UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Pablo Gonzalez Pagotto

A Homologia de uma Fibração

São José do Rio Preto
2016

Pablo Gonzalez Pagotto

A Homologia de uma Fibração

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi

São José do Rio Preto
2016

Pagotto, Pablo Gonzalez.
A homologia de uma fibração / Pablo Gonzalez Pagotto. -- São José do Rio Preto, 2016
107 f.

Orientador: Alice Kimie Miwa Libardi
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Topologia algébrica. 3. Teoria de homologia. 4. Espaços fibrados (Matemática) 5. Sequências espectrais (Matemática) I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 513.831

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Pablo Gonzalez Pagotto

A Homologia de uma Fibração

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi
Orientadora

Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher
UFSCar – São Carlos

Profa. Dra. Denise de Mattos
ICMC–USP São Carlos

São José do Rio Preto
30 de Agosto de 2016

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é apresentar um estudo sobre Homologia de Espaços Fibrados, baseado no livro Elements of Homotopy Theory de G.W.Whitehead. O conceito de fibração apareceu em torno de 1930 e pode ser visto como uma extensão da teoria de fibrados. Existe uma sequência exata longa que relaciona os grupos de homotopia dos espaços base, total e da fibra de uma fibração. Porém, relacionar os grupos de homologia desses espaços é uma tarefa mais complicada. O caso geral é feito utilizando sequências espectrais. Porém, há casos particulares em que podemos obter relações sem utilizar a maquinaria das sequências espectrais.

Palavras-chave: Fibrações, Homologia de fibrações, Sequências espectrais.

ABSTRACT

The main goal of this work is to present a study on Homology of Fibre Spaces, based on the book of G.W. Whitehead: "Elements of Homotopy Theory". The concept of fibration appeared around 1930 and can be seen as an extension of the theory of bundles. There is a long exact sequence that relates the homotopy groups of the total, base and fiber spaces of a fibration. However, relating the homology groups of such spaces is more complicated. The general case is obtained using spectral sequences. Nevertheless there are particular cases where one can obtain such relations without the need of the machinery of spectral sequences.

Keywords: Fibrations, homology of fibrations, Spectral sequences.

Agradecimentos

À meus pais e minha irmã que sempre me apoiaram e estiveram comigo em todos os momentos.

À meus queridos amigos Vinicius Canale, Suelen Gasparetto, Givanildo Melo, Guilherme Vituri que para mim são como irmãos.

À todos meus professores que tanto me apoiaram, em particular Thiago de Melo e Alice Libardi.

Ao professor Louis Funar do Institut Joseph Fourier, na França, por ter me recebido como estagiário do programa BEPE (processo nº 2015/03341-9, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP)) e toda a atenção que este dedicou a mim.

Aos funcionários dos departamentos de matemática da UNESP de Rio Claro e de São José do Rio Preto.

À FAPESP pelo apoio que tem me dado desde a graduação, me proporcionando experiências inestimáveis como o estágio no Institut Fourier na França. Não obstante, agradeço pela oportunidade de ser bolsista de mestrado (processo nº 2013/22249-0, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP)).

Sumário

Introdução

Um problema básico em topologia é “fatorar uma função continua através de outra”. Mais especificamente, dado o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "i"] \arrow[dr, "f"] & \\ X & Y \end{tikzcd}$$

em alguma categoria $\mathcal{C}$ de espaços topológicos e funções continuas, que denominaremos apenas aplicações, este pode ser completado de forma a obter um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "i"] \arrow[dr, "f"] & \\ X \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

ainda na categoria $\mathcal{C}$? Este é um problema de fatoração à direita, e é simbolizado por

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "i"] \arrow[dr, "f"] & \\ X \arrow[r, dashed, "g"'] & Y. \end{tikzcd} \tag{1}$$

Dualmente, temos o problema de fatoração à esquerda

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[dr, "f"'] & X \arrow[d, "p"] \\ & B. \end{tikzcd} \tag{2}$$

Quando a aplicação i em (1) é injetora, o problema de fatoração correspondente é denominado um *problema de extensão* e g é uma *extensão* de f. Ainda, quando a aplicação p em (2) é sobrejetora, o problema de fatoração correspondente é denominado um *problema de levantamento* e g é um *levantamento* de f.

Suponha agora que temos duas aplicações f e f' tais que $f \sim f'$, isto é, f e f' são homotópicas. Se existem extensões g e g' soluções do problema de extensão (1) para f e f', respectivamente, a pergunta: São g e g' homotópicas? Sugere um *problema de extensão de homotopia*. Seja $G : I \times A \to Y$ é uma homotopia entre f e f'. Então f e G definem uma aplicação $h : 0 \times X \cup I \times A \to Y$ e temos o problema de extensão

$$\begin{tikzcd} 0 \times X \cup I \times A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i"] & Y \\ I \times X \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd} \tag{3}$$

Se o problema acima possui uma solução temos que esta é uma homotopia entre g e g'. Quando o problema (3) tem solução para todo espaço Y e toda aplicação h dizemos que a aplicação inclusão $i\colon A \to X$ é uma *cofibração*. Dualmente, se existem levantamentos g e g' soluções do problema de levantamento (2) para f e f', respectivamente, temos um *problema de levantamento de homotopia*

$$\begin{tikzcd} 0 \times Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & X \arrow[d, "p"] \\ I \times Y \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, dashed] & B. \end{tikzcd} \tag{4}$$

Se o problema acima possui uma solução temos que esta é uma homotopia entre g e g'. Quando o problema (4) tem solução para todo espaço Y e todo par de aplicações (f, G) dizemos que a aplicação $p : X \to B$ é uma *fibração*(também conhecida como fibração de Hurewicz).

O conceito de fibração apareceu em torno de 1930 e pode ser visto como uma extensão da teoria de fibrados. De fato, todo fibrado sobre um CW-complexo é uma fibração (2.16). Dados uma fibração $p : X \to B$ e um ponto $b \in B$, o subespaço $F = p^{-1}(b)$ é denominado a *fibra* sobre b. Existe uma sequência exata longa que relaciona os grupos de homotopia dos espaços X, B e F. Porém, relacionar os grupos de homologia desses espaços é uma tarefa mais complicada. No caso em que a fibração é apenas a projeção $F \times B \to B$, a relação é obtida pela formula de Künneth, o caso geral é feito utilizando sequências espectrais. Porém, há casos particulares em que podemos obter relações sem utilizar a maquinaria das sequências espectrais. Esses casos serão estudados nos capítulos 3, 4 e 6.

Esta dissertação consta de oito capítulos distribuídos da seguinte forma: No capítulo 1, apresentamos conceitos básicos utilizados no desenvolvimento da dissertação; No capítulo 2, introduzimos o conceito de fibração e fazemos um estudo de suas propriedades; Nos capítulos 3 e 4 exploramos as sequências de Wang para homologia e cohomologia para uma fibração cujo espaço base é uma suspensão; No capítulo 5, utilizamos as ferramentas desenvolvidas nos capítulos anteriores para calcular a homologia e a cohomologia dos grupos clássicos $\mathbf{U}_n, \mathbf{Sp}_n$ e $\mathbf{O}_n^+$ (este último apenas para coeficientes em $\mathbb{Z}_2$); No capítulo 6 exploramos a sequência de Gysin para fibrações cuja fibra tem o mesmo tipo de homotopia que o de uma esfera. Como aplicação, calculamos os grupos de cohomologia do grupo de Lie excepcional $\mathbf{G}_2$; No capítulo 7, introduzimos as sequências espectrais em homologia, e as especializamos para o estudo das fibrações; No capítulo 8, utilizando as sequências espectrais, provamos versões um pouco mais gerais das sequências de Wang e Gysin em homologia. Além disso, introduzimos a sequência de Serre em homologia.

1 Preliminares

Nesta seção definiremos conceitos necessários para o estudo das fibrações, além de apresentar resultados que serão necessários ao desenvolvimento dos conteúdos nas próximas seções.

1.1 Espaços Compactamente Gerados

Uma categoria importante de espaços topológicos é a categoria $\mathcal{K}$ dos espaços compactamente gerados. Essa categoria satisfaz algumas propriedades interessantes, como admitir espaços de funções $\mathrm{F}(X, Y)$ e satisfazer a lei exponencial $(\mathrm{F}(X, \mathrm{F}(Y, Z))) = \mathrm{F}(X \times Y, Z))$. Neste trabalho assumiremos que todos os espaços são compactamente gerados, a menos que explicitamente indicado o contrário. Para uma exposição detalhada sobre essa categoria, veja [9].

Definição 1.1. *Um espaço topológico X é dito compactamente gerado (CG) se:*

(i) X é um espaço de Hausdorff;

(ii) Um subconjunto $A \subset X$ é fechado se, e somente se, $A \cap C$ é fechado para todo subconjunto compacto C de X;

Seja $\mathcal{K}$ a categoria dos espaços compactamente gerados e funções contínuas entre estes.

Proposição 1.2. *Todo espaço de Hausdorff localmente compacto é CG.*

Proposição 1.3. *Todo espaço de Hausdorff que satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade é CG.*

Corolário 1.4. *Todo espaço metrizável é CG.*

Definiremos um funtor κ da categoria τ_2, dos espaços topológicos e de Hausdorff e funções contínuas, na categoria $\mathcal{K}$ da seguinte forma:

- Se X é um espaço em τ_2, então X e $\kappa(X)$ possuem o mesmo conjunto subjacente e, um subconjunto A é fechado em $\kappa(X)$ se, para todo compacto C de X, $A \cap C$ é fechado em X.

- Se $f : X \to Y$ é uma função na categoria τ_2, definimos $\kappa(f) : \kappa(X) \to \kappa(Y)$ por $\kappa(f)(a) = f(a), \forall a \in \kappa(X)$.

Teorema 1.5. *(I) A função $\nu_X : \kappa(X) \to X$, dada por $\nu_X(a) = a$, é contínua;*

(II) *$\kappa(X)$ é compactamente gerado;*

(III) *Se $X \in \mathcal{K}$, então $\kappa(X) = X$;*

(IV) *$\kappa(X)$ e X possuem os mesmos subconjuntos compactos;*

(V) *Seja $f : X \to Y$ uma função. Então $\kappa(f)$ é contínua se, e somente se, $f|_C : C \to Y$ é contínua para todo $C \subset X$ compacto;*

(VI) *A operação de composição com a aplicação ν_Y é uma correspondência injetiva entre o conjunto de todas as aplicações de X em $\kappa(Y)$ e o conjunto de todas as aplicações de X em Y.*

(VII) *X e $\kappa(X)$ possuem os mesmos complexos singulares, e portanto seus grupos de homologia e cohomologia coincidem;*

(VIII) *κ é uma adjunta à direita do funtor inclusão $\mathcal{K} \to \tau_2$;*

Se X e Y são CG, seu produto cartesiano Z com a topologia usual não precisa ser. Entretanto, se $p_1 : Z \to X$ e $p_2 : Z \to Y$ são as projeções no primeiro e segundo fatores, respectivamente, temos:

Teorema 1.6. *O espaço $\kappa(Z)$, com os morfismos $\kappa(p_i), i = 1, 2$, é um produto de X e Y na categoria $\mathcal{K}$.*

Portanto, definimos o produto (categórico) de X e Y na categoria $\mathcal{K}$ por $X \times Y = \kappa(Z)$, em que Z denota o produto cartesiano de X e Y com a topologia usual.

Proposição 1.7. *O produto categórico é associativo e comutativo a menos de homeomorfismos naturais.*

Uma condição suficiente para que o produto cartesiano de dois espaços CG seja CG é a seguinte:

Proposição 1.8. *Se X é localmente compacto e Y é CG então o produto cartesiano de X e Y é CG.*

Se A é um subespaço de um espaço X CG, no sentido usual, nem sempre A é CG. Portanto, definiremos o conceito de subespaço na categoria $\mathcal{K}$ da seguinte forma: Dado um subconjunto $A \subset X$, definimos o subespaço A de X como sendo o espaço $\kappa(A_u)$, em que A_u é o subespaço A tomado no sentido usual.

Um subconjunto aberto U de um espaço topológico X é dito *regular* se, para todo ponto $x \in U$ existe uma vizinhança fechada de x contida em U.

Teorema 1.9. *Se X é CG, então todos os seus subconjuntos fechados e todos os seus subconjuntos abertos regulares são CG.*

Uma aplicação $i : X \to Y$ em $\mathcal{K}$ será denominada inclusão de X em Y se, i é um homeomorfismo de X sobre o subespaço $i(X)$ de Y.

Proposição 1.10. *Se $i : X \to X'$ e $j : Y \to Y'$ são inclusões, então $i \times j : X \times Y \to X' \times Y'$ também o é.*

Uma aplicação $f : X \to Y$ é denominada proclusão (ou aplicação quociente) se, é sobrejetora e satisfaz a seguinte condição: Um subconjunto $U \subset Y$ é aberto em Y se, e somente se, $f^{-1}(U)$ é aberto em X.

Proposição 1.11. *Se X é CG, Y é de Hausdorff e $p : X \to Y$ é uma proclusão, então Y é CG.*

Mesmo quando X e Y são CG, o espaço $\mathscr{C}(X, Y)$ das aplicações de X em Y, com a topologia compacto-aberto, não precisa ser CG.

Portanto, usaremos o funtor κ para dar uma nova topologia para $\mathscr{C}(X, Y)$ e definimos

$$\mathrm{F}(X, Y) = \kappa(\mathscr{C}(X, Y))$$

Proposição 1.12. *Se X e Y são CG, então a função avaliação $e : \mathrm{F}(X, Y) \times X \to Y$, dada por $e(f, x) = f(x)$, é contínua.*

Proposição 1.13. *Se $X, Y, Z \in \mathcal{K}$ então os espaços $\mathrm{F}(X, Y \times Z)$ e $\mathrm{F}(X, Y) \times \mathrm{F}(X, Z)$ são naturalmente homeomorfos.*

Proposição 1.14. *Se $X, Y, Z \in \mathcal{K}$ então os espaços $\mathrm{F}(X \times Y, Z)$ e $\mathrm{F}(Y, \mathrm{F}(X, Z))$ são naturalmente homeomorfos.*

Proposição 1.15. *Se X, Y e Z são CG, então a operação de composição é uma aplicação contínua de $\mathrm{F}(Y, Z) \times \mathrm{F}(X, Z)$ em $\mathrm{F}(X, Z)$.*

É fácil ver que F define um funtor que é contravariante na primeira coordenada e covariante na segunda. Em particular, se $g : X \to X'$ e $h : Y \to Y'$ são aplicações, então a composição com g e com h definem aplicações

$$\overline{g} = \mathrm{F}(g, 1_Y) : \mathrm{F}(X, Y) \to \mathrm{F}(X', Y)$$
$$\underline{h} = \mathrm{F}(1_X, h) : \mathrm{F}(X, Y) \to \mathrm{F}(X, Y')$$

Segue-se que essas aplicações induzem operações nos conjuntos de classes de homotopia

$$\overline{g} : [X, Y] \to [X', Y]$$
$$\underline{h} : [X, Y] \to [X, Y']$$

Por fim, de (1.13), temos

Proposição 1.16. *Os funtores $X \times -$ e $\mathrm{F}(X, -)$ formam um par adjunto.*

1.2 Pares NDR

Seja $\mathcal{K}^2$ a categoria de todos os pares (X, A), onde X é CG e A é um subespaço de X, juntamente com todas as aplicações entre tais pares. É desejável que o subespaço A esteja bem incorporado em X, como por exemplo, que a inclusão $i : A \to X$ seja uma cofibração. Novamente, para uma exposição mais detalhada, veja [9].

Definição 1.17. *Sejam $X \in \mathcal{K}$ e A um subespaço de X. Então o par (X, A) é dito NDR (neighborhood deformation retract) se existem aplicações $u : X \to I$ e $h : I \times X \to X$ tais que:*

(1) $A = u^{-1}(0)$*;*

(2) $h(0, x) = x, \forall x \in X$*;*

(3) $h(t, x) = x, \forall(t, x) \in I \times A$*;*

(4) $h(1, x) \in A$ *para todo* $x \in X$ *tal que* $u(x) < 1$*;*

Se ao invés de (4) tivermos:

(4') $h(1 \times X) \subset A$

Dizemos que o par (X, A) *é DR (deformation retract). Dizemos ainda que o par* (u, h) *representa o par* (X, A) *como um par NDR (DR).*

Note que A é um retrato por deformação forte da vizinhança $U = \{x \in X; u(x) < 1\}$, e portanto um retrato de uma vizinhança de X. Nos referiremos à U como uma vizinhança retrátil de A.

Teorema 1.18. *Se* X *é CG e* A *é fechado em* X*, as seguintes condições são equivalentes:*

(1) (X, A) *é um par NDR;*

(2) $(I \times X, 0 \times X \cup I \times A)$ *é par DR;*

(3) $0 \times X \cup I \times A$ *é um retrato por deformação forte de* $I \times X$*;*

(4) (X, A) *tem a propriedade de extensão de homotopia com respeito a espaços arbitrários (isto é, a aplicação inclusão de* A *em* X *é uma cofibração);*

Exemplo 1.19. Seja $I_0 = \{0, 1\} \subset I$. Então os pares $(I, I_0), (I, 0)$ e $(I, 1)$ são exemplos de pares NDR. Em particular, $(I, 0)$ e $(I, 1)$ são pares DR.

Proposição 1.20. *Se* (X, A) *e* (Y, B) *são pares NDR, então também o é qualquer par que possa ser formado a partir do diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
& & X \times B \arrow[dr, dash] & \\
X \times Y \arrow[r, dash] & X \times B \cup A \times Y \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & A \times B. \\
& & A \times Y \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

Em particular, $(X, A) \times (Y, B) = (X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$ *é um par NDR. Além disso, se* (X, A) *ou* (Y, B) *é par DR,* $(X, A) \times (Y, B)$ *também o é.*

Proposição 1.21. *Se* $B \subset A \subset X$ *e* (A, B) *e* (X, A) *são pares NDR (DR), então o par* (X, B) *é NDR (DR).*

Lema 1.22. *Se* A *é um subconjunto fechado de* X*, então* (X, A) *é NDR se, e somente se, existem aplicações* $u : X \to I$ *e* $h : I \times X \to X$ *tais que:*

(1) $A \subset u^{-1}(0)$*;*

(2) $h(0, x) = x, \forall x \in X$*;*

(3) $h(t, a) = a, \forall(t, a) \in I \times A$*;*

(4) $h(t, x) \in A$ sempre que $u(x) < t$;

Uma aplicação $f : (X, A) \to (Y, B)$ é um *homeomorfismo relativo* se f é uma proclusão entre X e Y e um homeomorfismo entre $X - A$ e $Y - B$. Um exemplo de homeomorfismo relativo aparece na construção de espaços de adjunção.

Sejam (X, A) e B espaços e $h : A \to B$ uma aplicação. Então o *espaço de adjunção* de X em B por h, denotado $X \cup_h B$, é quociente da união disjunta $X + B$ pela relação de equivalência gerada identificando-se $x \in A$ a $h(x) \in B$. Note que $X \cup_h B$ contém uma cópia homeomorfa de B e a aplicação identificação $f : (X + B, A + B) \to (X \cup_h B, B)$ é um homeomorfismo relativo. Em particular, se B é um ponto, a aplicação identificação $(X, A) \to (X/A, *)$ é um homeomorfismo relativo.

Note ainda que o espaço de adjunção $X \cup_h B$ é o espaço pushout das aplicações $h : A \to B$ e $i : A \to X$, em que i é a inclusão.

Proposição 1.23. *Sejam (X, A) um par NDR (DR) e $f : (X, A) \to (Y, B)$ um homeomorfismo relativo. Então (Y, B) é um par NDR (DR). Em particular, se $h : A \to Y$ é uma aplicação, então $(X \cup_h B, B)$ é um par NDR (DR).*

Teorema 1.24 (excisão para aplicações)**.** *Sejam (X, A) um par NDR e $f : (X, A) \to (Y, B)$ um homeomorfismo relativo. Então,*

$$f_* : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$$
$$f^* : H^n(Y, B) \to H^n(X, B)$$

são isomorfismos para todo n.

Um exemplo importante de espaço de adjunção é o *mapping cylinder* $\hat{X}$ de uma aplicação $f : X \to Y$. Este é o espaço $(I \times X) \cup_h Y$, em que $h : 1 \times X \to Y$ é dada por $h(1, x) = f(x)$. Seja $\langle t, x\rangle$ a imagem do ponto (t, x) pela aplicação identificação. Identificando $x \in X$ com $\langle 0, x\rangle$ e $y \in Y$ com sua imagem pela aplicação identificação, obtemos imersões $i : X \to \hat{X}$ e $j : Y \to \hat{X}$. Definimos a projeção $\hat{f} : \hat{X} \to Y$ por

$$\hat{f}(\langle t, x\rangle) = f(x),$$
$$\hat{f}(y) = y.$$

Note que Y é um retrato por deformação de $\hat{X}$. Além disso, $\hat{f}$ é uma equivalência de homotopia, com inversa homotópica j, e satisfaz $\hat{f} \circ i = f$.

Definição 1.25. *Sejam X_1 e X_2 subespaços de algum espaço X. O par $\{X_1, X_2\}$ é dito um par excisivo se a inclusão de complexos de cadeias $\Delta(X_1) + \Delta(X_2) \to \Delta(X_1 \cup X_2)$ induz um isomorfismo em homologia.*

Teorema 1.26. *Seja $X = X_1 \cup X_2$. Se $X = \operatorname{int}(X_1) \cup \operatorname{int}(X_2)$, então $\{X_1, X_2\}$ é um par excisivo.*

Teorema 1.27. *O par $\{X_1, X_2\}$ é excisivo se, e somente se, a inclusão $(X_1, X_1 \cap X_2) \to (X_1 \cup X_2, X_2)$ induz um isomorfismo em homologia.*

Definição 1.28. *Uma terna $(X; A, B)$ é dita uma terna NDR se $X = A \cup B$ com A e B fechados e um dos pares $(A, A \cap B)$, $(B, A \cap B)$ é um par NDR.*

Proposição 1.29. *Seja $(X; A, B)$ uma terna NDR. Então $\{A, B\}$ é um par excisivo.*

1.3 Espaços com ponto base

Muitas vezes, para construirmos certos espaços, como por exemplo suspensões, cones e alguns produtos, se faz necessário discriminar um ponto do espaço, o ponto base. Um espaço B com ponto base $b_0 \in B$ será denotado por (B, b_0). Os espaços com ponto base definem a categoria $\mathcal{K}_0$ dos espaços com ponto base. Uma subcategoria de $\mathcal{K}_0$ de particular interesse é a categoria $\mathcal{K}_*$ dos *espaços com ponto base não-degenerado*, isto é, dos espaços (B, b_0) que são pares NDR.

Ocasionalmente, teremos que lidar com espaços sem um ponto base, denominados *espaços livres*, e aplicações e homotopias entre esses espaços, denominadas aplicações e homotopias livres, respectivamente. Para isso, juntaremos um ponto base externo a esses espaços da seguinte forma: Se X é um espaço livre, seja $X^+ = X + P$ a soma topológica de X com o espaço P que consiste de apenas um ponto $\{*\}$; Se $f : X \to Y$ é uma aplicação livre, seja $f^+ : X^+ \to Y^+$ a extensão de f que preserva ponto base. As homotopias livres são tratadas de maneira semelhante. Essa associação constitui um funtor fiel da categoria $\mathcal{K}$ na categoria $\mathcal{K}_*$. Assim, consideraremos $\mathcal{K}$ como uma subcategoria de $\mathcal{K}_*$.

Se (X, x_0) e (Y, y_0) são espaços em $\mathcal{K}_0$ é natural escolher (x_0, y_0) como o ponto base para $X \times Y$ uma vez que as projeções $p_1 : X \times Y \to X$ e $p_2 : X \times Y \to Y$ são aplicações em $\mathcal{K}_0$ e é fácil ver que $(X \times Y, (x_0, y_0))$ com as aplicações p_1 e p_2 constituem um produto categórico de (X, x_0) e (Y, y_0). Essa construção se estende à $\mathcal{K}_*$ com o auxílio de (1.20).

O mesmo não ocorre com a soma $X + Y$ uma vez que esta não tem um ponto base natural. Identificando x_0 com y_0, obtemos o espaço $X \vee Y$, denominado o wedge de X e Y. Este espaço juntamente com as inclusões naturais $j_1 : X \to X \vee Y$ e $j_2 : Y \to X \vee Y$ é uma soma de X e Y na categoria $\mathcal{K}_0$. Novamente, essa construção se estende à $\mathcal{K}_*$. Há uma aplicação natural $k : X \vee Y \to X \times Y$, que é uma inclusão, identificando o wedge com o subespaço $X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$ de $X \times Y$.

Uma construção importante na categoria $\mathcal{K}_*$ é o produto smash (ou join reduzido) de dois espaços X e Y. Ele é definido como o espaço quociente

$$X \wedge Y = \frac{X \times Y}{X \vee Y}.$$

Para $(x, y) \in X \times Y$, denotaremos sua imagem pela proclusão $X \times y \to X \wedge Y$ por $x \wedge y$. Note que $x_0 \wedge y = x_0 \wedge y_0 = x \wedge y$ é o ponto base de $X \wedge Y$.

Abaixo listamos algumas propriedade do produto smash:

Teorema 1.30. *(a) O produto smash é comutativo e associativo, a menos de homeomorfismo natural;*

(b) O produto smash é distributivo sobre a adição, isto é, os espaços $X \wedge (Y \vee Z)$ e $(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$ são naturalmente homeomorfos;

(c) Se (X, A) é um par NDR e $Y \in \mathcal{K}_*$, então os espaços $(X/A) \wedge Y$ e $X \wedge Y / A \wedge Y$ são naturalmente homeomorfos.

(d) Se $X \in \mathcal{K}_*$ e $Y \in \mathcal{K}$, então

$$X \wedge Y^+ = \frac{X \times Y}{\{x_0\} \times Y};$$

(e) Se X e Y são espaços livres, então $X^+ \wedge Y^+ = (X \times Y)^+$.

Considere o espaço $(I, 0) \in \mathcal{K}_*$. Dado um espaço $X \in \mathcal{K}_*$, definimos o cone (reduzido) sobre X como sendo o espaço

$$\mathbf{T}X = I \wedge X.$$

Neste caso, a aplicação $x \mapsto 1 \wedge x$ é uma inclusão, que leva X sobre o subespaço $\{1\} \wedge X$ de $\mathbf{T}X$, que por esse motivo identificaremos com X, enquanto $\{0\} \wedge X$ é o ponto base. O espaço $\mathbf{T}X$ é contrátil e difere do cone usual apenas em um subespaço contrátil que foi colapsado sobre o ponto base de $\mathbf{T}X$, a saber o cone usual sobre o ponto base. Ainda, por (1.30c) temos

$$\mathbf{T}X = \frac{I \wedge X}{0 \wedge X}.$$

Seja agora $S = I/I_0$. Então a suspensão (reduzida) de X é o espaço $\mathbf{S}X = S \wedge X$. Devido a $1.30c$,

$$\mathbf{S}X = \frac{I \wedge X}{I_0 \wedge X} = \frac{\mathbf{T}X}{X}.$$

Novamente, este espaço difere da suspensão usual em um subconjunto contrátil que foi colapsado em um ponto.

Por fim, defina subconjuntos

$$\mathbf{T}_+X = \{\bar{t} \wedge x \in \mathbf{S}X; 0 \leq t \leq 1/2\};$$
$$\mathbf{T}_-X = \{\bar{t} \wedge x \in \mathbf{S}X; 1/2 \leq t \leq 1\},$$

em que $\bar{t}$ denota a imagem de t sob a aplicação identificação $\omega : I \to S$. Então $\mathbf{T}_-X$ e $\mathbf{T}_+X$ são homeomorfos a $\mathbf{T}X$. Além disso, $\mathbf{T}_-X \cap \mathbf{T}_+X$ é homeomorfo a X.

No restante dessa seção, consideraremos os grupos de homologia e cohomologia com coeficientes em um PID A.

Seja $X \in \mathcal{K}_*$ um H-espaço com produto μ e considere a sequência exata do par $(X \times X, X \wedge X)$

$$\cdots \to H_q(X \vee X) \xrightarrow{k_*} H_q(X \times X) \xrightarrow{l_*} H_q(X \times X, X \vee X) \xrightarrow{\partial_*} \cdots$$

Teorema 1.31. *O homomorfismo k_* é um monomorfismo split. Logo,*

$$H_q(X \times X) \simeq H_q(X \vee X) \oplus H_q(X \times X, X \vee X) \quad (\forall q)$$

Além disso, l_* é um isomorfismo entre o subgrupo $\ker p_{1*} \cap \ker p_{2*}$ de $H_q(X \times X)$ e $H_q(X \times X, X \vee X)$ para todo q.

Seja $\beta : H_q(X \times X, X \vee X) \to H_q(X \times X)$ a inversa da restrição de l_* a $\ker p_{1*} \cap \ker p_{2*}$. Então, para cada elemento $u \in H_q(X \times X)$, temos

$$u = i_{1*}p_{1*}u + i_{2*}p_{2*}u + \beta l_* u,$$

em que $i_j : X \to X \times X$ são as inclusões.

Um elemento $x \in H_*(X)$ é dito *primitivo* se, $l_*\Delta_* x = 0$, ou equivalentemente, se $\Delta_* x = i_{1*}x + i_{2*}x$. Ainda, se $H_*(X)$ é livre de torção, estas condições são equivalentes a

$$\Delta_* x = 1 \times x + x \times 1.$$

O conjunto P de todas as classes de homologia primitivas é um submódulo de $H_*(X)$.

De modo análogo, temos

Teorema 1.32. *O homomorfismo k^* é um epimorfismo split. Logo,*

$$H^q(X \times X) \simeq H^q(X \vee X) \oplus H^q(X \times X, X \vee X) \quad (\forall q)$$

Além disso, l^* induz um isomorfismo $\bar{l}$ entre $H^q(X \times X, X \vee X)$ e $H^q(X \times X)/L_q$, em que $L_q = \operatorname{Im} p_1^* + \operatorname{Im} p_2^*$.

Denominaremos β^* a composta da inversa desse isomorfismo com a projeção de $H^q(X \times X)$ sobre $H^q(X \times X)/L_q$, isto é, β^* torna o diagrama abaixo comutativo.

$$\begin{tikzcd}
H^q(X \times X) \arrow[r, "\beta^*"] \arrow[d, "t"'] & H^q(X \times X, X \vee X) \arrow[dl, "\bar{l}"] \\
\frac{H^q(X \times X)}{L_q} &
\end{tikzcd}$$

Então, para cada $u \in H^q(X \times X)$, temos

$$u = p_1^* i_1^* u + p_2^* i_2^* u + l^* \beta^* u$$

Um elemento $x \in H^*(X)$ é dito *primitivo* se, $\beta^* \mu^* x = 0$, ou equivalentemente, se $\mu^* x = p_1^* x + p_2^* x$. O conjunto P^* das classes de cohomologia primitivas é um submódulo de $H^*(X)$.

Se $u \in H^p(X)$ e $v \in H^q(X)$, então $u \times v \in H^{p+q}(X \times X, X \vee X)$ e temos

$$\Delta^* l^* (u \times v) = uv \in H^*(X).$$

Os elementos do submódulo D^* gerado por esses produtos são denominados *decomponíveis.*

Dualmente, um elemento $x \in H_*(X)$ é dito *decomponível* se este pertence ao submódulo D de $H_*(X)$ gerado pelos produtos

$$\mu_* \beta(u \times v) = u \cdot v \in H_*(X)$$

em que $u, v \in H_*(X)$.

Por fim, temos

Teorema 1.33. *Os módulos P e P^* são duais aos módulos $H^*(X)/D^*$ e $H_*(X)/D$, respectivamente.*

2 Fibrações

Seja $p\colon X \to B$ uma aplicação e Y um espaço na categoria $\mathcal{K}$. Um HLP (*Homotopy Lifting Problem*) para o par (p, Y) é simbolizado pelo diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "p"] \\ I \times Y \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, dashed, "F"] & B \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Em que $i_0(y) = (0, y), \forall y \in Y$, as aplicações $f\colon Y \to X$ e $G\colon I \times Y \to B$ constituem os dados do problema. Uma solução para o HLP é uma homotopia $F : I \times Y \to X$ de f (ou seja, $F(0, y) = f(y)$) tal que $p \circ f = G$ e dizemos que F levanta a homotopia G de $p \circ f$ para uma homotopia de f.

Observação 2.1. Às vezes, utilizamos $i_1 : Y \to I \times Y$ ao invés de i_0, dada por $i_1(y) = (1, y)$, ao invés de i_0.

Definição 2.2. *Uma aplicação p tem a propriedade do levantamento de homotopia (PLH) com respeito a Y se todo problema do tipo (2.1) tem uma solução, e p é dita uma fibração se tem a PLH para todo espaço Y.*

Definição 2.3. *Se $p : X \to B$ é uma fibração, a fibra sobre $b \in B$, é o conjunto $F_b = p^{-1}(b) \subset X$. O espaço B é dito o espaço base e o espaço X é o espaço total da fibração p; e diz-se que X é um espaço fibrado sobre B com respeito a p.*

Simbolizaremos

$$F_b \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} B,$$

onde $p : X \to B$ é uma fibração, F é uma fibra sobre algum ponto de B e $i : F \to B$ é a inclusão.

Para todo espaço Y, seja $\mathrm{F}(Y) = \mathrm{F}(I, Y)$ o espaço de todos os caminhos em Y. Dado $p : X \to B$, defina:

$$I^p = \{(x, u) \in X \times \mathrm{F}(B); p(x) = u(0)\}.$$

Os pontos de I^p são os dados para todos os HLP para o par (p, P), em que P é um único ponto, isto é, $P = \{*\}$.

De fato, seja $f : P \to X$. Então $f(*) = x$ para algum $x \in X$.

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "p"] \\ I \times \{*\} \arrow[r, "G"'] & B \end{tikzcd}$$

Identificamos de maneira biunivoca a aplicação f com $f(*) = x$. Sabemos que G satisfaz $G(i_0(*)) = (p \circ f)(*)$, ou seja, $G(0, *) = p(x)$. Podemos portanto, identificar biunivocamente, G com o caminho $u : I \to B$ dado por $u(t) = G(t, *)$. Logo, os dados do problema são x e u tais que $u(0) = p(x)$.

Definição 2.4. *Uma conexão para p é uma aplicação $\lambda : I^p \to \mathrm{F}(X)$, com as seguintes propriedades:*

(1) $\lambda(x, u)(0) = x$.

(2) $p \circ \lambda(x, u) = u$.

Portanto, $\lambda(x, u)$ é uma solução para o HLP do par com dados (x, u)

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r, "x"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "p"] \\ I \times \{*\} \arrow[r, "u"'] \arrow[ur, dashed, "\lambda(x,u)"] & B \end{tikzcd}$$

Uma conexão para p é, simultaneamente, uma solução para todo HLP com (x, u) como dados para o par (p, P).

Além disso, λ é uma conexão para p se, e somente se, a sua adjunta $\tilde{\lambda} : I \times I^p \to X$ é solução para o HLP

$$\begin{tikzcd} I^p \arrow[r, "p_0'"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "p"] \\ I \times I^p \arrow[r, "\mu"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{\lambda}"] & B \end{tikzcd}$$

em que $p_0'(x, u) = x$ e $\mu(t, x, u) = u(t)$.

De fato, lembrando que $\tilde{\lambda}(t, x, u) = \lambda(x, u)(t)$, temos:

Se λ é uma conexão para p:

- $\tilde{\lambda}(0, x, u) = \lambda(x, u)(0) = x = p_0'(x, u)$, donde segue que $\tilde{\lambda}$ é uma homotopia de p_0'.

- $(p \circ \tilde{\lambda})(t, x, u) = p(\lambda(x, u)(t)) = u(t) = \mu(t, x, u)$, donde $p \circ \tilde{\lambda} = \mu$.

E portanto $\tilde{\lambda}$ é uma solução para o HLP.

Por outro lado, se $\tilde{\lambda}$ é uma solução para o HLP acima, temos:

- $\lambda(x, u)(0) = x$.

- $(p \circ \lambda(x, u))(t) = p(\tilde{\lambda}(t, x, u) = \mu(t, x, u) = u(t)$, donde $p \circ \lambda(x, u) = u$.

E portanto λ é uma conexão para p.

Teorema 2.5. *Uma aplicação p:$X \to B$ é uma fibração se, e só se, existe uma conexão para p.*

Demonstração. Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "p"] \\
I \times Y \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, dashed, "F"] & B
\end{tikzcd}$$

Suponha que existe conexão λ para p. Sejam $\tilde{\lambda} : I \times I^p \to X$ a adjunta de λ e $\tilde{G} : Y \to \mathrm{F}(I, B)$ a adjunta de G. Defina $\theta : Y \to I^p$ por $\theta(y) = (f(y), \tilde{G}(y))$ (note que tal aplicação está bem definida uma vez que $\tilde{G}(y)(0) = G(0, y) = p(f(y)))$. A aplicação $\tilde{\lambda} \circ (1 \times \theta)$ é a solução desejada. De fato,

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dd, "i_0"'] & & X \arrow[dd, "p"] \\
& I \times I^p \arrow[ur, "\tilde{\lambda}"] & \\
I \times Y \arrow[rr, "G"'] \arrow[ur, "1\times\theta"] & & B
\end{tikzcd}$$

- Para $y \in Y$, temos $(\tilde{\lambda} \circ (1 \times \theta))(0, y) = \tilde{\lambda}(0, f(y), \tilde{G}(y)) = f(y)$, donde
$$\tilde{\lambda} \circ (1 \times \theta) \circ i_0 = f.$$

- Para $(t, y) \in I \times Y$, temos
$$\begin{aligned}
(p \circ \tilde{\lambda} \circ (1 \times \theta))(t, y) = p(\tilde{\lambda}(t, f(y), \tilde{G}(y))) &= p(\lambda(f(y), \tilde{G}(y))(t)) \\
&= (p \circ \lambda(f(y), \tilde{G}(y)))(t) = \tilde{G}(y)(t) = G(t, y),
\end{aligned}$$
donde $p \circ \tilde{\lambda} \circ (1 \times \theta) = G$.

Reciprocamente, se $p : X \to B$ é uma fibração, o diagrama abaixo tem solução $\tilde{\lambda}$, cuja adjunta λ (pela proposição anterior) é conexão para p.

$$\begin{tikzcd}
I^p \arrow[r, "p'_0"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "p"] \\
I \times I^p \arrow[r, "\mu"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{\lambda}"] & B
\end{tikzcd}$$

□

Teorema 2.6. *Para quaisquer espaços F e B, a projeção $p_2 : F \times B \to B$ é uma fibração.*

Demonstração. Seja o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "p"] \\
I \times I^p \arrow[r, "\mu"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{\lambda}"] & B
\end{tikzcd}$$

Defina $H : I \times Y \to F \times B$ por $H(t, y) = (p_1(f(y)), G(t, y))$. Então:

- $H(0,y) = (p_1(f(y)), G(0,y)) = (p_1(f(y)), p_2(f(y))) = f(y), \forall y \in Y$;
- $p_2 \circ H(t,y) = G(t,y), \forall (t,y) \in I \times Y$;

$\square$

Teorema 2.7. *Se (X, A) é um par NDR, e $i : A \to X$ é a inclusão, então a operação de restrição $\bar{i} : \mathrm{F}(X, Z) \to \mathrm{F}(A, Z)$ é fibração para todo espaço Z.*

Demonstração. Seja o diagrama:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & \mathrm{F}(X,Z) \arrow[d, "\bar{i}"] \\ I \times Y \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"] & \mathrm{F}(A,Z) \end{tikzcd}$$

Por hipótese temos que $\bar{i}(f(y)) = G(0,y), \forall y \in Y$, donde $[f(y)](a) = [G(0,y)](a)$, $\forall y \in Y, \forall a \in A$. Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "i_0"'] & Z \\ I \times X \times Y \arrow[ur, dashed, "H"] & I \times A \times Y \arrow[l, "i_A"] \arrow[u, "\tilde{G}"'] \end{tikzcd}$$

Em que $\tilde{f}(x,y) = [f(x)](y)$ e $\tilde{G}(t,a,y) = [G(t,y)](a)$ (note que a continuidade de tais funções decorre da continuidade da aplicação avaliação). Este é um problema de extensão de homotopia para o par $(X \times Y, A \times Y) = (X, A) \times (Y, \emptyset)$. De fato, $\tilde{G}(0,(a,y)) = [G(0,t)](a) = [f(y)](a) = \tilde{f}(a,y), \forall (a,y) \in A \times Y$. Então, existe uma aplicação $H : I \times X \times Y \to Z$ que comuta o diagrama, ou seja, $H(0,x) = \tilde{f}(x), \forall x \in X \times Y$ e $H(x) = \tilde{G}(x), \forall x \in I \times A \times Y$.

