



IFT

**Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-M.003/01

Soluções sóliton do modelo de Toda su(3) afim acoplado a campos de matéria

André Gimenez Bueno

Orientador

Luiz Agostinho Ferreira



Março de 2001

Agradecimentos

Ao Profs. L. A. Ferreira pela orientação e apoio e J. F. Gomes pela cooperação ao longo desse último ano e ao Prof. A. Razumov pelos esclarecimentos numa etapa crucial do trabalho.

Finalmente à FAPESP pelo apoio financeiro.



Resumo

Nesta dissertação calculamos as soluções de um e dois sólitons modelo de Toda com álgebra de Kac-Moody afim $su(3)$ acoplado a campos de matéria assim como o time delay para o caso 2-sóliton. As soluções são obtidas a partir de uma combinação dos métodos de dressing e Hirota. Há ao todo quatro campos escalares e seis espinores de Dirac. Nós mostramos que, após uma redução Hamiltoniana, a corrente topológica (envolvendo somente escalares) é proporcional à corrente de Nöther $U(1)$ (envolvendo somente espinores) e isso conduz a um confinamento dos espinores dentro dos sólitons.

Palavras Chaves: Sólitons, modelos integráveis, modelos de Toda, álgebras afins.

Áreas do conhecimento: Física das Partículas Elementares e Campos; Métodos Matemáticos em Física; Sistemas Integráveis

Abstract

We calculate the one and two soliton solutions for the Toda model coupled to matter fields in the case of an affine $su(3)$ Kac-Moody algebra, as well as the time delay in the 2-soliton case. The solutions are obtained using a combination of the dressing and Hirota methods. There are altogether four scalar fields and six Dirac spinors. We show that, after a Hamiltonian reduction, the topological current (involving scalars only) is, up to a non-vanishing factor, equal to the $U(1)$ Nöther current (involving the spinors only) and this leads to a confinement of the spinors inside the solitons.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Não Linearidade	1
1.2	Integrabilidade (Segundo Liouville)	2
1.3	Modelos integráveis em duas dimensões	3
1.4	Sólitons e teorias de campo	4
1.5	Transformações <i>Dressing</i>	7
1.6	Funções tau	11
2	O modelo de Toda afim $su(3)$ acoplado a campos de matéria	12
2.1	Transformações <i>Dressing</i> e método de Hirota	17
2.2	A carga topológica	28
2.3	As massas das partículas fundamentais e sólitons	29
2.4	Os time delays	31
3	As Soluções Sólitons	34
3.1	Soluções de 1-sóliton	34
3.1.1	1-sóliton de espécie α_1	34
3.1.2	1-sóliton de espécie α_2	35
3.1.3	1-sóliton de espécie α_3	35
3.2	Soluções 2-sóliton	36
3.2.1	2-sóliton de espécies α_1/α_1	36
3.2.2	2-sóliton de espécies α_2/α_2	38
3.2.3	2-sóliton de espécies α_3/α_3	39
3.2.4	2-sóliton de espécies α_1/α_2	41
3.2.5	2-sóliton de espécies α_1/α_3	43
3.2.6	2-sóliton de espécies α_2/α_3	45
4	Conclusões	48
5	Apêndices	50
.1	A algebra de Kac-Moody afim $su(3)$	50

Capítulo 1

Introdução

1.1 Não Linearidade

Pode-se dizer que, do ponto de vista físico, o assunto desta tese são as teorias de campo não lineares que possuem um alto grau de simetria. É justamente tal grau de simetria que permite a obtenção de resultados exatos como soluções, cargas conservadas e assim por diante. Estaremos essencialmente interessados em teorias que admitem uma representação de suas equações de movimento em termos da condição de curvatura nula. Em particular, estas teorias são todas integráveis. Muitos fenômenos naturais são descritos por equações diferenciais não lineares e portanto é natural esperar que as técnicas para obtenção de soluções sejam de interesse para diversas áreas de Física, Matemática, etc. Em geral, um dado sistema pode ser descrito em termos de modos normais. Estes são modos de vibração caracterizados por uma dada frequência. Se o sistema é linear, então ao excitarmos um dado modo o sistema evolui temporalmente mantendo toda energia naquele modo. Por outro lado, se o sistema é não-linear, a energia começa se distribuir para outros modos. Dito de forma equivalente há um acoplamento entre os modos do sistema. É claro que o conceito de linearidade de um sistema pode ser formulado de maneira puramente matemática. Se o sistema é dado por equações diferenciais (por exemplo) e se para quaisquer duas soluções u_1 e u_2 , então $\alpha u_1 + \beta u_2$ é também solução, para quaisquer α e β em algum corpo local \mathbb{K} (usualmente $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) então o sistema é linear; ou seja, as soluções formam um espaço vetorial sobre \mathbb{K} . Por exemplo, as equações de onda e de Schrödinger são lineares. Muitos sistemas não-lineares são abordados por métodos aproximados de solução. No entanto, os sistemas que apresentam soluções sólon possuem um grau de simetria elevado e podem ser tratados exatamente em muitos casos. Fisicamente, podemos caracterizar os sólons da seguinte forma. Sólon é uma solução das equações de movimento que satisfaz as seguintes condições:

1. se propaga com velocidade constante sem mudar a forma

2. sem haver dissipação de energia
3. quando duas soluções se espalham, elas mantêm sua forma e o único efeito do espalhamento é o deslocamento de sua posição em relação aquela que teria caso não houvesse o espalhamento

Para que tal comportamento seja possível é necessário que haja um número muito grande (as vezes infinito) de quantidades conservadas. Estas soluções restringem o espaço de fase de tal forma que a solução apresenta grande estabilidade. Quando existem cargas topológicas associadas ao sóliton, dizemos que o sóliton é topológico. Os sólitons foram observados pela primeira vez por J. Scott Russel em 1834 em um canal entre Glasgow e Edinburgh. Era um onda “grande” mais rápida que as ondas comuns e não se dispersava. Os sólitons observados por Russel são soluções da equação de Korteweg-De Vries (KdV) para ondas em águas rasas proposta em 1895. Os sólitons KdV se espalham sem haver destruição. O único efeito é o time-delay. Este comportamento levou à interpretação dos sólitons como partículas. Esta interpretação tem um papel importante em Teorias de Campos Relativísticas. Em muitas destas teorias as soluções clássicas de sólitons correspondem a partículas do espectro quântico. Além disso, em geral, o acoplamento dos sólitons é inversamente proporcional à constante de acoplamento das partículas fundamentais, ou seja, os sólitons tendem a ser livres no setor de acoplamento forte. Em muitos casos temos portanto uma “dualidade” entre partículas e sólitons envolvendo os setores forte e fraco do acoplamento. Isto pode ter importância na QCD, e algumas teorias de gauge supersimétricas exibem tal comportamento.

1.2 Integrabilidade (Segundo Liouville)

Considere um sistema Hamiltoniano com N graus de liberdade (p_i, q_i) , onde $1 \leq i \leq N$. Se este sistema possuir um número de quantidades conservadas igual a N e elas estiverem em involução, ou seja, $[I_m, I_n] := (\partial_{p_i} I_n)(\partial_{q_i} I_m) - (\partial_{p_i} I_m)(\partial_{q_i} I_n) = 0$ então existe uma transformação canônica $(p_i, q_i) \rightarrow (F_i, \omega_i)$ tal que [3]

1. $F_i = F_i(I)$
2. A Hamiltoniana H é função de F_i somente. Portanto os ω_i 's são coordenadas cíclicas e assim o sistema é integrável por quadraturas

$$\begin{aligned} \frac{dF_i}{dt} &= -\partial_{\omega_i} H = 0 \\ \frac{d\omega_i}{dt} &= \partial_{F_i} H = S(F_i) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Das expressões acima segue imediatamente que $\omega_i = ct + c_i$

Assim como no teorema de Liouville acima é em geral difícil achar a transformação canônica que conduz para as variáveis de ângulo-ação, no caso das teorias que têm soluções soliton é também em geral difícil encontrar as simetrias associadas com as leis de conservação. Por isso, foram desenvolvidas ao longo das últimas décadas técnicas exatas mas não necessariamente baseadas nos formalismos Lagrangeano ou Hamiltoniano, que também permitem construir quantidades conservadas e soluções. De uma forma ou de outra, todas elas estão baseadas em um problema linear associado, como será visto na discussão sobre o método dressing. De fato, a grande maioria das teorias que apresentam soluções soliton possuem uma representação de suas equações de movimento em termos da equação de Lax (ou condição de curvatura nula). A equação de Lax é da forma [14]

$$\frac{dL}{dt} = [M, L] \quad (1.2)$$

Uma consequência imediata é que $I_n := \text{Tr}(L^n)$, $n \in \mathbb{N}$ são quantidades conservadas, $\frac{d}{dt}\text{Tr}(L^n) = \text{Tr}([M, L^n]) = 0$, pois ambos a derivada e Lie bracket são derivações. Note que, tomando-se $x^0 = t$, $x^1 = x$ e $A_1 = L$, $A_0 = -M$ e todas as quantidades independentes de x , obtemos a partir da equação de curvatura nula (ver abaixo), a equação de Lax.

1.3 Modelos integráveis em duas dimensões

Nesse caso o ponto de partida é a equação de curvatura nula [21]

$$[\partial_\mu + A_\mu, \partial_\nu + A_\nu] = 0 \quad (1.3)$$

ou

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = 0 \quad (1.4)$$

onde $\mu, \nu = 0, 1$ Esta equação é invariante sob as transformações de gauge

$$A_\mu \rightarrow g A_\mu g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1} \quad (1.5)$$

onde g são elementos de uma representação matricial de um grupo de Lie e A_μ são elementos de uma representação matricial de uma álgebra de Lie. De fato, a equação (1.3) é uma lei de conservação, que, contudo, em geral leva a quantidades conservadas não-locais. Existem, no entanto, casos nos quais podemos obter invariantes locais. Se existe uma matriz g que transforma as matrizes A_μ em diagonais

$$g A_\mu g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1} := a_\mu = \text{matriz diagonal} \quad (1.6)$$

Daí segue de (1.3) que

$$[\partial_\mu + A_\mu, \partial_\nu + A_\nu] = g(\partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu)g^{-1} = 0 \quad (1.7)$$

Definimos agora $j^\mu = \epsilon^{\mu\nu} a_\nu$ ou seja $j^0 = a_1$ e $j^1 = -a_0$

Segue diretamente das duas equações acima que

$$\partial_0 a_1 - \partial_1 a_0 = \partial_0 j^0 + \partial_1 j^1 = 0 \quad (1.8)$$

Assim temos $\partial_\mu j^\mu = 0$ A carga

$$Q := \int_{\mathbb{R}} j^0 dx \quad (1.9)$$

é conservada,

$$\frac{dQ}{dt} = 0, \quad (1.10)$$

desde que as condições de fronteira em $x = \pm\infty$ sejam devidamente impostas. Além disso, fica claro da construção acima, que o número de cargas conservadas é igual à dimensão das matrizes diagonais, ou seja, igual à dimensão da representação. Um modelo bem conhecido é o de Sine-Gordon. Neste caso temos

$$\begin{aligned} A_+ &= i\partial_+ \phi T_3^0 + e^{i\phi} T_+^0 + e^{-i\phi} T_-^1 \\ A_- &= -i\partial_- \phi T_3^0 + e^{i\phi} T_-^0 + e^{-i\phi} T_+^{-1} \end{aligned} \quad (1.11)$$

onde $T_\pm^n := \frac{1}{2}(T_1^n \pm iT_2^n)$, $i, j, k = 1, 2, 3$ e $m, n \in \mathbb{Z}$

ou seja, os T's são geradores da álgebra de Kac-Moody afim $su(2)$:

$$[T_i^m, T_j^n] = i\epsilon_{ijk} T_k^{m+n} + Cm\delta_{m+n,0} \quad (1.12)$$

Então a equação de curvatura nula implica que o campo ϕ satisfaz a equação de Sine-Gordon com $C = 0$, $\beta = 2$, $m^2 = -4$:

$$\frac{1}{4}(\partial_t^2 - \partial_x^2)\phi = -i(e^{2i\phi} - e^{-2i\phi}) = 2\sin 2\phi \quad (1.13)$$

onde usamos $x_\pm := x \pm t$

1.4 Sólitons e teorias de campo

Muitos aspectos das teorias de campo de interesse em Física de altas energias, assim como em outras áreas da Física, não podem ser tratados de maneira perturbativa. A estrutura do vácuo das teorias de gauge e o confinamento de quarks e gluons são alguns exemplos de tais aspectos. Por estas razões é de crucial importância o desenvolvimento de técnicas não-perturbativas para o estudo de teorias de campo. Talvez seja correto dizer que de uma forma ou de outra as soluções clássicas tipo sóliton estão presentes em quase todos os desenvolvimentos não-perturbativos. Os

recentes avanços no entendimento do setor de acoplamento forte das teorias de gauge supersimétricas [19] envolvem o conceito de dualidade[16]. Este por sua vez está intimamente relacionado à relação entre os papéis desempenhados pelas partículas fundamentais e os sólitons. Especificamente, o fenômeno que ocorre é o seguinte: no regime de acoplamento forte as partículas fundamentais da teoria (quarks e glúons) formam estados fortemente ligados que apresentam um *screening* da interação. Desta maneira os estados ligados (hadrons) interagem fracamente entre si. Para teorias com liberdade assintótica o regime de acoplamento forte ocorre a baixas energias e portanto a distâncias grandes. De fato, para distâncias maiores que alguns Fermi a interação entre nucleons é pequena. Nas teorias com dualidade os estados ligados das partículas fundamentais, no regime de acoplamento forte, correspondem às excitações fundamentais dos sólitons. Portanto, é possível descrever esta mesma teoria quântica de campos como o setor de acoplamento fraco de um outro Lagrangeano onde as excitações fundamentais são os sólitons. Acredita-se que esta dualidade entre os setores de acoplamentos fraco e forte de dois Lagrangeanos, descrevendo a mesma teoria, deva ter um papel fundamental no entendimento das interações fortes nucleares (QCD).

O desenvolvimento de técnicas não-perturbativas em quatro dimensões é muito difícil e modelos bi-dimensionais têm um papel importante neste estudo.

A teoria de sólitons em duas dimensões está bastante desenvolvida, e poderíamos dizer que os métodos de construção de soluções clássicas solitônicas atingiram seu estado-de-arte. Conhecemos exatamente as estruturas básicas necessárias, que são [17, 18, 8]

1. A existência de uma representação de curvatura nula para as equações do modelo

$$[\partial_\mu + A_\mu, \partial_\nu + A_\nu] = 0; \quad \mu, \nu = 0, 1 \quad (1.14)$$

onde os potenciais A_μ tomam valores em uma álgebra infinita (Kac-Moody) [10].

2. Uma gradação da álgebra infinita \mathcal{G} de tal maneira que os potenciais tomem valores em subespaços de gradação definida

$$\mathcal{G} = \bigoplus_n \mathcal{G}_n; \quad [\mathcal{G}_m, \mathcal{G}_n] \subset \mathcal{G}_{m+n}; \quad n, m \in \mathbb{Z} \quad (1.15)$$

e

$$A_\mu = \sum_{n=N_-}^{N_+} A_\mu^n; \quad A_\mu^n \in \mathcal{G}_n \quad (1.16)$$

com N_- (N_+) sendo um número inteiro não positivo (não negativo).

3. Existência de soluções de vácuo tais que os potenciais A_μ avaliados nestas, tomam valores em uma subálgebra abeliana (a menos de termo central). Esta

é em geral uma álgebra de osciladores

$$[b_m, b_n] = c m \delta_{m+n,0} \quad (1.17)$$

Além disso as componentes de A_μ na direção dos b_m 's devem ser constantes, sendo somente a componente na direção do termo central c dependente do espaço tempo

$$A_\mu^{(\text{vac.})} = \sum_n a_\mu^n b_n + f_\mu(x) c := \Lambda_\mu + f_\mu(x) c \quad (1.18)$$

com a_μ^n 's constantes.

4. O espectro dos sólitons é determinado pelos autovalores e autovetores dos operadores Λ_μ

$$[\Lambda_\mu, F_\omega] = \omega_\mu F_\omega \quad (1.19)$$

onde os autovalores ω_μ determinam a largura (massa) e a velocidade do sóliton.

A construção das soluções solitônicas pode ser feita de várias maneiras mas do nosso ponto de vista a mais apropriada é o método de *dressing* [20]. Este consiste em utilizar a simetria de gauge de (1.14)

$$A_\mu \rightarrow g A_\mu g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1} \quad (1.20)$$

juntamente com a gradação de \mathcal{G} . Considere um elemento constante h do grupo obtido pela exponenciação de \mathcal{G} . Como A_μ é uma conexão chata, podemos escrever

$$A_\mu = -\partial_\mu T T^{-1} \quad (1.21)$$

onde T é um elemento do mesmo grupo que h . Utilizando a gradação de \mathcal{G} fazemos a decomposição generalizada de Gauss

$$T h T^{-1} = (T h T^{-1})_{<0} (T h T^{-1})_0 (T h T^{-1})_{>0} \quad (1.22)$$

onde $()_{<0,0,>0}$ indica a parte do elemento obtida pela exponenciação dos elementos de \mathcal{G} com graus $< 0, 0, > 0$ respectivamente. Definimos agora

$$\begin{aligned} T^h &:= (T h T^{-1})_{<0}^{-1} T h \\ &= (T h T^{-1})_0 (T h T^{-1})_{>0} T \end{aligned} \quad (1.23)$$

onde a segunda igualdade é consequência de (1.22). Introduzimos agora a conexão

$$A_\mu^h := -\partial_\mu T^h T^{h^{-1}} \quad (1.24)$$

Como A_μ^h é da forma puro gauge ela satisfaz a condição de curvatura nula (1.14). Além disso como T^h é escrito de duas formas diferentes, envolvendo na primeira a componente de grau negativo de $T^h T^{-1}$, e na segunda as componentes de grau zero e positivo. Isto implica que A_μ^h tem a mesma decomposição que A_μ em termos dos subespaços de graus definidos (1.16). Resumindo, a transformação de dressing (1.23) faz um mapeamento de soluções em soluções. Se conhecermos uma dada solução do problema (1.14) correspondendo a um elemento T_0 , então podemos construir uma órbita de soluções através de (1.23). A cada escolha de h teremos uma solução. Os sólitons correspondem às transformações dressing feitas a partir das soluções de vácuo mencionadas acima, e com a seguinte escolha de h [17, 18, 8]

$$h = e^{F_{\omega_1}} e^{F_{\omega_2}} \dots e^{F_{\omega_n}} \quad (1.25)$$

onde F_{ω_j} são os autovetores de Λ_μ em (1.19), e n denota o número de sólitons.

De fato, como $[\Lambda_\mu, \Lambda_\nu] \sim c$, segue que os potenciais de vácuo (1.18) podem ser escritos como

$$A_\mu^{\text{vac.}} := -\partial_\mu T^{\text{vac.}} T^{\text{vac.}-1} \quad \text{com} \quad T^{\text{vac.}} = e^{x^\mu \Lambda_\mu + \rho c} \quad (1.26)$$

Portanto, se consideramos a solução de 1-sóliton com $h = e^{F_\omega}$, obtemos, utilizando (1.19)

$$T^{\text{vac.}} h T^{\text{vac.}-1} = \exp\left(e^{\omega_\mu x^\mu} F_\omega\right) \quad (1.27)$$

e a dependência espaço-temporal é realmente da forma $\gamma(x - vt)$, com a largura γ e velocidade v determinadas por ω_μ .

Um outro ingrediente importante na construção dos sólitons é o conceito de representações integráveis das álgebras de Kac-Moody. Estas são aquelas representações onde os operadores F_{ω_j} são nilpotentes, i.e., existe um inteiro n_j tal que $(F_{\omega_j})^l = 0$, para $l > n_j$. Isto leva ao conceito de funções τ , muito utilizadas na teoria de sólitons. Estas são valores esperados de certos operadores nas representações integráveis da forma

$$\tau^X := \langle \lambda | X T^{\text{vac.}} h T^{\text{vac.}-1} | \lambda \rangle \quad (1.28)$$

onde $X \in \mathcal{G}$ são elementos escolhidos de maneira especial para parametrizar os campos da teoria em termos das funções τ , e λ é o peso máximo da representação integrável em questão.

1.5 Transformações Dressing

Essas são transformações que mapeiam uma solução do problema linear em outra. Transformações dressing formam um grupo sob a operação de composição de transformações como a operação do grupo. Temos então a ação do grupo de transformações

dressings no conjunto de soluções do problema. Mais especificamente, as transformações dressing podem ser descritas da seguinte maneira.

Hierarquias de equações (diferenciais) integráveis podem ser descritas por meio de um sistema associado de primeira ordem:

$$\mathcal{L}_N T = 0, \quad (1.29)$$

onde \mathcal{L}_N são operadores de Lax da forma

$$\mathcal{L}_N := \partial_{t_N} - A_N \quad (1.30)$$

e as variáveis t_N são os vários “tempos” da hierarquia. As condições de integrabilidade para o sistema acima são então dadas por:

$$[\mathcal{L}_N, \mathcal{L}_M] = 0 \quad (1.31)$$

que é equivalente à formulação em termos da curvatura nula. De fato, a relação entre as soluções das eqs. de curvatura nula e do problema linear associado é :

$$A_N = \partial_{t_N} T T^{-1} \quad (1.32)$$

São dadas uma álgebra de Kac-Moody \mathcal{G} e uma gradação s considere operadores de Lax da forma acima onde os potenciais A_N podem ser escritos da forma $A_N = \sum_{i=N_-}^{N_+} A_{N,i}$ onde $A_{N,i} \in \mathcal{G}_i(s)$ e onde N_- e N_+ são, respectivamente, inteiros não positivos e não negativos. A única restrição para estes potenciais é que a hierarquia correspondente admita soluções de vácuo tais que, nessas soluções, os potenciais têm a forma:

$$A_N^{\text{vac.}} = \sum_{i=N_-}^{N_+} c_N^i b_i + \rho_N(t)c := \varepsilon_N + \rho_N(t)c \quad (1.33)$$

Na equação acima c é o termo central da álgebra \mathcal{G} e $b_i \in \mathcal{G}_i(s)$ são os geradores da subálgebra $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ definido por:

$$\mathcal{H} = \{b_i \in \mathcal{G}_i(s), i \in E \subset \mathbb{Z} | [b_i, b_j] = i\beta_i c \delta_{i+j}\} \quad (1.34)$$

onde $\beta_i \in \mathbb{C}$ e $\beta_{-i} = \beta_i$ e $E \subset \mathbb{Z}$. Além disso, $c_N^i \in \mathbb{C}$ e $\rho_N(t)$ são funções complexas dos tempos t_N as quais satisfazem às seguintes equações :

$$\partial_{t_M} \rho_N - \partial_{t_N} \rho_M = \sum_j j \beta_j c_M^j c_N^{-j} \quad (1.35)$$

A esses valores de vácuo dos potenciais corresponde a seguinte solução do problema linear associado:

$$T^{\text{vac.}} = \exp\left(\sum_N \varepsilon_N t_N + \gamma(t)c\right) \quad (1.36)$$

Portanto, a função $\gamma(t)$ é solução das equações :

$$\partial_{t_N} \gamma(t) = \rho_N(t) + \frac{1}{2} \sum_{M,j} j \beta_j c_N^j c_M^{-j} t_M \quad (1.37)$$

Partindo-se do problema linear associado, definiremos um conjunto de transformações chamadas transformações dressing que são caracterizadas pelo fato de mapear soluções da hierarquia em outras soluções da mesma. Denotaremos $G_-(s)$, $G_+(s)$ e $G_0(s)$ os subgrupos do grupo de Kac-Moody G que são imagens (sob o mapeamento exponencial) das seguintes subálgebras de \mathcal{G} : $\mathcal{G}_{<0}(s) := \bigoplus_{i<0} \mathcal{G}_i(s)$, $\mathcal{G}_{>0}(s) := \bigoplus_{i>0} \mathcal{G}_i(s)$, e \mathcal{G}_0 respectivamente. Seja T uma solução do problema linear, e $h \in G_- G_0 G_+ \subset G$ um elemento constante, $h = h_- h_0 h_+$, tal que

$$ThT^{-1} = (ThT^{-1})_- (ThT^{-1})_0 (ThT^{-1})_+ \quad (1.38)$$

Claramente, a equação acima juntamente com a definição de h equivalem a dizer que tanto h quanto ThT^{-1} admitem uma decomposição de Gauss generalizada em relação à gradação s . Então, $T^h := (ThT^{-1})_-^{-1} T = (ThT^{-1})_0 (ThT^{-1})_+ Th^{-1}$ é também solução do problema. Para provar isso abreviamos $g_{0,\pm} := (ThT^{-1})_{0,\pm}$ e $\partial_N := \partial_{t_N}$; Considere agora

$$\begin{aligned} \partial_N T^h T^{h^{-1}} &= -g_-^{-1} \partial_N g_- + g_-^{-1} (\partial_N T T^{-1}) g_- \\ &= \partial_N g_0 g_0^{-1} + g_0 \partial_N g_+ g_+^{-1} g_0^{-1} + g_0 g_+ (\partial_N T T^{-1}) g_+^{-1} g_0^{-1} \end{aligned} \quad (1.39)$$

