partial_\mu \psi_a \delta \psi_b + \tilde{\gamma}^{\mu ab} \partial_\mu (\psi_a \delta \psi_b)$$

temos então

$$(3.57) \quad \delta L = \delta\psi [\not{D}\psi - M\psi] d^n x - d\alpha$$

para a 1-forma canônica

$$(3.58) \quad \alpha = \frac{1}{2} \tilde{\gamma}(\psi, \delta\psi) i_{\partial_\mu} d^n x.$$

Seguimos com o procedimento para obter a versão local da estrutura simplética, teremos

$$(3.59) \quad \omega = \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^{\mu ab} (\delta\psi_a \delta\psi_b) i_{\partial_\mu} d^n x.$$

A equação de movimento será

$$(3.60) \quad \not{D}\psi = M\psi.$$

3.4.5 Eletromagnetismo clássico.

Dado o espaço de Minkowski M , escolhemos o grupo de calibre como o grupo multiplicativo $\mathbb{R}$. O campo de calibre a seria uma conexão no fibrado principal $\mathbb{R}$ com curvatura real F . No entanto, escolhemos uma origem para este espaço afim de forma que trabalhos com o espaço de translações associado a conexão e o campo torna-se uma 1-forma real definida a menos da adição de uma função exata. A curvatura, por consequência, é uma 2-forma real. O produto interno será definido por $\langle a, b \rangle = ab$, com ambos a e b reais.

O lagrangiano é

$$(3.61) \quad L = -\frac{1}{2} \langle F \wedge \star F \rangle = -\frac{1}{4} \langle F_{\mu\nu}, F_{\alpha\beta} \rangle \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} d^n x,$$

no qual

$$(3.62) \quad F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu.$$

A operação estrela age na base das 1-forma como

$$(3.63) \quad \star(dx^\mu \wedge dx^\nu) = \eta^{\mu\mu'} \eta^{\nu\nu'} i_{\partial_{\mu'}} i_{\partial_{\nu'}} d^n x,$$

o que nos dá

$$(3.64) \quad \star F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \eta^{\mu\mu'} \eta^{\nu\nu'} i_{\partial_{\mu'}} i_{\partial_{\nu'}} d^n x.$$

A 1-forma δa pertence a $\mathcal{F} \times M$ e $\delta F = d\delta a$, pois δ e d comutam. Logo, a variação do lagrangiano é

$$(3.65) \quad \delta L = \langle d\delta a \wedge \star F \rangle = d\langle \delta a \wedge \star F \rangle - \langle \delta a \wedge d\star F \rangle$$

com a forma canônica dada por

$$(3.66) \quad \alpha = \langle \delta a \wedge \star F \rangle = \langle \delta a_\mu, F_{\nu\sigma} \rangle \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} i_{\partial_\rho} d^n x.$$

Então, a equação de movimento é

$$(3.67) \quad d \star F = 0$$

e, portanto, as soluções estão associadas com a primeira classe de cohomologia de *de Rham*.

Recuperamos as fórmulas usuais do eletromagnetismo especificando o número de dimensões $n = 4$ e separando o espaço-tempo em $M = \mathbb{R} \times N$, no qual N é uma variedade Riemanniana qualquer. Assim, seja x^0 uma coordenada em $\mathbb{R}$, temos

Definição 3.5. O campo elétrico E associado a 1-forma a é também uma 1-forma em N , ou seja,

$$E \in \Omega^1(N).$$

Enquanto o campo magnético é uma 2-forma em N ,

$$B \in \Omega^2(N),$$

com

$$(3.68) \quad F = B - dx^0 \wedge E.$$

Os campos E e B podem depender do tempo, no entanto nenhum deles depende da forma dx^0 , em outras palavras,

$$(3.69) \quad i_{\partial_0} E = i_{\partial_0} B = 0.$$

Seja $\star_N$ o operador de Hodge na métrica positiva definida de N . Sua relação com $\star$ de $\mathbb{R} \times N$, definido pela métrica da equação (3.39), nos dá para $x^0 = ct$

$$(3.70) \quad \star F = \frac{1}{c} \star_N E + c dt \wedge \star_N B$$

e o lagrangiano (3.61) se torna

$$(3.71) \quad L = \frac{1}{2c^2} (|E|^2 - c^2 |B|^2) d^n x,$$

no qual as normas das funções E e B são calculadas na métrica positiva de N . As equações de movimento se tornam então

$$(3.72a) \quad d \star_N E = 0,$$

$$(3.72b) \quad c^2 d \star_N B = \star_N \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Obtemos as equações de Maxwell para o vácuo juntando (3.72) com a identidade de Bianchi $dF = 0$, que desta forma fica

$$(3.73a) \quad dB = 0,$$

$$(3.73b) \quad dE = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}.$$

4 Um pouco de análise complexa.

Lidaremos com análise complexa no decorrer deste capítulo seguindo basicamente a referência [3]. Ressaltamos as considerações da introdução: este capítulo é dedicado, também, entre outras coisas, ao desenvolvimento da linguagem que utilizaremos ao tratar de twistors. Por isso não discutiremos em toda extensão os tópicos abordados; sendo assim, algumas seções podem parecer muito formais, diretas, e vazias. No entanto, isto não deve ser um problema, pois estamos interessados apenas na linguagem.

Inicialmente, nosso principal objetivo é entender o que são superfícies de Riemann, porque estas superfícies irão estabelecer a conexão principal entre espaço-tempo de Minkowski e a geometria complexa. Necessitamos, então, entender variedades complexas, o que nos remete a recordarmos, um pouco, o cálculo no corpo dos complexos.

Seja $\mathbb{C}^m$ o corpo complexo de m dimensões. Na seção 2.2, nós identificamos $\mathbb{C}^m = \mathbb{R}^{2m}$ por $z_n = x_n + iy_n, n = 1, \dots, m$. Aqui, x e y são coordenadas padrão em $\mathbb{R}^{2n}$ e i estabelece o que chamamos, por enquanto, de estrutura complexa sobre $\mathbb{R}^m$ pela a propriedade $i^2 = -1$.

Essa construção nos permite carregar a estrutura diferencial dos reais para $\mathbb{C}^m$ e assim definir as noções básicas de diferenciabilidade nos complexos. Suponha U é um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$. Escreveremos $\mathbb{E}(U)$ para a álgebra de todas funções $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ que são diferenciáveis infinitamente com respeito as coordenadas x e y . Das derivadas parciais $(\partial/\partial x)$ e $(\partial/\partial y)$, nós consideramos os diferenciais

$$(4.1) \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}, \quad dz = dx + idy$$

juntamente com

$$(4.2) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}, \quad d\bar{z} = dx - idy.$$

As condições de Cauchy-Riemann nos definem o espaço vetorial $\mathcal{O}(U)$ de funções holomórficas em U como o kernel do mapa $(\partial/\partial \bar{z}) : \mathbb{E}(U) \rightarrow \mathbb{E}(U)$,

$$(4.3) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Em análise complexa, uma função analítica (qualquer função que possa ser escrita como uma série de potências convergente na vizinhança de cada ponto de seu domínio) é dado pela noção de holomorfismo. De fato, como consequência de um importante teorema, a classe de funções analíticas complexas coincide com a classe de funções holomórficas. A existência de uma derivada complexa na vizinhança de algum ponto implica que qualquer função holomórfica é infinitamente diferenciável e igual a sua série de Taylor. Assim, a frase "holomórfica no ponto a " não significa apenas diferenciável em a , mas também diferenciável em qualquer lugar dentro da vizinhança de a no plano complexo.

Referimo-nos, também, a funções holomórficas como funções regulares ou mapas conformes.

4.1 Superfícies de Riemann.

4.1.1 Variedades complexas.

A noção de variedade real vem da generalização de curva paramétrica. Mapeamos abertos de um conjunto em abertos dos reais, pois estamos interessados nas noções de convergência que a topologia nos trás. O conjunto $\mathbb{C}^m$, no entanto, possui uma estrutura adicional: a multiplicação por i , que se traduz em holomorfismo quando se exige analiticidade de funções. Portanto, podemos definir variedades complexas quase analogamente, apenas exigindo que difeomorfismos sejam holomorfismos.

Definição 4.1. Seja M uma variedade de dimensão par. Um sistema de coordenadas complexo para um aberto $U \subset M$ é um homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$, no qual V é um aberto em $\mathbb{C}$. Dois sistemas de coordenadas definidos nos abertos U_1 e U_2 são ditos holomorficamente compatíveis se

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

for holomórfico. A construção está esquematizada na figura abaixo.

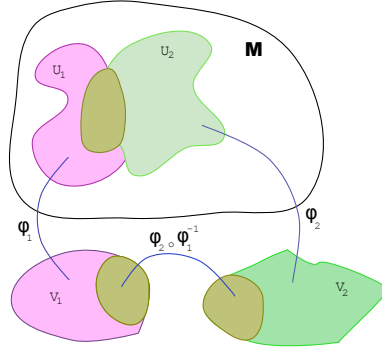


Figura 8: Condição de compatibilidade entre coordenadas.

Um atlas complexo em M são vários sistemas de coordenadas holomorficamente compatíveis, $\mathcal{U} = \{\phi_i : U_i \rightarrow V_i\}$, que cobrem M , $M = \bigcup_i U_i$. Dois atlas, $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}'$, são analiticamente equivalentes se todo sistema de coordenadas em $\mathcal{U}$ é holomorficamente compatível com todo sistema de coordenadas em $\mathcal{U}'$.

Como exemplo, considere o conjunto $\mathbb{C}^m$ definido pelo atlas $(U, 1, U)$ para todo $U \subset \mathbb{C}^m$ aberto. Na realidade, nossa definição apenas introduz o corpo $\mathbb{C}^m$ como a noção de localidade em um espaço topológico M . Refinamos esta noção ao perceber que qualquer restrição entre abertos é holomorficamente compatível.

Definimos uma relação de equivalência na condição de equivalência analítica, pois a composição de funções holomórficas é também holomórfica. Repare bem que diante destas considerações, a compatibilidade holomórfica é o que carrega toda a informação sobre a estrutura complexa da variedade. Sendo assim,

Definição 4.2. Uma estrutura complexa em M , denotada por Σ , é a classe de equivalência entre dois atlas analiticamente equivalentes.

Em geral, dadas duas variedades complexas M_1 e M_2 , a função $f : M_1 \rightarrow M_2$ é chamada de holomórfica se para qualquer sistema de coordenadas (U_1, ϕ_1, V_1) em M_1 e (U_2, ϕ_2, V_2) em M_2 , a expressão local de f , $\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1}$, é holomórfica. Segue que M_1 e M_2 serão equivalentes se a inversa de f for também holomórfica.

Como caso especial, podemos ver que, se $M_2 = \mathbb{C}^m$ e M_1 for igual a M de dimensão m , a função $f : M \rightarrow \mathbb{C}^m$ é holomórfica em $W \subset M$ se e somente se para qualquer sistema de coordenadas (U, ϕ, V) sua expressão local $f \circ \phi^{-1}$ é holomórfica em $W \cap U$, de forma que retomamos as condições de Cauchy-Riemann (4.3).

4.1.2 Construção e propriedades.

Definidos os pontos iniciais, podemos construir superfícies de Riemann. Basicamente, estamos interessados em superfícies que sejam continuamente suaves - dados dois pontos, eles possam ser conectados por uma trajetória definida sobre a superfície. Isto significa que, localmente, queremos, de novo, um aberto no plano complexo. No entanto, em uma variedade, dada definição 4.1, qualquer ponto em M possui muitos sistemas de coordenadas diferentes, e nenhum é preferencialmente melhor do que o outro; sendo assim, conseguiremos trazer as noções complexas aos planos somente quando eles forem invariantes pela escolha de um particular sistema coordenadas; mais precisamente, invariantes por holomorfismos.

Definição 4.3. Uma superfície de Riemann é o par (M, Σ) , no qual M é uma variedade conexa e Σ é uma estrutura complexa em M .

Comumente nos referimos a uma superfície de Riemann apenas por M quando as estruturas complexas estiverem suficientemente claras pelo contexto. Note que pelas considerações anteriores, se M é uma superfície de Riemann, sempre utilizaremos um sistema de coordenadas complexo, no qual a estrutura complexa fica definida para todos os atlas compatíveis entre si.

Exemplificaremos a definição de duas maneiras construindo domínios e a esfera de Riemann. Estaremos particularmente interessados nestes casos porque domínios constituem o local onde funções são avaliadas, e nós trabalharemos exaustivamente com funções sobre a esfera.

- **Domínios.** Suponha que M é uma superfície de Riemann e $X \subset M$ um domínio: conjunto aberto conexo. Então, X tem uma estrutura complexa natural que o torna uma superfície de Riemann também. Explicitamente, tomamos um sistema de coordenadas $\phi : U \rightarrow V$ em M , onde $U \subset X$. Em particular, qualquer aberto em $\mathbb{C}$ é uma superfície de Riemann.
- **A esfera de Riemann $\mathbb{P}^1$.** Seja $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, no qual o símbolo ∞ não está contido em $\mathbb{C}$. Introduza uma topologia em $\mathbb{P}^1$, na qual os abertos serão os mesmos abertos $U \subset \mathbb{C}$ juntamente com conjuntos da forma $V \cup \{\infty\}$, nos quais V é o complementar de um conjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$. Com esta topologia, $\mathbb{P}^1$ é homeomórfico a esfera S^2 . Ponha

$$U_1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\} = \mathbb{C}$$

com

$$U_2 = \mathbb{P}^1 \setminus \{0\} = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$$

e defina os mapas $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, como segue: ϕ_1 é a identidade e

$$\phi_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{para } z \in \mathbb{C}^* \\ 0 & \text{para } z = \infty. \end{cases}$$

Estas funções são homeomorfismos, então $\mathbb{P}^1$ é uma variedade de dimensão 2. Mais ainda, como U_1 e U_2 são conexas e com intersecção não nula, $\mathbb{P}^1$ também será conexa.

A estrutura complexa em $\mathbb{P}^1$ é definida pelo atlas das funções $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, 2$. Resta-nos mostrar que dois sistemas de coordenadas são holomorficamente compatíveis, mas

$$\phi_1(U_1 \cap U_2) = \phi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^*$$

e

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad z \mapsto \frac{1}{z}.$$

No que segue, queremos ganhar intuição sobre as superfícies de Riemann, ou seja, queremos saber como funções se comportam quando definidas sobre elas. Já entendemos o que são domínios em tais espaços. Agora, tentaremos entender os requerimentos e as estruturas impostas sobre funções.

Definição 4.4. Suponha que X e Y são superfícies de Riemann. Uma função contínua $f : X \rightarrow Y$ é chamada de holomórfica, se para todo o par de coordenadas $\psi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ em X e $\psi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ em Y com $f(U_1) \subset U_2$, o mapa

$$\psi_2 \circ f \circ \psi_1^{-1} : V_1 \rightarrow V_2$$

é holomórfico no sentido usual. O conjunto de todas as funções holomórficas em X será denotado por $\mathcal{O}(X)$.