Afirmamos que a adjunta de H, $\tilde{H}{:}I{\times}Y \to \mathrm{F}(X,Z)$ dada por $\tilde{H}(t,y)(x) = H(t,x,y)$ é a solução procurada. De fato:

- Dado $y \in Y$, $\tilde{H}(0,y)(x) = H(0,x,y) = \tilde{f}(x,y) = f(y)(x), \forall x \in X$, donde $\tilde{H} \circ i_0(y) = \tilde{f}(y)$ e portanto, $\tilde{H} \circ i_0 = \tilde{f}$;
- Dado $(t,y) \in I{\times}Y$, $(\bar{i}{\circ}\tilde{H})(t,y)(a) = \tilde{H}(t,y)(a) = \tilde{G}(t,a,y) = G(t,y)(a), \forall a \in A$, donde $(\bar{i} \circ \tilde{H})(t,y) = G(t,y)$ e portanto $\bar{i} \circ \tilde{H} = G$.

Portanto, $\bar{i}$ é fibração. $\square$

Corolário 2.8. *As aplicações $p : \mathrm{F}(X) \to X \times X$ e $p_i : \mathrm{F}(X) \to X$ definidas por*

$$p(u) = (u(0), u(1))$$
$$p_i(u) = u(i), i = 0, 1$$

são fibrações.

Demonstração. Primeiramente, identifique $X{\times}X$ com $\mathrm{F}(\{0,1\}, X)$ e X com $\mathrm{F}(\{i\}, X)$, $i = 0, 1$. Então as aplicações $p : \mathrm{F}(X) \to X \times \mathrm{F}(\{0,1\}, X)$ e $p_i : \mathrm{F}(X) \to \mathrm{F}(\{i\}, X)$ são restrições. Note que os pares $(I, \{0,1\})$ e $(I, \{i\})$ são NDR, e o resultado segue do teorema anterior. $\square$

Teorema 2.9. *Se* $p\colon X \to B$ *é uma fibração, então para todo espaço* Z*,* $\underline{p}\colon \mathrm{F}(Z,X) \to \mathrm{F}(Z,B)$*, dada por* $\underline{p}(f) = p \circ f$*, é uma fibração.*

Demonstração. Para todo HLP

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & \mathrm{F}(Z,X) \arrow[d, "\underline{p}"] \\ I \times Y \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, dashed, "H"] & \mathrm{F}(Z,B) \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Considere o diagrama:

$$\begin{tikzcd} Y \times Z \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "p"] \\ I \times Y \times Z \arrow[r, "\tilde{G}"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

em que $\tilde{f}(y,z) = f(y)(z)$ e $\tilde{G}(t,y,z) = G(t,y)(z)$. Por hipótese, p é fibração, então existe $\tilde{H}: I \times Y \times Z \to X$ que comuta o diagrama acima. Defina $H: I \times Y \to \mathrm{F}(Z,X)$ por $H(t,y)(z) = \tilde{H}(t,y,z)$.

Afirmamos que H é a solução procurada para o diagrama 2.2. Com efeito:

- Para todo $(y,z) \in Y \times Z$ temos $H(0,y)(z) = \tilde{H}(0,y,z) = \tilde{f}(y,z) = f(y)(z)$. Portanto, $H \circ i_0 = f$;
- Para todo $(t,y,z) \in I \times Y \times Z$ temos $[(\underline{p} \circ H)(t,y)](z) = [\underline{p}(H(t,y))](z) = p(H(t,y)(z)) = p(\tilde{H}(t,y,z)) = \tilde{G}(t,y,z) = G(t,y)(z)$. Portanto, $\underline{p} \circ H = G$.

□

Teorema 2.10. *Se* $p\colon X \to Y$ *e* $q\colon Y \to Z$ *são fibrações, então* $q \circ p\colon X \to Z$ *é fibração.*

Demonstração. Dado um HLP,

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "q\circ p"] \\ I \times Z \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, dashed, "F"] & B \end{tikzcd}$$

considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[r, "p"] & Y \arrow[d, "q"] \\ I \times Z \arrow[rr, "G"'] \arrow[ur, dashed, "F"] \arrow[urr, dashed, "F_q"'] & & B. \end{tikzcd}$$

Como q é fibração, existe $F_q: I \times Z \to Y$ tal que $F_q \circ i_0 = p \circ f$ e $q \circ F_q = G$. Como p é fibração, existe $F: I \times Z \to X$ tal que $F \circ i_0 = f$ e $p \circ F = F_q$. Afirmamos que F é solução para o HLP dado. Com efeito:

- $F \circ i_0 = f$;
- $(q \circ p) \circ F = q \circ (p \circ F) = q \circ F_q = G$.

□

Teorema 2.11. *Toda aplicação de recobrimento é uma fibração.*

Demonstração. Suponha que $p : \tilde{X} \to X$ é uma aplicação de recobrimento e seja

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ I \times Y \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, dashed, "F"] & X \end{tikzcd}$$

um HLP. Pelo teorema de levantamento de caminhos, para cada $y \in Y$ existe um único caminho $u_y : I \to \tilde{X}$ tal que $u_y(0) = f(y)$ e $(p \circ u_y)(t) = G(t, y)$. Mostremos que a função $F : I \times Y \to \tilde{X}$ dada por $F(t, y) = u_y(t)$ é contínua.

Seja $y \in Y$. Para cada $t \in I$ existe uma vizinhança uniformemente recoberta $W \subset X$ de $G(t, y)$, uma vez que p é recobrimento. $G^{-1}(W)$ é uma vizinhança de (t, y) em $I \times Y$. Logo, existem vizinhanças $U = U(t, y)$ de t e $V = V(t, y)$ de y tais que $U \times V \subset I \times Y$, e por conseguinte, $G(U \times V) \subset W$. Seja $\eta > 0$ um número de Lebesgue para a cobertura $\{U(t, y); t \in I\}$ de I, e considere $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ uma partição de I com $t_i - t_{i-1} < \eta$ para $i = 1, \ldots, n$. Então, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $[t_{i-1}, t_i] \subset U(t'_i, y)$ para algum $t'_i \in I$, e portanto

$$[t_{i-1}, t_i] \times V(t'_i, y) \subset U(t'_i, y) \times V(t'_i, y)$$

de modo que $G([t_{i-1}, t_i] \times V(t'_i, y)) \subset W_i$, vizinhança uniformemente recoberta de $G(t'_i, y)$.

Tome

$$V(y) = \bigcap_{i=1}^{n} V(t'_i, y)$$

vizinhança de y. A seguir, definimos uma função contínua $F_y : I \times V(y) \to \tilde{X}$ tal que

$$\begin{aligned} &F_y(0, z) = f(z); \\ &(p \circ F_y)(t, z) = G(t, z) \text{ para } z \in V(y), t \in I. \end{aligned}$$

Em primeiro lugar, defina F_y em $\{t_0\} \times V(y)$ por

$$f_y(t_0, z) = f(z).$$

Suponha que F_y está definida em $[0, t_i] \times V_(y)$. Sabemos que $p^{-1}(W_i) = \cup_{\alpha \in \Lambda} \tilde{W}_\alpha$, onde a união é disjunta e, para cada $\alpha \in \Lambda$, $\tilde{W}_\alpha$ é um subconjunto aberto de $\tilde{X}$ e $p|_{\tilde{W}_\alpha} : \tilde{W}_\alpha \to W_i$ é um homeomorfismo.

Seja $q_\alpha = (p|_{\tilde{W}_\alpha})^{-1} : W_i \to \tilde{W}_\alpha$. Note que $V(y)$ é a reunião disjunta dos conjuntos abertos

$$V_\alpha = \{z \in V(y); F_y(t_i, z) \in \tilde{W}_\alpha\}.$$

Basta mostrarmos que $V(y) \subset \cup V_\alpha$. Se $z \in V(y)$, então $(p \circ F_y)(t_i, z) = G(t_i, z) \in W_i$ donde $F_y(t_i, z) \in p^{-1}(W_i)$ e portanto, $F(t_i, y) \in \tilde{W}_\alpha$ para algum $\alpha \in \Lambda$.

Portanto, $[t_{i-1}, t_i] \times V(y)$ é uma união disjunta de conjuntos abertos $[t_{i-1}, t_i] \times V_\alpha$. Podemos então estender F_y sobre $[0, t_{i+1}] \times V(y)$ estabelecendo $F_y(t, z) = q_\alpha(G(t, z))$ para $t \in [t_i, t_{i+1}]$ e $z \in V_\alpha$.

Seja $z \in V(y)$. Então $u_z(0) = f(z) = F_y(0, z)$ e $(p \circ u_z)(t) = G(t, z) = (p \circ F_y)(t, z)$ e segue da unicidade do levantamento de caminhos que $u_z(t) = F_y(t, z), \forall t \in I$. Disto segue que F e F_y coincidem no aberto $I \times V(y)$. Uma vez que cada F_y é contínua e os abertos $V(y)$ cobrem Y, F é contínua. $\square$

Definição 2.12 (Paracompacidade)**.** *Seja X um espaço topológico arbitrário e $\mathfrak{A}$ uma coleção de subconjuntos de X.*

(i) *$\mathfrak{A}$ é dita localmente finita se, para cada ponto de X, existe uma vizinhança deste que intercepta apenas um número finito de elementos de $\mathfrak{A}$;*

(ii) *Uma coleção $\mathfrak{B}$ de subconjuntos de X é dita um refinamento de $\mathfrak{A}$ (ou refina $\mathfrak{A}$) se, para cada $B \in \mathfrak{B}$, existe $A \in \mathfrak{A}$ tal que $B \subset A$. Se os elementos de $\mathfrak{B}$ são abertos (fechados), dizemos que $\mathfrak{B}$ é um refinamento aberto (fechado).*

Um espaço de Hausdorff X é dito paracompacto se, para toda cobertura aberta $\mathfrak{A}$ de X, existe refinamento aberto $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$ localmente finito.

Exemplo 2.13. Todo CW-complexo é paracompacto. Em particular, os espaços $\mathbb{R}^n$ são paracompactos.

Teorema 2.14 (Hurewicz)**.** *Seja $p : X \to B$ uma aplicação. Suponha que B é paracompacto e que existe uma cobertura aberta $\mathfrak{B}$ de B tal que, para cada $V \in \mathfrak{B}$, $p|_{p^{-1}(V)} : p^{-1}(V) \to V$ é uma fibração. Então p é uma fibração.*

A prova do teorema acima é extensa e foge do escopo desse trabalho, portanto não a apresentaremos aqui. Uma prova pode ser encontrada em [[3], capitulo XX, §3].

Definição 2.15 (Fibrado)**.** *Um fibrado é uma 4-upla (E, p, B, F) em que E, B e F são espaços topológicos arbitrários e $p : E \to B$ é uma sobrejeção contínua satisfazendo a seguinte condição:*

Para cada $b \in B$, existem uma vizinha V_b de b e um homeomorfismo $\varphi_b : p^{-1}(V_b) \to V_b \times F$ que comuta o diagrama

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(V_b) \arrow[r, "\varphi_b"] \arrow[dr, "p"'] & V_b \times F \arrow[d, "p_1"] \\ & V_b \end{tikzcd}$$

em que p_1 é a projeção natural.

Os espaços E, B e F são denominados espaço total, espaço base e fibra do fibrado, respectivamente, e a aplicação p é denominada a projeção do fibrado.

Corolário 2.16. *Seja (E, p, B, F) um fibrado. Se B é paracompacto, então p é uma fibração.*

Demonstração. Da definição de fibrado temos que para cada $b \in B$ existem uma vizinhança V_b de b e um homeomorfismo $\varphi_b : p^{-1}(V_b) \to V_b$ tais que $p_1 \circ \varphi_b = p_b$, em que $p_1 : V_b \times F \to V_b$ é a projeção natural e $p_b = p|_{p^{-1}(V_b)} : p^{-1}(V_b) \to V_b$. Mostremos que a família $\mathfrak{B} = \{V_b; b \in B\}$ satisfaz as hipóteses do teorema de Hurewicz, e por conseguinte que p é fibração. De fato, seja $b \in B$. Dado um HLP

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & p^{-1}(V_b) \arrow[d, "p_b"] \\ I \times Y \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, dashed, "\theta"] & V_b. \end{tikzcd}$$

Temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & p^{-1}(V_b) \arrow[r, "\varphi_b"] \arrow[dr, "p_b"] & V_b \times F \arrow[d, "p_1"] \\ I \times Y \arrow[rr, "G"'] \arrow[ur, dashed, "\theta"] & & V_b. \end{tikzcd}$$

Note que, como $p_1 = p_2 \circ T$, em que $T : V_b \times F \to F \times V_b$ dada por $T(x, y) = (y, z)$ é um homeomorfismo, temos dos teoremas (2.6) e (2.10) que p_1 é uma fibração. Logo, existe aplicação $\theta' : I \times Y \to V_b \times F$ tal que $\theta' \circ i_0 = \varphi_b \circ f$ e $p_1 \circ \theta' = G$. Defina $\theta = (\varphi_b^{-1}) \circ \theta'$. Afirmamos que θ é uma solução para o HLP dado. De fato, $\theta \circ i_0 = ((\varphi_b^{-1}) \circ \theta') \circ i_0 = (\varphi_b^{-1}) \circ \varphi_b \circ f = f$ e $p_b \circ \theta = p_b \circ ((\varphi_b^{-1}) \circ \theta') = p_1 \circ \theta' = G$. □

Teorema 2.17. *Sejam $p : X \to B$ uma fibração, $B_0 \subset B$ um subconjunto fechado e $X_0 = p^{-1}(B_0)$. Se (B, B_0) é par NDR então (X, X_0) também o é.*

Demonstração. Como (B, B_0) é par NDR, existem aplicações $u : B \to I$ e $h : I \times B \to B$ como no lema (1.22). Defina a aplicação $j_1 : I \times X \to I \times B$ pondo $j_1(t, x) = (1, p(x))$. Temos então o seguinte HLP:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "p"] \\ I \times X \arrow[r, "h \circ j_1"'] \arrow[ur, dashed, "H"] & B. \end{tikzcd}$$

Como p é fibração existe $H : I \times X \to B$ que comuta o diagrama. Defina a aplicação $H' : I \times X \to X$ pondo

$$H'(t, x) = \begin{cases} H(t, x) & t \leq u(p(x)) \\ H(u(p(x)), x) & t \geq u(p(x)) \end{cases}$$

Mostremos que as aplicações $u \circ p : X \to I$ e $H' : I \times X \to X$ satisfazem as condições do lema (1.22) para o par (X, X_0).

1. $(u \circ p)^{-1}(0) = p^{-1}(u^{-1}(0)) \supset p^{-1}(B_0) = X_0$.

2. $H'(0, x) = H(0, x) = (H \circ i_0)(x) = x, \forall x \in X$.

3. De (1) temos que, para todo $a \in X_0$, $(u \circ p)(a) = 0$. Daí, $H'(t, a) = H(0, a) = (h \circ i_0)(a) = a, \forall (t, a) \in I \times X_0$.

4. Seja $x \in X$ e suponha que $(u \circ p)(x) < t$. Então,

$$(p \circ H')(t, x) = (p \circ H)(u(p(x)), x) = h(u(p(x)), p(x)).$$

Uma vez que, para todo $s > u(p(x))$, temos $h(s, p(x)) \in B_0$, e B_0 é fechado, segue que $p(H'(t, x)) = h'(u(p(x)), p(x)) \in B_0$, donde $H'(t, x) \in X_0$.

□

Dado um diagrama comutativo (*homotopy lifting extension problem* - HLEP)

$$\begin{tikzcd} 0 \times Y \cup I \times A \arrow[r] \arrow[d, "i"] & X \arrow[d, "p"] \\ I \times Y \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & B \end{tikzcd}$$

com $A \subset Y$ e p uma fibração, gostaríamos de saber quando este admite solução. Está claro que alguma hipótese sobre o par (Y, A) é necessária, pois se B é um ponto então a aplicação contante é uma fibração pra qualquer espaço X. Mas neste caso, o problema se reduz a um problema de extensão de homotopia para o par (Y, A), que nem sempre admite solução. Mostremos que se o par (Y, A) for NDR então existe tal solução para uma fibração arbitrária.

Lema 2.18. *Sejam $p: X \to B$ uma fibração e (Y, A) um par NDR. Então todo problema de extensão de levantamento*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & B \end{tikzcd}$$

possui solução.

Demonstração. Sejam $u : Y \to I$, $\phi : I \times Y \to Y$ e $r : Y \to A$ aplicações tais que $A = u^{-1}(0), \phi \circ i_0 = 1_Y$ é a aplicação identidade, $\phi \circ i_0 = i \circ r$, em que $i : A \to Y$ é uma inclusão, e $\phi(t, a) = a, \forall (t, a) \in I \times A$. Defina a aplicação $\psi : I \times Y \to Y$ por

$$\psi(t, y) = \begin{cases} \phi(\frac{t}{u(y)}, y), & t < u(y) \\ \phi(1, y), & t \geq u(y) \end{cases} \tag{2.3}$$

Note que a função $\psi' : I \times (Y - A) \to Y$, dada por $\psi'(t, y) = \begin{cases} \phi(\frac{t}{u(y)}, y), & t \leq u(y) \\ \phi(1, y), & t \geq u(y) \end{cases}$ é contínua. Logo, ψ é contínua em $I \times (Y - A)$. Mostremos que ψ é contínua em $I \times A$. Sejam $(t, y) \in I \times A$ e U uma vizinhança de y. Então $I \times \{y\} \subset \phi^{-1}(U)$ e, portanto, existe vizinhança V de y em Y tal que $I \times V \subset \phi^{-1}(U)$. O conjunto $I \times V$ é uma vizinhança de (t, y) em $I \times Y$ e $\psi(I \times V) \subset \phi(I \times V) \subset U$. Portanto, ψ é contínua em todo ponto de $I \times A$ e por conseguinte em $I \times Y$. As aplicações $f \circ \psi : I \times Y \to B$ e $g \circ r : Y \to X$ formam os dados para um HLP para o par (p, Y) e portanto existe uma aplicação $H : I \times Y \to X$ tal que $H \circ i_0 = g \circ r$ e $p \circ H = f \circ \psi$. A aplicação $h : Y \to X$ dada por $h(y) = H(u(y), y)$ é a solução procurada para o HLEP pois:

i. Para todo $y \in Y$, $(p \circ h)(y) = (p \circ H)((u(y), y)) = (f \circ \psi)(u(y), y) = (f \circ \phi \circ i_0)(y) = f(y)$. Portanto, $p \circ h = f$.

ii. Seja $a \in A$. Note que $i(a) = a = \phi(0, a) = (i \circ r)(a)$, ou seja, $r(a) = a$ para $a \in A$. Logo, $h(i(a)) = h(a) = H(u(a), a) = H(0, a) = (H \circ i_0)(a) = (g \circ r)(a) = g(a)$, e portanto, $h \circ i = g$.

□

Teorema 2.19. *Sejam $p : X \to B$ uma fibração e (Y, A) um par NDR. Então todo HLEP*

$$\begin{tikzcd} 0 \times Y \cup I \times A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ I \times Y \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed] & B \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

possui solução.

Demonstração. Basta notar que $(I \times Y, I \times A \cup 0 \times Y)$ é um par DR (proposição 1.18). □

Teorema 2.20. *Sejam $p : X \to B$ uma fibração e (Y, A) um par NDR. Considere aplicações $g_0, g_1 : 0 \times Y \cup I \times A \to X$ e $f_0, f_1 : I \times Y \to B$ tais que existem homotopias $H\colon g_0 \sim g_1$ e $F\colon f_1 \sim f_2$ satisfazendo $p(H(t, x)) = F(t, x)$ para todo $(t, x) \in I \times (0 \times Y \cup I \times A)$. Se $h_i, i = 0, 1$ é solução do HLEP*

$$\begin{tikzcd} 0 \times Y \cup I \times A \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ I \times Y \arrow[r, "f_i"'] \arrow[ur, dashed, "h_i"] & B \end{tikzcd}$$

então existe uma homotopia $J\colon h_0 \sim h_1$ que estende H e satisfaz $p \circ J = F$.

Demonstração. Defina a aplicação $G : I \times (I \times A \cup 0 \times Y) \cup I_0 \times I \times Y \to X$ por:

$$G(s, t, y) = \begin{cases} H(s, t, y), & (t, y) \in I \times A \cup 0 \times Y \\ h_0(t, y), & s = 0 \\ h_1(t, y), & s = 1. \end{cases}$$

Então, (F, G) são os dados para o problema de extensão de levantamento

$$\begin{tikzcd} I \times I \times A \cup I \times 0 \times Y \cup I_0 \times I \times Y \arrow[r, "G"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ I \times I \times Y \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, dashed, "J"] & B \end{tikzcd}$$

Agora, (I, I_0) e (Y, A) são pares NDR e $(I, 0)$ é par DR. Portanto, $(I, I_0) \times (I, 0) \times (Y, A) = (I \times I \times Y, I \times I \times A \cup I \times 0 \times Y \cup I_0 \times I \times Y)$ é par DR. Pelo lema anterior este problema tem uma solução $J : I \times I \times Y \to X$. Uma vez que J é uma extensão de G, vemos que esta aplicação é uma homotopia entre h_0 e h_1 que estende H. Além disso, da comutatividade do diagrama, segue que $p \circ J = F$. □

Dada uma aplicação $f : Y \to Z$ e uma homotopia $H : I \times X \to Y$, diremos que H é *estacionária* com relação a p se $p \circ H$ é uma homotopia constante, isto é, $pH(t, x) = pH(0, x)$ para todo $t \in I$ e $x \in X$.

Como corolário do teorema acima temos que a solução de um HLEP ou HLP é única a menos de homotopia.

Corolário 2.21. *Sejam $p\colon X \to B$ uma fibração e (Y, A) um par NDR. Se $h_0, h_1 : I \times Y \to X$ são soluções do HLEP 2.4, então existe uma homotopia $h\colon I \times I \times Y \to X$ de h_0 para h_1 com relação a $I \times A \cup 0 \times Y$ tal que h é estacionária com relação a p.*

Demonstração. Considere $H\colon g \sim g$ e $F\colon f \sim f$ homotopias constantes. Pelo teorema anterior existe uma homotopia h entre h_0 e h_1 que estende H e tal que $p \circ h = F$, ou seja, é relativa a $I \times A \cup 0 \times Y$ e estacionária com relação a p. □

Observação 2.22. Note que o teorema (2.20) (e seu corolário) ainda é valido para o caso em que $A = \emptyset$. De fato, basta notar que, uma vez que o par $(I \times I, I \times 0 \cup I \times I_0)$ é DR, o par $(I \times I, I \times 0 \cup I \times I_0) \times Y = (I \times I \times Y, I \times 0 \times Y \cup I \times I_0 \times Y)$ também é DR. E assim temos a unicidade, a menos de homotopia, da solução de um HLP (2.1).

Teorema 2.23. *Seja $p: X \to B$ uma fibração. Então existe um funtor contravariante do grupoide fundamental de B para a categoria de homotopia, que assinala a cada ponto $b \in B$ a fibra sobre B e para cada classe de caminhos $[\omega]$ a classe de homotopia $h[\omega] \in [F_{\omega(0)}, F_{\omega(1)}]$.*

Demonstração. Seja $\omega : I \to B$ um caminho. Temos o HLP

$$\begin{tikzcd} F_{\omega(0)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "p"] \\ I \times F_{\omega(0)} \arrow[r, "\omega o p_1"'] & B \end{tikzcd}$$

em que $p_1 : I \times F_{\omega(0)} \to I$ é a projeção. Como p é fibração, existe $G : I \times F_{\omega(0)} \to X$ tal que $G(x, 0) = x$ e $pG(x, t) = \omega(t)$ para todo $x \in F_{\omega(0)}$ e todo $t \in I$. Considere a aplicação $h\omega = G(-, 1) : F_{\omega(0)} \to F_{\omega(1)}$. Se ω' é um outro representante da classe do caminho ω, temos que $h\omega$ e $h\omega'$ são homotópicas. De fato, seja $F' : I \times I \to B$ uma homotopia entre ω e ω' e considere a homotopia F entre $\omega \circ p_1$ e $\omega' \circ p_1$ induzida por esta. Então, pondo $H : I \times F_{\omega(0)} \to X$ como a homotopia constante igual a inclusão $F_{\omega(0)} \to X$, temos que $pH(t, f) = F(t, 0, f)$ para todo $t \in I$ e todo $f \in F_{\omega(0)}$. Logo, pelo teorema (2.20) temos que existe uma homotopia J entre os levantamentos G e G' de ω e ω', respectivamente, que satisfaz $p \circ J = F$. Defina $J' : I \times F_{\omega(0)} \to X$ por $J'(t, f) = J(t, 1, f)$. Da definição de $h\omega$ e $h\omega'$ temos que J' é uma homotopia, em X, entre $h\omega$ e $h\omega'$. Além disso, como $pJ'(t, f) = F(t, 1, f) = F'(t, 1) = \omega(1) = \omega'(1)$, segue que J' é uma homotopia em $F_{\omega(1)}$. Logo, $[h\omega] = [h\omega']$ em $[F_{\omega(0)}, F_{\omega(1)}]$.

Defina o funtor h por

$$\begin{aligned} h(x) &= F_x, \quad x \in B \\ h[\omega] &= [h\omega] \in [F_{\omega(0)}, F_{\omega(1)}] \end{aligned}$$

em que ω é um caminho em B. Mostremos que este funtor está bem definido. Seja ω_b o caminho constante em $b \in B$. Então $[h\omega_b] = [1_{F_b}]$. De fato, basta notar que a aplicação $i \circ p_2 : I \times F_b \to X$ é uma solução do HLP acima para ω_b.

Suponha agora que ω e σ são caminhos em B tais que $\omega(1) = \sigma(0)$. Dados

$$\begin{aligned} G &: I \times F_{\omega(0)} \to X \quad \text{e} \\ G' &: I \times F_{\sigma(0)} \to X \end{aligned}$$

soluções do HLP acima para ω e σ, respectivamente, defina $G'' : I \times F_{\omega(0)} \to X$ por

$$G''(t, x) = \begin{cases} G(2t, x), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G'(2t - 1, h\omega(x)), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Então G'' é solução do HLP acima para o caminho produto $\omega * \sigma$. Agora,

$$h[\omega * \sigma] = [G''(1,-)] = [G'(1, h\omega(-))] = [h\sigma \circ h\omega] = [h\sigma][h\omega],$$

o que completa a prova.

□

Corolário 2.24. *Seja $p: X \to B$ uma fibração e suponha que B é conexo por caminhos. Então dados $b_0, b_1 \in B$, existe uma equivalência de homotopia $h : F_{b_0} \to F_{b_1}$.*

Demonstração. Seja ω um caminho entre b_0 e b_1. Considere as aplicações $h\omega: F_{b_0} \to F_{b_1}$ e $h\bar{\omega} : F_{b_1} \to F_{b_0}$, em que $\bar{\omega}$ é o caminho inverso de ω. Mostremos que estas aplicações são equivalências de homotopia. De fato, pelo teorema anterior temos que

$$[h\omega][h\bar{\omega}] = [h(\bar{\omega} * \omega)] = [h\omega_{b_0}] = [1_{F_{b_0}}],$$

e portanto $h\omega \circ h\bar{\omega} \sim 1_{F_{b_0}}$. Analogamente temos que $h\bar{\omega} \circ h\omega \sim 1_{F_{b_1}}$ e portanto F_{b_0} e F_{b_1} têm o mesmo tipo de homotopia.

□

O corolário acima nos dá que para uma fibração $p : X \to B$, cujo espaço base B é conexo por caminhos, todas as fibras $F_b, b \in B$, têm o mesmo tipo de homotopia. Neste caso diremos que a fibração p tem fibra F.

Suponha $p : X \to B$ e $f : B' \to B$ aplicações (não necessariamente fibrações). Seja $X' = \{(b', x) \in B' \times X; f(b') = p(x)\}$. Sejam $p' : X' \to B'$ a projeção na primeira coordenada e $f' : X' \to X$ a projeção na segunda coordenada. Temos o diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p'"'] & X \arrow[d, "p"] \\
B' \arrow[r, "f"'] & B.
\end{tikzcd}$$

Esse diagrama tem a seguinte propriedade universal

Teorema 2.25. *Sejam $g: Y \to X$ e $q: Y \to B'$ aplicações tais que $p \circ g = f \circ q$. Então existe uma única aplicação $h : Y \to X'$ tal que $f' \circ h = g$ e $p' \circ h = q$.*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "q"'] & & \\
& X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p'"'] & X \arrow[d, "p"] \\
& B' \arrow[r, "f"'] & B.
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Seja $h : Y \to X'$ dada por $h(y) = (q(y), g(y))$. Note que $f(q(y)) = p(g(y))$ por hipótese, e portanto h está bem definida.

Caso tenhamos $\tilde{h}: Y \to X'$ satisfazendo as hipóteses do teorema, $\tilde{h}(y) = (a(y), b(y))$ e temos que $f' \circ \tilde{h} = g$ e $p' \circ \tilde{h} = q$. Logo,

$$g(y) = f'(\tilde{h}(y)) = b(y) \quad \text{e} \quad q(y) = p'(\tilde{h}(y)) = a(y), \forall y \in Y.$$

O que implica $h = \tilde{h}$. □

Teorema 2.26. *Se $p : X \to B$ é uma fibração então $p' : X' \to B'$ também o é.*

Demonstração. Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_0"'] & X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p'"'] & X \arrow[d, "p"] \\ I \times Y \arrow[r, "H"'] & B' \arrow[r, "f"'] & B. \end{tikzcd}$$

Se $g : Y \to X'$ e $H : I \times Y \to B'$ são os dados do HLP para p', então $f' \circ g : Y \to X$ e $f \circ H : I \times Y \to B$ são os dados de um HLP para p, o qual possui solução $G' : I \times Y \to X$ satisfazendo $p \circ G' = f \circ H$ e $G' \circ i_0 = f' \circ g$. Pelo teorema anterior existe uma única aplicação $G : I \times Y \to X'$, induzida por G' e H, tal que $p' \circ G = H$ e $f' \circ G = G'$. Logo temos que $G(t, y) = (H(t, y), G'(t, y))$ para $(t, y) \in I \times Y$, donde

$$G \circ i_0(y) = (H(i_0(y)), G'(i_0(y))) = (p' \circ g(y), f' \circ g(y)) = g(y).$$

$\square$

A fibração $p' : X' \to B'$ é dita *induzida de $p : X \to B$ por f*. Note que a função contínua $f : X' \to X$ aplica a fibra $p'^{-1}(b')$ homeomorficamente sobre $p^{-1}(f(b'))$. De fato, basta notar que $p'^{-1}(b') = \{(b', x); x \in p^{-1}(f(b'))\}$ e $f'(b', x) = x$. Além disso, se $f : B' \to B$ é uma inclusão, então $f' : X' \to X$ também o é, aplicando X' homeomorficamente sobre $p^{-1}(f(B')) = p^{-1}(B')$. De fato, basta notar que a aplicação $x \mapsto (p(x), x)$ é inversa de $f' : X' \to p^{-1}(B')$.

Corolário 2.27. *Se $p : X \to B$ é uma fibração e $B' \subset B$ então, pondo $X' = p^{-1}(B')$, temos que $p_{|X'} : X' \to B'$ é fibração.*

Teorema 2.28. *Sejam $p : X \to B$ uma fibração, $f : B' \to B$ e $g : B'' \to B'$ funções contínuas. Sejam $p' : X' \to B'$ a fibração induzida de p por f e $p'' : X'' \to B''$ a fibração induzida de p' por g. Então a fibração induzida de p por $f \circ g : B'' \to B$ é p'' (a menos de um homeomorfismo natural).*

Demonstração. Considere o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "p''"'] & X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p'"'] & X \arrow[d, "p"'] \\ B'' \arrow[r, "g"'] & B' \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

em que p' é a fibração induzida de p por f e p'' é a fibração induzida de p' por g. Seja $\bar{p} : \overline{X} \to B''$ a fibração induzida de p por $f \circ g$. Temos que o espaço X'' é dado por

$$X'' = \{(b'', b', x) \in B'' \times B' \times X; g(b'') = b' \text{e} f(b') = p(x)\}.$$

Também,

$$\overline{X} = \{(b'', x) \in B'' \times X; (f \circ g)(b'') = p(x)\}.$$

Assim, definimos as aplicações $h : X'' \to \overline{X}$ e $h^{-1} : \overline{X} \to X''$ por:

$$h(b'', b', x) = (b'', x) \quad \text{e} \quad h^{-1}(b'', x) = (b'', g(b''), x).$$

Claramente h^{-1} é o homeomorfismo inverso de h. Além disso, o diagrama

$$\begin{tikzcd} \overline{X} \arrow[rr, bend left, "h^{-1}"] \arrow[dr, "\bar{p}"'] & & X'' \arrow[ll, bend left, "h"] \arrow[dl, "p''"] \\ & B'' & \end{tikzcd}$$

é comutativo. De fato, para todo $(b'', b', x) \in X''$, temos $\bar{p}(h(b'', b', x)) = \bar{p}(b'', x) = b'' = p''(b'', b', x)$. □

Introduziremos uma relação de equivalência entre fibrações: Sejam $p : X \to B$ e $p' : X' \to B$ duas fibrações com o mesmo espaço base B. Dizemos que p e p' tem o mesmo *fibre homotopy type (fht)* se existem funções contínuas $\lambda : X \to X'$ e $\mu : X' \to X$ tais que $p' \circ \lambda = p$ e $p \circ \mu = p'$, e homotopias $H : I \times X \to X$ e $H' : I \times X' \to X'$ entre $\mu \circ \lambda$ e 1_X e entre $\lambda \circ \mu$ e $1_{X'}$, respectivamente, que são homotopias estacionárias com relação a p e p', respectivamente. A relação acima é de equivalência. O par (λ, μ) é a *fibre homotopy equivalence (fhe)* e as suas *componentes* são λ e μ.

Sejam $\lambda : X \to X'$ e $\mu : X' \to X$ as componentes de uma fhe entre $p : X \to B$ e $p' : X' \to B$. Sejam B_0 um subespaço de B, $X_0 = p^{-1}(B_0)$ e $X'_0 = p'^{-1}(B_0)$. Então $\lambda(X_0) \subset X'_0$, com efeito, seja $t \in \lambda(X_0)$, isto é, $t = \lambda(x)$ para algum $x \in p^{-1}(B_0)$. Daí, $p'(t) = p'(\lambda(x)) = p(x) \in B_0$. Analogamente, $\mu(X'_0) \subset X_0$.

Teorema 2.29. *As funções* $\lambda_0 = \lambda_{|X_0} : X_0 \to X'_0$ *e* $\mu_0 = \mu_{|X'_0} : X'_0 \to X_0$ *são as componentes de uma fhe entre as aplicações* $p_0 = p_{|X_0} : X_0 \to B_0$ *e* $p'_0 = p_{|X'_0} : X'_0 \to B_0$. *Em particular, os pares* (X, X_0) *e* (X', X'_0) *têm o mesmo tipo de homotopia.*

Demonstração. Uma vez que $p' \circ \lambda = p$ e $p \circ \mu = p'$ segue que $p'_0 \circ \lambda_0 = p_0$ e $p_0 \circ \mu_0 = p'_0$. Agora, se $H : I \times X \to X$ e $H' : I \times X' \to X'$ são homotopias estacionárias, com relação a p e p' respectivamente, entre $\mu \circ \lambda$ e 1_X e entre $\lambda \circ \mu$ e $1_{X'}$, respectivamente, estão bem definidas as homotopias estacionárias $H_0 = H_{|X_0} : I \times X_0 \to X_0$ e $H'_0 = H'_{|X'_0} : I \times X'_0 \to X'_0$, com relação a p_0 e p'_0 respectivamente. Como H_0 é homotopia entre $\mu_0 \circ \lambda_0$ e 1_{X_0} e H'_0 é homotopia entre $\lambda_0 \circ \mu_0$ e $1_{X'_0}$ o resultado segue. □

Lema 2.30. *Sejam* $p : X \to I \times B$ *uma fibração e* $p_t : X_t \to B$ *as fibrações induzidas de* p *por* $i_t : B \to I \times B$ $(i = 0, 1)$. *Então* p_0 *e* p_1 *têm o mesmo fht* $(p'_0 \sim p'_1)$.

Demonstração. Temos os diagramas comutativos:

$$\begin{tikzcd} X_t \arrow[r, "f_t"] \arrow[d, "p_t"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "i_t"'] & I \times B \end{tikzcd} \qquad (t = 0, 1)$$

Considere o HLP $(t = 0, 1)$

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "f_t"] \arrow[d, "i_t"'] & X \arrow[d, "p"] \\ I \times X_0 \arrow[r, "1 \times p_t"'] \arrow[ur, "H_t"] & I \times B \end{tikzcd}$$

que tem $H_t, (t = 0, 1)$, como solução. Defina aplicações $\lambda : X_0 \to X_1$ e $\mu : X_1 \to X_0$ por

$$(f_1 \circ \lambda)(x_0) = H_0(1, x_0) \quad \text{e} \quad (f_0 \circ \mu)(x_1) = H_1(0, x_1).$$

Observe que λ está bem definida uma vez que o elemento $H_0(1, x_0) \in p^{-1}(1 \times B)$ para todo $x_0 \in X_0$ e, como já foi observado, $f_1 : X_1 \to p^{-1}(1 \times B)$ é um homeomorfismo. Analogamente temos que μ está bem definida.

Agora, temos que

$$i_1 p_1 \lambda(x_0) = p f_1 \lambda(x_0) = p H_0(1, x_0) = (1, p_0(x_0)) = i_1 p_0(x_0), \forall x_0 \in X_0.$$

Como i_1 é injeção concluímos que $p_1 \circ \lambda = p_0$. De modo análogo temos que $p_0 \circ \mu = p_1$. Mostremos que λ e μ são equivalências de homotopia. De fato, note que as aplicações $H_0 : I \times X_0 \to X$ e $H_1 \circ (1 \times \lambda) : I \times X_0 \to X$ são soluções do HLP

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "f_1 \circ \lambda"] \arrow[d, "i_1"'] & X \arrow[d, "p"] \\ I \times X_0 \arrow[r, "1 \times p_0"'] & I \times B. \end{tikzcd}$$

Logo, pelo corolário (2.21) e a observação (2.22) temos que existe uma homotopia $G : I \times I \times X_0 \to X$, estacionária com relação a p, entre essas aplicações. Como G é estacionária, temos que para todo $t \in I$,

$$pG(t, 0, x) = pG(0, 0, x) = pH_0(0, x) = (0, p_0(x)), \forall x \in X_0.$$

Logo, está bem definida a homotopia estacionária $g : I \times X_0 \to X_0$ dada por $g(t, x) = G(t, 0, x)$. Agora, para $x \in X_0$, $g(0, x) = G(0, 0, x) = H_0(0, x) = f_0(x) = x$ e $g(1, x) = G(1, 0, x) = H_1(0, \lambda(x)) = f_0 \mu \lambda(x) = (\mu \circ \lambda)(x)$, o que mostra que g é uma homotopia entre 1_{X_0} e $\mu \circ \lambda$. Analogamente mostra-se que existe uma homotopia estacionária entre 1_{X_1} e $\lambda \circ \mu$. □

Teorema 2.31. *Sejam $p : X \to B$ uma fibração e $f_0, f_1 : B' \to B$ funções homotópicas. Então as fibrações induzidas de p, $p'_0 : X'_0 \to B'$ e $p'_1 : X'_1 \to B'$ por f_0 e f_1, respectivamente, têm o mesmo fht ($p'_0 \sim p'_1$).*

Demonstração. Como $f_0 \sim f_1$, existe $F : I \times B' \to B$ homotopia entre f_0 e f_1. Assim, $F \circ i_t = f_t \, (t = 0, 1)$, onde $i_t : B' \to I \times B'$ são as inclusões no nível t. Temos os diagramas comutativos

$$\begin{tikzcd} X''_t \arrow[r, "f''_t"] \arrow[d, "p''_t"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "f_t"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X'_t \arrow[r, "f'_t"] \arrow[d, "p'_t"] & X' \arrow[r, "F'"] \arrow[d, "p'"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "i_t"'] & I \times B' \arrow[r, "F"'] & B \end{tikzcd}$$

Pelo teorema (2.28) existem homeomorfismos $k : X''_0 \to X'_0$ e $l : X''_1 \to X'_1$ tais que $p''_0 = p'_0 \circ k$ e $p''_1 = p'_1 \circ l$.