A primeira identidade implica que $\partial_N T^h T^{h^{-1}} \in \bigoplus_{i \leq N_+} \mathcal{G}_i(s)$ enquanto a segunda que $\partial_N T^h T^{h^{-1}} \in \bigoplus_{i \geq N_-} \mathcal{G}_i(s)$. Portanto vemos que $A_N^h = \partial_{t_N} T^h T^{h^{-1}} \in \bigoplus_{i=N_-}^{N_+} \mathcal{G}_i(s)$, levando em conta a decomposição de A_N , é uma solução da hierarquia de equações de curvatura nula. Para qualquer $h \in G_- G_0 G_+$ a transformação $D_h : T \rightarrow T^h$ ou, equivalentemente, $A_N \rightarrow A_N^h$ é chamada transformação dressing e o mapeamento $h \rightarrow D_h$ é um homomorfismo do subgrupo de Kac-Moody $G_- G_0 G_+$ para o grupo de transformações dressing. Usando a definição de T^h e a expressão acima para A_N^h , podemos construir a órbita da solução de vácuo da seguinte forma. Para qualquer $h \in G_- G_0 G_+$ definimos

$$\Theta^{-1} := (T^{(\text{vac.})} h T^{(\text{vac.})^{-1}})_-, \quad (1.40)$$

$$B^{-1} := (T^{(\text{vac.})} h T^{(\text{vac.})^{-1}})_0, \quad (1.41)$$

$$\Upsilon := (T^{(\text{vac.})} h T^{(\text{vac.})^{-1}})_+, \quad (1.42)$$

e

$$\Omega := B^{-1} \Upsilon. \quad (1.43)$$

Sob uma transformação dressing obtida a partir de h , temos $T^{(\text{vac.})} \rightarrow T^h = \Theta T^{(\text{vac.})} = \Omega T^{(\text{vac.})} h^{-1}$. De forma equivalente, $A_N^{(\text{vac.})}$ é mapeado para

$$A_N^h - \rho_N(t)c = \Theta \varepsilon_N \Theta^{-1} + \partial_N \Theta \Theta^{-1} \in \bigoplus_{i \leq N_+} \mathcal{G}_i(s) = \Omega \varepsilon_N \Omega^{-1} + \partial_N \Omega \Omega^{-1} \in \bigoplus_{i \geq N_-} \mathcal{G}_i(s) \quad (1.44)$$

O próximo passo consiste em achar os valores das componentes de Θ , B , e Υ a partir das respectivas equações definidoras acima. Isso pode ser feito considerando-se elementos de matriz da forma

$$\langle \mu | \Theta^{-1} B^{-1} \Upsilon | \mu' \rangle = \langle \mu | e^{\sum_N \varepsilon_N t_N} h e^{-\sum_N \varepsilon_N t_N} | \mu' \rangle \quad (1.45)$$

onde $|\mu\rangle$ e $|\mu'\rangle$ são vetores numa dada representação de \mathcal{G} . O conjunto minimal de vetores fica determinado pela condição que as componentes requeridas de Θ , B , e Υ possam ser expressas em termos dos elementos de matriz resultantes. Considere o conjunto de autovetores da ação adjunta dos ε_N 's que especificam a solução de vácuo. Há uma conjectura dizendo que as soluções multi-sóliton são obtidas a partir de elementos de grupo h que são produto de exponenciais de autovetores

$$h = \prod_{1 \leq i \leq n} e^{F_i} \quad (1.46)$$

onde

$$[\varepsilon_N, F_i] = \omega_N^i F_i, 1 \leq i \leq n \quad (1.47)$$

Nesse caso, a dependência temporal da solução é obtida explicitamente

$$\langle \mu | \Theta^{-1} B^{-1} \Upsilon | \mu' \rangle = \langle \mu | \prod_{1 \leq i \leq n} \exp(e^{\sum_N \omega_N^{(k)} t_N} F_i) | \mu' \rangle \quad (1.48)$$

A base para tal conjectura segundo a qual soluções multi-sóliton corespondem a elementos de grupo da forma produto de exponenciais é o fato das propriedades das soluções multi-sóliton das equações de Toda afim como também das hierarquias tipo KdV serem “compatíveis” com tal forma. De fato, a conjectura acima já foi verificada explicitamente em muitos casos. Em todos eles, as soluções multi-sóliton são obtidas a partir de representações do tipo operador de vértice onde os autovetores correspondentes são nilpotentes. Aplicando essa propriedade na equação acima, vemos que ocorre um truncamento da exponencial $e^{F_i} = \sum_{j=0}^{m_i} \frac{F_i^j}{j!}$ onde $m_i \in \mathbb{N}$, $m_i \geq 1$. Esse fato fornece uma justificativa para o método de Hirota.

1.6 Funções tau

Como visto acima, as órbitas das soluções de vácuo obtidas a partir da ação do grupo de transformações dressing dão origem a soluções de certas hierarquias integráveis de equações. A ligação com o método de Hirota é feita via funções tau generalizadas, as quais constituem um novo conjunto de variáveis para descrever tais soluções. As funções tau são dadas por certos elementos de matriz numa representação apropriada do grupo de Kac-Moody G . Há ainda a conjectura segundo a qual as funções tau correspondentes a soluções multi-sóliton envolvem elementos nilpotentes de G que dá origem à forma usualmente simples que estas possuem. A definição das funções tau dada a seguir fará uso de um tipo especial de representação da álgebra de Kac-Moody \mathcal{G} conhecida como representação integrável de peso mais alto. Fazemos uso de vetores $|v_i\rangle$ de tais representações, que são aniquilados por todos elementos em $\mathcal{G}_{>0}(s)$, ou seja, para todo $T \in \mathcal{G}_{>0}$ e $T' \in \mathcal{G}_{<0}$ temos, respectivamente, que $T|v_i\rangle = 0$ e $\langle v_i|T' = 0$. As funções tau correspondentes são então definidas por:

$$|\tau_i\rangle = T^{(\text{vac})} h T^{(\text{vac})^{-1}} |v_i\rangle = e^{\sum_N \epsilon_N t_N} h e^{-\sum_N \epsilon_N t_N} |v_i\rangle \quad (1.49)$$

onde $|v_i\rangle$ são vetores de peso mais alto da representação fundamental. As funções tau de Hirota são da forma $\langle \mu | \tau \rangle$ onde os vetores $\langle \mu |$ são escolhidos de tal forma a parametrizar os campos de forma conveniente.

Capítulo 2

O modelo de Toda afim $su(3)$ acoplado a campos de matéria

Os modelos de Toda afim acoplados a campos de matéria foram introduzidos em [6]. Estes são sistemas integráveis conformalmente invariantes baseados em álgebras de Kac-Moody afins, possuindo campos escalares e espinoriais e apresentando soluções sóliton. Há uma certa classe de tais sistemas com propriedades interessantes. Após uma redução Hamiltoniana obtém-se uma equivalência entre uma corrente de Noether $U(1)$ (envolvendo somente espinores) e uma corrente topológica (envolvendo somente escalares) que leva a um confinamento dos espinores dentro dos sólitons, num mecanismo que lembra o bag model da QCD. O modelo análogo associado a $su(2)$ foi estudado em [4], onde é mostrado, usando métodos de bosonização, que a equivalência entre as correntes se mantém no nível quântico e que portanto o mecanismo de confinamento ocorre também na teoria quântica.

Nesta tese estudaremos as soluções sóliton clássicas do modelo associado à álgebra de Kac-Moody $su(3)$ afim. O material apresentado aqui é também o conteúdo de um trabalho, em colaboração com o Prof. A.V. Razumov, que será submetido para publicação em breve [5]. Ele possui quatro campos escalares e seis espinores de Dirac, e suas equações de movimento são ^{*,†}

$$\begin{aligned} \partial^2 \varphi_a &= m_a^2 \bar{\psi}^a V_a \left(\frac{(1 + \gamma_5)}{2} - e^{3\eta} \frac{(1 - \gamma_5)}{2} \right) \psi^a \\ &+ m_3^2 \bar{\psi}^3 V_3 \left(\frac{(1 + \gamma_5)}{2} - e^{3\eta} \frac{(1 - \gamma_5)}{2} \right) \psi^3 \quad a = 1, 2 \end{aligned}$$

*Os espinores foram reescalados por um fator $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_i}{i}}$ em relação àqueles em [6], e os escalares φ_a por um fator i .

†Nós usamos $\gamma_0 = -i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma_1 = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\partial^2 \tilde{\nu} &= e^{3\eta} \left(i \sum_{i=1}^3 m_i^2 \bar{\psi}^i V_i \frac{(1-\gamma_5)}{2} \psi^i - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 m_i^2 \right) \\
\partial^2 \eta &= 0 \\
i\gamma^\mu \partial_\mu \psi^i &= m_i V_i \left(\frac{(1+\gamma_5)}{2} + e^{3\eta} \frac{(1-\gamma_5)}{2} \right) \psi^i + U^i \\
i\gamma^\mu \partial_\mu \tilde{\psi}^i &= m_i V_i^{-1} \left(e^{3\eta} \frac{(1+\gamma_5)}{2} + \frac{(1-\gamma_5)}{2} \right) \tilde{\psi}^i + \tilde{U}^i \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.1)
\end{aligned}$$

onde $m_3 = m_1 + m_2$, ψ^i e $\tilde{\psi}^i$, $i = 1, 2, 3$, são espinores independentes de Dirac, e $\bar{\psi}^i = (\tilde{\psi}^i)^T \gamma_0$. Note que não podemos usar $\tilde{\psi}^i$ como conjugado complexo de ψ^{i*} , já que isso é incompatível com as equações de movimento. Além disso temos

$$V_1 := e^{i\gamma_5(2\varphi_1 - \varphi_2)} e^{\gamma_5 \eta}; \quad V_2 := e^{i\gamma_5(2\varphi_2 - \varphi_1)} e^{\gamma_5 \eta}; \quad V_3 := e^{i\gamma_5(\varphi_1 + \varphi_2)} e^{2\gamma_5 \eta} \quad (2.2)$$

Denotando os espinores de duas componentes por

$$\psi^i := \begin{pmatrix} \psi_R^i \\ \psi_L^i \end{pmatrix} \quad U^i := \begin{pmatrix} U_R^i \\ U_L^i \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

e da mesma forma para $\tilde{\psi}^i$ e \tilde{U}^i , temos que

$$U_R^1 = U_R^2 = U_L^3 = 0 \quad \tilde{U}_L^1 = \tilde{U}_L^2 = \tilde{U}_R^3 = 0 \quad (2.4)$$

e

$$\begin{aligned}
U_L^1 &= -\frac{m_2 m_3}{m_1} e^\eta \left(\psi_R^3 \tilde{\psi}_L^2 e^{i(2\varphi_2 - \varphi_1)} + \psi_L^3 \tilde{\psi}_R^2 e^{-i(\varphi_1 + \varphi_2)} \right) \\
U_L^2 &= \frac{m_1 m_3}{m_2} e^\eta \left(\psi_R^3 \tilde{\psi}_L^1 e^{i(2\varphi_1 - \varphi_2)} + \psi_L^3 \tilde{\psi}_R^1 e^{-i(\varphi_1 + \varphi_2)} \right) \\
U_R^3 &= \frac{m_1 m_2}{m_3} e^\eta \left(\psi_R^2 \psi_L^1 e^{i(2\varphi_2 - \varphi_1)} - \psi_L^2 \psi_R^1 e^{i(2\varphi_1 - \varphi_2)} \right) \quad (2.5)
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_R^1 &= -\frac{m_2 m_3}{m_1} e^\eta \left(\psi_R^2 \tilde{\psi}_L^3 e^{i(2\varphi_2 - \varphi_1)} + \psi_L^2 \tilde{\psi}_R^3 e^{-i(\varphi_1 + \varphi_2)} \right) \\
\tilde{U}_R^2 &= \frac{m_1 m_3}{m_2} e^\eta \left(\psi_R^1 \tilde{\psi}_L^3 e^{i(2\varphi_1 - \varphi_2)} + \psi_L^1 \tilde{\psi}_R^3 e^{-i(\varphi_1 + \varphi_2)} \right) \\
\tilde{U}_L^3 &= \frac{m_1 m_2}{m_3} e^\eta \left(\tilde{\psi}_R^1 \tilde{\psi}_L^2 e^{i(2\varphi_2 - \varphi_1)} - \tilde{\psi}_L^1 \tilde{\psi}_R^2 e^{i(2\varphi_1 - \varphi_2)} \right) \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Esse modelo é definido pela equação de curvatura nula de Lax-Zakharov-Shabat [6]

$$\partial_+ A_- - \partial_- A_+ + [A_+, A_-] = 0, \quad (2.7)$$

onde os potenciais são dados por

$$A_+ = -B F^+ B^{-1}, \quad A_- = -\partial_- B B^{-1} + F^-. \quad (2.8)$$

Um ingrediente importante na definição dos potenciais é o uso da gradação principal de $\hat{\mathcal{G}}$ (ver apêndice .1 para detalhes). Os cinco campos escalares da teoria vivem no subgrupo B obtido pela exponenciação da subálgebra de grau zero (.5), i.e.

$$B := e^{\sum_{a=1}^2 i \varphi_a H_a^0 + \eta Q_{\text{ppal.}} + \tilde{\nu} C} \quad (2.9)$$

O modelo possui seis campos espinoriais de Dirac ψ^i , e $\tilde{\psi}^i$, $i = 1, 2, 3$, que vivem nos subespaços de grau não -nulo, i.e. nós temos

$$F^{\pm} := E_{\pm 3} + F_1^{\pm} + F_2^{\pm} \quad (2.10)$$

com

$$\begin{aligned} F_2^+ &= \frac{1}{2} \left(m_3 \psi_R^3 E_{\alpha_3}^0 + m_1 \tilde{\psi}_R^1 E_{-\alpha_1}^1 + m_2 \tilde{\psi}_R^2 E_{-\alpha_2}^1 \right) \\ F_1^+ &= \frac{1}{2} \left(m_1 \psi_R^1 E_{\alpha_1}^0 + m_2 \psi_R^2 E_{\alpha_2}^0 + m_3 \tilde{\psi}_R^3 E_{-\alpha_3}^1 \right) \\ F_1^- &= \frac{1}{2} \left(m_3 \psi_L^3 E_{\alpha_3}^{-1} - m_1 \tilde{\psi}_L^1 E_{-\alpha_1}^0 - m_2 \tilde{\psi}_L^2 E_{-\alpha_2}^0 \right) \\ F_2^- &= \frac{1}{2} \left(m_1 \psi_L^1 E_{\alpha_1}^{-1} + m_2 \psi_L^2 E_{\alpha_2}^{-1} - m_3 \tilde{\psi}_L^3 E_{-\alpha_3}^0 \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

e onde

$$E_{\pm 3} := \frac{1}{6} \left((2m_1 + m_2) H_1^{\pm 1} + (2m_2 + m_1) H_2^{\pm 1} \right) \quad (2.12)$$

A teoria (2.1) é invariante sob transformações conformes \dagger

$$x_+ \rightarrow f(x_+), \quad x_- \rightarrow g(x_-), \quad (2.13)$$

com f e g funções analíticas; e com os campos se transformando como

$$\begin{aligned} \varphi_a(x_+, x_-) &\rightarrow \hat{\varphi}_a(\hat{x}_+, \hat{x}_-) = \varphi_a(x_+, x_-), \\ e^{-\tilde{\nu}(x_+, x_-)} &\rightarrow e^{-\tilde{\nu}(\hat{x}_+, \hat{x}_-)} = (f')^\delta (g')^\delta e^{-\tilde{\nu}(x_+, x_-)}, \\ e^{-\eta(x_+, x_-)} &\rightarrow e^{-\hat{\eta}(\hat{x}_+, \hat{x}_-)} = (f')^{1/3} (g')^{1/3} e^{-\eta(x_+, x_-)}, \\ \psi^i(x_+, x_-) &\rightarrow \hat{\psi}^i(\hat{x}_+, \hat{x}_-) = e^{\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\log(f')\frac{h(\alpha_i)}{3}-1} e^{\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\log(g')\frac{h(\alpha_i)}{3}} \psi^i(x_+, x_-) \\ \tilde{\psi}^i(x_+, x_-) &\rightarrow \hat{\tilde{\psi}}^i(\hat{x}_+, \hat{x}_-) = e^{\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\log(f')\frac{h(\alpha_i)}{3}} e^{\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\log(g')\frac{h(\alpha_i)}{3}-1} \tilde{\psi}^i(x_+, x_-) \end{aligned} \quad (2.14)$$

\dagger Estamos usando $x_{\pm} = t \pm x$, e então, $\partial_{\pm} = \frac{1}{2}(\partial_t \pm \partial_x)$, e $\partial^2 = \partial_t^2 - \partial_x^2 = 4\partial_+ \partial_-$.

onde $h(\alpha_i)$ é a altura da raiz, i.e. $h(\alpha_1) = h(\alpha_2) = 1$ e $h(\alpha_3) = 2$, e onde o peso conforme δ , associado com $e^{-\nu}$, é arbitrário. As transformações de Lorentz bidimensionais $x_{\pm} \rightarrow \lambda^{\pm 1} x_{\pm}$ estão contidas em (2.13), como se nota escolhendo $f(x_+) = \lambda x_+$ e $g(x_-) = \frac{x_-}{\lambda}$.

Uma vez que $E_{\pm 3}$ comuta com os geradores da subálgebra de Cartan H_a^0 , $a = 1, 2$, segue então que a teoria(2.1) é também invariante sob transformações de calibre locais

$$B(x_+, x_-) \rightarrow h_L(x_-) B(x_+, x_-) h_R(x_+), \quad (2.15)$$

$$F_m^+(x_+, x_-) \rightarrow h_R^{-1}(x_+) F_m^+(x_+, x_-) h_R(x_+), \quad (2.16)$$

$$F_m^-(x_+, x_-) \rightarrow h_L(x_-) F_m^-(x_+, x_-) h_L^{-1}(x_-), \quad m = 1, 2 \quad (2.17)$$

onde

$$h_L(x_-) = e^{i \sum_{a=1}^2 \xi_L^a(x_-) H_a^0}; \quad h_R(x_+) = e^{i \sum_{a=1}^2 \xi_R^a(x_+) H_a^0} \quad (2.18)$$

Isso implica que os campos se transformam como

$$\varphi_a \rightarrow \varphi_a + \xi_L^a(x_-) + \xi_R^a(x_+); \quad \eta \rightarrow \eta; \quad \tilde{\nu} \rightarrow \tilde{\nu} \quad (2.19)$$

e

$$\begin{aligned} \psi^1 &\rightarrow e^{\frac{i}{2}(1+\gamma_5)(-2\xi_R^1+\xi_R^2)} e^{\frac{i}{2}(1-\gamma_5)(2\xi_L^1-\xi_L^2)} \psi^1 \\ \psi^2 &\rightarrow e^{\frac{i}{2}(1+\gamma_5)(\xi_R^1-2\xi_R^2)} e^{\frac{i}{2}(1-\gamma_5)(-\xi_L^1+2\xi_L^2)} \psi^2 \\ \psi^3 &\rightarrow e^{\frac{i}{2}(1+\gamma_5)(-\xi_R^1-\xi_R^2)} e^{\frac{i}{2}(1-\gamma_5)(\xi_L^1+\xi_L^2)} \psi^3 \end{aligned} \quad (2.20)$$

e $\tilde{\psi}^i$ se transforma da mesma maneira que ψ^i com $\xi_{R/L}^a$ substituído por $-\xi_{R/L}^a$.

Observe que, tomando-se $\xi_R^a = -\xi_L^a := -\frac{1}{2}\theta^a$, com $\theta^a = \text{const.}$, chegamos a uma simetria global $U(1) \times U(1)$, com os campos se transformando como

$$\varphi_a \rightarrow \varphi_a; \quad \eta \rightarrow \eta; \quad \tilde{\nu} \rightarrow \tilde{\nu} \quad (2.21)$$

e

$$\psi^1 \rightarrow e^{i(2\theta^1-\theta^2)} \psi^1; \quad \psi^2 \rightarrow e^{i(2\theta^2-\theta^1)} \psi^2; \quad \psi^3 \rightarrow e^{i(\theta^1+\theta^2)} \psi^2 \quad (2.22)$$

com $\tilde{\psi}^i$ se transformando da mesma maneira que ψ^i com θ^a substituído por $-\theta^a$.

Por outro lado, se tomarmos $\xi_R^a = \xi_L^a := -\frac{1}{2}\zeta^a$, com $\zeta^a = \text{const.}$, obtemos uma simetria quiral $U(1) \times U(1)$,

$$\varphi_a \rightarrow \varphi_a - \zeta^a; \quad \eta \rightarrow \eta; \quad \tilde{\nu} \rightarrow \tilde{\nu} \quad (2.23)$$

and

$$\psi^1 \rightarrow e^{i\gamma_5(2\zeta^1-\zeta^2)} \psi^1; \quad \psi^2 \rightarrow e^{i\gamma_5(2\zeta^2-\zeta^1)} \psi^2; \quad \psi^3 \rightarrow e^{i\gamma_5(\zeta^1+\zeta^2)} \psi^2 \quad (2.24)$$

com $\tilde{\psi}^i$ se transformando da mesma forma que ψ^i com ζ^a substituído por $-\zeta^a$.

Se a teoria tivesse uma Lagrangiana, seguiria do teorema de Noether e das simetrias $U(1) \times U(1)$ que ela possui duas correntes vetoriais e duas correntes quirais conservadas. Contudo, uma análise detalhada das equações de movimento (2.1) revela que somente metade dessas correntes existe. De fato, pode-se verificar que, como consequência de (2.1), a corrente vetorial

$$J_\mu := i \sum_{i=1}^3 m_i^2 \bar{\psi}^i \gamma_\mu \psi^i \quad (2.25)$$

e a corrente quiral

$$J_\mu^5 := i \sum_{i=1}^3 m_i^2 \bar{\psi}^i \gamma_\mu \gamma_5 \psi^i + 2 \partial_\mu (m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2) \quad (2.26)$$

são conservadas

$$\partial^\mu J_\mu = 0; \quad \partial^\mu J_\mu^5 = 0 \quad (2.27)$$

A existência dessas duas correntes conservadas implica que

$$\mathcal{J} := i \sum_{i=1}^3 m_i^2 \bar{\psi}_R^i \psi_R^i + 2\partial_+ (m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2) \quad (2.28)$$

e

$$\bar{\mathcal{J}} := i \sum_{i=1}^3 m_i^2 \bar{\psi}_L^i \psi_L^i - 2\partial_- (m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2) \quad (2.29)$$

satisfazem[§]

$$\partial_- \mathcal{J} = 0 \quad \partial_+ \bar{\mathcal{J}} = 0 \quad (2.30)$$

Podemos agora fazer uma redução da teoria impondo os vínculos

$$\mathcal{J} = 0 \quad \bar{\mathcal{J}} = 0 \quad (2.31)$$

que são equivalentes a ($\epsilon^{01} = 1$)

$$i \sum_{i=1}^3 m_i^2 \bar{\psi}^i \gamma^\mu \psi^i = -2\epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu (m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2) \quad (2.32)$$

Consequentemente, no submodelo definido por (2.31), a corrente vetorial (2.25) é proporcional à uma corrente topológica. A relação (2.32) tem consequências muito

[§]Obviamente $J_\mu^{(\pm)} := J_\mu \pm J_\mu^5$ são conservadas. Extraindo as componentes do cone de luz chegamos a $J_+^{(+)} = 2i \sum_{i=1}^3 m_i^2 \bar{\psi}_R^i \psi_R^i + 2\partial_+ (m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2)$, $J_-^{(+)} = 2\partial_- (m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2)$, $J_+^{(-)} = -2\partial_+ (m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2)$, e $J_-^{(-)} = 2i \sum_{i=1}^3 m_i^2 \bar{\psi}_L^i \psi_L^i - 2\partial_- (m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2)$. Sua lei de conservação $\partial_+ J_-^{(\pm)} + \partial_- J_+^{(\pm)} = 0$ conduz a (2.30)

importantes para as propriedades físicas da teoria. A componente temporal desta implica que a densidade de carga associada à corrente (2.25) é proporcional à derivada espacial dos campos φ , i.e.

$$J^0 = i \sum_{i=1}^3 m_i^2 \bar{\psi}^i \gamma^0 \psi^i = -2\partial_x (m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2) \quad (2.33)$$

Consequentemente, podem existir cargas somente naquelas regiões onde a derivada espacial dos campos escalares é não-nula. Como será visto abaixo as soluções sóliton dessa teoria são localizadas no espaço, no sentido que os campos escalares são não-constantemente somente numa região com volume determinado pelas massas dos sólitons. Portanto, na teoria quântica, se procurarmos por excitações em torno de uma solução sóliton, os campos espinoriais só podem ser não-triviais fora dos sólitons em configurações com carga nula. Nós temos então um mecanismo de confinamento semelhante àquele do bag model para a QCD.

