



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Câmpus de Ilha Solteira

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

“Projeto de Controladores Robustos  $\mathcal{H}_\infty$  para Sistemas Discretos  
Utilizando Modificação de Zeros”

**RENATO DE AGUIAR TEIXEIRA MENDES**

**Orientador:** Prof. Dr. Edvaldo Assunção

Tese apresentada à Faculdade de  
Engenharia - UNESP – Câmpus de Ilha  
Solteira, para obtenção do título de  
Doutor em Engenharia Elétrica.  
Área de Conhecimento: Automação.

Ilha Solteira – SP  
Novembro/2010

## FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação  
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP - Ilha Solteira.

M538m Mendes, Renato de Aguiar Teixeira.  
Modificação de zeros em sistemas discretos de controle robusto utilizando LMIs / Renato de Aguiar Teixeira Mendes. -- Ilha Solteira : [s.n.], 2010.  
115 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2010

Orientador: Edvaldo Assunção  
Inclui bibliografia

1. Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs). 2. Sistemas de tempo discretos. 3. Realimentação Dinâmica de Saída. 4. Modificação de zeros. 5. Incertezas politópicas. 6. Sistemas Fuzzy. 7. Sistemas com atraso no tempo.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

### CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

**TÍTULO:** Modificação de Zeros em Sistemas Discretos de Controle Robusto utilizando LMIs

**AUTOR:** RENATO DE AGUIAR TEIXEIRA MENDES

**ORIENTADOR:** Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de DOUTOR EM ENGENHARIA ELÉTRICA, Área: AUTOMAÇÃO, pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO

Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO M TEIXEIRA

Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. JOSÉ PAULO FERNANDES GARCIA

Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. CRISTIANO QUEVEDO ANDREA

Departamento Acadêmico de Eletrotécnica / Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Curitiba/PR

Prof. Dr. MÁRCIO ROBERTO COVACIC

Departamento de Engenharia Elétrica / Universidade Estadual de Londrina

Data da realização: 12 de novembro de 2010.

*Dedico esta tese a meus pais,  
pelo apoio, encorajamento, amor  
e pelos ensinamentos  
que formaram os alicerces da minha história*

# *Agradecimentos*

Dedico meus sinceros agradecimentos para:

- o professor doutor Edvaldo Assunção, pela orientação, incentivo e amizade;
- a equipe do Laboratório de controle da UNESP-FEIS, em especial aos colegas Cristiano Quevedo Andrea, Márcio Roberto Covacic, Emerson Ravazzi, Rodrigo Cardim e Luiz Fransisco Sanches Buzzachero pela ajuda em diversos momentos;
- o professor doutor Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, pelo auxílio nas realizações das pesquisas e pelos conselhos que me auxiliaram no desenvolvimento científico;
- o professor doutor José Paulo Garcia Fernandes, pela participação no processo de pesquisa que gerou esta tese;
- a professora doutora Neusa Augusto Pereira da Silva pelo auxílio na elaboração desta tese;
- aos amigos Wesley Pontes, Marcelo Sanches e Elcio Alteris pelo auxílio nos momentos difíceis;
- a CAPES, pela oportunidade e suporte financeiro para a realização deste trabalho;

# RESUMO

Neste trabalho são propostas metodologias de modificação de zeros para solucionar o problema do rastreamento do sinal de referência em sistemas discretos determinísticos, sistemas discretos incertos e sistemas discretos não-lineares considerando-se uma entrada de perturbação na planta. Em um primeiro momento é projetado um controlador discreto para minimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  entre a entrada exógena e o sinal de saída com o objetivo de reduzir o efeito da perturbação sobre a saída do sistema determinístico. Posteriormente, minimiza-se a norma  $\mathcal{H}_\infty$  entre o sinal de referência e o erro de rastreamento através da modificação ótima de zeros do sistema discreto, constituindo desta maneira o rastreador de sinal de referência. Essa nova estrutura de projeto do controlador é estendida para o projeto do controlador robusto  $\mathcal{H}_\infty$ , supondo incertezas politópicas na planta e também para sistemas não-lineares. No caso de sistemas com incertezas politópicas na planta, um controlador discreto é projetado para minimizar o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  entre a entrada exógena e o sinal de saída com o objetivo de reduzir o efeito da perturbação sobre a saída do sistema discreto incerto. Posteriormente é projetado um rastreador para sinais de referência em sistemas com incertezas politópicas, utilizando-se modificação de zeros. Por fim, estende-se a metodologia de rastreamento do sinal de referência com rejeição do distúrbio para sistemas não-lineares. A formulação do projeto é descrita na forma de inequações matriciais lineares, pois estas permitem a descrição de problemas de otimização convexa.

**Palavras Chave:** Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs), Sistemas Discretos, Realimentação Dinâmica da Saída, Modificação de Zeros, Incertezas Politópicas, Sistemas *Fuzzy*, Sistemas com atraso no Tempo.

# ABSTRACT

The tracking problems in uncertain, deterministic and nonlinear discrete time systems, with the presence of a disturbance signal in the plant, are solved in this work proposing a zero variation methodology. A discrete state feedback controller is designed in order to minimize the  $\mathcal{H}_\infty$ -norm between the exogen input and the output signal, such that the effect of the disturbance is attenuated in deterministic systems. After, the tracking problem is solved using the variation of the zeros minimizing the  $\mathcal{H}_\infty$ -norm from the reference input signal to the error tracking signal. This new structure is extended to design of  $\mathcal{H}_\infty$  robust controller, supposing politopic uncertainties and other one supposing nonlinearities in the plant. In uncertain systems case, a discrete controller is designed in order to minimize the  $\mathcal{H}_\infty$  guaranteed cost between the exogen input and the output signal such that the effect of the disturbance is attenuated in uncertain systems. Then, the tracking problem in uncertain systems is solved using the variation of the zeros minimizing the  $\mathcal{H}_\infty$  guaranteed cost from the reference input signal to the error tracking signal. Finally, the zero variation methodology is extended to nonlinear systems. The design is formulated in the Linear Matrix Inequalities (LMI) framework, such that the optimal solution of the stated control problem is obtained when feasible solution exists.

**Keywords:** Linear Matrix Inequalities (LMIs), Discrete-Time Systems, Dynamic Output Feedback, Zero variation, Politopic Uncertainties, Fuzzy Systems, Time-Delayed Systems

# *Lista de Figuras*

1	Sistema de controle ótimo discreto no tempo com posicionamento de pólos e zeros. . . . .	16
2	Região de restrição de pólos. . . . .	20
3	Sistema de alocação de zeros. . . . .	24
4	Estrutura de sistemas de controle com peso na frequência. . . . .	27
5	Sistema de controle de temperatura do tanque. . . . .	30
6	Sistema de controle ótimo discreto de rastreamento de sinal de referência e atenuação de perturbação presente na planta incerta. . . . .	33
7	Sistema de alocação de zeros. . . . .	46
8	Sistema de controle ótimo discreto de rastreamento de sinal de referência e atenuação do efeito da perturbação presente na planta não-linear. . . . .	51
9	Região de restrição de pólos. . . . .	57
10	Estrutura de sistemas de controle com peso na frequência. . . . .	64
11	Diagrama de Bode do filtro $J_1(z)$ . . . . .	67
12	Resposta em frequência de $Z(z)/W(z)$ . . . . .	68
13	Resposta em frequência da função de transferência $E(z)/R(z)$ . . . . .	69
14	Resposta em frequência da função de transferência $Z(z)/R(z)$ . . . . .	69
15	Resposta do sistema para uma entrada degrau unitário. . . . .	70
16	Sinal de referência e sinal de saída praticamente sobrepostos. . . . .	70
17	Mapa de pólos e zeros do sistema de malha fechada obtidos com $K_c(z)$ , $M$ , $N$ e círculo de restrição de pólos. . . . .	71
18	Diagrama de Bode do filtro $J_2(z)$ . . . . .	72
19	Resposta em frequência de $Z(z)/W(z)$ . . . . .	73

20	Resposta em frequência da função de transferência $E(z)/R(z)$ . . . . .	74
21	Resposta em frequência da função de transferência $Z(z)/R(z)$ . . . . .	74
22	Sinais $r(kT)$ e $w(kT)$ do sistema. . . . .	75
23	Sinal de referência e sinal de saída praticamente sobrepostos. . . . .	75
24	Mapa de pólos e zeros do sistema de malha fechada obtidos com $K_c(z)$ , $M$ , $N$ e círculo de restrição de pólos. . . . .	76
25	Diagrama de Bode do filtro $J_3(z)$ . . . . .	78
26	Resposta em frequência de $Z(z)/W(z)$ . . . . .	78
27	Resposta em frequência da função de transferência $E(z)/R(z)$ . . . . .	79
28	Resposta em frequência da função de transferência $Z(z)/R(z)$ . . . . .	80
29	Resposta do sistema para uma entrada degrau unitário. . . . .	80
30	Sinais $r(kT)$ e $w(kT)$ do sistema. . . . .	81
31	Sinal de referência e sinal de saída praticamente sobrepostos. . . . .	81
32	Mapa de pólos e zeros do sistema de malha fechada obtidos com $K_c(z)$ , $M$ , $N$ e círculo de restrição de pólos. . . . .	82
33	Diagrama de Bode do filtro $J_4(z)$ . . . . .	83
34	Resposta em frequência da função transferência $Z(z)/W(z)$ . . . . .	84
35	Resposta em frequência da função de transferência $E(z)/R(z)$ descrita em (2.12). . . . .	85
36	Resposta em frequência da função de transferência $Z(z)/R(z)$ . . . . .	85
37	Resposta ao degrau unitário . . . . .	86
38	Resposta a rampa - Sinais de entrada e saída sobrepostos . . . . .	86
39	Sinais $r(kT)$ e $w(kT)$ do sistema. . . . .	87
40	Sinal de referência e sinal de saída praticamente sobrepostos. . . . .	87
41	Mapa de pólos e zeros do sistema de malha fechada obtidos com $K_c(z)$ , $M$ , $N$ e círculo de restrição de pólos. . . . .	88
42	Diagrama de Bode do filtro $J_5(z)$ . . . . .	89

43	Resposta em frequência de $Z(z)/W(z)$ . (A1) primeiro vértice do politopo de incertezas, (A2) segundo vértice do politopo de incertezas. . . . .	90
44	Resposta em frequência da função de transferência $E(z)/R(z)$ . (A1) primeiro vértice do politopo de incertezas, (A2) segundo vértice do politopo de incertezas. . . . .	91
45	Sinal de referência e sinal de saída praticamente sobrepostos. Considerou-se para a simulação do sistema de rastreamento o vértice A1. . . . .	91
46	Resposta em frequência de $Z(z)/W(z)$ . (A1) primeiro vértice do politopo de incertezas, (A2) segundo vértice do politopo de incertezas. . . . .	93
47	Resposta em frequência da função de transferência $E(z)/R(z)$ . (A1) primeiro vértice do politopo de incertezas, (A2) segundo vértice do politopo de incertezas. . . . .	94
48	Sinal de referência e sinal de saída praticamente sobrepostos. Para a simulação do sistema de rastreamento considerou-se o vértice A1. . . . .	94
49	Resposta em frequência de $Z(z)/W(z)$ . Vértices do politopo A1 e A2 praticamente sobrepostos. . . . .	96
50	Resposta em frequência da função de transferência $E(z)/R(z)$ . Vértices do politopo A1 e A2 praticamente sobrepostos. . . . .	97
51	Sinal de referência e sinal de saída praticamente sobrepostos. Para a simulação do sistema de rastreamento considerou-se o vértice A1. . . . .	97
52	Resposta em frequência de $Z(z)/W(z)$ . (A1) primeiro vértice do politopo de incertezas, (A2) segundo vértice do politopo de incertezas. . . . .	99
53	Resposta em frequência da função de transferência $E(z)/R(z)$ . (A1) primeiro vértice do politopo de incertezas, (A2) segundo vértice do politopo de incertezas. . . . .	100
54	Sinal de referência e sinal de saída praticamente sobrepostos. Para a simulação do sistema de rastreamento considerou-se o vértice A1. . . . .	100
55	(a) Resposta em frequência de $\chi_1(z)$ . (b) Resposta em frequência de $\chi_2(z)$ , sendo $\chi_1(z)$ e $\chi_2(z)$ descritas em (5.33). . . . .	103

56	(a) Sinal de entrada $z_1(k)$ e sinal de entrada $r_1(k)$ estão praticamente sobrepostos. (b) Sinal de entrada $z_2(k)$ e sinal de entrada $r_2(k)$ estão praticamente sobrepostos. . . . .	104
57	Sistema massa-mola-amortecedor . . . . .	105
58	Resposta em frequência de $Z(z)/W(z)$ . (a) Modelo local 11, (b) Modelo local 22, (c) Modelo local 33, (d) Modelo local 44. . . . .	110
59	Resposta em frequência de $E(z)/R(z)$ . (a) Modelo local 11, (b) Modelo local 22, (c) Modelo local 33, (d) Modelo local 44. . . . .	111

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>Otimização <math>\mathcal{H}_\infty</math> com Modificação de Zeros para o Problema do Rastreamento em Sistemas Discretos Utilizando a Realimentação Dinâmica da Saída</b>	<b>15</b>
2.1	Formulação do Problema . . . . .	15
2.2	Otimização $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	19
2.2.1	<i>A norma <math>\mathcal{H}_\infty</math> discreta</i> . . . . .	19
2.2.2	<i>Compensador <math>\mathcal{H}_\infty</math></i> . . . . .	20
2.3	Alocação de Zeros em Sistemas Discretos . . . . .	24
2.4	Otimização $\mathcal{H}_\infty$ com Modificação de Zeros . . . . .	26
2.5	Projeto do Rastreador com Peso na Frequência . . . . .	27
2.6	Transformada $\mathcal{Z}$ de uma Função Contínua com Atraso no Tempo . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Otimização <math>\mathcal{H}_\infty</math> com Modificação de Zeros para o Problema do Rastreamento em Sistemas Discretos Incertos</b>	<b>33</b>
3.1	Formulação do problema . . . . .	33
3.2	Projeto de um Compensador $\mathcal{H}_\infty$ Discreto para Sistemas Incertos . . . . .	37
3.3	Alocação de Zeros em Sistemas Discretos Incertos . . . . .	46
3.4	Projeto do Rastreador de Sinais com Peso na Frequência para Sistemas Discretos Incertos . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Otimização <math>\mathcal{H}_\infty</math> com Modificação de Zeros para o Problema do Rastreamento em Sistemas Discretos Não-Lineares</b>	<b>50</b>

4.1	Formulação do problema . . . . .	50
4.2	A Forma Generalizada dos Sistemas <i>Fuzzy</i> Takagi-Sugeno . . . . .	54
4.3	Projeto de um Compensador $\mathcal{H}_\infty$ Discreto para Sistemas Não-lineares . .	57
4.4	Projeto do Rastreador de Sinais com Peso na Frequência para Sistemas Discretos Não-Lineares . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Exemplos de Aplicações</b>	<b>66</b>
5.1	Exemplo 1 . . . . .	66
5.2	Exemplo 2 . . . . .	71
5.3	Exemplo 3 . . . . .	76
5.4	Exemplo 4 . . . . .	82
5.5	Exemplo 5 . . . . .	88
5.6	Exemplo 6 . . . . .	91
5.7	Exemplo 7 . . . . .	95
5.8	Exemplo 8 . . . . .	98
5.9	Exemplo 9 . . . . .	100
5.10	Exemplo 10 . . . . .	104
<b>6</b>	<b>Conclusão e perspectivas futuras</b>	<b>113</b>
	<b>Referências</b>	<b>115</b>

# 1 *Introdução*

Diferentemente de alocação de pólos, pode-se encontrar apenas uma pequena quantidade de textos que abordam o assunto alocação de zeros em sistemas de controle discreto. Em (SEN, 1996) a alocação de pólos de malha fechada em sistemas discretos é alcançada a partir de uma técnica de projeto de controle que faz uso das taxas de amostragem para componentes de estado, entrada e saída. Ainda, em (SABERI; SANNUTI; STOORVOGEL, 1997) a alocação de pólos discretos em sistemas de controle é realizada em uma região do plano  $\mathcal{Z}$  especificada em projeto preservando a otimalidade do controlador  $\mathcal{H}_2$  de realimentação. Dentre os poucos textos que abordam alocação de zeros em sistemas discretos tem-se (M'SAAD; ORTEGA; LANDAU, 1985), onde os zeros arbitrários são alocados para o projeto de controladores adaptativos discretos. Também, em (MESSNER; KEMPF, 1996) são alocados zeros em um compensador para se manter uma classe de dinâmicas não modeladas. Para isso cancela-se todas as harmônicas de um distúrbio periódico acima da frequência de Nyquist, formando o projeto do controlador discreto.

Em (MENDES, 2007b) foi proposta uma metodologia para o rastreamento do sinal de referência e rejeição de distúrbios em sistemas discretos com o uso da modificação dos zeros e da alocação de pólos respectivamente. A mesma metodologia foi proposta em (MENDES et al., 2007) e (MENDES et al., 2009), porém para sistemas com atraso no tempo. Entretanto, para o rastreamento, quando os estados são realimentados por um estimador de estados, o valor da norma  $\mathcal{H}_\infty$  obtida com o controlador inicial que proporciona a rejeição dos distúrbios é modificada. A metodologia proposta neste trabalho tem a vantagem de manter o valor da norma  $\mathcal{H}_\infty$  obtida com o controlador inicial para o rastreamento.

Em (ANDREA; ASSUNÇÃO; TEIXEIRA, 2004) e (ANDREA, 2002) é proposta uma metodologia de modificação de zeros para resolver o problema do rastreamento de sinal de controle em sistemas contínuos considerando-se ainda a existência de um sinal de entrada exógena de perturbação ou ruído na planta. Uma formulação matemática mais simples para esta metodologia é proposta em (ANDREA; TEIXEIRA; ASSUNÇÃO, 2007).