Uma função $f : X \rightarrow Y$ é chamada de biholomórfica se ela é bijetiva e ambas f e sua inversa f^{-1} são holomórficas. Duas superfícies de Riemann são chamadas de isomórficas se existe uma mapa biholomórfico entre elas.

- No caso especial $Y = \mathbb{C}$, funções holomórficas $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ são definidas como na introdução pela equação (4.3);
- Se X , Y , e Z são superfícies de Riemann e $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ são funções holomórficas, então a composição $g \circ f : X \rightarrow Z$ é também holomórfica;
- Uma função contínua $f : X \rightarrow Y$ entre duas superfícies de Riemann é holomórfica se para todo aberto $V \subset Y$ e toda função holomórfica $\psi \in \mathcal{O}(V)$ os pull-back's $\psi \circ f : f^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{C}$ estão contidos em $\mathcal{O}(f^{-1}(V))$.

Vimos das considerações que um mapa holomórfico $f : X \rightarrow Y$ induz o pull-back

$$f^* : \mathcal{O}(V) \rightarrow \mathcal{O}(f^{-1}(V)), \quad f^*(\psi) = \psi \circ f.$$

A soma e o produto de funções holomórficas são também holomórficas. Funções constantes são holomórficas, o que faz de $\mathcal{O}(X)$ uma álgebra sobre $\mathbb{C}$.

Algumas vezes, uma função holomórfica pode ter uma singularidade: um ponto onde a função não está definida. Por exemplo, considere a função

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z}.$$

Ela possui uma singularidade em $z = 0$. Por outro lado, f é holomórfica; isto significa que é regular em uma vizinhança ao redor do ponto $z = 0$. Algo que aparece com bastante clareza quando olhamos para a sua série de Taylor:

$$f(z) = \frac{1}{z} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots.$$

Repare, no entanto, que da forma como escrevemos f , esta série não deve fazer sentido para $z = 0$. Porém, claramente, ela nos dá um valor único e bem definido. Sendo assim, f poderia ser reescrita de forma que $f(0)$ fosse igual a 1. Em singularidades nas quais a função se comporta analiticamente em torno de uma vizinhança é sempre possível fazer este procedimento, pelo menos no corpo $\mathbb{C}^m$. O próximo teorema generaliza esta ideia a superfícies de Riemann.

Teorema 4.1 (Teorema das singularidades removíveis de Riemann). Seja U um conjunto aberto de uma superfície de Riemann e deixe $a \in U$. Suponha que a função $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$ é limitada em alguma vizinhança de a . Então, f pode ser estendida unicamente para uma função $f \in \mathcal{O}(U)$.

Demonstração. Seja $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ no sistema de coordenadas (U, z) definida por

$$h(z) = \begin{cases} 0 & \text{quando } z = a \\ (z - a)^2 f(z) & \text{quando } z \in U \setminus \{a\}. \end{cases}$$

Então, nós temos

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{h(z) - h(a)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z) = 0,$$

pois f é uma função limitada em torno de uma vizinhança de a . Segue, então, que $h'(a) = h(a) = 0$ e $h \in \mathcal{O}(U)$. Podemos escrever

$$h(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

para algum z no disco com centro em a . Por fim, definimos $f(a) = c_2$ e teremos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(z-a)^n$$

novamente para algum z que pertence ao disco com centro em a . Assim, $f \in \mathcal{O}(U)$. $\square$

A prova repete o mesmo argumento utilizado em análise complexa. Entretanto, lembremos que, em nosso exemplo anterior, uma função limitada com singularidades foi estendida de maneira única em todo o domínio. Na prova, porém, não garantimos unicidade em momento algum. Na realidade, em análise complexa, a unicidade vem do teorema de identidade para funções holomórficas. Este mesmo teorema foi mencionado na introdução deste capítulo quando relacionamos a noção de holomorfismo com analiticidade.

De fato, funções holomórficas no plano complexo são localmente rígidas: se coincidem em algum aberto conexo, devem coincidir em todo o plano. Quando em contraste com funções reais, este resultado determina que diferenciabilidade nos complexos é um conceito muito mais rígido. Mais ainda, isto nos garantirá que funções analíticas em superfícies de Riemann ficam totalmente determinadas se têm seu valor especificado em qualquer subdomínio.

Teorema 4.2 (Teorema de identidade). Suponha que X e Y são superfícies de Riemann e $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ são duas funções holomórficas que coincidem no conjunto $A \subset X$ tendo um ponto limite $a \in A$. Então, f_1 e f_2 são idênticas.

Demonstração. Seja G o conjunto de todos os pontos $x \in X$ que tem vizinhança aberta W tal que as restrições $f_1|_W = f_2|_W$. Por definição G é aberto. Mostraremos que G também é fechado. Suponha que b é um ponto de fronteira de G . Então $f_1(b) = f_2(b)$ pois f_1 e f_2 são contínuas. Escolha coordenadas $\phi : U \rightarrow V$ em X e $\psi : U' \rightarrow V'$ em Y com $b \in U$ e $f_i(U) \subset U'$. As funções

$$g_i = \psi \circ f_i \circ \phi^{-1} : V \rightarrow V' \subset \mathbb{C}$$

são holomórficas. Como $U \cap G \neq \{0\}$, o teorema de identidade para funções holomórficas em $\mathbb{C}$ implica g_1 e g_2 são idênticamente iguais. Portanto $f_1|_U = f_2|_U$. Então $b \in G$ e G é fechado. Agora, como X é conexa, ou $G = \{0\}$ ou $G = X$. No entanto, o primeiro caso está excluído pois $a \in G$ pelo teorema da identidade no plano novamente. Assim, f_1 e f_2 coincidem em todo X . $\square$

Conseguimos, então, catalogar funções holomórficas. Temos uma ideia de que, diferentemente do que acontece em reais, funções holomórficas são suficientemente rígidas nas suas singularidades isoladas. Todavia, no caso mais geral a singularidade de uma função pode não ser removível. Considerando o teorema de Riemann, podemos perguntar se existem singularidades de tal forma que $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^{m+1} f(z) = 0$ para algum m natural. Se existir, este ponto é chamado de polo da função f de ordem m . Generalizamos o raciocínio ao definir, então, singularidades removíveis como polos de ordem 0.

Teorema 4.3 (Comportamento local de mapas holomórficos). Suponha que X e Y são superfícies de Riemann e $f : X \rightarrow Y$ é um mapa holomórfico não constante. Suponha $a \in X$ e $b = f(a)$. Então existe um inteiro $k \geq 1$ e coordenadas $\phi : U \rightarrow V$ em X e $\psi : U' \rightarrow V'$ em Y com as seguintes propriedades:

- $a \in U$, $\phi(a) = 0$; $b \in U'$, $\psi(b) = 0$.
- $f(U) \subset U'$.
- O mapa $F = \psi \circ f \circ \phi^{-1} : V \rightarrow V'$ é dado por $F(z) = z^k$ para todo $z \in V$.

Demonstração. Primeiro, notamos que existem sistemas de coordenadas $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ em X e $\psi : U' \rightarrow V'$ em Y tal que as duas primeiras propriedades listadas acima são satisfeitas se modificarmos (U, ϕ) por (U_1, ϕ_1) . Agora, do teorema de identidade, a função

$$f_1 = \psi \circ f \circ \phi_1^{-1} : V_1 \rightarrow V' \subset \mathbb{C}$$

é não constante. Como $f(0) = 0$, existe $k \geq 1$ tal que $f_1(z) = z^k g(z)$, no qual g é uma função holomórfica em V_1 com $g(0) \neq 0$. Assim, existe uma vizinhança de 0 e uma função holomórfica h nesta

vizinhança tal que $h^k = g$. A correspondência $z \mapsto zh(z)$ define um mapa biholomórfico $\alpha : V_2 \rightarrow V$ de um conjunto aberto $V_2 \subset V_1$ de zero na vizinhança aberta V de zero. Seja $U = \phi_1^{-1}(V_2)$ e substitua o sistema de coordenadas $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ por $\phi : U \rightarrow V$ onde $\phi = \alpha \circ \phi_1$. Então, por construção, o mapa $F = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ satisfaz $F(z) = z^k$. $\square$

Teorema 4.4. Suponha que X e Y são superfícies de Riemann. Seja X compacto e $f : X \rightarrow Y$ um mapa holomórfico não constante. Então Y é compacto e f é sobrejetiva.

Demonstração. Temos que $f(X)$ é aberto, pois, pelo teorema 4.3, se U é uma vizinhança do ponto $a \in X$ então $f(U)$ está na vizinhança do ponto $f(a)$, o que implica f aberto. Mais ainda, como X é compacto, $f(X)$ é compacta e portanto fechada. Mas, os únicos subconjuntos de um espaço topológico conexo que são ao mesmo tempo fechados e abertos são o conjunto vazio e o próprio espaço, segue $f(X) = Y$. Então, f é sobrejetiva e Y compacto. $\square$

Corolário 4.1. Toda função holomórfica em $\mathbb{C}$ sobre uma superfície de Riemann compacta é constante.

Demonstração. A superfície de Riemann é compacta, no entanto $\mathbb{C}$ não é; assim, do teorema 4.4, o corolário está provado. $\square$

4.2 Fibrados vetoriais.

Um fibrado vetorial complexo de dimensão m é uma sobrejeção contínua $\pi : E \rightarrow X$ entre dois espaços topológicos E e X que satisfaz as seguintes condições:

- Para cada $x \in X$, $\pi^{-1}(x)$ tem a estrutura de um espaço vetorial complexo de dimensão m . Também diremos que o fibrado vetorial possui rank m ;
- **Requerimento de trivialidade local.**¹⁰ Cada ponto $x \in X$ tem uma vizinhança U de forma que $\pi^{-1}(U)$ é homeomórfica a $U \times \mathbb{C}^m$.

Definição 4.5. Um fibrado vetorial de rank m é chamado de trivial se existe uma trivialização linear global $h : E \rightarrow X \times \mathbb{C}^m$.

Um fibrado vetorial é sempre localmente trivial. Em termos de considerações locais não temos nada muito aparentemente diferente. No entanto, a questão de trivialidade global nem sempre é verdade.

Definição 4.6. Um fibrado linha é um fibrado vetorial de rank um.

As funções de transição g_{ij} , que definem o grupo de estrutura do fibrado vetorial, são dadas por $GL(n, \mathbb{C}^n)$ para dois abertos U_i e U_j de uma superfície de Riemann X : o grupo de matrizes $n \times n$ com coeficientes em $\mathbb{C}^n$.

Definição 4.7. Suponha que X é uma superfície de Riemann, $E \rightarrow X$ um fibrado vetorial de rank n sobre X . O conjunto

$$\mathcal{U} = \{h_i : E \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^n, i \in I\}$$

é um atlas de E . Este atlas é dito holomórfico se as funções de transição associadas

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$$

são holomórficas.

Dois atlas $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}'$ de E são holomorfismos compatíveis se $\mathcal{U} \cup \mathcal{U}'$ é outro atlas holomórfico. Claramente se nota que esta relação é uma relação de equivalência. A classe de equivalência de atlas holomorficamente compatíveis é chamada de estrutura linear holomórfica.

¹⁰Para mais detalhes, consulte o apêndice 2 na página 73.

Definição 4.8. Suponha um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow X$ e seja U um aberto em X . Uma seção de E sobre U é um mapa contínuo $f : U \rightarrow E$ com $\pi \circ f = \text{id}_U$.

A condição $\pi \circ f = \text{id}_U$ diz que f associa, para cada $x \in U$, um elemento $f(x) \in E_x$. Se $h_i : E \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^n$ é uma trivialização local de E , então podemos associar a seção f uma função única contínua $f_i : U_i \cap U \rightarrow \mathbb{C}^n$ de tal forma que

$$h_i(f(x)) = (x, f(x)) \quad \text{para todo } x \in U_i \cap U.$$

A função f_i é chamada de representação de f com respeito a trivialização h_i . A função f é dita holomórfica se sua representação f_i é um mapa holomórfico¹¹. A definição de holomorfismo não depende da escolha do atlas. O conjunto de todas as seções holomórficas de E sobre U é um espaço vetorial naturalmente, que denotaremos por $\mathcal{O}_E(U)$.

¹¹Vê-se que devemos interpretar f_i como um conjunto de n coordenadas de funções holomórficas.

5 Twistors

5.1 A esfera de Riemann.

Na descrição de twistors, o espaço-tempo é construído secundariamente sendo entendido como derivado de uma maneira não local de algo mais primitivo - twistors. Em primeira aproximação, twistors são linhas de luz; um ponto no espaço-tempo é identificado com uma família de raios de luz que passa por ele. Cada um destes raios é dito incidente ao ponto.

A família de raios possui topologia de uma esfera de Riemann com dimensão 2; pode ser identificada como a esfera celestial de um observador no ponto: para um observador na Terra, as estrelas parecem residir na esfera que consideramos a esfera unitária S^2 . A cada estrela no céu é associado um ponto particular na esfera. Para o caso de dois observadores, que tem velocidade relativa alta, cada qual descrevia a esfera do outro de maneira diferente devido ao fenômeno de aberração estelar; em relatividade, estes deslocamentos se tornam um mapa da esfera nela mesma, onde círculos são levados em círculos e ângulos são preservados [5]. Cada raio de luz é entendido como um ponto na esfera e o grupo de Lorentz age sobre estes raios como o grupo de transformações conformes na esfera celeste.

Se pensamos em tal esfera como uma esfera de Riemann, representando os números complexos juntamente com o infinito tal como construído no capítulo anterior, então estes mapas conformes se tornam transformações bilineares de números complexos, conhecidos como transformações de Möbius.

5.2 Momentum e momento angular.

Já mencionamos na seção de teoria de campos que existe um isomorfismo local entre o grupo de Lorentz em quatro dimensões e o grupo $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$. Representando as componentes de um tensor u^μ em matrizes

$$(5.1) \quad u^\mu = (u^0, u^1, u^2, u^3) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u^0 + u^1 & u^2 + iu^3 \\ u^2 - iu^3 & u^0 - u^1 \end{pmatrix} = u^{a\dot{a}}$$

nós encontramos que as componentes de u quando atuadas sobre uma transformação do grupo de Lorentz restrito L podem ser expressas por

$$(5.2) \quad u^{b\dot{b}} \mapsto (SL)_a^b u^{a\dot{a}} (\overline{SL})_{\dot{a}}^{\dot{b}}$$

onde $SL \in SL(2, \mathbb{C})$. Índices com ponto e sem ponto devem ser tratados como, essencialmente, diferentes quanto a permutações e contrações, no entanto eles estão relacionados um ao outro por conjugação complexa, que converte um índice com ponto em um índice sem ponto.

Para fins práticos, a correspondência (5.1) nos mostra como relacionar um tensor com um espinor de uma maneira padrão. Porém, não há nada especial nesta correspondência particular. A característica especial é que cada índice abstrato de tensor (em quatro dimensões) é igual ao par de índices espinoriais, um com ponto e outro sem ponto. Vimos na seção 3.4.4 como modificar a arrumar os índices nesta nova notação.