Agora, pelo lema anterior, existem equivalências de homotopia $\lambda : X'_0 \to X'_1$ e $\mu : X'_1 \to X'_0$ tais que $p'_0 \circ \mu = p'_1$ e $p'_1 \circ \lambda = p'_0$, juntamente com homotopias $\Lambda : \lambda \circ \mu \simeq 1_{X'_0}$ e $\Lambda' : \mu \circ \lambda \simeq 1_{X'_1}$, estacionárias com relação a p'_0 e p'_1 respectivamente. Defina $\lambda' = l^{-1} \circ \lambda \circ k$ e $\mu' = k^{-1} \circ \mu \circ l$. Mostremos que (λ', μ') é um fhe para p''_0 e p''_1. Primeiramente note que $p''_0 \mu' = p''_0 k^{-1} \mu l = p'_0 \mu l = p'_1 l = p''_1$ e $p''_1 \lambda' = p''_1 l^{-1} \lambda k = p'_1 \lambda k = p'_0 k = p''_0$. Agora, considere a homotopia $\Gamma : I \times X''_0 \to X''_0$ dada por $\Gamma = k^{-1} \circ \Lambda \circ (1 \times k)$. Para $x \in X''_0$ temos

i. $\Gamma(0,x) = k^{-1}\Lambda(0,k(x)) = k^{-1}\lambda\mu k(x) = k^{-1}\lambda l l^{-1}\mu k(x) = \lambda'\mu'(x)$;

ii. $\Gamma(1,x) = k^{-1}\Lambda(1,k(x)) = k^{-1}k(x) = 1_{X_0''}(x)$;

iii. $p_0''\Gamma(t,x) = (p_0'k)(k^{-1}\Lambda(t,k(x))) = p_0'\Lambda(t,k(x)) = p_0'\Lambda(0,k(x)) = p_0''\Gamma(0,x)$ para todo $t \in I$.

O que mostra que Γ é uma homotopia estacionária, com relação a p_0'', entre $\lambda'\mu'$ e $1_{X_0''}$. Analogamente mostra-se que $\Gamma' = l^{-1} \circ \Lambda' \circ (1 \times l)$ é uma homotopia estacionária, com relação a p_1'', entre $\mu'\lambda'$ e $1_{X_1''}$. □

Definição 2.32. *Uma fibração $p : X \to B$ é dita fibre homotopically trivial se tem o mesmo fht que a projeção $\pi : F \times B \to B$. Uma fhe $\lambda : F \times B \to X$ é chamada uma trivialização da fibração p. Se, mais ainda, $b_0 \in B, F = p^{-1}(b_0)$ e $\lambda(f,b) = f$ para todo $f \in F$, dizemos que λ é uma trivialização forte.*

Corolário 2.33. *Seja $p : X \to B$ uma fibração com B contrátil. Então p é fibre homotopically trivial. Mais ainda, se $B_0 \subset B$ então os pares $(X, p^{-1}(B_0))$ e $(F \times B, F \times B_0)$ têm o mesmo tipo de homotopia.*

Demonstração. Como B é contrátil, existe uma homotopia entre a identidade 1_B e uma função constante f_1 igual a b_0. Note que podemos identificar X com o espaço total da fibração p_0 induzida de p pela identidade, e neste caso temos que $p_0 \sim p$. Por outro lado, o espaço total da fibração p_1 induzida de p por f_1 é o espaço $B \times p^{-1}(b_0)$ e concluímos que p_1 é a projeção na primeira coordenada. Pelo teorema anterior temos que $p_0 \sim p_1$. Uma vez que esta relação é de equivalência e $p \sim p_0$ segue que p é fht. Por fim, se $F = p^{-1}(b_0)$, pelo teorema (2.29) temos que $(X, p^{-1}(B_0))$ e $(B \times F, p_1^{-1}(B_0))$ têm o mesmo tipo de homotopia, mas $p_1^{-1}(B_0) = \{(b,f) \in B \times F; b \in B_0\} = B_0 \times F$. □

No caso em que o espaço base B é contrátil, é possível dar uma construção mais ou menos explícita de uma trivialização $\lambda : F \times B \to X$.

Seja $h : I \times B \to B$ uma homotopia entre a aplicação constante igual a b_0 e a identidade de B e considere $H : I \times F \times B \to B$ dada por $H = h \circ (1 \times p_2)$, em que $p_2 : F \times B \to B$ é a projeção. Note que $H(0,f,b) = h(0,b) = hi_0(b) = b_0$ e $H(1,f,b) = h(1,b) = hi_1(b) = b = p_2(f,b)$, ou seja, H é uma homotopia entre a função constante igual a b_0 e p_2.

Sejam $i : F \to X$ a inclusão e $p_1 : F \times B \to F$ a projeção. Temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} F \times B \arrow[r, "i \circ p_1"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "p"] \\ I \times F \times B \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "G"] & B \end{tikzcd}$$

A aplicação H pode ser levantada para uma homotopia $G : I \times F \times B \to X$ entre $i \circ p_1$ e uma aplicação $\lambda : F \times B \to X$ tal que $p \circ \lambda = p_2$.

Teorema 2.34. *λ é uma trivialização de p.*

Demonstração. Considere o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} X_t \arrow[r, "i_t'"] \arrow[d, "p_t"'] & \overline{X} \arrow[r, "\bar{h}"] \arrow[d, "\bar{p}"] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "i_t"'] & I \times B \arrow[r, "h"'] & B, \end{tikzcd}$$

em que $\bar{p}$ é a fibração induzida de p por h e p_t é a fibração induzida de $\bar{p}$ por i_t, $(t = 0, 1)$. Identificaremos X_0 com $F \times B$ e X_1 com X do seguinte modo: defina $a : X_0 \to F \times B$ por $a(b, 0, b, x) = (x, b)$ e $b : X_1 \to X$ por $b(p(x), 1, p(x), x) = x$, em que

$$\begin{aligned} X_0 &= \{(b, 0, b, x) \in B \times I \times B \times X; b \in B, x \in F\} \\ X_1 &= \{(p(x), 1, p(x), x) \in B \times I \times B \times X; x \in X\}. \end{aligned}$$

Assim, as aplicações do diagrama são dadas por

$$p_0(f, b) = b, \quad p_1 = p, \quad f_0(x, b) = (0, b, x) \quad \text{e} \quad f_1(x) = (1, p(x), x).$$

Defina $H_0 : I \times X_0 \to \overline{X}$ por $H_0(t, x, y) = (t, y, G(t, x, y))$ (H_0 está bem definida uma vez que $pG(t, x, y) = H(t, x, y) = h(t, y)$). Note que

$$\begin{aligned} H_0(0, x, y) &= (0, x, i(y)) = f_0(y, x); \\ H_0(1, x, y) &= (1, x, \lambda(y, x)) = (1, p_2(y, x), \lambda(y, x)) \\ &= (1, p\lambda(y, x), \lambda(y, x)) = f_1\lambda(y, x); \\ \bar{p}H_0(t, x, y) &= (t, y) = (1 \times p_2)(t, x, y). \end{aligned}$$

Agora, após uma observação cuidadosa da prova do lema (2.30) nota-se que as condições acima são suficientes para garantir que λ é uma fhe. $\square$

Observação 2.35. Se $(B, \{b_0\})$ for par DR, então a aplicação λ construída acima é uma trivialização forte. Neste caso podemos escolher h relativa a $\{b_0\}$, de forma que $H = h \circ (1 \times p_2)$ é relativa a $F \times \{b_0\}$. Assim, pelo teorema (2.19), o HLEP

$$\begin{tikzcd} I \times F \times \{b_0\} \cup 0 \times F \times B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "j"'] & X \arrow[d, "p"] \\ I \times F \times B \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "G"] & B \end{tikzcd}$$

possui uma solução $G : I \times F \times B \to X$, em que $h(t, x, y) = i(x)$. Note que $G \circ i_0 = i \circ p_1$ e $G(t, x, b_0) = Gj(t, x, b_0) = g(t, x, b_0) = i(x) = x$ para todo $t \in I$, ou seja, G é estacionária em $F \times \{b_0\}$. Além disso, $pG(1, x, y) = H(1, x, y) = p_2(x, y)$. Assim, podemos tomar G na construção acima e assim $\lambda(x, y) = G(1, x, y)$. Neste caso temos que $\lambda(y, b_0) = G(1, y, b_0) = Gj(1, y, b_0) = g(1, y, b_0) = i(y) = y$ para todo $y \in F$.

Teorema 2.36. *Sejam $p : X \to B$ uma fibração e $b_0 \in B$, e suponha que $(B, \{b_0\})$ é par DR. Então quaisquer duas trivializações fortes $\lambda_0, \lambda_1 : F \times B \to X$ são homotópicas em relação a $F \times \{b_0\}$.*

Demonstração. Como $(B, \{b_0\})$ é par DR, temos que $(F \times B, F \times \{b_0\})$ é par DR. Logo, $(I, I_0) \times (F \times B, F \times \{b_0\}) = (I \times F \times B, I \times F \times \{b_0\} \cup I_0 \times F \times B)$ é par DR. Portanto, decorre do lema (2.18) que o HLEP

$$\begin{tikzcd} I \times F \times \{b_0\} \cup I_0 \times F \times B \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ I \times F \times B \arrow[r, "\mu"'] \arrow[ur, dashed, "\Lambda"] & B, \end{tikzcd}$$

em que

$$\lambda(t,y,b) = \begin{cases} \lambda_0(y,b), & t=0 \\ \lambda_1(y,b), & t=1 \\ y, & b=b_0. \end{cases}$$

e $\mu(t,y,b) = b$, admite uma solução $\Lambda : I \times F \times B \to X$. Agora,

$$\begin{aligned} \Lambda(0,t,b) &= \Lambda i(0,t,b) = \lambda(0,t,b) = \lambda_0(t,b); \\ \Lambda(1,t,b) &= \Lambda i(1,t,b) = \lambda(1,t,b) = \lambda_1(t,b); \\ \Lambda(t,s,b_0) &= \Lambda i(t,s,b_0) = \lambda(t,s,b_0) = s = \lambda_0(s,b_0), \forall s \in F. \end{aligned}$$

E o resultado segue. □

Mostraremos agora como criar uma fibração à partir de uma aplicação arbitrária.

Seja $f : X \to Y$ uma aplicação e considere o espaço $I^f = \{(x,u) \in X \times \mathrm{F}(Y); f(x) = u(0)\}$ e a fibração $p_0 : \mathrm{F}(Y) \to Y$, a avaliação em 0. Então o espaço I^f é o espaço total da fibração p_0' induzida de p_0 por f.

$$\begin{tikzcd} I^f \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p_0'"'] & \mathrm{F}(Y) \arrow[d, "p_0"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Defina $p : I^f \to Y$ por $p = p_1 \circ f'$, em que p_1 é a avaliação em 1. A identidade em X e a aplicação $\mu : X \to \mathrm{F}(Y)$, dada por $\mu(x)(t) = f(x)\forall t$, definem, por (2.25), uma aplicação $\lambda : X \to I^f$ tal que $p_0' \circ \lambda = 1_X$ e $f' \circ \lambda = \mu$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dashed, "\lambda"] \arrow[drr, bend left, "\mu"] \arrow[ddr, bend right, "1_X"'] & & \\ & I^f \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p_0'"] & \mathrm{F}(Y) \arrow[d, "p_0"] \\ & X \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Teorema 2.37. *A aplicação $p : I^f \to Y$ é uma fibração e*

$$\begin{aligned} p_0' \circ \lambda = 1_X, &\quad \lambda \circ p_0' \simeq 1_{I^f} \\ p \circ \lambda = f, &\quad f \circ p_0' \simeq p. \end{aligned}$$

Demonstração. Considere $G : P \to I^f$ e $H : I \times P \to Y$ aplicações tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_0"'] & I^f \arrow[d, "p"] \\ I \times P \arrow[r, "H"'] & Y. \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Defina aplicações $g' = f' \circ g$, $g'' = p_0' \circ g$ (ou seja, g' e g'' são as funções coordenada de g, $g = (g'', g')$), $G'' : I \times P \to X$ por $G''(t,z) = g''(z)$ e $G_0' : (I_0 \times I \cup I \times 0) \times P \to Y$ por

$$G_0'(s,t,z) = \begin{cases} fg''(z), & s = 0 \\ H(t,z), & s = 1 \\ g'(z)(s), & t = 1. \end{cases}$$

Uma vez que $(I \times I \times P, (I_0 \times I \cup I \times 0) \times P)$ é par NDR, pelo teorema (1.18), é possível estender G_0' a uma aplicação $\overline{G'} : I \times I \times P \to X$. Seja $G' : I \times P \to \mathrm{F}(Y)$ a adjunta de $\overline{G'}$ de forma que $G'(t,z)(s) = \overline{G'}(s,t,z)$. Então $p_0 G'(t,z) = \overline{G'}(0,t,z) = fg''(z) = fG''(t,z)$, ou seja, o par $(G''(t,z), G'(t,z))$ é um elemento de I^f. Considere a aplicação $G : I \times P \to I^f$ dada por $G = (G'', G')$. Então G é solução para o HLP inicial. De fato, para $t \in I$ e $z \in P$ temos

$$\begin{aligned} pG(t,z) = p(G''(t,z), G'(t,z)) &= (p_1 \circ f')(G''(t,z), G'(t,z)) \\ &= p_1(G'(t,z)) = G'(t,z)(1) = \overline{G'}(1,t,z) = G_0'(1,t,z) = H(t,z) \end{aligned}$$

e

$$G \circ i_0(z) = G(0,z) = (G''(0,z), G'(0,z)) = (g''(z), g'(z)) = g(z).$$

Por fim,

i. $p_0 \circ \lambda = 1_X$ pela definição de λ;

ii. Uma vez que $p_1 \mu(x) = \mu(x)(1) = f(x)$ para todo $x \in X$ temos

$$p \circ \lambda = (p_1 \circ f') \circ \lambda = p_1 \circ \mu = f.$$

iii. Note que a aplicação avaliação $e : I \times \mathrm{F}(Y) \to Y$ é uma homotopia entre p_0 e p_1. Logo,

$$f \circ p_0' = p_0 \circ f' \simeq p_1 \circ f' = p.$$

iv. Primeiramente note que, de $p_0' \circ \lambda = 1_X$ e $f' \circ \lambda = \mu$, temos que $\lambda = (1_X, \mu)$. Considere a aplicação $\Omega : I \times I^f \to I^f$ dada por $\Omega(t, (x,u)) = (x, \omega(t,u))$, em que $\omega : I \times \mathrm{F}(Y) \to \mathrm{F}(Y)$ é a adjunta da aplicação $(t,s,u) \mapsto u(ts)$. Temos que Ω é uma homotopia entre $\lambda \circ p_0'$ e 1_{I^f}. De fato, para $(x,u) \in I^f$ temos

$$\begin{aligned} \Omega(1,(x,u)) &= (x, \omega(1,u)) = (x,u) = 1_{I^f}(x,u) \\ \Omega(0,(x,u)) &= (x, \omega(0,u)) = (x, \mu(x)) = \lambda p_0'(x,u). \end{aligned}$$

$\square$

Observe que o teorema acima nos dá que toda aplicação $f : X \to Y$ pode ser decomposta como a composição de uma fibração p, com espaço base Y, e uma equivalência de homotopia λ.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\lambda"'] & & Y \\ & I^f \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

Teorema 2.38. *Se $f : X \to Y$ é uma fibração, então f e $p : I^f \to Y$ (como definida acima) têm o mesmo fht.*

Demonstração. Como vimos no teorema anterior, existe $\lambda{:}X \to I^f$, $\lambda = (1_X, \mu)$, tal que $p \circ \lambda = f$. Além disso, a aplicação $H : I \times I^f \to Y$ dada por $H(t, x, u) = e(t, f'(x, u)) = u(t)$ é uma homotopia entre $f \circ p_0'$ e p. Considere o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} I^f \arrow[r, "p_0'"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "f"] \\ I \times I^f \arrow[r, "H"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Como f é fibração, existe solução $L{:}I \times I^f \to X$ para o HLP acima. Defina $\lambda'{:}I^f \to X$ por $\lambda'(z) = L(1, z)$, $\forall z \in I^f$. Agora, a aplicação $\Lambda : I \times X \to X$ dada por $\Lambda(t, x) = L(t, \lambda(x))$ é uma homotopia estacionária, com relação a f, entre $\lambda' \circ \lambda$ e 1_X. De fato,

i. $\Lambda(0, x) = L(0, \lambda(x)) = L(i_0(\lambda(x))) = p_0'(\lambda(x)) = x = 1_x(x)\, \forall x \in X$

ii. $\Lambda(1, x) = L(1, \lambda(x)) = \lambda'(\lambda(x)) = (\lambda' \circ \lambda)(x)\, \forall x \in X$

iii. $f\Lambda(t, x) = f(L(t, \lambda(x))) = H(t, \lambda(x)) = \mu(x)(t) = f(x)$ para todo $x \in X$ e $t \in I$.

Para construir uma homotopia Λ' entre $\lambda \circ \lambda'$ e 1_{I^f} considere a aplicação $\overline{\omega}{:}I \times I \times \mathrm{F}(Y) \to Y$ dada por $\overline{\omega}(t, s, u) = u(s + t - st)$. Seja $\omega : I \times \mathrm{F}(Y) \to \mathrm{F}(Y)$ sua adjunta. Então $\omega(t, u)$ é um caminho entre $u(t)$ e $u(1)$. Além disso, $\omega(0, u) = u$ e $\omega(1, u) = \mu_{u(1)}$, o caminho constante em $u(1)$.

Defina $\Lambda'{:}I \times I^f \to I^f$ por $\Lambda'(t, x, u) = (L(t, x, u), \omega(t, u))$. Então, para $(x, u \in I^f)$, temos

i. $\Lambda'(0, x, u) = (L(0, x, u), \omega(0, u)) = (p_0'(x, u), u) = (x, u) = 1_{I^f}(x, u)$.

ii. Observe que $f(\lambda'(x, u)) = f(L(1, x, u)) = H(1, x, u) = u(1)$. Logo temos

$$\begin{aligned} \Lambda'(1, x, u) &= (L(1, x, u), \omega(1, u)) = (\lambda'(x, u), \mu_{u(1)}) \\ &= (\lambda'(x, u), \mu(\lambda'(x, u))) = \lambda(\lambda'(x, u)) = (\lambda \circ \lambda')(x, u). \end{aligned}$$

iii. $p\Lambda'(t, x, u) = p_1 f'\Lambda'(t, x, u) = p_1(\omega(t, u)) = \omega(t, u)(1) = u(1)$ para todo $t \in I$.

O que conclui a prova. $\square$

Seja $y \in Y$ e considere $T^f = p^{-1}(y)$. Denominaremos T^f *mapping fiber de* f. Temos então o seguinte diagrama (não necessariamente comutativo)

$$\begin{tikzcd} T^f \arrow[r, hook] \arrow[d, "q"'] & I^f \arrow[d, "p"] \arrow[dl, "p_0'"'] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd}$$

A aplicação $q = p'_{0|T^f}$ é uma fibração, denominada a fibração de T^f sobre X. Ainda, p é a fibração de I^f sobre Y e p_0' é a fibração de I^f sobre X.

Note ainda que, se $x \in X$, então $q^{-1}(x) \subset T^f$ é o espaço de todos os caminhos começando em $f(x)$ e terminando em y. Em particular, se $x \in f^{-1}(y)$ então $q^{-1}(x) = \Omega_y$, o espaço de laços com ponto base y.

Demonstração de que q é fibração. Sabemos por (2.8) que $\bar{p} : \mathrm{F}(Y) \to Y^2$, dada por $\bar{p}(u) = (u(0), u(1))$, é uma fibração. Considere a aplicação $g : X \to Y^2$ dada por $g(x) = (f(x), y)$. Por (2.26) temos que $\bar{p}' : (\mathrm{F}(Y))' \to \mathrm{F}(Y)$ é uma fibração, em que

$$(\mathrm{F}(Y))' = \{(x, u) \in X \times \mathrm{F}(Y); (f(x), y) = (u(0), u(1))\} = \{(x, u) \in I^f; u(1) = y\} = T^f$$

e $\bar{p}'(x, u) = x$. Vemos assim que $q = \bar{p}'$ e portanto q é fibração. $\square$

3 Fibração com uma suspensão por espaço base e a sequência de Wang

Seja $p : X \to B$ ume fibração com fibra F e assuma que B é a suspensão de algum espaço W. A decomposição do espaço base em duas cópias do espaço contrátil $\mathbf{T}W$ induz uma decomposição do espaço total em dois subespaços, cada qual tem o mesmo tipo de homotopia de $\mathbf{T}W \times F$, e por conseguinte de F. A sua interseção tem o mesmo tipo de homotopia que $W \times F$ e algumas considerações sobre a relação entre esses subespaços leva a uma sequência exata que relaciona os grupos de homologia dos três espaços X, B e F. O caso $B = \mathbb{S}^n$ é de particular interesse e a sequência exata resultante foi encontrada por H. C. Wang em 1949.

Teorema 3.1. *Seja $p\colon X \to \mathbf{S}W$ uma fibração com fibra F e com W um espaço com ponto base não-degenerado $*$. Então existe uma aplicação $\phi\colon (\mathbf{T}W \times F, W \times F) \to (X, F)$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{T}W \times F, W \times F) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p_1"'] & (X, F) \arrow[d, "p"] \\
(\mathbf{T}W, W) \arrow[r, "\omega'"'] & (\mathbf{S}W, *)
\end{tikzcd}$$

é comutativo e, para qualquer grupo de coeficientes G,

$$\phi_*\colon H_q(\mathbf{T}W \times F, W \times F; G) \to H_q(X, F; G)$$

e

$$\phi^*\colon H^q(X, F; G) \to H^q(\mathbf{T}W \times F, W \times F; G)$$

são isomorfismos. Além disso, $\phi_{|\{*\}\times F}\colon F \to F$ é homotópico a identidade de F.

Demonstração. Seja $\omega\colon I \to S^1$ a aplicação identificação e denotemos $\bar{t} = \omega(t)$. Podemos escrever $\mathbf{S}W$ como a união dos dois cones $\mathbf{T}_+W$ e $\mathbf{T}_-W$ sobre W,

$$\mathbf{T}_+W = \{\bar{t} \wedge w;\ t \leq \tfrac{1}{2}\}$$
$$\mathbf{T}_-W = \{\bar{t} \wedge w;\ t \geq \tfrac{1}{2}\}.$$

Note que $\mathbf{T}_+W \cap \mathbf{T}_-W$ é uma cópia de W. Sejam $X_+ = p^{-1}(\mathbf{T}_+W),\ X_- = p^{-1}(\mathbf{T}_-W)$ e $X_0 = p^{-1}(W) = X_- \cap X_+$.

Como $(\mathbf{T}_\pm W, W)$ e $(\mathbf{S}W, \mathbf{T}_\pm W)$ são NDR, temos que $(X_\pm, X_0)$ e $(X, X_\pm)$ também o são. Uma vez que $\mathbf{T}_-W$ é contrátil, a fibra F é um retrato por deformação de X_-. De fato, temos que $p_{|X_-}: X_- \to \mathbf{T}_-W$ é uma fibração (por (2.27)). Seja $\tilde{h}\colon I \times \mathbf{T}_-W \to \mathbf{T}_-W$ tal que $\tilde{h}(0,x) = x$ e $\tilde{h}(1,x) = *$ para todo $x \in \mathbf{T}_-W$. Como $(W,*)$ é NDR, (X_0, F) é NDR. Logo, uma vez que (X_-, X_0) é NDR, temos que (X_-, F) é NDR. Daí, o seguinte HLEP

$$\begin{tikzcd}
I \times F \cup 0 \times X_- \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "i"'] & X_- \arrow[d, "p"] \\
I \times X_- \arrow[r, "\tilde{h}(1\times p)"'] \arrow[ur, dashed, "H^-"] & \mathbf{T}_-W
\end{tikzcd}$$

possui solução $H^-\colon I \times X_- \to X_-$ que é uma homotopia entre a identidade de X_- e a aplicação $r = H^-(1, \_) : X_- \to X_-$. Basta mostrarmos que r é retração. Com efeito,

$$pr(x) = pH^-(1,x) = \tilde{h}(1 \times p)(1,x) = \tilde{h}(1, p(x)) = *,\ \forall x \in X_-$$

donde segue que $r(X_-) \subset F$. Além disso, $r(x) = H^-(1,x) = H^-i(1,x) = p_2(1,x) = x$ para todo $x \in F$.

Portanto, a induzida

$$i_1 : H_q(X,F) \to H_q(X, X_-)$$

da inclusão do par (X,F) no par (X, X_-) é um isomorfismo. Pelo teorema (1.29), o par $\{X_+, X_-\}$ é excisivo e portanto a induzida

$$i_2 : H_q(X_+, X_0) \to H_q(X, X_-)$$

da inclusão do par (X_+, X_0) no par (X, X_-) também é um isomorfismo.

Como $\mathbf{T}_+W$ é contrátil, a projeção $p_1\colon \mathbf{T}_+W \times F \to \mathbf{T}_+W$ é homotópica a aplicação constante. Portanto, a projeção $p_2\colon \mathbf{T}_+W \times F \to F$ é homotópica em X_+ a uma aplicação $h\colon \mathbf{T}_+W \times F \to X_+$ tal que $ph = p_1$. De fato, considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{T}_+W \times F \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "i_0"'] & X_+ \arrow[d, "p"] \\
I \times (\mathbf{T}_+W \times F) \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\overline{H}"] & \mathbf{T}_+W
\end{tikzcd}$$

em que H é uma homotopia entre a aplicação constante e p_1. Como p é fibração, o HLP acima admite solução $\overline{H}$. Basta notar que $\overline{H}$ é uma homotopia entre p_2 e $h = \overline{H}(1, \_)$, em X_+, e que este último satisfaz $ph = p_1$.

Mostremos que $h\colon (\mathbf{T}_+W \times F, W \times F) \to (X_+, X_0)$ é equivalência de homotopia. Por raciocínio análogo ao feito mais acima, obtemos uma homotopia $H^+\colon I \times X_+ \to X_+$ entre a identidade de X_+ e uma retração $\gamma\colon X_+ \to F$. Agora, como $\mathbf{T}_+W$ é contrátil, considere $\beta\colon I \times \mathbf{T}_+W \times F \to \mathbf{T}_+W \times F$ uma homotopia entre a identidade de $\mathbf{T}_+W \times F$ e a aplicação $(c \times 1_F)$, em que $c\colon \mathbf{T}_+W \to \mathbf{T}_+W$ é a aplicação constante igual a $*$. Sejam $k\colon X_+ \to \mathbf{T}_+W \times F$, $L_1\colon I \times X_+ \to X_+$ e $L_2\colon I \times \mathbf{T}_+W \times F \to \mathbf{T}_+ \times F$ aplicações dadas por

$$k = (p \times \gamma)\Delta; \quad L_1(t,x) = \begin{cases} \overline{H}(1-2t, k(x)), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ H^+(2-2t, x), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases};$$

$$L_2(t,w) = \begin{cases} k\overline{H}(1-2t, w), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2-2t, w), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases},$$

em que $\Delta : X_+ \to X_+ \times X_+$ é a aplicação diagonal. Mostremos que $L_1 \colon hk \sim 1_{X_+}$ e $L_2 \colon kh \sim 1_{\mathbf{T}_+W\times F}$. De fato,

$$\begin{aligned} L_1(0,x) &= \overline{H}(1,k(x)) = h(k(x)) = hk(x) && \forall x \in X_+ \\ L_1(1,x) &= H^+(0,x) = x = 1_{X_+}(x) && \forall x \in X_+ \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} L_2(0,w) &= k\overline{H}(1,w) = kh(w) && \forall w \in \mathbf{T}_+W \times F \\ L_2(1,w) &= \beta(0,w) = w = 1_{\mathbf{T}_+W\times F}(w) && \forall w \in \mathbf{T}_+W \times F. \end{aligned}$$

A inclusão $j \colon \mathbf{T}_+W \to \mathbf{S}W$ é homotópica, em $\mathbf{S}W$, a proclusão $\theta = \omega'\alpha \colon \mathbf{T}_+W \to \mathbf{S}W$, em que $\omega' = \omega \wedge 1 \colon (\mathbf{T}W, W) \to (\mathbf{S}W, *)$ e $\alpha \colon (\mathbf{T}_+W, W) \to (\mathbf{T}W, W)$ é o homeomorfismo $\bar{t} \wedge w \mapsto \overline{2t} \wedge w$. Seja σ uma tal homotopia (que podemos assumir ser tal que os pontos de W permanecem em $\mathbf{T}_-W$) e considere o HLP

$$\begin{tikzcd} \mathbf{T}_+W \times F \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "p"] \\ I \times \mathbf{T}_+W \times F \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, dashed, "\Phi"] & \mathbf{S}W \end{tikzcd} ,$$

em que $G(t,w,f) = \sigma(t,w)$. Como p é fibração, este admite solução Φ, que é uma homotopia, em (X, X_-), entre h e $\varphi = \Phi(1, \_) \colon (\mathbf{T}_+W \times F, W \times F) \to (X, F)$. Logo, $i_1\varphi_* = i_2h_*$. Como i_1, i_2 e h_* são isomorfismos, temos que

$$\varphi_* \colon H_q(\mathbf{T}_+W \times F, W \times F) \to H_q(X, F)$$

é um isomorfismo. Pondo $\phi = \varphi(\alpha^{-1} \times 1_F)$ concluímos o desejado.

Uma vez que a induzida de uma equivalência de homotopia, em homologia e cohomologia com coeficientes arbitrários, é um isomorfismo, a prova acima continua válida para esses casos e o resultado segue. $\square$

A aplicação ϕ é chamada uma *aplicação estrutural*, e $\psi = \phi_{|W\times F} \colon W \times F \to F$ é chamada uma *função característica*, para a fibração p.

Utilizando essa aplicação, podemos substituir o grupo $H^q(X, F; G)$ pelo grupo isomorfo $H^q(\mathbf{T}W \times F, W \times F; G)$. Obtemos assim,

Corolário 3.2. *Existem sequências exatas*

$$\begin{aligned} \cdots \to H_q(F;G) \to H_q(X;G) \to H_q(\mathbf{T}W \times F, W \times F; G) \to \\ \to H_{q-1}(F;G) \to H_{q-1}(X;G) \to \cdots \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} \cdots \to H^{q-1}(X;G) \to H^{q-1}(F;G) \to H^q(\mathbf{T}W \times F, W \times F; G) \to \\ \to H^q(X;G) \to H^q(F;G) \to \cdots \end{aligned} \tag{3.2}$$

Como $\mathbf{T}W$ é contrátil, o subespaço $F = \{*\} \times F$ é um retrato por deformação de $\mathbf{T}W \times F$. Logo, $H_n(\mathbf{T}W \times F, F) = 0$ para todo n. Assim, da sequência exata longa da terna $(\mathbf{T}W \times F, W \times F, F)$ obtemos isomorfismos

$$\partial_* \colon H_q(\mathbf{T}W \times F, W \times F) \to H_{q-1}(W \times F, F).$$

Se considerarmos W como um espaço com ponto base e F como um espaço livre, então $W \times F/F \simeq W \wedge F$ por (1.30). Logo, $H_{q-1}(W \times F, F) \simeq H_{q-1}(W \wedge F)$ por (1.24).

Logo, do corolário anterior, obtemos sequências exatas

$$\cdots \to H_{q+1}(F;G) \to H_{q+1}(X;G) \to H_q(W \wedge F;G) \xrightarrow{\tilde{\psi}} H_q(F;G) \to H_q(X;G) \to \cdots \tag{3.3}$$

$$\cdots \to H^q(X;G) \to H^q(F;G) \xrightarrow{\tilde{\psi}^*} H^q(W \wedge F;G) \to H^{q+1}(X;G) \to H^{q+1}(F;G) \to \cdots \tag{3.4}$$

Explicitemos $\tilde{\psi}$ e $\tilde{\psi}^*$. Uma vez que F é um retrato de $W \times F$, a sequência exata do par $(W \times F, F)$ se decompõe em uma família de de sequências exatas curtas (split)

$$0 \to H_q(F) \xrightarrow{i_*} H_q(W \times F) \xrightarrow{\pi_*} H_q(W \wedge F) \to 0.$$

Seja $p_2 \colon W \times F \to F$ a projeção no segundo fator. Então $p_2 i = 1_F \sim \psi i$, em que $\psi = \phi_{|W\times F} \colon W \times F \to F$. Logo, $p_{2*} i_* = \psi_* i_* \colon H_q(F) \to H_q(F)$, donde $\operatorname{Im} i_* \subset \ker \psi_* - p_{2*}$, e portanto, $\psi_* - p_{2*}$ induz um homomorfismo

$$\tilde{\psi} \colon H_q(W \wedge F) \to H_q(F),$$

de forma que $\tilde{\psi}\pi_* = \psi_* - p_{2*}$. De modo análogo, obtemos um homomorfismo

$$\tilde{\psi}^* \colon H^q(F;G) \to H^q(W \wedge F;G)$$

tal que $\pi^* \tilde{\psi}^* = \psi^* - p_2^*$.

Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
H_{q+1}(\mathbf{T}W \times F, W \times F) \arrow[r, "\phi_*"] \arrow[d, "\partial_*"'] & H_{q+1}(X,F) \arrow[d, "\partial_*"] \\
H_q(W \times F) \arrow[r, "\psi_* - p_{2*}"] \arrow[d, "\pi_*"'] & H_q(F) \\
H_q(W \wedge F) \arrow[ur, "\tilde{\psi}"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.5}$$

Uma vez que ψ é a restrição de ϕ a uma aplicação de $W \times F$ para F, temos

$$\psi_* \partial_* = \partial_* \phi_*.$$

Agora, $p_{2*}\partial_* = 0$ pois, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
H_{q+1}(\mathbf{T}W \times F, W \times F) \arrow[r, "p_{2*}"] \arrow[d, "\partial_*"'] & H_{q+1}(F,F) = 0 \arrow[d, "\partial_*"] \\
H_q(W \times F) \arrow[r, "p_{2*}"'] & H_q(F)
\end{tikzcd}$$

comuta. Logo, o retângulo superior de (3.5) comuta, donde segue que o diagrama (3.5) é comutativo (analogamente para cohomologia).

As sequências (3.3) e (3.4) (ou (3.1) e (3.2)) são denominadas *sequências de Wang* para a fibração p. Elas foram descobertas por H. C. Wang no caso em que W é uma esfera.

Corolário 3.3. *Seja $p\colon X \to \mathbb{S}^n$, $(n > 1)$, uma fibração com fibra F, então existem sequências exatas*

$$\cdots \to H_q(F;G) \to H_q(X;G) \to H_{q-n}(F;G) \xrightarrow{\theta_*} H_{q-1}(F;G) \to H_{q-1}(X;G) \to \cdots \tag{3.6}$$

$$\cdots \to H^{q-1}(X;G) \to H^{q-1}(F;G) \xrightarrow{\theta^*} H^{q-n}(F;G) \to H^q(X;G) \to H^q(F;G) \to \cdots \tag{3.7}$$

Demonstração. Uma vez que $H_i(\mathbf{T}\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{S}^{n-1}) \simeq H^i(\mathbf{T}\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{S}^{n-1}) = 0$ para todo $i \neq n$ e $H_n(\mathbf{T}\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{S}^{n-1}) \simeq H^n(\mathbf{T}\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{S}^{n-1}) \simeq \mathbb{Z}$, segue da fórmula de Künneth que o produto cross induz isomorfismos

$$H_q(\mathbf{T}\mathbb{S}^{n-1} \times F, \mathbb{S}^{n-1} \times F; G) \overset{\times}{\simeq} H_n(\mathbf{T}\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{S}^{n-1}) \otimes H_{q-n}(F;G)$$
$$H^q(\mathbf{T}\mathbb{S}^{n-1} \times F, \mathbb{S}^{n-1} \times F; G) \overset{\times}{\simeq} H^n(\mathbf{T}\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{S}^{n-1}) \otimes H^{q-n}(F;G).$$

Seja agora e um gerador de $H^n(\mathbf{T}\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{S}^{n-1})$. Então temos o isomorfismo $x \mapsto e \otimes x$ entre $H^n(\mathbf{T}\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{S}^{n-1}) \otimes H^{q-n}(F;G)$ e $H^n(\mathbf{T}\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{S}^{n-1}) \otimes H^{q-n}(F;G)$. Donde segue que $H^q(\mathbf{T}\mathbb{S}^{n-1} \times F, \mathbb{S}^{n-1} \times F; G) \simeq H^{q-n}(F;G)$ (note que isto nos dá que θ^* é dado por $e \times \theta^*(x) = \phi^*\delta^*(x)$). Analogamente para homologia.

□

Suponha, em particular, que G é um anel comutativo com identidade. Temos então

Teorema 3.4. *A aplicação $\theta^*\colon H^*(F;G) \to H^*(F;G)$ de* (3.7) *é uma derivação de grau $n-1$, do anel graduado $H^*(F;G)$.*

Demonstração. Seja e o gerador canônico de $H^n(E^n, \mathbb{S}^{n-1})$ e $s = \delta^{*-1}(e) \in H^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ tal que $\langle e, \varepsilon \rangle = 1$, em que ε é um gerador de $H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$. Temos então o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
H^{q-1}(F) \arrow[r, "\psi^*"] \arrow[d, "\delta^*"'] & H^{q-1}(\mathbb{S}^{n-1} \times F) \arrow[d, "\delta^*"] \\
H^q(X, F) \arrow[r, "\phi^*"'] & H^q(E^n \times F, \mathbb{S}^{n-1} \times F)
\end{tikzcd}$$

e θ^* é dada por

$$\phi^*\delta^*(x) = e \times \theta^*(x). \tag{3.8}$$

O elemento identidade $1 \in H^*(\mathbb{S}^{n-1})$ gera $H^0(\mathbb{S}^{n-1})$. Daí, pela fórmula de Künneth, temos que os homomorfismos $u \mapsto 1 \times u$ e $v \mapsto s \times v$ representam $H^{q-1}(\mathbb{S}^{n-1} \times F)$ como soma direta $H^{q-1}(F) \oplus H^{q-n}(F)$. Além disso, da naturalidade do produto cross, temos

$$\begin{aligned} \delta^*(1 \times u) &= \delta^*(1) \times u = 0 \\ \delta^*(s \times v) &= \delta^*(s) \times v = e \times v. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Se $x \in H^{q-1}(F)$, $\psi^*(x) = 1 \times u + s \times v$ para algum $u \in H^{q-1}(F)$ e $v \in H^{q-n}(F)$. Como $\psi^* : H^{q-1}(F) \to H^{q-1}(F)$ é a identidade temos que $u = x$ e de (3.8) e (3.9) temos

$$e \times \theta^*(x) = \phi^*\delta^*(x) = \delta^*\psi^*(x) = \delta^*(1 \times x + s \times v) = e \times v.$$

Logo, $\theta^*(x) = v$. Portanto, $\psi^*(x) = 1 \times x + s \times \theta^*(x)$.