Em (CHEN; LIN; LIU, 2002) é proposto um método analítico para a solução do pro-

blema do rastreamento e rejeição de distúrbios em sistemas discretos. Em (OLIVEIRA, 1999) verifica-se o uso de Inequações Matriciais Lineares - LMIs (do Inglês, *Linear Matrix Inequalities*) para o estudo de estabilidade, projetos de filtros e controladores. Ainda, em (PARK, 2005) foi apresentado o projeto de um controlador por realimentação dinâmica da saída por meio de LMIs de modo a garantir a estabilidade assintótica de um sistema contínuo e minimizar o limite superior de uma dada função custo quadrática. Diferentemente destes métodos, foi proposto em (MENDES et al., 2008) o projeto de um controlador por realimentação dinâmica da saída através de LMIs de modo a garantir a rejeição do efeito do distúrbio na saída do sistema discreto assim como o projeto de um sistema de rastreamento do sinal de referência.

Uma aproximação da análise de estabilidade robusta em sistemas discretos com incertezas politópicas é modelada em termos de LMI em (GONÇALVES et al., 2007). Em (FARGES et al., 2007) a síntese e análise da performance robusta  $\mathcal{H}_2$  de sistemas periódicos discretos com incertezas politópicas é estudada via LMI.

Em (KAPILA; HADDAD, 1998) o problema da síntese do controlador com realimentação dinâmica da saída para sistemas periódicos discretos com incertezas paramétricas é equacionado. O principal resultado envolve a condição suficiente para caracterizar um controlador robusto para sistemas discretos periódicos com incertezas. Ainda, em (ZHOU et al., 2006) verifica-se o projeto de um controlador  $\mathcal{H}_\infty$  com realimentação dinâmica da saída para sistemas *fuzzy* discretos e incertos desenvolvido com o uso de LMIs.

Uma metodologia para solução do problema do rastreamento do sinal de referência com rejeição de distúrbios em sistemas contínuos não-lineares é proposta em (ANDREA et al., 2008), onde equaciona-se o método através de LMIs e as não-linearidades são representadas através de modelos *Fuzzy* Takagi-Sugeno. Em (CASTILLO; MEDA, 1994), o rastreamento da trajetória de sistemas não-lineares com incertezas paramétricas é alcançado com o projeto de um regulador robusto a partir da representação do sistema não-linear em modelos *Fuzzy* Takagi-Sugeno.

Neste trabalho, são propostas formulações da otimização do problema de rastreamento e rejeição de distúrbio em sistemas discretos no caso determinístico, em plantas com incertezas politópicas e sistemas não-lineares na forma de LMIs, representando uma formulação convexa do problema. O equacionamento do método proposto é simples em comparação a outras técnicas de rastreamento. É obtido como principal resultado do método a solução ótima do problema, quando existir, com o uso da realimentação dinâmica da saída, com baixo custo computacional devido ao uso de algoritmos de programação

---

linear de convergência polinomial. A solução das LMIs, quando factíveis é obtida com o uso do software MATLAB (GAHINET et al., 1995).

## 2 *Otimização $\mathcal{H}_\infty$ com Modificação de Zeros para o Problema do Rastreamento em Sistemas Discretos Utilizando a Realimentação Dinâmica da Saída*

Neste capítulo apresenta-se a formulação e propõe-se uma metodologia para a solução do problema do rastreamento do sinal de referência com rejeição de distúrbios em sistemas discretos utilizando a realimentação dinâmica da saída.

### 2.1 **Formulação do Problema**

Considera-se o seguinte modelo do sistema discreto linear, invariante no tempo, controlável e observável descrito na forma de variáveis de estado:

$$x(k+1) = Ax(k) + B_u u(k) + B_w w(k) \quad (2.1)$$

$$y(k) = C_1 x(k), \quad x(0) = 0, \quad k \in [0; \infty),$$

$$z(k) = C_2 x(k) \quad (2.2)$$

sendo  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_u \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $B_w \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $C_2 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $x(k)$  é o vetor de estados,  $y(k)$  é a saída medida,  $z(k)$  é a saída de referência,  $u(k)$  é a entrada de controle e  $w(k)$  uma entrada exógena (distúrbio).

A estrutura ilustrada na Figura 1 foi adotada para solucionar o problema de controle ótimo visando a rejeição do sinal de perturbação e rastreamento do sinal de referência em sistemas discretos. A variável  $T$  representa o período de amostragem adotado.

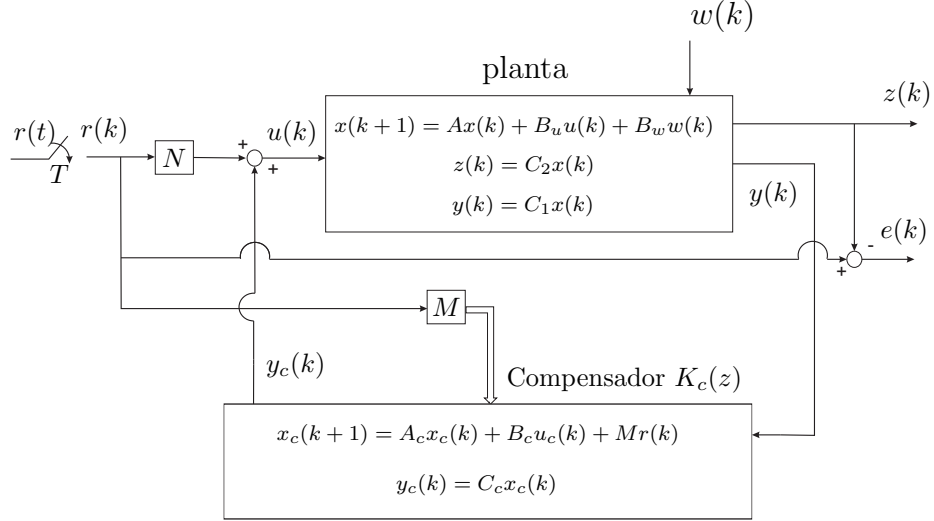


Figura 1: Sistema de controle ótimo discreto no tempo com posicionamento de pólos e zeros.

Primeiramente projeta-se um compensador  $\mathcal{H}_\infty$ , considerando-se  $N \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  e  $M \in \mathfrak{R}^{n \times p}$ , através de um controlador discreto  $K_c(z)$ , descrito na Figura 1. Tal controlador é formulado em termos de LMIs e minimiza a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $w(k)$  para  $z(k)$ .

Na etapa seguinte obtém-se as matrizes  $N \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  e  $M \in \mathfrak{R}^{n \times p}$ , indicadas na Figura 1, através de um processo de otimização descrito na forma de LMIs. Na Seção 2.3 será mostrado que os parâmetros  $N \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  e  $M \in \mathfrak{R}^{n \times p}$  modificam as posições dos zeros de  $r(k)$  para  $u(k)$ . Isto é feito de forma a otimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  entre a saída  $e(k)$ , que expressa o erro de rastreamento, e a entrada de referência  $r(k)$ .

O diagrama de blocos da Figura 1 pode ser descrito através das variáveis de estado  $x(k)$  e  $x_c(k)$ , da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x_c(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_c(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_u N \\ M \end{bmatrix} r(k) + \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix} w(k),$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_c(k) \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

$$z(k) = \begin{bmatrix} C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_c(k) \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

$$e(k) = r(k) - z(k) = r(k) - \begin{bmatrix} C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_c(k) \end{bmatrix},$$

sendo:

$$\begin{aligned} A_1 &= A, \\ A_2 &= B_u C_c, \\ A_3 &= B_c C_2, \\ A_4 &= A_c. \end{aligned}$$

O sistema (2.4) pode ser representado na forma compacta,

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= A_m \bar{x}(k) + B_m r(k) + B_n w(k), \\ e(k) &= -C_m \bar{x}(k) + D_m r(k), \\ z(k) &= C_m \bar{x}(k), \end{aligned} \tag{2.5}$$

sendo,

$$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ x_c(k) \end{bmatrix}, A_m = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, D_m = I, \tag{2.6}$$

$$B_m = \begin{bmatrix} B_u N \\ M \end{bmatrix}, B_n = \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } C_m = \begin{bmatrix} C_2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Aplicando-se a Transformada  $\mathcal{Z}$  no sistema (2.5), para  $\bar{x}(0)=0$ , e realizando-se algumas manipulações algébricas, pode-se determinar a relação entre a saída  $Z(z)$  e as entradas  $W(z)$  e  $R(z)$ , conforme descrito em (2.8):

$$Z(z) = C_m(zI - A_m)^{-1} B_m R(z) + C_m(zI - A_m)^{-1} B_n W(z). \tag{2.8}$$

Considerando-se na equação (2.8) o sinal  $R(z)$  nulo, verifica-se que a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $W(z)$  para  $Z(z)$  pode ser minimizada devido ao projeto inicial do controlador  $\mathcal{H}_\infty$ , implicando a minimização do efeito da perturbação, presente na planta, sobre o desempenho da saída do sistema.

Na Figura 1 observa-se a adição do termo  $Mr(k)$  na estrutura do controlador. Será mostrado na Seção 2.3 que as matrizes  $M \in \mathfrak{R}^{n \times p}$  e  $N \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  tem somente a função de alterar os zeros da função de transferência de  $r(k)$  para  $u(k)$ .  $M \in \mathfrak{R}^{n \times p}$  e  $N \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  não modificam os pólos estabelecidos com o projeto inicial do controlador  $K_c(z)$ , pois a função de transferência de  $W(z)$  para  $Z(z)$  não é modificada por  $N \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  ou  $M \in \mathfrak{R}^{n \times p}$ , vide equações (2.7) e (2.8). Os pólos do sistema não são modificados, pois  $A_m$  em (2.6) e

(2.8) não depende de  $M \in \mathfrak{R}^{n \times p}$  ou  $N \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ . Com isso a estabilidade do sistema não é comprometida.

Para o projeto do rastreador ótimo, considera-se a relação entre o sinal de erro e o sinal de referência, denominado  $H_m(z)$ , descrito em (2.9), com o sinal de perturbação  $W(z)$  nulo

$$H_m(z) = -C_m(zI - A_m)^{-1}B_m + D_m. \quad (2.9)$$

A partir desta relação, pode-se projetar um rastreador de sinais por meio da modificação de zeros minimizando a norma  $\mathcal{H}_\infty$  entre o sinal de referência e o sinal de erro do sistema. O processo de modificação de zeros não interfere no projeto de rejeição de perturbação, pois segundo (2.8) a função de transferência de  $W(z)$  para  $Z(z)$  não depende de  $B_m$ . Na Seção 2.4 utiliza-se a posição dos zeros, implícitos na especificação dos parâmetros  $N \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  e  $M \in \mathfrak{R}^{n \times p}$  em  $B_m$ , para o processo de minimização do erro do rastreamento.

## 2.2 Otimização $\mathcal{H}_\infty$

Nesta seção apresenta-se os métodos de projeto usados para a otimização da norma  $\mathcal{H}_\infty$  com o objetivo de obter o rastreamento do sinal de referência e a rejeição do distúrbio.

### 2.2.1 A norma $\mathcal{H}_\infty$ discreta

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  de um sistema discreto, linear e invariante no tempo é definida como sendo o máximo valor da magnitude do sinal da resposta em frequência deste sistema. A norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema discreto próprio  $H(z)$ , estável, representado na forma de espaço de estados  $(A, B, C, D)$ ,

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k), \end{aligned} \quad (2.10)$$

sendo  $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathfrak{R}^{n \times p}$ ,  $C \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ ,  $D \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ , supostamente conhecidas, pode ser obtida através dos seguintes problemas de otimização, descritos na forma de LMIs (PALHARES; TAKAHASHI; PERES, 1997).

$$\begin{aligned} \|H\|_\infty^2 = \min \quad & \mu \\ \text{s.a.} \quad & \begin{bmatrix} \hat{P} & 0 & C' & A'\hat{P} \\ 0 & I & D' & B'\hat{P} \\ C & D & \mu I & 0 \\ \hat{P}A & \hat{P}B & 0 & \hat{P} \end{bmatrix} > 0, \\ & \hat{P} = \hat{P}' > 0, \\ & \mu > 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

ou, ainda, na forma dual:

$$\begin{aligned} \|H\|_\infty^2 = \min \quad & \mu \\ \text{s.a.} \quad & \begin{bmatrix} \hat{Q} & 0 & B & A\hat{Q} \\ 0 & I & D & C\hat{Q} \\ B' & D' & \mu I & 0 \\ \hat{Q}A' & \hat{Q}C' & 0 & \hat{Q} \end{bmatrix} > 0, \\ & \hat{Q} = \hat{Q}' > 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\mu > 0.$$

### 2.2.2 Compensador $\mathcal{H}_\infty$

O problema de otimização da norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $(A, B_w, B_u, C)$  consiste em tornar a influência da perturbação  $w(k)$  na saída  $z(k)$  do sistema a menor possível através do projeto de um controlador discreto  $K_c(z)$ . Portanto, deseja-se minimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  entre a entrada  $w(k)$  (perturbação) e a saída  $z(k)$ . Para se ter controle de desempenho, possibilitando a redução dos ganhos do controlador, no projeto do controlador discreto  $K_c(z)$  deve-se restringir a região de alocação de pólos em uma circunferência de raio  $r$  e centro  $-q$ . Os parâmetros  $r$  e  $-q$  são mostrados na Figura 2:

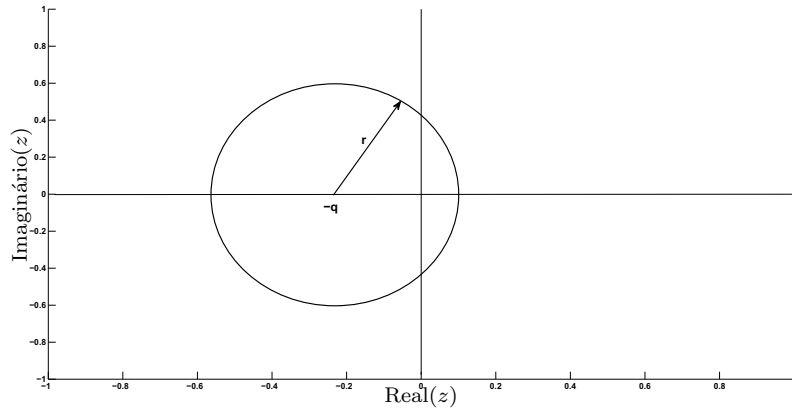


Figura 2: Região de restrição de pólos.

Segundo (CHIALI; GAHINET, 1996) os pólos podem ser alocados na região da Figura 2 através da seguinte restrição LMI:

$$\begin{bmatrix} -r\check{Q} & A\check{Q} + q\check{Q} \\ \check{Q}q + \check{Q}A' & -r\check{Q} \end{bmatrix} < 0,$$

$$\check{Q} = \check{Q}' > 0. \quad (2.13)$$

**Teorema 2.1.** *Considere o sistema (2.1) com compensador  $K_c(z) = C_c(zI - A_c)^{-1}B_c$  de realimentação dinâmica da saída de medida, e o problema de otimização (2.12). Considerando  $r$  e  $q$  fixos, se existe solução para as LMIs descritas em (2.14), (2.15) e (2.16) então pode-se obter o controlador  $K_c(z)$  que estabiliza o sistema (2.1) com alocação de pólos na região mostrada pela Figura 2,*

$$\|H\|_\infty^2 = \min \quad \mu$$

$$s.a. \begin{bmatrix} R & I & 0 & B_w & AR + B_u C_j & A \\ I & S & 0 & SB_w & A_j & SA + B_j C_2 \\ 0 & 0 & I & 0 & C_2 R & C_2 \\ B'_w & B'_w S & 0 & \mu I & 0 & 0 \\ RA' + C'_j B'_u & A'_j & RC'_2 & 0 & R & I \\ A' & A' S + C'_2 B'_j & C'_2 & 0 & I & S \end{bmatrix} > 0, \quad (2.14)$$

$$\begin{bmatrix} -Rr & -Ir & AR + B_u C_j + Rq & A + Iq \\ -Ir & -Sr & A_j + Iq & SA + B_j C_1 + Sq \\ RA' + C'_j B'_u + Rq & A'_j + Iq & -Rr & -Ir \\ Iq + A' & A' S + C'_1 B'_j + Sq & -Ir & -Sr \end{bmatrix} < 0, \quad (2.15)$$

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} > 0, \quad (2.16)$$

sendo,  $R = R' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $S = S' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $A_j$ ,  $B_j$  e  $C_j$  as variáveis de otimização conjunta das LMIs (2.14), (2.15), (2.16). Considera-se ainda:

$$\begin{aligned} C_j &= C_c \psi', \\ B_j &= EB_c, \\ A_j &= (SA + EB_c C_1)R + (SB_u C_c + EA_c) \psi', \end{aligned} \quad (2.17)$$

para a solução de (2.17) tem-se:

$$\psi E' = I - RS, \quad (2.18)$$

e através da resolução de (2.17), obtém-se as matrizes dinâmicas do compensador  $\mathcal{H}_\infty$ ,  $K_c(z) = C_c(zI - A_c)^{-1}B_c$ .