2.1 Transformações Dressing e método de Hirota

Nós construiremos as soluções sóliton usando o método das transformações de dressing usando o [20]. O fato que os potenciais A_{\pm} em (2.8) satisfazem à equação de curvatura nula (2.7), implica que eles podem ser escritos como

$$A_{\mu} = -\partial_{\mu} T T^{-1} \quad (2.34)$$

onde T é um elemento de grupo obtido pela exponenciação da álgebra de Kac-Moody afim $su(3) \hat{\mathcal{G}}$ (ver apêndice .1). Além disso, os potenciais são gradados de acordo com a gradação principal (.4) of $\hat{\mathcal{G}}$

$$A_{+} \in \bigoplus_{m=0}^3 \hat{\mathcal{G}}_m \quad A_{-} \in \bigoplus_{m=0}^3 \hat{\mathcal{G}}_{-m} \quad (2.35)$$

Estamos interessados em elementos de grupo constantes ρ tais que o elemento $T\rho T^{-1}$, admite uma decomposição de Gauss generalizada. Denotamos por $\hat{\mathcal{G}}_{<0}$, $\hat{\mathcal{G}}_0$ e $\hat{\mathcal{G}}_{>0}$ as subálgebras geradas por elementos de graus negativo, zero e positivo respectivamente. Então temos

$$T\rho T^{-1} = (T\rho T^{-1})_{<0} (T\rho T^{-1})_0 (T\rho T^{-1})_{>0} \quad (2.36)$$

onde $(T\rho T^{-1})_{<0}$, $(T\rho T^{-1})_0$ e $(T\rho T^{-1})_{>0}$ são elementos pertencentes a subgrupos cujas álgebras são $\hat{\mathcal{G}}_{<0}$, $\hat{\mathcal{G}}_0$ e $\hat{\mathcal{G}}_{>0}$ respectivamente. A decomposição de Gauss generalizada (2.36) nos permite introduzir um novo elemento de grupo relacionado com T por duas transformações diferentes

$$T^{\rho} := (T\rho T^{-1})_{>0} T = (T\rho T^{-1})_0^{-1} (T\rho T^{-1})_{<0}^{-1} T\rho \quad (2.37)$$

Definimos agora a conexão chata

$$A_\mu^\rho = -\partial_\mu T^\rho T^{\rho-1} = \Theta_\pm A_\mu \Theta_\pm^{-1} - \partial_\mu \Theta_\pm \Theta_\pm^{-1} \quad (2.38)$$

com

$$\Theta_+ := (T^\rho T^{-1})_{>0} ; \quad \Theta_- := (T^\rho T^{-1})_0^{-1} (T^\rho T^{-1})_{<0}^{-1} := (T^\rho T^{-1})_0^{-1} \tilde{\Theta}_- \quad (2.39)$$

Assim A_μ^ρ e A_μ estão relacionados por duas transformações de gauge ; uma com um elemento de grupo envolvendo somente geradores de grau não -negativo e a outra somente geradores de grau não -positivo. Esse fato implica que A_μ^ρ tem a mesma decomposição em termos de grau (2.35) que A_μ . Consequentemente, a transformação de dressing define transformações no espaço de soluções do modelo definido pela condição de curvatura nula (2.7). Tais transformações são determinadas pelo elemento constante de grupo ρ .

Um procedimento geral para construção de soluções sóliton em teorias integráveis, usando transformações dressing, é descrito em [8]. Este constitui uma generalização , para praticamente qualquer hierarquia integrável bidimensional, da chamada especialização solitônica no contexto da solução de Leznov-Saveliev para modelos do tipo Toda [17, 18, 15]. A idéia é começar de uma solução de vácuo tal que, as conexões A_\pm , quando calculadas nesta, pertençam a uma álgebra de osciladores, isto é, uma subálgebra abeliana (a menos de termo central) da álgebra de Kac-Moody. Procura-se, então por autovetores V_i , em $\hat{\mathcal{G}}$, de tais osciladores. Os sólitons pertencem às órbitas de soluções obtidas por transformações dressing efetuadas por elementos da forma $\rho = e^{V_{i_1}} e^{V_{i_2}} \dots e^{V_{i_n}}$.

Note que

$$\tilde{\nu} = -\frac{1}{12} \sum_{i=1}^3 m_i^2 x_+ x_- ; \quad \varphi_a = \eta = \psi^i = \tilde{\psi}^i = 0 ; \quad a = 1, 2 ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.40)$$

é uma solução de vácuo das equações de movimento (2.1). Os potenciais (2.8) calculados nesta se tornam

$$A_+^{\text{vac.}} = -E_3 ; \quad A_-^{\text{vac.}} = E_{-3} + \frac{1}{12} \sum_{i=1}^3 m_i^2 x_+ C \quad (2.41)$$

e então

$$A_\pm^{\text{vac.}} = -\partial_\pm T^{\text{vac.}} T^{\text{vac.}-1} ; \quad T^{\text{vac.}} = e^{x+E_3} e^{-x-E_{-3}} \quad (2.42)$$

onde usamos que(ver (2.12) e (.1))

$$[E_3, E_{-3}] = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^3 m_i^2 C \quad (2.43)$$

Note que $E_{\pm 3}$ pertence à álgebra de osciladores gerada pelos elementos H_a^n (ver a primeira relação em (.1)). Esta é a chamada subálgebra homogênea de Heisenberg da álgebra de Kac-Moody afim $su(3)$ [13].

Os autovetores de $E_{\pm 3}$ são

$$V_{\pm\alpha_i}(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n} E_{\pm\alpha_i}^n; \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.44)$$

com z sendo um parâmetro complexo arbitrário. De fato, tem-se

$$[E_3, V_{\pm\alpha_i}(z)] = \pm \frac{z}{2} m_i V_{\pm\alpha_i}(z); \quad [E_{-3}, V_{\pm\alpha_i}(z)] = \pm \frac{1}{2z} m_i V_{\pm\alpha_i}(z) \quad (2.45)$$

Note que $V_{\alpha_i}(z)$ e $V_{-\alpha_i}(-z)$ têm os mesmos autovalores. As soluções sólon são obtidas tomando-se o elemento de grupo constante ρ como sendo produto de exponenciais dos operadores

$$V_{\alpha_i}(a_{\alpha_i}^{\pm}, z) := a_{\alpha_i}^+ V_{\alpha_i}(z) + a_{\alpha_i}^- V_{-\alpha_i}(-z) \quad (2.46)$$

Efetuamos agora a transformação (2.38) a partir do potencial de vácuo (2.41). Já que o potencial transformado A_{μ}^{ρ} tem a mesma gradação que (2.8), podemos igualar os dois e conseguir uma relação para os campos (calculados na nova solução) e os parâmetros da transformação (os parâmetros dos elementos de grupo Θ_{\pm})[¶]

$$b(E_3 + F_1^+ + F_2^+) b^{-1} = \Theta_{\pm} E_3 \Theta_{\pm}^{-1} + \partial_+ \Theta_{\pm} \Theta_{\pm}^{-1} \quad (2.47)$$

e

$$-\sum_{a=1}^2 i \partial_- \varphi_a H_a^0 - \partial_- \tilde{\nu} C + E_{-3} + F_1^- + F_2^- = \Theta_{\pm} E_{-3} \Theta_{\pm}^{-1} - \partial_- \Theta_{\pm} \Theta_{\pm}^{-1} + \frac{1}{12} \sum_{i=1}^3 m_i^2 x_+ C \quad (2.48)$$

onde

$$b := e^{\sum_{a=1}^2 i \varphi_a H_a^0} \quad (2.49)$$

Para construir a solução temos que separar (2.47) e (2.48) em autosubespaços do operador de gradação $Q_{\text{ppal.}}$. Por exemplo, tomando-se a componente de grau 3 (2.47) para Θ_- , e o grau 0 for Θ_- fornecem que

$$\left(T^{\text{vac.}} \rho T^{\text{vac.}-1} \right)_0^{-1} = b e^{\left(\tilde{\nu} + \frac{1}{12} \sum_{i=1}^3 m_i^2 x_+ x_- \right) C} \quad (2.50)$$

[¶]Note que o campo η aparece em (2.8) multiplicando o operador de gradação $Q_{\text{ppal.}}$, e que envolve o operador D (ver (.2)). Como D não é resultado de qualquer comutador, segue que o método de dressing não excita o campo η se partimos de uma solução onde este é nulo.

Então de (2.36) e(2.42) chega-se a

$$G := e^{x+E_3} e^{-x-E_3} \rho e^{x-E_3} e^{-x+E_3} = \tilde{\Theta}_-^{-1} b^{-1} \Theta_+ e^{-(\tilde{\nu} + \frac{1}{12} \sum_{i=1}^3 m_i^2 x_{+x-})^C} \quad (2.51)$$

A idéia agora é considerar elementos de matriz de ambos os lados de (2.51) em estados da representação fundamental de $\hat{\mathcal{G}}$ para obter a dependência explícita espaço-temporal dos campos calculada nas soluções determinadas pelo elemento de grupo constante ρ . Por exemplo obtem-se de (2.51) que

$$e^{-i\varphi_1} = \frac{\tau_1}{\tau_0}; \quad e^{-i\varphi_2} = \frac{\tau_2}{\tau_0}; \quad e^{-(\tilde{\nu} + \frac{1}{12} \sum_{i=1}^3 m_i^2 x_{+x-})} = \tau_0 \quad (2.52)$$

com

$$\tau_j := \langle \lambda_j | G | \lambda_j \rangle; \quad j = 0, 1, 2 \quad (2.53)$$

onde $|\lambda_j\rangle$ são estados de peso mais alto das representações fundamentais de $\hat{\mathcal{G}}$, satisfazendo (.7) e (.8), e onde usamos que, como consequência de (.8) e (.9)

$$\Theta_+ |\lambda_j\rangle = |\lambda_j\rangle; \quad \langle \lambda_j | \tilde{\Theta}_-^{-1} = \langle \lambda_j | \quad (2.54)$$

De forma a obtermos a solução para os campos espinoriais denotamos

$$\Theta_+ := e^{\sum_{m>0} t^{(m)}}; \quad \tilde{\Theta}_- := e^{\sum_{m>0} t^{(-m)}}; \quad t^{(\pm m)} \in \hat{\mathcal{G}}_{\pm m} \quad (2.55)$$

e de acordo com (.8) e (.9) temos

$$t^{(m)} | \lambda_j \rangle = 0; \quad \langle \lambda_j | t^{(-m)} = 0 \quad m > 0; \quad j = 0, 1, 2 \quad (2.56)$$

Considerando as componentes de graus 1 e 2 de (2.47) para Θ_- , implica que

$$F_2^+ = [t^{(-1)}, E_3]; \quad F_1^+ = [t^{(-2)}, E_3] + \frac{1}{2} [t^{(-1)}, [t^{(-1)}, E_3]] \quad (2.57)$$

Analogamente, considerando as componentes de graus -1 e -2 de (2.48) para Θ_+ , obtemos

$$F_2^- = [t^{(1)}, E_{-3}]; \quad F_1^- = [t^{(2)}, E_{-3}] + \frac{1}{2} [t^{(1)}, [t^{(1)}, E_{-3}]] \quad (2.58)$$

Multiplicando (2.51) por um elemento de grau 1

$$\langle \lambda_i | g_1(\theta_-^<)^{-1} (be^{(\nu - \Omega x_{+x-})^c})^{-1} \theta_+^> | \lambda_i \rangle = \langle \lambda_i | g_1 G | \lambda_i \rangle \quad (2.59)$$

Usando que $|\lambda_i\rangle$ é um autovetor de $be^{(\nu - \Omega x_{+x-})}$, concluímos que

$$\langle \lambda_i | [g_1, t^{(-1)}] | \lambda_i \rangle = \frac{\langle \lambda_i | g_1 G | \lambda_i \rangle}{\langle \lambda_i | \tilde{b} | \lambda_i \rangle} \quad (2.60)$$

onde $\tilde{b} := be^{(\nu-\Omega x+x-)c}$ A mesma equação também fornece

$$\langle \lambda_i | b^{-1}e^{-(\nu-\Omega x+x-)c} | \lambda_i \rangle = \langle \lambda_i | G | \lambda_i \rangle \quad (2.61)$$

Dessa forma temos

$$\langle \lambda_i | [g_1, t^{(-1)}] | \lambda_i \rangle = \frac{\langle \lambda_i | g_1 G | \lambda_i \rangle}{\langle \lambda_i | G | \lambda_i \rangle} \quad (2.62)$$

Como $F_2^+ = \psi_R^3 E^0_{\alpha_3} + \tilde{\psi}_R^1 E^1_{-\alpha_1} + \tilde{\psi}_R^2 E^1_{-\alpha_2}$ e $\{E^0_{-\alpha_1}, E^0_{-\alpha_2}, E^{-1}_{\alpha_3}\}$ é uma base (sobre \mathbb{C}) de \mathcal{G}_{-1} , portanto um elemento qualquer $t^{(-1)} \in \mathcal{G}_{-1}$ pode ser escrito como

$$t^{(-1)} = aE^0_{-\alpha_1} + bE^0_{-\alpha_2} + dE^{-1}_{\alpha_3} \quad (2.63)$$

onde $(a, b, d) \in \mathbb{C}^3$ e portanto como

$$-F_2^+ = [E_3, t^{(-1)}] \quad (2.64)$$

e pelo visto acima temos também

$$[E_3, t^{(-1)}] = -am \cdot \alpha_1 E^1_{-\alpha_1} - bm \cdot \alpha_2 E^1_{-\alpha_2} + dm \cdot \alpha_3 E^0_{\alpha_3} \quad (2.65)$$

Sendo $\mathcal{G}_1 = \langle E^0_{\alpha_1}, E^0_{\alpha_2}, E^1_{-\alpha_3} \rangle$ obtemos para os comutadores acima da forma $[t^{(-1)}, g_1]$, onde $g_1 \in \mathcal{G}_1$, as seguintes expressões :

$$[t^{(-1)}, E^0_{\alpha_1}] = -aH_1^0 \quad (2.66)$$

$$[t^{(-1)}, E^0_{\alpha_2}] = -bH_2^0 \quad (2.67)$$

$$[t^{(-1)}, E^1_{-\alpha_3}] = d(H_1^0 + H_2^0 - c) \quad (2.68)$$

Comparando as duas expressões para F_2^+ concluímos

$$\tilde{\psi}_R^1 = \frac{1}{2}am_1 \quad (2.69)$$

$$\tilde{\psi}_R^2 = \frac{1}{2}bm_2 \quad (2.70)$$

$$\psi_R^3 = -\frac{1}{2}dm_3 \quad (2.71)$$

Numa representação de peso mais alto, temos

$$H_j^0 | \lambda_i \rangle = \delta_{i,j} | \lambda_i \rangle \quad (2.72)$$

onde $i, j = 1, 2$ e

$$\begin{aligned} H_j^0 | \lambda_0 \rangle &= 0 \\ c | \lambda_\alpha \rangle &= | \lambda_\alpha \rangle \end{aligned} \quad (2.73)$$

onde $\alpha = 0, 1, 2$. Daqui segue que

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 | [t^{(-1)}, E_{\alpha_1}^0] | \lambda_1 \rangle &= -a \\ \langle \lambda_2 | [t^{(-1)}, E_{\alpha_2}^0] | \lambda_2 \rangle &= -b \\ \langle \lambda_0 | [t^{(-1)}, E_{-\alpha_3}^1] | \lambda_0 \rangle &= -d \end{aligned} \quad (2.74)$$

Das formulas acima seguem imediatamente as expressões para $\tilde{\psi}_R^1, \tilde{\psi}_R^2$ e ψ_R^3 dadas em (2.86), e, quando os ψ 's são da forma $\frac{\tau_i}{\tau_j}$, as fórmulas para esses campos são obtidas exatamente como acima. De fato, o mais complicado que ocorre para encontrar as expressões para os campos é o aparecimento de um segundo termo envolvendo comutadores duplos, o que dá origem às 6 relações algébricas entre as funções τ , que são não -triviais. Em vista desse fato, faremos abaixo a derivação de um desses casos. O ponto de partida é a relação (2.47). Extraíndo termos de grau 1 dessa relação, temos:

$$bF_1^+ b^{-1} = b(\theta_- < E_3 \theta_- <^{-1}) b^{-1} \quad (2.75)$$

Utilizando a definição dos θ 's e a fórmula de Baker-Hausdorff obtemos a seguinte expressão para F_1^+ :

$$F_1^+ = [t^{(-2)}, E_3] + \frac{1}{2} [t^{(-1)}, [t^{(-1)}, E_3]] \quad (2.76)$$

De (2.51) segue

$$\langle \lambda_i | [t^{(-2)}, g_2] | \lambda_i \rangle + \frac{1}{2} \langle \lambda_i | [t^{(-1)}, [t^{(-1)}, g_2]] | \lambda_i \rangle = \frac{\langle \lambda_i | g_2 G | \lambda_i \rangle}{\langle \lambda_i | G | \lambda_i \rangle} \quad (2.77)$$

Como visto antes, $\{E_{-\alpha_1}^0, E_{-\alpha_2}^0, E_{\alpha_3}^{-1}\}$ constitui uma base de \mathcal{G}_{-1} , e $\{E_{\alpha_1}^{-1}, E_{\alpha_2}^{-1}, E_{-\alpha_3}^0\}$ uma base para \mathcal{G}_{-2} . Escrevemos assim

$$\begin{aligned} t^{(-1)} &= aE_{-\alpha_1}^0 + bE_{-\alpha_2}^0 + dE_{\alpha_3}^{-1} \\ t^{(-2)} &= rE_{\alpha_1}^{-1} + sE_{\alpha_2}^{-1} + tE_{-\alpha_3}^0 \end{aligned} \quad (2.78)$$

Usando as relações de comutação da álgebra chegamos aos seguintes resultados:

$$\begin{aligned} F_1^+ &= (-rm \cdot \alpha_1 + \frac{1}{2} bdm \cdot (\alpha_2 + \alpha_3)) E_{\alpha_1}^0 + \\ &\quad (-sm \cdot \alpha_2 - \frac{1}{2} adm \cdot (\alpha_1 + \alpha_3)) E_{\alpha_2}^0 + \\ &\quad (-tm \cdot \alpha_3 + \frac{1}{2} abm \cdot (\alpha_1 - \alpha_2)) E_{-\alpha_3}^1 \end{aligned} \quad (2.79)$$

Sendo $\mathcal{G}_2 = \langle E_{-\alpha_1}^1, E_{-\alpha_2}^1, E_{\alpha_3}^0 \rangle$, temos 3 possibilidades para os comutadores $[t^{(-2)}, g_2]$:

$$\begin{aligned} [t^{(-2)}, E_{-\alpha_1}^1] &= r(H_1^0 - c) \\ [t^{(-2)}, E_{-\alpha_2}^1] &= s(H_2^0 - c) \\ [t^{(-2)}, E_{\alpha_3}^0] &= t(-H_1^0 - H_2^0) \end{aligned} \quad (2.80)$$

Temos ainda mais 3 comutadores vindos de $[t^{(-1)}, [t^{(-1)}, g_2]]$:

$$\begin{aligned} [t^{(-1)}, [t^{(-1)}, E_{-\alpha_1}^1]] &= bd(H_1^0 + 2H_2^0 - c) \\ [t^{(-1)}, [t^{(-1)}, E_{-\alpha_2}^1]] &= -ad(2H_1^0 + H_2^0 - c) \\ [t^{(-1)}, [t^{(-1)}, E_{\alpha_3}^0]] &= ab(H_1^0 - H_2^0) \end{aligned} \quad (2.81)$$

Notamos agora que em ambas as triplas de comutadores acima, aqueles que envolvem $E_{-\alpha_1}^1$, quando aplicados em $|\lambda_1\rangle$, se anulam identicamente, o mesmo valendo para os que contêm $E_{-\alpha_2}^1$ e $E_{\alpha_3}^0$ quando aplicados em $|\lambda_2\rangle$ e $|\lambda_0\rangle$, respectivamente. Assim sendo, podemos escrever para $g_2 = E_{-\alpha_1}^1$ as seguintes relações.

Da atuação em $|\lambda_0\rangle$ resulta que

$$-r + \frac{1}{2}(-bd) = \frac{\langle \lambda_0 | E_{-\alpha_1}^1 G | \lambda_0 \rangle}{\langle \lambda_0 | G | \lambda_0 \rangle} \quad (2.82)$$

Da mesma forma para $|\lambda_2\rangle$:

$$-r + \frac{1}{2}bd = \frac{\langle \lambda_2 | E_{-\alpha_1}^1 G | \lambda_2 \rangle}{\langle \lambda_2 | G | \lambda_2 \rangle} \quad (2.83)$$

Das duas expressões acima segue imediatamente que:

$$\begin{aligned} r &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\tau_{R,(0)}^{\alpha_1}}{\tau_0} + \frac{\tau_{R,(2)}^{\alpha_1}}{\tau_2} \right) \\ bd &= \frac{\tau_{R,(2)}^{\alpha_1}}{\tau_2} - \frac{\tau_{R,(0)}^{\alpha_1}}{\tau_0} \end{aligned} \quad (2.84)$$

onde, como em qualquer outro lugar,

$$\tau_i = \langle \lambda_i | G | \lambda_i \rangle \quad (2.85)$$

com $i = 0, 1, 2$, $\tau_{R,(0)}^{\alpha_1} = \langle \lambda_0 | E_{-\alpha_1}^1 G | \lambda_0 \rangle$, e $\tau_{R,(2)}^{\alpha_1} = \langle \lambda_2 | E_{-\alpha_1}^1 G | \lambda_2 \rangle$.

Como b e d também são escritos em termos de funções τ , as relações acima dão origem a uma relação algébrica quadrática homogênea entre essas funções. Analogamente, estabelecemos as outras cinco relações algébricas, também quadráticas e homogêneas, entre funções τ (ver abaixo). Segue então que a relação entre as funções tau e os espinores expressa-se pelas relações :

$$\begin{aligned}
\psi_R^1 &= \frac{m_3 \tau_{R,(2)}^{\alpha_1}}{m_1 \tau_2} - \frac{m_2 \tau_{R,(0)}^{\alpha_1}}{m_1 \tau_0}; & \psi_L^1 &= -\frac{\tau_L^{\alpha_1}}{\tau_1} \\
\psi_R^2 &= \frac{m_3 \tau_{R,(1)}^{\alpha_2}}{m_2 \tau_1} - \frac{m_1 \tau_{R,(0)}^{\alpha_2}}{m_2 \tau_0}; & \psi_L^2 &= -\frac{\tau_L^{\alpha_2}}{\tau_2} \\
\psi_R^3 &= \frac{\tau_R^{\alpha_3}}{\tau_0}; & \psi_L^3 &= \frac{m_2 \tau_{L,(1)}^{\alpha_3}}{m_3 \tau_1} + \frac{m_1 \tau_{L,(2)}^{\alpha_3}}{m_3 \tau_2} \\
\tilde{\psi}_R^1 &= -\frac{\tilde{\tau}_R^{\alpha_1}}{\tau_1}; & \tilde{\psi}_L^1 &= \frac{m_2 \tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_1}}{m_1 \tau_0} - \frac{m_3 \tilde{\tau}_{L,(2)}^{\alpha_1}}{m_1 \tau_2} \\
\tilde{\psi}_R^2 &= -\frac{\tilde{\tau}_R^{\alpha_2}}{\tau_2}; & \tilde{\psi}_L^2 &= \frac{m_1 \tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_2}}{m_2 \tau_0} - \frac{m_3 \tilde{\tau}_{L,(1)}^{\alpha_2}}{m_2 \tau_1} \\
\tilde{\psi}_R^3 &= -\frac{m_2 \tilde{\tau}_{R,(1)}^{\alpha_3}}{m_3 \tau_1} - \frac{m_1 \tilde{\tau}_{R,(2)}^{\alpha_3}}{m_3 \tau_2}; & \tilde{\psi}_L^3 &= -\frac{\tilde{\tau}_L^{\alpha_3}}{\tau_0}
\end{aligned} \tag{2.86}$$

onde τ_j , $j = 0, 1, 2$, são definidas em (2.53), e onde denotamos

$$\begin{aligned}
\tau_{R,(2)}^{\alpha_1} &= \langle \lambda_2 | E_{-\alpha_1}^1 G | \lambda_2 \rangle & \tau_{R,(0)}^{\alpha_1} &= \langle \lambda_0 | E_{-\alpha_1}^1 G | \lambda_0 \rangle & \tau_L^{\alpha_1} &= \langle \lambda_1 | GE_{-\alpha_1}^0 | \lambda_1 \rangle \\
\tau_{R,(0)}^{\alpha_2} &= \langle \lambda_0 | E_{-\alpha_2}^1 G | \lambda_0 \rangle & \tau_{R,(1)}^{\alpha_2} &= \langle \lambda_1 | E_{-\alpha_2}^1 G | \lambda_1 \rangle & \tau_L^{\alpha_2} &= \langle \lambda_2 | GE_{-\alpha_2}^0 | \lambda_2 \rangle \\
\tau_R^{\alpha_3} &= \langle \lambda_0 | E_{-\alpha_3}^1 G | \lambda_0 \rangle & \tau_{L,(2)}^{\alpha_3} &= -\langle \lambda_2 | GE_{-\alpha_3}^0 | \lambda_2 \rangle & \tau_{L,(1)}^{\alpha_3} &= -\langle \lambda_1 | GE_{-\alpha_3}^0 | \lambda_1 \rangle \\
\tilde{\tau}_R^{\alpha_1} &= \langle \lambda_1 | E_{\alpha_1}^0 G | \lambda_1 \rangle & \tilde{\tau}_{L,(2)}^{\alpha_1} &= \langle \lambda_2 | GE_{\alpha_1}^{-1} | \lambda_2 \rangle & \tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_1} &= \langle \lambda_0 | GE_{\alpha_1}^{-1} | \lambda_0 \rangle \\
\tilde{\tau}_R^{\alpha_2} &= \langle \lambda_2 | E_{\alpha_2}^0 G | \lambda_2 \rangle & \tilde{\tau}_{L,(1)}^{\alpha_2} &= \langle \lambda_1 | GE_{\alpha_2}^{-1} | \lambda_1 \rangle & \tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_2} &= \langle \lambda_0 | GE_{\alpha_2}^{-1} | \lambda_0 \rangle \\
\tilde{\tau}_{R,(2)}^{\alpha_3} &= \langle \lambda_2 | E_{\alpha_3}^0 G | \lambda_2 \rangle & \tilde{\tau}_{R,(1)}^{\alpha_3} &= \langle \lambda_1 | E_{\alpha_3}^0 G | \lambda_1 \rangle & \tilde{\tau}_L^{\alpha_3} &= \langle \lambda_0 | GE_{\alpha_3}^{-1} | \lambda_0 \rangle
\end{aligned} \tag{2.87}$$

De acordo com a especialização solitônica [8, 17, 18, 15], as soluções sóliton são obtidas tomando-se ρ como sendo o produto de exponenciais de operadores (2.46). As soluções 1-sóliton são obtidas escolhendo-se $\rho := \rho_i = e^{V_{\alpha_i}(a_{\alpha_i}^{\pm}, z)}$, $i = 1, 2, 3$. Portanto, existem três espécies de 1-soliton. Analogamente, as soluções de 2-soliton são obtidas tomando $\rho := \rho_i \rho_j = e^{V_{\alpha_i}(a_{\alpha_i}^{\pm}, z_1)} e^{V_{\alpha_j}(a_{\alpha_j}^{\pm}, z_2)}$, e então existem seis soluções deste tipo. Usando (2.45) conseguimos de (2.51) que para as soluções de 1-sóliton

$$G_i := e^{x+E_3} e^{-x-E_3} \rho_i e^{x-E_3} e^{-x+E_3} = \exp \left(e^{\Gamma_i(z)} V_{\alpha_i} \left(a_{\alpha_i}^{\pm}, z \right) \right) \tag{2.88}$$

e para dois sólitons

$$G_{ij} := G_i G_j = e^{x+E_3} e^{-x-E_3} \rho_i \rho_j e^{x-E_3} e^{-x+E_3}$$

$$= \exp \left(e^{\Gamma_i(z_1)} V_{\alpha_i} \left(a_{\alpha_i}^{\pm}, z_1 \right) \right) \exp \left(e^{\Gamma_j(z_2)} V_{\alpha_j} \left(b_{\alpha_j}^{\pm}, z_2 \right) \right) \quad (2.89)$$

onde

$$\Gamma_i(z) := \frac{1}{2} m_i \left(z x_+ - \frac{x_-}{z} \right) = \gamma (x - vt) \quad (2.90)$$

com

$$\gamma = \frac{1}{2} m_i \left(z + \frac{1}{z} \right) = (\text{sign } z) \frac{m_i}{\sqrt{1-v^2}} = \epsilon m_i \cosh \theta ; \quad v = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} = \tanh \theta \quad (2.91)$$

onde introduzimos a rapidez θ como $z = \epsilon e^{\theta}$, com $\epsilon = \pm 1$. Portanto, se z é real, temos $|v| < 1$, onde a velocidade da luz foi normalizada à unidade.