Agora, ψ^* é um homomorfismo de anéis. Mas, $x \in H^{q-1}(F)$, e $y \in H^{r-1}(F)$ implica

$$\psi^*(x \smile y) = 1 \times (x \smile y) + s \times \theta^*(x \smile y)$$

e

$$\begin{aligned}
\psi^*(x) \smile \psi^*(y) = (1 \times x + s \times \theta^*(x)) \smile (1 \times y + s \times \theta^*(y)) = \\
(1\times x)\smile(1\times y)+(1\times x)\smile(s\times\theta^*(y))+(s\times\theta^*(x))\smile(1\times y)+(s\times\theta^*(x))\smile(s\times\theta^*(y)) = \\
(1 \smile 1) \times (x \smile y) + (-1)^{(n-1)(q-1)}(1 \smile s) \times (x \smile \theta^*(y)) + (s \smile 1) \times (\theta^*(x) \smile y) \\
+ (-1)^{(q-1)(q-n)}(s \smile s) \times (\theta^*(x) \smile \theta^*(y)) = \\
1 \times (x \smile y) + s \times (\theta^*(x) \smile y) + (-1)^{(n-1)\dim x} s \times (x \smile \theta^*(y)).
\end{aligned}$$

E portanto,

$$\theta^*(x \smile y) = (\theta^*(x) \smile y) + (-1)^{(n-1)\dim x}(x \smile \theta^*(y))$$

□

Outro caso de especial importância ocorre quando a fibra F age sobre a fibração p, isto é, quando existe uma aplicação $\mu : X \times F \to X$ tal que

$$\mu \circ i_1 \simeq 1_X, \quad \mu \circ i_2 \simeq j \quad \text{e} \quad p \circ \mu = p \circ p_1,$$

em que $i_1 : X \to X \times F$, $i_2 : F \to X \times F$ e $j : F \to X$ são as inclusões.

Em particular, a restrição de μ à F é uma multiplicação $\mu_0 : F \times F \to F$, tornando F um H-espaço.

Observação 3.5. Definimos uma ação à direita. Ás vezes é mais conveniente utilizarmos ações à esquerda, que são aplicações $F \times X \to X$ com as devidas propriedades.

Dizemos que a ação de μ é *associativa* se vale $x(y_1y_2) = (xy_1)y_2$ para todo $x \in X$ e todo $y_1, y_2 \in F$; e que μ é *homotopia-associativa* se existe uma homotopia h entre $\mu \circ (1_X \times \mu_0)$ e $\mu \circ (\mu \times 1_F)$ tal que h é estacionária com relação a p.

Exemplo 3.6. Dado um espaço X, considere o *espaço dos caminhos mensurados* em X

$$\mathbf{F}^*(X) = \{(r, f) \in \mathbb{R}^+ \times \mathrm{F}(\mathbb{R}^+, X); f(r) = f(t) \forall t \geq r\}.$$

Neste espaço podemos definir o produto de dois caminhos mensurados. Sejam (r, f) e (s, g) dois caminhos mensurados tais que $f(r) = g(0)$. Definimos o produto de (r, f) e (s, g) por $\mu((r, f), (s, g)) = (r + s, h)$, em que

$$h(t) = \begin{cases} f(r), & 0 \leq t \leq r \\ g(t - r), & t \geq r. \end{cases}$$

Além disso, esse produto é contínuo e associativo no espaço M dos pares de caminhos mensuráveis que admitem produto. A aplicação $p\colon \mathbf{F}^*(X) \to X \times X$ dada por $p(r, f) = (f(0), f(r))$ é uma fibração (veja [12], capítulo 3, §2). Seja $x_0 \in X$ e defina $\mathbf{P}^*(X) = p^{-1}(\{x_0\} \times X)$. Então, por (2.27), a aplicação $q\colon \mathbf{P}^*(X) \to X$ dada por $q(r, f) = f(r)$ é uma fibração e $F_{x_0} = \Omega^*(X) = \{(r, f) \in \mathbf{F}^*(X); f(0) = f(r) = x_0\}$ é o *espaço dos laços mensurados* em X. Mostremos que o produto induzido em $\mathbf{P}^*(X)$ pelo produto de $\mathbf{F}^*(X)$ é uma ação, associativa, à esquerda da fibra $\Omega^*(X)$ na fibração q. De fato, seja

$(0, x_0)$ o caminho mensurável constante em x_0. De fato, é fácil ver que para $(r, f) \in P^*(X)$ e $(s, g) \in \Omega^*(X)$ temos que $\mu((0, x_0), (r, f)) = (r, f)$ e $\mu((s, g), (0, x_0)) = (s, f)$. Por fim, se $\mu((s, g), (r, f)) = q(r + s, h)$ então,

$$\begin{aligned} q\mu((s,g),(r,f)) &= q(r+s,h) = h(r+s) \\ &= f((r+s)-s) = f(r) = q(r,f) = qp_2((s,g),(r,f)). \end{aligned}$$

Que esta ação é associativa decorre do fato de que μ o é.

Exemplo 3.7. Seja G um grupo de Lie compacto e H um subgrupo fechado de G. Temos que a projeção $p : G \to G/H$ é a projeção de um fibrado ([10]). Logo, por (2.16), p é uma fibração com fibra H. Seja μ_1 o multiplicação do grupo G. Então sua restrição $\mu : G \times H \to G$ é uma ação associativa à direita da fibra H. De fato, se $x \in G$, $h \in H$ e 1 é o elemento identidade de G, então $\mu(g, 1) = g1 = g$, $\mu(1, h) = 1h = h$. Por fim,

$$p\mu(g, h) = p(gh) = (gh)H = gH = p(g) = pp_1(g, h).$$

Suponha que F age na fibração $p : X \to \mathbf{S}W$. Neste caso, podemos dar uma fórmula um pouco mais explícita para a aplicação estrutural ϕ do teorema (3.1) envolvendo a ação μ.

Teorema 3.8. *Se $p : X \to \mathbf{S}W$ é uma fibração com fibra F, a qual age sobre p, então existe uma aplicação $\phi_0 : (\mathbf{T}W, W) \to (X, F)$ tal que a aplicação $\phi = \mu \circ (\phi_0 \times 1_F) : (\mathbf{T}W \times F, W \times F) \to (X, F)$ é uma aplicação estrutural. Ainda, se $\psi_0 : W \to F$ é a restrição de ϕ_0, então $\psi = \mu_0 \circ (\psi_0 \times 1_F) : W \times F \to F$ é uma aplicação característica.*

Demonstração. Uma analise da prova do teorema (3.1) mostra que para ϕ ser uma aplicação estrutural basta satisfazer o seguinte:

(a) Se $\alpha : \mathbf{T}_+W \to \mathbf{T}W$ é o homeomorfismo canônico, então $\phi \circ (\alpha \times 1_F)$ é homotópica, em X, a uma aplicação $h : \mathbf{T}_+W \times F \to X_+$ que é uma equivalência de homotopia e satisfaz $p \circ h = p_1 : \mathbf{T}_+W \times F \to \mathbf{T}_+W$.

(b) O diagrama

$$\begin{tikzcd} (\mathbf{T}W \times F, W \times F) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p_1"'] & (X, F) \arrow[d, "p"] \\ (\mathbf{T}W, W) \arrow[r, "\omega'"'] & (\mathbf{S}W, *) \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Sejam $i : \mathbf{T}_+W \to \mathbf{T}_+W \times F$ a inclusão e $h : \mathbf{T}_+W \times F \to X_+$ como na prova de (3.1). Defina $h_0 = h \circ i$ e $\eta = \mu \circ (h_0 \times 1_F)$. Uma vez que h é homotópico, em X_+, à projeção $p_2 : \mathbf{T}_+W \times F \to F$ segue que h_0 é homotópica à aplicação constante $c : \mathbf{T}_+W \to X_+$ e por conseguinte temos

$$\mu \circ (h_0 \times 1_F) \sim \mu \circ (c \times 1_F) = \mu \circ (j \circ p_2) \sim p_2 : \mathbf{T}_+W \times F \to X_+,$$

em que $j : F \to X \times F$ é a inclusão. Temos assim que $\eta \sim h$.

Seja agora ϕ_1 a aplicação estrutural do teorema (3.1). Defina $\phi_0 = \phi_1 \circ i$ e $\phi = \mu \circ (\phi_0 \times 1_F)$. Agora, h_0 é homotópica, em X, à $\phi \circ (\alpha \times 1_F) \circ i$, donde

$$\phi \circ (\alpha \times 1_F) = \mu \circ ((\phi \circ (\alpha \times 1_F)i) \times 1_F)$$

é homotópico à η, e por conseguinte, à h.

Por fim, mostremos que o diagrama do item (b) é comutativo. De fato, seja $(x, y) \in \mathbf{T}_W \times F$. Então

$$\begin{aligned} p\phi(x,y) = p\mu(\phi_0 \times 1_F)(x,y) &= pp_1(\phi_0(x), y) \\ &= p\phi_0(x) = p\phi_1 i(x) = \omega' p_1 i(x) = \omega' p_1(x,y). \end{aligned}$$

□

Retornando ao exemplo (3.6), a fibração $\mathrm{P}^*\mathbf{S}W \to \mathbf{S}W$, com fibra $F = \Omega^*\mathbf{S}W$. Neste caso o espaço total é contrátil, e a sequência de Wang se reduz a uma família de isomorfismos

$$H_q(W \wedge F) \simeq H_q(F), \quad q > 0. \tag{3.10}$$

Isso nos permite calcular os grupos de homologia de F recursivamente. Pelo teorema de Künneth temos, para $q > 0$,

$$\begin{aligned} H_q(F) \simeq H_q(W \wedge F) &\simeq H_q(W \times F, F) \\ &\simeq \bigoplus_{r+s=q} H_r(W,*) \otimes H_s(F) \oplus \bigoplus_{r+s=q-1} \mathrm{Tor}(H_r(W,*), H_s(F)). \end{aligned}$$

Como W é 0-conexo, $H_r(W,*) = 0$ para $r \leq 0$, e portanto a primeira parte da soma acima envolve apenas os grupos de homologia de F em dimensões menores que q. Uma fórmula explícita seria um tanto complicada em geral. Sendo assim, suponha que o grupo de coeficientes é um corpo (ou que este é um PID e $H_*((W,*);G)$ não tem torção).

Seja $b_k(Y)$ o k-ésimo número de Betti do espaço Y, e assuma que $b_k(Y) < \infty, \forall k$. Então a *série de Poincaré* de Y é a série de potências formal

$$Y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(Y) t^k.$$

O teorema de Künneth implica que a série de Poincaré do espaço produto é o produto das séries de Poincaré de seus fatores. A série de Poincaré de $(W,*)$ é

$$\tilde{W}(t) = W(t) - 1.$$

Assim, de $H_q(F) \simeq H_q(W \times F, F)$ temos

$$F(t)\tilde{W}(t) = F(t),$$

ou seja,

$$F(t) = \frac{1}{1 - \tilde{W}(t)} = 1 + \tilde{W}(t) + \tilde{W}(t)^2 + \cdots$$

Para o caso em que $W = \mathbb{S}^n$ temos que $\tilde{W}(t) = t^n$ e portanto,

Corolário 3.9. *Os grupos de homologia dos espaços de laços $\Omega^{n+1} = \Omega(\mathbb{S}^{n+1})$ são dados por*

$$H_q(\Omega^{n+1}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = pn, p \geq 0 \\ 0, & \textit{caso contrário} \end{cases}$$

Demonstração. Uma vez que $H_*(\mathbb{S}^n, *)$ é livre de torção, temos da fórmula de recorrência acima que, $H_*(\Omega^*\mathbb{S}^{n+1})$ é livre de torção, e portanto os grupos $H_q(\Omega^*\mathbb{S}^{n+1})$ ficam determinados pelos seus números de Betti. Agora, a série de Poincaré para $\Omega\mathbb{S}^{n+1}$ é dada por

$$\Omega^*\mathbb{S}^{n+1}(t) = \frac{1}{1-t^n} = 1 + t^n + t^{2n} + t^{3n} + \cdots$$

Donde segue que

$$H_q(\Omega^*\mathbb{S}^{n+1}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = pn, p \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Por fim, o resultado segue pela observação (3.10). □

Este resultado para $\Omega(\mathbb{S}^{n+1})$ (ou melhor, para o espaço de laços retificáveis em $\mathbb{S}^{n+1}$) foi provado primeiramente por M. Morse.

Nos determinamos os grupos de homologia para o espaço $F = \Omega^*\mathbf{S}W$, mas existe uma estrutura adicional derivada do fato de que F é um H-espaço. De fato, $H_*(F)$ é uma álgebra graduada, a álgebra de Pontryagin, sobre o anel de coeficientes G. O produto em $H_*(F)$ é definido por $u \cdot v = \mu_{0*}(u \times v)$, em que $\mu_0 : F^2 \to F$ é o produto em F.

Observação 3.10. Os espaços $\Omega(\mathbf{S}W)$ e $\Omega^*(\mathbf{S}W)$ possuem grupos de homologia e anéis de cohomologia isomorfos, uma vez que têm o mesmo tipo de homotopia (veja [12], capítulo 3, §2). Que estes espaços possuem anéis de Pontryagin isomorfos decorre do fato da equivalência de homotopia entre eles ser uma H-aplicação.

Teorema 3.11. *Se $(W, *)$ é um par NDR com W 0-conexo e G é um corpo, ou um PID com a hipótese de que $\mathcal{M} = H_*(W, *; G)$ é livre de torção, então a álgebra de Pontryagin $H_*(\Omega\mathbf{S}W)$ é isomorfo a álgebra tensorial $T(\mathcal{M})$.*

Demonstração. Pelo teorema de Künneth, temos que

$$H_*(W \wedge F) \simeq H_*(W, *) \otimes H_*(F) = \mathcal{M} \otimes H_*(F).$$

Portanto, na sequência de Wang da fibração $\Omega^*\mathbf{S}W \to \mathbf{P}^*\mathbf{S}W \to \mathbf{S}W$, podemos considerar $\tilde{\psi}$ como um homomorfismo entre $\mathcal{M} \otimes H_*(F)$ e $H_*(F)$. Seja $\mathcal{M}'_0 = H_0(F)$ e defina $\mathcal{M}'_n \subset H_*(F)$ indutivamente pondo

$$\mathcal{M}'_{n+1} = \tilde{\psi}(\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}'_n).$$

Como observamos mais acima, F é 0-conexo e portanto o homomorfismo aumentação $\varepsilon : H_0(F; G) \to G$ é um isomorfismo. Definimos uma sequência de isomorfismos do seguinte modo, seja $f_0 : \mathcal{M}_0 = G \to \mathcal{M}'_0$ a inversa de ε. Se $f_n : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}'_n$ é um isomorfismo então a composta

$$\mathcal{M}_{n+1} = \mathcal{M} \otimes \mathcal{M}_n \xrightarrow{1\otimes f_n} \mathcal{M} \otimes \mathcal{M}'_n \xrightarrow{\tilde{\psi}} H_*(F)$$

é um monomorfismo (pois $\tilde{\psi} : \mathcal{M} \otimes H_*(F) \to H_*(F)$ é um monomorfismo uma vez que $\tilde{\psi} : H_q(W \wedge F) \to H_q(F)$ é isomorfismo para $q > 0$ e $H_0(W \wedge F) = 0$) com imagem $\mathcal{M}'_{n+1}$ e portanto temos um isomorfismo $f_{n+1} : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}'_n$. Os isomorfismo f_n induzem um homomorfismo $f : T(\mathcal{M}) \to H_*(F)$. Mostremos que

(a) f é um epimorfismo;

(b) f é um monomorfismo;

(c) f é um homomorfismo de álgebras.

Sejam

$$P_n = \sum_{q=0}^{n} \mathcal{M}_q \quad \text{e} \quad P'_n = \sum_{q=0}^{n} \mathcal{M}'_q.$$

Então $P'_0 = \mathcal{M}'_0 = H_0(F)$. Mostremos que $H_n(F) \subset P'_n$ para todo n. De fato, suponha que $H_q(F) \subset P'_q$ para todo $q \leq n$ e seja $x \in H_{n+1}(F)$. Como $\tilde{\psi} : H_{n+1}(W \wedge F) \to H_{n+1}(F)$ é um isomorfismo, existe $u \in H_{n+1}(W \wedge F)$ tal que $\tilde{\psi}(u) = x$. Agora, $H_i(W, *) = 0$ para $i \leq 0$, e portanto

$$u \in \bigoplus_{j=0}^{n} H_{n+1-j}(W, *) \otimes H_j(F) \subset \mathcal{M} \otimes P'_n.$$

Logo,

$$x = \tilde{\psi}(u) \in \tilde{\psi}(\mathcal{M} \otimes P'_n) = \sum_{q \leq n} \tilde{\psi}(\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}'_q) \subset \sum_{q \leq n} \mathcal{M}'_{q+1} = P'_{n+1}.$$

Portanto $H_{n+1}(F) \subset P'_{n+1}$. Agora, como as f_n são isomorfismos, segue que $P'_n \subset \operatorname{Im} f$ e portanto f é sobrejetora.

Agora, $f_{|P_0} = f_0 : \mathcal{M}_0 \to H_0(F) \subset H_*(F)$ é um monomorfismo. Suponha que $f_{|P_n} : P_n \to H_*(F)$ seja um monomorfismo. Uma vez que $f_{|P_n} : P_n \to P'_n$ é um isomorfismo, $(1 \otimes f)_{|\mathcal{M} \otimes P_n} : \mathcal{M} \otimes P_n \to \mathcal{M} \otimes P'_n$ também o é. Além disso, como $\tilde{\psi}_{|\mathcal{M} \otimes P'_n} \mathcal{M} \otimes P'_n \to H_*(F)$ é um monomorfismo, segue que a composta

$$g : \mathcal{M} \otimes P_n \xrightarrow{1 \otimes f} \mathcal{M} \otimes P'_n \xrightarrow{\tilde{\psi}} H_*(F)$$

também o é. Agora, a restrição de g a $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}_q$ é f_{q+1} e portanto temos que $g = f_{|\mathcal{M} \otimes P_n}$. Agora, $f(\mathcal{M}_0) \subset H_0(F)$ e $f(\mathcal{M} \otimes P_n) \subset H_+(F)$, o ideal de elementos de dimensão positiva de $H_*(F)$. Além disso $P_{n+1} = \mathcal{M}_0 \oplus (\mathcal{M} \otimes P_n)$. Logo, $f_{|P_{n+1}} = f_{|\mathcal{M}_0} \oplus g : \mathcal{M}_0 \oplus (\mathcal{M} \otimes P_n) \to H_*(F)$ é um monomorfismo. Uma vez que isso é verdade para todo n, segue que f é um monomorfismo.

Para mostrar que f é um homomorfismo de álgebras, usaremos o teorema (3.8). Como a fibra F age na fibração que estamos considerando, existe uma aplicação $\psi_0 : W \to F$ tal que $\psi = \mu_0 \circ (\psi_0 \times 1_F)$, onde $\mu_0 : F \times F \to F$ é a operação de multiplicação de caminhos mensurados.

Lema 3.12. *A aplicação $\tilde{\psi} : \mathcal{M} \otimes H_*(F) \to H_*(F)$ é dada por*

$$\tilde{\psi}(u \otimes v) = \tilde{\psi}_0(u) \cdot v,$$

para todo $u \in \mathcal{M}$ e todo $v \in H_*(F)$ e algum homomorfismo $\tilde{\psi}_0 : \mathcal{M} \to H_*(F)$.

Demonstração do lema (3.12). Considere a sequência exata longa do par $(W, *)$.

Como $\{*\}$ é um retrato de W, segue que essa sequência se decompõe em uma família de sequencias exatas curtas

$$0 \to H_q(*) \xrightarrow{j_*} H_q(W) \xrightarrow{i_*} H_q(W, *) \to 0.$$

Agora, se $c\colon W \to F$ é a aplicação constante igual a $\psi_0(*)$, temos que $\psi_0 \circ j = c \circ j$ e portanto $\psi_{0*} - c_*$ induz um homomorfismo $\tilde{\psi_0}$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
H_q(W) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\psi_{0*}-c_*"'] & H_q(W,*) \arrow[dl, "\tilde{\psi_0}"] \\
H_q(F) &
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Considere agora o diagrama

$$\begin{tikzcd}
H_*(W\times F) \arrow[r, "\pi_*"] & H_*(W\wedge F) \arrow[dr, "\tilde{\psi}"] & \\
H_*(W)\otimes H_*(F) \arrow[u, "k_2"] \arrow[r, "i_*\otimes 1"] \arrow[dr, "(\psi_{0*}-c_*)\otimes 1"'] & \mathcal{M}\otimes H_*(F) \arrow[u, "k_1"'] \arrow[d, "\tilde{\psi_0}"] & H_*(F) \\
& H_*(F)\otimes H_*(F) \arrow[r, "k_3"'] & H_*(F\times F) \arrow[u, "\mu_{0*}"']
\end{tikzcd}$$

os homomorfismo k_i são dados pelo produto cross. O retângulo superior esquerdo é comutativo pela naturalidade do produto cross, e o triangulo logo abaixo é comutativo pela definição de $\tilde{\psi_0}$. Queremos mostrar que o quadrilátero a direita é comutativo. Uma vez que o homomorfismo $\tilde{\psi}$ é definido pela equação $\tilde{\psi}\pi_* = \psi_* - p_{2*}$, este problema é equivalente a mostrar a validade da seguinte igualdade

$$\mu_{0*}(k_3(\tilde{\psi_0}\otimes 1))k_1^{-1}\pi_* = \psi_* - p_{2*}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\mu_{0*}(k_3(\tilde{\psi_0}\otimes 1))k_1^{-1}\pi_* &= \mu_{0*}(k_3(\tilde{\psi_0}\otimes 1))(i_*\otimes 1)k_2^{-1} \\
&= \mu_{0*}(k_3((\psi_{0*}-c_*)\otimes 1)k_2^{-1} = \mu_{0*}(k_3(\psi_{0*}\otimes 1)k_2^{-1} - \mu_{0*}(k_3(c_*\otimes 1)k_2^{-1} \\
&= \mu_{0*}(\psi_0\times 1)_* - \mu_{0*}(c\times 1)_* = (\mu_0(\psi_0\times 1))_* - (\mu_0(c\times 1))_*.
\end{aligned}$$

Uma vez que $\psi = \mu_0(\psi_0\times 1)$ e $p_2 \sim \mu_0(c\times 1)$ o resultado segue. □

Para finalizarmos a prova, basta mostrarmos que $f(u\otimes v) = f(u)\cdot f(v)$ para todo $u \in \mathcal{M}$ e todo $v \in \mathcal{M}_n$, ou seja,

$$f_{n+1}(u\otimes v) = f_1(u)\cdot f_n(v).$$

Mas,

$$f_{n+1}(u\otimes v) = \tilde{\psi}(1\otimes f_n)(u\otimes v) = \tilde{\psi}(u\otimes f_n(v)) = \tilde{\psi_0}(u)\cdot f_n(v).$$

E,

$$f_1(u) = f_1(u\otimes 1) = \tilde{\psi}(1\otimes f_0)(u\otimes 1) = \tilde{\psi}(u\otimes f_0(1)) = \tilde{\psi}(u\otimes 1) = \tilde{\psi_0}(u).$$

Por fim a observação (3.10) completa a prova. □

Corolário 3.13. *O anel de Pontryagin $H_*(\Omega^{n+1})$ é o anel de polinômios $\mathbb{Z}[u]$, onde u gera o grupo cíclico infinito $H_n(\mathbb{S}^n)$.*

Calculemos $H^n(\Omega^{n+1})$. Se n é par então, pelo corolário (3.3), temos a sequência exata longa

$$\cdots \to H^{q-1}(P^*\mathbb{S}^{n+1}) \to H^{q-1}(\Omega^*\mathbb{S}^{n+1}) \xrightarrow{\theta^*} H^{q-n-1}(\Omega^*\mathbb{S}^{n+1}) \to H^q(P^*\mathbb{S}^{n+1}) \to \cdots$$

Uma vez que $P^*\mathbb{S}^{n+1}$ é contrátil e $H^*(\Omega^*\mathbb{S}^{n+1}) \simeq H^*(\Omega^{n+1})$, temos

$$H^{q-1}(\Omega^{n+1}) \overset{\theta^*}{\simeq} H^{q-n-1}(\Omega^{n+1}) \quad \forall q > 1.$$

Disso, e do fato que $H^p(\Omega^{n+1}) = 0$ para todo $p < 0$, segue que

$$H^{qn}(\Omega^{n+1}) \overset{\theta^*}{\simeq} H^{(q+1)n}(\Omega^{n+1}) \quad \forall q \geq 0.$$

e $H^q(\Omega^{n+1}) = 0$ se $q \not\equiv 0 \pmod{n}$.

Além disso, como Ω^{n+1} é conexo por caminhos,

$$H^0(\Omega^{n+1}) \simeq \mathbb{Z}.$$

Defina uma sequência $\{z_q\}$ pondo $z_0 = 1$

$$\theta^*(z_k) = z_{k-1} \quad (k \geq 1).$$

Mostremos que

$$k!z_k = z_1^k \quad (k \geq 1). \tag{3.11}$$

De fato, o resultado é óbvio para $k = 1$. Suponha que (3.11) é valida para k. Como θ^* é uma derivação de grau n, n par, temos

$$\begin{aligned}\theta^*(z_1^{k+1}) &= \theta^*(z_1 z_1^k) = \theta^*(z_1)z_1^k + (-1)^{n\dim z_1} z_1\theta^*(z_1^k) = z_1^k + z_1\theta^*(z_1^k) = z_1^k + z_1\theta^*(k!z_k) \\ &= z_1^k + z_1(k(k-1)!\theta(z_k)) = z_1^k + kz_1((k-1)!z_{k-1}) = z_1^k + kz_1(z_1^{k-1}) \\ &= (k+1)z_1^k = (k+1)k!z_k = (k+1)!\theta^*(z_{k+1})\end{aligned}$$

Mas θ^* é um isomorfismo, donde $z_1^{k+1} = (k+1)!z_{k+1}$.

Isso determina a estrutura de $H^*(\Omega^{n+1})$ no caso n par. O denominaremos o *divided polynomial ring* $P^*(z)$ gerado pela sequência $z = (z_1, z_2, \ldots)$.

Agora, se n é impar, pela lei da comutatividade do produto cup, $z_1^2 = -z_1^2$ e portanto $z_1^2 = 0$, uma vez que $H^{2n}(\Omega^{n+1})$ não possui torção. Temos as seguintes relações

$$z_1 z_{2k} = z_{2k+1}, \quad z_1 z_{2k+1} = 0 \quad \text{e} \quad z_2^k = k!z_{2k}.$$

É fácil ver que essas relações são verdadeiras para $k = 0$. Suponha agora que são válidas para todo $j < k$, então

$$\theta^*(z_1 z_2 k) = \theta^*(z_1)z_{2k} - z_1\theta^*(z_{2k}) = z_{2k} - z_1 z_{2k-1} = z_{2k} = \theta^*(z_{2k+1}).$$

Portanto $z_1 z_{2k} = z_{2k+1}$. Além disso,

$$z_1 z_{2k+1} = z_1(z_1 z_{2k}) = z_1^2 z_{2k} = 0.$$

Por fim, $(\theta^*)^2 = \theta^* \circ \theta^*$ é uma derivação de grau par, que leva z_{2k} em z_{2k-2} e assim podemos deduzir a terceira relação de modo análogo ao feito no caso n par.

Podemos então explicitar a estrutura de $H^*(\Omega^{n+1})$ para n impar. Os elementos $z_2, z_4, \ldots$ geram uma divided polynomial álgebra isomorfa a $H^*(\Omega^{2n+1})$, e o elemento z_1 gera uma álgebra exterior isomorfa a $H^*(\mathbb{S}^n)$. Finalmente, a álgebra total é isomorfa ao produto tensorial dessas subalgebras

$$H^*(\Omega^{n+1}) \simeq H^*(\Omega^{2n+1}) \otimes H^*(\mathbb{S}^n).$$

4 Mais propriedades da sequência de Wang

Seja $p : X \to \mathbb{S}^n$ uma fibração com fibra F. Já estabelecemos a sequência de cohomologia

$$\cdots \to H^{q-1}(X) \xrightarrow{i^*} H^{q-1}(F) \xrightarrow{\theta^*} H^{q-n}(F) \xrightarrow{\alpha^*} H^q(X) \xrightarrow{i^*} H^q(F) \to \cdots$$

com coeficientes num anel comutativo A, onde i^* é um homeomorfismo de anéis e θ^* é uma derivação. Temos a seguinte propriedade útil de α^*.

Teorema 4.1. *Para $x \in H^{q-n}(F)$ e $y \in H^r(X)$, temos*

$$\alpha^*(x \smile i^*(y)) = \alpha^*(x) \smile y.$$

Demonstração. Relembre que α^* é definida pelo seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
H^q(X,F) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "\phi^*"'] & H^q(X) \\
H^q(E^n \times F, \mathbb{S}^{n-1} \times F) & H^{q-n}(F) \arrow[l, "e\times"] \arrow[u, "\alpha^*"']
\end{tikzcd}$$

em que ϕ é uma aplicação estrutural, e é um gerador de $H^n(E^n, \mathbb{S}^{n-1})$ e j é a inclusão. Logo, $\alpha^*(x) = j^*(z)$ onde $z \in H^q(X,F)$ é tal que $\phi^*(z) = e \times x$. Se $z \in H^q(X,F)$ e $y \in H^r(X)$, está bem definido o produto cup desses elementos

$$z \smile y \in H^{q+r}(X,F).$$

Além disso, da naturalidade do produto cup temos

$$j^*(z \smile y) = j^*(z) \smile y = \alpha^*(x) \smile y,$$

e também

$$\phi^*(z \smile y) = \phi^*(z) \smile \phi_1^*(y),$$

em que ϕ_1^* é o homomorfismo entre $H^r(X)$ e $H^r(E^n \times F)$ induzido por ϕ. Seja $c\colon E^n \to \{*\}$ a aplicação constante e considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
H^r(X) \arrow[d, "\phi_1^*"'] \arrow[rrd, "i^*"] & & \\
H^r(E^n \times F) & H^r(* \times F) \arrow[l, "(c\times 1_F)^*"] & H^r(F) \arrow[l, "p_2{}^*"] \arrow[ld, "1\otimes"] \\
H^0(E^n) \otimes H^r(F) \arrow[u, "k_1"] & H^0(*) \otimes H^r(F) \arrow[l, "c^*\otimes 1^*"] \arrow[u, "k_2"'] &
\end{tikzcd}$$

em que k_i é o produto cross. Uma vez que a aplicação $\phi_{|\{*\}\times F} : F \to F$ é homotópica à identidade, temos que triângulo superior do diagrama é comutativo. Além disso, da naturalidade do produto cross temos que o retângulo central é comutativo. A comutatividade do triângulo direito segue do fato que o produto cross é dado por $u \otimes v \mapsto p_1^*(u) \smile p_2^*(v)$. Assim, temos

$$\begin{aligned}\phi_1^*(y) = (c \times 1_F)^* p_2^* i^*(y) &= k_1(c^* \otimes 1^*) k_2^{-1} p_2^* i^*(y) \\ &= k_1(c^* \otimes 1^*)(1 \otimes i^*(y)) = c^*(1) \times i^*(y) = 1 \times i^*(y).\end{aligned}$$

Donde

$$\phi^*(z \smile y) = \phi^*(z) \smile \phi_1^*(y) = (e \times x) \smile (1 \times i^*(y)) = (e \smile 1) \times (x \smile i^*(y)) = e \times (x \smile i^*(y)).$$

Logo, da definição de α^* segue que

$$\alpha^*(x \smile i^*(y)) = j^*(z \smile y) = j^*(z) \smile y = \alpha^*(x) \smile y.$$

□

Corolário 4.2. *Se $x \in H^p(X)$ e $y \in H^{q-n}(F)$, então*

$$\alpha^*(i^*(x) \smile y) = (-1)^{np} x \smile \alpha^*(y).$$

Demonstração. Note que $i^*(x) \smile y = (-1)^{p(q-n)}(y \smile i^*(x))$ e $\alpha^*(y) \smile x = (-1)^{pq}(x \smile \alpha^*(y))$. Logo,

$$\alpha^*(i^*(x) \smile y) = (-1)^{p(q-n)} \alpha^*(y \smile i^*(x)) = (-1)^{p(q-n)}(\alpha^*(y) \smile x) = (-1)^{np}(x \smile \alpha^*(y)).$$

□

Corolário 4.3. *A imagem de α^* é um ideal em $H^*(X)$, e o produto de quaisquer elementos desse ideal é nulo.*

Demonstração. Uma vez que α^* é um homomorfismo, para mostrar que sua imagem é um ideal é suficiente mostrar que para todo $x \in H^*(F)$ e todo $y \in H^*(X)$ temos $\alpha^*(x) \smile y \in \operatorname{Im} \alpha^*$ e $y \smile \alpha^*(x) \in \operatorname{Im} \alpha^*$. De fato, como vimos acima, $\alpha^*(x) \smile y = \alpha^*(x \smile i^*(y)) \in \operatorname{Im} \alpha^*$. Por outro lado, $y \smile \alpha^*(x) = (-1)^t \alpha^*(i^*(y) \smile x) \in \operatorname{Im} \alpha^*$.

Sejam agora $x, y \in H^*(F)$. Então,

$$\alpha^*(x) \smile \alpha^*(y) = \alpha^*(x \smile (i^* \alpha^*)(y)) = \alpha^*(x \smile 0) = 0.$$

Note que a penúltima igualdade se deve ao fato que α^* e i^* são dois homomorfismos consecutivos na sequência de Wang. □

Se $1 \in H^0(F)$ é o elemento identidade do anel de cohomologia, então o elemento $u = \alpha^*(1)$ pertence a $H^n(X)$, e temos

Corolário 4.4. *O endomorfismo $d^* = \alpha^* \circ i^*$ de $H^*(X)$ é determinado por*

$$d^*(y) = u \smile y,$$

para todo $y \in H^*(X)$.

Demonstração. De fato, para $y \in H^*(X)$, temos

$$d^*(y) = \alpha^*(i^*(y)) = \alpha^*(1 \smile i^*(y)) = \alpha^*(1) \smile y = u \smile y.$$

□

Podemos determinar o elemento u. Para isso, lembremos que temos o seguinte diagrama comutativo (teorema (3.1))

$$\begin{tikzcd}
(E^n \times F, \mathbb{S}^{n-1} \times F) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p_1"'] & (X, F) \arrow[d, "p"] \\
(E^n, \mathbb{S}^{n-1}) \arrow[r, "q"'] & (\mathbb{S}^n, *),
\end{tikzcd}$$

onde q é a aplicação quociente. Seja s^n o gerador de $H^n(\mathbb{S}^n)$ tal que $q^*(k^*)^{-1}(s^n) = e$, em que $k : \mathbb{S}^n \to (\mathbb{S}^n, *)$ é a inclusão (q^* é sobrejetora pelo lema (1.23)). Então, $\phi(p^*(k^*)^{-1}s^n) = p_1^* q^*((k^*)^{-1}(s^n)) = p_1^*(e) = p_1^*(e) \smile p_2^*(1) = e \times 1$. Pela definição de α^*, $\alpha^*(1) = j^*(p^*(k^*)^{-1}s^n)$ (como vimos na prova do teorema (4.1)). Agora, pela naturalidade da sequência exata longa do par temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
H^n(X, F) \arrow[r, "j^*"] & H^n(X) \\
H^n(\mathbb{S}^n, *) \arrow[r, "k^*"] \arrow[u, "p^*"] & H^n(\mathbb{S}^n) \arrow[u, "p^*"']
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Portanto a relação

$$\alpha^*(1) = p^*(s^n) \tag{4.1}$$

vale em $H^n(X)$.

Suponha agora que F age na fibração p por $\mu : X \times F \to F$. Então a aplicação $p \circ p_1 : X \times F \to \mathbb{S}^n$ é uma fibração com fibra $F \times F$ e o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \times F \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "p \circ p_1"'] & & X \arrow[dl, "p"] \\
& \mathbb{S}^n &
\end{tikzcd}$$

comuta.

Logo,

$$\mu^*(u) = \mu^* p^*(s^n) = (p \circ p_1)^*(s^n) = p_1^* p^*(s^n) = p_1^*(u) = u \times 1$$

.

Ou seja, o homomorfismo

$$\mu^* : H^*(X) \to H^*(X \times F)$$

leva u em $u \times 1$.

Um par NDR (A, B) é dito um H-par se A e B são H-espaços e a restrição do produto em A para $B \times B$ é homotopico ao produto em B.

Suponha agora que a aplicação μ possua uma extensão $\mu_1 : X \times X \to X$ que torna (X, F) um H-par. Neste caso diremos que p é uma H-fibração (com respeito a estrutura de H-par de (X, F)).

Exemplo 4.5. Se X é um grupo de Lie compacto e H é um subgrupo fechado então a projeção $p: X \to X/H$ é a projeção de um fibrado ([10]). Logo, pelo corolário (2.16) p é uma fibração. Portanto, se (X, H) é um par NDR, então p é uma H-fibração.

Teorema 4.6. *Se $p: X \to \mathbb{S}^n$ é uma H-fibração e o anel de coeficientes é um domínio de integridade, então $u \in H^n(X)$ é primitivo.*

Demonstração. veja [12] □

Para o estudo da sequência de Wang em homologia, assumiremos que os coeficientes estão num anel comutativo A e que F age na fibração.

A ação $\mu: (X \times F, F \times F) \to (X, F)$ da origem ao diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_q(F \times F) \arrow[r] \arrow[d, "\mu_0"] & H_q(X \times F) \arrow[r] \arrow[d, "\mu_1"] & H_q(X \times F, F \times F) \arrow[r] \arrow[d, "\mu_2"] & H_{q-1}(F \times F) \arrow[r] \arrow[d, "\mu_0"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H_q(F) \arrow[r] & H_q(X) \arrow[r] & H_q(X, F) \arrow[r] & H_{q-1}(F) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Além disso, se $u \in H_r(F)$ é um elemento fixo, o produto cross dá origem ao seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_{q-r}(F) \arrow[r] \arrow[d, "\times u"] & H_{q-r}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\times u"] & H_{q-r}(X, F) \arrow[r] \arrow[d, "\times u"] & H_{q-r-1}(F) \arrow[r] \arrow[d, "\times u"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H_q(F \times F) \arrow[r] & H_q(X \times F) \arrow[r] & H_q(X \times F, F \times F) \arrow[r] & H_{q-1}(F \times F) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Combinando esses dois fatos temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_{q-r}(F) \arrow[r] \arrow[d, "\cdot u"] & H_{q-r}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\cdot u"] & H_{q-r}(X, F) \arrow[r] \arrow[d, "\cdot u"] & H_{q-r-1}(F) \arrow[r] \arrow[d, "\cdot u"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H_q(F) \arrow[r] & H_q(X) \arrow[r] & H_q(X, F) \arrow[r] & H_{q-1}(F) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Agora, a sequência de Wang é obtida a partir da sequência de homologia do par (X, F) substituindo o grupo $H_r(X, F)$ pelo grupo isomorfo $H_{r-n}(F)$. A classe u opera em cada termo da sequência resultante e temos o diagrama (não necessariamente comutativo)

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_p(F) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\cdot u"] & H_p(X) \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d, "\cdot u"] & H_{p-n}(F) \arrow[r, "\theta_*"] \arrow[d, "\cdot u"] & H_{p-1}(F) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\cdot u"] & Hp-1(X) \arrow[r] \arrow[d, "\cdot u"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H_{p+r}(F) \arrow[r, "i_*"'] & H_{p+r}(X) \arrow[r, "\alpha_*"'] & H_{p+r-n}(F) \arrow[r, "\theta_*"'] & H_{p+r-1}(F) \arrow[r, "i_*"'] & H_{p+r-1}(X) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Teorema 4.7. *Se $p: X \to \mathbb{S}^n$ é uma fibração com fibra F, na qual F age, e se $w = \rho(\omega) \in H_{n-1}(F)$ é a imagem do elemento característico sob a aplicação de Hurewicz, então*

$$\theta_*(x) = w \cdot x. \qquad (\forall x \in H_{p-n}(F))$$

Ainda, se a ação é homotopia-associativa, então o diagrama acima é comutativo.

Demonstração. Seja $\phi\colon (E^n \times F, \mathbb{S}^{n-1} \times F) \to (X, F)$ uma aplicação estrutural. Então o diagrama

$$\begin{tikzcd}
H_p(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[ddr, "\alpha_*"'] & H_p(X,F) \arrow[r, "\partial_*"] & H_{p-1}(F) \\
& H_p(E^n \times F, \mathbb{S}^{n-1} \times F) \arrow[u, "\phi_*"] & \\
& H_{p-n}(F) \arrow[u, "e\times"] \arrow[uur, "\theta_*"'] &
\end{tikzcd}$$

é comutativo pela definição de α_* e θ_*. Podemos considerar ϕ da forma $\mu \circ (\phi_0 \times 1_F)$ para alguma aplicação $\phi_0 : (R^n, \mathbb{S}^{n-1}) \to (X, F)$. Então,

$$\begin{aligned}
\theta_*(x) = \partial_*\phi_*(e \times x) = \partial_*\mu_*(\phi_0 \times 1_F)_*(e \times x) &= \partial_*\mu_*(\phi_{0*}(e) \times x) \\
&= \mu_*\partial_*(\phi_{0*}(e) \times x) = \mu_*(w \times x) = w \cdot x,
\end{aligned}$$

em que $w = \partial_*\phi_{0*}(e)$.