*Prova:* considera-se  $R_m$  a realização mínima do sistema realimentado pelo compensador  $\mathcal{H}_\infty$ ,

$$R_m = C_m(zI - A_m)^{-1}B_m,$$

sendo:

$$A_m = \begin{bmatrix} A & B_u C_c \\ B_c C_1 & A_c \end{bmatrix},$$

$$B_m = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_m = \begin{bmatrix} C_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar a solução do problema da determinação do compensador  $\mathcal{H}_\infty$  com alocação de pólos soluciona-se o seguinte problema de otimização descrito em termos de LMIs

$$\|H\|_\infty^2 = \min \quad \mu$$

$$s.a \quad \begin{bmatrix} \hat{Q} & 0 & B_m & A_m \hat{Q} \\ 0 & I & D & C_m \hat{Q} \\ B'_m & D' & \mu I & 0 \\ \hat{Q} A'_m & \hat{Q} C'_m & 0 & \hat{Q} \end{bmatrix} > 0, \quad (2.19)$$

$$\hat{Q} = \hat{Q}' > 0,$$

$$\mu > 0.$$

$$\begin{bmatrix} -r\check{Q} & A\check{Q} + q\check{Q} \\ \check{Q}q + \check{Q}A' & -r\check{Q} \end{bmatrix} < 0,$$

$$\check{Q} = \check{Q}' > 0. \quad (2.20)$$

Entretanto, o problema de otimização descrito em (2.19) e (2.20) apresenta BMIs, o que torna a solução do problema de elevado custo computacional. Então, é necessário o uso de uma transformação linear para resolver o problema em termos de LMIs. Inicialmente adota-se a matriz  $\check{Q}$  e sua inversa como,

$$\check{Q} = \begin{bmatrix} R & \psi \\ \psi' & J \end{bmatrix} \quad e \quad \check{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} S & E \\ E' & S \end{bmatrix},$$

sendo,  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Ainda, adota-se,  $R = R'$  e  $S = S'$ :

$$\check{Q}\Gamma_2 = \Gamma_1, \text{ com } \Gamma_1 = \begin{bmatrix} R & I \\ \psi' & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \Gamma_2 = \begin{bmatrix} I & S \\ 0 & E' \end{bmatrix},$$

Considerando-se a matriz de Lyapunov  $\check{Q} > 0$  e pré e pós multiplicando-se  $\check{Q}$  por  $\Gamma_2'$  e  $\Gamma_2$  respectivamente obtém-se a inequação (2.16). Em seguida, a inequação (2.19) é pré e pós multiplicada por (2.21) e (2.22) respectivamente para se obter a inequação (2.14). E então, pré e pós multiplicando-se a inequação (2.13) por (2.23) e (2.24) respectivamente, obtém-se a inequação (2.15).

$$\begin{bmatrix} \Gamma_2' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_2' \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_2 \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_2' & 0 \\ 0 & \Gamma_2' \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_2 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

**Observação 2.2.** As matrizes  $\Psi$  e  $E$  descritas em (2.18) podem ser obtidas através do método de solução de sistemas lineares denominado decomposição LU. Através do software MATLAB pode-se obter a decomposição LU (LIMA, 2000) de uma determinada matriz.

A restrição de pólos quando utilizada adequadamente na região escolhida possibilita o projeto de controladores com ganhos menores.

## 2.3 Alocação de Zeros em Sistemas Discretos

É proposto um processo de alocação de zeros para o sistema (2.25), no qual utiliza-se a estrutura para o posicionamento dos zeros ilustrada na Figura 3.

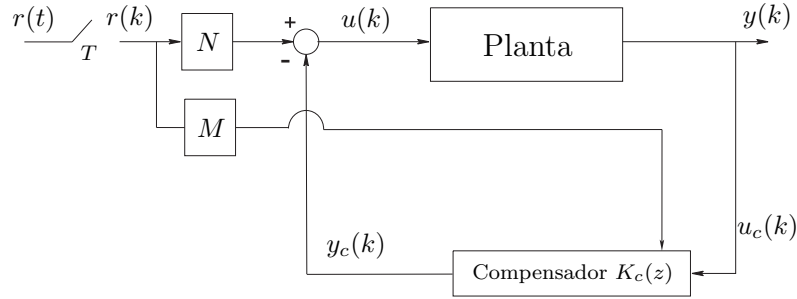


Figura 3: Sistema de alocação de zeros.

Representa-se a planta por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) &= Cx(k). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Considera-se a transformada  $\mathcal{Z}$  de (2.25)

$$[zI - A]X(z) = BU(z), \quad (2.26)$$

$$Y(z) = CX(z).$$

O zero de um sistema é o valor de  $z$  tal que a saída do sistema seja igual a zero mesmo com uma combinação de entrada e estado diferentes de zero. Se encontrarmos uma solução não trivial para  $X(z_0)$  e  $U(z_0)$  tal que  $Y(z_0)$  é zero, então  $z_0$  é um zero do sistema. Combinando as duas partes de (2.26) deve-se satisfazer a condição

$$\begin{bmatrix} z_i I - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(z) \\ U(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

A descrição em variáveis de estado da planta indicada na Figura 3 foi apresentada em (2.25). Ainda, pode-se descrever um compensador na forma de variáveis de estado da seguinte forma:

$$x_c(k+1) = A_c x_c(k) + B_c u_c(k),$$

onde,  $u_c(k) = Cx(k)$ . A forma mais geral para se introduzir a entrada  $r(k)$  nessas equações como é mostrada na Figura 3 é adicionando um termo  $Mr(k)$  a  $x_c(k+1)$  e adicionando um termo  $Nr(k)$  a equação de controle  $u(k) = C_c x_c(k)$ . O controlador, com essas adições, se torna

$$x_c(k+1) = A_c x_c(k) + B_c u_c(k) + Mr(k), \quad (2.28)$$

$$u(k) = C_c x_c(k) + Nr(k).$$

Considere o controlador (2.28). Se existe um zero de transmissão de  $r$  para  $u$ , então necessariamente existirá um zero de transmissão de  $r$  para  $y$  ao menos que ocorra cancelamento de pólos e zeros. As equações para obter  $z_i$  de  $r$  para  $u$  em (2.28), usando a aplicação (2.27), são dadas por

$$\begin{bmatrix} z_i I - A_c & -M \\ C_c & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{co} \\ r_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

Pelo fato de que a matriz em (2.29) é quadrada, a condição para a solução não trivial é que o determinante dessa matriz seja zero. No entanto, tem-se

$$\det \begin{bmatrix} z_i I - A_c & -M \\ C_c & N \end{bmatrix} = 0. \quad (2.30)$$

Dividindo a última coluna da matriz descrita em (2.30) por uma matriz não nula  $N$  e então adicionando-se a primeira coluna de (2.30) o produto de  $-C_c$  pela última coluna tem-se:

$$\det \begin{bmatrix} z_i I - A_c + MN^{-1}C_c & -MN^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0,$$

ou ainda, considerando-se  $z_i = z$ ,

$$\det(zI - A_c + MN^{-1}C_c) = 0,$$

sendo que as soluções,  $z = z_i$  são os zeros modificados de  $r(k)$  para  $u(k)$ .

É importante lembrar que além das matrizes  $N$  e  $M$  modificarem os zeros do sistema

elas também são usadas para se obter a solução ótima para o rastreamento, como é mostrado na Seção 2.4.

## 2.4 Otimização $\mathcal{H}_\infty$ com Modificação de Zeros

O problema de otimização de  $H_m = (A_m, B_m, -C_m, D_m)$  em (2.9) consiste em minimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $r(k)$  para  $e(k)$  do sistema  $H_m$  a partir da determinação dos valores de  $M$  e  $N$  (presentes em  $B_m$ , que modificam os zeros), isto é, alocar os zeros de forma que a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $r(k)$  para  $e(k)$  seja minimizada, formando um rastreador de sinais. Substitui-se os valores de  $A_m, B_m, -C_m$  e  $D_m$  descritos em (2.6) e (2.7) em (2.12):

$$\|H_m\|_\infty^2 = \min \quad \mu$$

*s.a*

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & B_u N & A_1 Q_{11} + A_2 Q'_{12} & A_1 Q_{12} + A_2 Q_{22} \\ Q'_{12} & Q_{22} & 0 & M & A_3 Q_{11} + A_4 Q'_{12} & A_3 Q_{12} + A_4 Q_{22} \\ 0 & 0 & I & I & -C_2 Q_{11} & -C_2 Q_{12} \\ N' B'_u & M' & I & \mu I & 0 & 0 \\ Q_{11} A'_1 + Q_{12} A'_2 & Q_{12} A'_4 + Q_{11} A'_3 & -Q_{11} C'_2 & 0 & Q_{11} & Q_{12} \\ Q'_{12} A'_1 + Q_{22} A'_2 & Q'_{12} A'_3 + Q_{22} A'_4 & -Q'_{12} C'_2 & 0 & Q'_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} > 0,$$

(2.31)

$$\mu > 0,$$

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q'_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} > 0.$$

Porém, com o uso de (2.31) o rastreamento pode ocorrer em uma faixa de frequência indesejada. Então, para a aplicação do projeto do rastreador discreto é necessária a inclusão de um filtro discreto. Além de viabilizar o rastreamento, o filtro discreto também possibilita especificar a faixa de frequência na qual ocorrerá o rastreamento do sinal de referência. Na próxima seção será proposto o projeto do rastreador com peso na frequência, o qual viabiliza o projeto e possibilita a especificação da faixa frequencial desejada.

## 2.5 Projeto do Rastreador com Peso na Freqüência

A utilização de peso na freqüência em sistemas de controle tem como objetivo atingir especificações de projeto em malha fechada. Para o projeto do rastreador deseja-se encontrar a solução global que otimize o problema descrito a seguir:

$$\min \|H_m(z)V(z)\|_\infty, \quad (2.32)$$

sendo  $V(z) = (A_v, B_v, C_v, D_v)$  um sistema dinâmico projetado para especificar o peso na freqüência de saída e considera-se  $H_m = (A_m, B_m, -C_m, D_m)$  uma realização do sistema linear invariante no tempo e estável indicado em (2.9). Na Figura 4 é ilustrada a estrutura de inclusão de peso na freqüência:

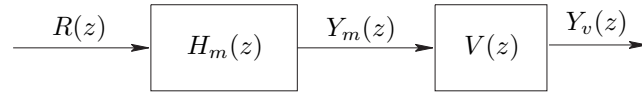


Figura 4: Estrutura de sistemas de controle com peso na freqüência.

Pode-se representar o sistema indicado na Figura 4 através de variáveis de estado em função de  $x_m(k)$  e  $x_v(k)$ , através das equações abaixo:

$$\begin{bmatrix} x_m(k+1) \\ x_v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_m & 0 \\ -B_v C_m & A_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m(k) \\ x_v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_m \\ B_v D_m \end{bmatrix} r(k),$$

$$y_v(k) = \begin{bmatrix} 0 & C_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m(k) \\ x_v(k) \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Com isso, uma possível realização em espaço de estado de  $\check{H}_f = H_m(z)V(z)$  é:

$$\left[ \begin{array}{c|c} \check{A}_f & \check{B}_f \\ \check{C}_f & \check{D}_f \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} A_m & 0 & B_m \\ -B_v C_m & A_v & B_v D_m \\ \hline 0 & C_v & 0 \end{array} \right]. \quad (2.34)$$

No Teorema 2.3 é proposta a metodologia para solução do problema do rastreamento com o peso na freqüência com os valores das matrizes do compensador  $K_c(z) = (A_c, B_c, C_c, 0)$  já fixos.

**Teorema 2.3.** *Considerando o filtro na saída do sistema  $H_m$ , se existe solução para a LMI descrita em (2.35), então pode-se obter as matrizes  $N \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  e  $M \in \mathfrak{R}^{n \times p}$  que*

minimizam a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $e(k)$  para  $r(k)$  do sistema.

$$\|H\|_\infty^2 = \min \quad \mu$$

$$s.a \quad \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 \\ Q'_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 \\ Q'_{13} & Q'_{23} & Q_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ N'B'_u & M' & B'_v & I \\ Q_{12}A'_2 + Q_{11}A'_1 & Q_{12}A'_4 + Q_{11}A'_3 & Q_{13}A'_v - Q_{11}C'_2B'_v & -Q_{13}C'_v \\ Q_{22}A'_2 + Q'_{12}A'_1 & Q_{22}A'_4 + Q'_{12}A'_3 & Q_{23}A'_v - Q'_{12}C'_2B'_v & -Q_{23}C'_v \\ Q'_{23}A'_2 + Q'_{13}A'_1 & Q'_{23}A'_4 + Q'_{13}A'_3 & Q_{33}A'_v - Q'_{13}C'_2B'_v & -Q_{33}C'_v \\ B_uN & A_1Q_{11} + A_2Q'_{12} & A_1Q_{12} + A_2Q_{22} & A_1Q_{13} + A_2Q_{23} \\ M & A_3Q_{11} + A_4Q'_{12} & A_3Q_{12} + A_4Q_{22} & A_3Q_{13} + A_4Q_{23} \\ B_v & -B_vC_2Q_{11} + A_vQ'_{13} & -B_vC_2Q_{12} + A_vQ'_{23} & -B_vC_2Q_{13} + A_vQ_{33} \\ I & -C_vQ'_{13} & -C_vQ'_{23} & -C_vQ_{33} \\ \mu I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ 0 & Q'_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\ 0 & Q'_{13} & Q'_{23} & Q_{33} \end{bmatrix} > 0,$$

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q'_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q'_{13} & Q'_{23} & Q_{33} \end{bmatrix} > 0, \quad (2.35)$$

$$\mu > 0.$$

*Prova:* Para o projeto do rastreador com peso na frequência, substitui-se  $\check{A}_f$ ,  $\check{B}_f$ ,  $\check{C}_f$  e  $\check{D}_f$  de (2.34) em (2.12). Isto resulta no problema de otimização descrito em (2.35), que é equacionado na forma de LMIs. Deste processo determina-se as matrizes  $N$  e  $M$ , e estes parâmetros minimizam a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $r(k)$  para  $e(k)$  (rastreador de sinais).

A matriz  $Q$  é particionada da seguinte forma  $Q_{ij} = Q'_{ij}$ ,  $i, j=1, 2, 3$ .

As matrizes  $M \in \mathfrak{R}^{n \times p}$  e  $N \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  são as soluções ótimas de (2.35) que minimizam a norma  $\mathcal{H}_\infty$  entre o erro de rastreamento e a referência considerando o peso na frequência.

Os filtros utilizados no projeto do rastreador são usados para viabilizar o projeto e ajustar os parâmetros  $M$  e  $N$  para uma determinada faixa de frequência. A obtenção dos valores de  $M$  e  $N$  a partir da solução do problema descrito na forma de LMIs leva agora em consideração a dinâmica do filtro para restringir o problema a uma determinada faixa de frequência. Porém, na simulação ou implementação do sistema de rastreamento esses filtros são descartados. O projeto de rejeição de distúrbios e rastreamento do sinal de referência com peso na frequência ainda se estende para sistemas discretos com atraso no tempo. Na próxima seção será mostrado um método para a obtenção da transformada

$Z$  de uma função contínua com atraso no tempo para posterior uso em um exemplo de aplicação.

## 2.6 Transformada Z de uma Função Contínua com Atraso no Tempo

Geralmente, as respostas dos processos químicos possuem um atraso temporal de transporte do fluido entre o controlador e os sensores.

O procedimento mostrado a seguir (FRANKLIN; POWELL; WORKMAN, 1990) possibilita a determinação exata da função de transferência discreta de tais processos considerando a dinâmica de um bloqueador de ordem zero.

Considere o sistema de controle de temperatura do tanque apresentado na Figura 5.

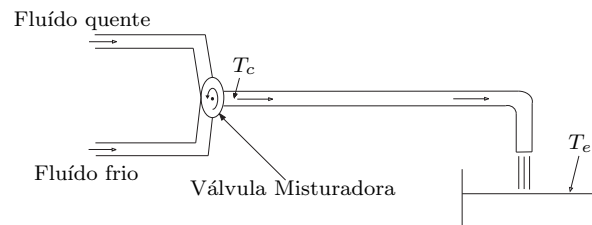


Figura 5: Sistema de controle de temperatura do tanque.

O atraso entre o ponto  $T_c$  e  $T_e$  é  $\lambda$  segundos, sendo  $T_c$  a temperatura na saída da válvula misturadora e  $T_e$  a temperatura no tanque.

A função de transferência com atraso é:

$$\frac{T_e(s)}{T_c(s)} = G(s) = \frac{e^{-\lambda s}}{\frac{s}{a} + 1}. \quad (2.36)$$

Fazendo o atraso  $\lambda$  uma combinação do período de amostragem  $T$ , teremos:

$$\lambda = lT - mT, \text{ sendo } l \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} \text{ e } 0 < m < 1,$$

substituindo  $\lambda = lT - mT$  na equação (2.36) teremos:

$$G(s) = \frac{e^{-(lT - mT)s}}{\frac{s}{a} + 1},$$

logo,

$$G(s) = \frac{e^{-lTs} e^{mTs}}{\frac{s}{a} + 1}.$$

A função de transferência discreta do subsistema D/A - Processo com atraso - A/D, será:

$$H(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{e^{-lTs} e^{mTs} \frac{a}{s(s+a)}\}\},$$

como  $l$  é inteiro, teremos:

$$H(z) = (1 - z^{-1}) z^{-l} \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{e^{mTs} \frac{a}{s(s+a)}\}\},$$

Expandindo em frações parciais:

$$H(z) = \frac{z-1}{z^{l+1}} \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{e^{mTs} (\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a})\}\},$$

Logo:

$$H(z) = \frac{z-1}{z^{l+1}} \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{mTs}}{s} - \frac{e^{mTs}}{s+a}\}\},$$

chamando

$$f_1(s) = \frac{e^{mTs}}{s} \quad e \quad f_2(s) = \frac{e^{mTs}}{s+a},$$

tem-se,

$$f_1(kT) = u(kT) \quad e \quad f_2(kT) = e^{-amT} e^{-akT},$$

Assim,

$$H(z) = \frac{z-1}{z^{l+1}} \mathcal{Z}\{u(kT) - e^{-amT} e^{-akT}\},$$

$$H(z) = \frac{z-1}{z^{l+1}} \left[ \frac{z}{z-1} - \frac{e^{-amT} z}{z - e^{-aT}} \right],$$

Ou ainda,

$$H(z) = (1 - e^{-amT}) \frac{z + \alpha}{z^l (z - e^{-aT})}. \quad (2.37)$$

sendo,

$$\alpha = \frac{(e^{-amT} - e^{-aT})}{1 - e^{-amT}}.$$

Uma aplicação do projeto da rejeição do distúrbio com o rastreamento do sinal de referência para um sistema discreto com atraso no tempo será mostrada no Exemplo 4.

### 3 Otimização $\mathcal{H}_\infty$ com Modificação de Zeros para o Problema do Rastreamento em Sistemas Discretos Incertos

Neste capítulo apresenta-se a formulação e propõe-se uma metodologia para a solução do problema do rastreamento do sinal de referência com rejeição de distúrbios em sistemas discretos incertos utilizando a realimentação dinâmica da saída.

