



IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.005/94

Dimensão anômala para a QED escalar no gauge do
cone de luz à nível de dois loops

Luciene Pontes Freitas



Orientador

Alfredo Takashi Suzuki

Setembro 1994

Agradecimentos

Quero agradecer a todos os que me apoiaram e incentivaram durante este trabalho. Em especial, agradeço aos meus pais, que sempre estiveram ao meu lado, e aos meus amigos, que me ajudaram a superar as dificuldades. Também agradeço aos professores que me ensinaram a importância da pesquisa e da dedicação. Este trabalho foi realizado com a ajuda de muitos recursos, e gostaria de agradecer a todos os que me forneceram informações e materiais. Por fim, agradeço a mim mesmo, por não desistir e por ter concluído este trabalho.

“Dedico este trabalho a minha
família, fonte da força e ins-
piração que me mantém.”

Agradecimentos

Gostaria de expressar meus agradecimentos :

Ao Prof. Alfredo T. Suzuki por sua orientação, ao Prof B. M. Pimentel Escobar pela acolhida e ao Prof. Ruben Aldrovandi pela inspiração.

Aos amigos : Natália Boboshko pelos conselhos e momentos agradáveis e Orlando L. G. Peres por sua amizade incondicional.

Aos que indiretamente contribuíram : Rogerio G. Almeida, Eduardo Gregores e Ana Lucia Barbosa.

Aos funcionários que abreviaram o tempo despendido nas tarefas do dia a dia.

Aos meus familiares pelo apoio e orientação em todos os momentos.

Cumpre-me enfim, agradecer ao CNPq pelo suporte financeiro.

Resumo

Desenvolvemos neste trabalho o cálculo da dimensão anômala, γ , a um e dois loops, para a Eletrodinâmica Quântica Escalar no gauge do cone de luz. Este cálculo foi mostrado desde as fases mais fundamentais da quantização da teoria, como a extração das regras de Feynman através de métodos funcionais, até o tratamento das divergências das integrais de Feynman, que aparecem nas correções radiativas dos propagadores, via regularização dimensional. O cálculo de tais integrais, no gauge do cone de luz, exigiu o uso da prescrição de Mandelstam, desenvolvida na década de 80, de modo a podermos fazer uso da contagem de potências na identificação das integrais divergentes na região ultravioleta. Além disso foi testada a renormalizabilidade desta teoria, até dois loops, no gauge do cone de luz.

Palavras-Chaves : QED escalar, gauge do cone de luz, dimensão anômala, quantização funcional, regularização dimensional.

Área(s) de Conhecimento : 1.05.03.01-3

Abstract

In this work we evaluate the anomalous dimension, γ , at one and two loops, for the Scalar Quantum Electrodynamics, in the light-cone gauge. This has been done from the most fundamental phases of the quantization of the theory, like extracting Feynman's rules through functional methods, up to treatments of Feynman's integrals, which appear in the radiative corrections of the propagators, using dimensional regularization method. The evaluation of those integrals, in the light cone gauge, required the use of Mandelstam's prescription, developed in the 80's, in such a way that the use of power counting to identify and assess the degree of divergence of the ultraviolet divergent integrals would be permissible. We also tested the renormalizability of this theory at two loops, in the light cone gauge.

Key Words : scalar QED, light-cone gauge, anomalous dimension, functional quantization, dimensional regularization.

Índice

1	Formalismos Gerais	6
1.1	Integrais de trajetória na Mecânica Quântica	6
1.2	Integrais de trajetória na Teoria Quântica de Campos	11
1.3	A Regularização Dimensional	14
1.4	A Dimensão Anômala	17
2	A QED Escalar no Gauge do Cone de Luz	22
2.1	Os Propagadores da Teoria	24
2.2	Dedução dos Vértices da Teoria via Métodos Funcionais	25
2.3	A Necessidade da Prescrição de Mandelstam	29
3	A Dimensão Anômala a Um Loop	33
4	A Dimensão Anômala a Dois Loops	37
A	Regras de Feynman para QED Escalar	47
B	Notação do Gauge do Cone de Luz	48
C	Integrais no Gauge do Cone de Luz	49
C.1	Integral $E(p)$	49
C.2	Integral $K(p)$	50
C.3	Integral $T(p)$	56
D	Demonstração da Equação 2.13	57
E	Auto-Energia do fóton no Gauge do Cone de Luz	58
F	Auto-Energia do Campo Escalar a Dois Loops	60

G	Algumas Integrais da Tabela 4.1	68
G.1	Cálculo de U_{16}	68
G.2	Cálculo de U_{20}	69
G.3	Cálculo de U_3	70
G.4	A Respeito das Outras Integrais	70
	Bibliografia	74

Introdução

O sucesso das teorias de gauge (calibre) vem sendo confirmado na medida em que quando associadas à Teoria Quântica de Campos (TQC) na descrição das partículas elementares e suas interações possibilita a predição de quantidades físicas tais como : o momento magnético do muon, a secção de choque Thompson e o deslocamento Lamb da linha 3P_1 do hidrogênio, que concordam com as medidas experimentais com grande precisão.

Uma teoria como a Eletrodinâmica Quântica (QED), cujos resultados vêm sendo confirmados pela experiência, é sem dúvida o de maior sucesso entre as teorias de gauge. O princípio de gauge pode ser visto nesta teoria, onde os campos de matéria (elétrons, pósitrons) são invariantes sob transformações globais do grupo de gauge $U(1)$. Para “calibrar” esta invariância, ou seja, tornar a teoria invariante sob transformações locais do grupo $U(1)$, somos forçados a introduzir um campo compensador, o campo de fótons, o qual se acopla aos campos de matéria tendo como constante de acoplamento a carga.

Uma característica dos campos de gauge é que eles possuem graus de liberdade não físicos que devem ser eliminados de forma a se conseguir quantizar a teoria. O procedimento padrão para fazer isso é quebrar a simetria de gauge impondo uma condição de gauge, ou seja, fixando um gauge particular.

A maioria dos gauges com os quais trabalhamos podem ser divididos em duas categorias. A primeira dos chamados gauges covariantes onde enquadram-se, por exemplo os gauges de Feynman e de Landau. Na segunda, dos gauges não-covariantes, incluem-se gauges do tipo Coulomb, axial, temporal, planar e do cone de luz.

Gauges covariantes possuem vantagens que podem ser destacadas como (a) preservam a invariância relativística; (b) são fáceis de se aplicar em teorias como a QED; (c) e existe uma prescrição uniforme para as singularidades dos propagadores, conhecida como prescrição $i\epsilon$. Mas existem também desvantagens na utilização desses gauges como por exemplo a presença de campos chamados “fantasmas”, ou estados não físicos que complicam os cálculos perturbativos, principalmente em teorias não Abelianas.

Os gauges não-covariantes possuem também suas vantagens, entre elas podemos citar que os campos fantasmas desacoplam-se dos elementos físicos da matriz de espalhamento, S , além de tornar teorias mais sofisticadas como supercordas mais facilmente tratáveis. Entretanto esses gauges possuem desvantagens tais como a dificuldade de se tratar singularidades não físicas do tipo $(p)^+ = (p.n)^{-1}$ e não manifestar a covariância de Lorentz.

Apesar das dificuldades mencionadas o gauge do cone de luz tem recebido uma considerável atenção. Esse interesse é resultado de um melhor entendimento das singularidades citadas acima, através do desenvolvimento de prescrições que preservam a contagem de potências nas integrais de Feynman.

Este trabalho tem por objetivo o cálculo da dimensão anômala, γ , até segunda ordem para a Eletrodinâmica Quântica Escalar. A motivação para este cálculo está baseada nos seguintes objetivos :

(a) A verificação da contagem de potências nas integrais de Feynman além de um loop, no gauge do cone de luz. Este fato que tem como premissa básica o uso da prescrição de Mandelstam ¹, onde escrevemos

$$\frac{1}{q^+} \rightarrow \frac{1}{q^+ + i\epsilon q^-},$$

no tratamento de singularidades não físicas que aparecem nas integrais de Feynman, do tipo $(p^+)^{-1}$, quando trabalhamos no gauge do cone de luz.

(b) Análise das divergências das integrais de Feynman, no gauge do cone de luz, em ordem superior.

(c) Testar a renormalizabilidade da teoria além de um loop, visto que não existe ainda uma prova de renormalizabilidade de uma teoria geral no gauge do cone de luz.

Esta dissertação é composta de quatro capítulos e sete apêndices. No capítulo um mostramos alguns conceitos básicos que usamos na dissertação, entre eles o de integração funcional, método segundo o qual quantizamos a QED escalar, o de regularização dimensional, que nos permite resolver as integrais de Feynman originalmente divergentes e o da dimensão anômala,

¹Equivalentemente podemos trabalhar com a prescrição de Leibbrandt, onde

$$\frac{1}{q^+} \rightarrow \frac{q^-}{q^+q^- + i\epsilon}.$$

objetivo final dos nossos cálculos. No capítulo dois tratamos da QED escalar quantizada no gauge do cone de luz passando pela dedução dos vértices, via métodos funcionais e uma análise da necessidade de uma nova prescrição no tratamento das integrais de Feynman. Nos capítulos três e quatro calculamos a dimensão anômala a um e dois loops, respectivamente. No apêndice A estão mostradas as regras de Feynman para a QED escalar. No apêndice B a solução das integrais típicas do gauge do cone de luz a um loop. No apêndice C resolvemos algumas integrais fundamentais no cálculo dos resultados a um loop, sendo ainda utilizadas como referência nos cálculos em ordem superior. No apêndice D a demonstração de uma identidade entre integrais que envolvem translações do campo de gauge. No apêndice E calculamos a auto energia do fóton no gauge do cone de luz. No apêndice F escrevemos a forma e indicamos o caminho para o cálculo de cada uma das seis diferentes contribuições relevantes para o cálculo da dimensão anômala, com origem nas correções radiativas da auto energia do campo escalar, a dois loops. E finalmente, no apêndice G desenvolvemos algumas integrais relevantes na apresentação do resultado das contribuições mostradas no apêndice F e mostramos como as identidades entre tais integrais, o que é uma característica particular do gauge do cone de luz, podem simplificar nossos cálculos.

Capítulo 1

Formalismos Gerais

1.1 Integrais de trajetória na Mecânica Quântica

P.A.M. Dirac em seus trabalhos “The Lagrangian in Quantum Mechanics”(1933) [1] e “On the Analogy Between Classical and Quantum Mechanics”(1945) [2], buscava generalizar o conceito de ação funcional da Mecânica Clássica (MC) para a Mecânica Quântica (MQ). A motivação para isto vinha do fato de ele querer obter uma formulação para a MQ onde o tempo e as variáveis espaciais fossem tratados de maneira análoga.

Lembremo-nos que na formulação usual da MQ um sistema quântico num estado inicial é caracterizado por auto estado de operadores que comutam com o operador Hamiltoniano. O Hamiltoniano é então usado para encontrar em que estado estará o sistema, passado um tempo t , através das equações de movimento.

Como podemos perceber, nesta descrição o tempo toma um papel central. Mas, quando tratamos de sistemas relativísticos usá-la torna-se difícil pois ela quebra a invariância de Lorentz.

Dirac então reportou-se a MC, onde existem duas descrições análogas : a de Hamilton e a de Lagrange, sendo que nesta última o tempo e as coordenadas espaciais encontram-se em pé de igualdade. Especificamente, ele olhou para a ação funcional em MC e tentou generalizá-la para a MQ. Destes trabalhos ele cuidadosamente concluiu que os elementos de matriz da MQ deveriam ser escritos como

$$\langle q|Q \rangle \sim \exp \left[-\frac{i}{\hbar} S(q, Q) \right], \quad (1.1)$$

onde S é a ação clássica do sistema.

Em seu artigo, de 1933, Dirac escreve textualmente

$$\langle q_t | Q_T \rangle \text{ corresponde a } \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_t^T L d\tau \right], \quad (1.2)$$

Note que se tomarmos a expressão acima como uma igualdade e dividirmos o intervalo de integração em pequenos subintervalos teremos

$$\begin{aligned} \langle q_t | Q_T \rangle &= \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \left(\int_t^{t_1} L d\tau + \int_{t_1}^{t_2} L d\tau \dots + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \int_{t_{n-1}}^T L d\tau \right) \right], \\ &= \langle q_t | q_1 \rangle \langle q_1 | q_2 \rangle \langle q_{n-1} | Q_T \rangle \end{aligned} \quad (1.3)$$

Que é uma forma incorreta, segundo conhecemos da MQ, pois não há integrações nos estados intermediários.

A partir daqui já podemos citar a contribuição de Feynman [3] para a formulação que conhecemos de integrais de trajetória. Ele escreve para os mesmos elementos de matriz escritos por Dirac como

$$\langle q_t | q_{t+\delta t} \rangle = A \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \delta t L(q_t, q_{t+\delta t}) \right] \quad (1.4)$$

onde a diferença é que o sinal de igualdade é colocado para intervalos infinitesimais, além de uma constante de proporcionalidade. Se quisermos reconstruir os elementos de matriz do tipo $\langle q_t | Q_T \rangle$ devemos tomar o intervalo $T - t$ e dividir em N subintervalos fazendo $T - t = N\epsilon$ e tomar o limite $\epsilon \rightarrow 0$, ou equivalentemente $N \rightarrow \infty$, de modo a termos

$$\langle q_t | Q_T \rangle = A^N \int \left(\prod_{i=1}^{N-1} dq_i \right) \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_t^T d\tau L(q, \dot{q}) \right]. \quad (1.5)$$

Esta equação traduz a seguinte idéia : os caminhos, que levam de q a Q , contribuem igualmente em magnitude, mas a fase de suas contribuições é a ação clássica (em unidades de $\hbar$), ou seja, a integral no tempo da Lagrangiana clássica tomada ao longo do caminho.

Uma maneira pictórica de ilustrarmos o conceito de integrais de trajetória é através da experiência de Young de fendas duplas. Imaginemos que entre

uma fonte de elétrons e um detetor sejam colocados, sucessivamente, anteparos com fendas duplas em diferentes posições, até que haja um número n deles. Existirão muitos diferentes caminhos para a luz percorrer entre o anteparo e o detetor. Faça esse número n de anteparos tender a infinito. Nesse limite os caminhos possíveis para a luz serão também infinitos. Em integrais de trajetória contabilizamos todas as contribuições referentes às infinitas possibilidades de um evento ocorrer. Esse é o conceito que queremos que seja entendido e ao qual forneceremos subsídios para que possa ser matematicamente traduzido.

Começaremos essa tarefa escrevendo os elementos de matriz correspondentes à transição de um estado físico $|x_0\rangle$ num tempo t_0 para um outro estado físico $|x_n\rangle$ num tempo t_n . Dividimos o intervalo de tempo entre t_0 e t_n em n subintervalos intermediários de tal forma que o operador evolução temporal, $\hat{U}(t_n, t_0)$, possa ser escrito como

$$\hat{U}(t_n, t_0) = \hat{U}(t_n, t_{n-1}) \hat{U}(t_{n-1}, t_{n-2}) \dots \hat{U}(t_1, t_0) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_n - t_0) \right\} \quad (1.6)$$

onde $\hat{H}$ é o operador Hamiltoniana do sistema, independente do tempo.

O propagador desse sistema que evolui de $|q_0\rangle$ a $|q_f\rangle$ é definido como

$$K(x_n, x_0; t_0, t_n) \equiv \langle x_n, t_n | x_0, t_0 \rangle = \langle x_n | \hat{U}(t_n, t_0) | x_0 \rangle. \quad (1.7)$$

Devemos inserir na equação acima $(n-1)$ conjuntos completos de estados intermediários no espaço das configurações e (n) conjuntos completos de estados no espaço dos momentos. Este número de estados intermediários diferentes no espaço dos momentos e configurações é devido ao fato que as trajetórias possíveis no espaço das configurações devem ter extremos fixos, x_0 e x_n , enquanto que no espaço dos momentos os extremos são livres, ou seja, $p(t_0)$ e $p(t_n)$ são arbitrários. Fazendo isto teremos

$$K(x_n, x_0; t_0, t_n) = \int \dots \int \langle x_n | \hat{U}(\delta t_n) | p_n \rangle \langle p_n | x_{n-1} \rangle \dots \langle x_1 | \hat{U}(\delta t_1) | p_1 \rangle \langle p_1 | x_0 \rangle dq_{n-1} \dots dq_1 dp_n \dots dp_1 \quad (1.8)$$

Queremos saber o que acontece quando o número de intervalos intermediários tende a infinito e/ou o intervalo máximo de tempo tende a zero, o

que pode ser expresso por

$$\begin{aligned} n &\rightarrow \infty \\ \max(\delta t_k) &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

com $\delta t_k = t_k - t_{k-1}$.