Para obter a expressão final para as soluções sóliton temos que calcular os elementos de matriz em (2.53) e (2.87) para os elementos de grupo (2.88) e (2.89). Este cálculo pode ser efetuado usando as representações de operador de vértice para $\hat{\mathcal{G}}$ [10, 13]. Temos que usar a realização homogênea de operador de vértice das três representações fundamentais de $\hat{\mathcal{G}}$. Tais representações são integráveis no sentido que os operadores degrau de $\hat{\mathcal{G}}$ são nilpotentes [13]. De fato, pode-se verificar que os operadores (2.44) satisfazem [10, 13]

$$V_{\alpha_i}(z_1) V_{\alpha_i}(z_2) \rightarrow 0 \quad \text{as } z_1 \rightarrow z_2 \quad (2.92)$$

Isto implica que os elementos de matriz em (2.53) e (2.87) truncam quando se expande as exponenciais em (2.88) e (2.89), e desta forma estas se tornam polinômiais em e^{Γ_i} 's. Neste sentido estes elementos de matriz são as funções tau de Hirota [11] para o modelo (2.1).

A conexão entre as transformações dressing, especialização solitônica, e método de Hirota foi discutida em [8] para qualquer hierarquia de modelos integráveis possuindo uma representação de curvatura nula em termos de uma Álgebra de Kac-Moody afim. É um resultado bem geral que explica uma série de estruturas conhecidas em teorias de sólitons Além disso, pelo lado prático, permite usar as boas características de cada método O método de Hirota é capaz de calcular as expressões explícitas para as soluções sóliton. Além disso, é um método recursivo e permite a obtenção da solução em um número finito de passos, podendo, portanto ser implementado num programa de manipulação como o Mathematica. Uma de suas dificuldades, é, contudo, achar a relação entre as funções tau e os campos que conduz ao truncamento da expansão de Hirota. Mas o método de transformações dressing juntamente com a especialização solitônica faz precisamente essa parte. Ele leva naturalmente à definição das funções tau como fizemos em (2.53) e (2.87). O método de dressing requer, por outro lado, o cálculo de elementos de matriz em representações de operadores de vértice da Álgebra de Kac-Moody, que no caso de mais de um sóliton se torna, aparentemente, bastante trabalhosa. Pode-se tirar vantagem destas propriedades para acelerar os cálculos. Como visto, as funções tau (2.53) e

(2.87) para as soluções s3liton s3o polinomiais nos e^{Γ_i} 's. Genericamente, temos, por exemplo, para uma solu33o de 2-s3liton obtida de (2.89) que as fun333es tau s3o da forma

$$\tau \sim \delta_0 + \delta_1^{(i)} e^{\Gamma_i(z_1)} + \delta_1^{(j)} e^{\Gamma_j(z_2)} + \delta_2^{(i)} e^{2\Gamma_i(z_1)} + \delta_2^{(j)} e^{2\Gamma_j(z_2)} + \delta_2^{(i,j)} e^{\Gamma_i(z_1)} e^{\Gamma_j(z_2)} + \dots \quad (2.93)$$

onde os δ 's s3o determinados por elementos de matriz de pot3ncias dos operadores

Assim, substituindo (2.52) e (2.86) em (2.1) conclu3mos que as equa333es para φ_a and $\tilde{\nu}$ conduzem 3s seguintes 3 equa333es de Hirota.

$$4 \tau_1 \tau_2 (\tau_0 \partial_+ \partial_- \tau_0 - \partial_- \tau_0 \partial_+ \tau_0) = m_1^2 \tau_0 \tau_1 \tilde{\tau}_R^{\alpha_1} \tau_L^{\alpha_1} + m_2^2 \tau_0 \tau_2 \tilde{\tau}_R^{\alpha_2} \tau_L^{\alpha_2} \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned} & - m_2^2 \tau_2^2 \tau_{L,(1)}^{\alpha_3} \tilde{\tau}_{R,(1)}^{\alpha_3} - m_1 m_2 \tau_1 \tau_2 \tau_{L,(2)}^{\alpha_3} \tilde{\tau}_{R,(1)}^{\alpha_3} \\ & - m_1 m_2 \tau_1 \tau_2 \tau_{L,(1)}^{\alpha_3} \tilde{\tau}_{R,(2)}^{\alpha_3} - m_1^2 \tau_1^2 \tau_{L,(2)}^{\alpha_3} \tilde{\tau}_{R,(2)}^{\alpha_3} \end{aligned} \quad (2.95)$$

$$4 \tau_0 \tau_2 (\tau_1 \partial_+ \partial_- \tau_1 - \partial_- \tau_1 \partial_+ \tau_1) = m_2^2 \tau_1 \tau_2 \tilde{\tau}_R^{\alpha_2} \tau_L^{\alpha_2} + m_3^2 \tau_0 \tau_1 \tau_R^{\alpha_3} \tilde{\tau}_L^{\alpha_3} \quad (2.95)$$

$$\begin{aligned} & - m_2 m_3 \tau_0 \tau_2 \tilde{\tau}_{L,(2)}^{\alpha_1} \tau_{R,(0)}^{\alpha_1} + m_2^2 \tau_2^2 \tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_1} \tau_{R,(0)}^{\alpha_1} \\ & + m_3^2 \tau_0^2 \tilde{\tau}_{L,(2)}^{\alpha_1} \tau_{R,(2)}^{\alpha_1} - m_2 m_3 \tau_0 \tau_2 \tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_1} \tau_{R,(2)}^{\alpha_1} \end{aligned}$$

$$4 \tau_0 \tau_1 (\tau_2 \partial_+ \partial_- \tau_2 - \partial_- \tau_2 \partial_+ \tau_2) = m_1^2 \tau_1 \tau_2 \tilde{\tau}_R^{\alpha_1} \tau_L^{\alpha_1} + m_3^2 \tau_0 \tau_2 \tau_R^{\alpha_3} \tilde{\tau}_L^{\alpha_3} \quad (2.96)$$

$$\begin{aligned} & - m_1 m_3 \tau_0 \tau_1 \tilde{\tau}_{L,(1)}^{\alpha_2} \tau_{R,(0)}^{\alpha_2} + m_1^2 \tau_1^2 \tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_2} \tau_{R,(0)}^{\alpha_2} \\ & + m_3^2 \tau_0^2 \tilde{\tau}_{L,(1)}^{\alpha_2} \tau_{R,(1)}^{\alpha_2} - m_1 m_3 \tau_0 \tau_1 \tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_2} \tau_{R,(1)}^{\alpha_2} \end{aligned}$$

As componentes das equa333es de movimento (2.1) para ψ 's e $\tilde{\psi}$'s que n3o envolvem termos quadr3ticos U^i e \tilde{U}^i (ver(2.4)) levam 3s equa333es de Hirota

$$2 (\tau_1 \partial_+ \tau_L^{\alpha_1} - \tau_L^{\alpha_1} \partial_+ \tau_1) = m_3 \tau_0 \tau_{R,(2)}^{\alpha_1} - m_2 \tau_2 \tau_{R,(0)}^{\alpha_1} \quad (2.97)$$

$$2 (\tau_2 \partial_+ \tau_L^{\alpha_2} - \tau_L^{\alpha_2} \partial_+ \tau_2) = m_3 \tau_0 \tau_{R,(1)}^{\alpha_2} - m_1 \tau_1 \tau_{R,(0)}^{\alpha_2} \quad (2.98)$$

$$2 (\tau_0 \partial_- \tau_R^{\alpha_3} - \tau_R^{\alpha_3} \partial_- \tau_0) = m_2 \tau_2 \tau_{L,(1)}^{\alpha_3} + m_1 \tau_1 \tau_{L,(2)}^{\alpha_3} \quad (2.99)$$

$$2 (\tau_1 \partial_- \tilde{\tau}_R^{\alpha_1} - \tilde{\tau}_R^{\alpha_1} \partial_- \tau_1) = m_3 \tau_0 \tilde{\tau}_{L,(2)}^{\alpha_1} - m_2 \tau_2 \tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_1} \quad (2.100)$$

$$2 (\tau_2 \partial_- \tilde{\tau}_R^{\alpha_2} - \tilde{\tau}_R^{\alpha_2} \partial_- \tau_2) = m_3 \tau_0 \tilde{\tau}_{L,(1)}^{\alpha_2} - m_1 \tau_1 \tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_2} \quad (2.101)$$

$$2 (\tau_0 \partial_+ \tilde{\tau}_L^{\alpha_3} - \tilde{\tau}_L^{\alpha_3} \partial_+ \tau_0) = -m_2 \tau_2 \tilde{\tau}_{R,(1)}^{\alpha_3} - m_1 \tau_1 \tilde{\tau}_{R,(2)}^{\alpha_3} \quad (2.102)$$

e as outras componentes das equa333es (2.1) para ψ 's e $\tilde{\psi}$'s envolvendo os termos quadr3ticos U^i e \tilde{U}^i levam a

$$\begin{aligned} & 2 \left(m_1 \tau_1^2 \left(\tau_2 \partial_+ \tau_{L,(2)}^{\alpha_3} - \tau_{L,(2)}^{\alpha_3} \partial_+ \tau_2 \right) + m_2 \tau_2^2 \left(\tau_1 \partial_+ \tau_{L,(1)}^{\alpha_3} - \tau_{L,(1)}^{\alpha_3} \partial_+ \tau_1 \right) \right) = \\ & m_2^2 \tau_2^2 \tau_L^{\alpha_2} \tau_{R,(0)}^{\alpha_1} - m_3^2 \tau_0 \tau_1 \tau_2 \tau_R^{\alpha_3} - m_2 m_3 \tau_0 \tau_2 \tau_L^{\alpha_2} \tau_{R,(2)}^{\alpha_1} \\ & - m_1^2 \tau_1^2 \tau_L^{\alpha_1} \tau_{R,(0)}^{\alpha_2} + m_1 m_3 \tau_0 \tau_1 \tau_L^{\alpha_1} \tau_{R,(1)}^{\alpha_2} \end{aligned} \quad (2.103)$$

$$\begin{aligned}
& 2 \left(m_2 \tau_2^2 \left(\tau_0 \partial_- \tau_{R,(0)}^{\alpha_1} - \tau_{R,(0)}^{\alpha_1} \partial_- \tau_0 \right) + m_3 \tau_0^2 \left(\tau_{R,(2)}^{\alpha_1} \partial_- \tau_2 - \tau_2 \partial_- \tau_{R,(2)}^{\alpha_1} \right) \right) = \\
& m_1^2 \tau_0 \tau_1 \tau_2 \tau_L^{\alpha_1} - m_3^2 \tau_0^2 \tau_R^{\alpha_3} \tilde{\tau}_{L,(1)}^{\alpha_2} + m_1 m_3 \tau_0 \tau_1 \tau_R^{\alpha_3} \tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_2} \\
& - m_2^2 \tau_2^2 \tilde{\tau}_R^{\alpha_2} \tau_{L,(1)}^{\alpha_3} - m_1 m_2 \tau_1 \tau_2 \tilde{\tau}_R^{\alpha_2} \tau_{L,(2)}^{\alpha_3}
\end{aligned} \tag{2.104}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \left(m_1 \tau_1^2 \left(\tau_0 \partial_- \tau_{R,(0)}^{\alpha_2} - \tau_{R,(0)}^{\alpha_2} \partial_- \tau_0 \right) - m_3 \tau_0^2 \left(\tau_1 \partial_- \tau_{R,(1)}^{\alpha_2} - \tau_{R,(1)}^{\alpha_2} \partial_- \tau_1 \right) \right) = \\
& m_2^2 \tau_0 \tau_1 \tau_2 \tau_L^{\alpha_2} + m_3^2 \tau_0^2 \tau_R^{\alpha_3} \tilde{\tau}_{L,(2)}^{\alpha_1} - m_2 m_3 \tau_0 \tau_2 \tau_R^{\alpha_3} \tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_1} \\
& + m_1 m_2 \tau_1 \tau_2 \tilde{\tau}_R^{\alpha_1} \tau_{L,(1)}^{\alpha_3} + m_1^2 \tau_1^2 \tilde{\tau}_R^{\alpha_1} \tau_{L,(2)}^{\alpha_3}
\end{aligned} \tag{2.105}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \left(m_2 \tau_2^2 \left(\tau_0 \partial_+ \tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_1} - \tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_1} \partial_+ \tau_0 \right) + m_3 \tau_0^2 \left(\tilde{\tau}_{L,(2)}^{\alpha_1} \partial_+ \tau_2 - \tau_2 \partial_+ \tilde{\tau}_{L,(2)}^{\alpha_1} \right) \right) = \\
& m_1^2 \tau_0 \tau_1 \tau_2 \tilde{\tau}_R^{\alpha_1} + m_1 m_3 \tau_0 \tau_1 \tilde{\tau}_L^{\alpha_3} \tau_{R,(0)}^{\alpha_2} - m_3^2 \tau_0^2 \tilde{\tau}_L^{\alpha_3} \tau_{R,(1)}^{\alpha_2} \\
& + m_2^2 \tau_2^2 \tau_L^{\alpha_2} \tilde{\tau}_{R,(1)}^{\alpha_3} + m_1 m_2 \tau_1 \tau_2 \tau_L^{\alpha_2} \tilde{\tau}_{R,(2)}^{\alpha_3}
\end{aligned} \tag{2.106}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \left(m_1 \tau_1^2 \left(\tau_0 \partial_+ \tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_2} - \tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_2} \partial_+ \tau_0 \right) + m_3 \tau_0^2 \left(\tilde{\tau}_{L,(1)}^{\alpha_2} \partial_+ \tau_1 - \tau_1 \partial_+ \tilde{\tau}_{L,(1)}^{\alpha_2} \right) \right) = \\
& m_2^2 \tau_0 \tau_1 \tau_2 \tilde{\tau}_R^{\alpha_2} - m_2 m_3 \tau_0 \tau_2 \tilde{\tau}_L^{\alpha_3} \tau_{R,(0)}^{\alpha_1} + m_3^2 \tau_0^2 \tilde{\tau}_L^{\alpha_3} \tau_{R,(2)}^{\alpha_1} \\
& - m_1 m_2 \tau_1 \tau_2 \tau_L^{\alpha_1} \tilde{\tau}_{R,(1)}^{\alpha_3} - m_1^2 \tau_1^2 \tau_L^{\alpha_1} \tilde{\tau}_{R,(2)}^{\alpha_3}
\end{aligned} \tag{2.107}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \left(m_1 \tau_1^2 \left(\tau_2 \partial_- \tilde{\tau}_{R,(2)}^{\alpha_3} - \tilde{\tau}_{R,(2)}^{\alpha_3} \partial_- \tau_2 \right) + m_2 \tau_2^2 \left(\tau_1 \partial_- \tilde{\tau}_{R,(1)}^{\alpha_3} - \tilde{\tau}_{R,(1)}^{\alpha_3} \partial_- \tau_1 \right) \right) = \\
& m_3^2 \tau_0 \tau_1 \tau_2 \tilde{\tau}_L^{\alpha_3} + m_2 m_3 \tau_0 \tau_2 \tilde{\tau}_R^{\alpha_2} \tilde{\tau}_{L,(2)}^{\alpha_1} - m_2^2 \tau_2^2 \tilde{\tau}_R^{\alpha_2} \tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_1} \\
& - m_1 m_3 \tau_0 \tau_1 \tilde{\tau}_R^{\alpha_1} \tilde{\tau}_{L,(1)}^{\alpha_2} + m_1^2 \tau_1^2 \tilde{\tau}_R^{\alpha_1} \tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_2}
\end{aligned} \tag{2.108}$$

A equivalência entre as correntes vetorial e topológica (2.32) em termos das funções tau se torna

$$\begin{aligned}
& 2 \left(m_1 \tau_2 \left(\tau_1 \partial_+ \tau_0 - \tau_0 \partial_+ \tau_1 \right) + m_2 \tau_1 \left(\tau_2 \partial_+ \tau_0 - \tau_0 \partial_+ \tau_2 \right) \right) = \\
& m_1 m_2 \tau_2 \tau_{R,(0)}^{\alpha_1} \tilde{\tau}_R^{\alpha_1} - m_1 m_3 \tau_0 \tau_{R,(2)}^{\alpha_1} \tilde{\tau}_R^{\alpha_1} + m_1 m_2 \tau_1 \tau_{R,(0)}^{\alpha_2} \tilde{\tau}_R^{\alpha_2} \\
& - m_2 m_3 \tau_0 \tau_{R,(1)}^{\alpha_2} \tilde{\tau}_R^{\alpha_2} - m_2 m_3 \tau_2 \tau_R^{\alpha_3} \tilde{\tau}_{R,(1)}^{\alpha_3} - m_1 m_3 \tau_1 \tau_R^{\alpha_3} \tilde{\tau}_{R,(2)}^{\alpha_3}
\end{aligned} \tag{2.109}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \left(m_1 \tau_2 \left(\tau_1 \partial_- \tau_0 - \tau_0 \partial_- \tau_1 \right) + m_2 \tau_1 \left(\tau_2 \partial_- \tau_0 - \tau_0 \partial_- \tau_2 \right) \right) = \\
& m_2 m_3 \tau_2 \tau_{L,(1)}^{\alpha_3} \tilde{\tau}_L^{\alpha_3} + m_1 m_3 \tau_1 \tau_{L,(2)}^{\alpha_3} \tilde{\tau}_L^{\alpha_3} + m_1 m_2 \tau_2 \tau_L^{\alpha_1} \tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_1} \\
& - m_1 m_3 \tau_0 \tau_L^{\alpha_1} \tilde{\tau}_{L,(2)}^{\alpha_1} + m_1 m_2 \tau_1 \tau_L^{\alpha_2} \tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_2} - m_2 m_3 \tau_0 \tau_L^{\alpha_2} \tilde{\tau}_{L,(1)}^{\alpha_2}
\end{aligned} \tag{2.110}$$

As relações algébricas (quadráticas e homogêneas) entre as funções tau são as seguintes:

$$\tilde{\tau}_R^{\alpha_2} \tau_R^{\alpha_3} + \tau_2 \tau_{R,(0)}^{\alpha_1} - \tau_0 \tau_{R,(2)}^{\alpha_1} = 0$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_R^{\alpha_1} \tau_R^{\alpha_3} - \tau_1 \tau_{R,(0)}^{\alpha_2} + \tau_0 \tau_{R,(1)}^{\alpha_2} &= 0 \\
\tilde{\tau}_R^{\alpha_1} \tilde{\tau}_R^{\alpha_2} - \tau_2 \tilde{\tau}_{R,(1)}^{\alpha_3} + \tau_1 \tilde{\tau}_{R,(2)}^{\alpha_3} &= 0 \\
\tau_L^{\alpha_2} \tilde{\tau}_L^{\alpha_3} - \tau_0 \tilde{\tau}_{L,(2)}^{\alpha_1} + \tau_2 \tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_1} &= 0 \\
\tau_L^{\alpha_1} \tilde{\tau}_L^{\alpha_3} + \tau_0 \tilde{\tau}_{L,(1)}^{\alpha_2} - \tau_1 \tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_2} &= 0 \\
\tau_L^{\alpha_1} \tau_L^{\alpha_2} + \tau_2 \tau_{L,(1)}^{\alpha_3} - \tau_1 \tau_{L,(2)}^{\alpha_3} &= 0
\end{aligned} \tag{2.111}$$

A solução sóliton pode então ser obtida calculando os elementos de matriz (2.53) e (2.87) na realização homogênea de operadores de vértice das três representações fundamentais de álgebra de Kac-Moody afim $su(3)$. Alternativamente podemos obter as mesmas soluções usando o método de Hirota. Neste caso, usa-se o ansatz para a função tau fornecido pelo método de dressing. Para a solução de 1-sóliton tem-se $\tau \sim \delta_0 + \delta_1^{(i)} e^{\Gamma_i(z)} + \delta_2^{(i)} e^{2\Gamma_i(z)} + \dots$, e para dois sólitons ver (2.93). Os coeficientes δ 's podem ser determinados recursivamente usando, por exemplo, o Mathematica. No apêndice .2 fornecemos o conteúdo do programa usado para implementar o método de Hirota. As soluções explícitas são dadas abaixo.

2.2 A carga topológica

Em $(1+1)$ dimensões a corrente topológica é definida como $J_\mu^{\text{Top.}} \sim \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi$, onde Φ é algum escalar de Lorentz. A razão é que, se Φ for uma função, por exemplo infinitamente diferenciável, então certamente as derivadas em relação ao tempo e em relação a coordenada espacial comutam e assim $J_\mu^{\text{Top.}}$ é conservada independentemente das equações de movimento, i.e. $\partial^\mu J_\mu^{\text{Top.}} = 0$. A carga topológica é então $Q^{\text{Top.}} := \int dx J_0^{\text{Top.}} = (\Phi(\infty) - \Phi(-\infty))$. Para soluções com energia finita, os campos têm que se aproximar de uma configuração de vácuo para $x \rightarrow \pm\infty$, e portanto a introdução de uma corrente topológica somente é não -trivial se tivermos mais de um vácuo. A teoria (2.1) tem quatro campos escalares a partir dos quais podemos, a priori, construir cargas topológicas. No entanto, η é um campo livre e sua configuração de vácuo não conduz a nada não -trivial. O campo $\tilde{\nu}$ não é necessário também porque precisamos ter $\tilde{\nu} \rightarrow -\frac{1}{12} \sum_{i=1}^3 m_i^2 x_+ x_-$ as $x \rightarrow \pm\infty$. Portanto, ficamos com dois campos escalares φ_a , $a = 1, 2$. Seguindo a abordagem dos modelos de Toda afim abelianos, introduzimos a seguinte combinação linear dos campos

$$\varphi := \sum_{a=1}^2 \frac{2\alpha_a}{\alpha_a^2} \varphi_a \tag{2.112}$$

onde α_a , $a = 1, 2$, são as raízes simples de $su(3)$ (ver apêndice .1). Temos então que $\varphi_a = \varphi \cdot \lambda_a$, onde λ_a são os pesos fundamentais de $su(3)$ satisfazendo $\frac{2\alpha_a \cdot \lambda_b}{\alpha_a^2} = \delta_{ab}$ [12]. Observa-se que de (2.1), (2.2); (2.5) e (2.6) que os campos φ_a 's entram nas equações de movimento através de combinações $e^{\pm i \varphi \cdot \alpha_j}$, $j = 1, 2, 3$, que são invariantes sob as

transformações

$$\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi\mu \quad (2.113)$$

onde μ é qualquer vetor no espaço das raízes satisfazendo $\alpha_i \cdot \mu \in \mathbb{Z}$. Tais vetores são os chamados pesos de $su(3)$ e constituem uma rede discreta e infinita chamada rede dos pesos [12]. No caso do modelo de Toda afim abeliano, os vácuos da teoria são determinados por tal rede. Contudo no modelo (2.1) se nota que

$$\psi^i = \tilde{\psi}^i = 0; \quad \eta = \eta^{(0)} = \text{const}; \quad \varphi_a = \varphi_a^{(0)} = \text{const}; \quad \tilde{\nu} = -\frac{1}{12} \sum_{i=1}^3 m_i^2 x_+ x_- \quad (2.114)$$

é uma configuração de vácuo para qualquer valor das constantes $\varphi_a^{(0)}$ e $\eta^{(0)}$. Consequentemente, as configurações de vácuo dos campos φ_a não são determinadas pela rede dos pesos de $su(3)$. O que veremos abaixo é que as cargas das soluções de 1-sóliton de (2.1) se situam de fato na rede de pesos de três subálgebras $su(2)$ associadas às três raízes positivas de $su(3)$.