Em dinâmica relativística, todo sistema possui um momentum total p^μ e momento angular $M^{\mu\nu}$, que nos permitem definir um vetor de spin

$$(5.3) \quad S_\mu = -\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\nu M^{\rho\sigma}.$$

Sobre uma mudança de coordenadas da origem O para origem $\tilde{O}$, nós temos $p^\mu \mapsto \tilde{p}^\mu$ e $M^{\mu\nu} \mapsto M^{\mu\nu} - 2x^{[\mu} p^{\nu]}$, no qual x^μ é o vetor deslocamento $O\tilde{O}$. Segue destas considerações que

$$\tilde{S}_\mu = S_\mu,$$

quando tratamos o caso sem massa $p^\mu p_\mu = 0$, o que, na nova origem, descreve um movimento com

$$(5.4) \quad \tilde{p}_\mu \tilde{M}^{\mu\nu} = 0.$$

A equação (5.4) só tem solução se

$$(5.5) \quad M_{\mu\nu} p^\nu = -p_\mu (p^\alpha x_\alpha),$$

o que, por sua vez, implica

$$(5.6) \quad M^{\mu\nu} p_\nu \propto p^\mu \Leftrightarrow p^{[\mu} M^{\nu]\alpha} p_\alpha = 0 \Leftrightarrow p^{[\mu} M^{\nu\alpha]} p_\alpha = 0 \Rightarrow p_{[\mu} S_{\sigma]} = 0.$$

Sendo assim

$$(5.7) \quad S_\sigma = s p_\sigma$$

para alguma constante s , que chamaremos de helicidade. Assim, nossas representações irredutíveis serão rotuladas pelo número s .

Nossa consideração está toda baseada em campos sem massa; sendo assim, revemos vetores complexos de norma nula $u^\mu u_\mu = 0$, cuja forma espinorial é

$$u^{a\dot{a}} = \pm \xi^a \xi^{\dot{a}},$$

pois a matriz de componentes $u^{a\dot{a}}$ tem rank menor que 1, visto que $\det p^{a\dot{a}}$, e u^μ é real. Note que $\xi^a \xi_a = 0$ devido a ação dos ϵ_{ab} , o que implica $u^\mu u_\mu = 0$. Escolhemos os sinais de acordo com as direções de passado e futuro, + para futuro e - para passado. Ao vetor nulo p^μ corresponde o espinor $\pi_{\dot{a}}$

$$(5.8) \quad p_\mu \mapsto \bar{\pi}_a \pi_{\dot{a}}.$$

Note que ele fica determinado a menos de uma fase $\pi_{\dot{a}} \rightarrow e^{i\theta} \pi_{\dot{a}}$, pois ela preserva $p_\mu M^{\mu\nu}$. Já o tensor antissimétrico $M^{\mu\nu}$ é representado pelo espinor μ^{ab} ,

$$(5.9) \quad M^{\mu\nu} \mapsto \mu^{ab} \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} + \epsilon^{ab} \bar{\mu}^{\dot{a}\dot{b}}.$$

A equação (5.7) toma a forma

$$(5.10) \quad S_{d\dot{j}} = -i \bar{\pi}_d \pi^{\dot{a}} \bar{\mu}_{\dot{a}\dot{j}} + i \bar{\pi}^a \mu_{a\dot{d}} \pi_{\dot{j}} = s \bar{\pi}_d \pi_{\dot{j}}.$$

Agora, uma vez que contraímos com $\bar{\pi}^d$ encontramos $\mu_{ab} \bar{\pi}^a \bar{\pi}^b = 0$, o que implica

$$(5.11) \quad \mu_{ab} = i \omega_{(a} \bar{\pi}_{b)}$$

para algum ω^a . Como qualquer espinor de dois índices simétrico é o produto exterior simetrizado de dois espinores, nós somente obtemos que um dos fatores em μ_{ab} é $\bar{\pi}_a$. Portanto

$$(5.12) \quad M^{a\dot{a}b\dot{b}} = i \bar{\pi}^{(a} \omega^{b)} \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} - i \pi^{(\dot{a}} \bar{\omega}^{\dot{b})} \epsilon^{ab}.$$

Assim, podemos caracterizar o par $(p_\mu, M^{\mu\nu})$ por dois espinores $(\omega^a, \pi_{\dot{a}})$. Esta caracterização não é única, pois podemos modificar ω e π por uma fase. Na realidade, este par é a representação do chamado

twistor Z^A . Nós não definimos Z^A como twistor, porque os espinores que o representam mudam sobre uma transformação de coordenadas, enquanto Z^A é, supostamente, feito para permanecer inalterado.

Em geral, twistors possuem dois estágios de representação. O primeiro, em termos de um par de espinores tal como acima, é especificado por uma dada origem e escolha de escala conforme; os índices de espinor devem ser encarados como rótulos abstratos. A segunda é em termos das coordenadas destes espinores com respeito ao seu referencial. Se Z^A é representado por $(\omega^a, \pi_{\dot{a}})$, então nós temos as componentes

$$(5.13) \quad Z^A \mapsto (\omega^0, \omega^1, \pi_{\dot{0}}, \pi_{\dot{1}}).$$

Definimos o twistor conjugado $\bar{Z}_a$ por

$$(5.14) \quad \bar{Z}_A \mapsto (\bar{\pi}_0, \bar{\pi}_1, \bar{\omega}^{\dot{0}}, \bar{\omega}^{\dot{1}}).$$

Assim abstratamente

$$(5.15) \quad Z^A \bar{Z}_A = \omega^a \bar{\pi}_a + \pi_{\dot{a}} \bar{\omega}^{\dot{a}} = 2s$$

por (5.10). Note que a forma hermitiana utilizada sobre o twistor Z^A em (5.15) tem assinatura $(++--)$ e, portanto, tanto helicidades positivas quanto helicidades negativas são possíveis.

Quando $s = 0$ o twistor é dito nulo e representa uma linha de mundo nula - raios de luz. Quando $s \neq 0$, o twistor representa uma partícula com spin intrínseco e, em certo sentido, isto significa que a linha de mundo deixa de estar localizada no espaço-tempo de Minkowski.

5.3 Twistors: relação com o espaço-tempo de Minkowski.

Podemos ver que o conjunto de pontos do espaço-tempo que é incidente com um twistor nulo (para o qual Z^2 e Z^3 são ambos zero) constituem uma linha reta nula (raio de luz). Mais ainda, qualquer raio de luz em M surge desta maneira. Um twistor com $Z^A \bar{Z}_A = 0$ que representa uma reta real nula é, também, a linha de mundo de uma partícula com spin zero. Se $s \neq 0$ não há tal linha real, mas há, em certo sentido, uma linha complexa. Claramente quando $s = 0$, Z^A e λZ^A representam a mesma linha, de forma que o espaço de twistors mais geometricamente geral é dado pelas classes de equivalência $\mathbf{N}$,

$$(5.16) \quad \mathbf{PN} = \{ \{ \lambda Z^A \mid \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{C} \} \mid Z^A \bar{Z}_A = 0, Z^A \neq 0 \},$$

que representam o conjunto de linhas nulas no espaço-tempo M . Consideraremos, portanto, o espaço de classes de equivalência de twistors, definidos assim como $\mathbf{PN}$, mas sem o requerimento $s = 0$. Este é o espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^3$, que possui três dimensões complexas e seis dimensões reais. Não é apenas a complexificação de $\mathbf{PN}$, que teria dez dimensões reais. Os pontos de $\mathbb{CP}^3$ são definidos pelas razões

$$(5.17) \quad Z^0 : Z^1 : Z^2 : Z^3.$$

Entretanto, é comum referir-se como ao espaço de twistors $\mathbf{T}$ o espaço complexo de dimensão 4, com coordenadas dadas por (Z^0, Z^1, Z^2, Z^3) . Então, um elemento de $\mathbf{PT}$ - um twistor projetivo - representa uma família de twistors proporcional a um twistor não zero Z . Segue que $\mathbf{PT}$ é identificado com $\mathbb{CP}^3$. O espaço $\mathbf{T} - \{0\}$, no qual 0 é a origem de $\mathbf{T}$, é um fibrado com fibra $\mathbb{C}^*$ sobre $\mathbf{PT}^{12}$. O subespaço de $\mathbf{T}$ que consiste de twistors nulos é uma região com dimensão 7, $\mathbf{N}$, que é o kernel da forma hermitiana com

¹² $\mathbb{C}^*$ é a notação que representa o grupo multiplicativo $\mathbb{C} - \{0\}$.

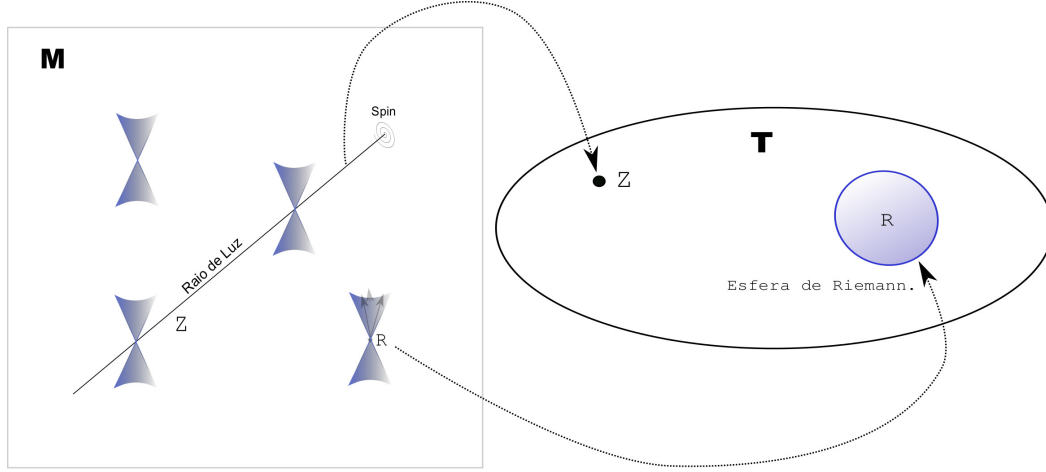


Figura 9: A teoria de twistors fornece uma visão alternativa ao espaço-tempo, onde raios de luz inteiros são representados como pontos.

assinatura $(+ + - -)$. Sua versão projetiva, $\mathbf{PN}$ é uma variedade de dimensão 5 que será identificada com os raios de luz em M^{13} .

O espaço twistor ou espaço projetivo twistor é tido como mais primitivo que o espaço-tempo M . As noções geométricas usuais e intuições físicas são traduzidas de M para $\mathbf{T}$. Vimos ao quê corresponde um ponto em M : uma família de raios de luz que passa pelo ponto. Isto nos dá um local em $\mathbf{PN}$, que é topologicamente uma esfera, S^2 . De fato, afirmamos na primeira seção deste capítulo que esta correspondência tem uma estrutura natural de esfera. Isto é visto da relação (5.15); nós encontramos um par de equações homogêneas lineares nas coordenadas (Z^0, Z^1, Z^2, Z^3) que representam a condição de incidência em um ponto do espaço-tempo pelo twistor Z . Seja R tal ponto. Pela relação (5.1), podemos reescrever (5.15) na forma

$$(5.18) \quad \begin{pmatrix} Z^0 \\ Z^1 \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} t+z & x+iy \\ x-iy & t-z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^2 \\ Z^3 \end{pmatrix},$$

de onde vemos que para t, x, y e z fixos, o ponto R define uma superfície de dimensão 2 contida em $\mathbf{T}$, que está inteiramente dentro de $\mathbf{N}$. Em termos de $\mathbf{PT}$, isto nos dá uma linha projetiva, contida inteiramente em $\mathbf{PN}$. Uma linha projetiva complexa é de fato uma esfera de Riemann como provamos no capítulo passado.

Nós temos agora um dicionário relacionando o espaço-tempo de Minkowski, M , como o espaço projetivo twistor. Um ponto $R \in M$ corresponde a uma linha $R \in \mathbf{PN}$. Um raio de luz $Z \in M$ corresponde ao ponto $Z \in \mathbf{PN}^{14}$ como pode ser visto na figura 5.3.

Por completeza, mostremos como a relação (5.18) implica (5.15). Podemos definir um ponto em M pela intersecção de linhas nulas. Suponha que estas linhas são descritas por twistors $Z^A \mapsto (\omega^a, \pi_{\dot{a}})$, $W^A \mapsto (\xi^a, \eta_{\dot{a}})$, então as linhas se encontram se existir uma solução comum a

$$(5.19) \quad \omega^a = ip^{a\dot{a}}\pi_{\dot{a}}; \quad \xi^a = ip^{a\dot{a}}\eta_{\dot{a}}.$$

Formalmente, isto é

$$(5.20) \quad p^{a\dot{a}} = -\frac{i}{\pi_{\dot{b}}\eta^{\dot{b}}} (\omega^a\eta^{\dot{a}} - \xi^a\pi^{\dot{a}}).$$

¹³Se quisermos ser coerentes na interpretação de raios de luz, o espaço-tempo M deve ser entendido como a versão compactada do espaço-tempo de Minkowski, ou seja, queremos complexificar M para identificá-lo com a esfera de Riemann.

¹⁴Como pensamos no espaço-tempo compactado, há raios de luz adicionais; estes raios correspondem a pontos no infinito.

No entanto, a linha correspondente não precisa ser real, o que significa que $p^{a\dot{a}}$ não precisa ser hermitiano. Se as linhas se encontrarem, ou seja, impusermos p^μ real, então

$$(5.21) \quad \bar{\eta}_a \omega^a = i\bar{\eta}_a p^{a\dot{a}} \pi_{\dot{a}} = i\bar{\eta}_a \bar{p}^{a\dot{a}} \pi_{\dot{a}} = -\bar{\xi}^{\dot{a}} \pi_{\dot{a}}.$$

O que se traduz na equação

$$(5.22) \quad Z^A \bar{W}_A = 0.$$

Portanto, as condições necessárias para dois twistors representarem linhas reais que se intersectam são

$$(5.23) \quad W^A \bar{W}_A = 0; \quad Z^A \bar{Z}_A = 0; \quad Z^A \bar{W}_A = 0.$$

Mais geral ainda, se as condições acima forem satisfeitas, podemos trocar tanto W^A quanto Z^A por

$$(5.24) \quad X^A = \mu Z^A + \lambda W^A$$

para quaisquer números complexos μ, λ . Logo, a linha X encontra cada linha W e Z e pertence ao cone nulo que atravessa o ponto P com vetor posição p^μ . Esse cone nulo pode ser utilizado para representar P . O conjunto de combinações lineares $\mu X^A + \lambda W^A$ em $\mathbf{N}$ caracteriza P de forma que a linha complexa P que une dois pontos Z e Y tem topologia de S^2 . Podemos, então, representar P por um bi-twistor

$$(5.25) \quad P^{AB} = Z^A W^B - W^B Z^A \mapsto \begin{pmatrix} \omega^a \xi^b - \xi^a \omega^b & \omega^a \eta_b - \xi^a \pi_b \\ \pi_a \xi^b - \eta_a \omega^b & \pi_a \eta_b - \eta_a \pi_b \end{pmatrix} = \pi_d i \eta^d \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \epsilon^{ab} p_{c\dot{c}} p^{c\dot{c}} & i p_b^a \\ -i p_a^b & \epsilon_{ab} \end{pmatrix}$$

onde $p^\mu = p^{a\dot{a}}$ é o vetor posição do ponto P . Sendo assim, pontos em M correspondem (a menos de uma constante de proporcionalidade) a twistors de dois índices antissimétricos,

$$(5.26) \quad P^{AB} = P^{[AB]}; \quad P^{[AB} P^{C]D} = 0.$$

De fato, a parte imaginária de p^μ é tipo-espaço, tipo-tempo, ou nula respectivamente dependendo da maneira como P intersecta $\mathbf{N}$ em um conjunto de uma dimensão real, em um ponto, ou em lugar algum. Se nula ou tipo-tempo, a parte imaginária de p^μ aponta para o futuro ou passado se P está contido em $\mathbb{CP}^{3-} \cup \mathbf{N}$ ou $\mathbb{CP}^{3+} \cup \mathbf{N}$.