Agora, para cada um dos subintervalos acima podemos fazer

$$\langle x_k | \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \widehat{H}(p_k, x_k) \right\} (\delta t_k) | p_k \rangle \langle p_k | x_{k-1} \rangle = \langle x_k | \left\{ 1 - \frac{i}{\hbar} \widehat{H}(p_k, x_k) \right\} (\delta t_k) | p_k \rangle \langle p_k | x_{k-1} \rangle$$

onde tomamos a expansão da exponencial até primeira ordem na série de Taylor correspondente. Se escrevermos $\langle p | x \rangle = 1/(2\pi\hbar)^{\ell/2} \exp\left(\frac{i}{\hbar} p \cdot x\right)$, onde ℓ é a dimensão do sistema (no nosso caso faremos, simplificadaamente $\ell = 1$) teremos

$$\langle x_k | \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \widehat{H}(p_k, q_k) \right\} (\delta t_k) | p_k \rangle \langle p_k | x_{k-1} \rangle = \exp \left\{ \left[-\frac{i}{\hbar} H(p_k, x_k) \right] (\delta t_k) \right\} \times \frac{i}{2\pi\hbar} \exp \left[\frac{i}{\hbar} p_k (x_k - x_{k-1}) \right] \quad (1.9)$$

onde H é a Hamiltoniana do sistema, o que deixa a eq. (1.8) como

$$\begin{aligned} K(x_n, x_0, t_n, t_0) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \cdots \int \frac{1}{2\pi\hbar} dp_n \prod_{k=1}^{n-1} dp_k dx_k \\ &\quad \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^n [p_k (x_k - x_{k-1}) - H(p_k, x_k) \delta t_k] \right\} \quad (1.10) \end{aligned}$$

Tomando o limite $\epsilon \rightarrow 0$, ou $n \rightarrow \infty$, teremos para a equação acima que

$$\begin{aligned} K(x_n, x_0; t_0, t_n) &\equiv \langle x_n, t_n | x_0, t_0 \rangle \\ &= \int Dx Dp \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_n} [p\dot{x} - H(p, x)] d\tau \right\} \quad (1.11) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} Dx Dp &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\hbar} dp_n \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi\hbar} dp_k dx_k \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \prod_{\tau} dp(\tau) dx(\tau) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Se a Hamiltoniana tem a forma simples : $H = \frac{1}{2m}p^2 + V(x)$ podemos calcular o propagador no espaço das configurações efetuando as integrais sobre o espaço dos momentos, logo

$$\begin{aligned} K(x_n, x_0; t_0, t_n) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{m}{2i\pi\hbar\epsilon} \right)^{\frac{n}{2}} \int \cdots \int \prod_{k=1}^{n-1} dx_k \\ &\quad \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{\epsilon} \right)^2 - V(x_k) \right] \epsilon \right\} \end{aligned}$$

onde usamos o resultado

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left[-i \left(ax^2 + bx \right) \right] = \sqrt{\frac{\pi}{ia}} \exp \frac{ib^2}{4a} \quad (1.13)$$

Sabendo-se que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \exp \frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^n \frac{x_k - x_{k-1}}{\epsilon} &= \exp \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_n} \dot{x}(\tau) d\tau \\ \mathcal{D}_{\mathcal{F}} x &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{m}{2\pi\hbar i \epsilon} \right)^{1/2} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{m}{2\pi\hbar i \epsilon} \right)^{1/2} dx_k \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{m}{2\pi\hbar i \epsilon} \right)^{n/2} dx_k \\ &= \prod_{\tau} dx(\tau) \end{aligned} \quad (1.14)$$

podemos escrever o propagador como

$$K(x_n, x_0; t_0, t_n) = \int \mathcal{D}_{\mathcal{F}} x \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_n} \left[\frac{m}{2} (\dot{x})^2 - V(x(\tau)) \right] d\tau \right\} \quad (1.15)$$

Sendo S a ação clássica associada à Hamiltoniana escolhida e escrita como

$$\begin{aligned} S([x(\tau)], x_0, t_n, t_0) &= \int_{t_0}^{t_n} \left[\frac{m}{2} (\dot{x})^2 - V(x(\tau)) \right] d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_n} L([x(\tau)], [\dot{x}(\tau)]) d\tau \end{aligned} \quad (1.16)$$

Desta forma temos a amplitude de transição escrita via integrais de trajetória

$$K(x_n, x_0; t_0, t_n) = \int \mathcal{D}_{\mathcal{F}} x \exp \left[\frac{i}{\hbar} S([x(\tau)], x_0, t_n, t_0) \right]$$

Note que $\int \mathcal{D}_{\mathcal{F}} x$ é uma maneira de expressarmos a nossa falta de conhecimento a respeito da medida.

1.2 Integrais de trajetória na Teoria Quântica de Campos

O elemento de matriz $\langle x_n, t_n | x_0, t_0 \rangle$, como vimos na seção anterior, determina a probabilidade de transição entre estados na Mecânica Quântica. Tendo em vista as aplicações do formalismo funcional à Teoria Quântica de Campos (TQC) é importante saber como representar, usando integrais de trajetória, elementos de matriz dos operadores posição que corresponderão, no limite de infinitos graus de liberdade, aos operadores de campo, como veremos.

O produto ordenado temporalmente de n dos operadores de posição é

$$\begin{aligned} \langle x_n, t_n | T [\widehat{X}(t_1), \dots, \widehat{X}(t_n)] | x_0, t_0 \rangle &= \int \mathcal{D}_{\mathcal{F}} x \mathcal{D}_{\mathcal{F}} p \, x(t_1) x(t_2) \dots x(t_n) \\ &\quad \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_n} [p\dot{x} - H(p, x)] d\tau \right\} \end{aligned}$$

onde

$$T [\widehat{X}(t_1) \widehat{X}(t_2)] = \theta(t_1 - t_2) \widehat{X}(t_1) \widehat{X}(t_2) + \theta(t_2 - t_1) \widehat{X}(t_2) \widehat{X}(t_1).$$

A amplitude de transição na presença de uma força externa $J(t)$ pode ser escrita como

$$\langle x_n, t_n | x_0, t_0 \rangle^J = \int \mathcal{D}_{\mathcal{F}}x \mathcal{D}_{\mathcal{F}}p \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_n} [p\dot{x} - H(p, x) + \hbar J(\tau) x(\tau)] d\tau \right\}, \quad (1.17)$$

tal como na eq (1.11) com a Hamiltoniana modificada pela presença de um termo de fonte, $H \rightarrow H + \hbar Jx$. Note-se que $\langle x_n, t_n | x_0, t_0 \rangle^J$ pode ser usado como um funcional gerador dos elementos de matriz dos operadores posição. Estes elementos de matriz podem ser encontrados através da derivada funcional da amplitude de transição em relação a $J(t)$, e podem ser expressos como

$$\langle x_n, t_n | T [\widehat{X}(t_1), \dots, \widehat{X}(t_n)] | x_0, t_0 \rangle = \left(\frac{1}{i} \right)^n \left[\frac{\delta^n}{\delta J(t_1) \dots \delta J(t_n)} \langle x_n, t_n | x_0, t_0 \rangle^J \right]_{J=0}.$$

Definindo um funcional $F[J]$ por sua série de potências

$$F[J] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int dx_1 \dots dx_n f(x_1, x_2, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n)$$

temos

$$n! f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left[\frac{\delta^n}{\delta J(t_1) \dots \delta J(t_n)} F[J] \right]_{J=0}. \quad (1.18)$$

Uma quantidade bastante útil para gerar as funções de Green é o funcional $Z[J]$ definido como a amplitude de transição entre estados de vácuo quando sujeitamos o sistema, descrito pela Lagrangiana L , a ação de uma força externa J

$$\begin{aligned} Z[J] &= \langle 0 | 0 \rangle^J \\ &= \int \mathcal{D}_{\mathcal{F}}x \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} [L([x(\tau)], [\dot{x}(\tau)]) + \hbar x J(x)] d\tau \right] \end{aligned} \quad (1.19)$$

que quando normalizado é escrito como

$$Z_0[J] = \frac{\int \mathcal{D}_{\mathcal{F}}x \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_n} [L([x(\tau)], [\dot{x}(\tau)]) + \hbar x J(x)] d\tau \right]}{\int \mathcal{D}_{\mathcal{F}}x \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_n} L([x(\tau)], [\dot{x}(\tau)]) d\tau \right]}. \quad (1.20)$$

Uma observação bastante importante que nos cabe fazer é o fato de estarmos passando da formulação Hamiltoniana, como mostrada na eq.(1.17), para a formulação Lagrangiana, segundo a qual representaremos as funções de Green, ou propagadores, da teoria apresentada. Este fato só é possível se a Hamiltoniana do sistema estudado não possui termos que misturem variáveis de espaço e momento, em potências maiores que um. Isso porque operadores do tipo $\hat{p}^2 \hat{x}$ podem ser escritos como $\hat{p}\hat{p}\hat{x}$, $\hat{p}\hat{x}\hat{p}$ ou $\hat{x}\hat{p}\hat{p}$ que ordenados temporalmente e aplicados a um estado físico qualquer, não necessariamente apresentam o mesmo resultado.

Um outro fato que nos cabe comentar é que na seção anterior, quando deduzimos a expressão para o propagador, propusemos que a Hamiltoniana apresentada tivesse apenas formas quadráticas nos momentos e coordenadas (ou seja, potenciais $V(x)$ na forma quadrática). Isso porque só conseguimos quantizar teorias que tenham esta forma particular. Também problemas clássicos só são exatamente solúveis se têm esta forma, segundo a qual a natureza parece preferir se expressar.

O valor esperado do vácuo dos operadores de posição é então escrito como

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{X}(t_1), \dots, \hat{X}(t_n) | 0 \rangle &= \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle \\ &= \left(\frac{1}{i} \right)^n \left[\frac{\delta^n}{\delta J(t_1) \dots \delta J(t_n)} Z[J] \right]_{J=0} \end{aligned}$$

onde a integral no tempo da ação se estende de $-\infty$ a ∞ .

Usualmente a formulação usada em TQC é feita em termos dos valores esperados do vácuo do produto ordenado temporalmente dos operadores de campo. Essa quantidade conhecida como função de Green, ou propagador, é escrita como

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T [\hat{\Phi}(x_1), \dots, \hat{\Phi}(x_n)] | 0 \rangle. \quad (1.21)$$

Os resultados obtidos até aqui devem ser generalizados para mais de um grau de liberdade. Se o número de graus de liberdade for n , então a coordenada x deve ser representada por um vetor com n componentes. A integral funcional relativa a estas variáveis deve corresponder a soma sobre todas as trajetórias na configuração espacial n -dimensional.

Em TQC, desejamos representar os campos $\phi(\mathbf{x}, t)$, onde os graus de liberdade são representados pelo índice contínuo $\mathbf{x}$. O número de graus de

liberdade é, portanto, infinito. Este limite, para infinitos graus de liberdade, é acompanhado de divergências conhecidas como “as divergências ultravioletas (UV) da TQC”.

Analogamente ao procedimento desenvolvido da eq.(1.17) a eq.(1.20), agora para operadores de campo ao invés de posição, poderemos escrever :

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{i}\right)^n \left[\frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} Z[J(x)] \right]_{J=0} \quad (1.22)$$

com

$$Z_0[J] = \frac{\int D\phi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_n} \left[L(\phi(x), \dot{\phi}(x)) + \hbar \phi(x) J(x) \right] d\tau \right]}{\int D\phi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_n} [L([x(\tau)], [\dot{x}(\tau)])] d\tau \right]} \quad (1.23)$$

e

$$Z[J] = \exp \left\{ \left[i \int dz L_{int} \left(\frac{\delta}{\delta J_i(x)} \right) \right] [Z_0[J(x)]] \right\} \quad (1.24)$$

onde L_{int} é a Lagrangiana de interação da teoria, descrita em função dos campos ϕ e suas derivadas. À partir da expressão acima estamos aptos a calcular os propagadores de uma teoria de gauge uma vez escolhido o gauge conveniente. Adotaremos, de agora em diante, a notação em que x representa um quadrivetor. A métrica utilizada nos cálculos desta dissertação é $(+, -, -, -)$.

1.3 A Regularização Dimensional

O tratamento das divergências ultravioletas em TQC só foi possível com o desenvolvimento de técnicas de regularização. Uma técnica de regularização é qualquer prescrição matemática através da qual podemos trocar as divergências das integrais de Feynman por um procedimento que envolva um cutoff específico. Dessa forma podemos isolar tais divergências e tratá-las convenientemente.

Falaremos aqui, brevemente, sobre algumas das mais importantes técnicas de regularização enfatizando a regularização dimensional (DREG), que usaremos nos cálculos mostrados nesta dissertação.

Um dos primeiros procedimentos regularizadores a serem utilizados foi o de Pauli-Villars[4]. Ele introduz campos massivos auxiliares na teoria, chamados reguladores, de forma a eliminar as divergências nos propagadores. Esta técnica quando aplicada a Eletrodinâmica Quântica (QED) possibilita uma prescrição precisa para o uso de tais reguladores, de tal forma que a teoria permanece invariante de gauge a cada ordem da série perturbativa. Entretanto, tais campos auxiliares não admitem uma interpretação física. Devemos portanto considerar o método de Pauli-Villars como um procedimento regularizador puramente formal.

Outro método bastante importante é o de regularização analítica[5]. Esse método difere completamente do método de Pauli-Villars. Ele baseia-se, principalmente na idéia de continuação analítica. Podemos ilustra-lo facilmente escrevendo o propagador de uma partícula escalar, $(p^2 - m^2 + i\epsilon)^{-1}$, de massa m e momento p_μ . O passo fundamental neste método é trocarmos esse propagador por $(p^2 - m^2 + i\epsilon)^{-\alpha}$, onde o parâmetro regularizador α pode ser um número complexo. Com isso estamos trocando integrais originalmente divergentes por integrais escritas como funções analíticas, e bem comportadas, de α . Como estamos tratando agora de integrais convergentes procedimentos usuais de integração são permitidos. O resultado desta integração devidamente expresso como funções analíticas de α deve apresentar as divergências originais quando fizermos $\alpha = 1$. A subtração destes pólos no resultado final nos leva a parte finita de tais integrais.

A técnica de regularização dimensional[6], também chamada técnica de dimensão contínua, é provavelmente a melhor e mais elegante entre as técnicas de regularização[8] [7]. A idéia da DREG consiste em generalizar a dimensão das integrais de um espaço de quatro para n dimensões, onde $n = 2\omega$, com 2ω um número qualquer, podendo ser complexo, chamado parâmetro regularizador. Tal como na regularização analítica, a partir da introdução de um parâmetro regularizador que torna as integrais finitas, podemos empregar as técnicas de integração usuais para resolvê-las.

É importante perceber que a característica mais importante da DREG é o conceito de continuação analítica no número de dimensões do espaço-tempo. Podemos aqui também levantar a questão à respeito do significado físico, se é que ele existe, de um espaço de dimensões complexas e a resposta é que ainda não somos capazes de associar uma interpretação física a extensões para o

espaço complexo ¹.

Esta técnica é importante também pelo fato de preservar as simetrias locais² da Lagrangiana, como por exemplo a invariância de gauge. Isso nos permite, em princípio, um tratamento consistente das integrais de Feynman divergentes em todas as ordens da teoria perturbativa.

Definiremos aqui convenientemente o parâmetro regularizador d , com o qual trabalharemos daqui em diante

$$d \equiv 2\omega = 4 - \epsilon \quad (1.26)$$

com $\omega \rightarrow 2$, ou $\epsilon \rightarrow 0$. As divergências passam a ser expressas como pólos em $\epsilon = 0$, ou $\omega = 2$.

Existem alguns passos importantes, que devem ser conhecidos, na implementação da DREG :

i) Todos os produtos escalares que envolvem momentos são agora redefinidos em $d \equiv 2\omega = 4 - \epsilon$ dimensões.

ii) É feita exponenciação dos propagadores, empregando a parametrização de Schwinger :

$$\frac{1}{(P^2 - i\eta)} = \frac{i^k}{\Gamma(k)} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{k-1} \exp \left[i \left(-P^2 + i\eta \right) \alpha \right] \quad ; \quad k > 0 \text{ e } \eta \rightarrow 0^+ \quad (1.27)$$

¹Isso também acontece quando passamos de coordenadas generalizadas $q_j(t)$ em Mecânica Clássica (MC), onde o índice $j = 1, 2, \dots, n$ conta o número de graus de liberdade do sistema, para funções de onda $\psi_\sigma(\vec{x}, t)$ em Mecânica Quântica (MQ), onde $\sigma = 1, 2, 3, \dots$ identifica as componentes do campo. Isso significa que na transição da MC para a MQ o índice discreto j é representado por um índice discreto σ e uma variável contínua $\vec{x}$.

²Podemos construir um grupo de Lie G , associado às transformações de gauge dos campos $\phi_i(x)$

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = U(\Lambda) \phi(x), \quad U(\Lambda) = \exp[-iL.\Lambda] \quad (1.25)$$

onde Λ^j são parâmetros de gauge e L^j representações matriciais associadas aos geradores do grupo T_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Se estes geradores comutam dizemos que G é um grupo de gauge Abelian, caso não comutem o grupo de gauge é dito não-Abelian. Se Λ é função da variável espaço temporal x trata-se de um grupo de gauge local, caso contrário dizemos que o grupo de gauge é global.

iii) Usamos o resultado das integrais Gaussianas para integração nos momentos :

$$\int d^d q \exp \left[i \left(a q^2 + 2 b q \right) \right] = i^{1-\omega} \left(\frac{\pi}{a} \right)^\omega \exp \left(-i \frac{b^2}{a} \right) , \quad a > 0. \quad (1.28)$$

iv) A expansão da função Gama, na representação de Weierstrass, é dada por :

$$\Gamma(-n + \epsilon) = (-1)^n \left[\frac{1}{\epsilon} + \psi_1(n+1) + O(\epsilon) \right] \quad (1.29)$$

com :

$$\psi_1(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma , \quad n \text{ inteiro.}$$

onde $\gamma = 0,577\dots$ é a constante de Euler-Mascheroni.

v) Os resultados encontrados devem ser expandidos em série de Laurent em torno do pólo $\epsilon = 0$, ou $\omega = 2$, o que deve manifestar as divergências ultravioletas originais.

vi) Esses pólos devem ser cancelados pela inserção de contratermos na Lagrangiana original, regularizando-a.

vii) A álgebra tensorial é definida segundo a regra :

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = g^\mu_\mu = d \quad (= 2\omega = 4 - \epsilon) \quad (1.30)$$

viii) $\text{Tr} (I) = 2^{d/2}$. Em termos práticos usaremos $\text{Tr} (I) = 4$ já que o fator dependente de d modifica as constantes de renormalização por um fator constante.

1.4 A Dimensão Anômala

Antes de falarmos da dimensão anômala propriamente dita tentaremos visualizar a necessidade e o significado do processo de renormalização.

Partindo da Lagrangiana da QED ou $\lambda\phi^4$, verificamos que as funções de Green que contém um ou mais loops internos são divergentes. Entretanto, podemos tornar tais funções finitas se renormalizarmos os parâmetros da teoria (entenda-se por parâmetros de renormalização : massa, constante de acoplamento e amplitude do campo) dos seus valores “nus” para os valores “físicos”.

Se na nossa Lagrangiana original considerarmos tais parâmetros como sendo físicos então devemos adicionar termos a ela de forma a cancelar as divergências que aparecem nas funções de Green originais. Com isso as funções de Green obtidas serão finitas. Esses termos são chamados contratermos e devem ser calculados e adicionados a cada ordem na teoria perturbativa.

Uma teoria é renormalizável se os contratermos necessários para cancelar as divergências, a cada ordem, têm a mesma forma dos termos originais, ou seja, que as quantidades nuas sejam escritas como fatores de renormalização (infinitos) que multiplicam os parâmetros originais. Devemos manter em mente que a Lagrangiana da qual extraímos quantidades físicas finitas é escrita com os parâmetros nus.

Uma pergunta natural agora é: Como podemos garantir a unicidade desse procedimento? Em outras palavras, existe uma classe infinita de “prescrições de renormalização” onde os contratermos que cancelam as divergências têm, além da parte infinita, uma parte finita que pode diferir entre eles. Esse fato é a base do que chamamos “grupo de renormalização”. Ele permite que uma escolha conveniente da prescrição seja feita.

Usaremos aqui o esquema de subtração minimal[7] que é uma forma bastante utilizada para se renormalizar uma teoria. Nesse esquema assumimos uma forma inicial (tentativa) para os contratermos e ajustamos os parâmetros de forma que as funções de Green renormalizadas sejam finitas a cada ordem. A conveniência desse processo é que podemos determinar os contratermos usando apenas as partes divergentes dos diagramas sem nos preocuparmos com a parte finita.