Definiremos a corrente e carga topológicas como

$$J_\mu^{\text{Top.}} := \frac{1}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi; \quad Q^{\text{Top.}} := \int dx J_0^{\text{Top.}} = \frac{1}{2\pi} (\varphi(\infty) - \varphi(-\infty)) \quad (2.115)$$

Em termos das funções tau introduzidas em (2.52) pode-se expressar a carga topológica como

$$Q^{\text{Top.}} = \frac{i}{2\pi} \sum_{a=1}^2 \frac{2\alpha_a}{\alpha_a^2} \ln \frac{\tau_a}{\tau_0} \Big|_{-\infty}^{\infty} \quad (2.116)$$

A relação (2.52) implica que $-i\varphi_a = \ln \left| \frac{\tau_a}{\tau_0} \right| + i \arg \frac{\tau_a}{\tau_0}$. Portanto, para termos soluções reais para os campos φ_a , precisamos que $|\tau_a| = |\tau_0|$. Dadas as soluções para as funções tau, a relação (2.52) determina φ_a somente modulo 2π . Portanto, as cargas topológicas são definidas a menos de uma combinação linear com coeficientes inteiros de raízes simples α_a (normalizando $\alpha_a^2 = 2$). Quando estivermos calculando as cargas usaremos a escolha do argumento $-\pi \leq \text{Arg}(\tau) < \pi$.

Note que a corrente topológica em (2.32), que é equivalente à corrente espinorial é a projeção de (2.115) no vetor $-4\pi(m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2)$.

2.3 As massas das partículas fundamentais e sólitons

A teoria (2.1) é conformalmente invariante e portanto não tem escala de massa. Contudo, essa simetria pode ser quebrada considerando-se um submodelo no qual o campo η é mantido constante. De fato, tomando-se $\eta = 0$, e considerando a parte

linear das equações (2.1) nota-se que as massas das partículas fundamentais são (ver seção 7 de [6])

$$m_{\psi^i} = m_{\tilde{\psi}^i} = m_i ; \quad m_{\varphi_a} = m_{\tilde{\nu}} = 0 \quad i = 1, 2, 3; \quad a = 1, 2 \quad (2.117)$$

As massas dos sólitons são definidas como sendo a energia da solução no referencial de repouso do sóliton. A energia é medida pela Hamiltoniana ou pelo tensor energia-momento. A teoria (2.1) não possui uma Lagrangiana e assim não temos como obter o tensor energia-momento por meios diretos. No entanto, na referência [6] foi mostrado que (2.1) pertence a uma classe de teorias obtidas por redução Hamiltoniana do modelo WZNW de dois loops [2, 7]. Pode-se então obter um tensor energia-momento para (2.1) como

$$\Theta_{\mu\nu} = L_{\mu\nu}^{\text{red.}} - S_{\mu\nu} \quad (2.118)$$

onde $L_{\mu\nu}^{\text{red.}}$ é o tensor de energia-momento reduzido para o modelo WZNW de dois loops que, antes da redução Hamiltoniana é da forma de Sugawara, e

$$S_{\mu\nu} = -k \left(\partial_\mu \partial_\nu - g_{\mu\nu} \partial^2 \right) \left(\tilde{\nu} + \frac{i}{3} (\varphi_1 + \varphi_2) \right) \quad (2.119)$$

com k sendo a constante de acoplamento do modelo WZNW de dois loops [6, 2, 7]. O tensor (2.118) é conservado e de traço nulo devido à simetria conforme de (2.1).

Como argumentado em [1], integrando Θ_{00} para uma solução sóliton em seu referencial de repouso deve-se obter zero, já que não há escala de massa, devido à simetria conforme. Portanto, temos que definir as massas dos sólitons em termos do tensor energia-momento da teoria com a simetria conforme espontaneamente quebrada mantendo-se o campo η constante. O tensor

$$\Theta_{\mu\nu}^{\text{broken}} := \Theta_{\mu\nu} |_{\eta=\text{constant}} \quad (2.120)$$

é simétrico e conservado, porque $\eta = \text{constant}$ é uma solução das equações de movimento. Então, fixando-se a energia da teoria massiva proporcional à integral espacial de $\Theta_{00}^{\text{broken}}$. Usando (2.119) e (2.118), obtemos a massa do sóliton na forma

$$\begin{aligned} \frac{M}{\sqrt{1-v^2}} &:= - \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \Theta_{00}^{\text{broken}} - E_{\text{vac.}} \right) \\ &= -k \partial_x \left(\tilde{\nu} + \frac{i}{3} (\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{x_+ x_-}{12} \sum_{i=1}^3 m_i^2 \right) \Big|_{-\infty}^{\infty}, \\ &= \frac{k}{3} \partial_x \sum_{j=0}^2 \ln \tau_j \Big|_{-\infty}^{\infty} \end{aligned} \quad (2.121)$$

porque a integral de $L_{00}^{\text{red.}}$ se anula como consequência da simetria conforme como visto acima, e onde usamos (2.52). O termo $E_{\text{vac.}}$ corresponde a uma subtração da energia de vácuo, associado ao fato que a configuração de vácuo de $\tilde{\nu}$ é $-(1/12) \sum_{i=1}^3 m_i^2 x_+ x_-$. Portanto, a massa do sóliton é determinada pelo comportamento assintótico da solução.

2.4 Os time delays

Sólitons são soluções clássicas que se movem com velocidade constante sem se dispersar e que mantêm sua forma após um espalhamento, o único efeito deste sendo uma mudança da fase. Mostraremos agora que os sólitons que obtivemos são sólitons no sentido acima. Calcularemos os chamados time delays para o espalhamento de dois sólitons usando as técnicas de [9, 4].

Consideramos dois sólitons que no passado distante estão bem distantes, então colidem perto de $t = 0$ e então se separam novamente no futuro distante. Portanto, exceto pela região onde o espalhamento ocorre, os sólitons estão livres e assim movem-se com velocidade constante. Denotaremos as trajetórias de um dos sólitons antes e depois da colisão por

$$x = vt + x(I) \quad \text{and} \quad x = vt + x(F) \quad (2.122)$$

O deslocamento lateral num tempo fixo é medido por

$$\Delta(x) := x(F) - x(I) \quad (2.123)$$

O time delay é definido por

$$\Delta(t) := t(F) - t(I) = -\frac{\Delta(x)}{v} \quad (2.124)$$

com as intersecções com o eixo dos tempos sendo dadas por $t(F) = -x(F)/v$ e $t(I) = -x(I)/v$. O deslocamento lateral e o time delay não são invariantes de Lorentz mas a seguinte combinação é

$$E\Delta(x) = -p\Delta(t) \quad (2.125)$$

com E e $p = vE$ sendo a energia e o momento do sólíton respectivamente. Sendo E positiva, segue que $\Delta(x)$ tem o mesmo sinal em qualquer sistema de referência. Por outro lado, o time delay pode ter seu sinal alterado por transformações de Lorentz. Pode-se mostrar que os deslocamentos laterais e time delays para dois sólitons participando de uma colisão têm que satisfazer [9, 4]

$$E_1\Delta_1(x) + E_2\Delta_2(x) = 0 ; \quad p_1\Delta_1(t) + p_2\Delta_2(t) = 0 \quad (2.126)$$

com os subíndices i rotulando as quantias associadas com a partícula i . Note portanto que, já que as energias são positivas, os deslocamentos laterais têm sinais opostos. Claramente, no centro de momento, onde $p_1 + p_2 = 0$, os time delays são iguais, i.e. $\Delta_1^{(\text{comf})}(t) = \Delta_2^{(\text{comf})}(t)$. Portanto, de (2.125) temos que $E_1^{(\text{comf})}\Delta_1^{(\text{comf})}(x)/p_1 = -E_2^{(\text{comf})}\Delta_2^{(\text{comf})}(x)/p_1 = -\Delta_1^{(\text{comf})}(t) = -\Delta_2^{(\text{comf})}(t)$. Consequentemente, já que $\Delta(x)$ tem o mesmo sinal em qualquer sistema de referência, segue que, se a partícula

1 se move mais rápido para a direita que a 2 (tal que p_1 é positiva em), então $(-\Delta_1(x))$, $\Delta_2(x)$, $\Delta_1^{(\text{comf})}(t)$ e $\Delta_2^{(\text{comf})}(t)$ todos têm o mesmo sinal. A interpretação física do sinal é relacionada ao caráter (atrativo ou repulsivo) das forças de interação. De fato, se a força é atrativa, então a partícula 1 irá acelerar conforme ela se aproxima da partícula 2 e então desacelerar. Isto significa que $\Delta_1(x)$ é positivo e o sinal comum negativo. Portanto, forças atrativas dão origem a um time delay negativo no centro de momento, e forças repulsivas a um time delay positivo. Estas considerações feitas acima assumem que as duas partículas passam uma pela outra, e que não há reflexão. Mas se as massas das duas partículas forem iguais existe a possibilidade de ocorrer reflexão.

Para calcular o time delay escolhemos que a partícula 1 se movendo para a direita mais rápido que a partícula 2, i.e. $v_1 > v_2$, com $v_1 > 0$, e portanto de (2.91) $|z_1| > |z_2|$ ou $\theta_1 > \theta_2$, onde denotamos $z_a := \epsilon_a e^{\theta_a}$ com $\epsilon_a = \pm 1$. Segumos então o sóliton 1 no tempo [9], i.e. mantemos $x - v_1 t$ fixo enquanto o tempo varia. Então obtem-se $x - v_2 t = \text{const.} + (v_1 - v_2)t$, com $\text{const.} = x - v_1 t$. Concluímos de (2.90) que, se $\epsilon_2 = 1$, $e^{\Gamma(z_2)} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow -\infty$, e $e^{\Gamma(z_2)} \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$ (Γ significa um dos três Γ_i de (2.90), correspondentes ao sóliton que denotamos por 2 nesta seção). Para o caso $\epsilon_2 = -1$ os limites são permutados entre si.

Como será visto na seção 3.2, tomando-se $\epsilon_2 = 1$, todas as soluções de 2-sóliton se tornam, no limite $t \rightarrow -\infty$, uma solução de 1-sóliton. Agora, no limite $t \rightarrow \infty$, as soluções de 2-sóliton também se tornam soluções de 1-sóliton, mas com a substituição

$$e^{\Gamma(z_1)} \rightarrow \left(\frac{z_1 - \omega z_2}{z_1 + \omega z_2} \right)^n e^{\Gamma(z_1)} \quad (2.127)$$

onde n é 1 ou 2, e $\omega = \pm 1$, dependendo do tipo de sóliton em consideração. Portanto, o efeito relevante do espalhamento nas soluções é um deslocamento lateral do sóliton 1 dado por

$$\gamma_1(x - v_1 t) \rightarrow \gamma_1 \left(x - v_1 t + \frac{1}{\gamma_1} \ln \left(\frac{z_1 - \omega z_2}{z_1 + \omega z_2} \right)^n \right) \quad (2.128)$$

Se escolhermos $\epsilon_2 = -1$ notamos que a direção da flecha em (2.128) se inverte. Portanto, usando (2.123) vê-se que o deslocamento lateral para o sóliton 1 é expresso por

$$\Delta_1(x) = -\frac{\epsilon_2}{\gamma_1} \ln \left(\frac{z_1 - \omega z_2}{z_1 + \omega z_2} \right)^n = -\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{m \cosh \theta_1} \ln \left(\frac{e^{(\theta_1 - \theta_2)/2} - \epsilon_1 \epsilon_2 \omega e^{-(\theta_1 - \theta_2)/2}}{e^{(\theta_1 - \theta_2)/2} + \epsilon_1 \epsilon_2 \omega e^{-(\theta_1 - \theta_2)/2}} \right)^n \quad (2.129)$$

onde m significa uma das massas m_i , $i = 1, 2, 3$, correspondendo ao sóliton que temos denotado por 1 nesta seção. Sendo $\epsilon_1 \epsilon_2 \omega = \pm 1$, observa-se que $\Delta_1(x)$ pode de fato ser escrito como

$$\Delta_1(x) = -\frac{\omega n}{m \cosh \theta_1} \ln \left(\tanh \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \right) \quad (2.130)$$

Usando (2.124) e (2.130) concluimos que o time delay é dado por (assumindo $v_1 > v_2$, com $v_1 > 0$)

$$\Delta_1(t) = \frac{\omega n}{m \sinh \theta_1} \ln \left(\tanh \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \right) \quad (2.131)$$

Note que assumimos que $\theta_1 > \theta_2$ e assim a tangente hiperbólica pode variar de 0 a 1 e assim seu logaritmo é sempre negativo, e de (2.130) vemos que $\Delta_1(x)$ para $v_1 > v_2$, com $v_1 > 0$, tem o mesmo sinal que ω . Portanto, das considerações feitas acima, concluimos que as forças entre os sólitons é atrativa para $\omega = 1$, e repulsivas para $\omega = -1$. Na seção 3.2 discutiremos os detalhes de cada tipo de solução 2-sóliton.

Capítulo 3

As Soluções Sólitons

3.1 Soluções de 1-sóliton

Como discutido na seção 2.1 as soluções 1-sóliton são obtidas a partir do elemento de grupo ρ , efetuando-se as transformações dressing, como em (2.88). Portanto, para cada raiz positiva de $su(3)$ temos uma espécie diferente de sóliton. Fornecemos abaixo os resultados obtidos seja calculando elementos de matriz (2.53) e (2.87), ou usando o método de Hirota (ver programa no apêndice .2). Como mostraremos abaixo, a solução de 1-sóliton associada a uma determinada raiz excita somente as funções tau associadas a essa mesma raiz. Portanto, cada espécie de 1-sóliton pertence a uma, e somente uma, das três subálgebras $su(2)$ associadas às raízes positivas de $su(3)$.

3.1.1 1-sóliton de espécie α_1

Neste caso temos $G_1 = \exp\left(e^{\Gamma_1(z)} V_{\alpha_1}\left(a_{\alpha_1}^{\pm}, z\right)\right)$. As únicas funções tau não -nulas são dadas por

$$\begin{aligned}\tau_0 &= 1 - \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_1}^+}{4} e^{2\Gamma_1(z)}; & \tau_1 &= 1 + \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_1}^+}{4} e^{2\Gamma_1(z)}; & \tau_2 &= 1 - \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_1}^+}{4} e^{2\Gamma_1(z)} \\ \tau_{R,(0)}^{\alpha_1} &= a_{\alpha_1}^+ z e^{\Gamma_1(z)}; & \tau_{R,(2)}^{\alpha_1} &= a_{\alpha_1}^+ z e^{\Gamma_1(z)}; & \tau_L^{\alpha_1} &= a_{\alpha_1}^+ e^{\Gamma_1(z)} \\ \tilde{\tau}_R^{\alpha_1} &= a_{\alpha_1}^- e^{\Gamma_1(z)}; & \tilde{\tau}_{L,(2)}^{\alpha_1} &= -\frac{a_{\alpha_1}^-}{z} e^{\Gamma_1(z)}; & \tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_1} &= -\frac{a_{\alpha_1}^-}{z} e^{\Gamma_1(z)}\end{aligned}\quad (3.1)$$

Como discutido abaixo (2.116), para termos φ_a real precisamos que $|\tau_a| = |\tau_0|$, e conseqüentemente $a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_1}^+$ tem que ter a parte real nula. A corrente topológica (2.116) é então *

$$Q^{\text{Top.}} = -\frac{1}{2} \alpha_1 (\text{sign } z) \quad (3.2)$$

*Normalizaremos as raízes como $\alpha_i^2 = 2, i = 1, 2, 3$.

e assim ela é (a menos de sinal) o peso fundamental da subálgebra $su(2)$ gerada por H_1 e $E_{\pm\alpha_1}$.

Usando (2.121) e (2.91) obtem-se que a massa deste sóliton é

$$M_{\text{sol.}}^{(\alpha_1)} = 2 k m_1 \quad (3.3)$$

3.1.2 1-sóliton de espécie α_2

Temos então que $G_2 = \exp(e^{\Gamma_2(z)} V_{\alpha_2}(a_{\alpha_2}^{\pm}, z))$. As únicas funções tau não-nulas são

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 1 - \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_2}^+}{4} e^{2\Gamma_2(z)} & \tau_1 &= 1 - \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_2}^+}{4} e^{2\Gamma_2(z)} & \tau_2 &= 1 + \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_2}^+}{4} e^{2\Gamma_2(z)} \\ \tau_{R,(0)}^{\alpha_2} &= a_{\alpha_2}^+ z e^{\Gamma_2(z)} & \tau_{R,(1)}^{\alpha_2} &= a_{\alpha_2}^+ z e^{\Gamma_2(z)} & \tau_L^{\alpha_2} &= a_{\alpha_2}^+ e^{\Gamma_2(z)} \\ \tilde{\tau}_R^{\alpha_2} &= a_{\alpha_2}^- e^{\Gamma_2(z)} & \tilde{\tau}_{L,(1)}^{\alpha_2} &= -\frac{a_{\alpha_2}^-}{z} e^{\Gamma_2(z)} & \tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_2} &= -\frac{a_{\alpha_2}^-}{z} e^{\Gamma_2(z)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Similarmente, para termos φ_a real precisamos que $a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_2}^+$ seja imaginário. A corrente topológica (2.116) é então

$$Q^{\text{Top.}} = -\frac{1}{2} \alpha_2 (\text{sign } z) \quad (3.5)$$

e assim é (a menos de sinal) o peso fundamental da subálgebra $su(2)$ gerada por H_2 e $E_{\pm\alpha_2}$.

Usando (2.121) e (2.91) obtemos que a massa deste sóliton é

$$M_{\text{sol.}}^{(\alpha_2)} = 2 k m_2 \quad (3.6)$$

3.1.3 1-sóliton de espécie α_3

Aqui temos $G_3 = \exp(e^{\Gamma_3(z)} V_{\alpha_3}(a_{\alpha_3}^{\pm}, z))$. As funções tau não-triviais são

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 1 - \frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_3}^+}{4} e^{2\Gamma_3(z)} & \tau_1 &= 1 + \frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_3}^+}{4} e^{2\Gamma_3(z)} & \tau_2 &= 1 + \frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_3}^+}{4} e^{2\Gamma_3(z)} \\ \tau_R^{\alpha_3} &= a_{\alpha_3}^+ z e^{\Gamma_3(z)} & \tau_{L,(1)}^{\alpha_3} &= -a_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_3(z)} & \tau_{L,(2)}^{\alpha_3} &= -a_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_3(z)} \\ \tilde{\tau}_{R,(1)}^{\alpha_3} &= a_{\alpha_3}^- e^{\Gamma_3(z)} & \tilde{\tau}_{R,(2)}^{\alpha_3} &= a_{\alpha_3}^- e^{\Gamma_3(z)} & \tilde{\tau}_L^{\alpha_3} &= -\frac{a_{\alpha_3}^-}{z} e^{\Gamma_3(z)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Analogamente, para termos φ_a real precisamos que $a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_3}^+$ seja imaginário puro. A corrente topológica (2.116) é

$$Q^{\text{Top.}} = -\frac{1}{2} \alpha_3 (\text{sign } z) \quad (3.8)$$

e é então (a menos de um sinal somente) o peso fundamental da subálgebra $su(2)$ gerada por $H_1 + H_2$ and $E_{\pm\alpha_3}$.

Usando (2.121) e (2.91) obtém-se que a massa deste sóliton é

$$M_{\text{sol.}}^{(\alpha_3)} = 2 k m_3 \quad (3.9)$$

3.2 Soluções 2-sóliton

Apresentamos agora as seis 2-sóliton que correspondem aos pares que podemos formar com as três espécies de sóliton construídas na seção 3.1. As soluções são construídas efetuando-se as transformações dressing com o elemento de grupo ρ conduzindo aos elementos G_{ij} dados em (2.89). Ao invés de calcular os elementos de matriz em (2.53) e(2.87) usando a realização das três representações fundamentais de $\hat{\mathcal{G}}$ em termos de operadores de vértice homogêneos, caculamos as soluções usando o método de Hirota com o ansatz (2.93). O cálculo dos coeficientes δ 's foi efetuada usando o programa escrito no Mathematica descrito no apêndice .2.

3.2.1 2-sóliton de espécies α_1/α_1

Abaixo segue a solução 2-sóliton obtida tomando-se o elemento de grupo em (2.89) como $G_{11} = \exp\left(e^{\Gamma_1(z_1)} V_{\alpha_1}\left(a_{\alpha_1}^{\pm}, z_1\right)\right) \exp\left(e^{\Gamma_1(z_2)} V_{\alpha_1}\left(b_{\alpha_1}^{\pm}, z_2\right)\right)$. As funções tau não -triviais são

$$\begin{aligned} \tau_0 = & 1 - \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_1}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)}}{4} - \frac{b_{\alpha_1}^- b_{\alpha_1}^+ e^{2\Gamma_1(z_2)}}{4} \\ & + \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_1}^+ b_{\alpha_1}^- b_{\alpha_1}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)+2\Gamma_1(z_2)} (z_1 - z_2)^4}{16 (z_1 + z_2)^4} \\ & + \frac{e^{\Gamma_1(z_1)+\Gamma_1(z_2)} \left(- \left(a_{\alpha_1}^+ b_{\alpha_1}^- z_1 z_2 \right) - a_{\alpha_1}^- b_{\alpha_1}^+ z_1 z_2 \right)}{(z_1 + z_2)^2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \tau_1 = & 1 + \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_1}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)}}{4} + \frac{b_{\alpha_1}^- b_{\alpha_1}^+ e^{2\Gamma_1(z_2)}}{4} \\ & + \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_1}^+ b_{\alpha_1}^- b_{\alpha_1}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)+2\Gamma_1(z_2)} (z_1 - z_2)^4}{16 (z_1 + z_2)^4} \\ & - \frac{e^{\Gamma_1(z_1)+\Gamma_1(z_2)} z_1 z_2 \left(- \frac{a_{\alpha_1}^+ b_{\alpha_1}^- z_1}{z_2} - \frac{a_{\alpha_1}^- b_{\alpha_1}^+ z_2}{z_1} \right)}{(z_1 + z_2)^2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\tau_2 = 1 - \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_1}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)}}{4} - \frac{b_{\alpha_1}^- b_{\alpha_1}^+ e^{2\Gamma_1(z_2)}}{4}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_1}^+ b_{\alpha_1}^- b_{\alpha_1}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)+2\Gamma_1(z_2)} (z_1 - z_2)^4}{16 (z_1 + z_2)^4} \\
& + \frac{e^{\Gamma_1(z_1)+\Gamma_1(z_2)} \left(- (a_{\alpha_1}^+ b_{\alpha_1}^- z_1 z_2) - a_{\alpha_1}^- b_{\alpha_1}^+ z_1 z_2 \right)}{(z_1 + z_2)^2} \quad (3.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_R^{\alpha_1} & = a_{\alpha_1}^- e^{\Gamma_1(z_1)} + b_{\alpha_1}^- e^{\Gamma_1(z_2)} + \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_1}^+ b_{\alpha_1}^- e^{2\Gamma_1(z_1)+\Gamma_1(z_2)} (z_1 - z_2)^2}{4 (z_1 + z_2)^2} \\
& + \frac{a_{\alpha_1}^- b_{\alpha_1}^- b_{\alpha_1}^+ e^{\Gamma_1(z_1)+2\Gamma_1(z_2)} (z_1 - z_2)^2}{4 (z_1 + z_2)^2} \quad (3.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_L^{\alpha_1} & = a_{\alpha_1}^+ e^{\Gamma_1(z_1)} + b_{\alpha_1}^+ e^{\Gamma_1(z_2)} + \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_1}^+ b_{\alpha_1}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)+\Gamma_1(z_2)} (z_1 - z_2)^2}{4 (z_1 + z_2)^2} \\
& + \frac{a_{\alpha_1}^+ b_{\alpha_1}^- b_{\alpha_1}^+ e^{\Gamma_1(z_1)+2\Gamma_1(z_2)} (z_1 - z_2)^2}{4 (z_1 + z_2)^2} \quad (3.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_{L,(2)}^{\alpha_1} & = -\frac{a_{\alpha_1}^- e^{\Gamma_1(z_1)}}{z_1} - \frac{b_{\alpha_1}^- e^{\Gamma_1(z_2)}}{z_2} + \frac{a_{\alpha_1}^- b_{\alpha_1}^- b_{\alpha_1}^+ e^{\Gamma_1(z_1)+2\Gamma_1(z_2)} (z_1 - z_2)^2}{4 z_1 (z_1 + z_2)^2} \\
& + \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_1}^+ b_{\alpha_1}^- e^{2\Gamma_1(z_1)+\Gamma_1(z_2)} (z_1 - z_2)^2}{4 z_2 (z_1 + z_2)^2} \quad (3.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_1} & = -\frac{a_{\alpha_1}^- e^{\Gamma_1(z_1)}}{z_1} - \frac{b_{\alpha_1}^- e^{\Gamma_1(z_2)}}{z_2} + \frac{a_{\alpha_1}^- b_{\alpha_1}^- b_{\alpha_1}^+ e^{\Gamma_1(z_1)+2\Gamma_1(z_2)} (z_1 - z_2)^2}{4 z_1 (z_1 + z_2)^2} \\
& + \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_1}^+ b_{\alpha_1}^- e^{2\Gamma_1(z_1)+\Gamma_1(z_2)} (z_1 - z_2)^2}{4 z_2 (z_1 + z_2)^2} \quad (3.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{R,(0)}^{\alpha_1} & = a_{\alpha_1}^+ e^{\Gamma_1(z_1)} z_1 + b_{\alpha_1}^+ e^{\Gamma_1(z_2)} z_2 - \frac{a_{\alpha_1}^+ b_{\alpha_1}^- b_{\alpha_1}^+ e^{\Gamma_1(z_1)+2\Gamma_1(z_2)} z_1 (z_1 - z_2)^2}{4 (z_1 + z_2)^2} \\
& - \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_1}^+ b_{\alpha_1}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)+\Gamma_1(z_2)} (z_1 - z_2)^2 z_2}{4 (z_1 + z_2)^2} \quad (3.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{R,(2)}^{\alpha_1} & = a_{\alpha_1}^+ e^{\Gamma_1(z_1)} z_1 + b_{\alpha_1}^+ e^{\Gamma_1(z_2)} z_2 - \frac{a_{\alpha_1}^+ b_{\alpha_1}^- b_{\alpha_1}^+ e^{\Gamma_1(z_1)+2\Gamma_1(z_2)} z_1 (z_1 - z_2)^2}{4 (z_1 + z_2)^2} \\
& - \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_1}^+ b_{\alpha_1}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)+\Gamma_1(z_2)} (z_1 - z_2)^2 z_2}{4 (z_1 + z_2)^2} \quad (3.18)
\end{aligned}$$

Pode-se verificar que, no limite $e^{\Gamma_1(z_2)} \rightarrow 0$, tal solução se torna uma solução de 1-sóliton (3.1). Agora, considerando-se razões de funções tau aparecendo nas relações (2.52) e (2.86) observa-se que no limite $e^{\Gamma_1(z_2)} \rightarrow \infty$, tal solução se torna uma solução de 1-sóliton (3.1) novamente, mas com a substituição

$$e^{\Gamma_1(z_1)} \rightarrow \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \right)^2 e^{\Gamma_1(z_1)} \quad (3.19)$$

e com a razão τ_1/τ_0 mudando de sinal. Portanto, comparando com (2.127), observamos que o deslocamento lateral e o time delay para esta solução 2-sóliton é dado por (2.130) e (2.131) respectivamente, com $n = 2$ e $\omega = 1$. Conseqüentemente, os sóltons de espécies α_1 sentem uma força atrativa.