5.4 Campos.

5.4.1 Abordagem de Penrose: campos no espaço de twistors.

A questão que fica é como campos em M são representados em twistors. Campos podem ser quantidades $\phi_r(P, e^a, f^b)$, nas quais $r = 0, 1, \dots, n$; e^a, f^b são pares de uma base espinorial no ponto P ,

$$(5.27) \quad \phi_r = \phi_{abc\dots l} e^a \dots e^d f^e \dots f^l.$$

Os espinores e_a e f_b definem twistors nulos que passam por P , respectivamente U_A e V_B ,

$$(5.28) \quad U_A \mapsto (e_a, -i p^{a\dot{a}} e_a)$$

e

$$(5.29) \quad V_B \mapsto (f_b, -ip^{b\bar{b}} f_b).$$

Desta forma temos as quantidades $\varphi_r(U_A, V_B) = \phi_r(P, e^a, f^b)$. Se U_A e V_B são restritos a twistors nulos com intersecção real, φ_r representa um campo com massa zero em M . Tal campo pode ser definido em um conjunto de três parâmetros iniciais e daí estendido para o resto do espaço por meio das equações de movimento. Em termos de twistors, seria econômico se pudéssemos descrever o campo em M por algum outro campo em $\mathbb{CP}^3$. No entanto, parece que precisamos definir o campo em um par de pontos U e V em $\mathbb{CP}^{3*}$.

De fato, seguindo a construção de [10], coloque $u = t + x^1$, $v = t - x^1$, $\zeta = x^2 + ix^3$ e considere f uma função complexa analítica de 3 variáveis complexas, ou seja, uma função twistor definida sobre o espaço twistor. Temos

$$(5.30) \quad \varphi_r = \frac{1}{2\pi i} \oint z^r f(z, u + z\bar{\zeta}, \zeta + zv) dz.$$

O que nos dá as relações de recorrência

$$(5.31) \quad \frac{\partial \varphi_r}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial \varphi_{r+1}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \varphi_r}{\partial v} = \frac{\partial \varphi_{r+1}}{\partial \zeta}.$$

Então, para um inteiro não negativo n , deixe $\varphi_{ab\dots k}$ com $2n$ índices ser definido por

$$\varphi_0 = \varphi_{0\dots 0}, \quad \varphi_1 = \varphi_{00\dots 1}, \dots, \quad \varphi_{ab\dots k} = \varphi_{(ab\dots k)},$$

no qual índices entre parênteses são simetrizados. Segue que desta maneira as relações de recorrência (5.31) são equivalentes as equações

$$(5.32) \quad \partial^{a\dot{a}} \varphi_{ab\dots k} = 0,$$

onde, temos nosso operador derivada dado pela correspondência (5.1): $\partial_\mu \mapsto \partial_{a\dot{a}}$, que satisfaz $\partial_\mu \epsilon_{bc} = 0$ junto com $\partial_\mu \epsilon_{\dot{b}\dot{c}} = 0$.

Campos sem massa livres são construídos da seguinte maneira: seja $\varphi_{ab\dots l}$, $\psi_{\dot{a}\dot{b}\dots j}$ espinores simétricos definidos sobre o espaço-tempo. Teremos, então,

- **helicidades negativas:**

$$(5.33) \quad \partial^{a\dot{a}} \varphi_{ab\dots l} = 0.$$

- **Helicidades positivas:**

$$(5.34) \quad \partial^{a\dot{a}} \psi_{\dot{a}\dot{b}\dots j} = 0.$$

Repare como a descrição é simétrica, podemos utilizar tanto campos com índices pontuados quanto campos com índices sem pontos. Estas equações serão a base onde formularemos a teoria de spin alto. No entanto, elas ainda não são a descrição que queremos utilizar. Nosso intuito é fazer uso da geometria complexa, queremos descrever os campos como seções de um fibrado linha.

5.4.2 Sobre a descrição que utilizaremos.

As características de nossa descrição, adotada de [9], consistem em uma estrutura complexa em duas dimensões de forma que

- equações para campos sem massa descrita por espinores de Weyl se tornam equações de onda no espaço de twistors, nas quais teremos os campos sendo funções homogêneas definidas como seções de um fibrado linha em $\mathbb{CP}^3$;
- as soluções das equações com helicidade s estão em correspondência um para um com a cohomologia $H^1(\mathbf{PT}, \mathcal{O}(2s - 2))$, onde $\mathbf{PT}$ é o espaço de twistor dado por $\mathbb{CP}^3$.

A construção destas duas consequências é bastante elaborada envolvendo sheafs, cohomologia, complexos, e um entendimento mais profundo da geometria de twistors. Portanto, está fora do alcance deste trabalho. De qualquer forma, a referência [9] desenvolve todo o processo. Para nós, então, os campos com helicidade negativa serão descritos pela seção de campos holomórficos em U com helicidade s , denotada por $\Gamma(U, \mathcal{O}_{ab\dots d}(-1))$, onde U está contido em M .

Mais ainda, campos com helicidade positiva s em um conjunto aberto U do espaço-tempo são espinores holomórficos com

$$(5.35) \quad \psi_{\dot{a}\dot{b}\dots\dot{d}} \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{\dot{a}\dot{b}\dots\dot{d}}(+1))$$

satisfazendo

$$(5.36) \quad \partial^{d\dot{d}}\psi_{\dot{a}\dot{b}\dots\dot{d}} = 0.$$

A representação escolhida será em termos dos potenciais. Por potencial nós queremos dizer um campo espinorial $a_{\dot{a}\dot{b}\dots\dot{d}} \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{\dot{a}\dot{b}\dots\dot{d}}(+1))$ de tal forma que

$$(5.37) \quad \partial_{d(\dot{d}} \dots \partial_{\dot{b}\dot{b}} a_{\dot{a}}^{b\dots d)} = \psi_{\dot{a}\dot{b}\dots\dot{d}}$$

(a simetrização diz respeito apenas aos índices pontuados). Vê-se que as equações (5.36) são satisfeitas se $\psi_{\dot{a}\dot{b}\dots}$ for dado por (5.37). No entanto, repare que há claramente uma liberdade de calibre na escolha do potencial a ,

$$(5.38) \quad a_{\dot{a}}^{b\dots d} + \partial_{\dot{a}}^{(b} \epsilon^{c\dots d)},$$

com $\epsilon \in \Gamma(U, \mathcal{O}^{c\dots d})$. Localmente sempre é possível encontrar um potencial para um dado campo sem massa e (5.38) é a única arbitrariedade em tal escolha. Isto segue da construção em [9], que envolve representações explícitas dos campos e potenciais.

Como exemplo, o campo de Maxwell tem a equação:

$$(5.39) \quad \partial^{a\dot{a}}\psi_{\dot{a}\dot{b}} = 0.$$

Se interpretarmos $\psi_{\dot{a}\dot{b}}$ com uma 2-forma auto-dual com

$$(5.40) \quad F_{\mu\nu} \mapsto F_{a\dot{a}b\dot{b}} = \phi_{ab}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}} + \epsilon_{ab}\psi_{\dot{a}\dot{b}},$$

então (5.39) se torna $dF = 0$; o potencial é uma 1-forma a tal que $da = F$ e a liberdade de calibre é simplesmente $a + d\epsilon$ para qualquer ϵ holomórfico.

As equações explícitas que descrevem as dinâmicas destes campos estão no próximo capítulo.

6 Teoria de spins altos.

6.1 Descrição de Fronsda.

Revisitaremos, brevemente, o desenvolvimento da teoria de spins altos da maneira padrão. Abordaremos os assuntos por uma linha histórica e não desenvolveremos todas as contas em seus detalhes. Nosso principal objetivo é encontrar um conjunto de equações para uma teoria de spin qualquer.

6.1.1 Partículas massivas: teoria de spins inteiros.

A teoria de spins altos para partículas massivas foi desenvolvida por Pauli e Fierz[21]. Sua abordagem exige que as funções de onda destas partículas obedeçam as transformações do grupo de Lorentz e tenham energias positivas. Pelo trabalhos de Bargmann e Wigner [23, 22] fica claro que estas exigências podem ser satisfeitas ao se construir estados de uma partícula que carregam um rótulo da representação irredutível do grupo de Poincaré.

Desta forma, para um spin inteiro s há um campo denotado por h , que é um tensor simétrico de s índices e satisfaz as condições:

- Não ter divergência, ou seja,

$$(6.1) \quad \partial^\mu h_{\mu\dots} = 0;$$

- não possuir traço

$$(6.2) \quad \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu\dots} = 0;$$

- e sua equação de movimento é a equação de Klein-Gordon

$$(6.3) \quad (\square + m^2) h_{\dots} = 0.$$

Aqui, $\eta^{\mu\nu}$ são as componentes inversas da métrica $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+ - - -)$, definidas por $\eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\alpha} = \delta^\mu_\alpha$ e $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ é o operador laplaciano.

Em uma formulação lagrangiana é necessário incluir-se mais campos, para que as relações listadas acima (equações (6.1), (6.2), e (6.3)) também possam surgir de um princípio variacional. No entanto, a adição de mais campos altera o número de graus de liberdade, que são fixos para um campo com spin determinado. Logo, estes campos auxiliares deveram se anular nas equações de movimento.

Escolhemos um conjunto de tensores com o número de índices que varia entre $\{s, s-2, s-3, \dots, 0\}$ e teremos, então, um campo total $\Phi = \{h^s, h^{s-2}, h^{s-3}, \dots, h^0\}$. O lagrangiano mais geral é

$$(6.4) \quad L = \sum_k \frac{a_k}{2} (\partial_\alpha h_{\mu_1\dots\mu_k})^2 + \frac{b_k}{2} (\partial^\alpha h_{\alpha\mu_2\dots\mu_k})^2 - c_k h^{\mu_3\dots\mu_k} \left(\partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta\mu_3\dots\mu_k} \right) + d_k h^{\mu_2\dots\mu_k} (\partial^\alpha h_{\alpha\mu_2\dots\mu_k}) - \frac{e_k}{2} m^2 (h_{\mu_1\dots\mu_k})^2$$

e as equações de movimento com $p_\mu = -i\partial_\mu$ são

$$(6.5) \quad \delta h^{\mu_1\dots\mu_k} \left[a_k p^2 h_{\mu_1\dots\mu_k} + b_k (p_{\mu_1} p^\alpha h_{\alpha\dots\mu_k}) + c_{k+2} \left(p^\beta p^\alpha h_{\alpha\beta\mu_3\dots\mu_{k+2}} \right) + c_k p_{\mu_1} p_{\mu_2} h_{\mu_3\dots\mu_k} + i d_{k+1} (p^\alpha h_{\alpha\mu_1\dots\mu_k}) - i d_k \partial_{\mu_1} h_{\mu_2\dots\mu_{k-1}} - m e_k h_{\mu_1\dots\mu_k} \right] = 0.$$

Surpreendentemente, Fronsda encontrou uma simplificação para estas equações no limite em que a massa dos campos é zero. Porque, ao exigirmos que o único campo dinâmico com spin s satisfaça (6.3),

as constantes $a_k, \dots, e_k$ começam a se acoplar. Entretanto, há sempre uma constante nula. Para ver como isto acontece, repare no termo $\delta h^{\mu_1 \dots \mu_k}$ na equação (6.5); com ele podemos construir coordenadas

$$(6.6) \quad \left(\delta h^k \right)^{\mu_1 \dots \mu_k} \rightarrow y^{\mu_1} \dots y^{\mu_k} \quad \text{nas quais} \quad y^\mu y_\mu = 0.$$

E assim definir uma função geradora

$$(6.7) \quad h^k(y) = y^{\mu_1} \dots y^{\mu_k} h_{\mu_1 \dots \mu_k},$$

que nos possibilitará resolver as equações de movimento. Procuramos por soluções com $p_0 > 0$ e expandimos $h^k(y)$ em uma série de números de spin

$$(6.8) \quad h^k(y) = \sum_{l=0}^k \left[(y^0)^{k-l} - a y^2 (y^0)^{k-l-2} - b (y^2)^2 (y^0)^{k-l-4} - \dots \right] h^{k,l}$$

com

$$(6.9) \quad a = (k-l)(k-l-1)/4 \quad \text{e} \quad b = (k-l) \dots (k-l-3)/32k(k-1).$$

A equação para $h^{k,l}$ é

$$(6.10) \quad p^2 \left(a_{k,l} h^{k,l} + c_k h^{k-2,l} + c_{k+2,l} h^{k+2,l} \right) - i p \left(d_k h^{k-1,l} - d_{k+1,l} h^{k+1,l} \right) = m^2 e_k h^{k,l},$$

com

$$(6.11a) \quad a_{k,l} = a_k + b_k (k-l)(k+l+1)/2k^2,$$

$$(6.11b) \quad c_{k,l} = c_k (k-l)(k-l-1)(k+l)(k+l+1)/4k^2(k-1)^2$$

$$(6.11c) \quad d_{k,l} = d_k (k-l)(k+l+1)/2k^2.$$

E o problema é escolher os coeficientes para que (6.10) seja equivalente a $(p^2 - m^2)h^{s,s} = 0$ com todos os outros $h^{k,l}$ iguais a zero.