#### 3.1 Formulação do problema

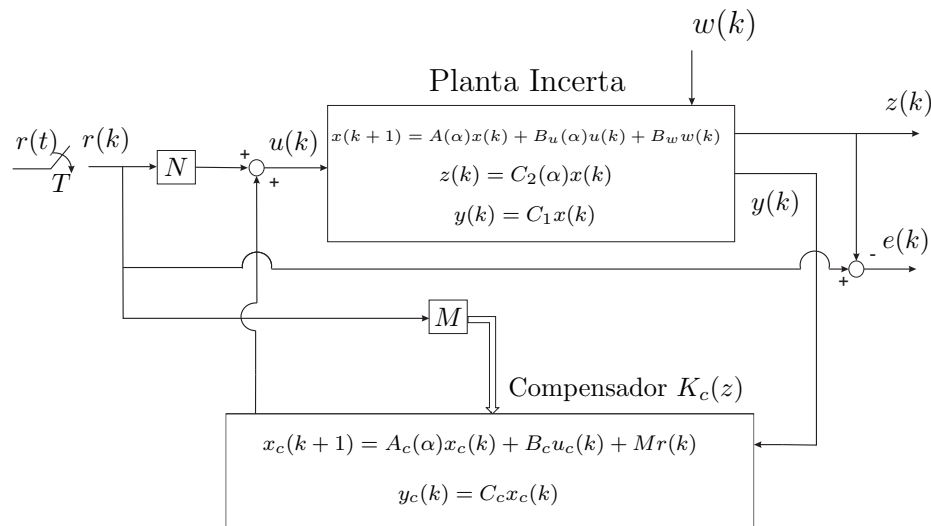


Figura 6: Sistema de controle ótimo discreto de rastreamento de sinal de referência e atenuação de perturbação presente na planta incerta.

Considera-se o seguinte sistema discreto linear e invariante no tempo com incertezas paramétricas descrito na forma de variáveis de estado:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\alpha)x(k) + B_u(\alpha)u(k) + B_w w(k) \\ y(k) &= C_1x(k) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$z(k) = C_2(\alpha)x(k)$$

sendo  $A(\alpha) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $B_u(\alpha) \in \mathfrak{R}^{n \times p}$ ,  $B_w(\alpha) \in \mathfrak{R}^{n \times q}$ ,  $C_2(\alpha) \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ ,  $C_1 \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ ,  $x(k)$  é o vetor de estados,  $y(k)$  é a saída medida,  $z(k)$  é a saída de referência,  $u(k)$  é a entrada de controle e  $w(k)$  é uma entrada exógena (do tipo distúrbio ou perturbação).

As matrizes incertas  $A(\alpha)$ ,  $B_u(\alpha)$  e  $C_2(\alpha)$  são representadas pela combinação convexa descrita a seguir (KAU et al., 2005):

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i A_i, & B_u(\alpha) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i B_{ui}, \\ C_2(\alpha) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i C_{2i} \end{aligned} \quad (3.2)$$

sendo  $\alpha = [\alpha_1 \cdots \alpha_r]'$  o vetor que parametriza o politopo de incertezas, e ainda,

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0. \quad (3.3)$$

O número total de vértices do politopo de incertezas do sistema é igual a  $r$ , sendo  $r = 2^v$  e  $v$  é o número de parâmetros incertos na planta.

O problema de rastreamento ótimo e rejeição do distúrbio considerando-se o sistema incerto descrito em (3.1) é minimizar o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  entre a saída  $z(k)$  e a entrada exógena  $w(k)$ , de tal maneira que o efeito da perturbação seja atenuado, e minimizar o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  entre a entrada de referência  $r(k)$  e o erro do sinal de rastreamento  $r(k) - z(k)$ .

Primeiramente projeta-se um compensador  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas incertos utilizando a realimentação dinâmica da saída, considerando-se  $N \in \mathfrak{R}^{p \times p} = 0$  e  $M \in \mathfrak{R}^{n \times p} = 0$ , através de um controlador discreto  $K_c i(z)$ , descrito na Figura 6. Tal controlador é formulado em termos de LMIs e minimiza o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  de  $w(k)$  para  $z(k)$ .

Na etapa seguinte obtém-se as matrizes  $N \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  e  $M \in \mathfrak{R}^{n \times p}$ , indicadas na Figura 6, através de um processo de otimização descrito na forma de LMIs. Na Seção 3.3 será mostrado que  $N$  e  $M$  modificam as posições dos zeros de  $r(k)$  para  $u(k)$ . Isto é feito de forma a otimizar o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  entre a saída  $e(k)$  e a entrada de referência  $r(k)$ . Note que  $e(k)$  denota o erro de rastreamento.

O diagrama de blocos da Figura 6 pode ser descrito por meio das variáveis de estado  $x(k)$  e  $x_c(k)$ , da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x_c(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\alpha) & B_u(\alpha)C_c \\ B_c C_2(\alpha) & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_c(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_u(\alpha)N \\ M \end{bmatrix} r(k) + \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix} w(k),$$

$$\begin{aligned}
y(k) &= \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_c(k) \end{bmatrix}, \\
z(k) &= \begin{bmatrix} C_2(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_c(k) \end{bmatrix}, \\
e(k) &= r(k) - z(k) = r(k) - \begin{bmatrix} C_2(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_c(k) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

O sistema (3.4) pode ser representado na forma compacta,

$$\begin{aligned}
\bar{x}(k+1) &= A_m(\alpha)\bar{x}(k) + B_m(\alpha)r(k) + B_n w(k), \\
e(k) &= -C_m(\alpha)\bar{x}(k) + D_m r(k), \\
z(k) &= C_m(\alpha)\bar{x}(k),
\end{aligned} \tag{3.5}$$

sendo,

$$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ x_c(k) \end{bmatrix}, A_m(\alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha) & B_u(\alpha)C_c \\ B_c C_2(\alpha) & A_c \end{bmatrix}, D_m = I, \tag{3.6}$$

$$B_m(\alpha) = \begin{bmatrix} B_u(\alpha)N \\ M \end{bmatrix}, B_n = \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } C_m(\alpha) = \begin{bmatrix} C_2(\alpha) & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Aplicando-se a Transformada  $\mathcal{Z}$  no sistema (3.5), para  $\bar{x}(0)=0$ , e realizando-se algumas manipulações algébricas, pode-se determinar a relação entre a saída  $Z(z)$  e as entradas  $W(z)$  e  $R(z)$ , conforme descrito em (3.8):

$$Z(z) = C_m(\alpha)(zI - A_m(\alpha))^{-1}B_m(\alpha)R(z) + C_m(\alpha)(zI - A_m(\alpha))^{-1}B_n W(z). \tag{3.8}$$

Considerando-se na equação (3.8) o sinal  $R(z)$  nulo, verifica-se que o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  de  $W(z)$  para  $Z(z)$  pode ser minimizado devido ao projeto inicial do controlador  $\mathcal{H}_\infty$ , implicando a minimização do efeito da perturbação, presente na planta, sobre o desempenho da saída do sistema.

Na Figura 6 observa-se a adição do termo  $Mr(k)$  na estrutura do controlador. Será mostrado na Seção 3.3 que as matrizes  $M \in \mathfrak{R}^{n \times p}$  e  $N \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  tem somente a função de alterar os zeros da função de transferência de  $r(k)$  para  $u(k)$ .  $M \in \mathfrak{R}^{n \times p}$  e  $N \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  não modificam os pólos estabelecidos com o projeto inicial do controlador  $K_c(z)$ , pois a função de transferência de  $W(z)$  para  $Z(z)$  não é modificada pelos parâmetros  $N$  ou  $M$ , vide equações (3.6) e (3.7). Os pólos do sistema não são modificados, pois  $A_m$  em (3.6) e (3.7) não depende de  $M$  ou  $N$ . Com isso a estabilidade do sistema não é comprometida.

Para o projeto do rastreador ótimo, considera-se a relação entre o sinal de erro e o sinal de referência, denominado  $H_{inc}(z)$ , descrito em (3.9), com o sinal de perturbação

$W(z)$  nulo

$$H_{inc}(z) = -C_m(\alpha)(zI - A_m(\alpha))^{-1}B_m(\alpha) + D_m, \quad (3.9)$$

para um valor específico de  $\alpha$ .

A partir desta relação, pode-se projetar um rastreador de sinais através da modificação de zeros minimizando o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  entre o sinal de referência e o sinal de erro do sistema. O processo de modificação de zeros não interfere no projeto de rejeição de perturbação, pois segundo (3.8) a função de transferência de  $W(z)$  para  $Z(z)$  não depende de  $B_m(\alpha)$ . Na Seção 3.4 utiliza-se a posição dos zeros, implícitos na especificação dos parâmetros  $N \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  e  $M \in \mathfrak{R}^{n \times p}$  em  $B_m(\alpha)$ , para o processo de minimização do erro do rastreamento.

## 3.2 Projeto de um Compensador $\mathcal{H}_\infty$ Discreto para Sistemas Incertos

O problema de otimização do custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  de  $(A(\alpha), B_w, B_u(\alpha), C_2(\alpha))$  consiste em tornar a influência da perturbação  $w(k)$  na saída  $z(k)$  do sistema a menor possível, através do projeto de um controlador discreto  $K_{ci}(z)$ . Portanto, deseja-se minimizar o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  entre a entrada  $w(k)$  (perturbação) e a saída  $z(k)$ , que pode ser descrito através do seguinte problema de otimização, (PALHARES; TAKAHASHI; PERES, 1997):

$$\|H\|_\infty^2 = \min \mu$$

$$s.a \begin{bmatrix} Q & 0 & B_{ni} & A_{mi}Q \\ 0 & I & D_{mi} & C_{mi}Q \\ B'_{ni} & D'_{mi} & \mu I & 0 \\ QA'_{mi} & QC'_{mi} & 0 & Q \end{bmatrix} > 0,$$

$$Q > 0,$$

$$\mu > 0. \quad (3.10)$$

sendo  $i = 1, 2, \dots, r$ .

Considera-se incerteza do tipo politópica e  $K_{ci}(z)$  é um controlador  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas incertos utilizado na realimentação dinâmica da saída de medida. O controlador  $K_{ci}(z)$  é projetado utilizando uma metodologia descrita na forma de LMIs conforme proposto no Teorema 3.1. O controlador  $K_c(z)$  apresentado no Teorema 3.1 representa o  $K_{ci}(z)$  escolhido como ótimo do problema.

**Teorema 3.1.** *Considere o sistema (3.1) com compensador  $K_c(z) = C_c(zI - A_c)^{-1}B_c$  de realimentação dinâmica da saída. Se existe solução para as LMIs descritas em (3.11) e (3.12) então pode-se obter o controlador  $K_c(z)$  que minimiza o efeito do distúrbio e estabiliza o sistema (3.1),*

$$\|H\|_\infty^2 = \min \mu$$

$$s.a \begin{bmatrix} R & I & 0 & B_w & A_i R + B_{ui} \bar{C} & A_i \\ I & S & 0 & SB_w & X_i & SA_i + \bar{B}C_{2i} \\ 0 & 0 & I & 0 & C_{2i}R & C_{2i} \\ B'_w & B'_w S & 0 & \mu I & 0 & 0 \\ RA'_i + \bar{C}'B'_{ui} & X'_i & RC'_{2i} & 0 & R & I \\ A'_i & A'_i S + C'_{2i} \bar{B}' & C'_{2i} & 0 & I & S \end{bmatrix} > 0,$$

(3.11)

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} > 0, \quad (3.12)$$

sendo,  $R = R' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $S = S' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $X_i$ ,  $\bar{B}$  e  $\bar{C}$  as variáveis de otimização conjunta das LMIs (3.11) e (3.12), para  $i = 1, 2, \dots, r$ .

Um controlador, para cada vértice do politopo, é obtido a partir das relações:

$$\begin{aligned} \bar{C} &= C_c \psi', \\ \bar{B} &= EB_c, \end{aligned} \quad (3.13)$$

e,

$$X_i = (SA_i + EB_c C_{2i})R + (SB_{ui}C_c + EA_{ci})\psi', \quad (3.14)$$

O controlador a ser implementado deverá ser selecionado de (3.14) tal que proporcione o menor custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  para todo o politopo.

Para a solução de (3.13) e (3.14) tem-se:

$$\psi E' = I - RS, \quad (3.15)$$

*Prova:* considera-se  $R_m$  a realização mínima do sistema realimentado pelo compensador  $\mathcal{H}_\infty$ ,

$$R_m = C_m(\alpha)(zI - A_m(\alpha))^{-1}B_n, \quad (3.16)$$

para um  $\alpha$  específico.

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  da realização  $R_m$ , para um  $\alpha$  específico, pode ser interpretada pela norma induzida  $\mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2$  (DOYLE; GLOVER, 1996), isto é,

$$\|R_m\|_\infty = \gamma \Leftrightarrow \|z\|_2 \leq \gamma \|w\|_2, \quad \forall w(k) \in \mathcal{L}_2, \quad (3.17)$$

ou  $\gamma^{-1}\|z\|_2 \leq \|w\|_2$ , sendo  $\|z\|_2^2 = z'z$  e  $\|w\|_2^2 = w'w$ . Neste caso,  $\|w\|_2^2 > \gamma^{-2}\|z\|_2^2$ . Neste contexto,  $z(k)$  é o sinal de saída de referência do sistema e  $w(k)$  é a entrada do

sinal de distúrbio. Para o sistema com incerteza politópica, dependente dos valores de  $\alpha$ ,  $\gamma$  é um limitante superior da norma  $\mathcal{H}_\infty$  de cada vértice do politopo, denominado custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$ . Em (3.17), pode-se verificar que o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  não excede ao valor  $\gamma$  se existir uma função quadrática de Lyapunov  $V(x(k)) = x(k)'Px(k) > 0$  tal que,

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0 \quad (3.18)$$

De (3.17) e (3.18) temos:

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) + z'z - \gamma^2 w'w < 0, \text{ sendo } P = P' > 0. \quad (3.19)$$

Substituindo  $V(x(k))$  e  $V(x(k+1))$  em (3.19), obtém-se

$$x(k+1)'Px(k+1) - x(k)'Px(k) + z'z - \gamma^2 w'w < 0. \quad (3.20)$$

Entretanto, de (3.1),  $x(k+1) = A(\alpha)x(k) + B_w w(k)$  e  $z(k) = C_2(\alpha)x(k)$ , o que resulta em

$$\begin{aligned} & (A(\alpha)x(k) + B_w w(k))' P (A(\alpha)x(k) + B_w w(k)) - x(k)'Px(k) \\ & + (C_2(\alpha)x(k))' (C_2(\alpha)x(k)) - \gamma^2 w'w < 0, \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} & x(k)'A(\alpha)'PA(\alpha)x(k) + x(k)'A(\alpha)'PB_w w(k) + w(k)'B_w'PA(\alpha)x(k) + \\ & w(k)'B_w'PB_w w(k) + x(k)'C_2(\alpha)'C_2(\alpha)x(k) \\ & - \gamma^2 w'w - x(k)'Px(k) < 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Escolhendo-se um novo vetor  $[x(k)' \ w(k)']$ , pode-se reescrever a inequação (3.21) na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x(k) & w(k) \end{bmatrix}' A_h \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix} < 0, \quad (3.22)$$

ou,

$$A_h < 0, \quad (3.23)$$

sendo,

$$A_h = \begin{bmatrix} A_{h1} & A_{h2} \\ A_{h3} & A_{h4} \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

e,

$$\begin{aligned} A_{h1} &= A(\alpha)'PA(\alpha) + C_2(\alpha)'C_2(\alpha) - P, \\ A_{h2} &= A(\alpha)'PB_w, \\ A_{h3} &= B_w'PA(\alpha), \\ A_{h4} &= B_w'PB_w - I\gamma^2. \end{aligned} \quad (3.25)$$

O custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  é obtido pela minimização de  $\gamma$  em (3.19). Utilizando-se a modificação de variável  $\mu = \gamma^2$ , e considerando (3.25) e (3.24) tem-se

$$\begin{bmatrix} A(\alpha)'PA(\alpha) - P & A(\alpha)PB_w \\ B_w'PA(\alpha) & B_w'PB_w - \mu I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_2(\alpha)' \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2(\alpha) & 0 \end{bmatrix} < 0. \quad (3.26)$$

Usando o complemento de Schur em (3.26),

$$\left[ \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \mu I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A(\alpha)'P \\ B_w'P \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} PA(\alpha) & PB_w \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_2(\alpha)' \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} C_2(\alpha) & 0 \end{bmatrix} & I \end{array} \right] > 0.$$

Ou ainda,

$$\begin{bmatrix} P & 0 & C_2(\alpha)' \\ 0 & \mu I & 0 \\ C_2(\alpha) & 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A(\alpha)'P \\ B_w'P \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} PA(\alpha) & PB_w \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

que pode ser escrita na seguinte forma conveniente:

$$\begin{bmatrix} P & 0 & C_2(\alpha)' \\ 0 & \mu I & 0 \\ C_2(\alpha) & 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A(\alpha)'P \\ B_w'P \\ 0 \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} PA(\alpha) & PB_w & 0 \end{bmatrix} > 0,$$

$$P > 0,$$

$$\mu > 0,$$
(3.28)

Resultando,

$$\begin{bmatrix} P & 0 & C_2(\alpha)' & A(\alpha)'P \\ 0 & \mu I & 0 & B_w'P \\ C_2(\alpha) & 0 & I & 0 \\ PA(\alpha) & PB_w & 0 & P \end{bmatrix} > 0.$$

Ou, na forma dual:

$$\begin{bmatrix} Q & 0 & B_w & A(\alpha)'Q \\ 0 & \mu I & 0 & C_2(\alpha)Q \\ B_w' & 0 & I & 0 \\ QA(\alpha) & QC_2(\alpha)' & 0 & Q \end{bmatrix} > 0. \quad (3.29)$$