3.2.2 2-sóliton de espécies α_2/α_2

Seguem aqui os resultados da solução de 2-soliton obtida usando o elemento de grupo de (2.89) como $G_{22} = \exp\left(e^{\Gamma_2(z_1)}V_{\alpha_2}\left(a_{\alpha_2}^{\pm}, z_1\right)\right) \exp\left(e^{\Gamma_2(z_2)}V_{\alpha_2}\left(b_{\alpha_2}^{\pm}, z_2\right)\right)$. As funções tau não -nulas são

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 1 - \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_2}^+ e^{2\Gamma_2(z_1)}}{4} - \frac{b_{\alpha_2}^- b_{\alpha_2}^+ e^{2\Gamma_2(z_2)}}{4} \\ &+ \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_2}^+ b_{\alpha_2}^- b_{\alpha_2}^+ e^{2\Gamma_2(z_1)+2\Gamma_2(z_2)} (z_1 - z_2)^4}{16 (z_1 + z_2)^4} \\ &+ \frac{e^{\Gamma_2(z_1)+\Gamma_2(z_2)} \left(- \left(a_{\alpha_2}^+ b_{\alpha_2}^- z_1 z_2 \right) - a_{\alpha_2}^- b_{\alpha_2}^+ z_1 z_2 \right)}{(z_1 + z_2)^2} \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 1 - \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_2}^+ e^{2\Gamma_2(z_1)}}{4} - \frac{b_{\alpha_2}^- b_{\alpha_2}^+ e^{2\Gamma_2(z_2)}}{4} \\ &+ \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_2}^+ b_{\alpha_2}^- b_{\alpha_2}^+ e^{2\Gamma_2(z_1)+2\Gamma_2(z_2)} (z_1 - z_2)^4}{16 (z_1 + z_2)^4} \\ &+ \frac{e^{\Gamma_2(z_1)+\Gamma_2(z_2)} \left(- \left(a_{\alpha_2}^+ b_{\alpha_2}^- z_1 z_2 \right) - a_{\alpha_2}^- b_{\alpha_2}^+ z_1 z_2 \right)}{(z_1 + z_2)^2} \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \tau_2 &= 1 + \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_2}^+ e^{2\Gamma_2(z_1)}}{4} + \frac{b_{\alpha_2}^- b_{\alpha_2}^+ e^{2\Gamma_2(z_2)}}{4} \\ &+ \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_2}^+ b_{\alpha_2}^- b_{\alpha_2}^+ e^{2\Gamma_2(z_1)+2\Gamma_2(z_2)} (z_1 - z_2)^4}{16 (z_1 + z_2)^4} \\ &- \frac{e^{\Gamma_2(z_1)+\Gamma_2(z_2)} z_1 z_2 \left(- \frac{a_{\alpha_2}^+ b_{\alpha_2}^- z_1}{z_2} - \frac{a_{\alpha_2}^- b_{\alpha_2}^+ z_2}{z_1} \right)}{(z_1 + z_2)^2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_R^{\alpha_2} &= a_{\alpha_2}^- e^{\Gamma_2(z_1)} + b_{\alpha_2}^- e^{\Gamma_2(z_2)} + \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_2}^+ b_{\alpha_2}^- e^{2\Gamma_2(z_1)+\Gamma_2(z_2)} (z_1 - z_2)^2}{4 (z_1 + z_2)^2} \\ &+ \frac{a_{\alpha_2}^- b_{\alpha_2}^- b_{\alpha_2}^+ e^{\Gamma_2(z_1)+2\Gamma_2(z_2)} (z_1 - z_2)^2}{4 (z_1 + z_2)^2} \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\tau_L^{\alpha_2} = a_{\alpha_2}^+ e^{\Gamma_2(z_1)} + b_{\alpha_2}^+ e^{\Gamma_2(z_2)} + \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_2}^+ b_{\alpha_2}^+ e^{2\Gamma_2(z_1)+\Gamma_2(z_2)} (z_1 - z_2)^2}{4 (z_1 + z_2)^2}$$

$$+ \frac{a_{\alpha_2}^+ b_{\alpha_2}^- b_{\alpha_2}^+ e^{\Gamma_2(z_1)+2\Gamma_2(z_2)} (z_1 - z_2)^2}{4 (z_1 + z_2)^2} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{L,(1)}^{\alpha_2} &= -\frac{a_{\alpha_2}^- e^{\Gamma_2(z_1)}}{z_1} - \frac{b_{\alpha_2}^- e^{\Gamma_2(z_2)}}{z_2} + \frac{a_{\alpha_2}^- b_{\alpha_2}^- b_{\alpha_2}^+ e^{\Gamma_2(z_1)+2\Gamma_2(z_2)} (z_1 - z_2)^2}{4 z_1 (z_1 + z_2)^2} \\ &+ \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_2}^+ b_{\alpha_2}^- e^{2\Gamma_2(z_1)+\Gamma_2(z_2)} (z_1 - z_2)^2}{4 z_2 (z_1 + z_2)^2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_2} &= -\frac{a_{\alpha_2}^- e^{\Gamma_2(z_1)}}{z_1} - \frac{b_{\alpha_2}^- e^{\Gamma_2(z_2)}}{z_2} + \frac{a_{\alpha_2}^- b_{\alpha_2}^- b_{\alpha_2}^+ e^{\Gamma_2(z_1)+2\Gamma_2(z_2)} (z_1 - z_2)^2}{4 z_1 (z_1 + z_2)^2} \\ &+ \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_2}^+ b_{\alpha_2}^- e^{2\Gamma_2(z_1)+\Gamma_2(z_2)} (z_1 - z_2)^2}{4 z_2 (z_1 + z_2)^2} \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \tau_{R,(0)}^{\alpha_2} &= a_{\alpha_2}^+ e^{\Gamma_2(z_1)} z_1 + b_{\alpha_2}^+ e^{\Gamma_2(z_2)} z_2 - \frac{a_{\alpha_2}^+ b_{\alpha_2}^- b_{\alpha_2}^+ e^{\Gamma_2(z_1)+2\Gamma_2(z_2)} z_1 (z_1 - z_2)^2}{4 (z_1 + z_2)^2} \\ &- \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_2}^+ b_{\alpha_2}^+ e^{2\Gamma_2(z_1)+\Gamma_2(z_2)} (z_1 - z_2)^2 z_2}{4 (z_1 + z_2)^2} \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \tau_{R,(1)}^{\alpha_2} &= a_{\alpha_2}^+ e^{\Gamma_2(z_1)} z_1 + b_{\alpha_2}^+ e^{\Gamma_2(z_2)} z_2 - \frac{a_{\alpha_2}^+ b_{\alpha_2}^- b_{\alpha_2}^+ e^{\Gamma_2(z_1)+2\Gamma_2(z_2)} z_1 (z_1 - z_2)^2}{4 (z_1 + z_2)^2} \\ &- \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_2}^+ b_{\alpha_2}^+ e^{2\Gamma_2(z_1)+\Gamma_2(z_2)} (z_1 - z_2)^2 z_2}{4 (z_1 + z_2)^2} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Pode-se verificar que tomando-se o limite $e^{\Gamma_2(z_2)} \rightarrow 0$, essa solução se torna a solução de 1-sóliton (3.4). Agora, considerando as razões de funções tau aparecendo em (2.52) e (2.86) observa-se que no limite $e^{\Gamma_2(z_2)} \rightarrow \infty$, tal solução se torna a solução de 1-sóliton (3.4) novamente, mas com a substituição

$$e^{\Gamma_2(z_1)} \rightarrow \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \right)^2 e^{\Gamma_2(z_1)} \quad (3.29)$$

e com a razão τ_2/τ_0 mudando de sinal. Portanto, comparando com (2.127), notamos que o deslocamento lateral e o time delay para esta solução 2-sóliton são dados por (2.130) e (2.131) respectivamente, com $n = 2$ e $\omega = 1$. Consequentemente, os sólitons de espécie α_2 sentem uma força atrativa.

3.2.3 2-sóliton de espécies α_3/α_3

Aqui seguem as soluções de 2-sóliton obtidas quando o elemento de grupo de (2.89) é $G_{33} = \exp \left(e^{\Gamma_3(z_1)} V_{\alpha_3} \left(a_{\alpha_3}^\pm, z_1 \right) \right) \exp \left(e^{\Gamma_3(z_2)} V_{\alpha_3} \left(b_{\alpha_3}^\pm, z_2 \right) \right)$. As funções tau não-nulas são

$$\tau_0 = 1 - \frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_3}^+ e^{2\Gamma_3(z_1)}}{4} - \frac{b_{\alpha_3}^- b_{\alpha_3}^+ e^{2\Gamma_3(z_2)}}{4}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_3}^+ b_{\alpha_3}^- b_{\alpha_3}^+ e^{2\Gamma_3(z_1)+2\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)^4}{16 (z_1 + z_2)^4} \\
& + \frac{e^{\Gamma_3(z_1)+\Gamma_3(z_2)} \left(- \left(a_{\alpha_3}^+ b_{\alpha_3}^- z_1 z_2 \right) - a_{\alpha_3}^- b_{\alpha_3}^+ z_1 z_2 \right)}{(z_1 + z_2)^2} \tag{3.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_1 & = 1 + \frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_3}^+ e^{2\Gamma_3(z_1)}}{4} + \frac{b_{\alpha_3}^- b_{\alpha_3}^+ e^{2\Gamma_3(z_2)}}{4} \\
& + \frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_3}^+ b_{\alpha_3}^- b_{\alpha_3}^+ e^{2\Gamma_3(z_1)+2\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)^4}{16 (z_1 + z_2)^4} \\
& - \frac{e^{\Gamma_3(z_1)+\Gamma_3(z_2)} z_1 z_2 \left(-\frac{a_{\alpha_3}^+ b_{\alpha_3}^- z_1}{z_2} - \frac{a_{\alpha_3}^- b_{\alpha_3}^+ z_2}{z_1} \right)}{(z_1 + z_2)^2} \tag{3.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_2 & = 1 + \frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_3}^+ e^{2\Gamma_3(z_1)}}{4} + \frac{b_{\alpha_3}^- b_{\alpha_3}^+ e^{2\Gamma_3(z_2)}}{4} \\
& + \frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_3}^+ b_{\alpha_3}^- b_{\alpha_3}^+ e^{2\Gamma_3(z_1)+2\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)^4}{16 (z_1 + z_2)^4} \\
& - \frac{e^{\Gamma_3(z_1)+\Gamma_3(z_2)} z_1 z_2 \left(-\frac{a_{\alpha_3}^+ b_{\alpha_3}^- z_1}{z_2} - \frac{a_{\alpha_3}^- b_{\alpha_3}^+ z_2}{z_1} \right)}{(z_1 + z_2)^2} \tag{3.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_R^{\alpha_3} & = a_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_3(z_1)} z_1 + b_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_3(z_2)} z_2 - \frac{a_{\alpha_3}^+ b_{\alpha_3}^- b_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_3(z_1)+2\Gamma_3(z_2)} z_1 (z_1 - z_2)^2}{4 (z_1 + z_2)^2} \\
& - \frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_3}^+ b_{\alpha_3}^+ e^{2\Gamma_3(z_1)+\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)^2 z_2}{4 (z_1 + z_2)^2} \tag{3.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_L^{\alpha_3} & = -\frac{a_{\alpha_3}^- e^{\Gamma_3(z_1)}}{z_1} - \frac{b_{\alpha_3}^- e^{\Gamma_3(z_2)}}{z_2} + \frac{a_{\alpha_3}^- b_{\alpha_3}^- b_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_3(z_1)+2\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)^2}{4 z_1 (z_1 + z_2)^2} \\
& + \frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_3}^+ b_{\alpha_3}^- e^{2\Gamma_3(z_1)+\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)^2}{4 z_2 (z_1 + z_2)^2} \tag{3.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{L,(1)}^{\alpha_3} & = - \left(a_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_3(z_1)} \right) - b_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_3(z_2)} - \frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_3}^+ b_{\alpha_3}^+ e^{2\Gamma_3(z_1)+\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)^2}{4 (z_1 + z_2)^2} \\
& - \frac{a_{\alpha_3}^+ b_{\alpha_3}^- b_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_3(z_1)+2\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)^2}{4 (z_1 + z_2)^2} \tag{3.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{L,(2)}^{\alpha_3} & = - \left(a_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_3(z_1)} \right) - b_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_3(z_2)} - \frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_3}^+ b_{\alpha_3}^+ e^{2\Gamma_3(z_1)+\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)^2}{4 (z_1 + z_2)^2} \\
& - \frac{a_{\alpha_3}^+ b_{\alpha_3}^- b_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_3(z_1)+2\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)^2}{4 (z_1 + z_2)^2} \tag{3.36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_{R,(1)}^{\alpha_3} &= a_{\alpha_3}^- e^{\Gamma_3(z_1)} + b_{\alpha_3}^- e^{\Gamma_3(z_2)} + \frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_3}^+ b_{\alpha_3}^- e^{2\Gamma_3(z_1)+\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)^2}{4(z_1 + z_2)^2} \\ &+ \frac{a_{\alpha_3}^- b_{\alpha_3}^- b_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_3(z_1)+2\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)^2}{4(z_1 + z_2)^2}\end{aligned}\quad (3.37)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_{R,(2)}^{\alpha_3} &= a_{\alpha_3}^- e^{\Gamma_3(z_1)} + b_{\alpha_3}^- e^{\Gamma_3(z_2)} + \frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_3}^+ b_{\alpha_3}^- e^{2\Gamma_3(z_1)+\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)^2}{4(z_1 + z_2)^2} \\ &+ \frac{a_{\alpha_3}^- b_{\alpha_3}^- b_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_3(z_1)+2\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)^2}{4(z_1 + z_2)^2}\end{aligned}\quad (3.38)$$

Pode-se verificar que no limite $e^{\Gamma_3(z_2)} \rightarrow 0$, tal solução se torna a solução 1-sóliton (3.7). Considerando agora as razões das funções tau aparecendo nas relações (2.52) e (2.86) observa-se que no limite $e^{\Gamma_3(z_2)} \rightarrow \infty$, tal solução se torna a solução 1-sóliton (3.7) novamente, mas com a substituição

$$e^{\Gamma_3(z_1)} \rightarrow \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \right)^2 e^{\Gamma_3(z_1)} \quad (3.39)$$

feita e as razões τ_1/τ_0 e τ_2/τ_0 mudando sinais. Portanto, comparando com

(2.127), observamos que o deslocamento lateral e o time delay para esta solução 2-sóliton são dados por (2.130) e (2.131) respectivamente com $n = 2$ e $\omega = 1$. Consequentemente, as soluções de espécie α_3 sentem uma força atrativa.

3.2.4 2-sóliton de espécies α_1/α_2

Aqui seguem as soluções 2-sóliton obtidas tomando-se o elemento de grupo em (2.89) como $G_{12} = \exp(e^{\Gamma_1(z_1)} V_{\alpha_1}(a_{\alpha_1}^\pm, z_1)) \exp(e^{\Gamma_2(z_2)} V_{\alpha_2}(a_{\alpha_2}^\pm, z_2))$. As funções tau não-nulas são

$$\begin{aligned}\tau_0 &= 1 - \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_1}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)}}{4} - \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_2}^+ e^{2\Gamma_2(z_2)}}{4} \\ &+ \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_1}^+ a_{\alpha_2}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)+2\Gamma_2(z_2)} (z_1 + z_2)^2}{16(z_1 - z_2)^2}\end{aligned}\quad (3.40)$$

$$\begin{aligned}\tau_1 &= 1 + \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_1}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)}}{4} - \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_2}^+ e^{2\Gamma_2(z_2)}}{4} \\ &- \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_1}^+ a_{\alpha_2}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)+2\Gamma_2(z_2)} (z_1 + z_2)^2}{16(z_1 - z_2)^2}\end{aligned}\quad (3.41)$$

$$\begin{aligned}\tau_2 &= 1 - \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_1}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)}}{4} + \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_2}^+ e^{2\Gamma_2(z_2)}}{4} \\ &- \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_1}^+ a_{\alpha_2}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)+2\Gamma_2(z_2)} (z_1 + z_2)^2}{16(z_1 - z_2)^2}\end{aligned}\quad (3.42)$$

$$\tilde{\tau}_R^{\alpha_1} = a_{\alpha_1}^- e^{\Gamma_1(z_1)} - \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_2}^+ e^{\Gamma_1(z_1)+2\Gamma_2(z_2)} (z_1 + z_2)}{4 (z_1 - z_2)} \quad (3.43)$$

$$\tilde{\tau}_R^{\alpha_2} = a_{\alpha_2}^- e^{\Gamma_2(z_2)} + \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_1}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)+\Gamma_2(z_2)} (z_1 + z_2)}{4 (z_1 - z_2)} \quad (3.44)$$

$$\tau_R^{\alpha_3} = \frac{a_{\alpha_1}^+ a_{\alpha_2}^+ e^{\Gamma_1(z_1)+\Gamma_2(z_2)} z_1 z_2}{z_1 - z_2} \quad (3.45)$$

$$\tau_L^{\alpha_1} = a_{\alpha_1}^+ e^{\Gamma_1(z_1)} + \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_1}^+ a_{\alpha_2}^+ e^{\Gamma_1(z_1)+2\Gamma_2(z_2)} (z_1 + z_2)}{4 (z_1 - z_2)} \quad (3.46)$$

$$\tau_L^{\alpha_2} = a_{\alpha_2}^+ e^{\Gamma_2(z_2)} - \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_1}^+ a_{\alpha_2}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)+\Gamma_2(z_2)} (z_1 + z_2)}{4 (z_1 - z_2)} \quad (3.47)$$

$$\tilde{\tau}_L^{\alpha_3} = \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_2}^- e^{\Gamma_1(z_1)+\Gamma_2(z_2)}}{z_1 - z_2} \quad (3.48)$$

$$\tilde{\tau}_{L,(2)}^{\alpha_1} = -\frac{a_{\alpha_1}^- e^{\Gamma_1(z_1)}}{z_1} + \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_2}^+ e^{\Gamma_1(z_1)+2\Gamma_2(z_2)} (z_1 + z_2)}{4 z_1 (z_1 - z_2)} \quad (3.49)$$

$$\tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_1} = -\frac{a_{\alpha_1}^- e^{\Gamma_1(z_1)}}{z_1} - \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_2}^+ e^{\Gamma_1(z_1)+2\Gamma_2(z_2)} (z_1 + z_2)}{4 z_1 (z_1 - z_2)} \quad (3.50)$$

$$\tilde{\tau}_{L,(1)}^{\alpha_2} = -\frac{a_{\alpha_2}^- e^{\Gamma_2(z_2)}}{z_2} - \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_1}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)+\Gamma_2(z_2)} (z_1 + z_2)}{4 (z_1 - z_2) z_2} \quad (3.51)$$

$$\tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_2} = -\frac{a_{\alpha_2}^- e^{\Gamma_2(z_2)}}{z_2} + \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_1}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)+\Gamma_2(z_2)} (z_1 + z_2)}{4 (z_1 - z_2) z_2} \quad (3.52)$$

$$\tau_{L,(1)}^{\alpha_3} = \frac{a_{\alpha_1}^+ a_{\alpha_2}^+ e^{\Gamma_1(z_1)+\Gamma_2(z_2)} z_1 z_2}{-(z_1 z_2) + z_2^2} \quad (3.53)$$

$$\tau_{L,(2)}^{\alpha_3} = \frac{a_{\alpha_1}^+ a_{\alpha_2}^+ e^{\Gamma_1(z_1)+\Gamma_2(z_2)} z_2}{-z_1 + z_2} \quad (3.54)$$

$$\tau_{R,(0)}^{\alpha_1} = a_{\alpha_1}^+ e^{\Gamma_1(z_1)} z_1 - \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_1}^+ a_{\alpha_2}^+ e^{\Gamma_1(z_1)+2\Gamma_2(z_2)} z_1 (z_1 + z_2)}{4 (z_1 - z_2)} \quad (3.55)$$

$$\tau_{R,(2)}^{\alpha_1} = a_{\alpha_1}^+ e^{\Gamma_1(z_1)} z_1 + \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_1}^+ a_{\alpha_2}^+ e^{\Gamma_1(z_1)+2\Gamma_2(z_2)} z_1 (z_1 + z_2)}{4 (z_1 - z_2)} \quad (3.56)$$

$$\tau_{R,(0)}^{\alpha_2} = a_{\alpha_2}^+ e^{\Gamma_2(z_2)} z_2 + \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_1}^+ a_{\alpha_2}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)+\Gamma_2(z_2)} z_2 (z_1 + z_2)}{4 (z_1 - z_2)} \quad (3.57)$$

$$\tau_{R,(1)}^{\alpha_2} = a_{\alpha_2}^+ e^{\Gamma_2(z_2)} z_2 - \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_1}^+ a_{\alpha_2}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)+\Gamma_2(z_2)} z_2 (z_1 + z_2)}{4 (z_1 - z_2)} \quad (3.58)$$

$$\tilde{\tau}_{R,(1)}^{\alpha_3} = \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_2}^- e^{\Gamma_1(z_1)+\Gamma_2(z_2)} z_2}{-z_1 + z_2} \quad (3.59)$$

$$\tilde{\tau}_{R,(2)}^{\alpha_3} = \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_2}^- e^{\Gamma_1(z_1)+\Gamma_2(z_2)} z_1}{-z_1 + z_2} \quad (3.60)$$

Pode-se checar que, no limite $e^{\Gamma_2(z_2)} \rightarrow 0$, tal solução se torna a solução de 1 sóliton (3.1). Considerando as razões de funções tau aparecendo em (2.52) e (2.86) nota-se que no limite $e^{\Gamma_2(z_2)} \rightarrow \infty$, tal solução se torna a solução 1-sóliton (3.1) novamente, mas com a substituição

$$e^{\Gamma_1(z_1)} \rightarrow \left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \right) e^{\Gamma_1(z_1)} \quad (3.61)$$

feita, e com as razões τ_2/τ_0 , $\tau_L^{\alpha_1}/\tau_1$, $\tilde{\tau}_{L,(2)}^{\alpha_1}/\tau_2$, e $\tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_1}/\tau_0$ mudando sinais. Se seguirmos o sóliton α_2 ao invés de α_1 , chegamos aos mesmos resultados (Permutando $\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2$), mas as razões de funções tau mudando sinais são τ_1/τ_0 , $\tilde{\tau}_R^{\alpha_2}/\tau_2$, $\tau_{R,(0)}^{\alpha_2}/\tau_0$, e $\tau_{R,(1)}^{\alpha_2}/\tau_1$. Portanto, comparando com (2.127), observamos que o deslocamento lateral e o time delay para esta solução de dois sólitons são dados por (2.130) e (2.131) respectivamente, com $n = 1$ e $\omega = -1$. Consequentemente, os sólitons das espécies α_1 e α_2 sentem uma força repulsiva.