Agora, o elemento característico da fibração p é, por definição, a imagem da classe da aplicação identidade $\iota_n \in \pi_n(\mathbb{S}^n)$ pela composta

$$\pi_n(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{p_*^{-1}} \pi_n(X, F) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-1}(F).$$

Agora, se ρ é a aplicação de Hurewicz, temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X, A) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "\rho"'] & \pi_{n-1}(F) \arrow[d, "\rho"] \\
H_n(X, A) \arrow[r, "\partial_*"'] & H_{n-1}(F)
\end{tikzcd}$$

é comutativo, e portanto,

$$\rho(\omega) = \rho(\partial_* p_*^{-1}(\iota_n))) = \partial_*(\rho p_*^{-1}(\omega))$$

Assim, basta mostrarmos que $\rho p_*^{-1}(\omega) = \phi_{0*}(e)$.

Note que, como ϕ é uma aplicação estrutural,

$$\omega' \circ p_1 = p \circ \phi = p \circ \mu \circ (\phi_0 \times 1_F) = p \circ p_1(\phi_0 \times 1_F) = p \circ \phi_0 \circ p_1$$

donde $\omega' = p \circ \phi_0$. Agora, como ω' representa ι_n, segue que $p \circ \phi_0$ também representa ι_n. Mas,

$$\iota_n = [p \circ \phi_0] = p_*[\phi_0], \quad \text{ou seja,} \quad p_*^{-1}(\iota_n) = [\phi_0].$$

Logo, da definição da aplicação de Hurewicz, temos $\rho p_*^{-1}(\iota_n) = \phi_{0*}(e)$, o que completa a primeira parte da prova.

Suponha agora que a ação é homotopia-associativa. Então

$$\theta_*(x \cdot u) = w \cdot (x \cdot u) = (w \cdot x) \cdot u = \theta_*(x) \cdot u.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
j_*(x \cdot u) = \phi_*(e \times \alpha_*(x \cdot u)) &= \mu_*(\phi_{0*} \times 1)_*(e \times \alpha(x \cdot u)) \\
&= \mu_*(\phi_{0*}(e) \times \alpha_*(x \cdot u)) = \phi_{0*}(e) \cdot \alpha_*(x \cdot u).
\end{aligned}$$

Enquanto que

$$j_*(x) \cdot u = (\phi_{0*}(e) \cdot \alpha_*(x)) \cdot u = \phi_{0*}(e) \cdot (\alpha_*(x) \cdot u).$$

Uma vez que $j_*(x \cdot u) = j_*(x) \cdot u$ (pois o diagrama era comutativo antes de substituirmos os grupos $H_p(X, F)$ pelos grupos isomorfos $H_{p-n}(F)$), os elementos $\alpha_*(x \cdot u)$ e $\alpha_*(x) \cdot u$ tem a mesma imagem pelo isomorfismo $y \mapsto \phi_{0*}(e) \cdot y$ (pois este é a composta dos isomorfismos ϕ_* e $y \mapsto e \times y$) segue que estes elementos são iguais. □

Teorema 4.8 (naturalidade da sequência de Wang). *Suponha que*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & X' \arrow[dl, "p'"] \\ & \mathbb{S}^n & \end{tikzcd}$$

é um diagrama comutativo e que p e p' são fibrações com fibras F e F', respectivamente. Então $f : (X, F) \to (X', F')$ induz uma aplicação

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_p(F) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_0"] & H_p(X) \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d, "f_1"] & H_{p-n}(F) \arrow[r, "\theta_*"] \arrow[d, "f_2"] & H_{p-1}(F) \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H_p(F') \arrow[r, "i'_*"'] & H_p(X') \arrow[r, "\alpha'_*"'] & H_{p-n}(F') \arrow[r, "\theta'_*"'] & H_{p-1}(F') \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

entre as sequências de Wang de p e p' (isto é, o diagrama acima é comutativo). Além disso, há o diagrama comutativo dual

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H^{q-1}(F') \arrow[r, "\theta'^*"] \arrow[d, "f_0^*"] & H^{q-n}(F') \arrow[r, "\alpha'^*"] \arrow[d, "f_1^*"] & H^q(X') \arrow[r, "i'^*"] \arrow[d, "f_2^*"] & H^q(F') \arrow[r] \arrow[d, "f_0^*"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H^{q-1}(F) \arrow[r, "\theta'"'] & H^{q-n}(F) \arrow[r, "\alpha^*"'] & H^q(X) \arrow[r, "i^*"'] & H^q(F) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

5 A (co)homologia dos grupos clássicos

Nesta seção, calcularemos os anéis de cohomologia do grupo ortogonal especial $\mathbf{O}_n^+$ (com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$), do unitário $\mathbf{U}_n$, do grupo unitário especial $\mathbf{U}_n^+$, do grupo simplético $\mathbf{Sp}_n$ (com coeficientes gerais) e das variedades de Stiefel $\mathbf{V}_{m,n}$ (com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$).

Para o estudo da homologia dos grupos clássicos $\mathbf{O}_n^+$, $\mathbf{U}_n$ e $\mathbf{Sp}_n$ faremos uso das seguintes inclusões

$$\mathbf{O}_1^+ \subset \mathbf{O}_2^+ \subset \cdots \subset \mathbf{O}_n^+ \subset \mathbf{O}_{n+1}^+ \subset \cdots$$
$$\mathbf{U}_1 \subset \mathbf{U}_2 \subset \cdots \subset \mathbf{U}_n \subset \mathbf{U}_{n+1} \subset \cdots$$
$$\mathbf{Sp}_1 \subset \mathbf{Sp}_2 \subset \cdots \subset \mathbf{Sp}_n \subset \mathbf{Sp}_{n+1} \subset \cdots$$

Além disso, observe que os espaços de classes laterais $\mathbf{O}_{n+1}^+/\mathbf{O}_n^+$, $\mathbf{U}_n/\mathbf{U}_{n-1}$ e $\mathbf{Sp}_n/\mathbf{Sp}_{n-1}$ são esferas de dimensões n, $2n-1$ e $4n-1$, respectivamente.

Para um grupo de Lie compacto G, e um subgrupo fechado H deste, temos que a projeção $p : G \to G/H$ é a projeção de um fibrado ([10]). Logo, por (2.16), temos as fibrações

$$\mathbf{O}_n^+ \to \mathbf{O}_{n+1}^+ \to \mathbb{S}^n$$
$$\mathbf{U}_{n-1} \to \mathbf{U}_n \to \mathbb{S}^{2n-1}$$
$$\mathbf{Sp}_{n-1} \to \mathbf{Sp}_n \to \mathbb{S}^{4n-1}$$

Teorema 5.1. *A álgebra de Hopf $H^*(\mathbf{U}_n; A)$, com coeficientes num domínio de integridade A, é a álgebra exterior*

$$\Lambda(x_1, \ldots, x_n)$$

onde x_i é um elemento primitivo de $H^{2i-1}(\mathbf{U}_n)$.

De modo análogo prova-se

Teorema 5.2. *A álgebra de Hopf $H^*(\mathbf{Sp}_n; A)$, com coeficientes num domínio de integridade A, é a álgebra exterior*

$$\Lambda(x_1, \ldots, x_n)$$

onde x_i é um elemento primitivo de $H^{4i-1}(\mathbf{Sp}_n)$.

Demonstração do teorema (5.1). O grupo $\mathbf{U}_1$ é o grupo multiplicativo $\mathbb{S}^1$ e o teorema (5.1) é verdadeiro nesse caso. Suponha que $H^*(\mathbf{U}_{n-1})$ é como no teorema. Considere a sequência de Wang

$$\cdots \to H^{q-1}(\mathbf{U}_{n-1}) \xrightarrow{\theta^*} H^{q-2n+1}(\mathbf{U}_{n-1}) \xrightarrow{\alpha^*} H^q(\mathbf{U}_n) \xrightarrow{i^*} H^q(\mathbf{U}_n) \to \cdots$$

Agora, θ^* é uma derivação de grau $2-2n$ e portanto,

$$\theta^*(x_i) \in H^{2(i-n)+1} \quad \text{para } 1 \leq i \leq n-1.$$

Como $2(i-n)+1 < 0$ segue que $\theta^*(x_i) = 0$ para todo $1 \leq i \leq n-1$. Agora, dado um elemento da base $x_I = x_{i_1} \cdots x_{i_k} (i_k < \cdots < i_2 < i_1 < n)$ temos

$$\begin{aligned}
\theta^*(x_I) &= \theta^*(x_{i_1})x_{i_2}\cdots x_{i_k} + (-1)^{(n-1)\dim x_I} x_{i_1}\theta^*(x_{i_2}\cdots x_{i_k}) \\
&= (-1)^{(n-1)\dim x_I} x_{i_1}(\theta^*(x_{i_2})x_{i_3}\cdots x_{i_k} + (-1)^{(n-1)\dim x_{I'}} x_{i_2}\theta^*(x_{i_3}\cdots x_{i_k})) = \cdots \\
&\cdots = (-1)^z x_{i_1}\cdots x_{i_{k-2}}(\theta^*(x_{i_{k-1}})x_{i_k} + (-1)^{(n-1)\dim x_{i_{k-1}}x_{i_k}} x_{i_{k-1}}\theta^*(x_{i_k})) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, θ^* é o homomorfismo nulo. Logo, a sequência de Wang se decompõe em uma família de sequências exatas curtas

$$0 \to H^{q-2n+1}(\mathbf{U}_{n-1}) \xrightarrow{\alpha^*} H^q(\mathbf{U}_n) \xrightarrow{i^*} H^q(\mathbf{U}_{n-1}) \to 0 \tag{5.1}$$

Uma vez que $H^r(\mathbf{U}_{n-1})$ é um módulo livre para todo r, segue que $H^q(\mathbf{U}_n)$ também é um módulo livre. Além disso, $i^* : H^q(\mathbf{U}_n) \to H^q(\mathbf{U}_{n-1})$ é um isomorfismo para todo $q < 2n-1$.

Sejam $y_i \in H^{2i-1}(\mathbf{U}_n)$ a imagem inversa por i^* de $x_i (1 \leq i \leq n-1)$ e $y_n = \alpha^*(1) \in H^{2n-1}(\mathbf{U}_n)$. Os monômios $x_I = x_{i_1}\cdots x_{i_2}, (i_k < \cdots i_1 < n)$ formam uma base para $H^*(\mathbf{U}_{n-1})$ e pela exatidão da sequência (5.1), temos que os monômios y_I e $\alpha^*(x_I), (i_k < \cdots i_1 < n)$ formam uma base para $H^*(\mathbf{U}_n)$. Mas,

$$\alpha^*(x_I) = \alpha^*(x_{i_1}\cdots x_{i_2}) = \alpha^* i^*(y_{i_1}\cdots y_{i_2}) = y_n x_{i_1}\cdots x_{i_2} = y_n y_I,$$

em que a penúltima igualdade se deve ao corolário (4.4). Temos assim que $H^*(\mathbf{U}_n)$ é a álgebra exterior gerada por $y_1, \ldots, y_n$.

Por fim, mostremos que os elementos $y_1, \ldots, y_n$ são primitivos. Para y_n, note que $(\mathbf{U}_n, \mathbf{U}_{n-1})$ é um par NDR, uma vez que $(\mathbb{S}^{2n-1}, *)$ o é. Além disso, como $\mathbf{U}_{n-1} \subset \mathbf{U}_n$ são H-espaços, segue que p é uma H-fibração. Logo, $y_n = \alpha^*(1)$ é primitivo por (4.6). Para os demais y_i, considere a aplicação $i_1 : (\mathbf{U}_{n-1}, *) \to (\mathbf{U}_n, *)$ induzida por i. Temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
H^r(\mathbf{U}_n \times \mathbf{U}_n) \arrow[rrrr, "t_n"] \arrow[dr, "(i\times i)^*"] \arrow[dddrr, bend right, "\beta_n^*"'] & & & & \frac{H^r(\mathbf{U}_n\times\mathbf{U}_n)}{L_r} \arrow[dl, "\overline{i\times i}"'] \arrow[dddll, bend left, "\ell_n^{-1}"] \\
& H^r(\mathbf{U}_{n-1} \times \mathbf{U}_{n-1}) \arrow[rr, "t_{n-1}"] \arrow[dr, "\beta_{n-1}^*"] & & \frac{H^r(\mathbf{U}_{n-1}\times\mathbf{U}_{n-1})}{L_r'} \arrow[dl, "\ell_{n-1}^{-1}"] & \\
& & H^r(\mathbf{U}_{n-1} \times \mathbf{U}_{n-1}, \mathbf{U}_{n-1} \wedge \mathbf{U}_{n-1}) & & \\
& & H^r(\mathbf{U}_n \times \mathbf{U}_n, \mathbf{U}_n \wedge \mathbf{U}_n) \arrow[u, "(i_1\times i_1)^*"'] & &
\end{tikzcd}$$

obtido a partir da definição de elemento primitivo, em que $\overline{i \times i}$ é induzido por $(i \times i)^*$ (este está bem definido uma vez que $(i\times i)^* p_i^* = p_i^* i^*$) e $r < 2n-1$. Note que, como i^* é um isomorfismo, segue da fórmula de Künneth que $(i \times i)^*$ também é um isomorfismo. Além disso, uma vez que $p_i \circ (i \times i) = i \circ p_i$ temos que $(i\times i)^*(L_r) = L_r'$ e por conseguinte,

$\overline{i \times i}$ é um isomorfismo. Assim, concluímos que $(i_1 \times i_1)^*$ é um isomorfismo. Uma vez que $i^*(y_i) = x_i$ é primitivo,

$$\beta^*_{n-1}\mu^* i^*(y_i) = \beta^*_{n-1}\mu^*(x_i) = 0,$$

donde

$$(i_1 \times i_1)^* \beta^*_n \mu^*(y_i) = \beta^*_{n-1}(i \times i)^* \mu^*(y_i) = \beta^*_{n-1}\mu^* i^*(y_i) = 0.$$

Uma vez que $(i_1 \times i_1)^*$ é isomorfismo, temos $\beta^*_n \mu^*(y_i) = 0$, ou seja, y_i é primitivo.

□

Note que se A tem característica diferente de dois, então os elemento x_i tem quadrado zero devido a lei da comutatividade. Em particular, isso é verdade para $A = \mathbb{Z}$. Além disso, $H^*(\mathbf{U}_n;\mathbb{Z})$ é livre de posto finito. Logo, para todo A, $H^*(\mathbf{U}_n;A)$ é isomorfo, como álgebra, a $H^*(\mathbf{U}_n;\mathbb{Z}) \otimes A$. Tomaremos os geradores da forma $x_i \otimes 1$, onde x_i é gerador de $H^*(\mathbf{U}_n;\mathbb{Z})$.

Teorema 5.3. *A álgebra de Hopf $H_*(\mathbf{U}_n;A)$, com coeficientes em um domínio de integridade, é a álgebra exterior*

$$\Lambda(x'_1, \ldots, x'_n),$$

onde x_i é um elemento primitivo de $H_{2n-1}(\mathbf{U}_n;A)$. Em particular, a álgebra de Pontryagin de $\mathbf{U}_n$ é comutativa.

Demonstração. Pelo teorema (5.1) temos que $H_q(\mathbf{U}_n;A)$ é livre. Logo, $H_q(\mathbf{U}_n;A) \simeq \mathrm{Hom}(H^q(\mathbf{U}_n;A);A)$. Sejam $x_i \in H^{2n-1}(\mathbf{U}_n;A)$ como no teorema (5.1). Como $\{x_I = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}; i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\}$ é uma base para $H_*(\mathbf{U}_n;A)$, seja $\{x'_I\}$ sua base dual. Dadas duas sequências I e J que não tem termos em comum, seja $I + J$ a sequência obtida de $I \cup J$ arranjando seus elementos em ordem crescente. Seja também $\eta(I,J)$ o sinal da permutação

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r & k_{r+1} & \cdots & k_n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r & j_1 & \cdots & j_s \end{pmatrix},$$

em que $I = (i_1, i_2, \ldots, i_r)$, $J = (j_1, j_2, \ldots, j_s)$ e $I + J = (k_1, \ldots, k_n)$. Temos então que, para toda sequência crescente K,

$$\mu^*(x_K) = \sum_{I+J=K} \eta(I,J) x_I \times x_J.$$

De fato, uma prova explícita seria um tanto complicada. Sendo assim, daremos um exemplo que mostra como tal seria. Como x_i é primitivo, temos que $\mu^*(x_i) = p_1^*(x_i) + p_2^*(x_i)$. Assim, usando o fato de que μ^* é um homomorfismo de anéis, temos

$$\begin{aligned}
\mu^*(x_1x_2) =& \mu^*(x_1)\mu^*(x_2) = (p_1^*(x_1) + p_2^*(x_1))(p_1^*(x_2) + p_2^*(x_2)) \\
=& p_1^*(x_1)p_1^*(x_2) + p_1^*(x_1)p_2^*(x_2) + p_2^*(x_1)p_1^*(x_2) + p_2^*(x_1)p_2^*(x_2) \\
=& p_1^*(x_1x_2) + p_1^*(x_1)p_2^*(x_2) + (-1)p_1^*(x_2)p_2^*(x_1) + p_2^*(x_1x_2) \\
=& x_1y_1 \times 1 + x_1 \times x_2 - x_2 \times x_1 + 1 \times x_1x_2 \\
=& \sum_{I+J=(1,2)} \eta(I,J) x_I \times x_J.
\end{aligned}$$

Agora, sejam P e Q sequências fixadas. Calculemos $x'_P \cdot x'_Q$ encontrando seu índice de Kronecker com cada elemento básico x_K. Temos,

$$\langle x_K, x'_P \cdot x'_Q\rangle = \langle x_K, \mu_*(x'_P \times x'_Q)\rangle = \langle \mu^*(x_K), x'_P \times x'_Q\rangle = \sum_{I+J=K} \eta(I,J)\langle x_I \times x_J, x'_P \times x'_Q\rangle.$$

Agora, (veja [1])

$$\langle x_I \times x_J, x'_P \times x'_Q\rangle = (-1)^{|x_J||x'_P|}\langle x_I, x'_P\rangle \otimes \langle x_J, x'_Q\rangle.$$

Assim, temos que $\langle x_K, x'_P \cdot x'_Q\rangle \neq 0$ se, e só se, $I + J = K$, $I = P$ e $J = Q$ e neste caso,

$$\langle x_K, x'_P \cdot x'_Q\rangle = (-1)^{pq}\eta(P,Q),$$

em que p e q são os comprimentos das sequências P e Q respectivamente (de fato, como x_i tem dimensão $2i-1$, x_I tem dimensão $2t-i$ para algum t e i o comprimento de I). Portanto,

$$x'_P \cdot x'_Q = \begin{cases} (-1)^{pq}\eta(P,Q)x'_{P+Q}, & \text{se } P \cap Q = \emptyset \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{5.2}$$

Permutando P e Q obtemos, de (5.2),

$$x'_Q \cdot x'_P = (-1)^{pq}\eta(Q,P)x'_{P+Q} = \eta(Q,P)\left(\frac{1}{\eta(P,Q)}x'_P \cdot x'_Q\right) = (-1)^{pq}x'_P \cdot x'_Q.$$

E portanto a álgebra é comutativa. Além disso, a equação (5.2) nos dá que ${x'_i}^2 = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Para mostrar que $H_*(\mathbf{U}_n; A)$ é uma álgebra exterior, basta mostrarmos que os monômios x'_K formam uma base. Para isto, é suficiente mostrar que

$$x'_K = x'_{i_k} \cdots x'_{i_2} \cdot x'_{i_1}, \quad K = (i_1, i_2, \ldots, i_k).$$

É claro que isto é verdade para $k = 1$. Seja $J = (i_2, \ldots, i_k)$ e suponha que $x'_J = x'_{i_k} \cdots x'_{i_3} \cdot x'_{i_2}$. Então, por (5.2),

$$x'_J \cdot x'_{i_1} = (-1)^{k-1}\eta(J,(i_1))x'_K = (-1)^{k-1}(-1)^{k-1}x'_K = x'_K.$$

Como gostaríamos. Para completar a prova, basta mostrarmos que x'_i é primitivo. Para isso, considere Δ a aplicação diagonal de $\mathbf{U}_n$ e mostremos que $\Delta_*(x'_i) = x'_i \times 1 + 1 \times x'_i$. Uma vez que os elementos $x_I \times x_J$ formam uma base para $H^*(\mathbf{U}_n \times \mathbf{U}_n; A)$, basta calcularmos o índice de Kronecker $\Delta_*(x'_i)$. Assim,

$$\langle x_I \times x_J, \Delta_*(x'_i)\rangle = \langle \Delta^*(x_I \times x_J), x'_i\rangle = \langle x_I x_J, x'_i\rangle.$$

Agora, se $I \cap J \neq \emptyset$ então $x_I x_J = 0$, e caso contrário, $x_I x_J = x_{I+J}$. Logo, se $I \cap J \neq \emptyset$ ou $I + J \neq \{i\}$ então $\langle x_I \times x_J, \Delta_*(x'_i)\rangle = 0$. Portanto, os únicos índices não nulos são

$$\begin{aligned} \langle x_i \times 1, \Delta_*(x'_i)\rangle &= \langle x_i, x'_i\rangle = 1 \\ \langle 1 \times x_i, \Delta_*(x'_i)\rangle &= \langle x_i, x'_i\rangle = 1, \end{aligned}$$

donde

$$\Delta_*(x'_i) = (x_i \times 1)' + (1 \times x_i)'.$$

Agora, $\langle x_i \times 1, x'_i \times 1\rangle = \langle x_i, x'_i\rangle \otimes \langle 1, 1\rangle = 1$ e por conseguinte, $(x_i \times 1)' = x'_i \times 1$. Analogamente temos que $(1 \times x_i)' = 1 \times x'_i$ o que mostra que $\Delta_*(x'_i) = x'_i \times 1 + 1 \times x'_i$ e completa a prova. □

De modo análogo temos

Teorema 5.4. *A álgebra de Hopf $H_*(\mathbf{Sp}_n; A)$, com coeficientes em um domínio de integridade, é a álgebra exterior*

$$\Lambda(x'_1, \dots, x'_n),$$

onde x_i é um elemento primitivo de $H_{4n-1}(\mathbf{Sp}_n; A)$. Em particular, a álgebra de Pontryagin de $\mathbf{Sp}_n$ é comutativa.

Também precisaremos destes resultados para o grupo unitário especial $\mathbf{U}_n^+$. Estes são obtidos facilmente repetindo-se as provas do caso $\mathbf{U}_n$, começando por $\mathbf{U}_2^+ \simeq \mathbb{S}^3$ e utilizando $\mathbf{U}_n^+/\mathbf{U}_{n-1}^+ \simeq \mathbb{S}^{2n-1}$.

Teorema 5.5. *O anel de cohomologia $H^*(\mathbf{U}_n^+; A)$ é a álgebra exterior gerada pelos elementos primitivos $u_i \in H^{2i-1}(\mathbf{U}_n^+; A)$ para $i = 2, 3, \dots, n$*

Teorema 5.6. *O anel de Pontryagin $H_*(\mathbf{U}_n^+; A)$ é a álgebra exterior gerada pelos elementos primitivos $u'_i \in H_{2i-1}(\mathbf{U}_n^+; A)$ para $i = 2, 3, \dots, n$.*

No §10, capítulo IV de [12] são construídas, para cada n, imersões $G_{n+1} : \mathbf{SP}^n(\mathbb{C}) \to \mathbf{U}_{n+1}^+$ satisfazendo

(i) Se $p : \mathbf{U}_{n+1}^+ \to \mathbb{S}^{2n+1}$ é a restrição de $p_{n+1} : \mathbf{U}_n \to \mathbb{S}^{2n+1}$, então $p \circ G_{n+1} : (\mathbf{SP}^n(\mathbb{C}), \mathbf{SP}^{n-1}(\mathbb{C})) \to (\mathbb{S}^{2n+1}, *)$ é um homeomorfismo relativo.

(ii) $G_{n+1|\mathbf{SP}^{n-1}(\mathbb{C})} = G_n : \mathbf{SP}^{n-1}(\mathbb{C}) \to \mathbf{U}_n^+$.

e $g_n : \mathbf{P}^n \to \mathbf{O}_{n+1}^+$ satisfazendo

(i) Se $p : \mathbf{O}_{n+1}^+ \to \mathbb{S}^n$, então $p \circ g_n : (\mathbf{P}^n, \mathbf{P}^{n-1}) \to (\mathbb{S}^n, *)$ é um homeomorfismo relativo.

(ii) $g_{n|\mathbf{P}^{n-1}} = g_{n-1} : \mathbf{P}^{n-1} \to \mathbf{O}_n^+$.

Onde $\mathbf{P}^n$ denota o espaço projetivo de dimensão n.

Faremos uso dessas imersões nas provas dos resultados (5.7 - 5.9).

Lema 5.7. *O homomorfismo $G_{n+1}^* : H^*(\mathbf{U}_{n+1}^+) \to H^*(\mathbf{SP}^n)$ é um epimorfismo. Mais ainda, G_{n+1}^* é um isomorfismo entre o espaço P^* dos elementos primitivos de $H^*(\mathbf{U}_{n+1}^+)$ e $H^*(\mathbf{SP}^n)$.*

Demonstração. Sabemos que os elementos $u_2, u_3, \dots, u_{n+1}$ são primitivos. Segue por argumento análogo ao usado no caso do grupo ortogonal (veja demonstração do teorema (5.8)), que esses elementos formam uma base para P^* como um A-módulo.

Temos que

$$H^q(\mathbf{P}^n(\mathbb{C})) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 2p, 0 \leq p \leq n+1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, usando Mayer-Vietoris para cohomologia obtemos que

$$H^q(\mathbf{SP}^n(\mathbb{C})) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 2p+1, 0 \leq p \leq n+1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, para mostrar que P^* é isomorfo a $H^*(\mathbf{SP}^n(\mathbb{C}))$ basta mostrar que a imagem de cada vetor da base $\{u_2, \ldots, u_{n+1}\}$ de P^* é um vetor da base de $H^*(\mathbf{SP}^n(\mathbb{C}))$. Faremos a prova por indução sobre n. O caso $n = 1$ temos que G_2 é um homeomorfismo e portanto o resultado se verifica. Suponha agora que o resultado vale para G_n. Temos que o homomorfismo $i^* : H^*(\mathbf{U}^+_{n+1}) \to H^*(\mathbf{U}^+_n)$ leva os geradores $u_2, \ldots, u_n$ de $H^*(\mathbf{U}^+_{n+1})$ nos geradores de mesmo nome de $H^*(\mathbf{U}^+_n)$. Além disso, $u_{n+1} = \alpha^*(1)(= p^*(s^{2n+1})$ pela equação (4.1)) segue da propriedade (ii) de G_n que o diagrama

$$\begin{tikzcd} H^{2i-1}(\mathbf{U}^+_{n+1}) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "G^*_{n+1}"'] & H^{2i-1}(\mathbf{U}^+_n) \arrow[d, "G^*_n"] \\ H^{2i-1}(\mathbf{SP}^n(\mathbb{C})) \arrow[r, "i_1^*"] & H^{2i-1}(\mathbf{SP}^*(\mathbb{C})) \end{tikzcd}$$

é comutativo, em que i_1 é a inclusão.

Temos que i^* é isomorfismo para $i \leq n$. Além disso, pela propriedade (i) de G_n, temos que $H^q(\mathbf{SP}^n, \mathbf{SP}^{n-1}) \simeq H^q(\mathbb{S}^{2n+1}, *)$ e portanto, da sequência exata do par $(\mathbb{SP}^n, \mathbf{SP}^{n-1})$, temos que i_1^* é isomorfismo para $i \leq n$. Logo, da hipótese de indução, temos que $G^*_{n+1}(u_j)$ é gerador de $H^{2j-1}(\mathbf{SP}^n(\mathbb{C}))$ para $j \leq n$. Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} H^{2n+1}(\mathbb{S}^{2n+1}, *) \arrow[r, "(p\circ G_{n+1})^*"] \arrow[d, "p^*"'] & H^{2n+1}(\mathbf{SP}^n(\mathbb{C}), \mathbf{SP}^{n-1}(\mathbb{C})) \arrow[d, "j^*"] \\ H^{2n+1}(\mathbf{U}^+_{n+1}) \arrow[r, "G^*_{n+1}"'] & H^{2n+1}(\mathbf{SP}^n(\mathbb{C})). \end{tikzcd}$$

Pela propriedade (i) para G_{n+1} temos que $(p \circ G_{n+1})^*$ é isomorfismo. Além disso , analisando a sequência exata do par $(\mathbf{SP}^n(\mathbb{C}), \mathbf{SP}^{n-1}(\mathbb{C}))$ vemos que j^* também é isomorfismo. Logo, $G^*_{n+1}p^*(s^{2n+1}) = G^*_{n+1}(\alpha^*(1)) = G^*_{n+1}(u_{n+1})$ é gerador de $H^{2n+1}(\mathbf{SP}^n(\mathbb{C}))$ o que completa a prova. □

Sejam $A = \{A_j\}$ uma álgebra sobre $\mathbb{Z}_2$ e $(x_1, x_2, \ldots)$ uma sequência (possivelmente finita) de elementos homogêneos de A(isto é, $x_i \in A_j$ para algum j). Dizemos que os elementos x_i formam um *sistema simples de geradores* se os monômios $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$, em que $i_1 > i_2 > \cdots > i_k$, formam uma base aditiva para A.

Teorema 5.8. *A álgebra de cohomologia $H^*(\mathbf{O}^+_{n+1}; \mathbb{Z}_2)$ possui um sistema simples de geradores $x_1, \ldots, x_n$ primitivos e tais que*

$$x_i^2 = \begin{cases} x_{2i}, & 2i \leq n, \\ 0, & 2i > n. \end{cases}$$

Os elementos $x_1, \ldots, x_n$ formam uma base para o espaço $\mathcal{M}^n$ dos elementos primitivos de $H^*(\mathbf{O}^+_{n+1}; \mathbb{Z}_2)$. Além disso, o homomorfismo g_n^* leva $\mathcal{M}^n$ isomorficamente sobre $H^*(\mathbf{P}^n; \mathbb{Z}_2)$.

Teorema 5.9. *A álgebra de Pontryagin $H_*(\mathbf{O}^+_{n+1}; \mathbb{Z}_2)$ é a álgebra exterior*

$$\Lambda(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n),$$

onde x'_i é um elemento homogêneo de grau i. Para i impar, os elementos x_i são primitivos e formam uma base para o espaço $\mathcal{M}_n$ de elementos primitivos.

Provaremos os teoremas (5.8) e (5.9) por indução silmultânea.

Demonstração. Se $n = 1$, $\mathbf{O}^+_{n+1} = \mathbb{S}^1$ e os teoremas (5.8) e (5.9) se verificam. Assuma a veracidade dos teoremas para $\mathbf{O}^+_n$. Considere a sequência de Wang em cohomologia

$$\cdots \to H^{q-1}(\mathbf{O}^+_n) \xrightarrow{\theta^*} H^{q-n}(\mathbf{O}^+_n) \xrightarrow{\alpha^*} H^q(\mathbf{O}^+_{n+1}) \xrightarrow{i^*} H^q(\mathbf{O}^+_n) \to \cdots$$

Para $i < n-1$, $\theta^*(x_i) \in H^{i-n+1}(\mathbf{O}^+_n) = 0$. Afirmamos que $\theta^*(x_{n-1}) = 0$. De fato, se $\theta^*(x_{n-1}) \neq 0$. Então, $\theta^*(x_{n-1}) = 1 \in H^0(\mathbf{O}^+_n)$ e pela equação (4.1), $p^*(s^n) = \alpha^*(1) = \alpha^*\theta^*(x_{n-1}) = 0$. A aplicação $(p \circ g_n) : (P^n, P^{n-1}) \to (\mathbb{S}^n, *)$ é um homeomorfismo relativo e portanto, $g_n^* \circ p^*$ é um isomorfismo e $g_n^* p^* s^n = 0$, o que é um absurdo. Assim, θ^* se anula em $\{x_i; 1 \leq i \leq n-1\}$ e portanto, como θ^* é uma derivação, $\theta^* = 0$. Temos então que a sequência de Wang se decompõe em uma família de sequências exatas curtas

$$0 \to H^{q-n}(\mathbf{O}^+_n) \xrightarrow{\alpha^*} H^q(\mathbf{O}^+_{n+1}) \xrightarrow{i^*} H^q(\mathbf{O}^+_n) \to 0$$

Logo, como no caso do grupo unitário, temos que, denominando a imagem inversa de x_i em $H^*(\mathbf{O}^+_{n+1})$ por x_i e pondo $x_n = \alpha^*(1)$, temos que $\{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ é um sistema simples de geradores para $H^*(\mathbf{O}^+_{n+1})$. Vimos que $g_n^*(x_n) = g_n^* p^*(s^n)$ é o elemento não nulo u^n de $H^n(\mathbf{P}^n)$ e segue da hipótese de indução e da propriedade (ii) de g_n que $g_n^*(x_q) = u^q$ para $q = 1, \ldots, n-1$. Além disso, segue por argumento análogo aquele usado no caso do grupo unitário, que os elementos $x_i, 1 \leq i \leq n$ são primitivos.

Seja $\{x'_I\}$ a base dual para $H_*(\mathbf{O}^+_{n+1})$. Mostremos que $H_*(\mathbf{O}^+_{n+1}) = \Lambda(x'_1, \ldots, x'_n)$. De fato, repetindo a prova do teorema (5.3) obtemos que os elementos x'_I satisfazem a relação (5.2) e portanto, $H_*(\mathbf{O}^+_{n+1}) = \Lambda(x'_1, \ldots, x'_n)$.

Podemos explorar agora a dualidade entre as álgebras de Hopf $H = H_*(\mathbf{O}^+_{n+1})$ e $H^* = H^*(\mathbf{O}^+_{n+1})$. Se D e D^* são os espaços dos elementos decomponíveis de H e H^*, respectivamente, temos que $\mathcal{M}^n$ é o espaço dual de $Q = H/D$ e M_n é o espaço dual de $Q^* = H^*/D^*$.

Note que, se $|I| \geq 2$, então $x_I \in \operatorname{Im} \mu_*$ e portanto é decomponível. Logo, o espaço gerado pelos $x_I, |I| \geq 2$ e por 1 está contido em D. Logo, se $q > n$, $H_q/D_q = 0$. Caso contrário, H_q/D_q tem no máximo um gerador, a saber x'_q. Agora, como $(\mathcal{M}^n)_q \neq 0$, segue que x'_q não é decomponível e que $(\mathcal{M}^n)_q$ é gerado por x_q. Concluímos assim que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ é uma base para $\mathcal{M}^n$. Uma vez que o espaço $\mathcal{M}^n$ é isomorfo a $H^*(\mathbf{P}^n)$ por g_n^*, obtemos o desejado.

O elemento x_q^2 é primitivo, uma vez que

$$\mu_*(x_q^2) = (\mu^*(x_q))^2 = (p_1^*(x_q) + p_2^*(x_q)) = p_1^*(x_q^2) + p_2^*(x_q^2).$$

Logo, $x_q^2 \in \mathcal{M}^n$. Além disso, como $g_n^* : \mathcal{M}^n \to H^*(\mathbf{P}^n; \mathbb{Z}_2)$ é um isomorfismo, temos que $g_n^*(x_q) = u^q$. Agora, como $H^*(\mathbf{P}^n; \mathbb{Z}_2)$ é a álgebra polinomial truncada $\mathbb{Z}_2(u)/\langle u^{n+1}\rangle$ temos que

$$g_n^*(x_q^2) = (g_n^*(x_q))^2 = (u^q)^2 = u^{2q}.$$

Como g_n^* é isomorfismo, segue que $x_q^2 = x_{2q}$ se $2q \leq n$ e $x_q^2 = 0$ se $2q > n$. Isto completa a prova do teorema (5.8).

Mostremos agora que, se i é impar, x'_i é primitivo. Como no caso do grupo unitário, basta analisarmos o índice $\langle x_I \times x_J, \Delta_*(x'_i)\rangle = \langle x_I \cdot x_J, x'_i\rangle$. Se $|I| + |J| \geq 2$, $\langle x_I \cdot x_J, x'_i\rangle = \langle x_{I+J}, x'_i\rangle = 0$. Temos também que

$$\langle x_i \times 1, \Delta_*(x'_i)\rangle = \langle x_i, x'_i\rangle = 1$$
$$\langle 1 \times x_i, \Delta_*(x'_i)\rangle = \langle x_i, x'_i\rangle = 1.$$

Concluímos assim que x'_i é primitivo.

Por fim, lembrando que x'_I com $|I| \leq 2$ e x'_{2l} são decomponíveis, uma vez que, se $K + J = I$ é uma decomposição não trivial, $x'_I = x'_K \cdot x'_J = \Delta_*(x'_K \times x'_J)$ e $x'_{2l} = \Delta_*(x_l \times x_l)$. Temos então, utilizando a dualidade entre $\mathcal{M}_n$ e H^*/D^*, que $\mathcal{M}_n$ é gerado pelos x'_i com i impar.

□

De forma análogo podemos, calcular o anel de cohomologia mod 2 das variedades de Stiefel

$$\mathbf{V}_{n,m} = \frac{\mathbf{O}_n^+}{\mathbf{O}_{n-m}^+}.$$

Teorema 5.10. *Seja $p : \mathbf{O}_n^+ \to \mathbf{V}_{n,m}$ a fibração natural. Então $p^* : H^*(\mathbf{V}_{n,m}; \mathbb{Z}_2) \to H^*(\mathbf{O}_n^+; \mathbb{Z}_2)$ é um monomorfismo, e sua imagem é a subalgebra de $H^*(\mathbf{O}_n^+; \mathbb{Z}_2)$ gerada por $x_{n-m}, \ldots, x_{n-1}$.*

Demonstração. Faremos a prova por indução sobre n. Se $n = 2$, então $\mathbf{V}_{2,1} = \mathbf{O}_2^+ = \mathbb{S}^1$ e o resultado se verifica. Assuma que o teorema se verifica para $\mathbf{V}_{n,m-1}$. Considere o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{O}_{n+1}^+ \arrow[rr, "p'"] \arrow[dr, "q"'] & & \mathbf{V}_{n+1,m} \arrow[dl, "\sigma"] \\
& \mathbb{S}^n &
\end{tikzcd}$$

em que p' restrito à $\mathbf{O}_n^+$ é a fibração $p : \mathbf{O}_n^+ \to \mathbf{V}_{n,m-1}$ e σ é a projeção natural. Pela naturalidade da sequência de Wang temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{q-1}(\mathbf{V}_{n,m-1}) \arrow[r, "\theta_\sigma^*"] \arrow[d, "p^*"] & H^{q-n}(\mathbf{V}_{n,m-1}) \arrow[r, "\alpha_\sigma^*"] \arrow[d, "p^*"] & H^q(\mathbf{V}_{n+1,m}) \arrow[r, "i_\sigma^*"] \arrow[d, "p'^*"] & H^q(\mathbf{V}_{n,m-1}) \arrow[r] \arrow[d, "p^*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^{q-1}(\mathbf{O}_n^+) \arrow[r, "\theta_q^*"'] & H^{q-n}(\mathbf{O}_n^+) \arrow[r, "\alpha_q^*"'] & H^q(\mathbf{O}_{n+1}^+) \arrow[r, "i_q^*"'] & H^q(\mathbf{O}_n^+) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Vimos na prova do teorema anterior que $\theta_q^* = 0$. Logo, $p^*\theta_\sigma^* = \theta_q^* p^* = 0$. Como, por hipótese de indução, p^* é um monomorfismo, temos que $\theta_\sigma^* = 0$ e portanto a sequência de Wang para a fibração q se decompõe em uma família de sequências exatas curtas e temos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{q-n}(\mathbf{V}_{n,m-1}) \arrow[r, "\alpha_\sigma^*"] \arrow[d, "p^*"] & H^q(\mathbf{V}_{n+1,m}) \arrow[r, "i_\sigma^*"] \arrow[d, "p'^*"] & H^q(\mathbf{V}_{n,m-1}) \arrow[r] \arrow[d, "p^*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^{q-n}(\mathbf{O}_n^+) \arrow[r, "\alpha_q^*"'] & H^q(\mathbf{O}_{n+1}^+) \arrow[r, "i_q^*"'] & H^q(\mathbf{O}_n^+) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Assim, pelo lema dos cinco, temos que p'^* é um monomorfismo. Por fim, temos que a sequência

$$0 \to p^*(H^{r-n}(\mathbf{V}_{n,m-1})) \xrightarrow{\alpha_q^*} p'^*(H^r(\mathbf{V}_{n+1,m})) \xrightarrow{i_q^*} p^*(H^r(\mathbf{V}_{n,m-1})) \to 0$$

é exata. Logo, por argumento análogo ao utilizado na prova do teorema (5.1) obtemos que $(x_{n+1-m}, \ldots, x_n)$ é um sistema simples de geradores para $p'^*(H^*(\mathbf{V}_{n+1,m}))$ o que completa a prova. □

Corolário 5.11. *A álgebra* $H^*(\mathbf{V}_{n,m};\mathbb{Z}_2)$ *possui um sistema simples de geradores* $(x_{n-m},\ldots,x_{n-1})$.