Então, substituiu-se a realização  $(A_m(\alpha), B_n, C_m(\alpha))$  no lugar de  $(A(\alpha), B_w, B_u(\alpha), C_2(\alpha))$  na inequação (3.29), obtendo:

$$\begin{bmatrix} Q & 0 & B_n & A_m(\alpha)'Q \\ 0 & \mu I & 0 & C_m(\alpha)Q \\ B_n' & 0 & \mu I & 0 \\ QA_m(\alpha) & QC_m(\alpha)' & 0 & Q \end{bmatrix} > 0. \quad (3.30)$$

Para solucionar o problema da determinação do compensador  $\mathcal{H}_\infty$  soluciona-se o problema de otimização descrito em (3.30). Entretanto, o mesmo apresenta BMIs, o que torna a solução do problema de elevado custo computacional. Então, é necessário o uso

de uma transformação linear para resolver o problema em termos de LMIs. Inicialmente adota-se a matriz  $\tilde{Q}$  e sua inversa como,

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} R & \psi \\ \psi' & J \end{bmatrix} \text{ e } \tilde{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} S & E \\ E' & X \end{bmatrix},$$

sendo,  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Ainda adota-se,  $R = R'$  e  $S = S'$ :

$$\tilde{Q}\Gamma_2 = \Gamma_1, \text{ com } \Gamma_1 = \begin{bmatrix} R & I \\ \psi' & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \Gamma_2 = \begin{bmatrix} I & S \\ 0 & E' \end{bmatrix},$$

Considerando-se a matriz de Lyapunov  $\tilde{Q} > 0$  e pré e pós multiplicando-se  $\tilde{Q}$  por  $\Gamma_2'$  e  $\Gamma_2$  respectivamente obtém-se a inequação (3.12). Então, a inequação (3.30) é pré e pós multiplicada por (3.31) e (3.32) respectivamente para se obter a inequação (3.11).

$$\begin{bmatrix} \Gamma_2' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_2' \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_2 \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

Efetuando-se as multiplicações para se obter (3.11), resulta:

$$\|H\|_\infty^2 = \min \mu$$

$$s.a \begin{bmatrix} R & I & 0 \\ I & S & 0 \\ 0 & 0 & I \\ B_w' & B_w' S & D' \\ RA(\alpha)' + \bar{C}' B_u(\alpha)' & X(\alpha)' & RC_2(\alpha)' \\ A(\alpha)' & A(\alpha)' S + C_2(\alpha)' \bar{B}' & C_2(\alpha)' \end{bmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc} B_w & A(\alpha)R + B_u(\alpha)\bar{C} & A(\alpha) \\ SB_w & X(\alpha) & SA(\alpha) + \bar{B}C_2(\alpha) \\ D & C_2(\alpha)R & C_2(\alpha) \\ \mu I & 0 & 0 \\ 0 & R & I \\ 0 & I & S \end{array} \right] > 0, \quad (3.33)$$

sendo:

$$\begin{aligned} X(\alpha) &= (SA(\alpha) + EB_c C_2(\alpha))R + (SB_u(\alpha)C_c + EA_c(\alpha))\psi', \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i X_i &= S \sum_{i=1}^r \alpha_i A_i + EB_c \sum_{i=1}^r \alpha_i C_{2i} R + [S \sum_{i=1}^r \alpha_i B_{ui} C_c + EA_c] \psi', \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i X_i &= \sum_{i=1}^r \alpha_i [SA_i + EB_c C_{2i} R + (SB_{ui} C_c + EA_c) \psi'], \end{aligned} \quad (3.34)$$

como  $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ ,  $A(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i A_i$ ,  $B_u(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i B_{ui}$  e  $C_2(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i C_{2i}$ , temos:

$$\left[ \begin{array}{ccc} \sum_{i=1}^r \alpha_i R & \sum_{i=1}^r \alpha_i I & 0 \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i I & \sum_{i=1}^r \alpha_i S & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^r \alpha_i I \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i B'_w & \sum_{i=1}^r \alpha_i B'_w S & \sum_{i=1}^r \alpha_i D' \\ R \sum_{i=1}^r \alpha_i A'_i + \bar{C}' \sum_{i=1}^r \alpha_i B'_{ui} & \sum_{i=1}^r \alpha_i X'_i & R \sum_{i=1}^r \alpha_i C'_{2i} \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i A'_i & \sum_{i=1}^r \alpha_i A'_i S + \sum_{i=1}^r \alpha_i C'_{2i} \bar{B}' & \sum_{i=1}^r \alpha_i C'_{2i} \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i B_w & \sum_{i=1}^r \alpha_i A_i R + \sum_{i=1}^r \alpha_i B_{ui} \bar{C} & \sum_{i=1}^r \alpha_i A_i \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i SB_w & \sum_{i=1}^r \alpha_i X_i & S \sum_{i=1}^r \alpha_i A_i + \bar{B} \sum_{i=1}^r \alpha_i C_{2i} \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i D & \sum_{i=1}^r \alpha_i C_{2i} R & \sum_{i=1}^r \alpha_i C_{2i} \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i \mu I & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^r \alpha_i R & \sum_{i=1}^r \alpha_i I \\ 0 & \sum_{i=1}^r \alpha_i I & \sum_{i=1}^r \alpha_i S \end{array} \right] > 0, \quad (3.35)$$

ou ainda,

$$\left[ \begin{array}{ccc} \sum_{i=1}^r \alpha_i (R) & \sum_{i=1}^r \alpha_i (I) & 0 \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i (I) & \sum_{i=1}^r \alpha_i (S) & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^r \alpha_i (I) \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i (B'_w) & \sum_{i=1}^r \alpha_i (B'_w S) & \sum_{i=1}^r \alpha_i (D') \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i (RA'_i) + \sum_{i=1}^r \alpha_i (\bar{C}' B_{ui}) & \sum_{i=1}^r \alpha_i (X'_i) & \sum_{i=1}^r \alpha_i (RC'_{2i}) \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i (A'_i) & \sum_{i=1}^r \alpha_i (A'_i S) + \sum_{i=1}^r \alpha_i (C'_{2i} \bar{B}') & \sum_{i=1}^r \alpha_i (C'_{2i}) \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^r \alpha_i (B_w) & \sum_{i=1}^r \alpha_i (A_i R) + \sum_{i=1}^r \alpha_i (B_{ui} \bar{C}) & \sum_{i=1}^r \alpha_i (A_i) \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i (S B_w) & \sum_{i=1}^r \alpha_i (X_i) & \sum_{i=1}^r \alpha_i (S A_i) + \sum_{i=1}^r \alpha_i (\bar{B} C_{2i}) \\ D & \sum_{i=1}^r \alpha_i (C_{2i} R) & \sum_{i=1}^r \alpha_i C_{2i} \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i (\mu I) & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^r \alpha_i (R) & \sum_{i=1}^r \alpha_i (I) \\ 0 & \sum_{i=1}^r \alpha_i (I) & \sum_{i=1}^r \alpha_i (S) \end{bmatrix} > 0, \quad (3.36)$$

que corresponde á seguinte soma:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \begin{bmatrix} R & I & 0 & B_w & (A_1 R) + (B_{u1} \bar{C}) & A_1 \\ I & S & 0 & S B_w & X_1 & S A_1 + \bar{B} C_{21} \\ 0 & 0 & I & D & C_{21} & C_{21} \\ B'_w & B'_w S & D' & \mu I & 0 & 0 \\ R A'_1 + \bar{C}' B_{u1} & X'_2 & R C'_{21} & 0 & R & I \\ A'_1 & A'_1 S + C'_{21} \bar{B}' & C'_{21} & 0 & I & S \end{bmatrix} + \\ & \alpha_2 \begin{bmatrix} R & I & 0 & B_w & (A_2 R) + (B_{u2} \bar{C}) & A_2 \\ I & S & 0 & S B_w & X_2 & S A_2 + \bar{B} C_{22} \\ 0 & 0 & I & D & C_{22} & C_{22} \\ B'_w & B'_w S & D' & \mu I & 0 & 0 \\ R A'_2 + \bar{C}' B_{u2} & X'_2 & R C'_{22} & 0 & R & I \\ A'_2 & A'_2 S + C'_{22} \bar{B}' & C'_{22} & 0 & I & S \end{bmatrix} + \dots \\ & \dots + \alpha_i \begin{bmatrix} R & I & 0 & B_w & (A_i R) + (B_{ui} \bar{C}) & A_i \\ I & S & 0 & S B_w & X_i & S A_i + \bar{B} C_{2i} \\ 0 & 0 & I & D & C_{2i} & C_{2i} \\ B'_w & B'_w S & D' & \mu I & 0 & 0 \\ R A'_i + \bar{C}' B_{ui} & X'_i & R C'_{2i} & 0 & R & I \\ A'_i & A'_i S + C'_{2i} \bar{B}' & C'_{2i} & 0 & I & S \end{bmatrix} + \dots \\ & \dots + \alpha_r \begin{bmatrix} R & I & 0 & B_w & (A_r R) + (B_{ur} \bar{C}) & A_r \\ I & S & 0 & S B_w & X_r & S A_r + \bar{B} C_{2r} \\ 0 & 0 & I & D & C_{2r} & C_{2r} \\ B'_w & B'_w S & D' & \mu I & 0 & 0 \\ R A'_r + \bar{C}' B_{ur} & X'_r & R C'_{2r} & 0 & R & I \\ A'_r & A'_r S + C'_{2r} \bar{B}' & C'_{2r} & 0 & I & S \end{bmatrix} > 0, \quad (3.37) \end{aligned}$$

como  $\alpha_i > 0$  para  $i = 1, 2, \dots, r$ , uma condição suficiente para a positividade de (3.37) é:

$$\begin{bmatrix} R & I & 0 & B_w & A_i R + B_{ui} \bar{C} & A_i \\ I & S & 0 & S B_w & X_i & S A_i + \bar{B} C_{2i} \\ 0 & 0 & I & D & C_{2i} R & C_{2i} \\ B'_w & B'_w S & D' & \mu I & 0 & 0 \\ R A'_i + \bar{C}' B'_{ui} & X'_i & R C'_{2i} & 0 & R & I \\ A'_i & A'_i S + C'_{2i} \bar{B}' & C'_{2i} & 0 & I & S \end{bmatrix} > 0, \quad (3.38)$$

$i = 1, 2, \dots, r$ .

**Observação 3.2.** As matrizes  $\Psi$  e  $E$  descritas em (3.15) podem ser obtidas através do

método de solução de sistemas lineares denominado decomposição LU. Através do software MATLAB pode-se obter a decomposição LU de uma matriz.

Através da resolução de (3.13) e (3.14), obtém-se as matrizes dinâmicas do compensador  $\mathcal{H}_\infty$ ,  $K_{ci}(z) = C_{ci}(zI - A_{ci})^{-1}B_{ci}$ .

Obtém-se  $A_{ci}$  a partir de (3.14) resolvendo,

$$A_{ci} = E^{-1}(X_i - SA_iR - EB_cC_{2i}R - SB_{ui}C_c\psi')((\psi')^{-1}). \quad (3.39)$$

Em seguida, substituiu-se as matrizes do compensador  $K_{ci}(z) = C_{ci}(zI - A_{ci})^{-1}B_{ci}$  no problema (3.10), e verifica-se qual controlador  $K_{ci}(z)$  que proporciona o melhor desempenho na otimização do custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  de  $w(k)$  para  $z(k)$  para todo politopo. Implementa-se o controlador  $K_c(z) = K_{ci}(z)$  de melhor desempenho na otimização do custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$ .

Uma outra forma para se obter  $K_c(z)$ , é utilizar o controlador  $A_c$  como sendo uma combinação linear dos controladores  $A_{ci}$ ,

$$A_c = \sum_{i=1}^r \alpha_i A_{ci}, \quad (3.40)$$

sendo que  $\alpha_i$  é dado em (3.3).

Verifica-se todas as combinações lineares, e utiliza-se o controlador  $K_{ci}(z)$  que possua  $A_{ci}$  que proporcione o melhor desempenho na otimização do custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  de  $w(k)$  para  $z(k)$  para todo politopo. Implementa-se o controlador  $K_c(z) = K_{ci}(z)$  de melhor desempenho na otimização do custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$ .

### 3.3 Alocação de Zeros em Sistemas Discretos Incertos

Considerando-se o sistema  $(A(\alpha), B_u(\alpha), C_2(\alpha))$ , é possível projetar um sistema que modifique os zeros de  $r(k)$  para  $u(k)$  conforme mostrado na Figura 7. Neste trabalho propõe-se a seleção de  $M$  e  $N$  de modo que os zeros de malha fechada sejam alocados em locais arbitrários escolhidos pelo projetista, sendo  $M \in \mathfrak{R}^{n \times p}$  e  $N \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ .

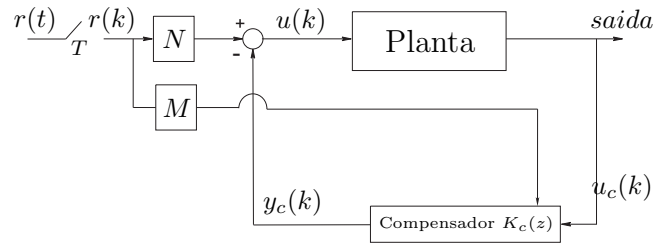


Figura 7: Sistema de alocação de zeros.

Considerando a Figura 7, se existir um zero de transmissão de  $r(k)$  para  $u(k)$ , então necessariamente existe um zero de transmissão de  $r(k)$  para  $y(k)$ , a menos que ocorra cancelamento de pólos e zeros. Com isso, utilizando a equação de controlador  $K_c(z)$  e da lei de controle com adição da entrada de referência, a equação característica dos zeros de  $r(k)$  para  $u(k)$  pode ser descrita por (3.41):

$$\begin{aligned} x_c(k+1) &= A_c x_c(k) + B_c y(k) + M r(k) \\ u(k) &= C_c x_c(k) + N r(k) \\ \det \left[ zI - A_c + M N^{-1} C_c \right] &= 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

sendo que as soluções,  $z = z_i$ , são os zeros modificados de  $r(k)$  para  $u(k)$ .

É importante lembrar que além das matrizes  $N \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  e  $M \in \mathfrak{R}^{n \times p}$  modificarem os zeros do sistema elas também são usadas para se obter a solução ótima para o rastreamento, como é mostrado na Seção 3.4.

### 3.4 Projeto do Rastreador de Sinais com Peso na Frequência para Sistemas Discretos Incertos

O custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema discreto, dinâmico próprio  $H(z)$ , estável, representado na forma de espaço de estados  $(A_z(\alpha), B_z(\alpha), C_z(\alpha), D_z)$ :

$$\begin{aligned} x_z(k+1) &= A_z(\alpha)x(k) + B_z(\alpha)u(k) \\ y_z(k) &= C_z(\alpha)x(k) + D_z u(k) \end{aligned} \quad (3.42)$$

sendo  $A_z(\alpha) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $B_z(\alpha) \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ ,  $C_z(\alpha) \in \mathfrak{R}^{p \times n}$  e  $D_z \in \mathfrak{R}^{p \times m}$  supostamente conhecidas, pode ser obtido através do seguinte problema de otimização, descrito na forma de LMIs (PALHARES; TAKAHASHI; PERES, 1997):

$$\begin{aligned} \|H\|_\infty^2 = \min \quad & \mu \\ \text{s.a.} \quad & \begin{bmatrix} Q & 0 & B_{zi} & A_{zi}Q \\ 0 & I & D_z & -C_{zi}Q \\ B'_{zi} & D'_z & \mu I & 0 \\ QA'_{zi} & -QC'_{zi} & 0 & Q \end{bmatrix} > 0 \\ & Q > 0 \\ & \mu > 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

A matriz de transferência do sistema para um valor específico de  $\alpha$  é dada por  $H(z) = C(\alpha)(zI - A(\alpha))^{-1}B(\alpha) + D_z$ .

A solução para o problema de rastreamento ótimo para sistemas incertos (incertezas do tipo politópicas) utilizando a variação dos zeros, consiste em determinar os parâmetros  $M \in \mathfrak{R}^{n \times p}$  e  $N \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  que minimizam o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  de  $H_{inc}(z)$  descrito em (3.9). A Figura 6 e as equações (3.4)-(3.7) mostram detalhes sobre a estrutura do rastreador. Inclui-se o projeto do peso na frequência, para que o rastreador opere em uma faixa de frequência especificada em projeto.

Para o projeto do rastreador deseja-se encontrar a solução global que otimize o problema descrito a seguir:

$$\min \quad \|H_{inc}(z)V(z)\|_\infty \quad (3.44)$$

sendo  $V(z) = (A_v, B_v, C_v, D_v)$  um sistema dinâmico projetado para especificar o peso na frequência de saída e considera-se  $H_{inc} = (A_m(\alpha), B_m(\alpha), -C_m(\alpha), D_m)$ , para um  $\alpha$  específico, uma realização do sistema linear invariante no tempo e estável indicado em

(3.9).

Uma possível realização em espaço de estado, para cada vértice do politopo, de  $\check{H}_f = H_{mi}(z)V(z)$  é:

$$\left[ \begin{array}{c|c} \check{A}_{fi} & \check{B}_{fi} \\ \check{C}_{fi} & \check{D}_{fi} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} A_{mi} & 0 & B_{mi} \\ -B_v C_{mi} & A_v & B_v D_m \\ \hline 0 & C_v & 0 \end{array} \right] \quad (3.45)$$

Então, é proposto o Teorema 3.3 para o projeto do rastreador com modificação dos zeros aplicados a sistemas com incertezas politópicas na planta.