Quando $l = s$, a única contribuição de k é s e (6.10) se reduz a

$$(6.12) \quad (a_s - m^2 e_s) h^{s,s} = 0.$$

Podemos normalizar e escrever $a_s = e_s = 1$. Quando $l = s-1$, o único valor que contribui de k é novamente $k = s$ e obtemos

$$(6.13) \quad p^2 (1 + b_s/s) h^{s,s-1} = m^2 h^{s,s-1},$$

o que deve ter $h^{s,s-1} = 0$ para qualquer valor de p^2 , ou seja, $b_s = -s$. Quando $l = s-2$, obtemos duas equações tomando $k = s$, $s = 1$,

$$(6.14) \quad \begin{pmatrix} a_{s,s-1} \frac{p^2}{m} - 1 & c_s \frac{p^2}{m} \\ c_{s,s-1} \frac{p^2}{m} & a_{s-2} \frac{p^2}{m} - e_{s-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^{s,s-2} \\ h^{s-2,s-2} \end{pmatrix} = 0.$$

Novamente, isso deve implicar $h^{s,s-2} = h^{s-2,s-2} = 0$, para todos os valores de p^2/m , o que significa dizer que o determinante da matriz deve ser independente de p^2/m e diferente de zero. Isso nos dá

$$(6.15a) \quad a_{s-2} = e_{s-2}(s-1)/s,$$

$$(6.15b) \quad c_s^2 = -e_{s-2}(s-1)^2/(2s-1)$$

quando $e_{s-2} \neq 0$. A partir de agora, sempre encontraremos condições com matrizes de dimensões maiores. Em geral, quando $l \leq s-1$ a dimensão da matriz é $s-l$. Entretanto, o caso que nos interessa é quando $l = s-4$, em que

$$(6.16a) \quad b_{s-3} = e_{s-3} \frac{(s-2)(s-3)^2}{3(s-1)^2},$$

$$(6.16b) \quad a_{s-4} = e_{s-4} \frac{(s-3)(2s-5)}{2(s-2)(2s-5)},$$

$$(6.16c) \quad c_{s-2} = 0,$$

$$(6.16d) \quad (e_{s-3}/m)^2 = -e_{s-3}e_{s-4} \frac{(s-3)^3(2s-1)}{6(s-1)(s-2)(2s-3)}.$$

A constante c_{s-2} ser nula é o que simplifica as equações para o caso sem massa. Quando $m = 0$, os campos $h_{\mu_1 \dots \mu_{s-3}}$, $h_{\mu_1 \dots \mu_{s-4}}$, ..., desacoplam do resto e daqui por diante podem ser ignorados. Mais ainda, nós temos $e_k = 0$ e as equações para os campos h^s e h^{s-2} , quando $l \leq s-2$, têm somente dois valores de k que contribuem reduzindo (6.10) a

$$(6.17) \quad p^2 \begin{pmatrix} a_{s,l} & c_s \\ c_{s,l} & a_{s-2,l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^{s,l} \\ h^{s-2,l} \end{pmatrix} = 0.$$

Isso não implica que $h^{s,l}$ e $h^{s-2,l}$ são zero, e as equações de Pauli-Fierz quebram. Mesmo assim, o determinante desta matriz deve ser nulo para todo l , pois isso garante a existência de um grupo de calibre para estas equações. Podemos ver isso por meio da equação para $h^{s,s}$, que é

$$(6.18) \quad p^2 h^{s,s} = 0,$$

enquanto a equação para $h^{s,s-1}$ se reduz a $0 = 0$. Aliado a isso, as projeções mais baixas de spin satisfazem (6.17). Uma solução $h^{s,s} = 0$ é expressa pela possibilidade de $h_{\mu_1 \dots \mu_s}$ ser um gradiente,

$$(6.19) \quad h^s(y) = s[p^\mu y_\mu] \epsilon(y) - \frac{1}{2}(s-1)y^2[p^\mu \epsilon_\mu](y),$$

de um tensor simétrico, sem traço de ranque $s-1$ que chamamos de ϵ . Quanto ao campo h^{s-2} , se substituirmos (6.19) em (6.6), encontramos o resultado

$$(6.20) \quad h^{s-2}(y) = [(s-1)/c_s] p^\mu \partial_\mu \epsilon(y).$$

Podemos, dadas estas transformações, combinar os dois campos em um novo tensor, cujo traço será não nulo.

6.1.2 Um exemplo: campo de spin 2.

Olharemos a construção de fronsdal para o caso $s = 2$. O lagrangiano é uma simplificação da equação (6.4) para um tensor simétrico de 2 índices

$$(6.21) \quad L = -\frac{1}{2}(\partial_\rho h_{\mu\nu})^2 + \frac{b}{2}(\partial^\mu h_{\mu\nu})^2 - \frac{m^2}{2}(h_{\mu\nu})^2.$$

Note que ainda não colocamos os campos adicionais, ou seja, veremos que a equação de movimento¹⁵,

$$(6.22) \quad \square h_{\mu\nu} - \frac{b}{2} \left[\partial_\mu (\partial^\alpha h_{\alpha\nu}) + \partial_\nu (\partial^\alpha h_{\mu\alpha}) - \frac{2}{D} \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} \right] - m^2 h_{\mu\nu} = 0,$$

não se reduz a equação de Klein-Gordon. Precisamos que os termos proporcionais ao divergente de h sejam zero. Para isso, adicionaremos um campo auxiliar Φ com lagrangiano

$$(6.23) \quad L_\Phi = \Phi \left(\partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} \right) + a_1 (\partial_\mu \Phi)^2 + a_2 \Phi^2.$$

A equação de movimento para Φ ,

$$(6.24) \quad \partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} + 2(a_2 + a_1 \square) \Phi = 0,$$

junto com o divergente da equação de h ,

$$(6.25) \quad [(2-D)p^2 + DM^2] \partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} - (D-1)p^4 \Phi = 0,$$

nos dá um sistema de equações lineares com $\partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu}$ e Φ como variáveis. Novamente, usaremos o mesmo método da equação (6.14) exigindo que o determinante seja independente das derivadas e não nulo. Obtemos, então, para $D > 2$

$$(6.26) \quad a_1 = \frac{(D-1)}{2(D-2)} \quad \text{with} \quad a_2 = \frac{m^2 D(D-1)}{2(D-2)^2}.$$

Assim, o conjunto completo de equações que descreve uma partícula de spin 2 é

$$(6.27a) \quad \Phi = 0, \quad \partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} = 0,$$

$$(6.27b) \quad \partial^\mu h_{\mu\nu} = 0, \quad \text{e} \quad \square h_{\mu\nu} - m^2 h_{\mu\nu} = 0.$$

A introdução de uma variável auxiliar nos permitiu recuperar o método de Pauli Fierz no caso de um campo com spin 2.

Agora, ao tomarmos o limite de m indo a zero, teremos o lagrangiano

$$(6.28) \quad L = -\frac{1}{2} (\partial_\rho h_{\mu\nu})^2 + (\partial^\mu h_{\mu\nu})^2 + \Phi (\partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu}) + \frac{D-1}{2(D-2)} (\partial_\mu \Phi)^2.$$

E suas equações de movimento serão

$$(6.29) \quad \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu (\partial^\mu h_{\mu\nu}) + \partial_\nu (\partial^\alpha h_{\mu\alpha}) - \frac{2}{D} \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} + \partial_\mu \partial_\nu \Phi = 0$$

e

$$(6.30) \quad \frac{D-1}{D-2} \square \Phi - \partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} = 0,$$

onde podemos ver claramente que os campos estão acoplados. Podemos combinar ambos tensores em uma nova quantidade

$$(6.31) \quad g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \frac{1}{D-2} \eta_{\mu\nu} \Phi.$$

¹⁵ D é a dimensão do espaço-tempo.

O lagrangiano escrito em termos deste novo campo é

$$(6.32) \quad L = -\frac{1}{2}(\partial_\rho g_{\mu\nu})^2 + (\partial^\mu g_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu g)^2 + g \partial^\alpha \partial^\beta g_{\alpha\beta},$$

no qual g é o traço de $g_{\mu\nu}$. As equações de movimento são

$$(6.33) \quad F_{\mu\nu} = \square g_{\mu\nu} - (\partial_\mu \partial^\alpha g_{\alpha\nu} + \partial_\nu \partial^\alpha g_{\mu\alpha}) + \partial_\mu \partial_\nu g = 0.$$

Definimos a quantidade F , chamada de tensor de Fronsda, porque com ela podemos reescrever as equações de movimento de uma maneira mais familiar

$$(6.34) \quad F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}F = 0.$$

As equações (6.34) são as equações de Einstein. De fato, o lagrangiano (6.28) só está escrito em uma base diferente de tensores e a equação (6.31) é apenas uma mudança de coordenadas para a forma comum da teoria de gravidade linearizada. Podemos ver um grupo de simetria maior, que não estava presente no caso massivo, nas equações de movimento

$$(6.35) \quad \delta g_{\mu\nu} = \partial_\mu \Lambda_\nu + \partial_\nu \Lambda_\mu,$$

que são apenas as versões infinitesimais da invariância por transformações de coordenadas.

6.1.3 Graus de liberdade.

Fronsdal obteve lagrangianos em dimensão 4 estudando o limite sem massa da teoria de spin inteiro, porque, nesse limite, todos os campos auxiliares, com exceção do ranque $s - 2$, desacoplam do resto e podem ser ignorados. Os campos s e $s - 2$ podem ser combinados em um novo tensor.

Todo o desenvolvimento é baseado nas condições (6.1), (6.2), e (6.3), que surgem quando procuramos os vetores nos quais age uma representação irredutível do grupo de Poincaré. Podemos entender melhor considerando os casimir

$$(6.36) \quad C_1 = p^\mu p_\mu$$

e

$$(6.37) \quad C_2 = S^\mu S_\mu,$$

no qual $S^\mu = -(1/2)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} J_{\nu\rho} p_\sigma$ é o vetor de Pauli-Lubanski. Estes casimir definem pelo menos dois números quânticos de qualquer campo, massa e spin. Em particular, para o spin s e massa m , temos os autovalores $C_1 = -m^2$ e $C_2 = m^2 s(s+1)$ e as transformações dos campos bosônicos são dadas pela representação $(\frac{s}{2}, \frac{s}{2})$. O casimir C_1 impõe a equação de Klein-Gordon (6.3).

Entretanto, a representação $(\frac{s}{2}, \frac{s}{2})$ é redutível sobre a ação de um subgrupo do grupo de rotação, pois ela carrega todos os valores de spin de 0 até s . O segundo casimir exige que todos os valores menores de spin sejam aniquilados pela condição de transversalidade (6.2).

No final, podemos perguntar quantos graus de liberdade há em um campo de spin s que se propaga em D dimensões de espaço-tempo, ou melhor, queremos saber qual a dimensão do espaço vetorial sobre o qual a representação está definida. Um tensor simétrico de s índices tem

$$(6.38) \quad \binom{D-1+s}{s} = \frac{(D-1+s)!}{s!(D-1)!}$$

componentes independentes. A condição de traço nulo - (6.2) - é um tensor de $s - 2$ índices e elimina portanto

$$(6.39) \quad \binom{D-3+s}{s-2} = \frac{(D-3+s)!}{(s-2)!(D-1)!}$$

quantidades diferentes. Similarmente, a condição de divergência nula, equação (6.1), é um tensor de $s - 1$ índices e possui

$$(6.40) \quad \binom{D-2+s}{s-1} = \frac{(D-2+s)!}{(s-1)!(D-1)!}$$

números distintos. No entanto, devemos tomar cuidado para não retirar componentes demais; as componentes contraídas em um traço já anulam o tensor. Deste modo, o traço do divergente não faz diferença, então temos um número menor por um fator $\binom{D-4+s}{s-3}$, que são as contribuições de um tensor com $s - 3$ índices¹⁶. Assim,

$$(6.41) \quad \begin{aligned} \text{graus de liberdade} &= \frac{(D-1+s)!}{s!(D-1)!} - \frac{(D-3+s)!}{(s-2)!(D-1)!} - \frac{(D-2+s)!}{(s-1)!(D-1)!} + \frac{(D-4+s)!}{(s-3)!(D-1)!} \\ &= \frac{(D-4+s)!}{s!(D-4)!} + 2 \frac{(D-4+s)!}{(s-1)!(D-3)!}, \end{aligned}$$

o que para $D = 4$ reduz

$$(6.42) \quad \text{graus de liberdade} = 1 + 2s$$

exatamente como esperado.

6.1.4 Um comentário sobre férmions.

A abordagem inicial de Fronsdal não envolve férmions. De fato, somente mais tarde naquele ano, em outro artigo [18], Fronsdal e Fang estenderam as ideias da sessão anterior e incluíram campos fermiônicos. Um férmion será um espinor, com spin $s = n+1/2$, que se transforma sobre a representação $D\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n}{2}\right) \oplus D\left(\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$ do grupo de Lorentz. Ou seja, é um tensor simétrico de n índices que satisfaz a condição de transversalidade

$$(6.43) \quad \partial^{\mu_1} \Psi_{\mu_1 \dots \mu_n} = 0$$

juntamente com a equação de Dirac

$$(6.44) \quad (\not{p} - m) \Psi_{\mu_1 \dots \mu_n} = 0,$$

na qual $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$ com γ^μ sendo as matrizes de Dirac. Além disso, a condição de traço nulo é substituída por

$$(6.45) \quad \gamma^{\mu_1} \Psi_{\mu_1 \dots \mu_n} = 0.$$

Novamente, quando desejamos uma formulação lagrangiana, novos campos auxiliares devem ser incluídos. As dificuldades são as mesmas do caso de bósons e não as desenvolvemos em detalhes aqui,

¹⁶ Dois índices removidos pelo traço e um pela divergência

mas encaminhamos o leitor para a referência [16]. Ao invés disso, exploraremos a teoria por meio de exemplo; utilizaremos a equação de Rarita-Schwinger

$$(6.46) \quad \gamma^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \Psi_\rho = 0,$$

que deve descrever um campo sem massa com spin $3/2$. Na equação (6.46), $\gamma^{\mu\nu\rho}$ é o produto antissimétrico de três matrizes de Dirac, que pode ser escrito como

$$(6.47) \quad \gamma^{\mu\nu\rho} = \gamma^\mu \gamma^{\nu\rho} - \eta^{\mu\nu} \gamma^\rho + \eta^{\mu\rho} \gamma^\nu.$$

Ao contrairmos (6.46) com γ_μ e utilizarmos (6.47) obtemos

$$(6.48) \quad \gamma^{\nu\rho} \partial_\nu \Psi_\rho = 0,$$

e a equação de movimento fica

$$(6.49) \quad \not{\partial} \Psi_\mu - \partial_\mu \not{\Psi} = 0.$$

Repare que esta equação lembra muito o problema que encontramos para o caso de spin 2^{17} . Não obtemos a equação de Dirac porque existe um termo proporcional a condição de γ -traço não nulo. Entretanto, para este caso não introduzimos um campo adicional, porque, pela prescrição de Fronsdal, há algo mais importante, a liberdade de calibre. A equação (6.49) é invariante por

$$(6.50) \quad \delta \Psi_\mu = \partial_\mu \epsilon,$$

e isso seria onde o programa de Pauli-Fierz quebra: a ausência de massa introduz um grupo de calibre. É algo bastante análogo a condição imposta sobre o determinante da equação (6.17). Poderíamos interpretar Ψ_μ como os campos misturados de ranque s e $s - 2$. Mais ainda, definiremos F_μ seguindo exatamente o caso de spin 2, o que torna a equação de movimento

$$(6.51) \quad F_\mu = \not{\partial} \Psi_\mu - \partial_\mu \not{\Psi} = 0.$$

E novamente podemos reescrevê-la igual a

$$(6.52) \quad F_\mu - \frac{1}{2} \gamma_\mu \not{F} = 0.$$

Um generalização é imediata, consideramos

$$(6.53) \quad F_{\mu\nu} = i (\not{\partial} \Psi_{\mu\nu} - \partial_\mu \not{\Psi}_\nu - \partial_\nu \not{\Psi}_\mu)$$

para o caso de spin $5/2$. A equação de movimento é, então,

$$(6.54) \quad F_{\mu\nu} = 0,$$

e a transformação de calibre será

$$(6.55) \quad \delta \Psi_{\mu\nu} = \partial_\mu \epsilon_\nu - \partial_\nu \epsilon_\mu$$

¹⁷Olhe o comentário abaixo da equação (6.22).

o que na equação de movimento implica

$$(6.56) \quad \delta F_{\mu\nu} = -2i\partial_\mu\partial_\nu\epsilon,$$

que é uma característica nova da teoria: as funções de transformação de calibre devem satisfazer $\epsilon = 0$.