A relação entre a função de Green irreduzível de uma partícula³, Γ , e a função de Green renormalizada (“nua”), Γ_0 , é dada por

$$\Gamma_0^{(n)}(p; \lambda_0^a, \epsilon) = Z^{-\frac{n}{2}} \Gamma^{(n)}(p; \lambda^a, \mu, \epsilon) \quad (1.31)$$

onde Z é o fator de renormalização, λ^a a constante de acoplamento renormalizada, ϵ o parâmetro de regularização dimensional, μ uma escala de massa e p representa a configuração de momentos, ou seja, a soma dos n momentos que entram ou saem do vértice. Note que μ não é um parâmetro presente na Lagrangiana original quando trabalhamos com teorias não massivas (que

³Funções de Green irreduzíveis são aquelas que geram diagramas de Feynman do tipo que não podem ser desconectados cortando-se qualquer uma de suas linhas internas.

será o nosso caso para a QED Escalar) mas um parâmetro produzido no procedimento de renormalização.

Tomando o fator de renormalização Z adimensional, vemos que ele deve depender apenas da constante de acoplamento λ^a , que assumimos adimensional, e do regulador ϵ , $Z = Z(\lambda^a, \epsilon)$. Entretanto, manter a constante de acoplamento adimensional significa dizer que ela depende também da escala de massa, $\lambda^a = \lambda^a(\lambda_0^a, \mu, \epsilon)$.

Aplicando o operador adimensional $\mu \frac{d}{d\mu}$ na eq.(1.31), teremos :

$$\left\{ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial \lambda^a}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \lambda^a} - \frac{n}{2} \frac{\mu}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \mu} \right\} \Gamma^{(n)}(p; \lambda^a, \mu, \epsilon) = 0, \quad (1.32)$$

que é a famosa equação do grupo de renormalização. Identificamos à partir da equação acima a função beta e a dimensão anômala, respectivamente, como:

$$\beta_a(\lambda^a) \equiv \mu \frac{\partial \lambda^a}{\partial \mu}, \quad (1.33)$$

$$\gamma_a(\lambda^a) \equiv \frac{1}{2} \frac{\mu}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \mu}. \quad (1.34)$$

Se introduzirmos uma mudança de escala do tipo $p \rightarrow tp$ e $\mu \rightarrow t\mu$, na eq.(1.32) teremos

$$\Gamma^{(n)}(tp; \lambda^a, \mu, \epsilon) = t^D \Gamma^{(n)}(p; \lambda^a, t^{-1}\mu, \epsilon), \quad (1.35)$$

onde $\Gamma^{(n)}$ tem dimensão de massa dada por $D = d + n(1 - d/2)$ com $d = 4 - \epsilon$.

Extraindo da eq.(1.35) $\mu \partial \Gamma / \partial \mu$ e substituindo na eq.(1.32) temos

$$\left[-t \frac{\partial}{\partial t} + \beta_a \frac{\partial}{\partial \lambda^a} - n \gamma_a(\lambda^a) + D \right] \Gamma^{(n)}(tp; \lambda^a, \mu, \epsilon) = 0 \quad (1.36)$$

A interpretação para esta equação é que sob uma mudança de escala dos momentos externos a mudança na função de Green apresentará além de um fator D (devido à escala propriamente dita) um fator chamado dimensão anômala γ_a , para cada um dos momentos externos.

Note que para teorias não massivas a Lagrangiana é invariante por uma transformação de escala. Entretanto, no procedimento de regularização introduzimos uma escala, via “cutoff” ou através do parâmetro μ no caso da

regularização dimensional, o que implica que a constante de acoplamento tem uma dependência com esta escala μ . Teremos portanto, de acordo com as eq.(1.33) e (1.34), γ_a e β_a não nulos. Desta fato concluímos de (1.36) que as funções de Green não são invariantes de escala, apesar de a Lagrangiana original o ser.

Usando o esquema de subtração minimal para escrevermos, na teoria perturbativa a dois loops, o fator de renormalização Z , teremos :

$$Z = 1 + \hbar \frac{A}{\epsilon} + \hbar^2 \left[\frac{C}{\epsilon^2} + \frac{B}{\epsilon} \right] + \mathcal{O}(\hbar^3), \quad (1.37)$$

com $\hbar$ servindo como contador da ordem em que estamos trabalhando, onde utilizaremos

$$\begin{aligned} A &= A^{ab} \lambda^a \lambda^b, \\ B &= B^{abcd} \lambda^a \lambda^b \lambda^c \lambda^d, \\ C &= C^{abcd} \lambda^a \lambda^b \lambda^c \lambda^d. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Como dissemos, λ^a é mantido adimensional de forma que :

$$\lambda_0^a = \mu^{2-\omega} \lambda^a. \quad (1.39)$$

Derivando os dois lados da equação acima com relação a μ obteremos

$$\frac{\partial \lambda^a}{\partial \mu} = (2 - \omega) \mu^{-1} \lambda^a = \frac{\epsilon}{2} \mu^{-1} \lambda^a,$$

e, usando

$$\beta_a(\lambda^a) = \beta_a^{(0)}(\lambda^a) + \hbar \beta_a^{(1)}(\lambda^a) + \hbar^2 \beta_a^{(2)}(\lambda^a) + \dots, \quad (1.40)$$

obtemos

$$\beta_a^{(0)}(\lambda^a) = -\frac{\epsilon}{2} \lambda^a.$$

Assim a expansão da função beta fica

$$\mu \frac{\partial \lambda^a}{\partial \mu} = -\frac{\epsilon}{2} \lambda^a + \hbar \beta_a^{(1)}(\lambda^a) + \dots \quad (1.41)$$

Aplicando-se a regra da cadeia à derivada de Z em relação a μ e usando as definições de A , B e C , descritas pela eq.(1.39), podemos escrever a eq.(1.34) como

$$2\gamma_a(\lambda^a)Z = -\hbar A + \hbar^2\beta_a^{(1)}(\lambda^a)\frac{\partial A}{\partial\lambda^a} - \hbar^2 2\left[\frac{B}{\epsilon} + C\right] + \mathcal{O}(\hbar^3). \quad (1.42)$$

Se fizermos para $\gamma_a(\lambda^a)$ uma expansão em potências de $\hbar$, como na eq.(1.40) e usarmos a fórmula explícita de Z , dada pela eq.(1.37), podemos extrair os termos de $\gamma_a(\lambda^a)$ comparando, a cada ordem em $\hbar$, os dois lados da eq.(1.42). Assim obtém-se

$$\begin{aligned} \gamma_a^{(0)}(\lambda^a) &= 0, \\ \gamma_a^{(1)}(\lambda^a) &= -A/2, \\ \gamma_a^{(2)}(\lambda^a) &= \left[\frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}\beta_a^{(1)}(\lambda^a)\frac{\partial A}{\partial\lambda^a} - B\right]\frac{1}{\epsilon} - C. \end{aligned}$$

Entretanto, $\gamma_a(\lambda^a)$ não deve depender do parâmetro ϵ . Desta condição extraímos o vínculo

$$B = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}\beta_a^{(1)}(\lambda^a)\frac{\partial A}{\partial\lambda^a}. \quad (1.43)$$

Teremos então para ordem dois de γ_a

$$\gamma_a^{(2)}(\lambda^a) = -C. \quad (1.44)$$

Logo,

$$\gamma_a(\lambda^a) = -\hbar\frac{A}{2} - \hbar^2 C + \dots \quad (1.45)$$

Calcularemos nos capítulos seguintes deste trabalho os coeficientes A e C que determinam a dimensão anômala γ a um e dois loops, respectivamente.

Capítulo 2

A QED Escalar no Gauge do Cone de Luz

Este capítulo tem como objetivo a apresentação da teoria QED escalar extraíndo suas regras de Feynman a partir dos métodos funcionais apresentados no capítulo anterior. Dois fatores motivam tal procedimento : (a) Através dele podemos estudar, sistematicamente, a quantização desta teoria via integrais de trajetória. (b) Além disso as dificuldades e possíveis soluções para o tratamento das singularidades típicas do cone de luz podem ser testadas.

A Lagrangiana da QED escalar não massiva é escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_\mu \phi|^2 - V(\phi, \phi^*) + \frac{1}{2\alpha}(n.A)^2 \quad (2.1)$$

onde

i) $D_\mu \phi^i = \partial_\mu \phi^i + i g R_j^i \phi^j A_\mu$, é a derivada covariante do campo escalar ϕ , com g como a constante de acoplamento e R a representação associada aos campos escalares.

ii) $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, é o tensor do campo eletromagnético, e

iii) $\phi^i = \phi_i^*$, o que significa que estamos trabalhando com um campo escalar real, isto é ϕ é um campo neutro.

Essa Lagrangiana pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\gamma + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_{V(\phi, \phi^*)} + \mathcal{L}_{INT}$$

com

(a) $\mathcal{L}_{V(\phi, \phi^*)} = V(\phi, \phi^*)$. Este termo é um polinômio Hermitiano de quarta ordem (com origem nas interações ϕ^2 e $(\phi^*)^2$), invariante de gauge. As contribuições para γ (a dimensão anômala) vindas desse termo a dois loops são independentes do termo de gauge, ou seja, em segunda

ordem na teoria perturbativa não existem gráficos divergentes envolvendo essa interação (do tipo ϕ^4) e os bósons de gauge.

Como estamos interessados em correções radiativas até dois loops a presença desse termo na Lagrangiana pode ser ignorada. Entretanto, isso não deve acontecer para correções de ordem superior.

Usando as definições (i), (ii) e (iii) anteriores, temos ainda

(b)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{INT} &= |D_\mu \phi|^2 \\ &= ig^* R_i^j (\partial_\mu \phi^i) \phi_j^* A^\mu + ig R_j^i (\partial_\mu \phi_i^*) \phi^j A_\mu + g^2 R^2 \phi^j \phi_j^* A^\mu A_\mu\end{aligned}\quad (2.2)$$

onde na definição de derivada covariante estamos exprimindo o campo escalar carregado na forma matricial. Desta maneira mantemos a conexão com a notação utilizada em teorias não-Abelianas e Supersimétricas, onde os campos ϕ^i transformam-se de acordo com a representação R^B do grupo de gauge, onde o índice B, em geral, indica um grupo complexo e redutível. Em nosso caso, no qual tratamos de uma teoria Abeliana, R é uma matriz diagonal. A operação de conjugação dos campos é acompanhada, consistentemente, pelo abaixamento ou levantamento dos índices de R.

(c)

$$\mathcal{L}_\phi = \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi_i^* = \partial_\mu (\phi^i \partial^\mu \phi_i^*) - \phi^i \partial_\mu \partial^\mu \phi_i^*, \quad (2.3)$$

com o termo de derivada total (ou de superfície) desaparecendo quando integramos $\mathcal{L}_\phi$ em d^4x e usamos a condição que ϕ e $\phi^* \rightarrow 0$ no infinito, de modo que

$$\mathcal{L}_\phi = - \phi^i \partial_\mu \partial^\mu \phi_i^* \quad (2.4)$$

O propagador do campo escalar vai ter origem nesse termo, como veremos.

(d)

$$\mathcal{L}_\gamma + \mathcal{L}_{GF} = \frac{1}{2} A^\mu \left(g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu + \frac{1}{\alpha} n_\mu n_\nu \right) A^\nu \quad (2.5)$$

Assim como na QED convencional o operador correspondente a propagação do campo de gauge é inversível (o que implica na sua existência) somente se fixarmos um termo de gauge, escolhido aqui como o gauge do cone de luz, com

$$n^\mu A_\mu = 0 \quad \text{e} \quad n^\mu n_\mu = n^2 = 0 \quad (2.6)$$

tomando o limite $\alpha \rightarrow 0$.

2.1 Os Propagadores da Teoria

O Propagador dos campos de uma teoria pode ser encontrado, usando o formalismo funcional, de uma forma bastante direta. Ele é o operador inverso, no espaço dos momentos, ao termo correspondente que aparece na Lagrangiana[9]. Calcularemos agora os propagadores dos campos da teoria no gauge do cone de luz.

i) Para o campo de gauge A^μ , definimos seu propagador de forma que satisfaça

$$\left(g_{\lambda\nu} \partial^2 - \partial_\lambda \partial_\nu + \frac{1}{\alpha} n_\lambda n_\nu \right) P^{\mu\nu}(x-y) = \delta_\lambda^\mu \delta^{(4)}(x-y), \quad (2.7)$$

onde

$$P_{\mu\nu}^{-1}(x) = \left(g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu + \frac{1}{\alpha} n_\mu n_\nu \right),$$

que tem como transformada de Fourier¹

$$P_{\mu\nu}^{-1}(k) = (2\pi)^4 \left(-g_{\mu\nu} k^2 + k_\mu k_\nu + \frac{1}{\alpha} n_\mu n_\nu \right),$$

e, finalmente o propagador no espaço dos momentos é escrito como

$$P_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{-1}{k^2} \left[g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu (\alpha k^2 - n^2)}{(k.n)^2} + \frac{(k_\nu n_\mu + k_\mu n_\nu)}{(k.n)} \right],$$

¹As transformadas de Fourier utilizadas são definidas como

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k P(k) \exp(-ikx) \\ P(k) &= \int d^4 x P(x) \exp(ikx) \\ F(y) &= \int \delta^{(4)}(x-y) F(y) d^4 x \\ \delta^{(4)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k \exp(ikx) \end{aligned}$$

fazendo $n^2 = 0$ e tomando o limite $\alpha \rightarrow 0$, temos

$$P_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{-1}{k^2} \left[g_{\mu\nu} + \frac{(k_\nu n_\mu + k_\mu n_\nu)}{(k \cdot n)} \right] \quad (2.8)$$

ii) Para o campo escalar não massivo, o propagador deve satisfazer

$$\partial_\mu \partial^\mu \Delta_F(x - y) = -\delta^{(4)}(x - y),$$

e procedendo da mesma forma que no item anterior, teremos

$$\Delta_F(k) = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \quad (2.9)$$

2.2 Dedução dos Vértices da Teoria via Métodos Funcionais

Mostraremos aqui os principais passos para a dedução dos vértices da QED escalar usando os métodos funcionais descritos no capítulo 1. O primeiro passo é a construção do funcional gerador Z , dado pela eq.(1.24). Para isso tomemos a Lagrangiana original da QED escalar, dada pela eq.(2.1), sem o termo de interação ². A esta Lagrangiana adicionamos os termos fontes dos campos A_μ e ϕ representados por J^μ e j^3 , respectivamente.

Escrevendo $Z_0[J, j]$ para QED escalar, a partir de eq.(1.23), temos

$$Z_0[J, j] = Z_0^\phi[J] Z_0^\gamma[J] \quad (2.10)$$

2

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{INT} \\ \text{com} \\ \mathcal{L}_0 &= \mathcal{L}_\gamma + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_\phi \end{aligned}$$

³Esse cálculo pode ser feito considerando os três campos A_μ , ϕ e ϕ^* com seus termos fonte, respectivamente, J^μ , j e j^* , fazendo no final $\phi = \phi^*$ e $j = j^*$. O que nos levará ao mesmo resultado.

$$Z_0^\phi[J] = \frac{\int D\phi^i \exp \left[i \int_{t_0}^{t_n} [\phi^i(x) \partial_\mu \partial^\mu \phi_i(x) + j_i(x) \phi^i(x)] d^4x \right]}{\int D\phi \exp \left[i \int_{t_0}^{t_n} \phi^i(x) \partial_\mu \partial^\mu \phi_i(x) \right]} \quad (2.11)$$

$$Z_0^\gamma[J] = \frac{\int DA_\mu \exp i \left\{ \int_{t_0}^{t_n} \left[\frac{1}{2} A^\mu(x) \left[- \left(g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu + \frac{1}{\alpha} n_\mu n_\nu \right) \right] A^\nu(x) + \right. \right.}{\int DA_\mu \exp \left[i \int_{t_0}^{t_n} \frac{1}{2} A^\mu(x) \left[- \left(g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu + \frac{1}{\alpha} n_\mu n_\nu \right) \right] A^\nu(x) d^4x \right]} \\ \left. J_\mu(x) A^\mu(x) \right] d^4x \}. \quad (2.12)$$

Desejamos agora escrever $Z_0[J, j]$ numa forma em que seja fácil obtermos suas derivadas em relação aos geradores (Esse procedimento está muito bem feito no capítulo 6 da referência [10] para campos escalares massivos. Se tomarmos o limite $m \rightarrow 0$ teremos o resultado desejado para QED escalar). Mostraremos aqui como implementar esta idéia, para o fator que envolve o campo A_μ em (2.10), ressaltando que não existem muitas novidades em relação ao que foi feito para o campo escalar na citada referência (e portanto, não repetiremos aqui o procedimento para campos escalares não massivos).