3.2.5 2-sóliton de espécies α_1/α_3

Aqui segue a solução 2-sóliton obtida tomando o elemento de grupo em (2.89) como $G_{13} = \exp(e^{\Gamma_1(z_1)} V_{\alpha_1}(a_{\alpha_1}^\pm, z_1)) \exp(e^{\Gamma_3(z_2)} V_{\alpha_3}(a_{\alpha_3}^\pm, z_2))$. As funções tau não -nulas são

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 1 - \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_1}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)}}{4} - \frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_3}^+ e^{2\Gamma_3(z_2)}}{4} \\ &+ \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_1}^+ a_{\alpha_3}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)+2\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)^2}{16 (z_1 + z_2)^2} \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 1 + \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_1}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)}}{4} + \frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_3}^+ e^{2\Gamma_3(z_2)}}{4} \\ &+ \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_1}^+ a_{\alpha_3}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)+2\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)^2}{16 (z_1 + z_2)^2} \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \tau_2 &= 1 - \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_1}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)}}{4} + \frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_3}^+ e^{2\Gamma_3(z_2)}}{4} \\ &- \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_1}^+ a_{\alpha_3}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)+2\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)^2}{16 (z_1 + z_2)^2} \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\tilde{\tau}_R^{\alpha_1} = a_{\alpha_1}^- e^{\Gamma_1(z_1)} + \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_1(z_1)+2\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)}{4 (z_1 + z_2)} \quad (3.65)$$

$$\tilde{\tau}_R^{\alpha_2} = -\frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_1}^+ e^{\Gamma_1(z_1)+\Gamma_3(z_2)} z_1}{z_1 + z_2} \quad (3.66)$$

$$\tau_R^{\alpha_3} = a_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_3(z_2)} z_2 + \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_1}^+ a_{\alpha_3}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)+\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2) z_2}{4 (z_1 + z_2)} \quad (3.67)$$

$$\tau_L^{\alpha_1} = a_{\alpha_1}^+ e^{\Gamma_1(z_1)} - \frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_1}^+ a_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_1(z_1)+2\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)}{4 (z_1 + z_2)} \quad (3.68)$$

$$\tau_L^{\alpha_2} = -\frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_1(z_1)+\Gamma_3(z_2)} z_2}{z_1 + z_2} \quad (3.69)$$

$$\tilde{\tau}_L^{\alpha_3} = -\frac{a_{\alpha_3}^- e^{\Gamma_3(z_2)}}{z_2} + \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_1}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)+\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)}{4 z_2 (z_1 + z_2)} \quad (3.70)$$

$$\tilde{\tau}_{L,(2)}^{\alpha_1} = -\frac{a_{\alpha_1}^- e^{\Gamma_1(z_1)}}{z_1} + \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_1(z_1)+2\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)}{4 z_1 (z_1 + z_2)} \quad (3.71)$$

$$\tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_1} = -\frac{a_{\alpha_1}^- e^{\Gamma_1(z_1)}}{z_1} - \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_1(z_1)+2\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)}{4 z_1 (z_1 + z_2)} \quad (3.72)$$

$$\tilde{\tau}_{L,(1)}^{\alpha_2} = \frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_1}^+ e^{\Gamma_1(z_1)+\Gamma_3(z_2)} z_1}{z_2 (z_1 + z_2)} \quad (3.73)$$

$$\tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_2} = -\frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_1}^+ e^{\Gamma_1(z_1)+\Gamma_3(z_2)} z_1}{z_1^2 + z_1 z_2} \quad (3.74)$$

$$\tau_{L,(1)}^{\alpha_3} = -\left(a_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_3(z_2)}\right) - \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_1}^+ a_{\alpha_3}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)+\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)}{4 (z_1 + z_2)} \quad (3.75)$$

$$\tau_{L,(2)}^{\alpha_3} = -\left(a_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_3(z_2)}\right) - \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_1}^+ a_{\alpha_3}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)+\Gamma_3(z_2)} (-z_1 + z_2)}{4 (z_1 + z_2)} \quad (3.76)$$

$$\tau_{R,(0)}^{\alpha_1} = a_{\alpha_1}^+ e^{\Gamma_1(z_1)} z_1 - \frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_1}^+ a_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_1(z_1)+2\Gamma_3(z_2)} z_1 (z_1 - z_2)}{4 (z_1 + z_2)} \quad (3.77)$$

$$\tau_{R,(2)}^{\alpha_1} = a_{\alpha_1}^+ e^{\Gamma_1(z_1)} z_1 + \frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_1}^+ a_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_1(z_1)+2\Gamma_3(z_2)} z_1 (z_1 - z_2)}{4 (z_1 + z_2)} \quad (3.78)$$

$$\tau_{R,(0)}^{\alpha_2} = \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_1(z_1)+\Gamma_3(z_2)} z_1 z_2}{z_1 + z_2} \quad (3.79)$$

$$\tau_{R,(1)}^{\alpha_2} = -\frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_1(z_1)+\Gamma_3(z_2)} z_2^2}{z_1 + z_2} \quad (3.80)$$

$$\tilde{\tau}_{R,(1)}^{\alpha_3} = a_{\alpha_3}^- e^{\Gamma_3(z_2)} - \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_1}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)+\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)}{4 (z_1 + z_2)} \quad (3.81)$$

$$\tilde{\tau}_{R,(2)}^{\alpha_3} = a_{\alpha_3}^- e^{\Gamma_3(z_2)} + \frac{a_{\alpha_1}^- a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_1}^+ e^{2\Gamma_1(z_1)+\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)}{4 (z_1 + z_2)} \quad (3.82)$$

Pode-se verificar que no limite $e^{\Gamma_3(z_2)} \rightarrow 0$, tal solução se torna a solução de 1

sliton (3.1). Considerando as razões de funções tau aparecendo em (2.52) e (2.86) nota-se que no limite $e^{\Gamma_3(z_2)} \rightarrow \infty$, tal solução se torna a solução de 1-sóliton (3.1) novamente, mas com a substituição

$$e^{\Gamma_1(z_1)} \rightarrow \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \right) e^{\Gamma_1(z_1)} \quad (3.83)$$

feita, e as razões τ_1/τ_0 , τ_2/τ_0 , $\tau_L^{\alpha_1}/\tau_1$, $\tilde{\tau}_{L,(2)}^{\alpha_1}/\tau_2$, e $\tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_1}/\tau_0$ mudando sinais. Se seguirmos o sóliton α_3 ao invés de α_1 , chegamos aos mesmos resultados (permutando $\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3$), mas as razões de funções tau mudando de sinal são τ_1/τ_0 , $\tau_R^{\alpha_3}/\tau_0$, $\tilde{\tau}_{R,(1)}^{\alpha_3}/\tau_1$, e $\tilde{\tau}_{R,(2)}^{\alpha_3}/\tau_2$. Portanto, comparando com (2.127), observamos que o deslocamento lateral e o time delay são dados por

(2.130) e (2.131) respectivamente, com $n = 1$ e $\omega = 1$. Consequentemente, os sólitons de espécies α_1 e α_3 sentem uma força atrativa.

3.2.6 2-sóliton de espécies α_2/α_3

Aqui segue a solução de dois sólitons obtida tomando o elemento de grupo em (2.89) como $G_{23} = \exp(e^{\Gamma_2(z_1)} V_{\alpha_2}(a_{\alpha_2}^{\pm}, z_1)) \exp(e^{\Gamma_3(z_2)} V_{\alpha_3}(a_{\alpha_3}^{\pm}, z_2))$. As funções tau não nulas são

$$\begin{aligned} \tau_0 = & 1 - \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_2}^+ e^{2\Gamma_2(z_1)}}{4} - \frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_3}^+ e^{2\Gamma_3(z_2)}}{4} \\ & + \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_2}^+ a_{\alpha_3}^+ e^{2\Gamma_2(z_1)+2\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)^2}{16 (z_1 + z_2)^2} \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} \tau_1 = & 1 - \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_2}^+ e^{2\Gamma_2(z_1)}}{4} + \frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_3}^+ e^{2\Gamma_3(z_2)}}{4} \\ & - \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_2}^+ a_{\alpha_3}^+ e^{2\Gamma_2(z_1)+2\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)^2}{16 (z_1 + z_2)^2} \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} \tau_2 = & 1 + \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_2}^+ e^{2\Gamma_2(z_1)}}{4} + \frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_3}^+ e^{2\Gamma_3(z_2)}}{4} \\ & + \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_2}^+ a_{\alpha_3}^+ e^{2\Gamma_2(z_1)+2\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)^2}{16 (z_1 + z_2)^2} \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$\tilde{\tau}_R^{\alpha_1} = \frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_2}^+ e^{\Gamma_2(z_1)+\Gamma_3(z_2)} z_1}{z_1 + z_2} \quad (3.87)$$

$$\tilde{\tau}_R^{\alpha_2} = a_{\alpha_2}^- e^{\Gamma_2(z_1)} + \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_2}^+ e^{\Gamma_2(z_1)+2\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)}{4 (z_1 + z_2)} \quad (3.88)$$

$$\tau_R^{\alpha_3} = a_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_3(z_2)} z_2 + \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_2}^+ a_{\alpha_3}^+ e^{2\Gamma_2(z_1)+\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2) z_2}{4 (z_1 + z_2)} \quad (3.89)$$

$$\tau_L^{\alpha_1} = \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_2(z_1)+\Gamma_3(z_2)} z_2}{z_1 + z_2} \quad (3.90)$$

$$\tau_L^{\alpha_2} = a_{\alpha_2}^+ e^{\Gamma_2(z_1)} - \frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_2}^+ a_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_2(z_1)+2\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)}{4 (z_1 + z_2)} \quad (3.91)$$

$$\tilde{\tau}_L^{\alpha_3} = -\frac{a_{\alpha_3}^- e^{\Gamma_3(z_2)}}{z_2} + \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_2}^+ e^{2\Gamma_2(z_1)+\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)}{4 z_2 (z_1 + z_2)} \quad (3.92)$$

$$\tilde{\tau}_{L,(2)}^{\alpha_1} = -\frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_2}^+ e^{\Gamma_2(z_1)+\Gamma_3(z_2)} z_1}{z_2 (z_1 + z_2)} \quad (3.93)$$

$$\tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_1} = \frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_2}^+ e^{\Gamma_2(z_1)+\Gamma_3(z_2)}}{z_1 + z_2} \quad (3.94)$$

$$\tilde{\tau}_{L,(1)}^{\alpha_2} = -\frac{a_{\alpha_2}^- e^{\Gamma_2(z_1)}}{z_1} + \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_2(z_1)+2\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)}{4 z_1 (z_1 + z_2)} \quad (3.95)$$

$$\tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_2} = -\frac{a_{\alpha_2}^- e^{\Gamma_2(z_1)}}{z_1} - \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_2(z_1)+2\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)}{4 z_1 (z_1 + z_2)} \quad (3.96)$$

$$\tau_{L,(1)}^{\alpha_3} = -\left(a_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_3(z_2)}\right) + \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_2}^+ a_{\alpha_3}^+ e^{2\Gamma_2(z_1)+\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)}{4 (z_1 + z_2)} \quad (3.97)$$

$$\tau_{L,(2)}^{\alpha_3} = -\left(a_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_3(z_2)}\right) - \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_2}^+ a_{\alpha_3}^+ e^{2\Gamma_2(z_1)+\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)}{4 (z_1 + z_2)} \quad (3.98)$$

$$\tau_{R,(0)}^{\alpha_1} = -\frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_2(z_1)+\Gamma_3(z_2)} z_1 z_2}{z_1 + z_2} \quad (3.99)$$

$$\tau_{R,(2)}^{\alpha_1} = \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_2(z_1)+\Gamma_3(z_2)} z_2^2}{z_1 + z_2} \quad (3.100)$$

$$\tau_{R,(0)}^{\alpha_2} = a_{\alpha_2}^+ e^{\Gamma_2(z_1)} z_1 - \frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_2}^+ a_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_2(z_1)+2\Gamma_3(z_2)} z_1 (z_1 - z_2)}{4 (z_1 + z_2)} \quad (3.101)$$

$$\tau_{R,(1)}^{\alpha_2} = a_{\alpha_2}^+ e^{\Gamma_2(z_1)} z_1 + \frac{a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_2}^+ a_{\alpha_3}^+ e^{\Gamma_2(z_1)+2\Gamma_3(z_2)} z_1 (z_1 - z_2)}{4 (z_1 + z_2)} \quad (3.102)$$

$$\tilde{\tau}_{R,(1)}^{\alpha_3} = a_{\alpha_3}^- e^{\Gamma_3(z_2)} + \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_2}^+ e^{2\Gamma_2(z_1)+\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)}{4 (z_1 + z_2)} \quad (3.103)$$

$$\tilde{\tau}_{R,(2)}^{\alpha_3} = a_{\alpha_3}^- e^{\Gamma_3(z_2)} - \frac{a_{\alpha_2}^- a_{\alpha_3}^- a_{\alpha_2}^+ e^{2\Gamma_2(z_1)+\Gamma_3(z_2)} (z_1 - z_2)}{4 (z_1 + z_2)} \quad (3.104)$$

Pode-se checar que no limite $e^{\Gamma_3(z_2)} \rightarrow 0$, tal solução se torna a solução de 1-sóliton (3.4). Considerando agora as razões de funções tau aparecendo nas relações (2.52) e(2.86) observa-se que no limite $e^{\Gamma_3(z_2)} \rightarrow \infty$, tal solução se torna novamente a solução de 1-sóliton (3.4) mas com a substituição

$$e^{\Gamma_2(z_1)} \rightarrow \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}\right) e^{\Gamma_2(z_1)} \quad (3.105)$$

feita e com as razões τ_1/τ_0 , τ_2/τ_0 , $\tau_L^{\alpha_2}/\tau_2$, $\tilde{\tau}_{L,(1)}^{\alpha_2}/\tau_1$, e $\tilde{\tau}_{L,(0)}^{\alpha_2}/\tau_0$. Se seguirmos o sóliton α_3 no lugar de α_2 , conseguiremos os mesmos resultados (permutando $\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3$), mas as razões de funções tau mudando de sinal são τ_2/τ_0 , $\tau_R^{\alpha_3}/\tau_0$, $\tilde{\tau}_{R,(1)}^{\alpha_3}/\tau_1$, e $\tilde{\tau}_{R,(2)}^{\alpha_3}/\tau_2$. Portanto, comparando com (2.127), observamos que o deslocamento lateral e o time delay são dados por (2.130) e (2.131) respectivamente, com $n = 1$ e $\omega = 1$. Consequentemente, os sólitons de espécies α_2 e α_3 sentem uma força atrativa.

Capítulo 4

Conclusões

As soluções foram obtidas usando em parte o método de dressing e em parte o método de Hirota, sendo esta última parte realizada com o auxílio de um computador. Do ponto de vista pragmático, este procedimento foi eficiente na medida em que forneceu todas as soluções desejadas e deixa claro como deveria-se trabalhar para obter soluções envolvendo mais sólitons. Esteticamente, gostaríamos de realizar tudo no contexto do método de dressing (ou algo equivalente). Uma dificuldade real para tal plano seria o aparente número de cálculos que esse método parece envolver. No entanto, uma rápida inspeção nas soluções de 1 e 2 sólitons nos dá a certeza que há algum padrão relacionando as diversas soluções. Se lembrarmos que transformações dressing formam um grupo que atua no conjunto de soluções, o conhecimento desse grupo (de imediato, vemos que o grupo quociente $G_-G_0G_+$ pelo kernel do morfismo de grupos $h \rightarrow D_h$ é isomórfico à imagem deste morfismo (que é um subgrupo do grupo de transformações dressing)) seria muito útil para tal mapeamento entre soluções. De fato, se determinarmos todos os elementos de $G_-G_0G_+$ que sob este morfismo de grupos são mapeados na identidade do grupo de dressing, teremos determinado um subgrupo do grupo de dressing e, talvez, em algumas circunstâncias, o grupo todo (se a imagem fosse o grupo todo). Isto feito, poderíamos, tendo uma única solução obter uma órbita de soluções e, tendo poucas soluções à mão, todo o conjunto de soluções. Talvez futuramente voltemos a essas questões. De qualquer forma, parece ficar claro que o uso do método de Hirota pode ser conveniente, mas de forma alguma essencial.

Os cálculos do time delay das soluções de 2-sóliton mostraram que sólito de uma mesma espécie sentem uma força atrativa. Os pares de espécies α_1 e α_3 , assim como α_2 e α_3 também sentem forças atrativas. Contudo, o par de sólitons α_1 e α_2 sofrem uma força repulsiva. Além disso, a força de atração entre sólitons da mesma espécie é duas vezes mais forte que aquela entre sólitons de espécies diferentes. Consequentemente, o sinal ω e o inteiro n que aparecem no time delay (2.131) são determinados pelo produto das raízes pela fórmula $\alpha_i \cdot \alpha_j = \omega n$, sendo a normalização das raízes $\alpha_i^2 = 2$. Portanto, o time delay sofrido por um sólito de espécie α_i ,

com rapidez θ_1 quando colidindo com um sóliton de espécie α_j , e rapidez θ_2 , com $\theta_1 > \theta_2$, é dado pela fórmula

$$\Delta_1^{(i,j)}(t) = \frac{\alpha_i \cdot \alpha_j}{m_i \cosh \theta_1} \ln \left(\tanh \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \right) \quad (4.1)$$

A equivalência (2.32) entre as correntes topológica e vetorial foi verificada para as três soluções 1-sóliton e as seis soluções 2-sóliton construídas neste artigo. Portanto, elas são soluções do submodelo definido pelos vínculos (2.31), e que apresenta o confinamento dos campos espinoriais dentro dos sólitons.

Capítulo 5

Apêndices

.1 A álgebra de Kac-Moody afim $su(3)$

Denotaremos as três raízes positivas de $su(3)$ por α_i , $i = 1, 2, 3$, com α_a , $a = 1, 2$, sendo as raízes simples e $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$. As raízes são normalizadas de tal forma que $\alpha_i^2 = 2$, e $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = -1$. Usamos a base de Chevalley onde os geradores são denotados por H_a^n , e $E_{\pm\alpha_i}^n$, $n \in \mathbb{Z}$, satisfazendo as relações de comutação

$$\begin{aligned}
 [H_a^m, H_b^n] &= m \alpha_a \cdot \alpha_b C \delta_{m+n,0} \\
 [H_a^m, E_{\pm\alpha_i}^n] &= \pm \alpha_a \cdot \alpha_i E_{\pm\alpha_i}^{m+n} \\
 [E_{\alpha_a}^m, E_{-\alpha_a}^n] &= H_a^{m+n} + m C \delta_{m+n,0} \quad a = 1, 2 \\
 [E_{\alpha_3}^m, E_{-\alpha_3}^n] &= H_1^{m+n} + H_2^{m+n} + m C \delta_{m+n,0} \\
 [E_{\alpha_1}^m, E_{\alpha_2}^n] &= E_{\alpha_3}^{m+n} \\
 [E_{\alpha_3}^m, E_{-\alpha_1}^n] &= -E_{\alpha_2}^{m+n} \\
 [E_{\alpha_3}^m, E_{-\alpha_2}^n] &= E_{\alpha_1}^{m+n}
 \end{aligned} \tag{.1}$$

As relações de comutação restantes não triviais são obtidas usando o fato que

$$[E_{\alpha}^m, E_{\beta}^n] = -[E_{-\alpha}^m, E_{-\beta}^n]. \quad C \text{ é o termo central, i.e. } [C, H_a^m] = [C, E_{\alpha_i}^m] = 0.$$

Nós usamos a gradação principal da álgebra de Kac-Moody afim $su(3)$, que é dada pelo operador de gradação

$$Q_{\text{ppal.}} := H_1^0 + H_2^0 + 3D \tag{.2}$$

onde D "mede" o índice inteiro m , i.e.

$$[D, H_a^m] = m H_a^m \quad [D, E_{\pm\alpha_i}^m] = m E_{\pm\alpha_i}^m \tag{.3}$$

A álgebra então se separa em autosubespaços

$$[Q_{\text{ppal.}}, \hat{G}_m] = m \hat{G}_m \quad [\hat{G}_m, \hat{G}_n] \subset \hat{G}_{m+n} \quad (.4)$$

e temos as seguintes bases para as seguintes subálgebras

$$\hat{G}_0 = \{H_a^0, C, Q_{\text{ppal.}}\} \quad (.5)$$

e

$$\hat{G}_{3m} = \{H_a^m\}; \quad \hat{G}_{3m+1} = \{E_{\alpha_1}^m, E_{\alpha_2}^m, E_{-\alpha_3}^{m+1}\}; \quad \hat{G}_{3m+2} = \{E_{-\alpha_1}^{m+1}, E_{-\alpha_2}^{m+1}, E_{\alpha_3}^m\} \quad (.6)$$

Entre as representações de \hat{G} , existem três que têm um papel importante. Estas são as representações de peso mais alto. Cada uma tem um estado de peso mais alto $|\lambda_j\rangle$, $j = 0, 1, 2$, satisfazendo

$$H_a^0 |\lambda_0\rangle = 0; \quad H_a^0 |\lambda_b\rangle = \delta_{a,b} |\lambda_b\rangle; \quad C |\lambda_j\rangle = |\lambda_j\rangle \quad (.7)$$

para $a, b = 1, 2$, e $j = 0, 1, 2$. Tais estados são aniquilados por todos geradores de grau positivo.

$$\hat{G}_m |\lambda_j\rangle = 0; \quad m > 0 \quad (.8)$$

e todos os estados das representações são obtidos pela ação de geradores de grau negativo no correspondente estado de peso mais alto $|\lambda_j\rangle$. Em tais representações, elementos que são conjugados complexos de geradores com grau positivo têm grau negativo (o operador de gradação (.2) é hermitiano). Portanto temos também que

$$\langle \lambda_j | \hat{G}_{-m} = 0; \quad m > 0 \quad (.9)$$

.2 Um programa em Mathematica implementando o método de Hirota

O arquivo `taueqtrue.m` apresentado nas figuras .1 e .2 contém as 21 equações de Hirota correspondentes às 15 expressões (2.94)-(2.108) além das 6 relações algébricas (2.111) entre as funções tau.

A parte principal do programa é dada pelo comandos sob o título *The kernel* no programa `twosol12.m` apresentado na figura .3. O ansatz para as funções tau, inspirado no método de dressing, é fornecido na parte do programa `twosol12.m` intitulado *Part of the program sensitive to the species of the solitons* dado na figura .4. Ali é apresentado o caso da solução de 2-sóliton para as espécies α_1 e α_2 , ou seja

$$t(l, x_+, x_-) = \sum_{p=0}^4 \sum_{i=0}^p c(i, p-i) [[l]] e_1 e_2 e^{g_1(z_1, x_+, x_-)} e^{g_2(z_2, x_+, x_-)} \quad (.10)$$

As potências de e_i contam as potências de $e^{g_i(z_i, x_+, x_-)}$ e portanto a soma destas potências fornece a ordem da expansão de Hirota. Sabemos que as exponencias dos vértices (2.46) truncam em segunda ordem (veja (2.92)) e portanto o produto de duas exponenciais truncam em quarta ordem. Por esta razão a soma em p acima vai de 0 a 4.

O comando `exec[p,1]` em `twosol12.m` na figura .3 determina os termos nas equações de Hirota envolvendo $e_1^l e_2^{p-l}$ (e portanto ordem p). O comando `rule[p,1]` determina o vetor `a[1,p-1]` impondo-se que aqueles termos das equações de Hirota devam ser nulos. Note que, como alguns elementos do vetor `c[i,j]` são nulos, precisamos utilizar, por causa das propriedades do comando `Solve` do Mathematica, o vetor `a[i,j]` que é definido como sendo o vetor formado pelos elementos não nulos de `c[i,j]`.

O comando `calctest[p,1]` associa os valores ao vetor `c[i,j]` que resolvem as equações de Hirota, e escreve os resultados no arquivo `outc.m`. O comando `calc[p]` simplesmente implementa `calctest[p,1]` ordem a ordem para resolver as equações pela expansão de Hirota. Como expandimos as funções tau até ordem 4 temos que tomar $p = 4$ em `calc[p]`.

Uma vez obtidos os vetores `c[i,j]` pelo método acima, utilizamos o comando `checkprint[ord]` para verificar, de maneira independente, se eles realmente fornecem uma solução das equações de Hirota. Como estas são de ordem 4 e as funções tau forma expandidas até ordem 4, temos que tomar `ord = 16`.

A equivalência entre as correntes de Noether e topológica são verificadas pelo programa `equivcur` dado na figura .5. Ali estão as equações (2.109) e (2.110) dadas pelos comandos `eqtauequiv[i,xp,xm]`.