Um raciocínio semelhante nos dá resultados similares para as variedades de Stiefel complexas e quaterniônicas.

6 O teorema do isomorfismo de Thom e a sequência de Gysin

Quando uma fibração $p : X \to B$ possui fibra com o mesmo tipo de homotopia de uma esfera e é orientável, obtemos o teorema de isomorfismo de Thom $H^*(B) \simeq H^{p+n+1}(\hat{X}, X)$, onde $\hat{X}$ é o mapping cylinder de p. Obtemos então uma sequência exata encontrada por W. Gysin em 1941, relacionando os grupos de homologia de X e B.

Seja $p : X \to B$ uma fibração com fibra F e espaço base conexo por caminhos. Se F tem o mesmo tipo de homotopia que a esfera $\mathbb{S}^n (n \geq 1)$ dizemos que a fibração p é n-esférica.

Seja A um PID. Se $p : X \to B$ é uma fibração n-esférica, sejam $\hat{X}$ o mapping cylinder de p e $\hat{p} : \hat{X} \to B$ a projeção.

Definição 6.1. *Uma classe de Thom para p é um elemento $u \in H^{n+1}(\hat{X}, X; A)$ cuja imagem pelo homomorfismo $H^{n+1}(\hat{X}, X; A) \xrightarrow{i^*} H^{n+1}(\hat{F}, F; A)$, i a inclusão, gera o módulo livre $H^{n+1}(\hat{F}, F; A)$. A fibração p é dita A-orientável se existe uma classe de Thom para p.*

Como vimos no teorema (2.23) o grupo $\pi_1(B)$ age sobre $H_n(F; \mathbb{Z})$. Esta ação induz uma ação de $\pi_1(B)$ sobre $\mathrm{Hom}(H_n(F; \mathbb{Z}); A)$. Temos então o seguinte resultado, para o qual não apresentaremos uma prova, uma vez que esta foge do escopo deste trabalho.

Proposição 6.2. *O homomorfismo i^* é um monomorfismo. Além disso, este é um isomorfismo se, e somente se, $\pi_1(B)$ age trivialmente em $\mathrm{Hom}(H_n(F; \mathbb{Z}); A)$.*

Proposição 6.3. *Se p é $\mathbb{Z}$-orientável, então é A-orientável para todo PID A.*

Demonstração. Considere $j : \mathbb{Z} \to A$ o homomorfismo definido por $j(1) = 1$. Temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
H^{n+1}(\hat{X}, X; A) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d] & H^{n+1}(\hat{F}, F; A) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}(H_{n+1}(\hat{X}, X); A) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(i_*)"] & \mathrm{Hom}(H_{n+1}(\hat{F}, F); A) \\
\mathrm{Hom}(H_{n+1}(\hat{X}, X); \mathbb{Z}) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(i_{0*})"] \arrow[u, "\bar{j}"] & \mathrm{Hom}(H_{n+1}(\hat{F}, F); \mathbb{Z}) \arrow[u, "\bar{j}"'] \\
H^{n+1}(\hat{X}, X; \mathbb{Z}) \arrow[r, "i_0^*"'] \arrow[u] & H^{n+1}(\hat{F}, F; \mathbb{Z}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

em que as setas verticais sem nome são isomorfismos dados pelo teorema dos coeficientes universais. Como p é $\mathbb{Z}$-orientável, existe $u \in \mathrm{Hom}(H_{n+1}(\hat{X}, X); \mathbb{Z})$ tal que $g = \mathrm{Hom}(i_{0*})(u)$ gera $\mathrm{Hom}(H_{n+1}(\hat{F}, F); \mathbb{Z})$ como módulo livre. Considere $u' = \bar{j}(u)$ e seja $z \in H_{n+1}(\hat{F}, F)$ um gerador (note que podemos identificar $H_{n+1}(\hat{F}, F)$ com $\mathbb{Z}$ pois p é n-esférica). Devemos ter então que $g(z) = \pm 1$. Mostremos que $\mathrm{Hom}(i_*)(u')$ gera $\mathrm{Hom}(H_{n+1}(\hat{F}, F); A)$ como módulo. De fato, dado $y \in \mathrm{Hom}(H_{n+1}(\hat{F}, F); A)$ seja $\beta = y(z)$. Como

$$\mathrm{Hom}(i_*)(u') = \mathrm{Hom}(i_*)(\bar{j}(u)) = \bar{j}(\mathrm{Hom}(i_*)(u)) = \bar{j}g$$

temos $\mathrm{Hom}(i_*)(u')(z) = \bar{j}g(z) = \pm 1 \in A$. Logo, se $t = \mp\mathrm{Hom}(i_*)(u')(z)$, temos $y = t\beta\mathrm{Hom}(i_*)(u')$ e o resultado segue. □

Sejam B_0 um subespaço fechado de B, $X_0 = p^{-1}(B_0)$ e $\hat{X}_0 = \hat{p}^{-1}(B_0)$. Os produtos cup e cap dão origem aos homomorfismos

$$H^{n+1}(\hat{X}, X; A) \otimes H^p(\hat{X}, \hat{X}_0; M) \to H^{n+1+p}(\hat{X}, \hat{X}_0 \cup X; M)$$
$$H_p(\hat{X}, \hat{X}_0 \cup X; M) \otimes H^{n+1}(\hat{X}, X; A) \to H_{p-n-1}(\hat{X}, \hat{X}_0; M)$$

em que M é um A-modulo. Em particular, cada elemento $u \in H^{n+1}(\hat{X}, X; A)$ determina homomorfismos

$$u\smile : H^p(\hat{X}, \hat{X}_0; M) \to H^{n+1+p}(\hat{X}, \hat{X}_0 \cup X; M)$$
$$\frown u : H_p(\hat{X}, \hat{X}_0 \cup X; M) \to H_{p-n-1}(\hat{X}, \hat{X}_0; M)$$

Teorema 6.4 (do isomorfismo de Thom)**.** *Se $p : X \to B$ é uma fibração n-esférica A-orientável com classe de Thom $u \in H^{n+1}(\hat{X}, X; A)$ então, para cada subespaço fechado B_0 de B e qualquer módulo de coeficientes M, os homomorfismos $u\smile$ e $\frown u$ são isomorfismos.*

Faremos a prova em passos. Primeiramente, observe que se u é uma classe de Thom para a fibração $p : X \to B$ e B_0 é um subespaço fechado de B, então a imagem de u_0 de u pelo homomorfismo $H^{n+1}(\hat{X}, X; A) \to H^{n+1}(\hat{X}_0, X_0; A)$, induzido pela inclusão, é uma classe de Thom para a fibração $p_0 = p_{|X_0} : X_0 \to B_0$. De fato, temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
(\hat{X}_0, X_0) \arrow[rr, "j"] & & (\hat{X}, X) \\
& (\hat{F}, F) \arrow[ul, "i"] \arrow[ur, "k"'] &
\end{tikzcd}$$

Por hipótese, $k^*(u)$ gera $H^{n+1}(\hat{F}, F; A)$. Agora, $k^*(u) = (j \circ i)^*(u) = i^*(j^*(u)) = i^*(u_0)$.

Lema 6.5. *Se dois dos três homomorfismos*

$$\frown u_0 : H_p(\hat{X}_0, X_0; M) \to H_{p-n-1}(\hat{X}_0; M)$$
$$\frown u : H_p(\hat{X}, X; M) \to H_{p-n-1}(\hat{X}; M)$$
$$\frown u : H_p(\hat{X}, \hat{X}_0 \cup X; M) \to H_{p-n-1}(\hat{X}, \hat{X}_0; M)$$

são isomorfismos para todo p, então o terceiro também é. Dualmente, se dois dos três homorfismos

$$
\begin{aligned}
u_0\smile :&H^p(\hat{X}_0;M) \to H^{n+1+p}(\hat{X}_0, X_0; M)\\
u\smile :&H^p(\hat{X};M) \to H^{n+1+p}(\hat{X}, X; M)\\
u\smile :&H^p(\hat{X},\hat{X}_0;M) \to H^{n+1+p}(\hat{X}, \hat{X}_0\cup X; M)
\end{aligned}
$$

são isomorfismo, então o terceiro também é.

Demonstração. Considere o diagrama abaixo, que incorpora as sequências de homologia do par $(\hat{X},\hat{X}_0)$ e a terna $(\hat{X},\hat{X}_0\cup X, X)$,

$$
\begin{tikzcd}
 & H_p(\hat{X},\hat{X}_0;M) \arrow[d, "k_*"'] \arrow[dr, "l_*"] & & & \\
\cdots \arrow[r] & H_p(\hat{X}_0\cup X, X;M) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\phi"'] & H_p(\hat{X},X;M) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "\frown u"'] & H_p(\hat{X},\hat{X}_0\cup X;M) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\frown u"'] & {} \\
\cdots \arrow[r] & H_{p-n-1}(\hat{X}_0;M) \arrow[r, "i'_*"'] & H_{p-n-1}(\hat{X};M) \arrow[r, "j'_*"'] & H_{p-n-1}(\hat{X},,\hat{X}_0;M) \arrow[r, "\partial'"'] & {}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & H_{p-1}(\hat{X}_0,X_0;M) \arrow[d, "k_*"'] \arrow[dr, "l_*"] & & \\
{} \arrow[r, "\partial"] & H_{p-1}(\hat{X}_0\cup X, X;M) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\phi"'] & H_{p-1}(\hat{X},X;M) \arrow[r] \arrow[d, "\frown u"] & \cdots \\
{} \arrow[r, "\partial'"'] & H_{p-n-2}(\hat{X}_0;M) \arrow[r, "i'_*"'] & H_{p-n-2}(\hat{X};M) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

em que k, i e l são as inclusões apropriadas. Como $(\hat{X}_0, X_0)$ é um par NDR, temos que $\{\hat{X}_0, X_0\}$ é um par excisivo e portanto k_* é um isomorfismo. Definimos ϕ pela equação

$$\phi k_* = \frown u_0.$$

O resultado seguirá então do lema dos cinco, uma vez verificada a comutatividade do diagrama acima.

A comutatividade do primeiro e segundo retângulos segue da naturalidade do produto cap. Basta então verificarmos o retângulo envolvendo os operadores de bordo.

De fato, temos (veja [1], 12.10)

$$\partial'(z\frown u) = (-1)^{n+1}k_*^{-1}\partial z \frown u_0.$$

Agora, $\phi\partial(z) = k_*^{-1}\partial z\frown u_0$ e portanto o diagrama comuta a menos de sinal, o que é o suficiente para aplicarmos o lema dos cinco.

A prova para o homomorfismo $u\smile$ é similar. □

Como consequência do lema anterior temos que, para provar o teorema (6.4), basta provarmos o caso particular $B_0 = \emptyset$.

Lema 6.6. *Se* $\frown u : H_p(\hat{X}, X; A) \to H_{p-n-1}(\hat{X}; A)$ *é um isomorfismo para todo* p*, então*

$$\frown u : H_p(\hat{X}, X; M) \to H_{p-n-1}(\hat{X}; M)$$

e

$$u\smile : H^p(\hat{X}; M) \to H^{n+1+p}(\hat{X}, X; M)$$

são isomorfismos para todo p *e todo* A*-módulo* M*.*

Demonstração. Seja $U \in Z^{n+1}(\hat{X}, X; A)$ um representante para a classe u. Considere a transformação de cadeias $\phi_A : \Delta(\hat{X}, X; A) \to \Delta(\hat{X}; A)$ dada por $\phi_A(c) = c \frown U$. Por hipótese, ϕ_A induz um isomorfismo em homologia. Pela naturalidade do teorema dos coeficientes universais temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H_p(\hat{X}, X; A) \otimes M \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{A*}\otimes 1_*"] & H_p(\hat{X}, X; M) \arrow[r] \arrow[d, "(\phi_A\otimes 1)_*"] & \mathrm{Tor}(H_{p-1}(\hat{X}, X; A), M) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\phi}_A"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H_{p-n-1}(\hat{X}; A) \arrow[r] & H_{p-n-1}(\hat{X}; M) \arrow[r] & \mathrm{Tor}(H_{p-n-1}(\hat{X}; A), M) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Como a primeira e terceira setas verticais são isomorfismos, segue que $(\phi_A \otimes 1)_*$ é um isomorfismo. Mostremos que $(\phi_A \otimes 1)_* = \frown u$. De fato, seja $c = \sum_\sigma \sigma \otimes m_\sigma \in Z_q(\hat{X}, X; M)$. Então,

$$(\phi_A \otimes 1)(c) = \sum_\sigma m_\sigma \otimes \phi_A(\sigma) = \sum_\sigma m_\sigma \otimes \sigma \frown U = \left(\sum_\sigma m_\sigma \otimes \sigma\right) \frown U = c \frown U$$

Logo, $(\phi_A \otimes 1)_*[c] = [(\phi_A \otimes 1)c] = [c \frown U] = [c] \frown u$ e portanto $\frown u : H_p(\hat{X}, X; M) \to H_{p-n-1}(\hat{X}; M)$ é um isomorfismo.

Para cohomologia, temos que

$$\mathrm{Hom}(\phi_A) : \mathrm{Hom}(\Delta(\hat{X}; A), M) \to \mathrm{Hom}(\Delta(\hat{X}, X; A), M)$$

induz um isomorfismo em homologia, e portanto ϕ_A induz um isomorfismo em cohomologia. Agora, para todo $\lambda \in \Delta(\hat{X}, X; A)$ e todo $\sigma \in \mathrm{Hom}(\Delta(\hat{X}; A), M)$, temos

$$\langle \mathrm{Hom}(\phi_A)(\sigma), \lambda\rangle = \langle \sigma \circ \phi_A, \lambda\rangle = \langle \sigma, \phi_A(\lambda)\rangle = \langle \sigma, \lambda \frown U\rangle = \langle U \smile \sigma, \lambda\rangle$$

donde conclímos que $\mathrm{Hom}(\phi_A))_* = u\smile$ e portanto $u\smile$ é um isomorfismo.

□

Sejam $f : B' \to B$ uma aplicação e $p' : W \to B'$ a fibração induzida de p por f. Temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p'"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "f"'] & B. \end{tikzcd}$$

Este induz um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} (\hat{W}, W) \arrow[r, "\hat{f}'"] \arrow[d, "\hat{p}'"'] & (\hat{X}, X) \arrow[d, "\hat{p}"] \\ (B', B') \arrow[r, "f"'] & (B, B) \end{tikzcd}$$

De fato, uma vez que $\hat{W}$ é o pushout de $i_0 : W \to W \times I$ e $p' : W \to B'$, assim como $\hat{X}$ é o pushout de $i_0 : X \to X \times I$ e $p : X \to B$, temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[rrr, "f'"] \arrow[dr, "i_0"] \arrow[ddd, "p'"'] & & & X \arrow[dl, "i_0"'] \arrow[ddd, "p"] \\
& W \times I \arrow[r, "f' \times 1"] \arrow[d, "\bar{p}'"'] & X \times I \arrow[d, "\bar{p}"] & \\
& \hat{W} \arrow[r, dashed, "\hat{f}'"'] & \hat{X} & \\
B' \arrow[ur, "\bar{i}_0"'] \arrow[rrr, "f"'] & & & B \arrow[ul, "\bar{i}_0"]
\end{tikzcd}$$

Agora, $\bar{p} \circ (f' \times 1) \circ i_0 = \bar{p} \circ i_0 \circ f' = \bar{i}_0 \circ p f' = \bar{i}_0 \circ f \circ p'$. Logo, pela propriedade universal do pushout, existe $\hat{f}' : \hat{W} \to \hat{X}$ que comuta o diagrama acima. Se $(x,t) \in W \times I$ e $b \in B'$, então,

$$\begin{aligned}
\hat{p}\hat{f}'(\langle x,t \rangle) &= \hat{p}\hat{f}'\bar{p}(x,t) = \hat{p}\bar{p}(f' \times 1)(x,t) \\
&= \hat{p}\bar{p}(f'(x),t) = \hat{p}(\langle f'(x),t \rangle) = pf'(x) = fp'(x) = f\widehat{p'}(\langle x,t \rangle)
\end{aligned}$$

e

$$\hat{p}\hat{f}'(\langle b \rangle) = \hat{p}\hat{f}'\bar{i}_0(b) = \hat{p}\bar{i}_0 f(b) = \hat{p}(\langle f(b) \rangle) = f(b) = f\widehat{p'}(\langle b \rangle).$$

O que prova que $\hat{p}\hat{f}' = h\widehat{p'}$.

A aplicação $\hat{f}'$ construida acima tem a seguinte propriedade

Lema 6.7. *Seja $v = \hat{f}'^{*}(u) \in H^{n+1}(\hat{W}, W; A)$. A classe v é uma classe de Thom para a fibração $p' : W \to B'$. Além disso, o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
H_p(\hat{W}, W; A) \arrow[r, "\hat{f}'_*"] \arrow[d, "\frown v"'] & H_p(\hat{X}, X; A) \arrow[d, "\frown u"] \\
H_{p-n-1}(\hat{W}; A) \arrow[r, "\hat{f}'_*"'] & H_{p-n-1}(\hat{X}; A)
\end{tikzcd} \tag{6.1}$$

é comutativo.

Demonstração. Uma vez que a fibra F' de p' é homeomorfa a fibra de F de p, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
F' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "i'"'] & F \arrow[d, "i"] \\
W \arrow[r, "f'"'] & X.
\end{tikzcd}$$

Identificando F' com F obtemos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
& F \arrow[dl, "i'"'] \arrow[dr, "i"] & \\
W \arrow[rr, "f'"'] & & X.
\end{tikzcd}$$

Este nos dá o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} & (\hat{F}, F) \arrow[dl, "\hat{i}'"'] \arrow[dr, "\hat{i}"] & \\ (\hat{W}, W) \arrow[rr, "\hat{f}'"'] & & (\hat{X}, X). \end{tikzcd}$$

Que induz o diagrama comutativo em cohomologia

$$\begin{tikzcd} H^{n+1}(\hat{X}X; A) \arrow[rr, "(\hat{f}')^*"] \arrow[dr, "\hat{i}^*"'] & & H^{n+1}(\hat{W}, W; A) \arrow[dl, "(\hat{i}')^*"] \\ & H^{n+1}(\hat{F}, F; A). & \end{tikzcd}$$

Uma vez que $\hat{i}^*(u) = (\hat{i}')^*(\hat{f}')^*(u) = (\hat{i}')^*(v)$ é gerador de $H^{n+1}(\hat{F}, F; A)$, segue que v é classe de Thom para p'. Por fim, a comutatividade do diagrama (6.1) segue da naturalidade do produto cap. □

Uma aplicação $f : X \to Y$ é dita uma *equivalência de homotopia fraca* se f induz uma bijeção entre os conjuntos das componentes conexas por caminhos de X e Y e $f_* : \pi_n(X, x) \to \pi_n(Y, f(x))$ é um isomorfismo para todo $n > 0$ e todo $x \in X$

Corolário 6.8. *Se f é uma equivalência de homotopia fraca e $\frown v$ é um isomorfismo, então $\frown u$ é um isomorfismo.*

Demonstração. As sequências de homotoopia das fibrações p e p' se relacionam conforme o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \pi_{n+1}(B') \arrow[r, "\Delta_*"] \arrow[d, "f_*"] & \pi_n(F) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "1"] & \pi_n(W) \arrow[r, "p'_*"] \arrow[d, "f'_*"] & \pi_n(B') \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & \pi_{n+1}(B) \arrow[r, "\Delta_*"'] & \pi_n(F) \arrow[r, "i_*"'] & \pi_n(X) \arrow[r, "p_*"'] & \pi_n(B) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Como f é uma equivalência de homotopia fraca, segue que f_* é um isomorfismo. Logo, o lema dos cinco nos dá que f'_* é um isomorfismo, donde concluímos que f' é uma equivalência de homotopia fraca. Agora, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} (\hat{W}, W) \arrow[r, "\hat{f}'"] \arrow[d, "\hat{p}'"'] & (\hat{X}, X) \arrow[d, "\hat{p}"] \\ (B', B') \arrow[r, "f"'] & (B, B). \end{tikzcd}$$

Como $\hat{p}$ e $\hat{p}'$ são equivalências de homotopia, temos em particular que estas aplicações são equivalências de homotopia fraca. Vemos assim que $\hat{f}'$ é uma equivalência de homotopia fraca. Agora, pelo teorema de Whitehead, temos que

$$f'_* : H_*(W) \to H_*(X) \quad \text{e}$$
$$\hat{f}'_* : H_*(\hat{W}) \to H_*(\hat{X})$$

são isomorfismos.

Uma vez que $\hat{f}'_{|W} : W \to X$ é f' segue, aplicando o lema dos cinco ao diagrama que relaciona as sequências dos pares $(\hat{W}, W)$ e $(\hat{X}, X)$, que

$$\hat{f}'_* : H_*(\hat{W}, W) \to H_*(\hat{X}, X)$$

é um isomorfismo. Por fim, o teorema dos coeficientes universais nos dá que

$$\begin{aligned} &\hat{f}'_* : H_*(\hat{W}, W; A) \to H_*(\hat{X}, X; A) \quad \text{e} \\ &\hat{f}'_* : H_*(\hat{W}; A) \to H_*(\hat{X}; A) \end{aligned}$$

são isomorfismo. O corolário segue então destes fatos e da comutatividade do diagrama (6.1). □

Uma vez que B possui uma CW-aproximação $f : K \to B$, segue do corolário anterior que é suficiente provar o teorema para o caso em que B é um CW-complexo. Ainda, mostremos que podemos assumir que B é um CW-complexo finito.

Lema 6.9. *Sejam B um CW-complexo e $\{B_\alpha; \alpha \in J\}$ a família de seus subcomplexos finitos. Sejam $(\hat{X}_\alpha, X_\alpha) = (\hat{p}^{-1}(B_\alpha), p^{-1}(B_\alpha))$ e $u_\alpha \in H^{n+1}(\hat{X}_\alpha, X_\alpha; A)$ a imagem de u pela injeção $\hat{X}_\alpha \to \hat{X}$. Se para todo $\alpha \in J$*

$$\frown u_\alpha : H_p(\hat{X}_\alpha, X_\alpha; A) \to H_{p-n-1}(\hat{X}_\alpha)$$

é um isomorfismo para toda p, então

$$\frown u : H_p(\hat{X}, X; A) \to H_{p-n-1}(\hat{X}; A)$$

é um isomorfismo.

Demonstração. Considere a família de homomorfismos $i^\alpha_* : H_*(\tilde{X}_\alpha, X_\alpha) \to H_*(\tilde{X}, X)$, em que $i^\alpha : (\tilde{X}_\alpha, X_\alpha) \to (\tilde{X}, X)$ são as inclusões. Temos então, uma vez que B é um CW-complexo, que os homomorfismos i^α_* representam $H_*(\tilde{X}, X)$ como limite direto, isto é, induzem um isomorfismo

$$\varinjlim H_*(\tilde{X}_\alpha, X_\alpha) \simeq H_*(\tilde{X}, X).$$

Agora, para cada α, considere o homomorfismo g_α dado pela composta

$$H_*(\tilde{X}_\alpha, X_\alpha) \xrightarrow{\frown u_\alpha} H_*(\tilde{X}_\alpha) \xrightarrow{j^\alpha_*} H_*(\tilde{X}),$$

em que $j^\alpha : \tilde{X}_\alpha \to \tilde{X}$ é a inclusão. Agora, se $i^{\alpha,\beta} : (\tilde{X}_\alpha, X_\alpha) \to (\tilde{X}_\beta, X_\beta)$ é a inclusão, temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} H_*(\tilde{X}_\alpha, X_\alpha) \arrow[r, "\frown u_\alpha"] \arrow[d, "i^{\alpha,\beta}_*"] & H_*(\tilde{X}_\alpha) \arrow[r, "j^\alpha_*"] \arrow[d, "j^{\alpha,\beta}_*"'] & H_*(\tilde{X}) \arrow[d, "1"'] \\ H_*(\tilde{X}_\beta, X_\beta) \arrow[r, "\frown u_\beta"'] & H_*(\tilde{X}_\beta) \arrow[r, "j^\beta_*"'] & H_*(\tilde{X}) \end{tikzcd}$$

é comutativo pela naturalidade do produto cap. Portanto,

$$g_\alpha = g_\beta \circ i^{\alpha,\beta}_*$$

Logo, existe um único homomorfismo

$$g : H_*(\tilde{X}, X) = \varinjlim H_*(\tilde{X}_\alpha, X_\alpha) \to H_*(\tilde{X})$$

tal que $g \circ i_*^\alpha = g_\alpha$ para todo α. Mas, da naturalidade do produto cap, temos que para todo $x \in H_*(\tilde{X}_\alpha, X_\alpha)$,

$$g_\alpha(x) = j_*^\alpha(x \frown u_\alpha) = j_*^\alpha(x \frown i_*^\alpha(u)) = i_*^\alpha(x) \frown u = (\frown u) i_*^\alpha(x).$$

Portanto $(\frown u) i_*^\alpha = g_\alpha$ para todo α. Da unicidade de g concluímos que $g = \frown u$.

De modo análogo, temos que $H_*(\tilde{X}) \simeq \lim_{\longrightarrow} H_*(\tilde{X}_\alpha)$ e que os isomorfismos $\frown u_\alpha$ induzem um homomorfismo $d{:}H_*(\tilde{X}) \to H_*(\tilde{X}, X)$ tal que $d \circ j_*^\alpha = i_*^\alpha(\frown u_\alpha)^{-1}$ para todo α. Considere $x \in H_*(\tilde{X}, X)$ e seja $y \in H_*(\tilde{X}_\alpha, X_\alpha)$ para algum α tal que $i_*^\alpha(y) = x$. Então,

$$d(x \frown u) = d(i_*^\alpha(y) \frown u) = dg_\alpha(y) = dj_*^\alpha(y \frown u_\alpha) = i_*^\alpha(\frown u_\alpha)(y \frown u_\alpha) = i_*^\alpha(y) = x,$$

donde segue que $d \circ (\frown u) = 1$. Agora sejam $x \in H_*(\tilde{X})$ e $y \in H_*(\tilde{X}_\alpha)$, para algum α, tal que $j_*^\alpha(y) = x$. Então

$$d(x) \frown u = dj_*^\alpha(y) \frown u = (i_*^\alpha(\frown u_\alpha)^{-1})(y) \frown u = j_*^\alpha((\frown u_\alpha)^{-1}(y) \frown u_\alpha) = j_*^\alpha(y) = x,$$

donde segue que $(\frown u)d = 1$ e concluímos que $\frown u$ é um isomorfismo.

$\square$

Uma vez que todo CW-complexo finito tem o mesmo tipo de homotopia de um complexo simplicial finito, basta provarmos o teorema para o caso em que B é um complexo simplicial finito. Trataremos este caso por indução sobre o número de simplexos de B.

Deste modo, assuma que $B = B_0 \cup B_1$, em que B_1 é um r-simplexo principal de B, B_0 é a união dos demais simplexos de B e $B_{01} = B_0 \cap B_1$ é o bordo de B_1. Pelo lema (6.5) é suficiênte provar que

$$\frown : H_p(\hat{X}, \hat{X}_0 \cup X; A) \to H_{p-n-1}(\hat{X}, \hat{X}_0; A)$$

é um isomorfismo.

Considere o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
H_p(\hat{X}_1, \hat{X}_{01} \cup X_1; A) \arrow[r, "\frown u_1"] \arrow[d] & H_{p-n-1}(\hat{X}_1, \hat{X}_{01}; A) \arrow[d] \\
H_p(\hat{X}, \hat{X}_0 \cup X; A) \arrow[r, "\frown u"'] & H_{p-n-1}(\hat{X}, \hat{X}_0; A),
\end{tikzcd}$$

onde as setas verticais são induzidas pelas inclusões apropriadas. Esses são isomorfismos uma vez que os pares $\{\hat{X}_0, \hat{X}_1\}$ e $\{\hat{X}_0 \cup X, \hat{X}_1\}$ são excisivos. Portanto, basta mostrarmos que $\frown u_1$ é isomorfismo. Mas isso nos dá que é suficiente provar que o homomorfismo $\frown u$ do teorema (6.4) é isomorfismo para o caso em que B é um r-simplexo com bordo B_0. Neste caso o espaço base B é contrátil, e temos pelo corolário (2.33) que esta fibração é fht e existe uma equivalência de homotopia

$$h : (B \times F, B_0 \times F) \to (X, X_0)$$

esta por sua vez induz uma equivalência de homotopia

$$\hat{h} : (B \times \hat{F}, B_0 \times \hat{F}, B \times F) \to (\hat{X}, \hat{X}_0, X).$$

Lembrando que B e $\hat{F}$ são contráteis e que $H_*(\hat{F}, F; A) \simeq H_*(\mathbb{S}^n, *; A)$ temos os seguintes isomorfismos, dados pelos produtos cross apropriados

$$\begin{gathered} H_p((B, B_0) \times (\hat{F}, F); A) \simeq H_{p-n-1}(B, B_0; A) \otimes_A H_{n+1}(\hat{F}, F; A) \\ H^{n+1}(B \times \hat{F}, B \times F; A) \simeq H^0(B; A) \otimes_A H^{n+1}(\hat{F}, F; A) \\ H_{p-n-1}(B \times \hat{F}, B_0 \times \hat{F}; A) \simeq H_{p-n-1}(B, B_0; A) \otimes_A H_0(\hat{F}; A). \end{gathered}$$

Uma vez que B é conexo por caminhos, temos que $x \mapsto 1 \otimes x$ é um isomorfismo entre $H^{n+1}(\hat{F}, F; A)$ e $H^0(B; A) \otimes H^{n+1}(\hat{F}, F; A)$ e portanto existe $w^* \in H^{n+1}(\hat{F}, F; A)$ tal que $\hat{h}^*(u) = 1 \times w^*$. Ainda, como u gera $H^{n+1}(B \times \hat{F}, B \times F)$ segue que w^* gera o módulo livre $H^{n+1}(\hat{F}, F; A)$. Seja $w \in H_{n+1}(\hat{F}, F; A)$ a classe de homologia tal que $\langle w^*, w \rangle = 1$. Temos também que $H_{p-n-1}(B, B_0; A) \otimes_A H_{n+1}(\hat{F}, F; A)$ e $H_{p-n-1}(B, B_0; A) \otimes_A H_0(\hat{F}; A)$ são isomorfos a $H_{p-n-1}(B, B_0; A)$ por $x \mapsto x \times w$ e $x \mapsto x \times 1$, respectivamente. Como

$$(x \times w) \frown (1 \times w^*) = t(x \frown 1) \times (w \frown w^*) = t(x \times 1) = x \times t,$$

em que $t \in \{1, -1\}$ depende da paridade de n. Temos que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd} H_p(\hat{X}, \hat{X}_0 \cup X; A) \arrow[rr, "\frown u"] \arrow[d, "\hat{h}_*"'] & & H_{p-n-1}(\hat{X}, \hat{X}_0; A) \arrow[d, "\hat{h}_*"] \\ H_p(B \times \hat{F}, B_0 \times \hat{F} \cup B \times F; A) \arrow[rr, "\frown(\hat{h}^*(u))"] & & H_{p-n-1}(B \times \hat{F}, B_0 \times F; A) \\ H_{p-n-1}(B, B_0) \arrow[u, "\times w"] \arrow[urr, "\times t"'] & & \end{tikzcd}$$

Como $\times w$ e $\times t$ são isomorfismo, segue que $\frown \hat{h}^*(u)$ também é, e por conseguinte $\frown u$ é isomorfismo. Isso completa a prova do teorema (6.4).

Podemos usar o teorema do isomorfismo de Thom para relacionar as sequências de homologia de (X, X_0) e (B, B_0). Uma vez que o par $\{\hat{X}_0, X\}$ é excisivo, temos $H_*(\hat{X}_0 \cup X, \hat{X}_0) \simeq H_*(X, X_0)$. Substituindo esses grupos na sequência exata longa da terna $(\hat{X}, \hat{X}_0 \cup X, \hat{X}_0)$ temos

$$\cdots \to H_{p+1}(\hat{X}, \hat{X}_0 \cup X) \to H_p(X, X_0) \to H_p(\hat{X}, \hat{X}_0) \to H_p(\hat{X}, \hat{X}_0 \cup X) \to \cdots$$

Como $\hat{p} : (\hat{X}, \hat{X}_0) \to (B, B_0)$ é uma equivalência de homotopia, substituímos os grupos $H_p(\hat{X}, \hat{X}_0)$ por $H_p(B, B_0)$. Por fim, utilizamos o teorema (6.4) para substituir $H_p(\hat{X}, \hat{X}_0 \cup X)$ por $H_{p-n-1}(\hat{X}, \hat{X}_0)$ e em seguida por $H_{p-n-1}(B, B_0)$. Podemos fazer uma construção análoga em cohomologia. Obtemos assim

Teorema 6.10. *(de Gysin) Sejam A um PID e $p : X \to B$ uma fibração n-esférica A-orientável. Então para todo subsespaço fechado B_0 de B existem sequências exatas*

$$\cdots \to H_{p-n}(B, B_0; M) \xrightarrow{\beta} H_p(X, X_0; M) \xrightarrow{p_*} H_p(B, B_0; M) \xrightarrow{\gamma} H_{p-n-1}(B, B_0; M) \to \cdots$$

e

$$\cdots \to H^{p-n-1}(B,B_0;M) \xrightarrow{\gamma^*} H^p(B,B_0;M) \xrightarrow{p^*} H^p(X,X_0;M) \xrightarrow{\beta^*} H^{p-n}(B,B_0;M) \to \cdots$$

com

$$\gamma(x) = x \frown w \quad (x \in H_p(B,B_0;M))$$
$$\gamma^*(x) = w \smile x \quad (x \in H^{p-n-1}(B,B_0;M))$$

em que $w \in H^{n+1}(B;A)$ *é tal que* $\hat{p}^*(w) = j^*(u)$, $j : \hat{X} \to (\hat{X}, X)$ *a inclusão.*

Demonstração. Considere o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} H_p(\hat{X},\hat{X}_0) \arrow[r, "i_*"] \arrow[dd, "\hat{p}_*"'] \arrow[dr, "\frown \hat{p}^*(w)"'] & H_p(\hat{X},\hat{X}_0 \cup X) \arrow[d, "\frown u"] \\ & H_{p-n-1}(\hat{X},\hat{X}_0) \arrow[d, "\hat{p}_*"] \\ H_p(B,B_0) \arrow[r, "\gamma"'] & H_{p-n-1}(B,B_0), \end{tikzcd}$$

que é comutativo pela definição de γ e pela naturalidade do produto cap. Agora, se $x \in H_p(\hat{X},\hat{X}_0)$, temos

$$i_*(x) \frown u = x \frown j^*(u) = x \frown \hat{p}^*(w),$$

donde, utilizando a naturalidade do produto cap, obtemos

$$\hat{p}_*(x \frown \hat{p}^*(w)) = \hat{p}_*(x) \frown w,$$

e portanto,

$$\gamma\hat{p}_*(x) = \hat{p}_*(x \frown \hat{p}^*(w)) = \hat{p}_*(x) \frown w.$$

Como $\hat{p}_*$ é isomorfismo, segue que $\gamma(y) = y \frown w$ para todo $y \in H_p(B,B_0)$. A prova de que $\gamma^*(y) = w \smile y$ para todo $y \in H^{p-n-1}(B,B_0)$ é análoga. □

O homomorfismo β^* satisfaz a seguinte propriedade multiplicativa análoga aquela de α^*

Teorema 6.11. *Se* $x \in H^p(X,X_0;A)$ *e* $y \in H^q(B,B_0;A)$, *então*

$$\beta^*(x \frown p^*(y)) = \beta^* x \smile y \in H^{p+q-n}(B,B_0;A).$$

Demonstração. Temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} H^p(\hat{X},\hat{X}_0) \arrow[r, "j^*"] & H^p(\hat{X}_0 \cup X,\hat{X}_0) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[dd, "i*"] & H^{p+1}(\hat{X},\hat{X}_0 \cup X) \\ & & H^{p-n}(\hat{X},\hat{X}_0) \arrow[u, "u\smile"] \\ H^p(B,B_0) \arrow[uu, "\hat{p}^*"] \arrow[r, "p^*"'] & H^p(X,X_0) \arrow[r, "\beta^*"'] & H^{p-n}(B,B_0). \arrow[u, "\hat{p}^*"'] \end{tikzcd}$$

Agora, para $x_1 \in H^p(\hat{X}_0 \cup X, \hat{X}_0)$ e $y_1 \in H^q(\hat{X}, \hat{X}_0)$, temos (veja [7])

$$\delta^*(x_1 \smile' j^*(y_1)) = \delta^*(x_1) \smile y_1.$$

Sejam $x_1 = (i^*)^{-1}$ e $y_1 = \hat{p}^*(y)$. Então

$$x \smile p^*(y) = i^*(x_1) \smile i^*j^*\hat{p}^*(y) = i^*(x_1) \smile i^*j^*(y_1) = i^*(x_1 \smile j^*(y_1)).$$

Logo,

$$u \smile \hat{p}^*\beta^*(x \smile p^*(y)) = u \smile \hat{p}^*\beta^*i^*(x_1 \smile j^*(y_1)) = \delta^*(x_1 \smile j^*(y_1)) = \delta^*(x_1) \smile y_1.$$

Enquanto que,

$$\begin{aligned} u \smile \hat{p}^*(\beta^*(x) \smile y) = u \smile \hat{p}^*(\beta^*i^*(x_1) \smile y) &= u \smile (\hat{p}^*\beta^*i^*(x_1) \smile \hat{p}^*(y)) \\ &= (u \smile \hat{p}^*\beta^*i^*(x_1)) \smile y_1 = \delta^*(x_1) \smile y_1. \end{aligned}$$

Uma vez que $\hat{p}^*$ e $u\smile$ são isomorfismos, temos que

$$\beta^*(x \smile p^*(y)) = \beta^*(x) \smile y.$$

□

Como uma aplicação do teorema de Gysin, calcularemos os grupos de cohomologia do grupo de Lie excepcional $\mathbf{G}_2$. Temos a fibração (veja [12], apêndice A, §5)

$$\mathbb{S}^3 \to \mathbf{G}_2 \xrightarrow{p} \mathbf{V}_{7,2}.$$

Como $\mathbf{V}_{7,2}$ é simplesmente conexo, por (6.2), a fibração é orientável. Logo, temos a sequência de Gysin

$$\cdots \to H^{q-4}(\mathbf{V}_{7,2}) \xrightarrow{\gamma^*} H^q(\mathbf{V}_{7,2}) \xrightarrow{p^*} H^q(\mathbf{G}_2) \xrightarrow{\beta^*} H^{q-3}(\mathbf{V}_{7,2}) \to \cdots$$

Para qualquer módulo de coeficiêntes A sobre um PID. Para $A = \mathbb{Z}$ temos

$$\begin{aligned} H^0(\mathbf{V}_{7,2}) =& \mathbb{Z}, \text{gerado por } 1; \\ H^{11}(\mathbf{V}_{7,2}) =& \mathbb{Z}, \text{gerado por } z; \\ H^6(\mathbf{V}_{7,2}) =& \mathbb{Z}_2, \text{gerado por } h \end{aligned}$$

e $H^p(\mathbf{V}_{7,2}) = 0$ para os demais casos. Uma inspeção rápida na sequência de Gysin nos dá que $H^p(\mathbf{G}_2) = 0$ para $p \notin \{0, 3, 6, 9, 11, 14\}$. Para os demais casos temos

$q = 0$: Temos $0 \to H^0(\mathbf{V}_{7,2}) \xrightarrow{p^*} H^0(\mathbf{G}_2) \to 0$ e portanto $H^0(\mathbf{G}_2) = \mathbb{Z}$, gerado por 1;

$q = 3$: Temos $0 \to H^3(\mathbf{G}_2) \xrightarrow{\beta^*} H^0(\mathbf{V}_{7,2}) \to 0$ e portanto $H^3(\mathbf{G}_2) = \mathbb{Z}$, gerado por x tal que $\beta^*(x) = 1$;

$q = 6$: Temos $0 \to H^6(\mathbf{V}_{7,2}) \xrightarrow{p^*} H^6(\mathbf{G}_2) \to 0$ e portanto $H^6(\mathbf{G}_2) = \mathbb{Z}_2$, gerado por p^*h;

$q = 9$: Temos $0 \to H^9(\mathbf{G}_2) \xrightarrow{\beta^*} H^6(\mathbf{V}_{7,2}) \to 0$ e portanto $H^9(\mathbf{G}_2) = \mathbb{Z}_2$, gerado por y tal que $\beta^*(y) = h$. Mas, $h = 1 \smile h = \beta^*(x) \smile h = \beta^*(x \smile p^*h)$ e portanto $y = x \smile p^*h$;

$q = 11$: Temos $0 \to H^{11}(\mathbf{V}_{7,2}) \xrightarrow{p^*} H^{11}(\mathbf{G}_2) \to 0$ e portanto $H^{11}(\mathbf{G}_2) = \mathbb{Z}$, gerado por p^*z;

$q = 14$: Temos $0 \to H^{14}(\mathbf{G}_2) \xrightarrow{\beta^*} H^{11}(\mathbf{V}_{7,2}) \to 0$ e portanto $H^{14}(\mathbf{G}_2) = \mathbb{Z}$, gerado por y' tal que $\beta^*(y') = z$. Mas, $z = 1 \smile z = \beta^*(x) \smile z = \beta^*(x \smile p^*z)$ e portanto $y' = x \smile p^*z$.