Na eq.(2.12) façamos

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + A'_\mu$$

com A'_μ representando um translação no campo de gauge A_μ , e usando o fato (demonstrado no Apêndice D)

$$\int d^4x A^\mu(x) \left(g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu + \frac{1}{\alpha} n_\mu n_\nu \right) A'^\nu(x) = \\ \int d^4x A'^\mu(x) \left(g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu + \frac{1}{\alpha} n_\mu n_\nu \right) A^\nu(x) \quad (2.13)$$

o numerador da eq.(2.12) fica

$$\int DA_\mu \exp \left\{ -i \int d^4x \left[\frac{1}{2} A^\mu(x) \left(g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu + \frac{1}{\alpha} n_\mu n_\nu \right) A^\nu(x) \right. \right. \\ \left. \left. + A^\mu(x) \left(g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu + \frac{1}{\alpha} n_\mu n_\nu \right) A'^\nu(x) + \frac{1}{2} A'^\mu(x) \left(g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu + \frac{1}{\alpha} n_\mu n_\nu \right) A'^\nu(x) + J_\mu A^\mu + J_\mu A'^\mu \right] \right\}. \quad (2.14)$$

Onde escolhermos $A'^\mu(x)$ tal que

$$\left(g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu + \frac{1}{\alpha}n_\mu n_\nu\right) A'^\mu(y) = -J_\nu(y), \quad (2.15)$$

Esta escolha faz, quando substituída na segunda e terceira parcela da eq.(2.14), com que os termos do tipo $A^\mu J_\mu$ cancelem-se. O termo de corrente que sobra é do tipo $A'^\mu J_\mu$. Quando tomamos a integral em d^4x da equação (2.15) multiplicada por $P^{\nu\lambda}(x-y)$ e usando a eq.(2.7) temos

$$A'^\mu(x) = - \int d^4x P^{\mu\nu}(x-y) J_\nu(y) \quad (2.16)$$

Após os passos indicados acima e substituindo o resultado da eq.(2.16) no numerador da expressão de $Z_0'[J]$, com termos de corrente do tipo $A'^\mu J_\mu$ teremos

$$\int DA_\mu \exp \left\{ -i \int d^4x \left[\frac{1}{2} A^\mu(x) \left(g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu + \frac{1}{\alpha}n_\mu n_\nu \right) A^\nu(x) + J_\mu(x) P^{\mu\nu}(x-y) J_\nu(y) \right] \right\}. \quad (2.17)$$

Dessa forma podemos escrever a expressão para o funcional gerador, já normalizado, como sendo

$$Z_0[J, j] = \exp \left[\frac{-i}{2} \int d^4x d^4y [j(x)\Delta_F(x-y)j(y) + J_\mu(x) P^{\mu\nu}(x-y) J_\nu(y)] \right]. \quad (2.18)$$

Podemos agora escrever $Z[J, j]$ de acordo com a eq.(1.24) onde, como dissemos, os campos são associados às derivadas do funcional em relação aos termos fonte. No nosso caso

$$\phi^i \longleftrightarrow \frac{\delta}{\delta j^i}, \quad \partial_\mu \phi^i \longleftrightarrow \partial_\mu \frac{\delta}{\delta j^i} \quad \text{e} \quad A_\mu \longleftrightarrow \frac{\delta}{\delta J^\mu}, \quad (2.19)$$

onde escreveremos a Lagrangiana de interação, mostrada na eq.(2.2) como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{INT} = & ig^* R_i^j (\partial_\mu \frac{\delta}{\delta j^i}) \frac{\delta}{\delta j^j} \frac{\delta}{\delta J^\mu} + ig R_j^i (\partial_\mu \frac{\delta}{\delta j^i}) \frac{\delta}{\delta j^j} \frac{\delta}{\delta J^\mu} + \\ & g^2 R^2 \frac{\delta}{\delta j^i} \frac{\delta}{\delta j^j} \frac{\delta}{\delta J^\mu} \frac{\delta}{\delta J_\mu} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Encontrados $Z_0[J, j]$ em função das fontes e propagadores da teoria e $\mathcal{L}_{INT}$ como derivadas funcionais em relação aos termos fontes, $Z[J, j]$ pode ser encontrado através de um cálculo extenso, mas que envolve apenas derivadas funcionais. Escreveremos aqui apenas sua expressão final, sem nos preocuparmos em representar, daqui em diante, os índices de grupo do campo escalar

$$\begin{aligned}
Z[J, j] = \exp \{ i \int d^4 z [\frac{1}{2} i g^* R \int d^4 y d^4 x d^4 l (p_\alpha - p'_\alpha) j(x) \Delta_F(x-z) \Delta_F(y-z) \\
j(y) J_\mu(l) P^{\mu\alpha}(l-z) + \frac{1}{2} i g R \int d^4 y d^4 x d^4 l (p_\alpha - p'_\alpha) j(x) \Delta_F(x-z) \Delta_F(y-z) \\
j(y) J_\mu(l) P^{\mu\alpha}(l-z) - g^2 R^2 \{ -i \Delta_F(0) + [\frac{-i}{2} (\int d^4 y j(y) \Delta_F(z-y) + \\
\int d^4 x j(x) \Delta_F(x-z))]^2 \} \{ -i P^{\alpha\alpha}(0) + [\frac{-i}{2} (\int d^4 y J_\mu(y) P^{\mu\alpha}(z-y) + \\
\int d^4 x J_\mu(x) P^{\mu\alpha}(x-z))]^2 \}] \} \} \quad (2.21)
\end{aligned}$$

Calculado $Z[J, j]$ os vértices da teoria podem ser extraídos se tomarmos as derivadas funcionais de Z em relação aos geradores. Fazendo isso, de acordo com o que escrevemos em (1.22), os únicos termos que obtemos diferentes de zero até ordem dois são

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^3 Z}{\delta j(x_1) \delta j(x_2) \delta J_\alpha(x_3)} \frac{1}{i^3} \Big|_{J=j=0} = i R (g + g^*) \int d^4 z \Delta_F(x_1 - z) \\
\Delta_F(x_2 - z) (p_\alpha - p'_\alpha) \quad (2.22)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^3 Z}{\delta j(x_1) \delta j(x_2) \delta J_\rho(x_3) \delta J_\eta(x_4)} \frac{1}{i^4} \Big|_{J=j=0} = 2i g^2 R^2 \int d^4 z \Delta_F(x_1 - z) \\
\Delta_F(x_2 - z) P^{\rho\alpha}(x_3 - z) \\
P^{\eta\alpha}(x_4 - z) \quad (2.23)
\end{aligned}$$

onde tomamos a constante de acoplamento real, ou seja, $g = g^*$ na eq.(2.22).

2.3 A Necessidade da Prescrição de Mandelstam

O gauge do cone de luz, pertencente a classe dos chamados gauges algébricos, é caracterizado por um vetor arbitrário n^μ . Entretanto, ao contrário dos demais gauges axiais essa arbitrariedade do vetor n^μ é governada pela condição $n^\mu n_\mu = 0$. Esse tipo de gauge apresenta, em geral, dificuldades técnicas devido a presença de termos do tipo $(p \cdot n)^{-1}$. Estas singularidades não físicas produzem integrais de Feynman mal definidas para qualquer cálculo envolvendo correções radiativas no propagador. Para resolver o problema de ambiguidade nessas integrais passaremos para uma nova prescrição que especifique o significado exato de termos do tipo $(p \cdot n)^{-1}$.

Vamos entender os problemas que estas singularidades criam quando usamos a prescrição do valor principal, onde escrevemos

$$\frac{1}{(p \cdot n)} \rightarrow \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(p \cdot n) + i\eta} + \frac{1}{(p \cdot n) - i\eta} \right\}. \quad (2.24)$$

Usando essa prescrição a contagem de potências é violada, o que se torna um inconveniente para cálculos de ordem superior. Esse fato pode ser entendido melhor se analisarmos a localização dos pólos no plano p^0 .

No plano complexo p^+ existem dois pólos localizados no eixo imaginário, um em $p^+ = i\eta$ e outro em $p^+ = -i\eta$. Estas condições podem ser expressas em termos das componentes de p (ver Apêndice A), ou seja, são correspondentes aos pólos no plano p^0 : $p^0 = -p^3 \pm i\sqrt{2}\eta$. Compare na figura 1, os pólos procedentes dessa notação com os pólos que encontramos usando a prescrição do valor principal na forma $(p^2 + i\epsilon)^{-1}$.

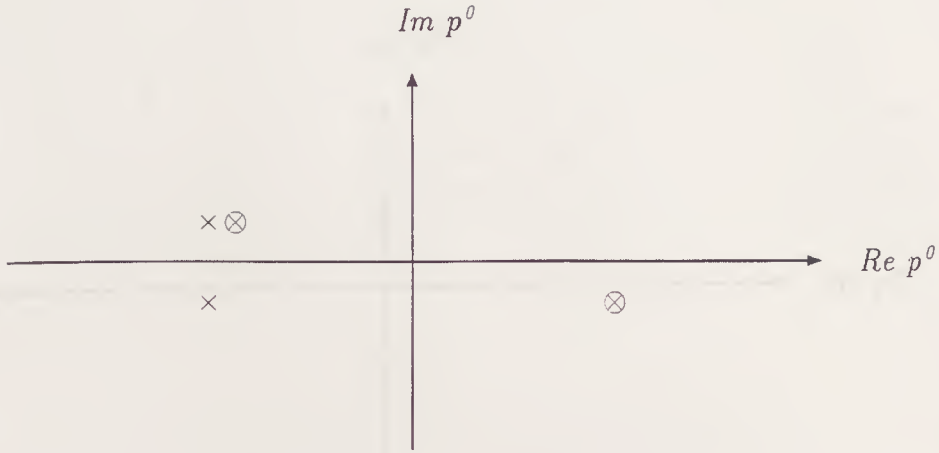


Figura 1: Pólos no plano complexo p^0 usando a prescrição do valor principal. Pólos do tipo $(p^2)^{-1}$ e $(p^+)^{-1}$ representados respectivamente por $\otimes$ e $\times$.

Os pólos que tem origem no termo $(p^+)^{-1}$ na prescrição do valor principal nitidamente proibem uma rotação de Wick e, portanto, a continuação para o espaço euclidiano, o que implica na não validade da contagem de potências.

Para contornar essa dificuldade duas diferentes prescrições foram propostas para definir singularidades do tipo $(p^+)^{-1}$. Uma delas, que chamamos prescrição de Leibbrandt[11], escrita como

$$\frac{1}{p^+} \rightarrow \lim_{(\eta \rightarrow 0^+)} \left\{ \frac{p^-}{p^+ p^- + i\eta} \right\},$$

e a outra, que adotaremos neste trabalho, sugerida por Mandelstam[12], no início da década de 80, escrita como

$$\frac{1}{p^+} \rightarrow \lim_{(\eta \rightarrow 0^+)} \left\{ \frac{1}{p^+ + i\eta p^-} \right\}, \quad (2.25)$$

onde teremos um pólo localizado no eixo imaginário em $p^+ = i\eta p^-$, com duas possibilidades dependendo do sinal de p^- . Se $p^- > 0$ o pólo estará

abaixo do eixo real e se $p^- < 0$ acima, como mostra a figura 2.

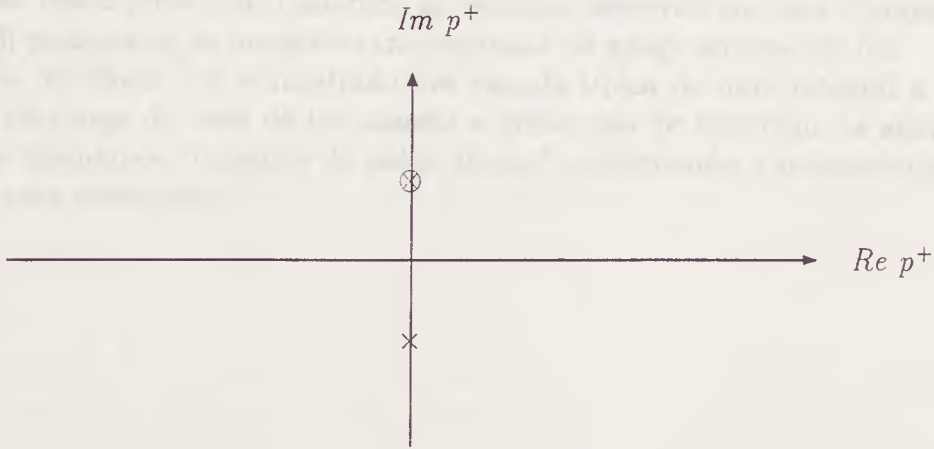


Figura 2: Pólos no plano complexo p^+ usando a prescrição de Mandelstam. Pólos do tipo $p^- > 0$ e $p^- < 0$ representados respectivamente por $\times$ e $\otimes$.

Já no plano p^0 teremos um pólo em $p^0 = -p^3(1 - 2i\eta)$ também com duas possibilidades : se $p^3 > 0$ ele estará no segundo quadrante e se $p^3 < 0$ no quarto quadrante, como mostra a figura 3.

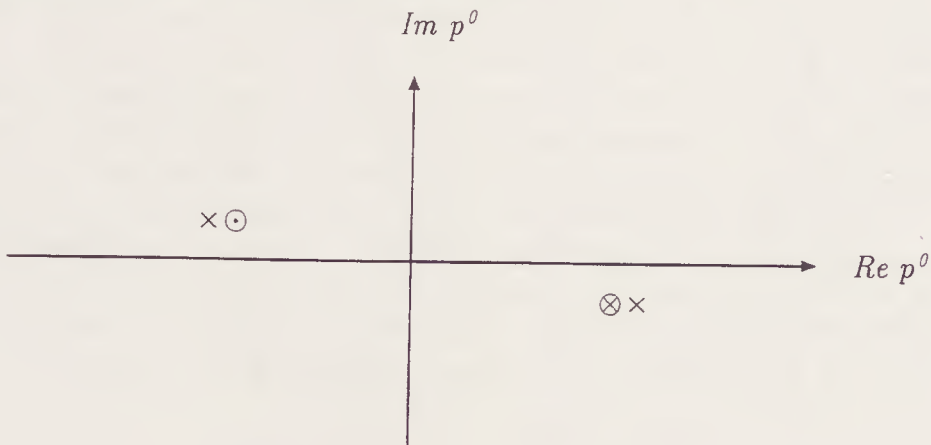


Figura 3: Pólos no plano complexo p^0 usando a prescrição de Mandelstam. Pólos do tipo $(p^2)^{-1}$ estão representados por $\times$. Pólos do tipo $(p^+)^{-1}$ representados por $\odot$ para $p^3 > 0$ e $\otimes$ para $p^3 < 0$.

Daí podemos ver que usando a prescrição de Mandelstam é possível fazer-mos a continuação euclidiana viabilizando a contagem de potências. Aliado ao uso desta prescrição usaremos as técnicas desenvolvidas por Capper *et al.*[13] para tratar as integrais características do gauge do cone de luz.

Na referência [14] é mostrado um cálculo típico de uma integral a um loop no gauge do cone de luz usando a prescrição de Feynman, lá aparece o que chamamos “integrais de pólos duplos” confirmando a necessidade de uma nova prescrição.

Loop

Consideremos a integral de Feynman para o diagrama de um loop no gauge do cone de luz, a integral é dada por:

Essa integral é calculada usando a prescrição de Feynman, a integral é dada por:

Essa integral é calculada usando a prescrição de Feynman, a integral é dada por:

Essa integral é calculada usando a prescrição de Feynman, a integral é dada por:

Capítulo 3

A Dimensão Anômala a Um Loop

Devidamente apresentadas a teoria com a qual trabalharemos e as técnicas utilizadas, passaremos ao cálculo da dimensão anômala, γ , a um loop.

Trabalharemos com o gauge do cone de luz, da família dos gauges tipo axial[15]. No nosso caso a principal vantagem desta escolha é o fato que esse tipo de gauge desacopla, automaticamente, os fantasmas da teoria, ou estados não físicos, e pode simplificar as identidades de Ward-Takahashi[16]. Isso porque o propagador do campo de gauge depende de n^μ , de forma que $n^\mu P_{\mu\nu} = 0$. Além dessa existem outras vantagens para o uso de tais tipo de gauges não-covariantes, tais como : maior facilidade no tratamento de modelos sofisticados como supercordas e a viabilidade de uma prova mais transparente da não divergência ultravioleta da teoria supersimétrica de Yang-Mills.

Em contrapartida à vantagem característica de tais gauges não covariantes, de serem livres de fantasmas, existe o fato de que as integrais a um loop (e ordens superiores) tornam-se tecnicamente mais difíceis. Isso porque aparecem singularidades não-físicas do tipo $(p.n)^{-1}$, que exigem uma nova prescrição para serem resolvidas, como ilustramos no capítulo 2.

Vejamos agora, efetuando o cálculo a um loop, como resolver tais integrais. Em primeira ordem na série perturbativa teremos apenas uma contribuição para γ , conhecida como correção radiativa simples do fóton para o propagador escalar. Esta correção a um loop é representada pelo gráfico



Figura 4: Correção em primeira ordem do propagador do campo escalar.

Na figura acima as linhas tracejadas representam campos escalares e as linhas onduladas os campos de gauge (fótons).

Usando as regras descritas no apêndice A e os propagadores calculados no capítulo anterior podemos calcular a contribuição correspondente a este gráfico.

$$\begin{aligned}
 L_1^{(1)} &= \int d^d q \, d^d p' \, \delta^{(4)}(p + p' - q) (i g R_j^i) (p - p')_\mu P^{\mu\nu}(q) \\
 &\quad (p - p')_\nu (i g R_j^i) \Delta_F(p') \\
 &= -g^2 (R^2)_j^i \int d^d q (2p - q)_\mu \frac{1}{q^2} \left[g^{\mu\nu} - \frac{1}{q^+} (q^\mu n^\nu - q^\nu n^\mu) \right] \\
 &\quad (2p - q)_\nu \frac{1}{(q - p)^2} \\
 &= -g^2 (R^2)_j^i \int d^d q \frac{1}{q^2 (q - p)^2} \left[4p^2 - q^2 + 4q^2 \frac{p^+}{q^+} - 8(p \cdot q) \frac{p^+}{q^+} \right] \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

usando

$$q^2 - 2(p \cdot q) = (q - p)^2 - p^2$$

podemos escrever $L_1^{(1)}$ como

$$L_1^{(1)} = -g^2 (R^2)_j^i \left\{ 4p^2 \int d^d q \frac{1}{q^2 (q - p)^2} - \int d^d q \frac{1}{(q - p)^2} + \right.$$

$$4p^+ \int d^d q \frac{1}{q^2 q^+} - 4p^+ p^2 \int d^d q \frac{1}{q^2 (q-p)^2 q^+} \} \quad (3.2)$$

As integrais do tipo

a)

$$\int d^d q \frac{1}{q^2} = \int d^d q \frac{1}{(q-p)^2}, \quad e$$

b)

$$\int d^d q \frac{1}{q^2 q^+},$$

conhecidas como integrais de “tadpole genuínas” são descartadas no nosso cálculo. Elas representam o que chamamos diagramas desconectados. Elas não dependem do momento externo. Entretanto, integrais do tipo “tadpole”

c)

$$T(p) = \int d^d q \frac{1}{(q-p)^2 q^+}$$

não podem ser descartadas. A eq.(3.2) fica então, após desconsiderarmos as “tadpole genuínas”

$$L_1^{(1)} = -g^2 (R^2)_j^i \left\{ 4p^2 \int d^d q \frac{1}{q^2 (q-p)^2} - 4p^+ p^2 \int d^d q \frac{1}{q^2 (q-p)^2 q^+} \right\} \quad (3.3)$$

onde chamaremos

$$E_1(p) = \int d^d q \frac{1}{q^2 (q-p)^2} \quad e \quad K(p) = p^+ \int d^d q \frac{1}{q^2 (q-p)^2 q^+}.$$

Estas integrais, assim como $T(p)$, estão resolvidas no apêndice C.

Escreveremos a eq.(3.2) como

$$L_1^{(1)} = -4p^2 g^2 (R^2)_j^i (E_1 - K) \quad (3.4)$$

De acordo com a eq.(2.4), vimos que o termo cinético usado no cálculo do propagador escalar tem a forma : $\delta_j^i \phi_i \partial^2 \phi^j$. O termo cinético renormalizado deve então ter a forma

$$Z_j^i \phi_i \partial^2 \phi^j \quad (3.5)$$

Portanto, o contratermo (ou a divergência a ser inserida na Lagrangiana original de forma a tornar o propagador finito) deve ser

$$i (2\pi)^4 p^2 (Z_j^i - \delta_j^i) = 4p^2 g^2 (R^2)_j^i (\overline{E}_1 - \overline{K}) \quad (3.6)$$

onde as barras denotam que estamos tomando apenas os pólos, ou as partes divergentes, das integrais correspondentes. Entretanto, ao consultarmos os resultados do apêndice C para tais integrais, veremos que $\overline{K}$ é finito, o que implica em $\overline{K} = 0$, enquanto

$$\overline{E}_1 = \frac{2i\pi^2}{\epsilon}. \quad (3.7)$$

Substituindo Z pela eq.(1.37) estaremos em condição de determinar a constante A_j^i , correspondente a primeira ordem da expansão de Z . Logo

$$i (2\pi)^4 p^2 \frac{1}{\epsilon} A_j^i = 4p^2 g^2 (R^2)_j^i \left[\frac{2i\pi^2}{\epsilon} \right], \quad (3.8)$$

daí

$$16\pi^2 A_j^i = 8g^2 (R^2)_j^i. \quad (3.9)$$

Como estamos interessados na dimensão anômala γ , podemos usar a eq.(1.45) e obtê-la em primeira ordem

$$16\pi^2 \gamma_j^{i(1)} = 4g^2 (R^2)_j^i. \quad (3.10)$$

Capítulo 4

A Dimensão Anômala a Dois Loops

O objetivo agora é calcular as correções em segunda ordem na teoria perturbativa.