**Teorema 3.3.** *Considere o sistema (3.1) com compensador  $K_{ci}(z)$  de realimentação dinâmica da saída de medida dado por (3.13), (3.14) e (3.15). Se existe solução para as LMIs descritas em (3.46) então pode-se obter as matrizes  $M$ ,  $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , e  $N$ ,  $N \in \mathbb{R}^{p \times p}$  que minimizam o custo garantido do sistema (3.9), com peso na frequência.*

$$\|H\|_{\infty}^2 = \min \quad \mu$$

$$s.a \quad \left[ \begin{array}{cccc} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 \\ Q'_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 \\ Q'_{13} & Q'_{23} & Q_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ N'B'_{ui} & M' & B'_v & I \\ Q_{12}B_{ui}C'_c + Q_{11}A'_i & Q_{12}A'_c + Q_{11}B_cC'_{2i} & Q_{13}A'_v - Q_{11}C'_{2i}B'_v & -Q_{13}C'_v \\ Q_{22}B_{ui}C'_c + Q'_{12}A'_i & Q_{22}A'_c + Q'_{12}B_cC'_{2i} & Q_{23}A'_v - Q'_{12}C'_{2i}B'_v & -Q_{23}C'_v \\ Q'_{23}B_{ui}C'_c + Q'_{13}A'_i & Q'_{23}A'_c + Q'_{13}B_cC'_{2i} & Q_{33}A'_v - Q'_{13}C'_{2i}B'_v & -Q_{33}C'_v \\ B_{ui}N & A_iQ_{11} + B_{ui}C_cQ'_{12} & A_iQ_{12} + B_{ui}C_cQ_{22} & A_iQ_{13} + B_{ui}C_cQ_{23} \\ M & B_cC_{2i}Q_{11} + A_cQ'_{12} & B_cC_{2i}Q_{12} + A_cQ_{22} & B_cC_{2i}Q_{13} + A_cQ_{23} \\ B_v & -B_vC_{2i}Q_{11} + A_vQ'_{13} & -B_vC_{2i}Q_{12} + A_vQ'_{23} & -B_vC_{2i}Q_{13} + A_vQ_{33} \\ I & -C_vQ'_{13} & -C_vQ'_{23} & -C_vQ_{33} \\ \mu I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ 0 & Q'_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\ 0 & Q'_{13} & Q'_{23} & Q_{33} \end{array} \right] > 0,$$

$$\left[ \begin{array}{ccc} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q'_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q'_{13} & Q'_{23} & Q_{33} \end{array} \right] > 0, \quad (3.46)$$

$$\mu > 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, r. \quad (3.47)$$

*Prova:* A equação (3.46) é obtida considerando-se as matrizes  $(A_{zi}, B_{zi}, C_{zi}, D_z) = (\check{A}_{fi}, \check{B}_{fi}, \check{C}_{fi}, \check{D}_f)$  na LMI (3.43), sendo a matriz  $Q$  particionada da seguinte forma  $Q_{ij} = Q'_{ij}$ ,  $i, j=1, 2, 3$ .

As matrizes  $M$  e  $N$  são soluções ótimas de (3.46) e minimizam o custo garantido  $\mathcal{H}_{\infty}$

entre o sinal de entrada de referência  $r(k)$  e o sinal de erro de rastreamento  $r(k)-z(k)$  para um sistema com parâmetros incertos na planta.

Os filtros utilizados no rastreamento são apenas para projeto, pois posteriormente são descartados para simulação ou implementação dos sistemas de rastreamento de sinais de referência.

## 4 *Otimização $\mathcal{H}_\infty$ com Modificação de Zeros para o Problema do Rastreamento em Sistemas Discretos Não-Lineares*

Nesta seção propõe-se uma metodologia de modificação de zeros para solucionar o problema do rastreamento do sinal de referência em sistemas discretos não-lineares.

### 4.1 *Formulação do problema*

O problema da rejeição de distúrbios para sistemas discretos não-lineares consiste em minimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  entre a entrada exógena  $w(k)$  e a saída  $z(k)$ , para tal projeta-se um compensador *fuzzy*. Para o rastreamento, minimiza-se a norma  $\mathcal{H}_\infty$  entre a entrada de referência  $r(k)$  e o erro do sinal de rastreamento  $r(k) - z(k)$ .

Primeiramente projeta-se um compensador  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas discretos não-lineares utilizando a realimentação dinâmica da saída, considerando-se  $N(\alpha) \in \mathfrak{R}^{p \times p} = 0$  e  $M(\alpha) \in \mathfrak{R}^{n \times p} = 0$ , através de um compensador *fuzzy*, descrito na Figura 8. O projeto do controlador é formulado em termos de LMIs e minimiza a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $w(k)$  para  $z(k)$ .

Na etapa seguinte obtém-se as matrizes  $N(\alpha) \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  e  $M(\alpha) \in \mathfrak{R}^{n \times p}$ , indicadas na Figura 8, através de um processo de otimização descrito na forma de LMIs.

O procedimento de projeto adotado neste trabalho inicia-se com a modelagem de um dado sistema não-linear através do modelo *Fuzzy* Takagi-Sugeno (T-S). O modelo *fuzzy* proposto por Takagi-Sugeno é descrito por regras Se-Então que representam os modelos locais lineares que compõe o sistema não-linear (WANG; TANAKA; GRIFFIN, 1996).

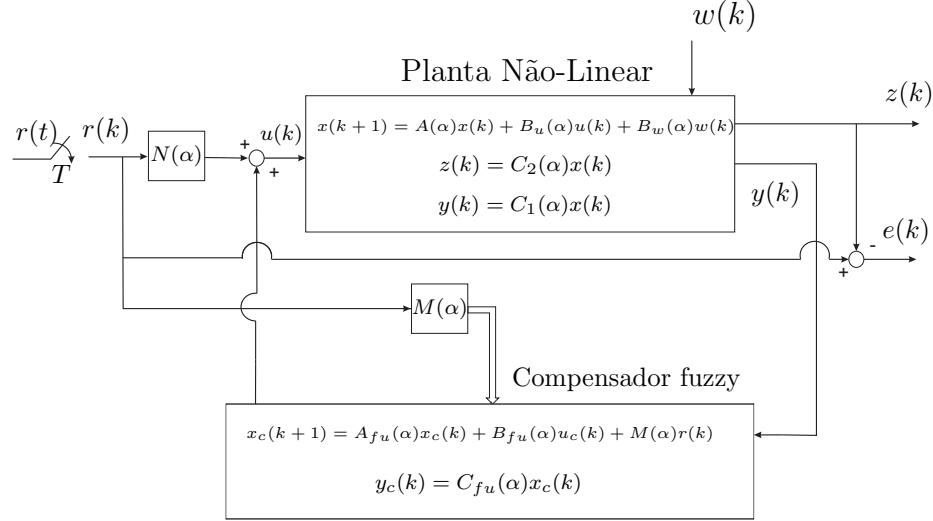


Figura 8: Sistema de controle ótimo discreto de rastreamento de sinal de referência e atenuação do efeito da perturbação presente na planta não-linear.

A principal característica do modelo *Fuzzy* Takagi-Sugeno é a possibilidade de expressar as dinâmicas locais de cada implicação (regra) *fuzzy* por um modelo de sistema linear. As regras dos modelos *Fuzzy* T-S são descritas da seguinte forma:

**Modelo Regra  $i$ :**

**Se**  $h_1(k)$  é  $\mathcal{T}_{i1}$  e  $\dots$   $h_p(k)$  é  $\mathcal{T}_{ip}$ , (4.1)

$$\mathbf{Ent\~{a}o} \begin{cases} x(k+1) = A_i x(k) + B_{2i} u(k) + B_{1i} w(k) \\ z(k) = C_{1i} x(k) \\ y(k) = C_{2i} x(k) \end{cases}$$

sendo  $i = 1, 2, \dots, r$ ,  $A_i \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $B_{1i} \in \mathfrak{R}^{n \times q}$ ,  $B_{2i} \in \mathfrak{R}^{n \times p}$ ,  $C_{1i} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ ,  $C_{2i} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ ,  $x(k)$  é o vetor de estados ( $x(k) \in \mathfrak{R}^n$ ),  $y(k)$  é a saída medida ( $y(k) \in \mathfrak{R}^m$ ),  $z(k)$  é a saída de referência ( $z(k) \in \mathfrak{R}^m$ ),  $u(k)$  a entrada de controle ( $u(k) \in \mathfrak{R}^p$ ) e  $w(k)$  é uma entrada exógena (do tipo distúrbio ou perturbação).

Em (4.1),  $\mathcal{T}_{ip}$  é o conjunto *fuzzy* e  $r$  é o número de modelos locais relacionados às regras *fuzzy*. As funções  $h_1(k), \dots, h_p(k)$  são denominadas de variáveis premissas e  $h(k)$  será utilizado para denotar o vetor que contém todos os elementos individuais  $h_1(k), \dots, h_p(k)$ . Neste trabalho utilizou-se a forma generalizada dos sistemas *Fuzzy* Takagi-Sugeno (TANIGUCHI et al., 2001), e o número de modelos locais é  $2^{nl}$ , sendo  $nl$  o número de não-linearidades no sistema.

Considerando-se um sistema com  $(x(k), u(k), w(k))$ , pode-se descrever um planta não-

linear através de um sistema *fuzzy* inferido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= \frac{\sum_{i=1}^r \varphi_i(h(k)) \{A_i x(k) + B_{2i} u(k) + B_{1i} w(k)\}}{\sum_{i=1}^r \varphi_i(h(k))} \\
 z(k) &= \frac{\sum_{i=1}^r \varphi_i(h(k)) C_{1i} x(k)}{\sum_{i=1}^r \varphi_i(h(k))} \\
 y(k) &= \frac{\sum_{i=1}^r \varphi_i(h(k)) C_{2i} x(k)}{\sum_{i=1}^r \varphi_i(h(k))}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

sendo,

$$\begin{aligned}
 h(k) &= \left[ h_1(k) \quad h_2(k) \quad \cdots \quad h_p(k) \right], \\
 \varphi_i(h(k)) &= \prod_{j=1}^p \mathcal{T}_{ij} h_j(k).
 \end{aligned}$$

Adotando-se,

$$\alpha_i(h(k)) = \frac{\varphi_i(h(k))}{\sum_{i=1}^r \varphi_i(h(k))},$$

sendo  $\alpha_i(h(k))$  considerado o peso normalizado de cada regra dos modelos *Fuzzy* T-S.

Desta maneira pode-se reescrever (4.2) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(h(k)) \{A_i x(k) + B_{2i} u(k) + B_{1i} w(k)\} \\
 z(k) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(h(k)) C_{1i} x(k) \\
 y(k) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(h(k)) C_{2i} x(k)
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Ainda, pode-se escrever (4.3) na forma compacta:

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= A(\alpha)x(k) + B_2(\alpha)u(k) + B_1(\alpha)w(k) \\
 z(k) &= C_1(\alpha)x(k) \\
 y(k) &= C_2(\alpha)x(k)
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

sendo,

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(h(k)) A_i, \quad B_2(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(h(k)) B_{2i}, \quad B_1(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(h(k)) B_{1i},$$

$$C_2(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(h(k)) C_{2i} \quad \text{e} \quad C_1(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(h(k)) C_{1i}.$$

O termo  $\mathcal{T}_{ij}(h_j(k))$  é a classe de funções de pertinência de  $h(k)_j$  do conjunto *fuzzy* de  $\mathcal{T}_{ij}$ , sendo que em  $\mathcal{T}_{ij}(h_j(k))$  o índice  $i$  indica uma função de pertinência  $\alpha_i$  e o índice  $j$  indica a variável premissa  $h_j(k)$  utilizada no conjunto *fuzzy*  $\mathcal{T}_{ij}$  para descrever os sistema não-linear. Ainda tem-se:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r \varphi_i(h(k)) > 0, \\ \varphi_i(h(k)) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \end{cases}$$

e,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r \alpha_i(h(k)) > 0, \\ \alpha_i(h(k)) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \end{cases}$$

para todo  $k$ . Na seção seguinte serão apresentadas informações adicionais sobre a forma generalizada dos sistemas *Fuzzy* Takagi-Sugeno utilizada neste trabalho.

O diagrama de blocos da Figura 8 pode ser descrito por meio das variáveis de estado  $x(k)$  e  $x_c(k)$ , da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x_c(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\alpha) & B_u(\alpha)C_{fu} \\ B_{fu}C_2(\alpha) & A_{fu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_c(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_u(\alpha)N(\alpha) \\ M(\alpha) \end{bmatrix} r(k) + \begin{bmatrix} B_w(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} w(k),$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_c(k) \end{bmatrix}, \tag{4.5}$$

$$z(k) = \begin{bmatrix} C_2(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_c(k) \end{bmatrix},$$

$$e(k) = r(k) - z(k) = r(k) - \begin{bmatrix} C_2(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_c(k) \end{bmatrix}.,$$

O sistema (4.5) pode ser representado na forma compacta,

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= A_m(\alpha)\bar{x}(k) + B_m(\alpha)r(k) + B_n(\alpha)w(k), \\ e(k) &= -C_m(\alpha)\bar{x}(k) + D_m r(k), \\ z(k) &= C_m(\alpha)\bar{x}(k), \end{aligned} \tag{4.6}$$

sendo,

$$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ x_c(k) \end{bmatrix}, \quad A_m(\alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha) & B_u(\alpha)C_{fu} \\ B_{fu}C_2(\alpha) & A_{fu} \end{bmatrix}, \quad D_m = I, \tag{4.7}$$

$$B_m(\alpha) = \begin{bmatrix} B_u(\alpha)N(\alpha) \\ M(\alpha) \end{bmatrix}, B_n(\alpha) = \begin{bmatrix} B_w(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } C_m(\alpha) = \begin{bmatrix} C_2(\alpha) & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Considera-se a realização em espaço de estados entre  $w(k)$  e  $z(k)$  descrita na forma:

$$T_{m_w} = (A_m(\alpha), B_n(\alpha), C_m(\alpha)) \quad (4.9)$$

Considerando-se na equação (4.9), a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $W(z)$  para  $Z(z)$  pode ser minimizada devido ao projeto inicial do compensador *fuzzy*, implicando a minimização do efeito da perturbação, presente na planta, sobre o desempenho da saída do sistema.

Considera-se a realização em espaço de estado entre  $r(k)$  e  $e(k)$  descrita da seguinte maneira:

$$T_{m_r} = (A_m(\alpha), B_m(\alpha), -C_m(\alpha), D_m) \quad (4.10)$$

Através de (4.10) com o projeto de  $M(\alpha)$  e  $N(\alpha)$  pode se minimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  entre o sinal de referência e o sinal de erro do sistema.

## 4.2 A Forma Generalizada dos Sistemas *Fuzzy* Takagi-Sugeno

Na forma generalizada dos sistemas *fuzzy* considera-se a classe de sistemas não-lineares descrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= \sum_{j=1}^n f_{ij}(h(k))x_j(k) + \sum_{s=1}^m g_{is}(h(k))u_s(k) \\ i &= 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.11)$$

sendo  $n$  e  $m$  o número de variáveis de estados e entradas do sistema, respectivamente. O vetor  $x_i(k)$  são as variáveis de estado e o vetor  $u_s(k)$  são as entradas do sistema.  $f_{ij}(h(k))$  e  $g_{is}(h(k))$  são funções de  $h(k)$ , sendo  $h(k)$  variáveis premissas conhecidas.

Para obter a forma generalizada, define-se,

$$\begin{aligned} a_{ij1} &= \max \{f_{ij}(h(k))\}, \\ a_{ij2} &= \min \{f_{ij}(h(k))\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{is1} &= \max \{g_{is}(h(k))\}, \\ b_{is1} &= \min \{g_{is}(h(k))\}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

A determinação da forma generalizada surge da transformação de  $f_{ij}(h(k))$  e  $g_{is}(h(k))$  para a representação na forma de modelo *fuzzy*. Utilizando-se as definições descritas em (4.12) pode-se representar  $f_{ij}(h(k))$  e  $g_{is}(h(k))$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f_{ij}(h(k)) &= \sum_{l_{(i,j)}^a=1}^2 q_{ijl_{(i,j)}^a}(h(k))a_{ijl_{(i,j)}^a} \\ g_{is}(h(k)) &= \sum_{l_{(i,s)}^b=1}^2 v_{isl_{(i,s)}^b}(h(k))b_{isl_{(i,s)}^b} \end{aligned}$$

sendo,

$$f_{ij}(h(k)) = \sum_{l_{(i,j)}^a=1}^2 q_{ijl_{(i,j)}^a}(h(k)) = 1 \quad \text{e} \quad g_{is}(h(k)) = \sum_{l_{(i,s)}^b=1}^2 v_{isl_{(i,s)}^b}(h(k)) = 1. \quad (4.13)$$

As funções de pertinência são descritas a seguir:

$$\begin{aligned} q_{ij1}(h(k)) &= \frac{f_{ij}(h(k)) - a_{ij2}}{a_{ij1} - a_{ij2}}, \\ q_{ij2}(h(k)) &= \frac{a_{ij1} - f_{ij}(h(k))}{a_{ij1} - a_{ij2}}, \\ v_{is1}(h(k)) &= \frac{g_{is}(h(k)) - b_{is2}}{b_{is1} - b_{is2}}, \\ v_{is2}(h(k)) &= \frac{b_{is1} - g_{is}(h(k))}{b_{is1} - b_{is2}}. \end{aligned}$$

Utilizando-se a representação do modelo *fuzzy*, pode-se reescrever (4.11) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= \sum_{j=1}^n f_{ij}(h(k))x_j(k) + \sum_{s=1}^m g_{is}(h(k))u_s(k) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{l_{(i,j)}^a=1}^2 q_{ijl_{(i,j)}^a}(h(k))a_{ijl_{(i,j)}^a}x_j(k) + \sum_{s=1}^m \sum_{l_{(i,s)}^b=1}^2 v_{isl_{(i,s)}^b}(h(k))b_{isl_{(i,s)}^b}u_s(k). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Transformando-se (4.14) na forma matricial, determina-se a forma generalizada dos sistemas *Fuzzy Takagi-Sugeno*,

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{l_{(i,j)}^a=1}^2 q_{ijl_{(i,j)}^a}(h(k))a_{ijl_{(i,j)}^a} U_{(i,j)}^A x(k) + \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^m \sum_{l_{(i,s)}^b=1}^2 v_{isl_{(i,s)}^b}(h(k))b_{isl_{(i,s)}^b} U_{(i,s)}^B u(k) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{l_{(i,j)}^a=1}^2 q_{ijl_{(i,j)}^a}(h(k))A_{ijl_{(i,j)}^a} x(k) + \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^m \sum_{l_{(i,s)}^b=1}^2 v_{isl_{(i,s)}^b}(h(k))B_{isl_{(i,s)}^b} u(k) \end{aligned} \quad (4.15)$$

sendo,

$$A_{ijl^a_{(i,j)}} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{ijl^a_{(i,j)}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B_{isl^b_{(i,s)}} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_{isl^b_{(i,s)}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Esta metodologia de modelagem de sistemas não-lineares é utilizada no Exemplo 10.