Os graus de liberdade são contados de maneira análoga aos dos bósons, a única diferença é que estes espinores são representações da dupla cobertura SL do grupo de Lorentz, o que significa que devemos multiplicar a contagem pelo fator

$$(6.57) \quad 2^{[D]/2}, \quad \text{no qual} \quad [D] = D + \frac{1}{2} [(-1)^D - 1].$$

Assim, em D dimensões, um tensor simétrico de ranque n terá

$$(6.58) \quad 2^{[D]/2} \binom{D+n-1}{n-1}$$

componentes independentes. As condições (6.43) e (6.45) retiram

$$(6.59) \quad 2^{[D]/2} \binom{D+n-2}{n-1}$$

números cada, por serem condições sobre um tensor de ranque $(n-1)$. Novamente, no entanto, retiramos componentes demais, porque o divergente de um campo sem traço não faz mais sentido. Portanto, devemos adicionar

$$(6.60) \quad 2^{[D]/2} \binom{D+n-3}{n-2}$$

de forma que teremos

$$(6.61) \quad \begin{aligned} \text{graus de liberdade} &= 2^{[D]/2} \binom{D+n-1}{n-1} - 2^{[D]/2+1} \binom{D+n-2}{n-1} + 2^{[D]/2} \binom{D+n-3}{n-2} \\ &= 2^{[D]/2-1} \binom{D+n-3}{n}. \end{aligned}$$

Em particular, para $D = 4$,

$$(6.62) \quad \text{graus de liberdade} = 2n + 2 = 2s + 1$$

como esperado.

6.1.5 Equações de Fronsda para spins altos.

Generalizamos os desenvolvimentos das sessões passadas. O lagrangiano para a teoria mais geral sem massa é

$$(6.63) \quad \begin{aligned} L &= -\frac{1}{2} (\partial_\alpha h_{\mu_1 \dots \mu_s})^2 + \frac{1}{2} s (\partial^\alpha h_{\alpha \dots \mu_s})^2 + \frac{1}{2} s(s-1) (\partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta\mu_3 \dots \mu_s}) h \\ &\quad + \frac{1}{4} s(s-1) (\partial_{\mu_1} h_{\alpha\mu_2 \dots \mu_s}^\alpha)^2 + \frac{1}{8} s(s-1)(s-2) (\partial^{\mu_2} h_{\alpha\mu_2 \dots \mu_s}^\alpha)^2, \end{aligned}$$

no qual h representa o traço do campo $h_{\mu_1 \dots \mu_s}$. Não há mais problema em utilizarmos o traço, porque já combinamos os campos s e $s-2$ em um novo tensor. Neste ponto abandonamos a notação (6.7) e reintroduzimos os índices. Definimos

$$(6.64) \quad h_{\mu_1 \dots \mu_s}^{\text{velho}} = h_{\mu_1 \dots \mu_s} - \frac{1}{2s} \eta_{(\mu_1 \mu_2} h_{\alpha \mu_3 \dots \mu_s)}^\alpha$$

juntamente com

$$(6.65) \quad h_{\mu_1 \dots \mu_{s-2}}^{\text{velho}} = c h_{\mu_1 \dots \mu_{s-2}}$$

e escolhemos a constante c por conveniência. Para que as transformações de calibre tenham a forma

$$(6.66) \quad \delta h_{\mu_1 \dots \mu_s} = \partial_{(\mu_1} \epsilon_{\mu_2 \dots \mu_s)}$$

escolhemos $c = (s-1)^2/2c_s$. Os parênteses nas equações (6.64) e (6.66) representam simetrização sobre os índices, com exceção, claro, dos contraídos. Isso significa que há $s(s-1)/2$ termos para serem simetrizados em (6.64) e outros s termos em (6.66).

Por isso, o lagrangiano pode ser escrito como em (6.63), em termos dos campos h . Além disso, tomamos $m=0$, $e_k=0$ e a_k , b_k e c_k da sessão 6.1.1.

Desta forma, as equações de Euler-Lagrange são

$$(6.67) \quad F_{\mu_1 \dots \mu_s} = \partial^\rho \partial_\rho h_{\mu_1 \dots \mu_s} - s \partial_\rho \partial_{(\mu_1} h_{\mu_2 \dots \mu_s)}^\rho + \frac{1}{2} s(s-1) \partial_{(\mu_1} \partial_{\mu_2} h_{\rho \mu_3 \dots \mu_s)}^\rho = 0.$$

Porém, quando escritas na forma de Fronsda, elas se tornam

$$(6.68) \quad F_{\mu_1 \dots \mu_s} - \frac{1}{2} \eta_{(\mu_1 \mu_2} F_{\rho \mu_3 \dots \mu_s)}^\rho = 0.$$

A equação (6.68) é parecida com a equação de Einstein para a gravitação, com tensor de Ricci $F_{\mu_1 \dots \mu_s}$. Mas a equação de Bianchi falha, pois

$$(6.69) \quad \partial^{\mu_1} \left(F_{\mu_1 \dots \mu_s} - \frac{1}{2} \eta_{(\mu_1 \mu_2} F_{\rho \mu_3 \dots \mu_s)}^\rho \right) = -\frac{3}{2} \partial_{(\mu_1} \partial_{\mu_2} \partial_{\mu_3} h_{\alpha \beta \mu_5 \dots \mu_s)}^{\alpha \beta};$$

é por isso que Fronsda exige para $s > 3$ a condição de traço duplo

$$(6.70) \quad \eta^{\mu_1 \mu_2} \eta^{\mu_3 \mu_4} h_{\mu_1 \dots \mu_s} = 0$$

para a anomalia na identidade de Bianchi não estar presente.

Outra restrição é imposta na transformações de calibre. Temos sobre (6.66) que

$$(6.71) \quad \delta F_{\mu_1 \dots \mu_s} = 3 \partial_{(\mu_1} \partial_{\mu_2} \partial_{\mu_3} \epsilon_{\alpha \mu_4 \dots \mu_s)}^\alpha,$$

de onde tiramos a condição que ϵ não deve ter traço.

Se especificarmos uma condição de gauge

$$(6.72) \quad G = \partial^\alpha h_{\alpha \mu_2 \dots \mu_s} - \partial_{(\mu_1} h_{\alpha \mu_2 \dots \mu_s)}^\alpha,$$

teremos para a equação de movimento (6.68)

$$(6.73) \quad \square h_{\mu_1 \dots \mu_s} = 0$$

provando que realmente descrevemos campos sem massa.

O lagrangiano para a teoria de férmions é

$$(6.74) \quad \begin{aligned} L = & -i\bar{\Psi}_{\mu_1 \dots \mu_n} \not{\partial} \Psi^{\mu_1 \dots \mu_n} - in\bar{\Psi}_{\mu_2 \dots \mu_n} \not{\partial} \Psi^{\mu_2 \dots \mu_n} \\ & + \frac{i}{4}n(n-1)\bar{\Psi}_{\alpha\mu_2 \dots \mu_n}^{\alpha} \not{\partial} \Psi_{\alpha}^{\mu_2 \dots \mu_n} + in\left(\bar{\Psi}^{\mu_2 \dots \mu_n} \partial^{\alpha} \Psi_{\alpha\mu_2 \dots \mu_n} - \text{h.c.}\right) \\ & - \frac{i}{2}n(n-1)\left[\bar{\Psi}_{\alpha\mu_3 \dots \mu_n}^{\alpha} \partial^{\beta} \Psi_{\beta\mu_3 \dots \mu_n} - \text{h.c.}\right]. \end{aligned}$$

Os campos $\Psi_{\mu_1 \dots \mu_n}$ obedecem as mesmas construções que o caso bosônico, ou seja, acoplamos os ranques $n-2$ e n em um novo tensor simétrico cujo traço não é nulo. E escolhemos as constantes de forma que a condição de calibre seja

$$(6.75) \quad \delta \Psi_{\mu_1 \dots \mu_n} = \partial_{(\mu_1} \epsilon_{\mu_2 \dots \mu_n)}.$$

As equações de movimento podem ser escritas novamente com o tensor de Fronsdal

$$(6.76) \quad F_{\mu_1 \dots \mu_n} = i(\not{\partial} \Psi_{\mu_1 \dots \mu_n} - \partial_{(\mu_1} \not{\Psi}_{\mu_2 \dots \mu_n)}) = 0$$

ou na forma de Einstein:

$$(6.77) \quad F_{\mu_1 \dots \mu_n} - \frac{1}{2}\eta_{(\mu_1 \mu_2} F_{\alpha\mu_2 \dots \mu_n)}^{\alpha} - \frac{1}{2}\gamma_{(\mu_1} \not{\Psi}_{\mu_2 \dots \mu_n)} = 0.$$

A aparição do fator γ contribui para a anomalia na identidade de Bianchi

$$(6.78) \quad \partial \cdot \left(F_{\mu_1 \dots \mu_n} - \frac{1}{2}\eta_{(\mu_1 \mu_2} F_{\alpha\mu_2 \dots \mu_n)}^{\alpha} - \frac{1}{2}\gamma_{(\mu_1} \not{\Psi}_{\mu_2 \dots \mu_n)} \right) = i\partial_{(\mu_1} \partial_{\mu_2} \partial_{\mu_3} \gamma^{\alpha} \eta^{\beta\gamma} \Psi_{\alpha\beta\gamma\mu_3 \dots \mu_n)},$$

que se anula somente quando

$$(6.79) \quad \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \Psi_{\mu_1 \dots \mu_n} = 0.$$

A transformação de calibre (6.75) transforma o tensor de Fronsdal de maneira a exigir que

$$(6.80) \quad \gamma^{\mu_1} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}} = 0.$$

A função que transforma o calibre e satisfaz (6.80) nos permite escolher como condição

$$(6.81) \quad G = \not{\Psi}_{\mu_2 \dots \mu_n} - \frac{1}{2n}\gamma_{(\mu_2} \Psi_{\alpha\mu_3 \dots \mu_n)}^{\alpha} = 0.$$

No entanto, G não fixa completamente o calibre, pois podemos ter

$$(6.82) \quad \not{\partial} \epsilon_{\mu_2 \dots \mu_n} - \frac{1}{2n}\gamma_{(\mu_2} \partial^{\alpha} \epsilon_{\alpha\mu_3 \dots \mu_n)}.$$

Utilizamos parte deste calibre residual para zerar o segundo termo em (6.81) e obtemos como equação de movimento

$$(6.83) \quad \not{\partial} \Psi_{\mu_1 \dots \mu_n} = 0$$

provando que nossa descrição é de um férmion sem massa.

6.2 Descrição por twistors.

Nossa intenção é abordar de maneira diferente o problema de spins altos. Utilizaremos as equações de [12] como ponto de partida.

Todos os campos que utilizaremos não tem massa e são representações irredutíveis do grupo de Lorentz complexificado, ou seja, são representações de $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$. O número que caracteriza a representação é, então, a helicidade s . Mais ainda, conforme construímos no final do capítulo passado, os campos são seções holomórficas de uma descrição de fibrado linha sobre o espaço-tempo complexo M_c .

6.2.1 Equações para helicidade negativa.

Iremos construindo as representações irredutíveis adicionando índices a tensores simétricos. O nosso objetivo é obter uma equação de movimento para cada helicidade com um campo $\phi_{a_1 \dots a_n}$.

O primeiro campo de helicidade negativa é o espinor ϕ_a , que se transforma sobre $(1/2, 0)$ e tem helicidade $s = -1/2$. Sua dinâmica é controlada pela equação de Dirac

$$(6.84) \quad \partial^{a\dot{a}} \phi_a = \text{div } \phi_a = 0.$$

Já para o segundo campo, utilizaremos a separação em parte autodual e antiautodual do campo eletromagnético. A equação que possui helicidade negativa $s = -1$ é descrita pelo bi-espinor ϕ_{ab} e satisfaz a equação

$$(6.85) \quad \partial^{a\dot{a}} \phi_{ab} = \text{div } \phi_{ab} = 0.$$

Repare que o campo ϕ_{ab} é antiautodual.

Generalizamos nossa construção para um número qualquer de helicidade agora mantendo em mente que quando houver liberdade de calibre, nós dividiremos os campos em parte autodual e antiautodual. Para um campo com $2s = -n$, no qual $n \in \mathbb{Z}^+$, o campo $\phi_{(a_1 \dots a_n)}$ tem equação de movimento

$$(6.86) \quad \text{div } \phi_{(a_1 \dots a_n)} = \partial^{a_1 \dot{a}} \phi_{(a_1 \dots a_n)} = 0.$$

6.2.2 Equações para helicidade positiva.

Para helicidades positivas, começamos com o campo quiral de helicidade $s = +1/2$, $\psi_{\dot{a}}$, que se transforma sobre $(0, 1/2)$ e tem sua dinâmica controlada pela equação de Dirac

$$(6.87) \quad \text{div } \psi_{\dot{a}} = \partial^{a\dot{a}} \psi_{\dot{a}} = 0.$$

No caso do campo eletromagnético com helicidade $s = +1$, temos o espinor $a_{a\dot{a}}$, cuja derivada nos dá a parte antiautodual do tensor de maxwell, tem equação de movimento

$$(6.88) \quad \text{div } a_{a\dot{a}} = \partial_{(a_1}^{\dot{a}} a_{a_2)\dot{a}} = 0,$$

com transformação de calibre

$$(6.89) \quad \delta a_{a\dot{a}} = \partial_{a\dot{a}} \epsilon.$$

A equação (6.88) é conhecida como condição autodual.

Quando construímos representações mais altas, a transformação de calibre se alterará também. Por exemplo, para o campo com helicidade $s = +3/2$ obtemos

$$(6.90) \quad \delta a_{(a_1 a_2) \dot{a}} = \partial_{(a_1 \dot{a}} \epsilon_{a_2)}$$

para o campo $a_{(a_1 a_2) \dot{a}}$. De fato, ao adicionarmos índices sem ponto e simetrizarmos sobre eles, a transformação de calibre deverá alterar sua forma, pois a derivada possui dois índices fixos. A equação de movimento para esse caso é

$$(6.91) \quad \text{div } a_{(a_1 a_2) \dot{a}} = \partial_{(a}^{\dot{a}} a_{a_1 a_2) \dot{a}} = 0.$$

Todas estas equações são condições de autodualidade, que é uma referência a operação estrela de Hodge e a construção de que fizemos antes.