Mostraremos, separadamente, as contribuições de cada um dos gráficos a dois loops. Depois de calculadas tais contribuições passaremos ao cálculo da dimensão anômala, $\gamma^{(2)}$.

Em função do fato de tornar essa dissertação o mais didática possível introduziremos, na medida em que facilite a apresentação e compreensão dos cálculos, alguns mecanismos utilizados para escrever a contribuição das integrais envolvidas. A cada um dos diagramas que apresentaremos vamos associar o seguinte esquema

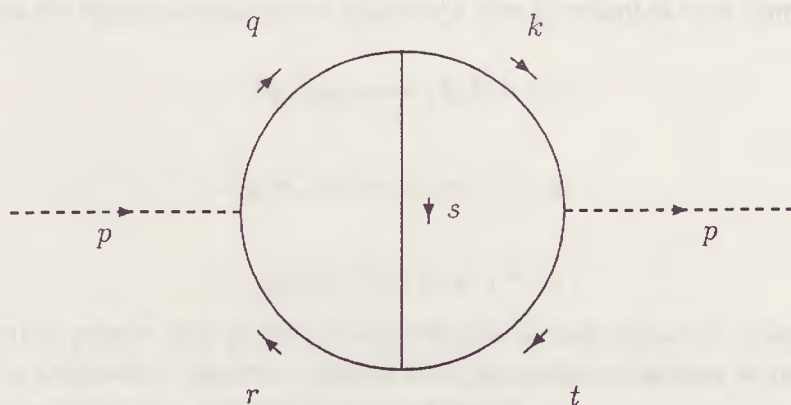


Figura 5: Diagrama representando as configurações de momentos que ocorrem na integrais de Feynman a dois loops. As linhas cheias representam campos escalares ou campos de gauge.

onde p, q, r, s, t e k representam os momentos envolvidos nas integrais a dois loops. Substituiremos ainda todos os produtos escalares envolvendo estes momentos pelas seguintes identidades (obtidas através da conservação de momento em cada um dos vértices da figura acima) onde aparecem as formas quadráticas p^2, q^2, r^2, s^2, t^2 e k^2

$$2p.q = p^2 + q^2 - r^2,$$

$$2p.k = p^2 + k^2 - t^2,$$

$$2p.r = q^2 - p^2 - r^2,$$

$$2p.t = k^2 - p^2 - t^2,$$

$$2p.s = t^2 + q^2 - r^2 - k^2,$$

$$2q.k = k^2 + q^2 - s^2,$$

$$2q.r = q^2 + r^2 - p^2,$$

$$2q.s = s^2 + q^2 - k^2,$$

$$2q.t = k^2 + r^2 - s^2 - p^2,$$

$$2k.r = t^2 + q^2 - s^2 - p^2,$$

$$2k.s = q^2 - k^2 - s^2,$$

$$2k.t = k^2 + t^2 - p^2,$$

$$2r.s = r^2 + s^2 - t^2,$$

$$2r.t = r^2 + t^2 - s^2,$$

$$2s.t = r^2 - s^2 - t^2.$$

Além disso, podemos nos valer das simetrias que envolvem a fig. 4 para simplificar ao máximo nossas formas integrais. Tais simetrias envolvem a invariância da figura acima sob a mudança nos momentos tais como

$$(q, t, s) \longleftrightarrow (k, r, -s) \quad (4.1)$$

$$(q, k, s) \longleftrightarrow (-r, -t, -s) \quad (4.2)$$

$$(q, k, s) \longleftrightarrow (-t, -r, s) \quad (4.3)$$

Um outro ponto que pode ser antecipado é que todas as integrais com as quais trabalhamos podem, através dos produtos escalares e relações de simetrias apresentados, ser escritas nas formas

$$U_n = \int \frac{\Delta_n}{\Xi} \quad (4.4)$$

$$Y_n = \int \frac{\Delta_n p^+}{\Xi q^+} \quad (4.5)$$

$$Z_n = \int \frac{\Delta_n t^+}{\Xi q^+} \quad (4.6)$$

$$X_n = \int \frac{\Delta_n (p^+)^2}{\Xi q^+ t^+} \quad (4.7)$$

onde $n = 1, 2, \dots, 21$, Δ_n qualquer uma das possíveis combinações de produtos de momentos quadráticos, dois a dois, como mostrados na tabela 4.1 e

$$\frac{1}{\Xi} = \frac{d^d q \, d^d k}{q^2 r^2 s^2 t^2 k^2} \quad (4.8)$$

Passemos finalmente ao resultado das contribuições a dois loops.

$$L_1^{(2)} = \int -\frac{ig^4}{(2\pi)^4} \frac{R^2 \text{Tr} R^2}{(d-1)} \left[4p^2 r^2 - k^2 r^2 - 4\frac{p^+}{q^+} p^2 t^2 \right] \frac{1}{\Xi} \quad (4.9)$$

$$L_2^{(2)} = \int \frac{ig^4}{(2\pi)^4} 16R^4 \left[p^2 k^2 - q^2 k^2 - \frac{p^+}{q^+} (2p^2 r^2 + p^2 k^2 - 2r^2 k^2 - t^2 r^2) - \frac{t^+}{q^+} \left(p^2 r^2 - \frac{1}{4} r^2 t^2 \right) - \frac{(p^+)^2}{q^+ t^+} (p^2 r^2 - k^2 r^2) \right] \frac{1}{\Xi} \quad (4.10)$$

$$L_3^{(2)} = \int \frac{ig^4}{(2\pi)^4} (-4) R^4 \left[p^2 s^2 - 2\frac{p^+}{q^+} (p^2 s^2 + q^2 s^2 - r^2 s^2) + \frac{(p^+)^2}{q^+ t^+} (2r^2 s^2 - p^2 s^2 - (s^2)^2) \right] \frac{1}{\Xi} \quad (4.11)$$

$$L_4^{(2)} = \int \frac{ig^4}{(2\pi)^4} (2) (D-2) R^4 (k^2 r^2) \frac{1}{\Xi} \quad (4.12)$$

$$L_5^{(2)} = \int \frac{ig^4}{(2\pi)^4} R^4 \left[8p^4 + 13k^2 r^2 - 12p^2 r^2 + 4r^4 - 8r^2 t^2 - 4r^2 q^2 + 4\frac{p^+}{q^+} (4p^4 - 4r^4 + 4k^2 r^2 - 4p^2 s^2 - 2q^2 k^2 - 2p^2 q^2 + 2q^2 r^2 + 2q^2 s^2 - t^2 k^2 - t^2 p^2 + t^2 r^2 + t^2 s^2) - 4\frac{t^+}{q^+} (2p^4 - 2r^4 \right.$$

$$+2k^2r^2 - 2p^2s^2] \frac{1}{\Xi} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} L_6^{(2)} = & \int \frac{ig^4}{(2\pi)^4} (-4) R^4 \left[p^2r^2 + k^2r^2 - r^2t^2 - \frac{t^+}{q^+} (p^2r^2 + q^2r^2 - r^4) \right. \\ & + \frac{p^+}{q^+} (2r^4 - 2p^2r^2 - q^2r^2 - s^2r^2 + 2k^2r^2 + q^2k^2 - p^2k^2) \\ & \left. + \frac{(p^+)^2}{q^+t^+} (r^4 + k^2r^2 - r^2s^2 - p^2r^2) \right] \frac{1}{\Xi} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Escrevendo as integrais mostradas nas expressões anteriores de acordo com uma nova notação, que facilita a apresentação dos resultados, temos

$$L_1^{(2)} = \frac{R^2 \text{Tr} R^2}{(d-1)} [U_3 - 4U_{16} + 4Y_{19}] \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} L_2^{(2)} = & (16) R^4 \left[U_{16} - U_7 + \frac{1}{4} Z_4 - 2Y_{16} - Y_{18} + 2Y_3 - Y_4 - Z_{16} \right. \\ & \left. - 2X_5 + X_3 \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$L_3^{(2)} = (-4) R^4 [2U_{20} - 2Y_{20} - 2Y_9 + 2Y_5 + 2X_5 - X_{15} - X_{20}] \quad (4.17)$$

$$L_4^{(2)} = 2(D-2) R^4 U_3 \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} L_5^{(2)} = & R^4 [U_{21} + 13U_3 - 12U_{16} + 4U_1 - 8U_4 - 4U_2 \\ & - 4(Y_{21} - 4Y_1 + 4Y_3 - 4Y_{20} - 2Y_7 - 2Y_{17} + 2Y_2 + 2Y_9 \\ & - Y_{11} - Y_{19} + Y_4 + Y_{14}) - 4(2Z_{21} - 2Z_1 - 2Z_{17} - Z_{19} + Z_4 \\ & + 2Z_2) - 4(X_{21} + X_{15} - 2X_1 + 2X_3 - 2X_{20})] \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} L_6^{(2)} = & (-8) R^4 [U_{16} + U_3 - U_4 - Z_{16} - Z_2 + Z_1 - 2Y_{16} + 2Y_1 \\ & - Y_2 - Y_5 + 2Y_3 + Y_7 - Y_{18} + X_3 + X_1 - X_5 - X_{16}] \end{aligned} \quad (4.20)$$

A apresentação do resultado das integrais que aparecem nos cálculos mostrados será feita através de uma tabela, mostrada à seguir

n	Δ_n	U_n	Y_n	Z_n	X_n
1	$(r^2)^2$	$\frac{1}{2}(U_{16} - U_3)$			
2	$r^2 q^2$	0			
3	$r^2 k^2$	G.10		$\frac{1}{2}(U_3 - Y_3)$	f
4	$r^2 t^2$	0	0	0	
5	$r^2 s^2$	0	0		0
6	$(q^2)^2$	U_1			
7	$q^2 k^2$	0			
8	$q^2 t^2$	U_3			
9	$q^2 s^2$	0			
10	$(k^2)^2$	U_1			
11	$k^2 t^2$	0			
12	$k^2 s^2$	0	0		
13	$(t^2)^2$	U_1			
14	$t^2 s^2$	0	0		
15	$(s^2)^2$	$-\frac{1}{2}U_{20}$			
16	$p^2 r^2$	G.5	f		
17	$p^2 q^2$	U_{16}	f	$Z_{16} + f$	
18	$p^2 k^2$	U_{16}	$Y_{20} + o(\epsilon^0)$		
19	$p^2 t^2$	U_{16}	$Y_{20} + o(\epsilon^0)$	$\frac{1}{2}U_{16} - Y_{19}$	
20	$p^2 s^2$	G.8	$i\pi^2 p^2 \frac{2}{\epsilon} K + o(\epsilon^0)$		f
21	$(p^2)^2$	f	f	f	

Tabela 4.1: Identidades entre as integrais no gauge do cone de luz. Os espaços em branco indicam que a forma explícita destas integrais não é necessária e o símbolo f indica que as integrais são finitas.

De acordo com os resultados mostrados nesta tabela e considerando que interessam apenas as divergências que tais integrais apresentam, ou seja, que as contribuições finitas podem ser descartadas, podemos escrever

$$L_1^{(2)} = \frac{R^2 \text{Tr} R^2}{(d-1)} [U_3 - 4U_{16} + 4Y_{19}] \quad (4.21)$$

$$L_2^{(2)} = R^4 [16U_{16} - 16Z_{16} - 16Y_{18} + 32Y_3 - 2X_5 + X_3] \quad (4.22)$$

$$L_3^{(2)} = R^4 [-8U_{20} + 8Y_{20} + 8Y_9 + 4X_{15}] \quad (4.23)$$

$$L_4^{(2)} = 2(D-2) R^4 U_3 \quad (4.24)$$

$$L_5^{(2)} = R^4 [+13U_3 - 12U_{16} + 4U_1 - +16Y_1 - 8Y_2 + 16Y_3 + 8Y_7 - 8Y_9 + 4Y_{19} + 16Y_{20} + 8Z_1 - 8Z_2 + 8Z_{17} + 4Z_{19} + 8X_1 - 4X_{15}] \quad (4.25)$$

$$L_6^{(2)} = R^4 [-8U_3 - 8U_{16} - 16Y_1 + 16Y_2 - 16Y_3 - 8Y_7 + 8Y_{18} - 8Z_1 + 8Z_2 + 8Z_{16} - 8X_1] \quad (4.26)$$

onde a contribuição total de tais integrais é

$$L_T^{(2)} = \frac{R^2 \text{Tr} R^2}{(d-1)} \{U_3 - 4U_{16} + 4Y_{19}\} + R^4 \{ 4U_1 - 4U_{16} - 8U_{20} - 8Y_{18} + 4Y_{19} + 24Y_{20} + 4Z_{19} - 8(Z_{16} - Z_{17}) + (2D+1)U_3 \} \quad (4.27)$$

Escrevendo neste resultado $U_1 = \frac{1}{2}(U_{16} - U_3)$ tem-se

$$L_T^{(2)} = \frac{R^2 \text{Tr} R^2}{(d-1)} \{U_3 - 2U_{16} + 4Y_{19}\} + R^4 \{ -2U_{16} - 8U_{20} - 8Y_{18} + 4Y_{19} + 24Y_{20} + 4Z_{19} - 8(Z_{16} - Z_{17}) + (2D-1)U_3 \} \quad (4.28)$$

Usando as identidades entre as integrais no gauge do cone de luz, vistas no apêndice G, podemos escrever

$$L_T^{(2)} = \frac{ig^4}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{R^2 \text{Tr} R^2}{(d-1)} (U_3 - 4U_{16}) + R^4 (7U_3 - 8U_{20}) \right. \\ \left. i\pi^2 p^2 \left[\frac{8}{3\epsilon} R^2 \text{Tr} R^2 + \frac{32}{\epsilon} R^4 \right] K(p) \right\} \quad (4.29)$$

Existem ainda outras contribuições, de mesma ordem, que devem ser computadas. Elas vêm da inserção de contratermos, como mostraremos na próxima figura.

Tais contratermos devem cancelar as divergências que aparecem nos propagadores. As constantes de renormalização associadas ao campo de gauge e ao campo escalar, Z_{GF} e Z_{SF} , respectivamente, podem ser escritas fazendo i)

$$i(2\pi)^4 P_{\mu\nu}(q) + \left[-g^2 \frac{\text{Tr} R^2}{(d-1)} E_1 \right] P_{\mu\nu}(q) = i(2\pi)^4 Z_{GF} P_{\mu\nu}(q)$$

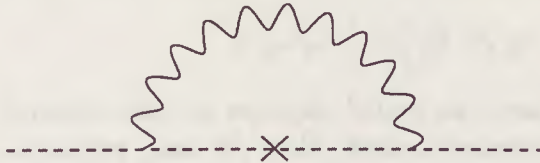
onde foi usada a auto energia do campo de gauge, calculada no apêndice E e a eq.(3.7) para $E_1(q)$. Com isso

$$Z_{GF} = 1 - \frac{2}{3} g^2 \frac{\text{Tr} R^2}{(d-1)} \frac{1}{16\pi^2\epsilon} \quad (4.30)$$

ii) Para o campo escalar de acordo com a eq.(3.6) tem-se

$$Z_{SF} = 1 + \frac{1}{2} g^2 R^2 \frac{1}{\pi^2\epsilon} \quad (4.31)$$

Usando a identidade de Ward-Takahashi podemos verificar que a interação de vértice tem o mesmo fator de renormalização que o campo escalar. Podemos então escrever as contribuições de inserção de contratermos como



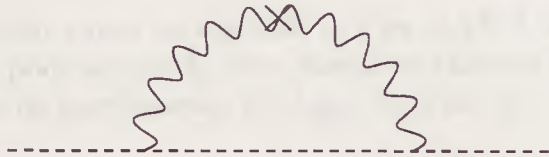
$$\equiv I_1^{(2)} \\ = -\frac{p^2 g^4}{16\pi^2} \left[-32 R^4 \frac{1}{\epsilon} (E_1 - K) \right]$$

Figura 6: Correção da auto energia do campo escalar devido à inserção de contratermos.



$$\begin{aligned}
 &\equiv I_2^{(2)} \\
 &= -\frac{p^2 g^4}{16\pi^2} \left[64 R^4 \frac{1}{\epsilon} (E_1 - K) \right]
 \end{aligned}$$

Figura 7: Correção do vértice devido à inserção de contratermos.



$$\begin{aligned}
 &\equiv I_3^{(2)} \\
 &= -\frac{p^2 g^4}{16\pi^2} \left[\frac{8}{3} R^2 Tr R^2 \frac{1}{\epsilon} (E_1 - K) \right]
 \end{aligned}$$

Figura 8: Correção da auto energia do campo de gauge devido à inserção de contratermos.

Como resultado total, somando as contribuições $I_1^{(2)}$, $I_2^{(2)}$ e $I_3^{(2)}$ teremos

$$I_T^{(2)} = -\frac{p^2 g^4}{16\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \left[32 R^4 + \frac{8}{3} R^2 Tr R^2 \right] [E_1 - K] \quad (4.32)$$

Podemos agora obter o contratermo em segunda ordem na série perturbativa. Para isso devemos somar os resultados das equações (4.29) e (4.32). Logo, de acordo com a eq.(1.37) temos, no espaço dos momentos

$$\begin{aligned}
 i(2\pi)^4 p^2 \left[\frac{B}{\epsilon^2} + \frac{C}{\epsilon} \right] &= -\frac{ig^4}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{R^2 Tr R^2}{(d-1)} (U_3 - 4U_{16}) + R^4 (7U_3 - 8U_{20}) \right. \\
 &\quad \left. + i\pi^2 p^2 \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{8}{3} R^2 Tr R^2 + 32 R^4 \right] E_1 \right\} \quad (4.33)
 \end{aligned}$$

Substituindo na equação acima as expansões das integrais U , em função das equações para E_1 e E_2 dadas, respectivamente pelas equações (C.7) e (G.4), verificamos que as divergências não locais do tipo $(\epsilon)^{-1} \ln(p^2)$ cancelam-se. Se levarmos a cabo estas substituições e compararmos os dois lados da eq.(4.33) a cada ordem $(\epsilon)^{-1}$, teremos

$$(16\pi^2)^2 B = g^4 \left[\frac{8}{3} R^2 \text{Tr} R^2 + 32 R^4 \right], \quad (4.34)$$

$$(16\pi^2)^2 C = -g^4 \left[\frac{43}{18} R^2 \text{Tr} R^2 + \frac{7}{2} R^4 \right]. \quad (4.35)$$

O resultado para a dimensão anômala a dois loops na QED escalar é obtida diretamente substituindo a eq.(1.44) em eq.(4.35)

$$(16\pi^2)^2 \gamma^{(2)} = g^4 \left[\frac{43}{18} R^2 \text{Tr} R^2 + \frac{7}{2} R^4 \right]. \quad (4.36)$$

Como vimos no capítulo 1, a eq.(1.43) é extraída como um vínculo, que agora pode ser usada para checar os cálculos feitos. Escrevendo g para constante de acoplamento em lugar de λ na eq.(1.43) temos

$$B = \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{2} \beta^{(1)}(g) \frac{\partial A}{\partial g} \quad (4.37)$$

Se escrevermos a constante de acoplamento renormalizada como

$$g_0 = \mu^{2-\omega} g Z_{GF}^{-1/2} \quad (4.38)$$

com Z_{GF} dado pela eq.(4.30) e substituirmos na eq.(1.41) encontramos para $\beta^{(1)}$

$$16 \pi^2 \beta^{(1)}(g) = \frac{1}{3} g^3 \text{Tr} R^2. \quad (4.39)$$

Podemos verificar os resultados obtidos substituindo as equações (3.9) e (4.39) no lado direito de (4.37) e a eq.(4.34) no lado esquerdo, obtendo uma identidade.