### 4.3 Projeto de um Compensador $\mathcal{H}_\infty$ Discreto para Sistemas Não-lineares

O problema de otimização do custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  de  $(A(\alpha), B_w(\alpha), B_u(\alpha), C_2(\alpha))$  consiste em tornar a influência da perturbação  $w(k)$  na saída  $z(k)$  do sistema a menor possível, através do projeto de um controlador discreto  $K_{fu}(\alpha)$ . Para se ter controle de desempenho no projeto do controlador discreto  $K_{fu}(\alpha)$  deve-se restringir a região de alocação de pólos em uma circunferência de raio  $r$  e centro  $-q$ . Os parâmetros  $r$  e  $-q$  são mostrados na Figura 9:

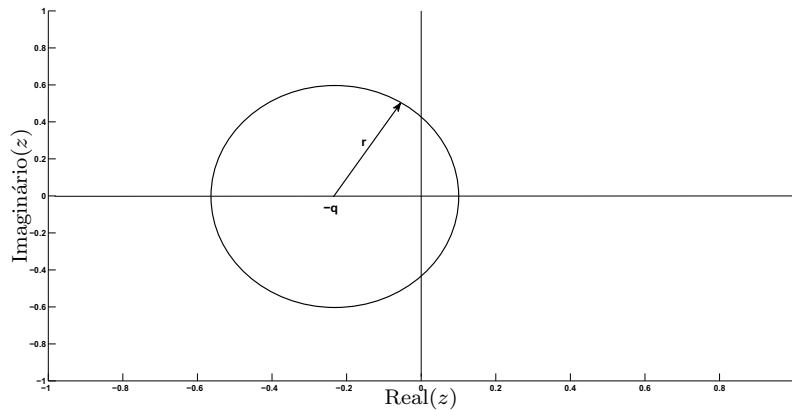


Figura 9: Região de restrição de pólos.

Segundo (CHIALI; GAHINET, 1996) os pólos podem ser alocados na região da Figura 9 através da seguinte restrição LMI:

$$\begin{bmatrix} -r\check{Q} & A\check{Q} + q\check{Q} \\ \check{Q}q + \check{Q}A' & -r\check{Q} \end{bmatrix} < 0,$$

$$\check{Q} = \check{Q}' > 0. \quad (4.16)$$

Considera-se um sistema não-linear e  $K_{fu}(\alpha)$  é um controlador  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas não-lineares utilizado na realimentação dinâmica da saída. O controlador  $K_{fu}(\alpha)$  é projetado utilizando uma metodologia descrita na forma de LMIs conforme proposto no Teorema 4.1.

**Teorema 4.1.** *Considere um sistema não-linear descrito pelo modelo Fuzzy Takagi-Sugeno (4.4) com o controlador fuzzy  $\mathcal{H}_\infty$  utilizado na realimentação dinâmica da saída de medida, e ainda os parâmetros  $r$  e  $q$  fixos, se existe solução para as LMIs descritas em*

(4.17)-(4.21), então pode-se obter a solução ótima  $\mathcal{H}_\infty$  de  $w(k)$  para  $y(k)$ , com alocação de pólos dos modelos locais na região ilustrada na Figura 9, resolvendo-se

$$\begin{aligned} \min \quad & \delta \\ \text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\Gamma_{ii} < 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, r. \quad (4.18)$$

$$\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji} < 0, \quad \text{para } i < j < r. \quad (4.19)$$

$$\Omega_{ii} < 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, r. \quad (4.20)$$

$$\Omega_{ij} + \Omega_{ji} < 0, \quad \text{para } i < j < r. \quad (4.21)$$

sendo,

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} R & I & 0 & B_{wi} & A_i R + B_{ui} C_{fz_i} & A_i \\ I & S & 0 & SB_{wi} & A_{fz_{ii}} & SA_i + B_{fz_i} C_{2i} \\ 0 & 0 & I & D_n & C_{2i} R & C_{2i} \\ B'_{wi} & B'_{wi} S & D'_n & \mu I & 0 & 0 \\ RA'_i + C'_{fz_i} B'_{ui} & A'_{fz_{ii}} & RC'_{2i} & 0 & R & I \\ A'_i & A'_i S + C'_{2i} B'_{fz_i} & C'_{2i} & 0 & I & S \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$\Omega_{ij} = \begin{bmatrix} -Rr & -Ir & A_i R + B_{ui} C_{fz_i} + Rq & A_i + Iq \\ -Rr & -Sr & A_{fz_{ii}} + Iq & SA_i + B_{fz_i} C_{2i} + Sq \\ RA'_i + C'_{fz_i} B'_{ui} + Rq & A'_{fz_{ii}} + Iq & -Rr & -Ir \\ Iq + A'_i & A'_i S + C'_{2i} B'_{fz_i} + Sq & -Rr & -Sr \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

As matrizes  $\Gamma_{ij}$ ,  $\Gamma_{ji}$  são determinadas pela substituição dos índices  $i$  e  $j$  em (4.22), bem como, as matrizes  $\Omega_{ii}$  e  $\Omega_{ji}$  são determinadas pela substituição dos índices  $i$  e  $j$  em (4.23). As variáveis  $R$ ,  $S$ ,  $A_{fz_{ii}}$ ,  $B_{fz_i}$ ,  $C_{fz_i}$  são soluções ótimas de (4.18). Ainda, tem-se  $R = R' > 0$  e  $S = S' > 0$ . Considera-se ainda:

$$\begin{aligned} C_{fz_i} &= C_{fu_i} \psi', \\ B_{fz_i} &= EB_{fu_i}, \\ A_{fz_{ij}} &= (SA + EB_{fu_i} C_{2i})R + (SB_u C_{fu_j} + EA_{fu_{ij}}) \psi', \end{aligned} \quad (4.24)$$

para a solução de (2.17) tem-se:

$$\psi E' = I - RS, \quad (4.25)$$

e através da resolução de (4.24), obtém-se as matrizes dinâmicas do compensador  $\mathcal{H}_\infty$ .

O compensador fuzzy  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser descrito da seguinte maneira:

$$A_{fu}(\alpha) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i \alpha_j A_{fu_{ij}}, \quad B_{fu}(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i B_{fu_i} \quad e \quad C_{fu}(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i C_{fu_i}.$$

*Prova:* Considera-se a seguinte realização em espaço de estado para o sistema não-linear representado na forma dos modelos Fuzzy T-S conforme (4.4) sendo realimentado pelo compensador fuzzy  $\mathcal{H}_\infty$ ,  $K_{fu}$ .

$$T_{wz} = (A_{nl}, B_{nl}, C_{nl}) \quad (4.26)$$

sendo:

$$\begin{aligned} A_{nl} &= \begin{bmatrix} A(\alpha) & B_2(\alpha)C_{fu}(\alpha) \\ B_{fu}(\alpha)C_2(\alpha) & A_{fu}(\alpha) \end{bmatrix} \\ B_{nl} &= \begin{bmatrix} B_1(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_{nl} &= \begin{bmatrix} C_2(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.27)$$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  da realização  $T_{wz}$ , para um  $\alpha$  específico, pode ser interpretada pela norma induzida  $\mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2$  (DOYLE; GLOVER, 1996), isto é,

$$\|R_m\|_\infty = \gamma \Leftrightarrow \|z\|_2 \leq \gamma \|w\|_2, \quad \forall w(k) \in \mathcal{L}_2, \quad (4.28)$$

sendo  $\|z\|_2^2 = z'z$  e  $\|w\|_2^2 = w'w$ . Neste contexto,  $z(k)$  é o sinal de saída do sistema e  $w(k)$  é a entrada do sinal de distúrbio. De (4.28) pode-se verificar que o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  não excede ao valor  $\gamma$  se existir uma função quadrática de Lyapunov  $V(x(k)) = x(k)'Px(k) > 0$  tal que,

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0 \quad (4.29)$$

De (4.28) e (4.29) temos:

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) + z'z - \gamma^2 w'w < 0, \quad \text{sendo } P = P' > 0. \quad (4.30)$$

Substituindo  $V(x(k))$  e  $V(x(k+1))$  em (4.30), obtém-se

$$x(k+1)'Px(k+1) - x(k)'Px(k) + z'z - \gamma^2 w'w < 0. \quad (4.31)$$

Entretanto, de (4.27),  $x(k+1) = A_{nl}x(k) + B_{nl}w(k)$  e  $z(k) = C_{nl}x(k)$ , o que resulta em

$$(A_{nl}x(k) + B_{nl}w(k))' P (A_{nl}x(k) + B_{nl}w(k)) - x(k)' P x(k) + (C_{nl}x(k))' (C_{nl}x(k)) - \gamma^2 w' w < 0,$$

e,

$$\begin{aligned} & x(k)' A_{nl}' P A_{nl} x(k) + x(k)' A_{nl}' P B_{nl} w(k) + w(k)' B_{nl}' P A_{nl} x(k) + \\ & w(k)' B_{nl}' P B_{nl} w(k) + x(k)' C_{nl}' C_{nl} x(k) \\ & - \gamma^2 w' w - x(k)' P x(k) < 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Escolhendo-se um novo vetor  $[x(k)' \ w(k)']$ , pode-se reescrever a inequação (4.32) na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x(k)' & w(k)' \end{bmatrix} A_h \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix} < 0, \quad (4.33)$$

ou,

$$A_h < 0, \quad (4.34)$$

sendo,

$$A_h = \begin{bmatrix} A_{h1} & A_{h2} \\ A_{h3} & A_{h4} \end{bmatrix}, \quad (4.35)$$

e,

$$\begin{aligned} A_{h1} &= A_{nl}' P A_{nl} + C_{nl}' C_{nl} - P, \\ A_{h2} &= A_{nl}' P B_{nl} + C_{nl}', \\ A_{h3} &= B_{nl}' P A_{nl}, \\ A_{h4} &= B_{nl}' P B_{nl} - I \gamma^2. \end{aligned} \quad (4.36)$$

O custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  é obtido pela minimização de  $\gamma$  em (4.30). Utilizando-se a modificação de variável  $\mu = \gamma^2$ , considerando (4.36) e (4.35) e aplicando-se o complemento de Schur tem-se

$$\|H\|_\infty^2 = \min \quad \mu$$

$$s.a \begin{bmatrix} \hat{Q} & 0 & B_{nl} & A_{nl}\hat{Q} \\ 0 & I & D & C_{nl}\hat{Q} \\ B'_{nl} & D' & \mu I & 0 \\ \hat{Q}A'_{nl} & \hat{Q}C'_{nl} & 0 & \hat{Q} \end{bmatrix} > 0, \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= \hat{Q}' > 0, \\ \mu &> 0. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -r\check{Q} & A_{nl}\check{Q} + q\check{Q} \\ \check{Q}q + \check{Q}A'_{nl} & -r\check{Q} \end{bmatrix} < 0,$$

$$\check{Q} = \check{Q}' > 0. \quad (4.38)$$

Entretanto, o problema de otimização descrito em (4.37) e (4.38) apresenta BMIs, o que torna a solução do problema de elevado custo computacional. Então, é necessário o uso de uma transformação linear para resolver o problema em termos de LMIs. Inicialmente adota-se a matriz  $\check{Q}$  e sua inversa como,

$$\check{Q} = \begin{bmatrix} R & \psi \\ \psi' & J \end{bmatrix} \text{ e } \check{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} S & E \\ E' & S \end{bmatrix},$$

sendo,  $R \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $S \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ . Ainda, adota-se,  $R = R'$  e  $S = S'$ :

$$\check{Q}\Gamma_2 = \Gamma_1, \text{ com } \Gamma_1 = \begin{bmatrix} R & I \\ \psi' & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \Gamma_2 = \begin{bmatrix} I & S \\ 0 & E' \end{bmatrix},$$

Considerando-se a matriz de Lyapunov  $\check{Q} > 0$  e pré e pós multiplicando-se  $\check{Q}$  por  $\Gamma_2'$  e  $\Gamma_2$  respectivamente obtém-se a inequação (4.17). Em seguida, a inequação (4.37) é pré e pós multiplicada por (4.39) e (4.40) respectivamente para se obter a inequação (4.22). E então, pré e pós multiplicando-se a inequação (4.16) por (4.41) e (4.42) respectivamente, obtem-se a inequação (4.23).

$$\begin{bmatrix} \Gamma'_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma'_2 \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_2 \end{bmatrix}, \quad (4.40)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma'_2 & 0 \\ 0 & \Gamma'_2 \end{bmatrix}, \quad (4.41)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_2 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

Ainda, as inequações (4.18) e (4.19) podem ser descritas da seguinte maneira:

$$\Gamma(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \alpha_i \Gamma_{ii} + \sum_{i=1}^r \sum_{i < j}^r \alpha_i \alpha_j (\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji}) < 0 \quad (4.43)$$

mas,

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1 \quad e \quad \sum_{j=1}^r \alpha_j = 1. \quad (4.44)$$

Logo, para que a inequação (4.43) seja verdadeira, tem-se,

$$\Gamma_{ii} < 0 \quad e \quad (\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji}) < 0 \quad (4.45)$$

Utilizando-se a análise descrita em (4.43)-(4.45), pode-se verificar que  $\Omega(\alpha) < 0$ , implica nas LMIs descritas em (4.20) e (4.21), sendo,

$$\Omega(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \alpha_i \Omega_{ii} + \sum_{i=1}^r \sum_{i < j}^r \alpha_i \alpha_j (\Omega_{ij} + \Omega_{ji}) < 0$$

Na próxima seção é proposto um rastreador de sinais com peso na frequência para possibilitar ao projetista o rastreamento segundo uma faixa de frequência especificada.

## 4.4 Projeto do Rastreador de Sinais com Peso na Frequência para Sistemas Discretos Não-Lineares

O problema de rastreamento ótimo considerando-se o sistema não-linear descrito em (4.4) é minimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  entre a entrada de referência  $r(k)$  e o erro do sinal de rastreamento  $r(k) - z(k)$ .

A solução para o problema de rastreamento consiste no projeto dos parâmetros  $M(\alpha) \in \mathfrak{R}^{n \times p}$  e  $N(\alpha) \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  que minimize a norma  $\mathcal{H}_\infty$  da representação descrita em (4.10), considerando-se o sistema (4.4). Utilizando-se inequação (4.37), pode-se descrever a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema (4.10) da seguinte maneira,

$$\|H\|_\infty^2 = \min \quad \mu$$

$$s.a \quad \begin{bmatrix} \hat{Q} & 0 & B_m & A_m \hat{Q} \\ 0 & I & D_m & C_m \hat{Q} \\ B'_m & D'_m & \mu I & 0 \\ \hat{Q} A'_m & \hat{Q} C'_m & 0 & \hat{Q} \end{bmatrix} > 0, \quad (4.46)$$

$$\hat{Q} = \hat{Q}' > 0,$$

$$\mu > 0.$$

Levando-se em conta os modelos locais lineares, inclui-se ao projeto peso na frequência, pois é interessante que o rastreador execute suas funções segundo uma faixa de frequência especificada em projeto. Para o projeto do rastreador deseja-se encontrar a solução ótima para o problema descrito a seguir:

$$\min \quad \|T_{m_r} V(z)\|_\infty \quad (4.47)$$

sendo  $V(z) = (A_v, B_v, C_v, D_v)$  um sistema dinâmico projetado para especificar o peso na frequência de saída e considera-se  $T_{m_r} = (A_m(\alpha), B_m(\alpha), -C_m(\alpha), D_m(\alpha))$ , para um  $\alpha$  específico.

Uma possível realização em espaço de estado, de  $\check{H}_\psi = T_{m_r} V(z)$  é:

$$\left[ \begin{array}{c|c} \check{A}_\psi & \check{B}_\psi \\ \check{C}_\psi & \check{D}_\psi \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} A_{nl} & 0 & B_{nl} \\ -B_v C_{nl} & A_v & B_v D_m \\ \hline 0 & C_v & 0 \end{array} \right] \quad (4.48)$$

Na Figura 10 é ilustrada a estrutura de inclusão de peso na frequência:

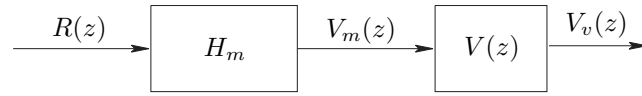


Figura 10: Estrutura de sistemas de controle com peso na frequência.

Então, é proposto o Teorema (4.2) para o projeto de rastreamento de sinais de referência utilizando-se peso na frequência aplicado a sistemas não-lineares.

**Teorema 4.2.** *Considere o sistema (4.4), com o compensador  $K_{fu}(\alpha)$  de realimentação dinâmica da saída medida dado por, (4.24) e (4.25). Se existe solução para as LMIs descritas em (4.49)-(4.51), então pode-se obter a matriz  $M(\alpha)$ ,  $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , e  $N(\alpha)$ ,  $N \in \mathbb{R}^{p \times p}$  que minimizam a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema (4.10) com peso na frequência.*

$$\|H_m\|_\infty^2 = \min \delta$$

*s.a*

$$\Psi_{ii} < 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, r \tag{4.49}$$

$$\Psi_{ij} + \Psi_{ji} < 0 \quad \text{para } i < j < r \tag{4.50}$$

sendo,

$i = 1, 2, \dots, r$ . e as matrizes  $\Psi_{ij}$  e  $\Psi_{ji}$  são obtidas substituindo-se os índices  $i$  e  $j$  em (4.51). As matrizes  $Q_{ij} = Q'_{ij}$ ;  $i, j = 1, 2$ , tem a mesma dimensão da matriz  $A$ , e para  $j = 3$  e  $i = 1, 2, 3$  as matrizes  $Q_{ij}$  tem dimensões convenientes, e as matrizes  $A_v$ ,  $B_v$  e  $C_v$  representam a dinâmica do filtro. Os parâmetros do rastreador podem ser descritos da seguinte maneira:

$$M(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i M_i \quad \text{e} \quad N(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i N_i. \tag{4.52}$$

sendo  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ , a mesma função de pertinência adotada no projeto do compensador  $\mathcal{H}_\infty$ ,  $K_{fu}(\alpha)$  de atenuação do efeito de distúrbio no desempenho do sistema.