A teoria geral para helicidade $2s = m$, com $m \in \mathbb{Z}_*^+$, é dada pelo campo $a_{(a_1 \dots a_{m-1}) \dot{a}}$, cuja equação de movimento é

$$(6.92) \quad \text{div } a_{(a_1 \dots a_{m-1}) \dot{a}} = \partial_{(a}^{\dot{a}} a_{a_1 \dots a_{m-1}) \dot{a}} = 0$$

com a transformação de calibre do campo obedecendo

$$(6.93) \quad \delta a_{(a_1 \dots a_{m-1}) \dot{a}} = \partial_{(a_1 \dot{a}} \epsilon_{a_2 \dots a_{m-1})}.$$

7 Estrutura simplética em teoria de spins altos.

7.1 Descrição por twistors.

7.1.1 Estrutura simplética no eletromagnetismo reescrito.

Escrevemos a estrutura simplética para o eletromagnetismo na descrição de twistors. Devo ressaltar que, embora não tenha sido desenvolvida de primeiros princípios, a equação satisfaz todos os requerimentos para ser uma estrutura simplética: fechada e não degenerada. Nosso objetivo nesta seção consiste em exatamente verificar estas propriedades para a forma:

$$(7.1) \quad \Omega = \int d^3x n^{a\dot{a}} \left(\delta\phi_{ab} \wedge \delta a_{\dot{a}}^b \right),$$

na qual a integração ocorre, pelo teorema de Stokes, em uma superfície tipo espaço do espaço de extremos $\mathcal{M}$ e $n^{a\dot{a}}$ é um vetor normal definido sobre esta superfície.

Como vimos, temos, também, a estrutura expressa como

$$(7.2) \quad \Omega = \int i_\omega \text{vol}, \quad \omega = \delta\phi_{ab} \wedge \delta a_{\dot{a}}^b \frac{\partial}{\partial x^{a\dot{a}}},$$

na qual ω é o análogo local da estrutura simplética, definido agora sobre toda a variedade $\mathcal{F} \times M$.

Verificaremos se a forma (7.1) é fechada, ou seja, precisamos calcular

$$(7.3) \quad d\Omega = \int d(i_\omega \text{vol}).$$

No entanto, utilizando as relações válidas para o operador de *de Rham* δ ,

$$(7.4) \quad d(i_\omega \text{vol}) = L_\omega \text{vol} = (\text{div } \omega) \text{vol},$$

e as equações de movimento (6.85) e (6.88) temos

$$(7.5) \quad (\text{div } \omega) = \delta \partial^{a\dot{a}} \phi_{ab} \wedge \delta a_{\dot{a}}^b + \delta\phi_{ab} \wedge \delta \partial^{a\dot{a}} a_{\dot{a}}^b = 0.$$

Note que a simetria de ϕ_{ab} induz a equação autodual para $a_{a\dot{a}}$.

Com relação a não degenerescência, devemos verificar a variação da forma simplética por transformações de calibre, dadas pela equação (6.89), ou seja, dado o vetor

$$(7.6) \quad v = \partial_{a\dot{a}} \epsilon \frac{\delta}{\delta a_{a\dot{a}}}$$

tangente ao espaço de fase, precisamos calcular $L_v \Omega$. Podemos utilizar a relação

$$(7.7) \quad L_v \Omega = \delta(i_v \Omega) + i_v \delta \Omega = \delta(i_v \Omega),$$

de onde vemos que só precisamos calcular a contração de v com Ω . Obtemos, então,

$$(7.8) \quad i_v \Omega = \int d^3x n^{a\dot{a}} \partial_{\dot{a}}^b \epsilon \delta\phi_{ab},$$

que após uma integração por partes nos dá a equação de movimento para ϕ_{ab} . Portanto

$$(7.9) \quad L_v \Omega = 0.$$

Note que a transformação de calibre não age sobre a helicidade negativa, pois ela é invariante.

Uma característica de teorias de calibre são as estruturas simpléticas degeneradas. Resolvemos este problema com o espaço de fase reduzido que definimos anteriormente.

Iremos generalizar o raciocínio empregado nessa sessão para construir uma forma simplética em uma teoria de spin qualquer. A grande vantagem desta nova abordagem é que se trata, em um certo sentido, de uma extensão do eletromagnetismo, pois mais altas representações de helicidade do grupo de Lorentz são construídas adicionando-se índices em um tensor simétrico. As contas feitas aqui serão reproduzidas de maneira quase igual para a nova estrutura simplética. Mais ainda, se reduzem a este caso quando temos helicidade ± 1 .

7.1.2 Estrutura simplética para spin qualquer.

Escrevemos uma prescrição para encontrar a forma simplética em uma teoria de spin alto. Dado o caso $s = -1$, vamos mudar os índices não pontuados por um número de $m - 1$ índices, ou seja, trocamos ϕ_{ab} por $\phi_{a_1 \dots a_{m-1} b}$. Qualquer índice pode ser substituído, porque a simetrização deixará o resultado igual. Note que esta prescrição é válida, também, para as equações de movimento.

No caso de helicidades positivas $s = +1$, o vetor de Lorentz $a_{a\dot{a}}$ deve ser substituído por $a_{a_1 \dots a_{n-1} \dot{a}}$, no qual os índices não pontuados são simétricos. Esta substituição funciona, também, para as equações de movimento. A única sutileza encontra-se na transformação de calibre, pois envolve uma derivada. Mesmo assim, a prescrição deve ser óbvia.

A forma simplética será então

$$(7.10) \quad \Omega = \int d^3x n^{a\dot{a}} (\delta\phi_{a \dots a_{n-1}} \wedge \delta a_{\dot{a}}^{a_1 \dots a_{n-1}}).$$

Novamente, não temos como justificar logicamente esta fórmula, no entanto verificaremos que todas as propriedades de uma forma simplética são satisfeitas por (7.10). Começaremos escrevendo sua versão local como

$$(7.11) \quad \Omega = \int i_\omega \text{vol}, \quad \omega = \delta\phi_{a \dots a_{n-1}} \wedge \delta a_{\dot{a}}^{a_1 \dots a_{n-1}} \frac{\partial}{\partial x^{a\dot{a}}},$$

a qual utilizamos para checar se Ω é fechada. Temos que calcular $\delta\Omega$, o que, pela equação (7.4) é igual a calcular o divergente de ω ; pelas equações de movimento (6.86) e (6.92), nos dá

$$(7.12) \quad \text{div } \omega = \delta\partial^{a\dot{a}} \phi_{a \dots a_{n-1}} \wedge \delta a_{\dot{a}}^{a_1 \dots a_{n-1}} + \delta\phi_{a \dots a_{n-1}} \wedge \delta\partial^{a\dot{a}} a_{\dot{a}}^{a_1 \dots a_{n-1}} = 0.$$

Portanto, para as transformações de calibre dadas pelo vetor tangente ao espaço de fase

$$(7.13) \quad v = \partial_{a_1 \dot{a}} \epsilon_{a_2 \dots a_{n-1}} \frac{\delta}{\delta a_{a_1 \dots a_{n-1} \dot{a}}},$$

temos outra vez

$$(7.14) \quad L_v \Omega = \delta(i_v \Omega) + i_v \delta\Omega = \delta(i_v \Omega),$$

o que nos dá, após uma integração por partes,

$$(7.15) \quad \delta(i_v \Omega) = \int d^3x n^{a\dot{a}} (\delta\epsilon_{a_2 \dots a_{n-1}} \wedge \delta\partial_{a_1 \dot{a}} \phi^{a \dots a_{n-1}}) = 0$$

provando que

$$(7.16) \quad L_v \Omega = 0.$$

Devemos então passar novamente ao espaço de fase reduzido, que foi definido no capítulo 3.

7.2 Considerações.

A estrutura simplética fornece uma maneira de construir um funcional ação para a teoria descrita desta forma. Entretanto, no atual estágio de desenvolvimento do trabalho, não temos o funcional adequado.

Mais ainda, por um outro lado, poderíamos comparar a estrutura encontrada aqui com a que segue da descrição de Fronsda. É de se esperar que os campos complexos utilizados nesta abordagem correspondam a derivadas antissimétricas de $h_{\mu_1 \dots \mu_s}$; sendo assim, teríamos perdido alguma espécie de informação na descrição do sistema. Muito embora, neste estágio, ainda não possamos afirmar nada.

Nossos futuros desenvolvimentos, portanto, estarão nesta linha: descrever, por meio de uma ação, a teoria com campos holomórficos complexos e comparar toda a estrutura encontrada com a descrição de Fronsda.

8 Apêndice 1: uma passagem por grupos e álgebras de Lie.

8.1 Definições.

Um grupo de Lie G consiste em uma variedade diferenciável, cujas operações $G \times G \rightarrow G$ e $G \rightarrow G$ chamadas de produto e inversa, respectivamente, são diferenciáveis e obedecem os axiomas de grupo.

O espaço tangente, TG_e , de um grupo de Lie na identidade possui uma estrutura de álgebra de Lie (veja definição 2.7) construída da seguinte maneira: Para cada vetor $\mathbf{A} \in TG_e$ existe um subgrupo parametrizado por um número real $A^t \subset G$ com vetor velocidade

$$\mathbf{A} = \left. \frac{d}{dt} A^t \right|_{t=0}.$$

A não comutatividade de dois subgrupos A^t e B^s pode ser calculada por $A^t B^s A^{-t} B^{-s}$. Decorre, dada qualquer função real¹⁸ $\rho : G \times G \rightarrow \mathbb{R}$, que há um e apenas um subgrupo C^r , para o qual

$$\rho(A^t B^s A^{-t} B^{-s}, C^r) = o(s^2 + t^2) \quad \text{quando } s \text{ e } t \rightarrow 0.$$

O vetor correspondente a C^r , dado pela relação $\mathbf{C} = (d/dr)_{r=0} C^r$ é chamado de parênteses de Lie $\mathbf{C} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ dos vetores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. Essa operação transforma o espaço TG_e em uma álgebra de Lie, pois ela é bilinear, antissimétrica, e satisfaz a identidade de Jacobi. Essa álgebra é chamada de álgebra de Lie do grupo G .

No nosso caso, o parênteses de Poisson de dois campos vetoriais pode ser definido como um parênteses de Lie para o grupo de Lie de dimensão infinita de todos os difeomorfismos da variedade M .

Seja $g \in G$. Definimos translação pela direita R_g como o mapa $R_g : G \rightarrow G$, com $R_g = hg$. O diferencial de R_g no ponto e leva TG_e em TG_g . Desta forma, cada vetor $\mathbf{A} \in TG_e$ corresponde a um campo vetorial no grupo. Sua forma é dada pelas translações a direita $(R_g)_* \mathbf{A}$ e é chamado de campo vetorial invariante pela direita. Claramente, um campo vetorial invariante pela direita em um grupo é determinado pelo seu valor na identidade. O parênteses de Poisson, definido em 2.8, define o parênteses de Lie nessa construção.

8.2 As representações adjunta e coadjunta.

Seja G um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie, o espaço tangente no elemento identidade, no qual a operação de comutador está definida.

Um grupo de Lie age em si mesmo sobre translações pela direita ou pela esquerda; todo elemento g do grupo define um difeomorfismo do grupo nele mesmo:

$$L_g : G \rightarrow G, \text{ com } h \mapsto gh;$$

$$R_g : G \rightarrow G, \text{ com } h \mapsto hg.$$

O que, por sua vez, induz mapas entre espaços tangentes

$$L_{*g} : TG_h \rightarrow TG_{gh}$$

e

$$R_{*g} : TG_h \rightarrow TG_{hg}$$

para cada $h \in G$.

O difeomorfismo $R_{g^{-1}} L_g$ é um automorfismo sobre G . Logo, deixa o elemento identidade do grupo fixo. Sua derivada na identidade é um mapa linear da álgebra nela mesma. Esse mapa é denotado usualmente por

¹⁸Que pode ser encarada como um métrica riemanniana em TG_e .

$$Ad_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \text{ com } Ad_g = (R_{g^{-1}}L_g)_{*e}$$

e chamado de representação adjunta do grupo. De fato, ele representa um homomorfismo, pois preserva o parênteses,

$$Ad_g [\xi, \eta] = [Ad_g \xi, Ad_g \eta],$$

e

$$Ad_{gh} = Ad_g Ad_h$$

para todo ξ e η em $\mathfrak{g}$ e g e h em G .

Podemos considerar Ad como um mapa do grupo no espaço vetorial de operadores lineares da álgebra, $\text{End } \mathfrak{g}$. Esse mapa é diferenciável e sua derivada avaliada na identidade do grupo é linear levando de $\mathfrak{g}$ para $\text{End } \mathfrak{g}$. Usualmente, denotamos essa função por ad , com sua imagem sobre um elemento ξ sendo ad_ξ . Portanto, ad_ξ é um endomorfismo definido em cima da álgebra, de forma que

$$ad = (Ad)_{*e} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End } \mathfrak{g}$$

dada por

$$ad_\xi = \frac{d}{dt} \left[Ad_{e^{t\xi}} \right]_{t=0},$$

na qual $e^{t\xi}$ é um grupo parametrizado por t com vetor tangente ξ . Note que, com as considerações feitas acima, temos

$$ad_\xi \eta = [\xi, \eta].$$

Consideramos, agora, o espaço dual a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, que será denotado por $\mathfrak{g}^*$. Este espaço vetorial consiste de funcionais lineares reais definidos sobre a álgebra de Lie. Em outras palavras, $\mathfrak{g}^*$ é o espaço cotangente ao grupo na identidade, $\mathfrak{g}^* = T^*G_e$. Denotaremos a ação de algum elemento deste conjunto, ξ , em algum vetor da álgebra de Lie por (ξ, η) . Ou seja, $\xi \in \mathfrak{g}^*$ e $\eta \in \mathfrak{g}$ de forma que $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}$.