Conclusão

Apresentamos nesta dissertação os resultados do cálculo da dimensão anômala para a QED escalar em ordem superior. Para tal foi necessário o domínio de uma ferramenta matemática mais sofisticada em relação às utilizadas normalmente, quando é possível o uso da prescrição do tipo $i\epsilon$, que viabilize solucionar as integrais de Feynman no gauge do cone de luz.

Apesar de para a QED escalar, que é uma teoria não-supersimétrica, a dimensão anômala depender do gauge escolhido e não possuir significado físico ela é um exercício bastante didático na medida que é uma teoria algebricamente simples. Através dela vimos como as complicações das integrais no gauge do cone de luz a dois loops podem ser evitadas e tratadas.

Em relação às motivações iniciais podemos dizer que :

(a) baseados nos cálculos desenvolvidos, o gauge do cone de luz é absolutamente praticável quando trabalhamos em ordem superior;

(b) testamos a renormalizabilidade da teoria em ordem superior, no gauge do cone de luz. Isso porque foi possível calcular os contratermos que uma vez introduzidos na Lagrangiana original cancelam suas divergências. Esta tarefa que em primeira ordem é bastante simples, em ordem superior exige o uso adequado das identidades e simetrias que podemos extrair das integrais calculadas neste gauge;

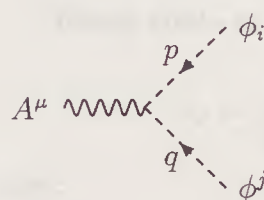
(c) por último uma curiosidade bastante interessante que é o fato de podermos escrever, pelo menos algumas das contribuições da auto energia do campo escalar, descritas pelas equações de (4.15) à (4.20) do capítulo 4, de maneira diferente às apresentadas. Este fato foi testado no desenvolvimento desta dissertação, quando tentávamos reproduzir os resultados mostrados nas referidas equações. Observamos que de acordo com a configuração dos momentos segundo o qual representássemos os gráficos de ordem dois, mostrados no apêndice F, teríamos diferenças nos resultados encontrados. Entretanto, tais diferenças manifestavam-se apenas na parte finita de tais contribuições. Como, para os cálculos efetuados apenas a parte divergente destas contribuições é relevante este fato não modifica os resultados do cálculo da dimensão anômala em segunda ordem, $\gamma^{(2)}$.

Apêndice A

Regras de Feynman para QED Escalar

$$A^\mu \text{ wavy } A^\nu \quad \equiv \quad -iP^{\mu\nu} \quad = \quad -\frac{i}{(2\pi)^4 q^2} \left[g^{\mu\nu} - \frac{1}{q^+} (q^\mu n^\nu + q^\nu n^\mu) \right]$$

$$\phi_j \text{ dashed } \phi^j \quad \equiv \quad -i\Delta_F \quad = \quad -\frac{i}{(2\pi)^4}$$



$$= i(2\pi)^4 g R_j^i (p - q)^\mu$$



$$= i(2\pi)^4 g^2 (R^2)_j^i (2g^{\mu\nu})$$

Apêndice B

Notação do Gauge do Cone de Luz

Descreveremos aqui a notação utilizada na literatura quando trabalhamos no gauge do cone de luz.

$$x^{\pm} = (x^0 \pm x^3) / \sqrt{2}, \quad (\text{B.1})$$

$$x_{\pm} = (x_0 \pm x_3) / \sqrt{2}, \quad (\text{B.2})$$

onde:

$$x^{\pm} = x_{\mp}. \quad (\text{B.3})$$

Temos ainda os vetores n_{μ} definidos como :

$$n_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 0, 1) \quad e \quad \bar{n}_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 0, -1) \quad (\text{B.4})$$

com:

$$n_{\mu} n^{\mu} = \bar{n}_{\mu} \bar{n}^{\mu} = 0 \quad e \quad n_{\mu} \bar{n}^{\mu} = 1 \quad (\text{B.5})$$

Além disso adotaremos a seguinte notação para os produtos escalares :

$$x^{+} = n_{\mu} x^{\mu} \quad e \quad x^{-} = \bar{n}_{\mu} x^{\mu} \quad (\text{B.6})$$

$$x_{\mu} y^{\mu} = x^{+} y^{-} + x^{-} y^{+} - x^i y^i = x^{+} y^{-} + x^{-} y^{+} - \hat{x} \cdot \hat{y} \quad (\text{B.7})$$

Apêndice C

Integrais no Gauge do Cone de Luz

Resolveremos aqui as integrais relevantes no cálculo da dimensão anômala a um loop. São elas

C.1 Integral $E(p)$

$$E_1(p) = \int d^d q \frac{1}{q^2 (q-p)^2} \quad (C.1)$$

Uma forma muito útil nos nossos cálculos daqui em diante, conhecida como fórmula de Feynman, é

$$\frac{1}{a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}} = i \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_n)} \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_1-\dots-x_{n-2}} dx_{n-1} (1-x_1-\dots-x_{n-1})^{\alpha_1-1} x_1^{\alpha_2-1} \dots x_{n-1}^{\alpha_n-1} \quad (C.2)$$

$$\int d^d q \frac{(k^2)^b}{(k^2 - R^2 + i\epsilon)^a} = i\pi^{d/2} \frac{1}{(R^2)^{a-b-d/2}} \frac{\Gamma(a-b-d/2) \Gamma(b+d/2)}{\Gamma(a) \Gamma(d/2)} \quad (C.3)$$

$$B(u, v) = \frac{\Gamma(u) \Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} \int_0^1 dx x^{u-1} (1-x)^{v-1} \quad (C.4)$$

Resolveremos inicialmente $E_1(p)$. Usando a eq.C.2 em C.1 podemos escrever

$$\int d^d q \frac{1}{q^2 (q-p)^2} = \int d^d q \int_0^1 dx \frac{1}{[(q-p)^2 x + q^2 (1-x)]^2} \quad (C.5)$$

Como a integral original é linearmente divergente podemos fazer uma translação $q \rightarrow q + px$. Usando a eq.C.3 e a eq.C.4 (definição da função beta) temos o seguinte resultado

$$E_1(p) = i(-\pi)^\omega (p^2)^{\omega-2} \frac{\Gamma(2-\omega) \Gamma(\omega-1) \Gamma(\omega-1)}{\Gamma(2\omega-2)} \quad (C.6)$$

onde, usando as propriedades das funções gama podemos escrever

$$E_1(p) = 2i\pi^2 \left[\frac{1}{\epsilon} + 1 - \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \ln(-\pi p^2) + o(\epsilon) \right] \quad (C.7)$$

C.2 Integral K(p)

$$K(p; \mu, \nu) = \int d^d q \frac{1}{(q^2)^\mu [(q-p)^2]^\nu} \frac{p^+}{q^+} \quad (C.8)$$

Usando a exponenciação dos propagadores, como mostrada na eq.(1.27) temos

$$K(p; \mu, \nu) = \frac{(-i)^{\mu+\nu}}{\Gamma(\mu) \Gamma(\nu)} p^+ \int_0^\infty \int_0^\infty d\alpha d\beta \alpha^{\mu-1} \beta^{\nu-1} \exp i\beta p^2 M_{LC} \quad (C.9)$$

onde a integral no momento é

$$M_{LC} = \int d^d q \frac{1}{q^+} \exp[i(\alpha + \beta)q^2 - 2\beta p \cdot q] \quad (C.10)$$

É conveniente introduzirmos as seguintes definições

$$x \equiv (\alpha + \beta) \quad (C.11)$$

$$\beta p \equiv -xQ \quad (C.12)$$

$$\beta p^2 \equiv x\Theta \quad (C.13)$$

que substituídas na eq.(C.9) e usando a notação do apêndice B, temos

$$M_{LC} = C \int d^{d-2} \hat{q} \exp \left\{ -ix \left[\hat{q}^2 + 2\hat{q} \cdot \hat{Q} \right] \right\} J_{LC} \quad (C.14)$$

usando o resultado mostrado na eq.(1.28) para a solução de cada uma ds componentes de $\hat{q}$ na integral em $d^{d-2}\hat{q}$ temos

$$M_{LC} = C J_{LC} (-i\pi)^{\omega-1} \frac{1}{x^{\omega-1}} \exp(i\hat{Q}^2 x) \quad (C.15)$$

com

$$C = |J| \exp\{ix\Theta\} \quad (C.16)$$

$$J_{LC} = \int dq^- \exp(2ixQ^+q^-) \int dq^+ \frac{1}{q^+} \exp[2ix(q^- + Q^-)q^+] \quad (C.17)$$

onde usando a prescrição de Mandelstam dada pela eq.(2.25), que repetiremos aqui, dada sua relevância

$$\frac{1}{q^+} \rightarrow \lim_{(\eta \rightarrow 0^+)} \left\{ \frac{1}{q^+ + i\eta q^-} \right\},$$

temos que resolver agora

$$J_{LC} = \lim_{(\eta \rightarrow 0^+)} \int dq^- \exp(2ixQ^+q^-) \int dq^+ \frac{1}{q^+ + i\eta q^-} \exp[2ix(q^- + Q^-)q^+] \quad (C.18)$$

Como podemos observar a integral acima deve ser resolvida no plano complexo, usando o teorema de resíduos. Para isso vamos analisar todos os possíveis contornos de integração e seus respectivos resultados.

A) Se $(Q^- + q^-) > 0$, note que x é sempre positivo (ver eq.C.11), então o contorno de integração deve estar no semiplano superior do plano q^+ .

A1) Se $q^- > 0$, não existem pólos no interior do contorno, portanto o resíduo será zero, sendo também zero a integral sobre q^+ .

A2) Para $q^- < 0$, existe um pólo em $q^+ = -i\eta q^-$ com resíduo

$$Res(q^+ + i\eta q^-) = (2\pi i) \exp[2ix(-i\eta q^-)(q^- + Q^-)]$$

B) Se $(Q^- + q^-) < 0$, deve estar no semiplano inferior do plano q^+ .

B1) Se $q^- > 0$, existe um pólo em $q^+ = -i\eta q^-$ com resíduo

$$Res(q^+ + i\eta q^-) = (-2\pi i) \exp[2ix(-i\eta q^-)(q^- + Q^-)]$$

B2) Para $q^- < 0$, não existem pólos no interior do contorno. A integral sobre q^+ é zero.

Levando os resultados das integrações em q^+ à eq.(C.18) temos

(i) Para $(q^- + Q^-) > 0$ e $q^- < 0 \rightarrow -Q^- < q^- < 0$

$$J_{LC}^{Ma} = \lim_{(\eta \rightarrow 0^+)} \int_{-Q^-}^0 dq^- \exp(2ixQ^+q^-) (2\pi i) \exp[2x\eta q^- (q^- + Q^-)] \quad (C.19)$$

(ii) Para $(q^- + Q^-) < 0$ e $q^- > 0 \rightarrow 0 < q^- < -Q^-$

$$J_{LC}^{Mb} = \lim_{(\eta \rightarrow 0^+)} \int_0^{-Q^-} dq^- \exp(2ixQ^+q^-) (-2\pi i) \exp[2x\eta q^- (q^- + Q^-)] \quad (C.20)$$

Tendo efetuado as contribuições dos pólos que definem a prescrição de Mandelstam, podemos seguramente fazer o limite $\eta \rightarrow 0$ em (C.19) e (C.20). O resultado da integração sobre q^- torna-se trivial

$$J_{LC}^{Ma} = \frac{-\pi}{xQ^+} [\exp(-2ixQ^+Q^-) - 1],$$

$$J_{LC}^{Mb} = \frac{-\pi}{xQ^+} [\exp(-2ixQ^+Q^-) - 1].$$

Podemos observar que os resultados são iguais, isso mostra que eles independem da nossa escolha do contorno de integração das integrais. Podemos escrever J_{LC}^M como

$$J_{LC}^M = \frac{-\pi}{xQ^+} [\exp(-2ixQ^+Q^-) - 1] \quad (C.21)$$

Substituindo este resultado na eq.(C.15) temos

$$M_{LC} = C \frac{(-i)^{\omega+1}}{Q^+} \frac{\pi^\omega}{x^\omega} [\exp(-ixQ^2) - \exp(ix\hat{Q}^2)] \quad (C.22)$$

onde podemos verificar facilmente, usando as relações do Apendice B, que o Jacobiano $|J|$ que aparece em C é 1.

Inserindo na eq.(C.9) o resultado encontrado em (C.22) temos

$$K(p; \mu, \nu) = \frac{(-i)^{\mu+\nu}}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} p^+ \int_0^\infty \int_0^\infty d\alpha d\beta \alpha^{\mu-1} \beta^{\nu-1} \exp(ix\Theta) \\ \frac{(-i)^{\omega+1}}{Q^+} \frac{\pi^\omega}{x^\omega} [\exp(-ixQ^2) - \exp(ix\hat{Q}^2)] \quad (C.23)$$

Para resolvermos esta integral faremos a seguinte mudança de variáveis

$$\alpha = xy \quad (C.24)$$

$$\beta = x(1-y) \quad (C.25)$$

Usando as definições (C.11) a (C.13) juntamente com as equações acima podemos fazer a análise dos limites de integração para as novas variáveis ($d\alpha d\beta \rightarrow |J|dx dy$, com $|J| = x$)

$$\int_0^\infty \int_0^\infty d\alpha d\beta \rightarrow \int_0^1 \int_0^\infty x dy dx.$$

É interessante escrevermos algumas relações envolvendo novas e antigas variáveis que devem ser usadas para reescrevermos $K(p; \mu, \nu)$. À partir de (C.12) temos

$$xQ^2 = x(1-y)^2 p^2 \quad (C.26)$$

e usando (C.24) e (C.25)

$$-xQ^2 + x\Theta = xy(1-y)p^2$$

com

$$\hat{Q}^2 = 2Q^+Q^- - Q^2,$$

$$Q^+ = (1-y)p^+,$$

$$Q^- = (1-y)p^-.$$

Dessa forma escreveremos

$$\exp(ix\Theta) \left[\exp(-ixQ^2) - \exp(ix\hat{Q}^2) \right] = \exp[ixy(1-y)p^2] - \exp\{ix(1-y)p^2[y + (1-y)\rho]\} \quad (\text{C.27})$$

com

$$\rho = \frac{2p^+p^-}{p^2} \quad (\text{C.28})$$

Portanto

$$K(p; \mu, \nu) = \frac{(-i)^{\mu+\nu+\omega+1} \pi^\omega}{\Gamma(\mu) \Gamma(\nu)} p^+ \int_0^1 \int_0^\infty x dx dy (xy)^{\mu-1} [x(1-y)]^{\nu-1} x^{-\omega} \frac{(1-y)^{-1}}{p^+} \exp[ixy(1-y)p^2] - \exp\{ix(1-y)p^2[y + (1-y)\rho]\} \quad (\text{C.29})$$

$$K(p; \mu, \nu) = \frac{(-i)^{\mu+\nu+\omega+1} \pi^\omega}{\Gamma(\mu) \Gamma(\nu)} \int_0^1 dy y^{\mu-1} (1-y)^{\nu-2} I(x, y) \quad (\text{C.30})$$

onde

$$I(x, y) = \int_0^\infty dx x^{\mu+\nu-\omega-1} \exp[ixy(1-y)p^2] - \exp\{ix(1-y)p^2[y + (1-y)\rho]\} \quad (\text{C.31})$$

Para integração em x usaremos uma representação das funções gama[17]

$$\frac{\Gamma(m+1)}{a^{m+1}} = \int_0^\infty x^m \exp(-ax) dx \quad (\text{C.32})$$

$$I(x, y) = \frac{\Gamma(\nu + \mu - \omega)}{(-i)^{\mu+\nu-\omega} (p^2)^{\mu+\nu-\omega}} \{ y^{\omega-\mu-\nu} (1-y)^{\omega-\mu-\nu} - (1-y)^{\omega-\mu-\nu} [y + (1-y)\rho]^{\omega-\mu-\nu} \} \quad (\text{C.33})$$

Substituindo o resultado da eq.(C.33) na eq.(C.30) e usando novamente a referência [17], eq.(9.111), temos

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{1}{B(\beta, \gamma - \beta)} \int_0^1 dt t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tz)^{-\alpha}, \text{Re}\gamma > \text{Re}\beta > 0.$$

onde $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ é a função hipergeométrica, para a solução das integrais em y, temos

$$K(p; \mu, \nu) = \frac{(-i)^{2\omega+1} \pi^\omega}{\Gamma(\mu) \Gamma(\nu)} (p^2)^{\omega-\mu-\nu} \Gamma(\nu + \mu - \omega) \left\{ \frac{\Gamma(\omega - \nu) \Gamma(\omega - \mu - 1)}{\Gamma(2\omega - \nu - \mu - 1)} - \frac{\Gamma(\mu) \Gamma(\omega - \mu - 1)}{\Gamma(\omega - 1)} F(\nu + \mu - \omega, \omega - \mu - 1, \omega - 1, 1 - \rho) \right\} \quad (\text{C.34})$$

No caso em que $\mu = \nu = 1$

$$K(p; 1, 1) = i (-\pi)^\omega (p^2)^{\omega-2} \Gamma(2 - \omega) \left\{ \frac{\Gamma(\omega - 1) \Gamma(\omega - 2)}{\Gamma(2\omega - 3)} - \frac{\Gamma(\omega - 2)}{\Gamma(\omega - 1)} F(2 - \omega, \omega - 2, \omega - 1, 1 - \rho) \right\} \quad (\text{C.35})$$

ou ainda de acordo com a referência[13] podemos escrever

$$K(p) \equiv K(p, \mu, \nu) = i (-\pi)^\omega (p^2)^{\omega-2} \Gamma(2 - \omega) \left\{ \frac{\Gamma(\omega - 1) \Gamma(\omega - 2)}{\Gamma(2\omega - 3)} - \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{-\hat{p}^2}{p^2} \right]^j \frac{\Gamma(2 - \omega - j)}{j! (\omega - 2 - j) \Gamma(2 - \omega)} \right\} \quad (\text{C.36})$$

$$K(p) = i \pi^2 \left\{ \frac{\pi^2}{6} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^2} \left[\frac{-\hat{p}^2}{p^2} \right]^j \right\} + \mathcal{O}(\omega - 2)$$

com

$$\hat{p}^2 = \sum_{j=1}^{d-2} p^j p^j.$$

C.3 Integral $T(p)$

$$T(p) = K(p, 0, 1) = i(-\pi)^\omega (p^2)^{\omega-1} \Gamma(1-\omega) \left\{ \frac{\Gamma(\omega-1) \Gamma(\omega-1)}{\Gamma(2\omega-2)} - F(1-\omega, \omega-1, \omega-1, 1-\rho) \right\}. \quad (C.37)$$