Para $A = \mathbb{Z}_2$ temos de (5.10) que

$$\begin{aligned}
H^0(\mathbf{V}_{7,2}) =& \mathbb{Z}_2, \text{gerado por } 1;\\
H^5(\mathbf{V}_{7,2}) =& \mathbb{Z}_2, \text{gerado por } y_5;\\
H^6(\mathbf{V}_{7,2}) =& \mathbb{Z}_2, \text{gerado por } y_6;\\
H^{11}(\mathbf{V}_{7,2}) =& \mathbb{Z}_2, \text{gerado por } y_5 \smile y_6.
\end{aligned}$$

De forma análoga ao feito para o caso anterior temos

$$\begin{aligned}
H^0(\mathbf{G}_2) =& \mathbb{Z}_2, \text{gerado por } 1;\\
H^3(\mathbf{G}_2) =& \mathbb{Z}_2, \text{gerado por } \tilde{x} \text{ tal que } \beta^*(\tilde{x}) = 1;\\
H^5(\mathbf{G}_2) =& \mathbb{Z}_2, \text{gerado por } p^*y_5;\\
H^6(\mathbf{G}_2) =& \mathbb{Z}_2, \text{gerado por } p^*y_6;\\
H^8(\mathbf{G}_2) =& \mathbb{Z}_2, \text{gerado por } \tilde{x} \smile p^*y_5;\\
H^9(\mathbf{G}_2) =& \mathbb{Z}_2, \text{gerado por } \tilde{x} \smile p^*y_6;\\
H^{11}(\mathbf{G}_2) =& \mathbb{Z}_2, \text{gerado por } p^*(y_5 \smile y_6) = p^*y_5 \smile p^*y_6;\\
H^{14}(\mathbf{G}_2) =& \mathbb{Z}_2, \text{gerado por } \tilde{x} \smile p^*(y_5 \smile y_6);\\
H^q(\mathbf{G}_2) =& 0, \text{para os demais valores de } q
\end{aligned}$$

Agora, temos que a sequência (veja [4], capítulo 3, §E)

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^n(\mathbf{G}_2;\mathbb{Z}) \arrow[r, "\rho"] & H^n(\mathbf{G}_2;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "\delta^*"'] & H^{n+1}(\mathbf{G}_2;\mathbb{Z}) \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\rho"] & H^{n+1}(\mathbf{G}_2;\mathbb{Z}) \arrow[r] & \cdots \\
& & & H^{n+1}(\mathbf{G}_2;\mathbb{Z}_2) & &
\end{tikzcd}$$

que relaciona os operadores de Bockstein δ e δ^* e a redução módulo 2 ρ. Uma vez que a sequência horizontal é exata, aplicando os cálculos já feitos obtemos que $\tilde{x} = \rho(x), \rho(h) = y_6$ e $\rho(z) = y_5 \smile y_6$. Além disso, $y_6 = \delta^*(y_5)$.

Resumindo temos

Teorema 6.12. *O anel de cohomologia $H^*(\mathbf{G}_2, \mathbb{Z}_2)$ tem um sistema simples de geradores $\tilde{x}, p^*y_5, p^*y_6$.*

Ainda, utilizando o teorema de Künneth, obtemos

Teorema 6.13. *Seja A é um corpo de característica zero ou primo impar. Então $H^*(\mathbf{G}_2; A)$ é uma álgebra exterior nos geradores x_3, x_{11}.*

7 Sequências Espectrais

Nessa seção introduziremos o conceito de sequências espectrais e mais especificamente a sequência espectral de homologia de uma fibração. Utilizando essa ferramenta, deduziremos generalizações das sequências de Wang e Gysin, além da sequência de Serre, que relaciona os grupos de homologia dos espaços base, total e da fibra de uma fibração.

Consideremos módulos sobre um PID R. Um R-módulo bigraduado E é uma coleção de R-módulos $E_{s,t}$, em que $s, t \in \mathbb{Z}$. Um diferencial $d : E \to E$ de bigrau $(-r, r-1)$ é uma coleção de homomorfismos $d_{s,t} : E_{s,t} \to E_{s-r,t+r-1}$, $s, t \in \mathbb{Z}$, tal que $d^2 = 0$. O módulo bigraduado de homologia $H(E)$ é o módulo bigraduado definido por

$$H_{s,t}(E) = \frac{\ker(d_{s,t} : E_{s,t} \to E_{s-r,t+r-1})}{\mathrm{Im}(d_{s+r,t+1-r} : E_{s+r,t+1-r} \to E_{s,t})}.$$

Observe que, se $E_q = \bigoplus_{s+t=q} E_{s,t}$, então o diferencial define um homomorfismo $\partial : E_q \to E_{q-1}$ que torna $\{E_q, \partial\}$ um complexo de cadeias.

Definição 7.1. *Uma $E^{(k)}$ sequência espectral é uma sequência $\{E^r, d^r\}$ para $r \geq k$ tal que*

(a) E^r é um módulo bigraduado e d^r é um diferencial de bigrau $(-r, r-1)$ sobre E^r;

(b) Para $r \geq k$ é dado um isomorfismo $H(E^r) \simeq E^{r+1}$.

Note que uma $E^{(k)}$ sequência espectral é uma $E^{(r)}$ sequência espectral para todo $r \geq k$.

Definição 7.2. *Um homomorfismo $\varphi : E \to E'$ entre duas $E^{(k)}$ sequências espectrais é uma coleção de homomorfismos $\varphi^r : E^r_{s,t} \to E'^r_{s,t}$, para $r \geq k$ e todo $s, t \in \mathbb{Z}$, que comuta com as diferenciais e com os isomorfismos da sequências espectrais.*

Disto segue que a classe das sequências espectrais e homomorfismos é uma categoria.

Para definir o limite de uma sequência espetral, identificaremos E^{r+1} com $H(E^r)$ pelos isomorfismos da sequência espectral. Para uma $E^{(k)}$ sequência espectral, sejam Z^k os submódulos bigraduados definidos por

$$Z^k_{s,t} = \ker(d^k_{s,t} : E^k_{s,t} \to E^k_{s-k,t+k-1})$$

e B^k os submódulos

$$B^k s, t = d^k_{s+k,t-k+1}(E^k_{s+k,t-k-1}).$$

Então $B^k \subset Z^k$ e $E^{k+1} = Z^k/B^k$. Sejam agora $Z(E^{k+1})$ o submódulo dado por

$$Z(E^{k+1})_{s,t} = \ker(d^{k+1}_{s,t} : E^{k+1}_{s,t} \to E^{k+1}_{s-k-1,t+k+1})$$

e $B(E^{k+1})$ o submódulo dado por

$$B(E^{k+1})_{s,t} = d^{k+1}_{s+k+1,t-k}(E^{k+1}_{s+k+1,t-k}).$$

Agora, como $Z(E^{k+1}) \subset E^{k+1}_{s,t} = Z^k_{s,t}/B^k_{s,t}$, existe submódulo $Z^{k+1}_{s,t} \subset Z^k_{s,t}$ tal que $B^k_{s,t} \subset Z^{k+1}_{s,t}$ e $Z^{k+1}_{s,t}/B^k_{s,t} = Z(E^{k+1})_{s,t}$. De modo análogo, existe $B^{k+1}_{s,t} \subset Z^k_{s,t}$ tal que $B^k_{s,t} \subset B^{k+1}_{s,t}$ e $B^{k+1}_{s,t}/B^k_{s,t} = B(E^{k+1})_{s,t}$. Note que $B^k \subset B^{k+1} \subset Z^{k+1} \subset Z^k$. Continuando por indução obtemos uma cadeia de submódulos bigraduados de E^k

$$B^k \subset B^{k+1} \subset B^{k+2} \subset \cdots B^r \subset \cdots \subset Z^r \subset \cdots \subset Z^{k+2} \subset Z^{k+1} \subset Z^k$$

tais que $E^{r+1} = Z^r/B^r$ para todo $r \geq k$. Definimos módulos bigraduados

$$Z^\infty = \cap_r Z^r, \quad B^\infty = \cup_r B^r \quad \text{e} \quad E^\infty = \frac{Z^\infty}{B^\infty}.$$

O módulo E^∞ é denominado o limite da sequência espectral.

Definição 7.3. *Uma $E^{(k)}$ sequência espectral é dita convergente se para todo $s, t \in \mathbb{Z}$ existe um inteiro $r(s,t) \geq k$ tal que, para $r \geq r(s,t)$,*

$$d^r_{s,t} : E^r_{s,t} \to E^r_{s-r,t+r-1}$$

é trivial.

No caso de uma sequência convergente temos que $E^{r+1}_{s,t}$ é isomorfo a um quociente de $E^r_{s,t}$ e que $E^\infty_{s,t}$ é isomorfo ao limite direto da sequência

$$E^{r(s,t)}_{s,t} \to E^{r(s,t)+1}_{s,t} \to \cdots$$

Muitas vezes a sequência espectral converge em um sentido mais forte, isto é, existe $r(s,t)$ tal que $E^r_{s,t} \simeq E^\infty_{s,t}$ para $r \geq r(s,t)$. Por exemplo, se para algum r existem inteiros n e m tais que $E^r_{s,t} = 0$ para $s < n$ ou $t < m$, então o mesmo se verifica para $E^q_{s,t}$ para $q \geq r$. Então, dados s e t, se $q \geq r$ é escolhido de forma que $q \geq \sup\{s-n, t-m+1\}$, temos que $E^q_{s+q,t-q+1} = 0 = E^q_{s-q,t+q-1}$ e portanto

$$E^q_{s,t} \simeq E^{q+1}_{s,t} \simeq \cdots \simeq E^\infty_{s,t},$$

e E é convergente no sentido forte.

Um exemplo de sequência espectral convergente é uma sequência espectral de primeiro quadrante, que é definida como uma sequência espectral E tendo a propriedade de que para algum r, $E^r_{s,t} = 0$ para todo $s < 0$ e $t < 0$. Tal sequência espectral é convergente no sentido forte. Além disso, para cada q, existe apenas um número finito de módulos não triviais $E^r_{s,t}$ tais que $s + t = q$.

Um homomorfismo $\varphi : E \to E'$ entre $E^{(k)}$ sequências espectrais induz um homomorfismo $\varphi^\infty : E^\infty \to E'^\infty$ entre seus limites e temos

Teorema 7.4. *Seja $\varphi : E \to E'$ um homomorfismo entre $E^{(k)}$ sequências espectrais que é um isomorfismo para algum $r \geq k$. Então φ é um isomorfismo para todo $q \geq r$. Além disso, se E e E' são convergentes, φ^∞ também é um isomorfismo.*

Definição 7.5. *Uma filtração (crescente) F, sobre um R-módulo A, é uma sequência de submódulos F_sA, $s \in \mathbb{Z}$, tais que $F_sA \subset F_{s+1}A$. Se $A = \{A_t\}$ é um módulo graduado a filtração F deve ser compatível com a graduação de A, isto é, F_sA é graduado por $\{F_sA_t\}$.*

Dada uma filtração F sobre A, o *módulo graduado associado* $G(A)$ é definido por $G(A)_s = F_sA/F_{s-1}A$. Se A é graduado, o módulo associado é dado por $G(A)_{s,t} = F_sA_{s+t}/F_{s-1}A_{s+t}$. Uma filtração F sobre A é dita *convergente* se $\cap_s F_sA = 0$ e $\cup_s F_sA = A$. Uma filtração F sobre um complexo de cadeias C é uma filtração compatível com a graduação de C e com seus diferenciais, isto é, F_sC é um subcomplexo de cadeias de C consistindo de $\{F_sC_t\}$. Uma filtração F sobre C induz uma filtração F sobre $H_*(C)$ dado por

$$F_sH_*(C) = \mathrm{Im}[H_*(F_sC) \to H_*(C)].$$

Uma vez que o funtor homologia comuta com limites diretos, temos que $\cup_s F_sH_*(C) = H_*(C)$.

Uma filtração F sobre um módulo graduado A é *limitado inferiormente*, se para cada t existe $s(t)$ tal que $F_{s(t)}A_t = 0$. Neste caso temos que se F é uma filtração sobre C limitada inferiormente então a filtração induzida sobre $H_*(C)$ também o é.

O próximo teorema associa uma sequência espectral a uma filtração sobre um complexo de cadeias

Teorema 7.6. *Seja F uma filtração convergente e limitada inferiormente sobre um complexo de cadeias C. Então existe uma $E^{(1)}$ sequência espectral com*

$$E^1_{s,t} \simeq H_{s+t}(F_sC/F_{s-1}C),$$

com d^1 corresponde ao operador de bordo da terna $(F_sC, F_{s-1}C, F_{s-2}C)$, e E^∞ isomorfo ao módulo bigraduado $GH_*(C)$(associado a filtração $F_sH_*(C) = \mathrm{Im}[H_*(F_sC) \to H_*(C)]$). Além disso, essa sequência é funtorial na categoria dos complexos de cadeias com uma filtração convergente limitada inferiormente.

Demonstração. Para r arbitrário, defina

$$Z^r_s = \{c \in F_sC; \partial c \in F_{s-r}C\}$$
$$Z^\infty_s = \{c \in F_sC; \partial c = 0\}$$

Esses são módulos graduados com $Z^r_{s,t} = \{c \in F_sC_{s+t}; \partial c \in F_{s-r}C\}$ e $Z^\infty_{s,t} = \{c \in F_sC_{s+t}; \partial c = 0\}$. Temos então uma sequência de módulos graduados

$$\cdots \subset \partial Z^{-1}_{s-1} \subset \partial Z^0_s \subset \partial Z^1_{s+1} \subset \cdots \subset \partial C \cap F_sC \subset Z^\infty_s \subset \cdots \subset Z^1_s \subset Z^0_s = F_sC$$

Definimos

$$E^r_s = Z^r_s/(Z^{r-1}_{s-1} + \partial Z^{r-1}_{s+r-1})$$
$$E^\infty_s = Z^\infty_s/(Z^\infty_{s-1} + \partial C \cap F_sC)$$

O homomorfismo ∂ aplica Z_s^r em Z_{s-r}^r e $Z_{s-1}^{r-1} + \partial Z_{s+r-1}^{r-1}$ em ∂Z_{s-1}^{r-1}. Portanto, este induz um homomorfismo

$$d^r : E_s^r \to E_{s-r}^r.$$

Assim, E^r é um módulo bigraduado e d^r é um diferencial de bigrau $(-r, r-1)$. Para $r < 0$, $d^r = 0$ e $E_s^r = F_sC/F_{s-1}C$. Portanto,

$$E_{s,t}^0 = F_sC_{s+t}/F_{s-1}C_{s+t} = G(C)_{s,t}$$

e $d^0 : F_sC_{s+t}/F_{s-1}C_{s+t} \to F_sC_{s+t-1}/F_{s-1}C_{s+t-1}$ é o operador bordo do complexo quociente $F_sC/F_{s-1}C$. Além disso,

$$E_{s,t}^1 = Z_{s,t}^1/(Z_{s-1,t+1}^0 + \partial Z_{s,t+1}^0)$$

em que $Z_{s,t}^1 = \{c \in F_sC_{s+t}; \partial c \in F_{s-1}C_{s+t-1}\}$. Logo, $Z_{s,t}^1/Z_{s-1,t+1}^0$ é o módulo dos $(s+t)$-ciclos de $F_sC/F_{s-1}C$ e $(Z_{s-1,t+1}^0 + \partial Z_{s,t+1}^0)/Z_{s-1,t+1}^0$ é o módulos dos $(s+t)$-bordos de $F_sC/F_{s-1}C$. Portanto, $E_{s,t}^1 \simeq H_{s+t}(F_sC/F_{s-1}C)$. Uma verificação direta, usando a definição dos homomorfismos, mostra que d^1 é o operador bordo da terna $(F_sC, F_{s-1}C, F_{s-2}C)$.

Provemos agora que $E = \{E^r\}_{r\geq 1}$ é uma sequência espectral calculando a homologia de E^r com respeito a d^r. Temos que,

$$\begin{aligned}\{c \in Z_s^r; \partial c \in Z_{s-r-1}^{r-1} + \partial Z_{r-1}^{r-1}\} \\ = \{c \in Z_s^r; \partial c \in F_{s-r-1}C\} + \{c \in Z_s; \partial c \in Z_{s-1}^{r-1}\} \\ = Z_s^{r+1} + (Z_{s-1}^{r-1} + Z_s^\infty) = Z_s^{r+1} + Z_{s-1}^{r-1}.\end{aligned}$$

Logo, $\ker(d^r : E_s^r \to E_{s-r}^r) = (Z_s^{r+1} + Z_{s-1}^{r-1})/(Z_{s-1}^{r-1} + \partial Z_{s+r-1}^{r-1})$. Por definição, $\mathrm{Im}(d^r : E_{s+r}^r \to E_s^r) = (\partial Z_{s+r}^r + Z_{s-1}^{r-1})/(Z_{s-1}^{r-1} + \partial Z_{s+r-1}^{r-1})$. Portanto, em E_s^r, temos

$$\begin{aligned}\ker d^r / \operatorname{Im} d^r \simeq (Z_s^{r+1} + Z_{s-1}^{r-1})/(\partial Z_{s+r}^r + Z_{s-1}^{r-1}) \simeq Z_s^{r+1}/[Z_s^{r+1} \cap (\partial Z_{s+r}^r + Z_{s-1}^{r-1})] \\ = Z_s^{r+1}/(\partial Z_{s+r}^r + Z_{s-1}^r) = E_s^{r+1}.\end{aligned}$$

Donde temos um isomorfismo $H_*(E^r) \simeq E^{r+1}$, e E é uma sequência espectral.

Calculemos agora o limite dessa sequência. Temos o isomorfismo,

$$E_s^r = Z_s^r/(Z_{s-1}^{r-1} + \partial Z_{s+r-1}^{r-1}) \simeq (Z_s^r + F_{s-1}C)/(F_{s-1}C + \partial Z_{s+r-1}^{r-1}).$$

Por definição, o limite é igual a

$$\cap_r (Z_s^r + F_{s-1}C)/\cup_r (F_{s-1}C + \partial Z_{s+r-1}^{r-1}) = (\cap_r Z_s^r + F_{s-1}C)/(F_{s-1}C + \cup_r \partial Z_{s+r-1}^{r-1}).$$

Como $\cup_s F_sC = C$, temos $\cup_r \partial Z_{s+r-1}^{r-1} = \partial C \cap F_sC$. E, para t fixado, $\cap_r Z_{s,t}^r = Z_{s,t}^\infty$, pois $F_sC_t = 0$ para s suficientemente pequeno. Portanto, o limite é igual a

$$(Z_s^\infty + F_{s-1}C)/(F_{s-1}C + \partial C \cap F_sC) = Z_s^\infty/(Z_{s-1}^\infty + \partial C \cap F_sC) = E_s^\infty.$$

Para mostrar que a sequência espectral converge, note que, como a filtração e limitada inferiormente, para $s+t$ fixo, $E_{s,t}^r = 0$ para s suficientemente pequeno. Logo, para s e t fixos, existe r tal que, para $r' \geq r$, $E_{s,t}^{r'+1}$ é um quociente de $E_{s,t}^{r'}$, e portanto a sequência espectral converge.

Para completar a prova, interpretaremos o limite E^∞ como $GH_*(C)$. Por definição, $GH_*(C)_{s,t} = F_sH_{s+t}(C)/F_{s-1}H_{s+t}(C)$, em que

$$F_sH_{s+t}(C) = \mathrm{Im}[H_{s+t}(F_sC) \to H_{s+t}(C)].$$

Logo, temos $F_sH_*(C) = Z_s^\infty/(\partial C \cap F_sC)$, e

$$\begin{aligned} F_sH_*(C)/F_{s-1}H_*(C) &= (Z_s^\infty/(\partial C \cap F_sC))/(Z_{s-1}^\infty/(\partial C \cap F_{s-1}C)) \\ &\simeq Z_s^\infty/(Z_{s-1}^\infty + \partial C \cap F_sC) = E_s^\infty. \end{aligned}$$

□

Corolário 7.7. *Seja $\tau : C \to C'$ uma aplicação de cadeias, preservando filtração, entre dois complexos de cadeias com filtrações convergentes e limitadas inferiormente. Se para algum $r \geq 1$ a aplicação $\tau^r : E^r \to E'^r$ é um isomorfismo, então τ induz um isomorfismo*

$$\tau_* : H_*(C) \to H_*(C').$$

Uma filtração (crescente) de um par topológico (X, A) é uma sequência de espaços X_s contendo A tal que $X_s \subset X_{s+1}$. Tal filtração de (X, A) induz uma filtração F no complexo de cadeias $\Delta(X, A)$ dada por

$$F_s(\Delta(X, A)) = \Delta(X_s, A).$$

Se $X_s = A$ para algum s, a filtração induzida é limitada inferiormente. Se $X = \cup_s X_s$ e todo subconjunto compacto de X está contido em algum X_s, então $\cup_s F_s\Delta(X, A) = \Delta(X, A)$. Portanto, se a filtração $\{X_s\}_s$ satisfaz essas condições, a filtração induzida em $\Delta(X, A)$ é convergente e limitada inferiormente. Logo, existe uma sequência espectral com $E^1_{s,t} \simeq H_{s+t}(X_s, X_{s-1})$ na qual d^1 corresponde ao operador de bordo da terna (X_s, X_{s-1}, X_{s-2}). O termo limite dessa sequência é o módulo bigraduado associado a filtração correspondente de $H_*(X, A)$. Em particular, se (X, A) é um CW-complexo relativo, $X_s = (X, A)^s$ é o s-esqueleto, para $s \geq 0$ e $X_s = A$ para $s < 0$, então $E^1_{s,t} \neq 0$ se, e somente se, $t = 0$ e $E^1_{s,0} \simeq H_s(X_s, X_{s-1})$. Portanto, para $r \geq 2$, $E^r_{s,0}$ é a homologia do complexo de cadeias $C = \{C_s, \partial\}$, onde $C_s = H_s(X_s, X_{s-1})$ e $\partial : C_s \to C_{s-1}$ é o operador de bordo da terna (X_s, X_{s-1}, X_{s-2}).

7.1 A sequência espectral de uma fibração.

Seja $p : E \to B$ uma fibração. Se $A \subset B$ seja $E_A = p^{-1}(A)$. Assuma que (B, A) é um CW-complexo relativo. Sejam $E_s = p^{-1}((B, A)^s)$ para $s \geq 0$ e $E_s = E_A$ para $s < 0$. Então, $\{E_s\}$ é uma filtração crescente de (E, E_A). Além disso, $E_{-1} = A$, $\cup_s E_s = E$ e todo subconjunto compacto de E está contido em E_s para algum s. Temos então

Teorema 7.8. *Seja $p : X \to B$ uma fibração sobre um CW-complexo relativo (B, A). Então para qualquer módulo de coeficiêntes G existe uma $E^{(1)}$ sequência espectral convergente com*

$$E^1_{s,t} \simeq H_{s+t}(E_s, E_{s-1}; G),$$

d^1 correspondente ao operador de bordo da terna (E_s, E_{s-1}, E_{s-2}) e E^∞ o módulo bigraduado associado a filtração de $H_*(E, E_A; G)$ dada por

$$F_sH_*(E, E_A; G) = \mathrm{Im}[H_*(E_s, E_A; G) \to H_*(E, E_A; G)].$$

Para podermos aplicar esse resultado, precisamos calcular $H_n(E_s, E_{s-1}; G)$.

Lema 7.9. *Seja $\{e_\lambda\}$ a coleção de s-células de $B - A$. Então a inclusão*

$$i_{\lambda *} : (p^{-1}(e_\lambda), p^{-1}(\dot{e}_\lambda)) \to (E_s, E_{s-1})$$

induz uma representação por soma direta

$$\{i_{\lambda *}\} : \bigoplus_\lambda H_n(p)(p^{-1}(e_\lambda), p^{-1}(\dot{e}_\lambda)) \simeq H_n(E_s, E_{s-1}).$$

Demonstração. Para cada λ, seja e'_λ um simplexo de dimensão s contido em $e_\lambda - \dot{e}_\lambda$. Então as inclusões

$$\begin{aligned} ((B,A)^s, (B,A)^{s-1}) &\longrightarrow ((B,A)^s, (B,A)^s - \cup_\lambda(e'_\lambda - \dot{e'}_\lambda)) \quad \text{e} \\ (e_\lambda, \dot{e}_\lambda) &\longrightarrow (e_\lambda, e_\lambda - (e'_\lambda - \dot{e'}_\lambda)) \end{aligned}$$

são equivalências de homotopia. Portanto, as inclusões correspondentes

$$\begin{aligned} (E_s, E_{s-1}) &\longrightarrow (E_s, E_s - \cup_\lambda p^{-1}(e'_\lambda - \dot{e'}_\lambda)) \\ (p^{-1}(e_\lambda), p^{-1}(\dot{e}_\lambda)) &\longrightarrow (p^{-1}(e_\lambda), p^{-1}(e_\lambda - (e'_\lambda - \dot{e'}_\lambda))) \end{aligned}$$

também o são. Temos o diagrama comutativo induzido pelas inclusões

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_\lambda H_n(p^{-1}(e_\lambda), p^{-1}(\dot{e}_\lambda)) \arrow[r, "\{i_{\lambda *}\}"] \arrow[d] & H_n(E, E_{s-1}) \arrow[d] \\ \bigoplus_\lambda H_n(p^{-1}(e_\lambda), p^{-1}(e_\lambda - (e'_\lambda - \dot{e'}_\lambda))) \arrow[r] & H_n(p^{-1}(e_\lambda), p^{-1}(\dot{e}_\lambda)) \\ \bigoplus H_n(p^{-1}(e'_\lambda), p^{-1}(\dot{e'}_\lambda)) \arrow[r] \arrow[u] & H_n(\cup_\lambda p^{-1}(e'_\lambda), \cup_\lambda p^{-1}(\dot{e'}_\lambda)) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Todas as setas verticais nesse diagrama são isomorfismos. As superiores são induzidas por equivalências de homotopia, enquanto as inferiores são induzidas decorrem da propriedade da excisão. Uma vez que e'_λ e e'_μ são disjuntos para $\mu \neq \lambda$, a seta horizontal mais abaixo é um isomorfismo pois é induzido de um isomorfismo de cadeias. Isso prova que $\{i_{\lambda *}\}$ é um isomorfismo.

□

Antes de prosseguir com o cálculo de $H_n(E_s, E_{s-1})$ e o operador de bordo da terna (E_s, E_{s-1}, E_{s-2}), introduziremos um subcomplexo de cadeias do complexo de cadeias singular de um CW-complexo relativo que é equivalente ao próprio complexo.

Teorema 7.10. *Seja $\{X_s\}$ uma sequência crescente de subespaço do espaço X e seja $\bar{\Delta}(X)$ o subcomplexo de $\Delta(X)$ gerado pelos simplexos singulares $\sigma : \Delta^q \to X$ tais que $\sigma((\Delta^q)^k) \subset X_k$ para todo X_k. Se (X, X_{s-1}) é $(s-1)$-conexo para todo s, então a inclusão $\bar{\Delta}(X) \to \Delta(X)$ é uma equivalência de cadeias.*

Para provar o teorema acima faremos uso do seguinte lema, que pode ser encontrado em ([7], 7.4.7)

Lema 7.11. *Seja C um subcomplexo de um complexo de cadeias livre $\Delta(X)$ tal que C é gerado pelos simplexos singulares que ele contém. Assuma que para todo simplexo singular $\sigma : \Delta^q \to X$ está associada uma aplicação $P(\sigma) : \Delta^q \times I \to X$ tal que*

(a) $P(\sigma)(z, 0) = \sigma(z)$ para todo $z \in \Delta^q$.

(b) Defina $\bar{\sigma}$ por $\bar{\sigma}(z) = P(\sigma)(z, 1)$. Então $\bar{\sigma}$ é um simplexo singular em C. Ainda, se $\sigma \in C$, então $\bar{\sigma} = \sigma$.

(c) Se $e^i_q : \Delta^{q-1} \to \Delta^q$ omite o i-ésimo vértice, então $P(\sigma)(e^i_q \times 1) = P(\sigma^{(i)})$.

Então a inclusão $C \to \Delta(X)$ é uma equivalência de cadeias.

Demonstração do teorema (7.10). Utilizaremos o lema (7.11). Definamos P por indução sobre q. Se $q = 0$ e $\sigma(\Delta^0) \in X_0$ defina $P(\sigma)$ por $\Delta^0 \times I \to \Delta^0 \xrightarrow{\sigma} X$. Se $\sigma(\Delta^0) \notin X_0$, existe um caminho $\omega : I \to X$ entre $\sigma(\Delta^0)$ e algum ponto X_0 (pois (X, X_0) é 0-conexo). Então $P(\sigma) : \Delta^0 \times I \to X$ é definido por $P(\sigma)(v_0, t) = \omega(t)$. Seja $q > 0$ e assuma que $P(\sigma)$ foi definido para todos os simplexos singulares σ de dimensão menor que q de forma a satisfazer o lema (7.11). Seja $\sigma : \Delta^q \to X$. Se $\sigma((\Delta^q)^k) \subset X_k$, defina $P(\sigma)$ por $\Delta^q \times I \to \Delta^q \xrightarrow{\sigma} X$. Se $\sigma((\Delta^q)^k) \not\subset X_k$ para algum k, então defina $P(\sigma) : \Delta^q \times 0 \cup \dot{\Delta}^q \times I \to X$ como $P(\sigma)(x, 0) = \sigma(x)$ e $P(\sigma)(y, t) = P(\sigma)(i^i_q(y), t) = P(\sigma^{(i)})(y, t)$, para algum $i \leq q$. Como P satisfaz o item (b) de (7.11) para $q-1$ temos que $P(\sigma)(y, 1) = P(\sigma^{(i)})(y, 1) = \overline{\sigma^{(i)}}(y)$ que satisfaz $\overline{\sigma^{(i)}}((\dot{\Delta}^q)^k) \subset X_k$ para todo k. É possível definir um homeomorfismo $\Delta^q \times I \simeq E^q \times I$ que leva $(\Delta^q \times 0 \cup \dot{\Delta}^q \times I, \dot{\Delta}^q \times 1)$ sobre $(E^q, \mathbb{S}^{q-1}) \times 0$. Como (X, X_q) é q-conexo segue que a aplicação dada, de $(\Delta^q \times 0 \cup \dot{\Delta}^q \times I, \dot{\Delta}^q \times 1)$ para (X, X_q), se estende a uma aplicação $P(\sigma) : \Delta^q \times I \to X$ tal que $P(\sigma)(\Delta^q \times 1) \subset X_q$. Então, $P(\sigma)_{|\Delta^q \times 1} : \Delta^q \times 1 \to X$ é uma aplicação tal que $(\Delta^q)^k$ é levado em X_k, e portanto $P(\sigma)$ pode ser definida para todo σ de forma a satisfazer as hipóteses de (7.11). $\square$

Note que o teorema (7.10) se aplica a filtração definida pelos esqueletos de um CW-complexo relativo (B, A). Logo, se $\bar{\Delta}(X) \subset \Delta(X)$ é o subcomplexo de simplexos singulares celulares, então $\bar{\Delta}(X) \to \Delta(X)$ é uma equivalência de cadeias. Além disso, se (X', A) é um subcomplexo de (X, A), então $\bar{\Delta}(X') = \bar{\Delta}(X) \cap \Delta(X')$. Agora, uma vez que estes complexos são livres, temos que $\bar{\Delta}(X, X') \to \Delta(X, X')$ é uma equivalência de cadeias se, e somente se, $H_*(\bar{\Delta}(X, X')) \to H_*(\Delta(X, X'))$ é um isomorfismo. Mas que este último é um isomorfismo segue pelo lema dos cinco. Em particular,

$$\bar{\Delta}((X, A)^s, (X, A)^{s-1}) \to \Delta((X, A)^s, (X, A)^{s-1})$$

é uma equivalência de cadeias para todo s.

Corolário 7.12. *Dado um CW-complexo relativo (X, A), seja $C(X, A) = \{C_s, \partial\}$ o complexo de cadeias em que*

$$C_s = H_s(\bar{\Delta}((X, A)^s, (X, A)^{s-1}))$$

e $\partial : C_s \to C_{s-1}$ é o operador de bordo da terna $((X, A)^s, (X, A)^{s-1}, (X, A)^{s-2})$. Então $H_*(C(X, A)) \simeq H_*(X, A)$.

Demonstração. Seja F a filtração de $\bar{\Delta}(X, A)$ dada por $F_s\bar{\Delta}(X, A) = \bar{\Delta}((X, A)^s, A)$. Então a sequência espectral correspondente tem a propriedade que

$$E^1_{s,t} \simeq H_{s+t}((X, A)^s, (X, A)^{s-1})$$

e d^1 corresponde ao operador bordo da terna $((X, A)^s, (X, A)^{s-1}, (X, A)^{s-2})$. Aplicando o lema (7.9) à fibração trivial $X \to X$ segue que existe um isomorfismo

$$\bigoplus_{\lambda} H_q(e_\lambda, \dot{e}_\lambda) \simeq H_q((X, A)^s, (X, A)^{s-1})$$

em que $\{e_\lambda\}$ é a família de s-células de (X, A). Então, $H_q((X, A)^s, (X, A)^{s-1}) = 0$ se $q \neq s$, e portanto,

$$E^1_{s,t} = 0, \quad \text{se } t \neq 0$$

e $E^1_{s,0} \simeq C_s$. Isso implica que $E^2_{s,t} = 0$ se $t \neq 0$ e $E^2_{s,0} \simeq H_s(C(X, A))$. Portanto, por indução em r, vemos que $E^r_{s,t} = 0$ se $t \neq 0$ e $E^r_{s,0} = E^2_{s,0}$ para $r \geq 2$. Logo, $E^\infty_{s,t} = 0$ para $t \neq 0$ e $E^\infty_{s,0} = H_s(C(X, A))$. Uma vez que E^∞ é o módulo bigraduado associado a uma filtração em $H_*(X, A)$, temos que $H_s(C(X, A)) \simeq H_s(X, A)$.

□

Para cada caminho ω em B, temos por (2.23) uma classe de homotopia $h[\omega] \in [F_{\omega(0)}, F_{\omega(1)}]$ associada a classe $[\omega]$ do caminho ω.

Definição 7.13. *A fibração $p\colon E \to B$ é dita orientável sobre R se, para todo caminho fechado ω em B, $h[\omega]_*\colon H_*(F_{\omega(0)}; R) \to H_*(F_{\omega(0)}; R)$ é a identidade.*

A definição dada acima generaliza a definição de orientabilidade (6.1) para o caso em que a fibração não é esférica. De fato, suponha que $p : E \to B$ seja uma fibração n-esférica e R-orientável, segundo a definição (6.1). Pela proposição (6.2) temos que o homomorfismo $i^* : H^{n+1}(\hat{E}, E; R) \to H^{n+1}(\hat{F}, F; R)$ é um monomorfismo. Agora, como a fibração p é R-orientável, concluímos que i^* é um isomorfismo, e portanto, pela mesma proposição, devemos ter que a ação de $\pi_1(B)$ sobre $\mathrm{Hom}(H_n(F; \mathbb{Z}); R)$ é trivial. Agora, como $H_n(F; \mathbb{Z})$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$, devemos ter que para toda classe $[\omega] \in \pi_1(B)$ o homomorfismo induzido $h\omega_* \in \{1_*, -1_*\}$ em que 1_* é o homomorfismo identidade em $H_n(F; \mathbb{Z})$.

Agora, pela naturalidade do teorema dos coeficientes universais, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
H_n(F;\mathbb{Z}) \otimes R \arrow[r, "h\omega_*\otimes 1"] \arrow[d] & H_n(F;\mathbb{Z}) \otimes R \arrow[d, "t"] \\
H_n(F;R) \arrow[r, "h\omega_*"'] & H_n(F;R)
\end{tikzcd}$$

em que as setas verticais são isomorfismos dados por $\{z\} \otimes r \mapsto \{z \otimes r\}$.

Se $h\omega_* = 1_*$ para todo $[\omega] \in \pi_1(B)$ então a fibração p é R-orientável. Suponha que existe $[\omega_0] \in \pi_1(B)$ tal que $h\omega_{0*} = -1_*$. Se x é um gerador de $H_n(F; \mathbb{Z})$, considere o homomorfismo $j \in \mathrm{Hom}(H_n(F; \mathbb{Z}); R)$ definido por $j(x) = 1_R$, em que 1_R é o elemento identidade do anel R. Da hipotese da ação de $\pi_1(B)$ sobre $\mathrm{Hom}(H_n(F; \mathbb{Z}); R)$ ser trivial, temos que $j \circ h\omega_{0*} = j$ e por conseguinte $-1_R = j(h\omega_0)_*(x) = j(x) = 1_R$. Assim,

$$h\omega_{0*}(\{z \otimes r\}) = t(h\omega_{0*} \otimes 1)(\{z\} \otimes r) = t(h\omega_{0*}\{z\} \otimes r) = t(-\{z\} \otimes r) = t(\{z\} \otimes r) = \{z \otimes r\}$$

para todo elemento $\{z \otimes r\}$ de $H_n(F;R)$. Concluímos assim que $h\omega_* : H_n(F;R) \to H_n(F;R)$ é o homomorfismo identidade para todo $[\omega] \in \pi_1(B)$. Donde segue que p é R-orientável.

Teorema 7.14. *(a) Uma fibração sobre um espaço simplesmente conexo é orientável sobre qualquer R;*

(b) Uma fibração induzida por uma fibração orientável sobre R é orientável sobre R.

Demonstração. O primeiro item segue imediatamente da definição. Para o segundo, sejam $p' : E' \to B'$ a fibração induzida de $f : B' \to B$ por $p : E \to B$ e $f' : E' \to E$ a aplicação associada. Para uma classe de caminhos $[\omega']$ em B', sejam $f_0 : F'_{\omega'(0)} \to F_{f\omega'(0)}$ e $f_1 : F_{\omega'(1)} \to F_{f\omega'(1)}$ os homeomorfismos definidos por f'. Então,

$$[f_1]h[\omega'] = h[f\omega'][f_0].$$

Aplicando esse fato ao caso em que ω' é um laço em B', temos

$$[f_1]_* h[\omega']_* = h[f\omega']_*[f_0]_*.$$

Agora, como p é R-orientável, $h[f\omega']_*$ é o homomorfismo identidade. Além disso, como ω' é um laço, temos que os homeomorfismos f_0 e f_1 são iguais, donde concluímos que $h[\omega']$ é o homomorfismo identidade e por conseguinte p' é R-orientável.