O programa permite também gerar as soluções finais no formato TeX através do comando `gentex` apresentado na figura .6. Apresentamos na figura .7 a sessão do Mathematica utilizada para calcular a solução 2-sóliton para as espécies α_1 e α_2 .

```

taueq[1,xp_,xm_]:=-(m2*t2[xp,xm]*tr10[xp,xm]) + m3*t0[xp,xm]*tr12[xp,xm] +
  2*t1[xp,xm]*Derivative[1,0][t1][xp,xm] -
2*t1[xp,xm]*Derivative[1,0][t11][xp,xm];
taueq[2,xp_,xm_]:=-(m1*t1[xp,xm]*tr20[xp,xm]) + m3*t0[xp,xm]*tr21[xp,xm] +
  2*t12[xp,xm]*Derivative[1,0][t2][xp,xm] -
2*t2[xp,xm]*Derivative[1,0][t12][xp,xm];
taueq[3,xp_,xm_]:=m3^2*t0[xp,xm]*t1[xp,xm]*t2[xp,xm]*tr0[xp,xm] -
  m2^2*t2[xp,xm]^2*t12[xp,xm]*tr10[xp,xm] +
  m2*m3*t0[xp,xm]*t2[xp,xm]*t12[xp,xm]*tr12[xp,xm] +
  m1^2*t1[xp,xm]^2*t11[xp,xm]*tr20[xp,xm] -
  m1*m3*t0[xp,xm]*t1[xp,xm]*t11[xp,xm]*tr21[xp,xm] -
  2*m2*t2[xp,xm]^2*t131[xp,xm]*Derivative[1,0][t1][xp,xm] -
  2*m1*t1[xp,xm]^2*t132[xp,xm]*Derivative[1,0][t2][xp,xm] +
  2*m2*t1[xp,xm]*t2[xp,xm]^2*Derivative[1,0][t131][xp,xm] +
  2*m1*t1[xp,xm]^2*t2[xp,xm]*Derivative[1,0][t132][xp,xm];
taueq[4,xp_,xm_]:=-(m1^2*t0[xp,xm]*t1[xp,xm]*t2[xp,xm]*t11[xp,xm]) -
  m1*m3*t0[xp,xm]*t1[xp,xm]*tr0[xp,xm]*tt120[xp,xm] +
  m3^2*t0[xp,xm]^2*tr0[xp,xm]*tt121[xp,xm] +
  m2^2*t2[xp,xm]^2*t131[xp,xm]*ttr2[xp,xm] +
  m1*m2*t1[xp,xm]^2*t2[xp,xm]*t132[xp,xm]*ttr2[xp,xm] -
  2*m2*t2[xp,xm]^2*tr10[xp,xm]*Derivative[0,1][t0][xp,xm] +
  2*m3*t0[xp,xm]^2*tr12[xp,xm]*Derivative[0,1][t2][xp,xm] +
  2*m2*t0[xp,xm]*t2[xp,xm]^2*Derivative[0,1][tr10][xp,xm] -
  2*m3*t0[xp,xm]*t2[xp,xm]*Derivative[0,1][tr12][xp,xm];
taueq[5,xp_,xm_]:=-(m2^2*t0[xp,xm]*t1[xp,xm]*t2[xp,xm]*t12[xp,xm]) +
  m2*m3*t0[xp,xm]*t2[xp,xm]*tr0[xp,xm]*tt110[xp,xm] -
  m3^2*t0[xp,xm]^2*tr0[xp,xm]*tt112[xp,xm] -
  m1*m2*t1[xp,xm]*t2[xp,xm]*t131[xp,xm]*ttr1[xp,xm] -
  m1^2*t1[xp,xm]^2*t132[xp,xm]*ttr1[xp,xm] -
  2*m1*t1[xp,xm]^2*tr20[xp,xm]*Derivative[0,1][t0][xp,xm] +
  2*m3*t0[xp,xm]^2*tr21[xp,xm]*Derivative[0,1][t1][xp,xm] +
  2*m1*t0[xp,xm]*t1[xp,xm]^2*Derivative[0,1][tr20][xp,xm] -
  2*m3*t0[xp,xm]^2*t1[xp,xm]*Derivative[0,1][tr21][xp,xm];
taueq[6,xp_,xm_]:=
m2^2*t2[xp,xm]*t131[xp,xm] + m1*t1[xp,xm]*t132[xp,xm] +
  2*tr0[xp,xm]*Derivative[0,1][t0][xp,xm] -
  2*t0[xp,xm]*Derivative[0,1][tr0][xp,xm];
taueq[7,xp_,xm_]:=-(m1*m3*t0[xp,xm]*t1[xp,xm]*tr20[xp,xm]*tt10[xp,xm]) +
  m3^2*t0[xp,xm]^2*tr21[xp,xm]*tt10[xp,xm] -
  m1^2*t0[xp,xm]*t1[xp,xm]*t2[xp,xm]*ttr1[xp,xm] -
  m2^2*t2[xp,xm]^2*t12[xp,xm]*ttr31[xp,xm] -
  m1*m2*t1[xp,xm]*t2[xp,xm]*t12[xp,xm]*ttr32[xp,xm] -
  2*m2*t2[xp,xm]^2*tt110[xp,xm]*Derivative[1,0][t0][xp,xm] +
  2*m3*t0[xp,xm]^2*tt112[xp,xm]*Derivative[1,0][t2][xp,xm] +
  2*m2*t0[xp,xm]*t2[xp,xm]^2*Derivative[1,0][tt110][xp,xm] -
  2*m3*t0[xp,xm]^2*t2[xp,xm]*Derivative[1,0][tt112][xp,xm];
taueq[8,xp_,xm_]:=m2*m3*t0[xp,xm]*t2[xp,xm]*tr10[xp,xm]*tt10[xp,xm] -
  m3^2*t0[xp,xm]^2*tr12[xp,xm]*tt10[xp,xm] -
  m2^2*t0[xp,xm]*t1[xp,xm]*t2[xp,xm]*ttr2[xp,xm] +
  m1*m2*t1[xp,xm]*t2[xp,xm]*t11[xp,xm]*ttr31[xp,xm] +
  m1^2*t1[xp,xm]^2*t11[xp,xm]*ttr32[xp,xm] -
  2*m1*t1[xp,xm]^2*tt120[xp,xm]*Derivative[1,0][t0][xp,xm] +
  2*m3*t0[xp,xm]^2*tt121[xp,xm]*Derivative[1,0][t1][xp,xm] +
  2*m1*t0[xp,xm]*t1[xp,xm]^2*Derivative[1,0][tt120][xp,xm] -
  2*m3*t0[xp,xm]^2*t1[xp,xm]*Derivative[1,0][tt121][xp,xm];
taueq[9,xp_,xm_]:=-(m2*t2[xp,xm]*ttr31[xp,xm]) -
  m1*t1[xp,xm]*ttr32[xp,xm] + 2*tt10[xp,xm]*Derivative[1,0][t0][xp,xm] -
  2*t0[xp,xm]*Derivative[1,0][tt10][xp,xm];

```

Converted by Mathematica March 12, 2001

Figura .1: O programa taueqtrue.m (página 1).

```

taueq[10,xp_,xm_]:=m2*t2[xp,xm]*tt110[xp,xm]-m3*t0[xp,xm]*tt112[xp,xm]-
2*ttr1[xp,xm]*Derivative[0,1][t1][xp,xm]+
2*t1[xp,xm]*Derivative[0,1][ttr1][xp,xm];
taueq[11,xp_,xm_]:=m1*t1[xp,xm]*tt120[xp,xm]-m3*t0[xp,xm]*tt121[xp,xm]-
2*ttr2[xp,xm]*Derivative[0,1][t2][xp,xm]+
2*t2[xp,xm]*Derivative[0,1][ttr2][xp,xm];
taueq[12,xp_,xm_]:=-(m3^2*t0[xp,xm]*t1[xp,xm]*t2[xp,xm]*tt10[xp,xm])-
m1^2*t1[xp,xm]^2*tt120[xp,xm]*ttr1[xp,xm]+
m1*m3*t0[xp,xm]*t1[xp,xm]*tt121[xp,xm]*ttr1[xp,xm]+
m2^2*t2[xp,xm]^2*tt110[xp,xm]*ttr2[xp,xm]-
m2*m3*t0[xp,xm]*t2[xp,xm]*tt112[xp,xm]*ttr2[xp,xm]-
2*m2*t2[xp,xm]^2*ttr31[xp,xm]*Derivative[0,1][t1][xp,xm]-
2*m1*t1[xp,xm]^2*ttr32[xp,xm]*Derivative[0,1][t2][xp,xm]+
2*m2*t1[xp,xm]*t2[xp,xm]^2*Derivative[0,1][ttr31][xp,xm]+
2*m1*t1[xp,xm]^2*t2[xp,xm]*Derivative[0,1][ttr32][xp,xm];
taueq[13,xp_,xm_]:=m1^2*t0[xp,xm]*t1[xp,xm]*tt11[xp,xm]*ttr1[xp,xm]+
m2^2*t0[xp,xm]*t2[xp,xm]*t12[xp,xm]*ttr2[xp,xm]-
m2^2*t2[xp,xm]^2*t131[xp,xm]*ttr31[xp,xm]-
m1*m2*t1[xp,xm]*t2[xp,xm]*t132[xp,xm]*ttr31[xp,xm]-
m1*m2*t1[xp,xm]*t2[xp,xm]*t131[xp,xm]*ttr32[xp,xm]-
m1^2*t1[xp,xm]^2*t132[xp,xm]*ttr32[xp,xm]+
4*t1[xp,xm]*t2[xp,xm]*Derivative[0,1][t0][xp,xm]*
Derivative[1,0][t0][xp,xm]-
4*t0[xp,xm]*t1[xp,xm]*t2[xp,xm]*Derivative[1,1][t0][xp,xm];
taueq[14,xp_,xm_]:=-(m3^2*t0[xp,xm]*t1[xp,xm]*tr0[xp,xm]*tt10[xp,xm])-
m2^2*t2[xp,xm]^2*tr10[xp,xm]*tt110[xp,xm]+
m2*m3*t0[xp,xm]*t2[xp,xm]*tr12[xp,xm]*tt110[xp,xm]+
m2*m3*t0[xp,xm]*t2[xp,xm]*tr10[xp,xm]*tt112[xp,xm]-
m3^2*t0[xp,xm]^2*tr12[xp,xm]*tt112[xp,xm]-
m2^2*t1[xp,xm]*t2[xp,xm]*t12[xp,xm]*ttr2[xp,xm]-
4*t0[xp,xm]*t2[xp,xm]*Derivative[0,1][t1][xp,xm]*
Derivative[1,0][t1][xp,xm]+
4*t0[xp,xm]*t1[xp,xm]*t2[xp,xm]*Derivative[1,1][t1][xp,xm];
taueq[15,xp_,xm_]:=-(m3^2*t0[xp,xm]*t2[xp,xm]*tr0[xp,xm]*tt10[xp,xm])-
m1^2*t1[xp,xm]^2*tr20[xp,xm]*tt120[xp,xm]+
m1*m3*t0[xp,xm]*t1[xp,xm]*tr21[xp,xm]*tt120[xp,xm]+
m1*m3*t0[xp,xm]*t1[xp,xm]*tr20[xp,xm]*tt121[xp,xm]-
m3^2*t0[xp,xm]^2*tr21[xp,xm]*tt121[xp,xm]-
m1^2*t1[xp,xm]*t2[xp,xm]*t11[xp,xm]*ttr1[xp,xm]-
4*t0[xp,xm]*t1[xp,xm]*Derivative[0,1][t2][xp,xm]*
Derivative[1,0][t2][xp,xm]+
4*t0[xp,xm]*t1[xp,xm]*t2[xp,xm]*Derivative[1,1][t2][xp,xm];
taueq[16,xp_,xm_]:=tr12[xp,xm]*t0[xp,xm]-tr10[xp,xm]*t2[xp,xm]-
ttr2[xp,xm]*tr0[xp,xm];
taueq[17,xp_,xm_]:=tr20[xp,xm]*t1[xp,xm]-tr21[xp,xm]*t0[xp,xm]-
ttr1[xp,xm]*tr0[xp,xm];
taueq[18,xp_,xm_]:=ttr31[xp,xm]*t2[xp,xm]-ttr32[xp,xm]*t1[xp,xm]-
ttr1[xp,xm]*ttr2[xp,xm];
taueq[19,xp_,xm_]:=tt112[xp,xm]*t0[xp,xm]-tt110[xp,xm]*t2[xp,xm]-
t12[xp,xm]*tt10[xp,xm];
taueq[20,xp_,xm_]:=tt120[xp,xm]*t1[xp,xm]-tt121[xp,xm]*t0[xp,xm]-
t11[xp,xm]*tt10[xp,xm];
taueq[21,xp_,xm_]:=t131[xp,xm]*t2[xp,xm]+t132[xp,xm]*t1[xp,xm]-
t11[xp,xm]*t12[xp,xm];
gentautex:=Do[TeXForm[
n]]>>> matters13.tex; "%%%%%%%%%%">>> matters13.tex; TeXForm[
taueq[n,xp,xm]]>>> matters13.tex; "%%%%%%%%%%">>> matters13.tex, {n,
1,21}];

```

Figura .2: O programa taueqtrue.m (página 2)

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
"Program to calculate two-soliton in su(3) matter Toda";
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
t0[xp_,xm_] := t[1,xp,xm];
t1[xp_,xm_] := t[2,xp,xm];
t2[xp_,xm_] := t[3,xp,xm];
ttr1[xp_,xm_] := t[4,xp,xm];
ttr2[xp_,xm_] := t[5,xp,xm];
tr0[xp_,xm_] := t[6,xp,xm];
t11[xp_,xm_] := t[7,xp,xm];
t12[xp_,xm_] := t[8,xp,xm];
tt10[xp_,xm_] := t[9,xp,xm];
tt112[xp_,xm_] := t[10,xp,xm];
tt110[xp_,xm_] := t[11,xp,xm];
tt121[xp_,xm_] := t[12,xp,xm];
tt120[xp_,xm_] := t[13,xp,xm];
t131[xp_,xm_] := t[14,xp,xm];
t132[xp_,xm_] := t[15,xp,xm];
tr10[xp_,xm_] := t[16,xp,xm];
tr12[xp_,xm_] := t[17,xp,xm];
tr20[xp_,xm_] := t[18,xp,xm];
tr21[xp_,xm_] := t[19,xp,xm];
ttr31[xp_,xm_] := t[20,xp,xm];
ttr32[xp_,xm_] := t[21,xp,xm];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
"The kernel";
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
numbereqs:=21;
numbertaus:=21;
m3:=m1+m2;
c[i_,j_]:=Array[b[i,j],numbertaus];
zero:=Table[0,{1,1,numbertaus}];
a[i_,j_]:=Complement[c[i,j],zero];
exec[p_,1_]:=Table[Factor[(D[(D[taueq[n,xp,xm],{e1,1}]/.e1->0)/(1!),
{e2,p-1}]/.e2->0)/((p-1)!)],{n,1,numbereqs}];
rule[p_,1_]:=Solve[exec[p,1]==0,a[1,p-1]];
calctest[p_,1_]:=Block[{ctest},ctest[1,p-1]=Factor[c[1,p-1]/.
rule[p,1]];c[1,p-1]=ctest[1,p-1][1];InputForm[
{1,p-1}]>>outc.m;"%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%">>outc.m;InputForm[
c[1,p-1]]>>outc.m;"%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%">>outc.m];
calc[ord_]:=Do[calctest[p,1],{p,1,ord},{1,0,p}];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
"Commands for checking the solutions";
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
checkeqprint[ord_]:=Do[InputForm[p]>>outcheck.m;"%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%"
>>outcheck.m;InputForm[Table[Simplify[
(D[(D[taueq[n,xp,xm],{e1,1}]/.e1->0)/(1!),
{e2,p-1}]/.e2->0)/((p-1)!)],{n,1,numbereqs},{1,0,p}]]>>
outcheck.m;"%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%">>outcheck.m,{p,1,ord}];
checkeqord[p_]:=Table[Simplify[
(D[(D[taueq[n,xp,xm],{e1,1}]/.e1->0)/(1!),
{e2,p-1}]/.e2->0)/((p-1)!)],{n,1,numbereqs},{1,0,p}];
checkeq[ord_]:=Table[Simplify[(D[(D[taueq[n,xp,xm],{e1,1}]/.e1->0)/(1!),
{e2,p-1}]/.e2->0)/((p-1)!)],{n,1,numbereqs},{p,1,ord},{1,0,p}];

```

Converted by *Mathematica* March 9, 2001

Figura .3: O programa twosol12.m (página 1)

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%;
"Part of the program sensitive to the species of solitons";
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%;
par:={1,2,3};
impar:={4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21};
g1[z_,xp_,xm_]:=m1 (z xp - xm/z)/2;
g2[z_,xp_,xm_]:=m2 (z xp - xm/z)/2;
t[1_,xp_,xm_]:=Sum[c[i,p-i][[1]] e1^i e2^(p-i) Exp[i g1[z1,xp,xm]] Exp[(p-
i) g2[z2,xp,xm]],{p,0,4},{i,0,p}];
b[0,0][1_]:= 1 /; MemberQ[par,1];
b[0,0][1_]:= 0 /; MemberQ[impar,1];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%;
"Generating the output";
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%;
genout:=Do[1]>>outsol.m;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%>>outsol.m;
InputForm[Simplify[t[1,xp,xm]]]>>outsol.m;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%>>outsol.m,
{1,1,numbertaus}];
gen:= Do[InputForm[
{1,p-1}]>>c.m; "%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%>>c.m;InputForm[
Simplify[c[1,p-1]]]>>c.m; "%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%>>c.m,{p,1,4},{1,0,p}];

```

Converted by *Mathematica* March 9, 2001

Figura .4: O programa twosol12.m (página 2)

```

phi1[xp_,xm_] := Log[t0[xp,xm]] - Log[t1[xp,xm]];
phi2[xp_,xm_] := Log[t0[xp,xm]] - Log[t2[xp,xm]];
ptr1[xp_,xm_] := - ttr1[xp,xm]/t1[xp,xm];
ptr2[xp_,xm_] := - ttr2[xp,xm]/t2[xp,xm];
pr3[xp_,xm_] := tr0[xp,xm]/t0[xp,xm];
pt11[xp_,xm_] := - ( (m3/m1) tt112[xp,xm]/t2[xp,xm] -
(m2/m1) tt110[xp,xm]/t0[xp,xm]);
pt12[xp_,xm_] := - ( (m3/m2) tt121[xp,xm]/t1[xp,xm] -
(m1/m2) tt120[xp,xm]/t0[xp,xm]);
p13[xp_,xm_] := ( (m2/m3) t131[xp,xm]/t1[xp,xm] +
(m1/m3) t132[xp,xm]/t2[xp,xm]);
p11[xp_,xm_] := - t11[xp,xm]/t1[xp,xm];
p12[xp_,xm_] := - t12[xp,xm]/t2[xp,xm];
pt13[xp_,xm_] := - tt10[xp,xm]/t0[xp,xm];
pr1[xp_,xm_] := - ( (m2/m1) tr10[xp,xm]/t0[xp,xm] -
(m3/m1) tr12[xp,xm]/t2[xp,xm]);
pr2[xp_,xm_] := - ( - (m3/m2) tr21[xp,xm]/t1[xp,xm] +
(m1/m2) tr20[xp,xm]/t0[xp,xm]);
ptr3[xp_,xm_] := - ( (m2/m3) ttr31[xp,xm]/t1[xp,xm] +
(m1/m3) ttr32[xp,xm]/t2[xp,xm]);
equequiv1[xp_,xm_] := m1 D[phi1[xp,xm],xp] + m2 D[phi2[xp,xm],xp] -
(1/2)( m1^2 ptr1[xp,xm] pr1[xp,xm] + m2^2 ptr2[xp,xm] pr2[xp,xm] +
m3^2 ptr3[xp,xm] pr3[xp,xm]);
equequiv2[xp_,xm_] := m1 D[phi1[xp,xm],xm] + m2 D[phi2[xp,xm],xm] +
(1/2)( m1^2 pt11[xp,xm] p11[xp,xm] + m2^2 pt12[xp,xm] p12[xp,xm] +
m3^2 pt13[xp,xm] p13[xp,xm]);
eqtauequiv[1,xp_,xm_] := -(m1*m2*t2[xp,xm]*tr10[xp,xm]*ttr1[xp,xm]) +
m1*m3*t0[xp,xm]*tr12[xp,xm]*ttr1[xp,xm] -
m1*m2*t1[xp,xm]*tr20[xp,xm]*ttr2[xp,xm] +
m2*m3*t0[xp,xm]*tr21[xp,xm]*ttr2[xp,xm] +
m2*m3*t2[xp,xm]*tr0[xp,xm]*ttr31[xp,xm] +
m1*m3*t1[xp,xm]*tr0[xp,xm]*ttr32[xp,xm] +
2*m1*t1[xp,xm]*t2[xp,xm]*Derivative[1,0][t0][xp,xm] +
2*m2*t1[xp,xm]*t2[xp,xm]*Derivative[1,0][t0][xp,xm] -
2*m1*t0[xp,xm]*t2[xp,xm]*Derivative[1,0][t1][xp,xm] -
2*m2*t0[xp,xm]*t1[xp,xm]*Derivative[1,0][t2][xp,xm];
eqtauequiv[2,xp_,xm_] := -(m2*m3*t2[xp,xm]*t131[xp,xm]*tt10[xp,xm]) -
m1*m3*t1[xp,xm]*t132[xp,xm]*tt10[xp,xm] -
m1*m2*t2[xp,xm]*t11[xp,xm]*tt110[xp,xm] +
m1*m3*t0[xp,xm]*t11[xp,xm]*tt112[xp,xm] -
m1*m2*t1[xp,xm]*t12[xp,xm]*tt120[xp,xm] +
m2*m3*t0[xp,xm]*t12[xp,xm]*tt121[xp,xm] +
2*m1*t1[xp,xm]*t2[xp,xm]*Derivative[0,1][t0][xp,xm] +
2*m2*t1[xp,xm]*t2[xp,xm]*Derivative[0,1][t0][xp,xm] -
2*m1*t0[xp,xm]*t2[xp,xm]*Derivative[0,1][t1][xp,xm] -
2*m2*t0[xp,xm]*t1[xp,xm]*Derivative[0,1][t2][xp,xm];

```

Converted by *Mathematica* March 9, 2001

Figura .5: O programa equivcur.m


```
laf@spike[30] math
Mathematica 3.0 for IBM RISC System/6000
Copyright 1988-97 Wolfram Research, Inc.
-- Motif graphics initialized --
```

```
In[1]:= <<taueqtrue.m
In[2]:= <<twosol12.m
In[3]:= Timing[calc[4]]
Solve::svars: Equations may not give solutions for all "solve" variables.
Solve::svars: Equations may not give solutions for all "solve" variables.
Out[3]= {227.66 Second, Null}
In[4]:= Timing[checkeqprint[16]]
Out[4]= {544.986 Second, Null}
In[5]:= <<equivcur.m
In[6]:= Simplify[eqtauequiv[1,xp,xm]]
Out[6]= 0
In[7]:= Simplify[eqtauequiv[2,xp,xm]]
Out[7]= 0
In[8]:= genc:= Do[InputForm[
{1,p-1}]>>c.m;"%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%">>c.m;InputForm[
Simplify[c[1,p-1]]>>c.m;"%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%">>c.m,{p,1,4},{1,0,p}];
In[9]:= Timing[genc]
Out[9]= {0.49 Second, Null}
In[10]:= c[0,0]
Out[10]= {1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
In[11]:=
```

Figura .7: O programa history12.m

Referências

- [1] H. Aratyn, C.P. Constantinidis, L.A. Ferreira, J.F. Gomes and A.H. Zimerman, hep-th/9212086, *Nucl. Phys.* **B406** (1993) 727-770.
- [2] H. Aratyn, L.A. Ferreira, J.F. Gomes and A.H. Zimerman, *Phys. Lett.* **254B** (1991) 372-380.
- [3] V. I. Arnold: *Mathematical methods of classical mechanics* Springer Verlag
- [4] H. S. Blas Achic and L. A. Ferreira, hep-th/9909118, *Nucl. Phys.* **B571**[PM] (2000) 607-631.
- [5] A. G. Bueno, L. A. Ferreira e A. V. Razumov, em preparação .
- [6] L. A. Ferreira, J. L. Gervais, J. Sánchez Guillén e M. V. Saveliev; Affine Toda systems coupled to matter fields; hep-th/9512105, *Nucl. Phys.* **B470** (1996) 236-290.
- [7] L.A. Ferreira, J.F. Gomes, A.H. Zimerman and A. Schwimmer, hep-th/9110032, *Phys. Lett.* **274B** (1992) 65-71.
- [8] L.A. Ferreira, J. Luis Miramontes and J. Sánchez Guillen, hep-th/9606066, *J. Math. Phys.* **38** (1997) 882-901.
- [9] A. Fring, P.R. Johnson, M.A.C. Kneipp and D. I. Olive; hep-th/9405034, *Nucl. Phys.* **B1994** [FS430] (597-614) .
- [10] P. Goddard and D. Olive, *Int. J. Mod. Phys.* **A1** (1986) 303
- [11] R. Hirota, *Direct methods in soliton theory*, in "Solitons" (R.K. Bullough and P.S. Caudrey, eds.), Topics in Current Physics, p. 157, Springer-Verlag (1980); *J. Phys. Soc. Japan* **33** (1972) 1459.
- [12] J.M. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Graduate Texts in Mathematics vol. 9, Springer-Verlag (1972).
- [13] V.G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, Third Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

- [14] P. Lax *Integrals of nonlinear evolution and solitary waves* Comm. Pure Appl. Math. , 21, 1968
- [15] A.N. Leznov and M.V. Saveliev; *Group-Theoretical Methods for Integration of Non-Linear Dynamical Systems*, Progr. in Phys. Ser. Vol. 15 (Birkhäuser, Basel, 1992).
- [16] C. Montonen and D.I. Olive, *Phys. Lett.* **72B** (1977) 117
P. Goddard, J. Nuyts and D.I. Olive, *Nucl. Phys.* **B125** (1977) 1
D.I. Olive, *Magnetic monopoles and electromagnetic duality conjectures in Monopoles in quantum field theory* eds. N. S. Craigie, P. Goddard and W. Nahm (World Scientific, Singapore, 1982) p. 157;
D. Olive, *Exact electromagnetic duality*, hep-th/9508089, to appear in the Proc. of ICTP Conf. on Recent Developments in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory, Trieste, 10-12 Apr. 1995.
- [17] D.I. Olive, N. Turok and J.W.R. Underwood; *Nucl. Phys.* **B401** (1993) 663, hep-th/9305160, *Nucl. Phys.* **B409** (1993) 509.
- [18] D.I. Olive, J.W.R. Underwood and M.V. Saveliev, hep-th/9212123, *Phys. Lett.* **311B** (1993) 117.
- [19] N. Seiberg and E. Witten *Nucl. Phys.* **B426** (1994) 19-52, hep-th/9407087;
C. Vafa and E. Witten *Nucl. Phys.* **B431** (1994) 3-77, hep-th/9408074.
- [20] V.E. Zakharov and A.B. Shabat, *Functional Analysis and Its Application* **13** (1979) 166.
- [21] V.E. Zakharov, A.B. Shabat *Zh. Exp. Teor. Fiz.* 61 (1971) 118 (Sov. Phys. JETP 34 (1972) 62)
E.Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, *Proc. Japan. Acad.* **57A** (1981) 3806; *Physica* **D4** (1982) 343; Publ. RIMS Kyoto University **18** (1982), 1077.
M. Semenov-Tian-Shansky, *Functional Analysis and Its Application* **17** (1983) 259; Publ. RIMS Kyoto Univ. **21** (1985) 1237.
O. Babelon and D. Bernard, *Phys. Lett.* **260B** (1991) ,81; *Commun. Math. Phys.* **149** (1992) 279; *Int. J. Mod. Phys.* **A8** (1993) 507.