Mas,

$$F(-n, \beta, \beta, -z) = (1+z)^n$$

portanto,

$$T(p) = i(-\pi)^\omega (p^2)^{\omega-1} \Gamma(1-\omega) \left\{ \frac{\Gamma(\omega-1) \Gamma(\omega-1)}{\Gamma(2\omega-2)} - \left[\frac{2p^+ p^-}{p^2} \right]^{\omega-1} \right\} \quad (C.38)$$

Apêndice D

Demonstração da Equação 2.13

Temos do lado esquerdo da eq.(2.13) :

$$\int d^4x A^\mu(x) \left(g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu + \frac{1}{\alpha} n_\mu n_\nu \right) A'^\nu(x) \quad (D.1)$$

onde podemos escrever para as derivadas dos campos $A'^\nu(x)$:

$$\partial_\mu (\partial^\mu A'^\nu(x)) = A'^\nu(x) \partial_\mu \partial^\mu + \partial^\mu \partial_\mu A'^\nu(x) \quad (D.2)$$

$$\partial_\mu (\partial_\nu A'^\nu(x)) = A'^\nu(x) \partial_\mu \partial_\nu + \partial_\nu \partial_\mu A'^\nu(x) \quad (D.3)$$

se considerarmos que o campo $A'^\nu(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \infty$, a integral de superfície (ou a integral do termo à esquerda na equação acima, com derivada total) desaparece. Ficamos com o seguinte resultado :

$$\partial^\mu \partial_\mu A'^\nu(x) = -A'^\nu(x) \partial_\mu \partial^\mu \quad (D.4)$$

$$\partial_\nu \partial_\mu A'^\nu(x) = -A'^\nu(x) \partial_\mu \partial_\nu \quad (D.5)$$

Dai' podemos escrever a eq.(D.1) como :

$$\int d^4x \left(-g_{\mu\nu} A'^\nu(x) A^\mu(x) \partial^\alpha \partial_\alpha + A'^\nu(x) A^\mu \partial_\mu \partial_\nu + A'^\nu(x) n_\mu n_\nu A^\mu(x) \right) \quad (D.6)$$

onde usando novamente as eq. 's (D.2) e (D.3) e o fato que o comutador $[A^\mu(x), A^\nu(x)] = 0$, podemos, finalmente, escrever a eq.(D.1) como :

$$\int d^4x A'^\nu(x) \left(g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu + \frac{1}{\alpha} n_\mu n_\nu \right) A^\mu(x). \quad (D.7)$$

Apêndice E

Auto-Energia do fóton no Gauge do Cone de Luz

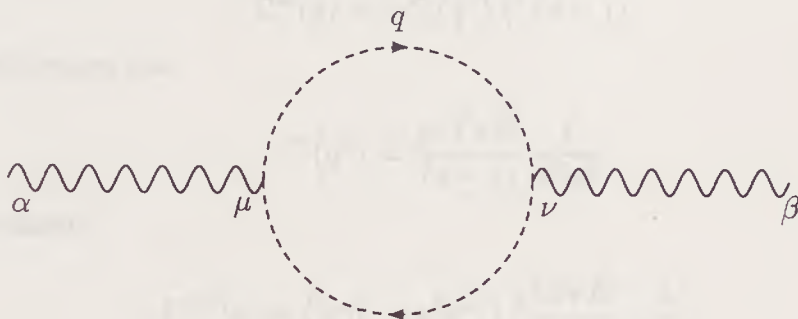


Figura 9: Auto Energia do Campo de Gauge.

De acordo com esta figura podemos escrever

$$P'_{\alpha\beta}(q) = P_{\alpha\beta}(q) + P_{\alpha\mu}(q) \Pi^{\mu\nu}(q) P_{\nu\beta}(q) \quad (\text{E.1})$$

onde usando as regras de Feynman apresentadas no apêndice A, podemos escrever $\Pi^{\mu\nu}(q)$ como

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = -g^2 \text{Tr} R^2 \frac{1}{k^2 s^2} q^\mu q^\nu. \quad (\text{E.2})$$

Mas, assim como na QED, usamos a condição de transversalidade do fóton para escrevermos

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = (q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) C(q^2). \quad (\text{E.3})$$

Tomando o traço nas duas expressões de $\Pi^{\mu\nu}(q)$ temos

$$\Pi^\mu_\mu(q) = -g^2 \text{Tr} R^2 \frac{q^2}{k^2 s^2} \quad (\text{E.4})$$

e

$$\Pi^\mu_\mu(q) = -C(q^2) q^2 (d-1) \quad (\text{E.5})$$

de onde temos que

$$C(q^2) = \frac{g^2 \text{Tr} R^2}{(d-1)} \frac{1}{k^2 s^2} \quad (\text{E.6})$$

Portanto,

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = (q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) \frac{g^2 \text{Tr} R^2}{(d-1)} \frac{1}{k^2 s^2}. \quad (\text{E.7})$$

Substituindo a expressão do propagador do fóton, apresentada no capítulo 1, e a equação acima em (E.1), e desenvolvendo a álgebra temos

$$P'_{\alpha\beta}(q) = -\frac{g^2 \text{Tr} R^2}{(d-1)} E_1(K) P_{\alpha\beta}(q).$$

Apêndice F

Auto-Energia do Campo Escalar a Dois Loops

Escreveremos aqui, com maiores detalhes, como calcular as contribuições relativas a dois loops mostradas no capítulo 4.

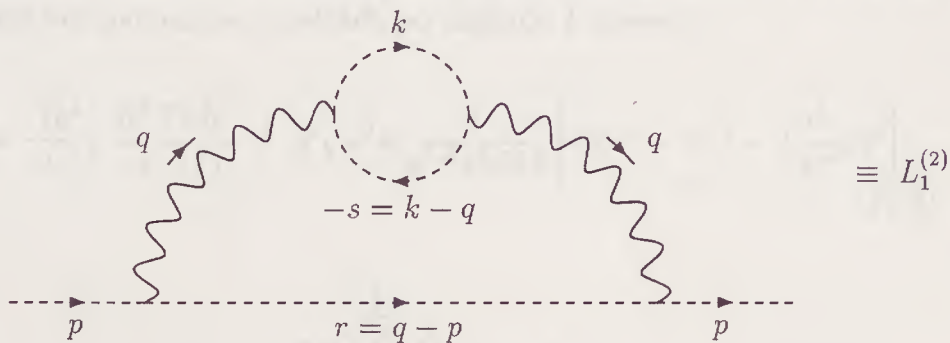


Figura 10: Correção radiativa da Auto Energia do Campo Escalar Correspondente ao Termo $L_1^{(2)}$.

Usando a auto-energia do fóton calculada no apêndice E, podemos es

crever

$$\begin{aligned}
L_1^{(2)} &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^d q \ (igR) \ (p-r)_\beta \ \frac{(-i)}{q^2} \left[g^{\nu\beta} - \frac{1}{q^+} (q^\nu n^\beta + q^\beta n^\nu) \right] \\
&\quad \Pi_{\nu\mu}(q) \ \frac{(-i)}{q^2} \left[g^{\mu\alpha} - \frac{1}{q^+} (q^\mu n^\alpha + q^\alpha n^\mu) \right] (igR) \ (p-r)_\alpha \ \frac{i}{r^2} \\
&= \frac{ig^4}{(2\pi)^4} \frac{R^2 \text{Tr} R^2}{(d-1)} \int d^d q \ d^d k \ \frac{1}{q^4 r^2 s^2 k^2} (2p-q)_\beta \left[g^{\nu\beta} - \frac{1}{q^+} (q^\nu n^\beta + q^\beta n^\nu) \right] \\
&\quad [q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}] \left[g^{\mu\alpha} - \frac{1}{q^+} (q^\mu n^\alpha + q^\alpha n^\mu) \right] (p-r)_\alpha \quad (F.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_1^{(2)} &= \frac{ig^4}{(2\pi)^4} \frac{R^2 \text{Tr} R^2}{(d-1)} \int d^d q \ d^d k \ \frac{1}{q^2 r^2 s^2 t^2 k^2} \left\{ \frac{2}{q^+} (2p^+ - q^+) \right. \\
&\quad \left. (2p \cdot q - q^2) - 4p^2 - 4p \cdot q - q^2 \right\} \quad (F.2)
\end{aligned}$$

substituindo os produtos escalares pelas formas onde aparecem a soma dos quadrados dos momentos, mostrada no capítulo 4 teremos

$$L_1^{(2)} = \frac{ig^4}{(2\pi)^4} \frac{R^2 \text{Tr} R^2}{(d-1)} \int d^d q \ d^d k \ \frac{1}{q^2 r^2 s^2 t^2 k^2} \left[4p^2 r^2 - k^2 r^2 - 4 \frac{p^+}{q^+} p^2 t^2 \right] \quad (F.3)$$

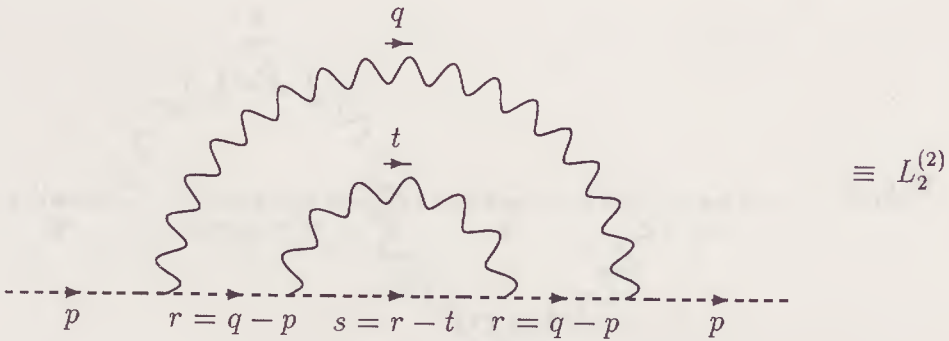


Figura 11: Correção radiativa da Auto Energia do Campo Escalar Correspondente ao Termo $L_2^{(2)}$.

Usaremos aqui um resultado já calculado no capítulo 1, a auto-energia do campo escalar, dada pela eq.(3.4), ou $L_1^{(1)}(t)$ para escrevermos esta contribuição

$$L_2^{(2)} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^d q \ (igR) (p-r)_\beta \frac{(-i)}{q^2} \left[g^{\nu\beta} - \frac{1}{q^+} (q^\nu n^\beta + q^\beta n^\nu) \right] \\ (igR) (p-r)_\nu \frac{i}{r^2} \left[-4r^2 g^2 R^2 (E_1(t) - K(t)) \right] \frac{i}{r^2} \quad (\text{F.4})$$

onde podemos escrever $p-r = 2p-q$ e

$$E_1(t) = g^2 R^2 \int d^d t \frac{1}{t^2 s^2} \left[1 - \frac{r^+}{t^+} \right].$$

O resultado mostrado no capítulo 4 é encontrado desenvolvendo algebricamente a seguinte expressão

$$L_2^{(2)} = \frac{ig^4}{(2\pi)^4} \frac{R^2 Tr R^2}{(d-1)} 4 \int d^d q \ d^d k \frac{k^2}{q^2 r^2 s^2 t^2 k^2} \left[4p^2 - q^2 - 4 \frac{p^+}{q^+} (r^2 - p^2) \right] \left[1 - \frac{r^+}{t^+} \right]$$

para isso deve-se substituir $r^+ = q^+ - p^+$ e usar as relações de simetrias mostradas em (4.1) à (4.3).

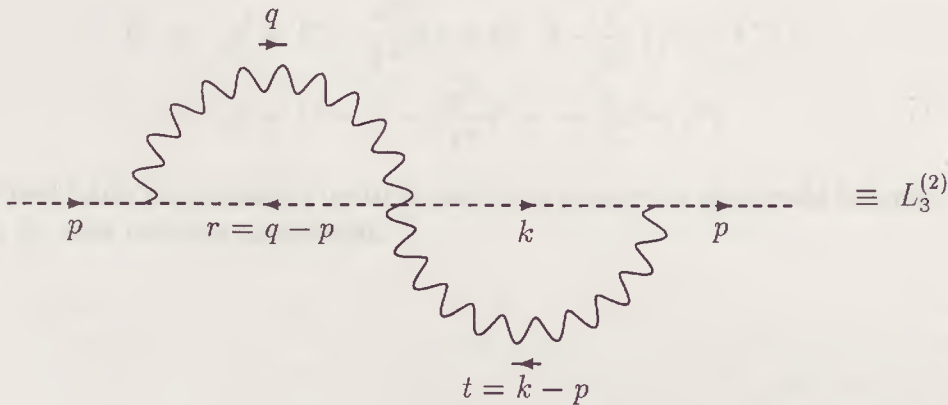


Figura 12: Correção radiativa da Auto Energia do Campo Escalar Correspondente ao Termo $L_3^{(2)}$.

Como para os outros gráficos, usando as regras de Feynman, podemos escrever esta contribuição como

$$L_3^{(2)} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^d q \, d^d k \, (igR) (2p - q)_\mu \frac{(-i)}{q^2} \left[g^{\mu\alpha} - \frac{1}{q^+} (q^\alpha n^\mu + q^\mu n^\alpha) \right] \frac{i}{k^2} \\ (2ig^2 R^2 g_{\alpha\beta}) \frac{(-i)}{t^2} \left[g^{\beta\nu} - \frac{1}{t^+} (t^\beta n^\nu + t^\nu n^\beta) \right] (igR) (p + k)_\nu \frac{i}{r^2} \quad (\text{F.5})$$

ou ainda

$$L_3^{(2)} = -\frac{2ig^4 R^4}{(2\pi)^4} \int d^d q \, d^d k \, A \, g_{\alpha\beta} \, B$$

onde

$$A = (2p - q)_\mu \left[g^{\mu\alpha} - \frac{1}{q^+} (q^\alpha n^\mu + q^\mu n^\alpha) \right] \\ = 2p^\alpha - \frac{n^\alpha}{q^+} [2p \cdot q - q^2] - 2\frac{p^+}{q^+} q^\alpha \\ = 2p^\alpha - \frac{n^\alpha}{q^+} [p^2 - r^2] - 2\frac{p^+}{q^+} q^\alpha \quad (\text{F.6})$$

e

$$B = p^\alpha + k^\alpha - \frac{n^\beta}{t^+} [(p + k) \cdot t] - \frac{t^\beta}{t^+} (p^+ + k^+) \\ = p^\beta + k^\beta - t^\beta - 2\frac{p^+}{t^+} t^\beta - \frac{n^\beta}{t^+} [k^2 - p^2] \quad (\text{F.7})$$

O resultado mostrado no texto do capítulo 4 pode ser mostrado fazendo-se $A \, g_{\alpha\beta} \, B$, sem maiores problemas.

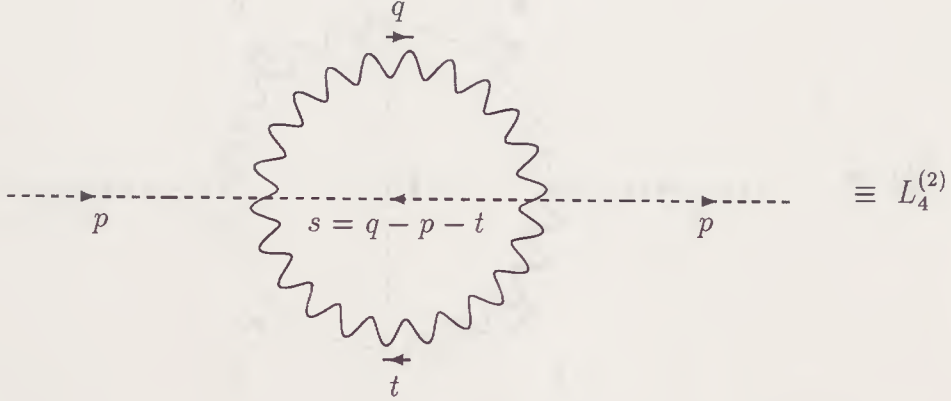


Figura 13: Correção radiativa da Auto Energia do Campo Escalar Correspondente ao Termo $L_4^{(2)}$.

Esse é o gráfico de onde obtemos mais diretamente o resultado apresentado.

$$L_4^{(2)} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^d q \left(i g^2 (R^2)_j^i g_{\mu\beta} \right) \frac{(-i)}{q^2} \left[g^{\mu\nu} - \frac{1}{q^+} (q^\mu n^\nu + q^\beta n^\nu) \right] \\ \left(i g^2 (R^2)_j^i g_{\nu\alpha} \right) \frac{(-i)}{t^2} \left[g^{\alpha\beta} - \frac{1}{t^+} (t^\alpha n^\beta + t^\beta n^\alpha) \right] \frac{i}{s^2} \quad (\text{F.8})$$

$$L_4^{(2)} = \frac{1}{(2\pi)^4} (i g^4 R^4) 4 (g_\nu^\nu - 2) \int d^d q d^d t \frac{1}{q^2 t^2 s^2}$$

À este gráfico está associado um fator de simetria $1/2$, que pode ser entendido como consequência das duas diferentes maneiras possíveis de construí-lo. Isso significa que se cortarmos as linhas de fótons e do campo escalar, existem duas diferentes maneiras de uni-las e reconstruir a figura. Para as outras contribuições calculadas este fator é igual a 1. Para entender melhor estes fatores de simetria, sugerimos consultar a referência [10].