□

Uma aplicação $f : F_{b_0} \to F_{b_1}$ entre fibras de uma fibração $p : E \to B$ é dita *admissível* se existe um caminho ω de b_0 a b_1 em B tal que $h[\omega] = [f]$.

Proposição 7.15. *Seja $p : E \to B$ uma fibração. Então*

(a) Uma aplicação admissível é uma equivalência de homotopia;

(b) A composta de aplicações admissíveis é admissível;

(c) A inversa homotópica de uma aplicação admissível é admissível;

(d) Se B é conexo por caminhos, então existe uma aplicação admissível entre quaisquer duas fibras de p sobre B;

(e) Se p é orientável sobre R, então quaisquer duas aplicações admissíveis de F_{b_0} para F_{b_1} induzem o mesmo homomorfismo entre $H_*(F_{b_0};R)$ e $H_*(F_{b_1};R)$.

Demonstração. Provaremos apenas o item (e). Suponha que $[f_1] = h[w]$ e $[f_2] = h[z]$. Temos que $h[\bar{z}]$ é uma inversa homotópica de $[f_2]$. Agora,

$$([f_1]h[\bar{z}])_* = [f_1]_* h[\bar{z}]_* = h[w]_* h[\bar{z}]_* = (h[w]h[\bar{z}])_* = h[\bar{z} * w]_*$$

Como $\bar{z} * w$ é um caminho fechado tem-se $h[\bar{z} * w]_* = 1$. Donde $[f_1]_* = (h[\bar{z}]_*)^{-1} = [f_2]$.

□

Sejam $b \in B$ um ponto base e $F = F_b$. Dado $\alpha{:}X \to B$, um *levantamento admissível* de α é uma aplicação $\tilde{\alpha}: X \times F \to E$ tal que $p\tilde{\alpha}(x,z) = \alpha(x)$ para todo $(x,z) \in X \times F$ e, para todo $x \in X$, a aplicação $f_x : F \to F_{\alpha(x)}$, dada por $f_x(z) = \tilde{\alpha}(x,z)$, é admissível.

Lema 7.16. *Sejam $p : E \to B$ uma fibração e X um espaço conexo por caminhos. Dados $\alpha : X \to B$ e $\tilde{\alpha} : X \times F \to E$ tais que $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha \circ p_1$, $p_1 : X \times \to X$ a projeção, então $\tilde{\alpha}$ é um levantamento admissível de α se, e somente se, existe $x_0 \in X$ tal que f_{x_0} é admissível.*

Demonstração. Sejam $x_1 \in X$ e $\omega : I \to X$ um caminho de x_0 à x_1. Como f_{x_0} é admissível, existe ω' caminho em B entre b_0 e $\alpha(x_0)$ com $[f_{x_0}] = h[\omega']$. Agora, é fácil verificar que $[f_{x_1}] = h[\omega' * (\alpha\omega)]$, donde segue que $[f_{x_1}]$ é admissível.

□

Queremos mostrar a existência de levantamentos admissíveis em certos casos.

Lema 7.17. *Sejam $p : E \to B$ uma fibração e A um retrato por deformação forte de X. Dadas aplicações $f : A \to E$ e $g : X \to B$ tais que $p \circ f = g_{|A}$ então existe aplicação $\bar{g} : X \to E$ tal que $p \circ \bar{g} = g$ e f é homotópica a $\bar{g}_{|A}$ por uma homotopia estacionária com relação a p.*

Demonstração. De fato, seja $D : I \times X \to X$ uma homotopia relativa à A entre alguma retração $r : X \to A$ e a identidade em X (tais aplicações existem uma vez que A é um retrato por deformação forte de X). Temos então o HLP

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f \circ r"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ I \times X \arrow[r, "g \circ D"'] & B \end{tikzcd}$$

Como p é fibração, esse HLP admite uma solução $G{:}I \times X \to E$. A aplicação $\bar{g}{:}X \to E$ dada por $\bar{g}(x) = G(1,x)$ é a aplicação procurada. □

Teorema 7.18. *Sejam $p : E \to B$ uma fibração orientável sobre um espaço conexo por caminhos e (B,A) um CW-complexo relativo. Sejam $b_0 \in B$ e $F = F_b$. Para $\sigma : (\Delta^s, \dot{\Delta}^s) \to ((B,A)^s, (B,A)^{s-1})$ existe um homomorfismo*

$$\bar{\sigma}_* : H_*((\Delta, \dot{\Delta}^s) \times F) \to H_*(E_s, E_{s-1})$$

definido como o homomorfismo induzido de algum levantamento admissível $\bar{\sigma}{:}(\Delta, \dot{\Delta}^s) \times F \to (E_s, E_{s-1})$.

Demonstração. Para todo s, $v_0 \times F$ é um retrato por deformação forte de $\Delta^s \times F$. Seja

$$\sigma : (\Delta^s, \dot{\Delta}^s) \to ((B,A)^s, (B,A)^{s-1})$$

um simplexo singular em $\bar{\Delta}((B,A)^s)$ e considere $\omega : I \to B$ um caminho de b à $\sigma(v_0)$. Tomando $f = h\omega : v_0 \times F \to E^s$ e $g = \sigma \circ p_1 : \Delta^s \times F \to (B,A)^s$ no lema (7.17), obtemos uma aplicação $\bar{\sigma}_\omega : (\Delta, \dot{\Delta}^s) \times F \to (E_s, E_{s-1})$ tal que $p \circ \bar{\sigma}_\omega = \sigma \circ p_1$. Além disso, $\bar{\sigma}_{\omega|v_0 \times F} \sim h\omega$, donde segue que $\bar{\sigma}_{\omega|v_0 \times F} : F \to F_{\sigma(v_0)}$ é admissível. Pelo lema (7.16), $\bar{\sigma}_\omega$ é um levantamento admissível de σ. Mostremos que o homomorfismo $(\bar{\sigma}_\omega)_*$

não depende da escolha do caminho ω. De fato, dado um caminho z de b à $\sigma(v_0)$ temos que

$$[\omega] = [\omega * \bar{z} * z].$$

Logo,

$$h[\omega] = h[\omega * \bar{z} * z] = h[z]h[\omega * \bar{z}].$$

Seja $\bar{f} = h(\omega * \bar{z})$. Note que $\bar{\sigma}_z \circ (1 \times \bar{f})$ satisfaz as condições do lema (7.17) para $f = h\omega$ e $g = \sigma \circ p_1$. De fato,

$$p \circ (\bar{\sigma}_z \circ (1 \times \bar{f})) = \sigma \circ p_1 \circ (1 \times \bar{f}) = \sigma \circ p_1$$

e

$$(\bar{\sigma}_z \circ (1 \times \bar{f}))_{|v_0 \times F} = \bar{\sigma}_{z|v_0 \times F} \circ (1 \times \bar{f})_{|v_0 \times F} = \bar{\sigma}_{z|v_0 \times F} \circ h(\omega * \bar{z}) \sim hz \circ h(\omega * \bar{z}) \sim h\omega.$$

Logo, pela unicidade da solução do HLP, devemos ter $\bar{\sigma}_\omega \sim \bar{\sigma}_z \circ (1 \times \bar{f})$. Como p é orientável, $\bar{f}_* = 1$ e segue que $(1 \times \bar{f})_* = 1$. Portanto, $(\bar{\sigma}_\omega)_* = (\bar{\sigma}_z)_*$, o que conclui a prova. □

A aplicação identidade $\xi_s : \Delta^s \to \Delta^s$ é um ciclo módulo $\dot{\Delta}^s$, e sua classe de homologia gera $H_s(\Delta^s, \dot{\Delta}^s; R)$. Dado $w \in H_n(F; G)$, $\{\xi_s\} \times w \in H_{s+n}((\Delta^s, \dot{\Delta}^s) \times F; G)$ e $\bar{\sigma}_*(\{\xi_s\} \times w) \in H_{s+n}(E_s, E_{s-1}; G)$. É claro que para σ fixo, $w \mapsto \bar{\sigma}_*(\{\xi_s\} \times w)$ é um homomorfismo de $H_n(F; G)$ em $H_{s+n}(E_s, E_{s-1}; G)$. Como os elementos σ formam uma base para $\bar{\Delta}_s(B, A)^s$, há um homomorfismo

$$\psi : \bar{\Delta}_s(B, A)^s \otimes H_n(F; G) \to H_{n+s}(E_s, E_{s-1}; G),$$

dado por $\psi(\sigma \otimes w) = \bar{\sigma}_*(\{\xi_s\} \times w)$. Se $\sigma(\Delta^s) \subset (B, A)^{s-1}$, então para todo levantamento admissível de σ temos $\bar{\sigma}(\Delta^s \times F) \subset E_{s-1}$ uma vez que $p \circ \bar{\sigma} = \sigma \circ p_1$. Portanto, $\bar{\sigma}_*(\{\xi_s\} \times w) = 0$ e ψ define um homomorfismo

$$\psi : \bar{\Delta}_s((B, A)^s, (B, A)^{s-1}) \otimes H_n(F; G) \to H_{n+s}(E_s, E_{s-1}; G).$$

Lema 7.19. *O homomorfismo*

$$\begin{array}{c} \bar{\Delta}_{s+1}((B, A)^s, (B, A)^{s-1}) \otimes H_n(F; G) \\ \Big\downarrow \partial \\ \bar{\Delta}_s((B, A)^s, (B, A)^{s-1}) \otimes H_n(F; G) \\ \Big\downarrow \psi \\ H_{n+s}(E_s, E_{s-1}; G) \end{array}$$

é trivial.

Demonstração. Seja $\sigma : (\Delta^{s+1}, (\Delta^{s+1})^{s-1}) \to ((B, A)^s, (B, A)^{s-1})$ um $(s+1)$-simplexo singular de $(B, A)^s$ e considere

$$\bar{\sigma}(\Delta^{s+1}, (\Delta^{s+1})^{s-1}) \times F \to (E_s, E_{s-1})$$

um levantamento admissível de σ.

Para $0 \leq i \leq s+1$, seja $e^i_{s+1} : \Delta^s \to \Delta^{s+1}$ a inclusão que omite o i-ésimo vértice. Então. $\sigma^{(i)} = \sigma \circ e^i_{s+1}$ e a composta

$$\Delta^s \times F \xrightarrow{e^i_{s+1} \times 1} \dot{\Delta}^{s+1} \times F \xrightarrow{\sigma'} E_s,$$

em que $\sigma' = \bar{\sigma}_{|\dot{\Delta}^{s+1} \times F}$, é um levantamento admissível de $\sigma^{(i)}$. Logo,

$$\psi(\sigma^{(i)} \otimes \omega) = \sigma'_*(e^i_{s+1} \times 1)_*(\{\xi_s\} \times \omega) = \sigma'_*(\{e^i_{s+1}\} \times \omega),$$

em que $\{e^i_{s+1}\} = \{e^i_{s+1}\xi_s\} \in H_s(\dot{\Delta})^{s+1}, (\Delta^{s+1})^{s-1})$. Assim,

$$\psi(\partial\sigma \otimes \omega) = \sigma'_*((-1)^i \{e^i_{s+1}\} \times \omega)$$

Entretanto, em $\Delta(\Delta^{s+1})$ vale a relação

$$\partial \xi_{s+1} = \sum (-1)^i e^i_{s+1}.$$

Portanto, se $j : (\dot{\Delta}^{s+1}, (\Delta^{s+1})^{s-1}) \to (\Delta^{s+1}, (\Delta^{s+1})^{s-1})$ é a inclusão, $j_*(\Sigma(-1)^i e^i_{s+1}) = 0$. Uma vez que σ' é igual a composta

$$\dot{\Delta}^{s+1} \times F \xrightarrow{j \times 1} \Delta^{s+1} \times F \xrightarrow{\bar{\sigma}} E_s$$

segue que

$$\psi(\partial\sigma \otimes \omega) = \bar{\sigma}_*(j \times 1)_*(\{\Sigma(-1)^i e^i_{s+1}\} \times \omega) = \bar{\sigma}_*(0) = 0.$$

□

Todo elemento de $\bar{\Delta}_s((B,A)^s, (B,A)^{s-1}) \otimes H_n(F;G)$ é um ciclo s-dimensional de $\bar{\Delta}((B,A)^s, (B,A)^{s-1}) \otimes H_n(F;G)$ e os bordos s-dimensionais são os elementos da imagem de

$$\partial \otimes 1 : \bar{\Delta}_{s+1}((B,A)^s, (B,A)^{s-1}) \otimes H_n(F;G) \to \bar{\Delta}_s((B,A)^s, (B,A)^{s-1}) \otimes H_n(F;G).$$

Logo, pelo lema anterior, temos que ψ induz um homomorfismo

$$\psi_* : H_s((B,A)^s, (B,A)^{s-1}); H_n(F;G)) \to H_{n+s}(E_s, E_{s-1}; G).$$

O cálculo da sequência E^1 é completado pelo resultado

Teorema 7.20. *(a) Para $s \geq 0$ há um isomorfismo*

$$\psi_* : H_s((B,A)^s, (B,A)^{s-1}); H_n(F;G)) \to H_{n+s}(E_s, E_{s-1}; G).$$

(b) Para $s \geq 1$, temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
H_s((B,A)^s, (B,A)^{s-1}); H_n(F;G)) & \xrightarrow{\psi_*} & H_{n+s}(E_s, E_{s-1}; G) \\
\Big\downarrow \partial & & \Big\downarrow \partial \\
H_{s-1}((B,A)^{s-1}, (B,A)^{s-2}); H_n(F;G)) & \xrightarrow[\psi_*]{} & H_{n+s}(E_s, E_{s-1}; G).
\end{array}$$

Demonstração. Para o primeiro item, mostremos que para uma s-célula em $B - A$, o homomorfismo

$$\psi_* : H_s(e, \dot{e}; H_n(F; G)) \to H_{n+1}(p^{-1}(e), p^{-1}(\dot{e}); G)$$

é um isomorfismo.

Sejam $f:(E^s, \mathbb{S}^{s-1}) \to (e, \dot{e})$ a aplicação característica para e e $p':E' \to E^s$ a fibração induzida de f por p com aplicação associada $f' : (E', p'^{-1}(\mathbb{S}^{s-1})) \to (p^{-1}(e), p^{-1}(\dot{e}))$. Temos então o quadrado comutativo

$$\begin{tikzcd} H_s(E^s, \mathbb{S}^{s-1}; H_n(F; G)) \arrow[r, "\psi_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_{s+n}(E', p'^{-1}(\mathbb{S}^{s-1}); G) \arrow[d, "f'_*"] \\ H_s(e, \dot{e}; H_n(F; G)) \arrow[r, "\psi_*"'] & H_{s+n}(p^{-1}(e), p^{-1}(\dot{e}); G) \end{tikzcd}$$

em que as setas verticais são isomorfismos (por propriedades de excisão e homotopia). Portanto, basta provar o resultado para o caso da fibração trivial sobre E^s, e para tal caso, ψ é um isomorfismo pelo teorema de Künneth. Agora, pela naturalidade de ψ_* e pelo lema (7.9), ψ_* induz um isomorfismo

$$\begin{tikzcd} H_s((B, A)^s, (B, A)^{s-1}; H_n(F; G)) \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[d, "\psi_*"'] & \bigoplus H_s(e, \dot{e}; H_n(F; G)) \arrow[d, "\psi_*"] \\ H_s(E^s, E^{s-1}; G) \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \bigoplus H_{n+s}(p^{-1}(e_\lambda), p^{-1}(\dot{e}_\lambda); G) \end{tikzcd}$$

Para o segundo item, seja $\sigma : (\Delta^s, \dot{\Delta}^s) \to ((B, A)^s, (B, A)^{s-1})$ dado. Considere o elemento

$$\{\sigma \otimes \omega\} \in H_s((B, A)^s, (B, A)^{s-1}; H_n(F; G))$$

determinado pelo ciclo $\sigma \otimes \omega$. Então, em $H_{s-1}((B, A)^{s-1}, (B, A)^{s-2}; H_n(F; G))$ temos

$$\partial\{\sigma \otimes \omega\} = \{\Sigma(-1)^i \sigma^{(i)} \otimes \omega\}.$$

Seja $\bar{\sigma}:(\Delta^s, \dot{\Delta}^s) \times F \to (E_s, E_{s-1})$ um levantamento admissível para σ. Para $0 \leq i \leq s$, a composta

$$(\Delta^{s-1}, \dot{\Delta}^{s-1}) \times F \xrightarrow{e_s^i \times 1} (\dot{\Delta}^s, (\Delta^s)^{s-2}) \times F \xrightarrow{\sigma'} (E_{s-1}, E_{s-2})$$

onde σ' é a restrição de $\bar{\sigma}$ à $(\dot{\Delta}^s, (\Delta^s)^{s-2}) \times F$ é um levantamento admissível de $\sigma^{(i)}$. Logo,

$$\begin{aligned} \psi_* \partial\{\sigma \otimes \omega\} &= \Sigma(-1)^i \sigma'_*(e_s^i \times 1)_*(\{\xi_{s-1} \times \omega\}) = \sigma'_*(\{\Sigma(-1)^i e_s^i\} \times \omega) = \sigma'_*(\partial\{\xi_s\} \times \omega) \\ &= \sigma'_* \partial(\{\xi_s\} \times \omega) = \partial\sigma'_*(\{\xi_s\} \times \omega) = \partial\psi_*\{\sigma \otimes \omega\}. \end{aligned}$$

□

Como $H_s((B, A)^s, (B, A)^{s-1}))$ é um módulo livre, segue do teorema dos coeficientes universais que

$$\begin{aligned} &H_s((B, A)^s, (B, A)^{s-1}); H_n(F; G)) \\ &\qquad \simeq H_s((B, A)^s, (B, A)^{s-1})) \otimes H_n(F; G) = C_s(B, A) \otimes H_n(F; G). \end{aligned}$$

Agora, sob esse isomorfismo, temos que o operador bordo da terna $((B,A)^s, (B,A)^{s-1}, (B,A)^{s-2})$ corresponde ao homomorfismo

$$\partial \otimes 1 : C_s(B,A) \otimes H_n(F;G) \to C_{s-1}(B,A) \otimes H_n(F;G).$$

Portanto, o teorema (7.20) pode ser interpretado como ψ induzindo um isomorfismo entre os complexos de cadeias bigraduados

$$C_*(B,A) \otimes H_*(F;G) \quad \text{e} \quad H_{s+t}(E_s, E_{s-1}; G) = E^1_{s,t}$$

do teorema (7.8). Agora, juntando esse corolário (7.12) temos

Teorema 7.21. *Seja $p : E \to B$ uma fibração orientável sobre um CW-complexo relativo (B,A) conexo por caminhos. Se $F = p^{-1}(b)$, então existe uma $E^{(2)}$ sequência espectral convergente com $E^2_{s,t} \simeq H_s((B,A); H_t(F;G))$ e E^∞ é o módulo bigraduado associado a filtração de $H_*(E,E_A;G)$ definida por $F_sH_*E, E_A; G = \operatorname{Im}[H_*(E_s, E_A; G) \to H_*(E, E_A; G)]$.*

Note que a sequência do teorema (7.21) é de primeiro quadrante e funtorial na categoria das fibrações $p : E \to B$ orientáveis sobre CW-complexos relativos (B,A) conexos por caminhos e aplicações fibradas $f' : E' \to E$ tais que temos uma aplicação celular entre os espaços bases $f : (B', A') \to (B,A)$.

Gostaríamos de estender esse resultado para fibrações com espaços base mais gerais. Sejam $p : E \to B$ uma fibração orientável com B conexo por caminhos e $A \subset B$. Sejam $f : (B', A) \to (B,A)$ uma CW-aproximação e $p' : E' \to B'$ a fibração induzida de f por p e f' a aplicação fibrada induzida por f. Segue da exatidão da sequência de homotopia de uma fibração e do lema dos cinco que f' é uma equivalência de homotopia fraca e portanto f' induz um isomorfismo entre as sequências de homologia de (E, E_A) e (E', E'_A). Como B' é conexo por caminhos e $p' : E' \to B'$ é orientável, segue do teorema anterior que existe uma $E^{(2)}$ sequência espectral convergente com

$$E^2_{s,t} \simeq H_p(B', A; H_q(F;G)) \simeq H_p(B, A; H_q(F;G))$$

e E^∞ associada a alguma filtração de $H_*(E', E'_A; G) \simeq H_*(E, E_A; G)$.

Se $g : B'' \to B$ é outra CW-aproximação de (B,A) existe uma aplicação celular $h : (B'', A) \to (B', A)$ tal que $f \circ h \simeq g \operatorname{rel} A$. A aplicação h induz um isomorfismo das $E^{(2)}$ sequências espectrais de $p' : E' \to B'$ e $p'' : E'' \to B''$. Temos então que as filtrações induzidas pelos isomorfismos $H_*(E', E'_A; G) \simeq H_*(E, E_A; G)$ e $H_*(E'', E''_A; G) \simeq H_*(E, E_A; G)$ correspondem. Temos então

Teorema 7.22. *Seja $p : E \to B$ uma fibração orientável com B conexo por caminhos e fibra F sobre $b \in B$. Dado $A \subset B$, existe uma $E^{(2)}$ sequência espectral convergente com*

$$E^2_{s,t} \simeq H_s((B,A); H_t(F;G))$$

e E^∞ é o módulo bigraduado associado a alguma filtração de $H_*(E, E_A; G)$. Essa sequência espectral é de primeiro quadrante e funtorial na categoria de fibrações orientáveis com espaço base conexo por caminhos e aplicações fibradas.

8 Aplicações das sequências espectrais

Uma das aplicações das sequências espectrais é a generalização das sequências de Wang e Gysin.

Teorema 8.1. *Seja $p : E \to B$ uma fibração orientável sobre um corpo e com base conexa por caminhos e fibra F. Assuma que a característica de Euler $\chi(F)$ e $\chi(B)$ estão definidas (sobre o corpo). Então $\chi(E)$ está definida e*

$$\chi(E) = \chi(B)\chi(F).$$

Demonstração. veja [7] $\square$

Podemos calcular o homomorfismo induzido pela inclusão $i : F \to B$ a partir da sequência espectral. Para $r \geq 2$ temos que $E^{r+1}_{0,t}$ é um quociente de $E^r_{0,t}$ (pois $E^r_{-r,t+r-1} = 0$). Logo, existe um epimorfismo $E^2_{0,t} \to E^\infty_{0,t}$. Como B é conexo por caminhos, temos um isomorfismo $H_t(F; G) \simeq H_0(B; H_t(F; G))$. Usando a sequência espectral da fibração $F \to b$ e a naturalidade desta, segue que $i_* : H_t(F; G) \to H_t(E; G)$ é a composta

$$H_t(F; G) \simeq H_0(B; H_t(G; H)) \simeq E^2_{0,t} \to E^\infty_{0,t} = F_0H_t(E; G) \subset H_t(E; G).$$

e temos a sequência de Wang generalizada

Teorema 8.2. *Seja $p : E \to B$ uma fibração orientável com fibra F e base 1-conexa que também é uma n-esfera de homologia (sobre R) para algum $n \geq 2$. Então há uma sequência exata longa*

$$\cdots \to H_t(F; G) \xrightarrow{i_*} H_t(E; G) \to H_{t-n}(F; G) \to H_{t-1}(F; G) \to \cdots$$

Demonstração. Como $H_*(B)$ não tem torção, $E^2_{s,t} \simeq H_s(B) \otimes H_t(F; G)$ na sequência espectral de p. Logo, $E^2_{s,t} = 0$ a menos que $s = 0$ ou $s = n$, e o único diferencial não nulo é $d^n : E^2_{n,t} \to E^2_{0,n+t-1}$. Portanto, temos sequências exatas

$$0 \to E^\infty_{n,t} \to E^2_{n,t} \xrightarrow{d^n} E^2_{0,t+n-1} \to E^\infty_{0,t+n-1} \to 0$$
$$0 \to E^\infty_{0,t} \to H_t(E; G) \to E^\infty_{n,t-n} \to 0$$

Essas sequências se encaixam numa sequência exata longa

$$\cdots \to H_t(E; G) \to E^2_{n,t-n} \xrightarrow{d^n} E^2_{0,t-1} \to H_{t-1}(E; G) \to \cdots$$

Por fim, o resultado segue observando-se que

$$E^2_{n,t-n} \simeq H_n(B) \otimes H_{t-n}(F; G) \simeq H_{t-n}(F; G)$$
$$E^2_{0,t-1} \simeq H_0(B) \otimes H_{t-1}(F; G) \simeq H_{t-1}(F; G)$$

e que após essa substituição, $H_{t-1}(F; G) \to H_{t-1}(E; G)$ é i_*. $\square$

Sejam $p\colon E \to B$ uma fibração orientável com base conexa por caminhos e $B' \subset B$ e $E' = p^{-1}(B')$. Mostremos que o homomorfismo induzido por $p : (E, E') \to (B, B')$ é determinada pela sequência espectral. Para $r \geq 2$, $E^{r+1}_{s,0}$ é um submódulo de $E^r_{s,0}$ (uma vez que $E^r_{s+r,1-r} = 0$). Logo existe um monomorfismo $E^\infty_{s,0} \to E^2_{s,0}$. O homomorfismo aumentação $H_0(F; G) \to G$ induz um homomorfismo $H_s(B, B'; H_0(F; G)) \to H_s(B, B'; G)$. Usando a sequência espectral da fibração $B' \to B$ e a naturalidade desta, segue que $p_* : H_s(E, E'; G) \to H_s(B, B'; G)$ é a composta

$$H_s(E, E'; G) = F_s H_s(E, E'; G) \to E^\infty_{s,0} \to E^2_{s,0} \simeq H_s(B, B'; H_0(F; G)) \to H_s(B, B'; G)$$

e temos a sequência de Gysin generalizada

Teorema 8.3. *Seja $p\colon E \to B$ uma fibração orientável com base conexa por caminhos e por fibra F uma n-esfera homológica (sobre R), $n \geq 1$. Se $B' \subset B$ e $E' = p^{-1}(B')$ temos a sequência exata*

$$\cdots \to H_s(E, E'; G) \xrightarrow{p_*} H_s(B, B'; G) \to H_{s-n-1}(B, B'; G) \to H_{s-1}(E, E'; G) \to \cdots$$

Demonstração. Uma vez que na sequência espectral de p temos

$$E^2_{s,t} \simeq H_s(B, B'; H_t(F; G)) = 0, \quad \text{para } t \neq 0, n,$$

O único diferencial não nulo é $d^{n+1} : E^2_{s,0} \to E^2_{s-n-1,n}$. Portanto, temos sequências exatas

$$0 \to E^\infty_{s,0} \to E^2_{s,0} \xrightarrow{d^{n+1}} E^2_{s-n-1,n} \to E^\infty_{s-n-1,n} \to 0$$
$$0 \to E^\infty_{s-n,n} \to H_s(E, E'; G) \to E^\infty_{s,0} \to 0$$

Essas sequências se encaixam numa sequência exata longa

$$\cdots \to H_s(E, E'; G) \to E^2_{s,0} \xrightarrow{d^{n+1}} E^2_{s-n-1,n} \to H_{s-1}(E, E'; G) \to \cdots$$

Por fim, o resultado segue observando-se que

$$E^2_{s,0} \simeq H_s(B, B'; H_0(F; G)) \simeq H_s(B, B'; G)$$
$$E^2_{s-n-1,n} \simeq H_{s-n-1}(B, B'; H_n(F; G)) \simeq H_{s-n-1}(B, B'; G)$$

e que após essa substituição, $H_s(E, E'; G) \to H_s(B, B'; G)$ é p_*. □

Temos também o teorema de Serre

Teorema 8.4. *Seja $p\colon E \to B$ uma fibração orientável com F e B conexos por caminhos. Assuma que $H_q(B, B') = 0$ para $q < n$ e $H_q(F) = 0$ para $0 < q < m$ (coeficientes em R). Então o homomorfismo $p_* : H_q(E, E') \to H_q(B, B')$ é um isomorfismo para $q \leq n + m - 1$ e um epimorfismo para $q = m + n$.*

Demonstração. Temos que

$$E^2_{s,t} \simeq H_s(B, B'; H_t(F)) \simeq H_s(B, B') \otimes H_t(F) \oplus \operatorname{Tor}(H_{s-1}(B, B'), H_t(F)).$$

Por hipótese, $E^2_{s,t} = 0$ se $s < n$ ou $0 < t < m$. Logo, se $q \leq n + m - 1$, $E^2_{s,q-s} = 0$, exceto, possivelmente, para $E^2_{q,0}$. Daí, $E^r_{s,q-s} = 0$ exceto para o termo $E^r_{q,0}$ e $E^r_{q,0} = E^2_{q,0}$ para todo $r \geq 2$. Portanto, $E^\infty_{q,0} \simeq E^2_{q,0}$ e $E^\infty_{s,q-s} = 0$ para $q \neq s$. Assim,

$$H_q(E, E') \simeq H_q(B, B'; H_0(F)) \simeq H_q(B, B')$$

é o isomorfismo induzido por p_*. Se $q = n+m$, então $E^2_{s,n+m-s} = 0$, com exceção dos termos $E^2_{n+m,0}$ e $E^2_{n,m}$. Uma vez que $E^2_{n+m-r,r-1} = 0$ para $r \geq 2$, segue que

$$E^\infty_{n+m,0} \simeq E^2_{n+m,0} \simeq H_{m+n}(B, B'; H_0(F)) \simeq H_{n+m}(B, B')$$

Portanto, $p_*(H_{n+m}(E, E')) = H_{m+n}(B, B')$.

$\square$

Por fim temos a sequência de Serre para homologia

Teorema 8.5. *Seja $p : E \to B$ uma fibração orientável com B e F conexos por caminhos. Assuma que $H_i(B; \mathbb{Z}) = 0$, para $0 < i < m$ e $H_j(F; G) = 0$ para $0 < j < n$. Então existe uma sequência exata*

$$H_{m+n-1}(F; G) \xrightarrow{i_*} H_{m+n-1}(X; G) \xrightarrow{p_*} H_{m+n-1}(B; G) \to \cdots$$
$$\cdots \to H_{r+1}(B; G) \to H_r(F; G) \xrightarrow{i_*} H_r(X; G) \xrightarrow{p_*} H_r(B; G) \to \cdots$$

Demonstração. Pelo teorema dos coeficientes universais temos que

$$E^2_{p,q} = H_p(B; H_q(F; G)) \simeq H_p(B) \otimes H_q(F; G) \oplus \mathrm{Tor}(H_{p-1}(B), H_q(F; G)) = 0$$

se $0 < p < m$ ou $0 < q < n$. Logo, $E^2_{p,q} = 0$ para $p + q < m + n$ com $p \neq 0 \neq q$ e temos apenas $E^2_{r,0}$ e $E^2_{0,r}$. Logo, o único diferencial não nulo é $d^r : E^r_{r,0} \to E^r_{0,r}$ e temos sequências exatas

$$0 \to E^\infty_{r,0} \to E^r_{r,0} \xrightarrow{d^r} E^r_{0,r-1} \to E^\infty_{0,r-1} \to 0$$
$$0 \to E^\infty_{0,r} \to H_r(E; G) \to E^\infty_{r,0} \to 0$$

Novamente essas sequências se encaixam e obtemos uma sequência exata longa que, utilizando as observações feitas anteriormente, concluímos que é a sequência procurada.

$\square$

9 Uma aplicação

Faremos aqui uma breve exposição do conteúdo do artigo [8].

Seja $LF(X)$ o conjunto das classes de equivalência de fibrações $p: E \to X$ (como definido no capítulo 2) com fibras com o mesmo tipo de homotopia de F. Podemos considerar $LF(-)$ como um funtor, que associa a cada aplicação $f{:}X \to Y$, a aplicação $LF(f): LF(X) \to LF(Y)$ tal que $LF(f)[p] = [p_f]$, em que p_f é a fibração induzida de p por f.

Em 1963, James Stasheff provou o seguinte teorema de classificação para espaços fibrados:

Teorema de Classificação. *Se F é um CW-complexo finito, existe um espaço B_H tal que $[-, B_H]$ e $LF(-)$ são equivalentes como funtores da categoria de CW-complexos e classes de homotopia de aplicações para a categoria de conjuntos e funções.*

Para este fim, Stasheff construiu transformações naturais $S: [-, B_H] \to LF(-)$ e $T: LF(-) \to [-, B_H]$ utilizando quase-fibrações. Abaixo damos uma ideia de como é feita tal construção.

Definição 9.1. *Uma quase-fibração $p{:}E \to B$ é uma equivalência de homotopia fraca sobrejetora.*

Na sequência assumiremos que F é um CW-complexo finito e E tem o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo.

Dada uma quase-fibração $p: E \to B$, definimos a *fibração associada* à p, $\mathbf{Hur}(p): E^p \to B$, como a fibração do teorema (2.37).

A aplicação principal associada $\mathbf{Prin}(p)$: Seja $\mathbf{Prin}(E)$ o subespaço de E^F consistindo das aplicações $\varphi{:}F \to E$ tais que φ é uma equivalência de homotopia entre F e alguma fibra $p^{-1}(x), x \in B$. Definimos a *aplicação principal associada* $\mathbf{Prin}(p): \mathbf{Prin}(E) \to B$ por $\mathbf{Prin}(p)(\varphi) = p(\varphi(F))$. As fibras de $\mathbf{Prin}(p)$ têm o mesmo tipo de homotopia que $H = H(F)$, o monoide topológico das equivalências de homotopia de F em F.

O prolongamento $\mathbf{Prol}(p)$: Considere os espaços

$$\mathbf{Prol}(E) = (\mathbf{T}(\mathbf{Prin}(E)) \times F) \cup_\gamma E,$$

em que $\gamma: \mathbf{Prin}(E) \times F \to E$ é a aplicação avaliação, e

$$\mathbf{Prol}(B) = \mathbf{T}(\mathbf{Prin}(E)) \cup_q B,$$

em que $q = \mathbf{Prin}(p)$. Definimos o *prologamento* $\mathbf{Prol}(p) : \mathbf{Prol}(E) \to \mathbf{Prol}(B)$ como sendo a extensão de p que comuta o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{T}(\mathbf{Prin}(E)) \times F \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Prol}(E) \arrow[d, "\mathbf{Prol}(p)"] \\
\mathbf{T}(\mathbf{Prin}(E)) \arrow[r] & \mathbf{Prol}(B).
\end{tikzcd}$$

Lema 9.2. *Se p é uma quase-fibração, então* $\mathbf{Prol}(p)$ *também o é.*

O prolongamento final $\mathbf{Ult}(p)$: Seja $p_0 : E_0 \to B_0$ uma quase-fibração. Defina, indutivamente, $p_n : E_n \to B_n$ como sendo $\mathbf{Prol}(p_{n-1}) : \mathbf{Prol}(E_{n-1}) \to \mathbf{Prol}(B_{n-1})$. Seja $\mathbf{Ult}(p) : \mathbf{Ult}(E) \to \mathbf{Ult}(B)$ o limite das quase-fibrações $p_n : E_n \to B_n$.

Lema 9.3. *O prolongamento final* $\mathbf{Ult}(p)$ *é uma quase-fibração. Se p é uma fibração, então* $\mathbf{Prin}(\mathbf{Ult}(p))$ *é uma quase-fibração.*

Considere a fibração constante $\theta : F \to *$. Neste caso, $\mathbf{Prin}(F)$ é H e $\mathbf{Prin}(\mathbf{Ult}(\theta))$ é uma quase-fibração com fibra H. Denote essa quase-fibração por $p_H : E_H \to B_H$. Ainda, denote a fibração associada $\mathbf{Hur}(\mathbf{Ult}(\theta))$ por $u : UE \to B_H$. Então as fibras de u têm o mesmo tipo de homotopia que F. Agora, as transformações naturais S e T são construídas da seguinte forma:

A transformação S:$[-, B_H] \to LF(-)$: Dada uma classe de aplicações $[f] \in [X, B_H]$, definimos $S_X([f]) = [u_f]$, em que u_f é a fibração induzida de u por f. Note que, pelo teorema (2.31), a transformação S está bem definida.

A transformação $T : LF(-) \to [-, B_H]$: Dada uma classe de fibrações $[p] \in LF(X)$, considere o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[rrr, "i"] \arrow[dr, "\theta"] \arrow[ddd] & & & E \arrow[dl, "p"'] \arrow[ddd] \\
& * \arrow[r, "i'"] \arrow[d] & X \arrow[d, "g"] & \\
& B_H \arrow[r, "j"'] & \mathbf{Ult}(X) & \\
\mathbf{Ult}(F) \arrow[ur, "\mathbf{Ult}(\theta)"] \arrow[rrr] & & & \mathbf{Ult}(E) \arrow[ul, "\mathbf{Ult}(p)"']
\end{tikzcd}$$

No qual as setas verticais são inclusões. Temos que $j_* : [X, B_H] \to [X, \mathbf{Ult}(X)]$ é um isomorfismo. Logo, definimos $T_X([p])$ por $j_* T([p]) = [g]$.

□

Se $F = \mathbb{S}^n$, seja $B_{\mathbf{O}(n+1)}$ o espaço classificante do grupo ortogonal sobre $\mathbb{R}^{n+1}$. Uma vez que transformações ortogonais em $\mathbb{R}^{n+1}$ induzem homeomorfismos de $\mathbb{S}^n$ sobre si mesma, podemos considerar $\mathbf{O}(n+1)$ como um subgrupo de H. Dold e Lashoff mostraram que existe uma aplicação $J : B_{\mathbf{O}(n+1)} \to B_H$ que corresponde a identificar fibrados ortogonais a menos de fhe. Esta aplicação J pode ser identificada com $T(\gamma^{n+1})$ em que γ^{n+1} é o $\mathbb{S}^n$-fibrado universal $\gamma^{n+1} : E \to B_{\mathbf{O}(n+1)}$. Temos o seguinte resultado

Teorema 9.4. *O homomorfismo induzido $J^* : H^*(B_H; \mathbb{Z}_p) \to H^*(B_{\mathbf{O}(n+1)}; \mathbb{Z}_p)$ é sobrejetor para $p = 2, 3$. Ainda, se $n > 4$ e $p > 3$ é um primo, J^* não é sobrejetora.*

Demonstração. Veja [8] □

Referências

[1] DOLD, A. *Lectures on algebraic topology*. 2nd. ed. New York: Springer, 1980. (Classics in Mathematics).

[2] DOLD, A.; LASHOF, R. Principal quasi-fibrations and fibre homotopy equivalence of bundles. *Illinois J. Math.*, v. 3, p. 285–305, 1959. ISSN 0019-2082.

[3] DUGUNDJI, J. *Topology*. 1st. ed. Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1966. (Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics).

[4] HATCHER, A. *Algebraic topology*. 1st. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

[5] MUNKRES, J. *Topology*. 2nd. ed. New Jersey: Prentice Hall, Inc, 2000.

[6] PAVEŠIĆ, P.; PICCININI, R. A. *Fibrations and their classification*. 1st. ed. Lemgo: Heldermann Verlag, 2013. v. 33. xiv+158 p. (Research and Exposition in Mathematics, v. 33).

[7] SPANIER, E. H. *Algebraic topology*. 1st. ed. New York: McGraw-Hill Inc, 1966.

[8] STASHEFF, J. A classification theorem for fibre spaces. *Topology*, v. 2, p. 239–246, 1963. ISSN 0040-9383.

[9] STEENROD, N. E. A convenient category of topological spaces. *Michigan Math. J.*, v. 14, p. 133–152, 1967. ISSN 0026-2285.

[10] STEENROD, N. *The topology of fibre bundles*. 1st. ed. New Jersey: Princeton University Press, 1951. (Princeton mathematical series).

[11] VICK, J. *Homology theory : an introduction to algebraic topology*. 1st. ed. New York: Academic press, 1973. (Pure and applied mathematics; a series of monographs and textbooks, v. 53).

[12] WHITEHEAD, G. W. *Elements of Homotopy Theory*. 1st. ed. New York: Springer, 1978. (Graduate Texts in Mathematics).

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

TERMO DE REPRODUÇÃO XEROGRÁFICA

Autorizo a reprodução xerográfica do presente Trabalho de Conclusão, na íntegra ou em partes, para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 22 / 09 / 2016

Palleta Pegotti

Assinatura do autor