Novamente, translação pela direita e esquerda induz operadores no espaço cotangente, que serão duais a L_{*g} e R_{*g} . Escreveremos

$$L_g^* : T^*G_{gh} \rightarrow T^*G_h \text{ e } R_g^* = T^*G_{hg} \rightarrow T^*G_h$$

para todo $h \in G$ quando nos referirmos aos mapas induzidos na álgebra dual. Esses operadores são definidos pelas identidades

$$(L_g^* \xi, \eta) = (\xi, L_{*g} \eta) \text{ e } (R_g^* \xi, \eta) = (\xi, R_{*g} \eta).$$

A transposição da operação Ad_g é Ad_g^* , na qual g é qualquer elemento de G . Como antes, elas satisfazem

$$Ad_{gh}^* = Ad_h^* Ad_g^*.$$

Essa representação do grupo é chamada de coadjunta. O operador Ad_g^* age como uma derivação sobre os elementos da álgebra[8]. Quando avaliada na identidade, essa derivação é um mapa linear da álgebra para o espaço vetorial de operadores definidos sobre $\mathfrak{g}^*$. Denotaremos essa função por ad^* , e sua imagem sobre um elemento ξ é ad_ξ^* . Portanto, temos

$$ad_\xi^* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

juntamente com

$$(ad_{\xi}^* \zeta, \eta) = (\zeta, ad_{\xi} \eta)$$

para todo elemento $\zeta \in \mathfrak{g}^*$ e $\eta \in \mathfrak{g}$. É comum escrever também

$$ad_{\xi}^* \zeta = \{\xi, \zeta\}.$$

Então, chaves significam uma função bilinear de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}$, que está relacionada com o comutador por

$$(\{\xi, \zeta\}, \eta) = (\zeta, [\xi, \eta]).$$

8.3 Estrutura simplética na representação coadjunta.

Consideraremos, agora, órbitas da representação coadjunta. Em cada ponto da órbita, nós temos uma estrutura simplética, o que implica: órbitas na representação adjunta possuem dimensão par. Também, podemos estudar diferentes estruturas simpléticas por diferentes órbitas em diferentes grupos de Lie. Contruiremos a estrutura simplética nas órbitas da representação coadjunta no que segue. Seja x um ponto no espaço dual da álgebra e ξ um vetor tangente a este ponto em sua órbita. O vetor ξ pode ser representado como o vetor velocidade no ponto x sobre a ação coadjunta do grupo $\exp(at)$, com velocidade $a \in \mathfrak{g}$. Em outras palavras, todo vetor tangente a órbita de x na representação coadjunta do grupo pode ser expresso como um vetor a da álgebra pela fórmula

$$\xi = \{a, x\}, \quad a \in \mathfrak{g}, x \in \mathfrak{g}^*.$$

A forma simplética Ω fica definida sobre um par de vetores ξ_1 e ξ_2 tangentes a órbita de x quando nós os expressarmos como elementos a_1 e a_2 da álgebra pela fórmula acima. Assim, obteremos

$$\Omega(\xi_1, \xi_2) = (x, [a_1, a_2]).$$

9 Apêndice 2: noções de fibrados.

9.1 Definição.

Uma fibração é uma tripla (E, B, π) que consiste de dois espaços topológicos E e B e uma projeção contínua $\pi : E \rightarrow B$. Normalmente, chamamos B de espaço base. O exemplo mais simples de fibração é o produto cartesiano $(B_1 \times B_2, B_1, \pi)$ com π_1 sendo a projeção sobre a primeira coordenada

$$\pi_1(x^1, x^2) = x^1 \text{ para todo } x^1 \in B_1 \text{ e } x^2 \in B_2.$$

Na realidade, fibrados são introduzidos para generalizar a noção de produtos cartesianos.

Nos restringiremos a situações nas quais os espaços topológicos $\pi^{-1}(x)$ com $x \in B$ são homeomórficos a algum espaço F . Então, $\pi^{-1}(x)$ é chamada de fibra em x , denotada por F_x . O espaço F é chamado de fibra típica. Se F for um espaço vetorial, a fibração é chamada de fibração vetorial.

O fibrado (E, B, π, G) é uma fibração (E, B, π) com uma fibra típica F , um grupo G de homeomorfismos de F em si mesmo, e a cobertura de B por uma família de conjuntos abertos $\{U_j, j \in J\}$, tal que:

- Localmente o fibrado é trivial, ou seja, é homeomórfico ao produto cartesiano; mais precisamente, $\pi^{-1}(U_j)$ é homeomórfico ao produto $U_j \times F$ para todo $j \in J$. Esse homeomorfismo $\phi_j : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times F$ tem a forma $\phi_j(p) = (\pi(p), \tilde{\phi}_j(p))$. Os conjuntos $\{U_j, \phi_j\}$ são chamados família de trivializações locais do fibrado. Seja $x \in U_j$, temos $\tilde{\phi}_{j,x}$, a função restrita a F_x , como um homeomorfismo de F_x em F .
- Existe uma correlação entre fibrados definidos nos abertos U_j que cobrem a base. Se $x \in U_i \cap U_j$, o homeomorfismo $\tilde{\phi}_{i,x} \circ \tilde{\phi}_{j,x}^{-1} : F \rightarrow F$ é um elemento do grupo de estrutura G para todo x . Se G tem só um elemento, o fibrado é trivializável - ou seja, se reduz ao produto cartesiano.
- Os mapas $\tilde{\phi}_{i,x} \circ \tilde{\phi}_{j,x}^{-1} = g_{ij}$ de $U_i \cap U_j \rightarrow G$ são contínuos. Comumente, são chamados de funções de transição e satisfazem a relação

$$g_{jk}(x)g_{ki}(x) = g_{ji}(x);$$

- A definição necessita da noção de equivalência entre dois fibrados sobre um mesmo espaço topológico para ser completa.

9.1.1 Fibrados equivalentes.

Considere duas fibrações (E_1, B_1, π_1) e (E_2, B_2, π_2) ; os morfismos entre as duas fibrações serão os que preservam a estrutura de fibra¹⁹. Este mapa é um par (F, f) tal que

$$F : E_1 \rightarrow E_2, \quad f : B_1 \rightarrow B_2$$

e o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{F} & E_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array}$$

Dado o mapa F , se existir f , então ele será único.

¹⁹Entenda-se localmente como a estrutura ser o produto cartesiano.

9.1.2 Coordenadas no fibrado.

Todos os sistemas de coordenadas apropriados a E como variedade não são apropriados a E no fibrado. Considere a fibração (E, B, π) , na qual E e B são variedades de dimensão $n + p$ e n . Um sistema de coordenadas (U, ϕ) em E define uma fibra coordenada em E se o mapa $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ é um morfismo entre fibrações, com $\mathbb{R}^{n+p}$ sendo a fibração cartesiana $\mathbb{R}^{n+p} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.

9.2 Fibrado tangente.

Seja TX o conjunto dos pares $(x, \mathbf{v}_x)$ para todo x na variedade diferenciável X e $\mathbf{v}_x \in TX_x$. Uma estrutura de fibrado pode ser dada por $(TX, X, \pi, GL(n, \mathbb{R}))$ da seguinte maneira.

- Fibra em x : TX_x ;
- Fibra típica: $\mathbb{R}^n$;
- Projeção: $\pi : (x, \mathbf{v}_x) \mapsto x$;
- Cobertura de X : $\{U_j\}$; tal que $\{U_j, \psi_j\}$ é um atlas de X ;
- Homeomorfismo: ϕ_j é o par $(\pi, \psi_{*j} \circ \pi_2)$, com $\pi_2(x, \mathbf{v}_x) = \mathbf{v}_x$, e $\psi_{*j}(\mathbf{v}_x)$ sendo a representação de $\mathbf{v}_x$ no sistema de coordenadas $\{U_j, \psi_j\}$,

$$(\pi, \psi_{*j} \circ \pi_2) : \pi^{-1}(U_j) \mapsto U_j \times \mathbb{R}^n,$$

por

$$(x, \mathbf{v}_x) \mapsto (x, \psi_{*j}(\mathbf{v}_x)).$$

- Grupo de estrutura: $GL(n, \mathbb{R})$, o grupo de automorfismos lineares de $\mathbb{R}^n$, cuja representação em matriz é o conjunto de $n \times n$ matrizes com determinante não nulo.

As coordenadas de uma fibra em TX são dadas pelos mapas

$$(\psi_j, \text{identidade}) \circ (\pi, \psi_{*j} \circ \pi_2) : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Assim, para um ponto $p = (x, \mathbf{v}_x) \in \pi^{-1}(U_j) \subset TX$, teremos

$$(x^1, \dots, x^n, v_x^1, \dots, v_x^n).$$

Uma mudança de coordenadas em TX é inteiramente determinada por uma mudança em sistema de coordenadas em X . Mesmo assim, não há isomorfismo canônico entre a fibra em um ponto e a fibra típica, ou seja, não há isomorfismo entre fibras de pontos diferentes. Precisamos de uma estrutura adicional, algo como, por exemplo, transporte paralelo.

Já a representação para o grupo de estrutura aparece quando dados $\psi_{*1x} : \mathbf{v}_x \in TX_x \mapsto \mathbf{V} \in \mathbb{R}^n$ e $\psi_{*2x} : \mathbf{v}_x \in TX_x \mapsto \mathbf{V} \in \mathbb{R}^n$ nos é induzido

$$\psi_{*1x} \circ \psi_{*2x}^{-1} \in GL(n, \mathbb{R}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ por } \mathbf{V}' \mapsto \mathbf{V}.$$

9.3 Fibrado principal.

Seja o fibrado (E, X, π, G) e $\{U_i\}$ uma cobertura de X utilizada na estrutura do fibrado. Seja $p \in F_x$, $x \in U_i$ e ponha

$$g_i = \tilde{\phi}_{i,x}(p),$$

com $\tilde{\phi}_{i,x}$ o homeomorfismo de F_x em G . Definiremos R_g sobre $\pi^{-1}(U_i)$ por

$$(R_gp)_i = \tilde{\phi}_{i,x}^{-1}(R_g g_i) = \tilde{\phi}_{i,x}^{-1}(g_i g), \quad p \in \pi^{-1}(U_i).$$

Pela definição, claramente $R_{g_1} R_{g_2} p = R_{g_1 g_2} p$, ou seja, o conjunto $\{R_g; g \in G\}$ é isomórfico a G . Mais ainda, p e R_gp pertencem a mesma fibra, o que faz o grupo $\{R_g; g \in G\}$ agir transitivamente.

Para $p \in \pi^{-1}(U_i \cap U_j)$ temos $(R_gp)_i = (R_gp)_j$, porque dado $p \in F_x$, $x \in U_i \cap U_j$ a definição implica

$$\tilde{\phi}_{j,x}(p) = g_j \quad \text{e} \quad \tilde{\phi}_{i,x}(p) = g_i \quad \text{de forma que} \quad g_i = \tilde{\phi}_{i,x} \circ \tilde{\phi}_{j,x}^{-1}(g_j).$$

Também G age em $F = G$ por translações pela esquerda; para $x \in U_i \cap U_j$, deixe $g_{ij}(x)$ ser um elemento em G tal que

$$\tilde{\phi}_{i,x} \circ \tilde{\phi}_{j,x}^{-1}(g) = g_{ij}(x)g, \quad \text{para todo } g \in G.$$

Então

$$g_i = g_{ij}(x)g_j$$

e

$$(R_gp)_j = \tilde{\phi}_{j,x}^{-1}(g_j g) = \tilde{\phi}_{i,x}^{-1} \circ \tilde{\phi}_{i,x} \circ \tilde{\phi}_{j,x}^{-1}(g_j g) = \tilde{\phi}_{i,x}^{-1}(g_{ij}(x)g_j g) = \tilde{\phi}_{i,x}^{-1}(g_i g) = (R_gp)_i.$$

E como o mapa R_g é independente da escolha do aberto U_i contendo $\pi(p)$, ele fica bem definido sobre todo E , e escrevemos

$$R_g = \tilde{\phi}_{i,x}^{-1} \circ R_g \circ \tilde{\phi}_{i,x}(p), \quad x = \pi(p).$$

Em geral, a ação pela esquerda de G no fibrado principal (E, X, π, G) não define uma ação global que preserva fibras. A prova segue os passos da construção acima. Com a mesma notação, nós obtemos

$$g_i = \tilde{\phi}_{i,x}(p)$$

e

$$(L_gp)_i = \tilde{\phi}_{i,x}^{-1}(gg_i)$$

E desde que $\tilde{\phi}_{i,x} \circ \tilde{\phi}_{j,x}^{-1} = g_{ij}(x)g$ por definição, encontra-se

$$(L_gp)_j = \tilde{\phi}_{i,x}^{-1} \circ \tilde{\phi}_{i,x} \circ \tilde{\phi}_{j,x}^{-1}(gg_j) = \tilde{\phi}_{i,x}^{-1}(g_{ij}(x)gg_j).$$

Agora, aqui o argumento $g_{ij}(x)gg_j$ não pode ser simplificado para gg_i e $(L_gp)_i$ não é igual a $(L_gp)_j$.

Referências

- [1] E. Witten, **Talk given at the 60th birthday conference of professor J. H. Schwarz**;
- [2] V. I. Arnold, **Mathematical methods of classical mechanics**, Springer;
- [3] Otto Foerster, **Lectures on Riemann Surfaces**, Springer;
- [4] S. Smale, **Topology and mechanics**, *Inventiones Mathematicae* 10:4 (1970) 305-331, 11:1 (1970) 45-64;
- [5] Roger Penrose, **The central programme of twistor theory**, *Chaos, Solitons and fractals* Vol. 10, 581-611 (1999);
- [6] Roger Penrose, **Twistor algebra**, *J. Math. Phys.* 8 (1967) 345;
- [7] J. Mardsen e A. Weinstein, **Reduction of symplectic manifolds with symmetries**, *Reports on Mathematical Physics* 5 (1974) 121-130;
- [8] Andrei Mikhailov, **Notes on Differential geometry and classical mechanics**;
- [9] Michael G. Eastwood, Roger Penrose, and R. O. Wells Jr., **Cohomology and Massless Fields**; *Communications in Mathematical Physics* (1981);
- [10] Roger Penrose, **Solutions of the Zero-Rest-Mass Equations**, *Journal of Mathematical Physics*, Vol 10, number 1 (1969);
- [11] Roger Penrose e Wolfgang Rindler, **Spinors and spacetime - Volumes 1 and 2**, Cambridge university press;
- [12] Alexey Rosly, **Minicourse on twistor theory**, class notes;
- [13] Souriau, **Structure des systèmes Dynamiques**, Dunod, 1970;
- [14] C. Fronsdal, **Massless fields with integer spin**, *Physic. Rev.* D18 (1978);
- [15] Dario Francia and Augusto Sagnotti, **Free geometric equations for higher spins**, arXiv:hep-th/0207002v2;
- [16] L. P. S. Singh and C. R. Hagen, **Lagrangian formulation for arbitrary spin II. The fermionic case**, *Physic. Rev.* D9 (1974);
- [17] N. Bouatta, G. Compère, and A. Sagnotti, **An introduction to free higher-spin fields**, arXiv:hep-th/0409068v1;
- [18] J. Fang and C. Fronsdal, **Massless fields with half-integer spin**, *Phys. Rev. D* 18, 3630 (1978);
- [19] Rakibur Rahman, **Higher spin theory - Part I**, arXiv:hep-th/1307.3199v2;
- [20] Andrei Mikhailov, **Notes On Higher Spin Symmetries**, arXiv:hep-th/0201019;
- [21] M. Fierz and W. Pauli, *Proc. R. Soc. London* A173, 211 (1939);
- [22] E. P. Wigner, *Ann. Math.* 40, 149 (1939);
- [23] V. Bargmann and E. P. Wigner, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 34, 211 (1948).