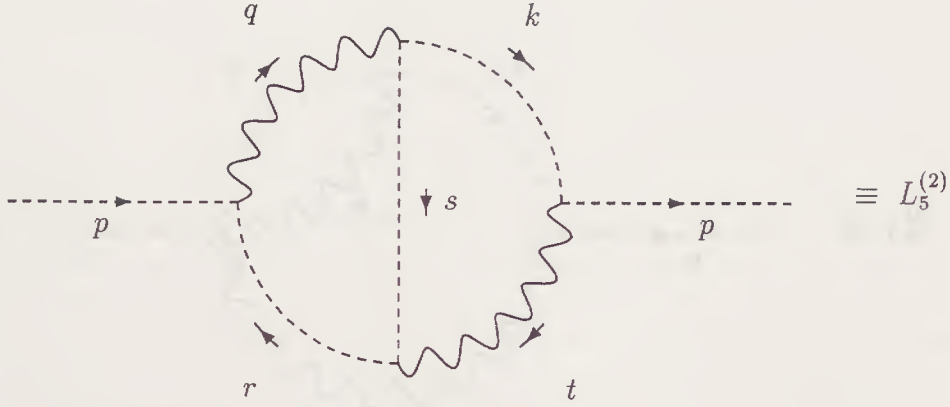


Figura 14: Correção radiativa da Auto Energia do Campo Escalar Correspondente ao Termo $L_5^{(2)}$.

$$L_5^{(2)} = \frac{ig^4}{(2\pi)^4} R^4 \int d^d q d^d k \frac{1}{q^2 r^2 s^2 t^2 k^2} A B$$

com

$$\begin{aligned} A &= (p-r)_\mu \left[g^{\mu\alpha} - \frac{1}{q^+} (q^\alpha n^\mu + q^\mu n^\alpha) \right] (k-s)_\alpha \\ &= 2p^2 + 2k^2 - 2t^2 - q^2 - 2\frac{p^+}{q^+} [p^2 + k^2 - s^2 - r^2] \\ &\quad - 2\frac{t^+}{q^+} [p^2 - r^2] \end{aligned} \quad (F.9)$$

e

$$\begin{aligned} B &= (k+p)_\nu \left[g^{\nu\beta} - \frac{1}{t^+} (t^\beta n^\nu + t^\nu n^\beta) \right] (s+r)_\beta \\ &= 2q^2 - 2p^2 - 2r^2 + t^2 + 2\frac{p^+}{t^+} [s^2 + k^2 - p^2 - r^2] \\ &\quad - 2\frac{q^+}{t^+} [k^2 - p^2] \end{aligned} \quad (F.10)$$

Para chegarmos ao resultado apresentado no texto precisamos, no máximo, usar as relações de simetria de (4.1) à (4.3).

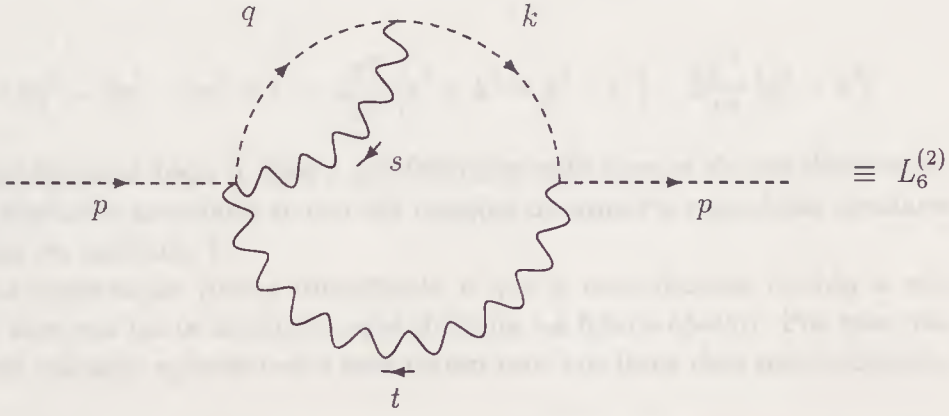


Figura 15: Correção radiativa da Auto Energia do Campo Escalar Correspondente ao Termo $L_6^{(2)}$.

$$L_6^{(2)} = -2 \frac{ig^4}{(2\pi)^4} R^4 \int d^d q \, d^d k \frac{r^2}{q^2 r^2 s^2 t^2 k^2} A g_{\alpha\mu} B$$

com

$$g_{\alpha\mu} A = (k - s)_\beta \left[g_\mu^\beta - \frac{1}{q^+} (q_\mu n^\beta + q^\beta n_\mu) \right]$$

e

$$B = (p + k)_\nu \left[g^{\nu\mu} - \frac{1}{t^+} (t^\mu n^\nu + t^\nu n^\mu) \right].$$

Usando-se o fato que podemos escrever

$$\text{i) } k - s = k - (q - k) = 2k - q = 2(t + p) - q = 2t + 2p - q, \quad e$$

$$\text{ii) } k + p = t + 2p$$

as equações acima têm como resultado

$$A = (2p - q + 2t)_\mu - \frac{1}{q^+} \left[(2p^+ - q^+ + 2t^+) q_\mu + (2q \cdot t + 2p \cdot q - q^2) n_\mu \right]$$

$$B = (2p + t)^\mu - \frac{1}{t^+} \left[(2p^+ + t^+) t^\mu + (2p \cdot t + t^2) n^\mu \right]$$

$$= 2q^2 - 2p^2 - 2r^2 + t^2 - 2\frac{p^+}{t^+} [s^2 + k^2 - p^2 - r^2] - 2\frac{q^+}{t^+} [k^2 - p^2]$$

Também aqui todo o mais a ser feito depende apenas de um desenvolvimento algébrico associado ao uso das relações de simetria e produtos escalares descritos no capítulo 4.

Uma observação muito importante é que a contribuição devido a este gráfico tem sua parte simétrica, que ilustrada na figura abaixo. Por esse motivo, nos cálculos apresentados esse termo tem um fator dois multiplicando-o.

Apêndice G

Algumas Integrais da Tabela

4.1

Mostramos na tabela 4.1 o resultado de algumas integrais que tomamos como referência, são elas U_{16} , U_{20} e U_3 . Mostraremos aqui os principais passos para solução de tais integrais.

G.1 Cálculo de U_{16}

$$\begin{aligned} U_{16} &= \int d^d q d^d k \frac{p^2 r^2}{q^2 r^2 s^2 t^2 k^2} \\ &= p^2 \int d^d q d^d k \frac{1}{q^2 (q-k)^2 (k-p)^2 k^2} \end{aligned} \quad (\text{G.1})$$

Usando o resultado da eq.(C.3) para a integração na variável q temos

$$\begin{aligned} U_{16} &= p^2 \int d^{2\omega} k \frac{1}{(k-p)^2 k^2} \left[i (-\pi)^\omega (k^2)^{\omega-2} \frac{\Gamma(2-\omega) \Gamma(\omega-1) \Gamma(\omega-1)}{\Gamma(2\omega-2)} \right] \\ &= p^2 i (-\pi)^\omega \frac{\Gamma(2-\omega) \Gamma(\omega-1) \Gamma(\omega-1)}{\Gamma(2\omega-2)} \int d^{2\omega} k \frac{1}{(k-p)^2 (k^2)^{3-\omega}} \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

onde podemos escrever

$$U_{16} = p^2 E_1 \frac{1}{(p^2)^{\omega-2}} \int d^{2\omega} k \frac{1}{(k-p)^2 (k^2)^{3-\omega}}$$

com E_1 dado pela eq.(C.6) e

$$E_2(p) = \frac{1}{(p^2)^{\omega-2}} \int d^{2\omega} k \frac{\Gamma(4-\omega)}{\Gamma(3-\omega)} \int_0^1 dx \frac{(1-x)^{2-\omega}}{[k^2 - p^2 x(1-x)]^{4-\omega}}$$

se usarmos, novamente o resultado da eq.(C.3) para a solução da integral em k e a definição da função beta dada pela eq.(C.4) para a integral em x teremos

$$E_2(p) = (p^2)^{\omega-2} i (-\pi)^\omega \frac{\Gamma(4-2\omega) \Gamma(2\omega-3) \Gamma(\omega-1)}{\Gamma(3-\omega) \Gamma(3\omega-4)} \quad (\text{G.3})$$

da mesma forma como fizemos para E_1 , tomando a expansão para as funções gama e no limite $\omega \rightarrow 2$

$$E_2(p) = i (-\pi)^2 \left[\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln(-\pi p^2) + \frac{3}{2} - \frac{\gamma^E}{2} + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \quad (\text{G.4})$$

Logo, podemos escrever

$$U_{16} = p^2 E_1 E_2. \quad (\text{G.5})$$

G.2 Cálculo de U_{20}

Na realidade este é um resultado bastante direto, basta escrevermos

$$U_{20} = \int d^d q d^d k \frac{p^2 s^2}{q^2 r^2 s^2 t^2 k^2} \quad (\text{G.6})$$

como

$$U_{20} = p^2 \int d^d q d^d k \frac{1}{q^2 (q-p)^2 k^2 (k-p)^2} \quad (\text{G.7})$$

e compararmos com a eq.(C.1) para escrevermos

$$U_{20} = p^2 (E_1)^2. \quad (\text{G.8})$$

G.3 Cálculo de U_3

$$\begin{aligned} U_3 &= \int d^d q d^d k \frac{k^2 r^2}{q^2 r^2 s^2 t^2 k^2} \\ &= \int d^d q d^d k \frac{1}{q^2 (q-k)^2 (k-p)^2} \end{aligned} \quad (G.9)$$

As técnicas utilizadas para resolver esta integral não apresentam nenhuma novidade em relação às utilizadas para resolver U_{16} . Integrando sobre a variável q temos

$$U_3 = i(-\pi)^\omega \frac{\Gamma(\omega-1) \Gamma(\omega-1)}{\Gamma(2\omega-2)} \Gamma(3-\omega)$$

$$\int d^{2\omega} k \int_0^1 dx \frac{(1-x)^{1-\omega}}{[k^2 - p^2 x(1-x)]^{3-\omega}}$$

Resolvendo-se a integral em relação a k , e escrevendo a integral em relação a x usando-se a função beta, temos

$$U_3 = -i(-\pi)^\omega (p^2)^{3-2\omega} \frac{\Gamma(3-2\omega) \Gamma(2\omega-2) \Gamma(\omega-1)}{\Gamma(2-\omega) \Gamma(3\omega-3)}.$$

As funções beta da equação acima podem ser reescritas de forma que tenhamos

$$U_3 = \frac{(\omega-2)}{(3\omega-4)} U_{16}. \quad (G.10)$$

G.4 A Respeito das Outras Integrais

Além das integrais resolvidas neste apêndice, existem outras identidades apresentadas na tabela 4.1, cujas técnicas utilizadas são as mesmas já mostradas até aqui.

A idéia básica é que integrais do tipo Y_n e Z_n devem ser simplificadas até as formas já resolvidas $E_1(p)$ e $K(p)$.

Faremos aqui uma breve análise dos resultados mostrados para integrais na forma U_n .

Usando as propriedades de simetrias, decritas de (4.1) à (4.3) ou em relação à variável de integração, podemos escrever

- i) $U_1 = U_6 = U_{10} = U_{13}$,
- ii) $U_2 = U_{11}$,
- iii) $U_3 = U_8$,
- iv) $U_4 = U_7$,
- v) $U_5 = U_9 = U_{12} = U_{14}$,
- vi) $U_{16} = U_{17} = U_{18} = U_{19}$,
- vii) U_{15} ,
- viii) U_{21} .

Os resultados iii e vi foram mostrados nas seções anteriores deste apêndice. As integrais do tipo ii são resolvidas usando a fórmula de Feynman, mostrada na eq.(C.2), e o resultado da eq.(C.3), o que nos leva ao resultado zero para tais integrais. Os resultados de iv e v são zero pois são do tipo tadpole, que descartamos inicialmente. A integral mostrada em viii é finita e podemos ver isso de uma maneira bastante simples e direta usando contagem de potências. Os resultados de i e vii, apresentam algumas novidades na forma como foram escritas na tabela 4.1. Mostraremos aqui um deles, sendo que o outro não apresenta nenhuma dificuldade uma vez descritos os procedimentos e técnicas empregados. Vejamos o resultado para a integral U_{15}

$$\begin{aligned}
 U_{15} &= \int d^d q d^d k \frac{(s^2)^2}{q^2 r^2 s^2 t^2 k^2} \\
 &= \int d^d q d^d k \frac{(q-k)^2}{q^2 (q-p)^2 k^2 (k-p)^2} \quad (G.11)
 \end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de variável do tipo $q \rightarrow q+k$ e usando a fórmula de Feynman, eq.(C.2), para a integração em q , temos

$$U_{15} = \int d^d k \frac{1}{k^2 (k-p)^2} \int d^d q \int_0^1 dx \frac{[q-k+p(1-x)]^2}{[q^2 + p^2 x(1-x)]^2} \quad (G.12)$$

Desenvolvendo o termo quadrático no numerador, podemos ver que a integração na variável q do termo relativo ao produto, $-2(k.p)(1-x)$, é igual a zero. Isso devido ao fato de integrarmos uma função ímpar num intervalo simétrico em relação à origem. Resolvendo a integração na variável em q para os termos quadrados desta expansão, dados por

$$q^2 + [k - p(1 - x)]^2, \quad (\text{G.13})$$

através do resultado mostrado na eq.(C.3), e identificando as integrais em x com as funções beta, conforme fizemos anteriormente, temos

$$\begin{aligned} U_{15} &= i(-\pi)^\omega \int d^d k \frac{1}{k^2 (k-p)^2} \left\{ (p^2)^{\omega-1} \frac{\Gamma(1-\omega) \Gamma(\omega+1) \Gamma(\omega)}{\Gamma(2\omega)} \right. \\ &= \Gamma(2-\omega) (p^2)^{\omega-2} \left[2k^2 \frac{\Gamma(\omega-1) \Gamma(\omega)}{\Gamma(2\omega-1)} + p^2 \frac{\Gamma(\omega-1) \Gamma(\omega+1)}{\Gamma(2\omega)} \right. \\ &= \left. \left. - (p^2 + k^2 - t^2) \frac{\Gamma(\omega-1) \Gamma(\omega)}{\Gamma(2\omega-1)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{G.14})$$

onde substituímos o produto escalar $p.k$, do segundo termo da eq.(G.13), por $p^2 + k^2 - t^2$, conforme mostrado no capítulo 4. Na equação acima o primeiro e terceiro termo cancelam-se. Podemos escrevê-la de uma maneira mais compacta como

$$\begin{aligned} U_{15} &= i(-\pi)^\omega \frac{\Gamma(2-\omega) \Gamma(\omega-1) \Gamma(\omega)}{\Gamma(2\omega-1)} \left\{ \int d^d k \frac{(p^2)^{\omega-2}}{(k-p)^2} \right. \\ &\quad \left. - \int d^d k \frac{(p^2)^{\omega-1}}{k^2 (k-p)^2} + \int d^d k \frac{(p^2)^{\omega-2}}{k^2} \right\} \end{aligned}$$

onde o primeiro e último termos da equação acima são do tipo tadpole, e portanto descartadas. A integral que sobra é do tipo E_1 , usando a propriedade da função gama que

$$\Gamma(\omega) = (\omega-1) \Gamma(\omega-1), \quad (\text{G.15})$$

para escrever $\Gamma(2\omega-1)$ e $\Gamma(\omega)$ temos

$$U_{15} = -p^2 E_1 \left[i(-\pi)^\omega (p^2)^{\omega-2} \frac{1}{2} \frac{\Gamma(2-\omega) \Gamma(\omega-1) \Gamma(\omega-1)}{\Gamma(2\omega-2)} \right]$$

que é, comparando com a eq.(C.6)

$$U_{15} = -\frac{1}{2}p^2 E_1 E_1 = -\frac{1}{2}U_{20} .$$

De forma análoga podemos encontrar

$$U_1 = \frac{1}{2} (U_{16} - U_3) .$$

Só para mostrarmos a identificação que deve-se fazer a respeito das integrais do tipo Y_n e Z_n , escreveremos

$$\begin{aligned} Y_{20} &= \int d^d q d^d k \frac{p^+}{q^+} \frac{p^2 s^2}{q^2 r^2 s^2 t^2 k^2} \\ &= \int d^d q d^d k \frac{p^+}{q^+} \frac{1}{q^2 (q-p)^2 k^2 (k-p)^2} \end{aligned} \quad (G.16)$$

$$Y_{20} = \int d^d q d^d k \frac{p^+}{q^+} \frac{p^2 s^2}{q^2 r^2 s^2 t^2 k^2} = \int d^d q d^d k \frac{p^+}{q^+} \frac{1}{q^2 (q-p)^2 k^2 (k-p)^2}$$

É fácil ver, à partir das eq.(C.1) e eq.(C.8) que podemos escrever

$$Y_{20} = p^2 E_1(p) K(p) .$$

tomando apenas a parte divergente de E_1 , ver eq.(C.7), na qual estamos particularmente interessados teremos

$$Y_{20} = 2i p^2 \pi^2 \frac{1}{\epsilon} E_1(p) .$$

Um resultado bastante interessante é $Z_{16} - Z_{17} = f$ pode ser encontrado, resolvido com detalhes, na referência[18].

À partir dos resultados mostrados neste apêndice e usando as técnicas desenvolvidas ao longo deste trabalho é possível completar, sem maiores dificuldades, os demais resultados da tabela 4.1, o que não faremos aqui de forma que esta não se torne uma leitura cansativa.

Bibliografia

- [1] P. A. M. Dirac - Rev. Mod. Phys., 17, (1945) 195.
- [2] P. A. M. Dirac - Physik. Zeit. der Sowjet., 3, (1933) 1.
- [3] R. P. Feynman - Rev. Mod. Phys., 20, (1948) 267.
- [4] W. Pauli, F. Villars - Rev. Mod. Phys., 21, (1949) 434.
- [5]
 - E. R. Speer - J. Math. Phys., 9, (1968) 1404.
 - E. R. Speer, " Generalized Feynman Amplitudes ", Princeton University, (1969).
 - C. G. Bollini, J. J. Giambiagi - Nuovo Cimento, B12, (1972) 20.
- [6]
 - C. G. Bollini, J. J. Giambiagi - Nuovo Cimento, B12, (1972) 20.
 - J. F. Ashmore - Lett. Nuovo Cimento, 4, (1972) 289.
 - G. t 'Hooft, M. Veltman - Nucl. Phys. B63, (1973) 277.
- [7] G. t 'Hooft - Nucl. Phys. B61, (1973) 455.
- [8] G. Leibbrandt - Rev. Mod. Phys., 47, (1975) 849-876.
- [9] Referências Básicas :
 - C. Nash- " Relativistic Quantum Fields ", Academic Press (197)
 - S. Pokorski - " Gauge Fields Theories ", Cambridge University Press (1987)
 - P. Ramond - " Field Theory : A Modern Primer ", The Benjamin /Cummings Publishing Company (1981)
 - C. Itzykson, J. B. Zuber - " Quantum Field Theory ", McGraw Hill (1980).
- [10] L. H. Rider - " Quantum Field Theory ", Cambridge University Press (1985).
- [11] G. Leibbrandt *et al.* - Phys. Lett., 140B, (1984) 463.

- [12] S. Mandelstam - Nucl. Phys. B213, (1983) 149.
- [13] D. M. Capper, J. J. Dulwich, M.J. Litvak - Nucl. Phys. B241, (1984) 463-476.
- [14] G. Leibbrandt - Phys. Rev. D, 29, (1984) 1699-1708.
- [15] G. Leibbrandt - Rev. Mod. Phys., 59, (1987) 1067-1119.
- [16] D. M. Capper, D. R. T. Jones - Phys. Rev. D, 31, (1985).
- [17] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik - " Table of Integrals, Series, and Products " - Academic Press (1965).
- [18] A.T. Suzuki - Thesis of Doctor of Philosophy, University of London, (1976).