*Prova:* Semelhante as provas dos Teoremas (2.3) e (3.3).

$$\Psi_{ij} = \begin{bmatrix}
 Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 \\
 Q'_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 \\
 Q'_{13} & Q'_{23} & Q_{33} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & I \\
 N'_i B'_{ui} & M'_i & B'_v & I \\
 Q_{12} B_{ui} C'_{fz_i} + Q_{11} A'_i & Q_{12} A'_{fz_{ij}} + Q_{11} B_{fz_i} C'_{2i} & Q_{13} A'_v - Q_{11} C'_{2i} B'_v & -Q_{13} C'_v \\
 Q_{22} B_{ui} C'_{fz_i} + Q'_{12} A'_i & Q_{22} A'_{fz_{ij}} + Q'_{12} B_{fz_i} C'_{2i} & Q_{23} A'_v - Q'_{12} C'_{2i} B'_v & -Q_{23} C'_v \\
 Q'_{23} B_{ui} C'_{fz_i} + Q'_{13} A'_i & Q'_{23} A'_{fz_{ij}} + Q'_{13} B_{fz_i} C'_{2i} & Q_{33} A'_v - Q'_{13} C'_{2i} B'_v & -Q_{33} C'_v \\
 B_{ui} N_i & A_i Q_{11} + B_{ui} C_{fz_i} Q'_{12} & A_i Q_{12} + B_{ui} C_{fz_i} Q_{22} & A_i Q_{13} + B_{ui} C_{fz_i} Q_{23} \\
 M_i & B_{fz_i} C_{2i} Q_{11} + A_{fz_{ij}} Q'_{12} & B_{fz_i} C_{2i} Q_{12} + A_{fz_{ij}} Q_{22} & B_{fz_i} C_{2i} Q_{13} + A_{fz_{ij}} Q_{23} \\
 B_v & -B_v C_{2i} Q_{11} + A_v Q'_{13} & -B_v C_{2i} Q_{12} + A_v Q'_{23} & -B_v C_{2i} Q_{13} + A_v Q_{33} \\
 I & -C_v Q'_{13} & -C_v Q'_{23} & -C_v Q_{33} \\
 \mu I & 0 & 0 & 0 \\
 0 & Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\
 0 & Q'_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\
 0 & Q'_{13} & Q'_{23} & Q_{33}
 \end{bmatrix} > 0,$$

$$\begin{bmatrix}
 Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\
 Q'_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\
 Q'_{13} & Q'_{23} & Q_{33}
 \end{bmatrix} > 0,$$

(4.51)

$$\mu > 0,$$

## 5 Exemplos de Aplicações

### 5.1 Exemplo 1

Neste exemplo considera-se um sistema contínuo linear invariante no tempo de terceira ordem (DORF; BISHOP, 2001) na sua forma discretizada que representa o movimento longitudinal linearizado de um helicóptero. Projeta-se um rastreador com rejeição à perturbação que está presente em sua estrutura e utiliza-se um período de amostragem de 0,2 segundos para o projeto. O sistema descrito na forma de variáveis de estado é dado por:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6459 & -0,05 & -0,002 \\ 0,1622 & 0,9947 & 0 \\ 0,0174 & 0,2 & 0,999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,098 \\ 0,049 * 10^{-3} \\ 0,165 * 10^{-6} \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0,098 \\ 0,049 * 10^{-3} \\ 0,165 * 10^{-6} \end{bmatrix} w(k),$$

$$z(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

sendo  $x(k)$  o vetor de estados,  $u(k)$  o sinal de controle e  $w(k)$  é um sinal de distúrbio acrescentado ao sistema.

Como especificação de projeto, o rastreador deve operar em sinais de baixa frequência

(até  $0,05 \text{ rad/s}$ ), então é proposto o filtro  $J_1(z)$

$$J_1(z) = \frac{(159z^2 + 373,698z + 57,528) * 10^6}{z^3 - 1,396z^2 - 0,534z - 0,135}.$$

O diagrama de Bode de  $J_1$  ilustrado na Figura 11 demonstra que o filtro projetado atende às especificações de projeto.

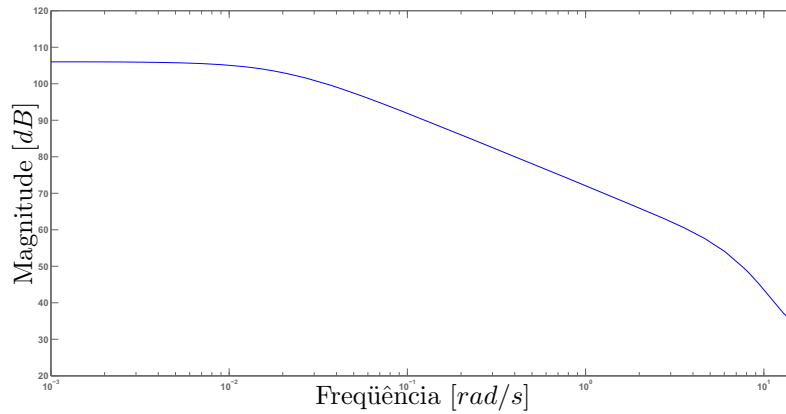


Figura 11: Diagrama de Bode do filtro  $J_1(z)$ .

O controlador  $K_c(z)$  discreto que minimiza a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $w(k)$  para  $z(k)$  do sistema descrito em (5.1) com centro em  $-0,2$  e raio de  $0,6$  no plano  $z$  como região de restrição de pólos obtido com o uso das LMIs (2.14), (2.15) e (2.16) foi

$$K_c(z) = \frac{(-2,286z^2 + 2,63z - 0,846)}{z^3 + 3,964z^2 + 6,146z + 1,26}. \quad (5.3)$$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $w(k)$  para  $z(k)$  obtida no projeto foi  $0,0246$ . O valor calculado implica em uma grande atenuação do efeito do sinal de perturbação. A Figura 12 ilustra a resposta em frequência da magnitude da função transferência de  $Z(z)/W(z)$ .

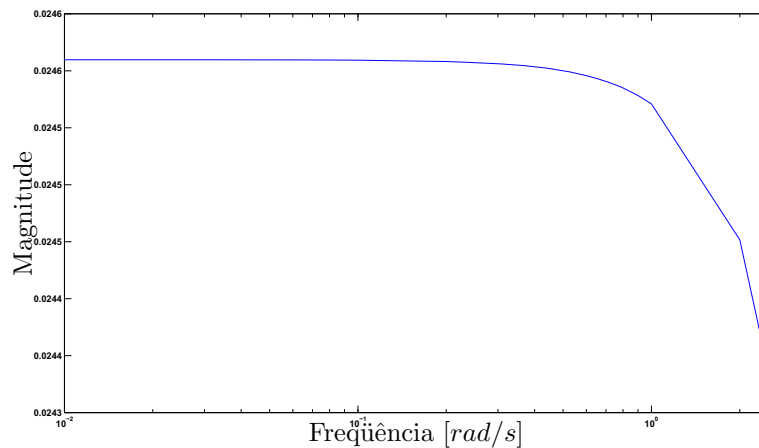


Figura 12: Resposta em frequência de  $Z(z)/W(z)$ .

Na sequência é projetado o rastreador para baixas frequências de até  $0,05 \text{ rad/s}$  minimizando-se a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $r(k)$  para  $e(k)$  usando o projeto de rastreamento com modificação de zeros com peso na frequência, conforme descrito no Teorema (2.3).

Na modificação de zeros discretos minimiza-se a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $r(k)$  para  $e(k)$  para sinais de baixa frequência, sendo  $e(k)$  o erro entre a saída e a entrada, a fim de constituir um seguidor de referência. O valor da norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema é  $0,45$ ; enquanto que o maior valor da magnitude para a faixa de frequência de operação especificada em projeto foi  $1,5 \times 10^{-3}$ . Isto implica que para a faixa de frequência especificada em projeto, o rastreador opera adequadamente.

A Figura 13 ilustra a resposta em frequência de  $E(z)/R(z)$  descrito em (2.9) e pode-se verificar que a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do projeto na faixa de frequência de operação (até  $0,05 \text{ rad/s}$ ) atende às características para um sistema rastreador de sinal. A Figura 13 não ilustra o valor da norma  $\mathcal{H}_\infty$  devido ao teorema de amostragem de Shannon (ISERMANN, 1989). O teorema de amostragem de Shannon afirma existirem erros no sinal amostrado para sinais de frequência com valor maior do que a metade do valor da frequência de amostragem. Neste exemplo a frequência de amostragem é de  $5 \text{ rad/s}$ , portanto só são amostrados sinais de frequência de até  $2,5 \text{ rad/s}$ . Os parâmetros de modificação de zeros obtidos são:

$$M = \begin{bmatrix} 0,001 \\ 0,0619 \\ 9,245 \end{bmatrix} \text{ e } N = 633,887. \quad (5.4)$$

A resposta em frequência de  $Z(z)/R(z)$  é ilustrada na Figura 14. Este diagrama

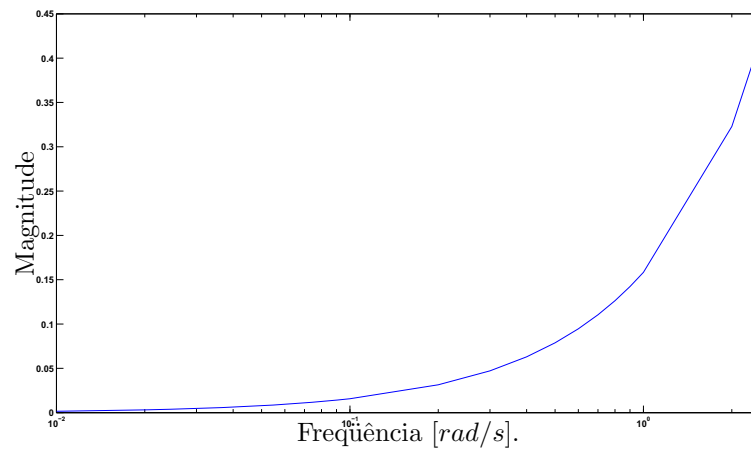


Figura 13: Resposta em frequência da função de transferência  $E(z)/R(z)$ .

é outra forma de verificar o funcionamento do rastreador para baixas frequências, pois observa-se que o sistema apresenta ganho unitário para a faixa de frequência especificada em projeto.

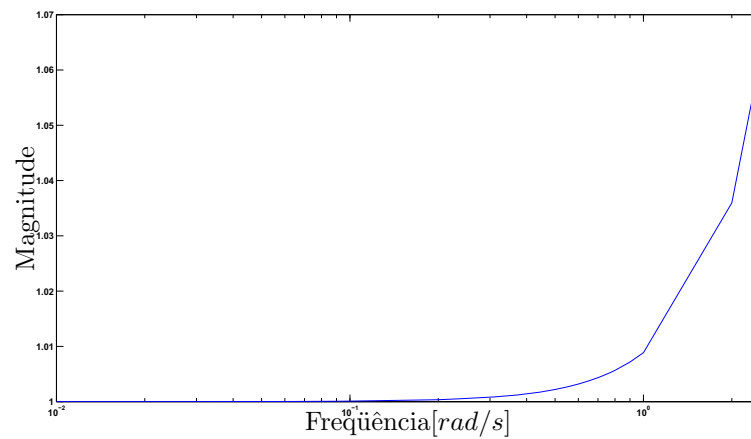


Figura 14: Resposta em frequência da função de transferência  $Z(z)/R(z)$ .

Para simulação, primeiramente considera-se uma entrada degrau unitário. O resultado da simulação é mostrado na Figura 15.

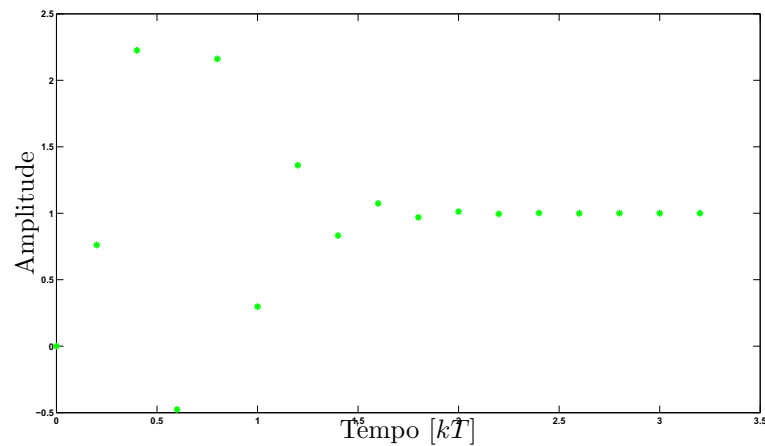


Figura 15: Resposta do sistema para uma entrada degrau unitário.

Em seguida, considera-se um sinal de entrada  $r(kT) = \text{sen}(0,05kT)$  e um sinal de perturbação  $w(k)$  que apresenta amplitudes aleatórias com amplitude máxima igual a 1.

Usando os valores de  $K_c(z)$ ,  $M$  e  $N$  obtidos em (5.3) e (5.4), tem-se o resultado de simulação ilustrado na Figura 16.

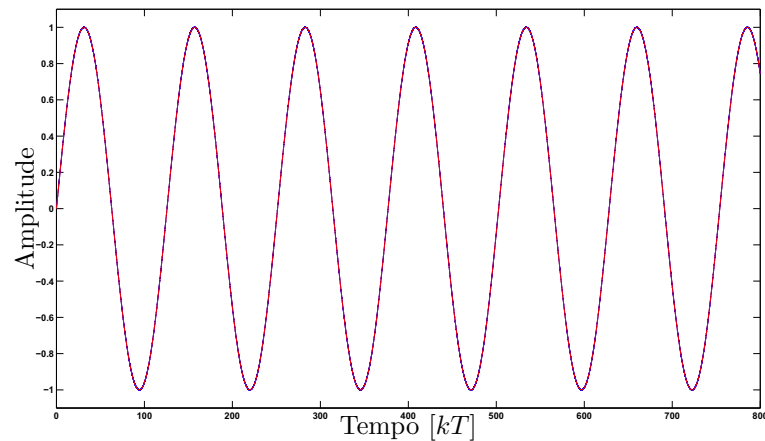


Figura 16: Sinal de referência e sinal de saída praticamente sobrepostos.

Para este exemplo os zeros do sistema são  $-3,36$ ;  $0,213$ ;  $0,07+0,379i$ ;  $0,07-0,379i$  e  $-0,24$ . Os pólos da planta realimentada com o controlador são  $-0,199+0,106i$ ;  $-0,199-0,106i$ ;  $-0,0474$ ;  $-0,23$  e  $-0,4$ . É possível observar que os pólos da planta realimentada com o controlador foram alocados corretamente na região de restrição escolhida. A Figura 17 ilustra os pólos e zeros do sistema.

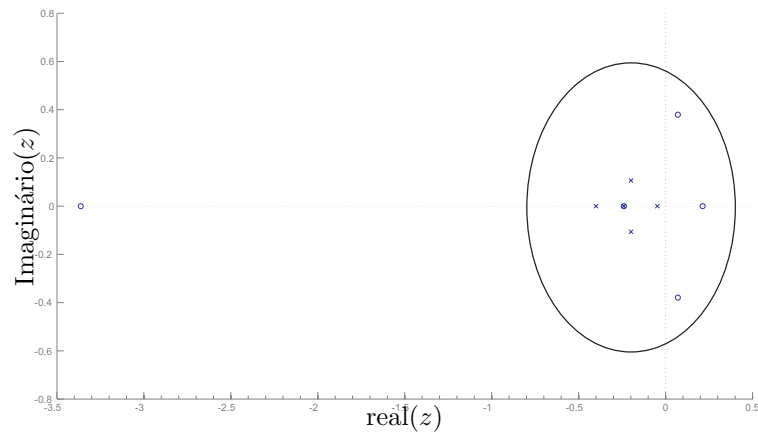


Figura 17: Mapa de pólos e zeros do sistema de malha fechada obtidos com  $K_c(z)$ ,  $M$ ,  $N$  e círculo de restrição de pólos.

No exemplo citado acima foi abordado um rastreador para sinais de baixa frequência, mas a metodologia proposta neste trabalho permite executar projetos para sistemas rastreadores em qualquer outra faixa de frequência, utilizando-se um filtro passa-faixa no projeto, ou rastreadores para sinais de alta frequência, utilizando-se um filtro passa-alta no projeto. No próximo exemplo será abordado um projeto para um rastreamento passa-faixa.

## 5.2 Exemplo 2

Neste exemplo considera-se um sistema contínuo linear invariante no tempo de terceira ordem (DORF; BISHOP, 2001), na sua forma discretizada que representa a dinâmica do ângulo de rolamento de um avião a jato de alto desempenho. Projeta-se um rastreador com rejeição à perturbação que está presente em sua estrutura e utiliza-se um período de amostragem de 0,01 segundos para o projeto. O sistema descrito na forma de variáveis de estado é dado por:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8681 & -0,2635 & -0,4477 \\ 0,0093 & 0,9987 & -0,0023 \\ 0 & 0,01 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0093 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0,0093 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w(k),$$

$$z(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

$$z(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

sendo  $x(k)$  o vetor de estado,  $u(k)$  o sinal de controle e  $w(k)$  é um sinal de distúrbio acrescentado ao sistema.

Como especificação de projeto, o rastreador deve operar em sinais de frequências entre  $10^{-5}$  e  $0,1 \text{ rad/s}$ , então é proposto o filtro  $J_2(z)$

$$J_2(z) = \frac{(0,1199z^2 - 0,0001z - 0,1199)}{z^3 - 2,9982z^2 + 2,9964z - 0,9982}.$$

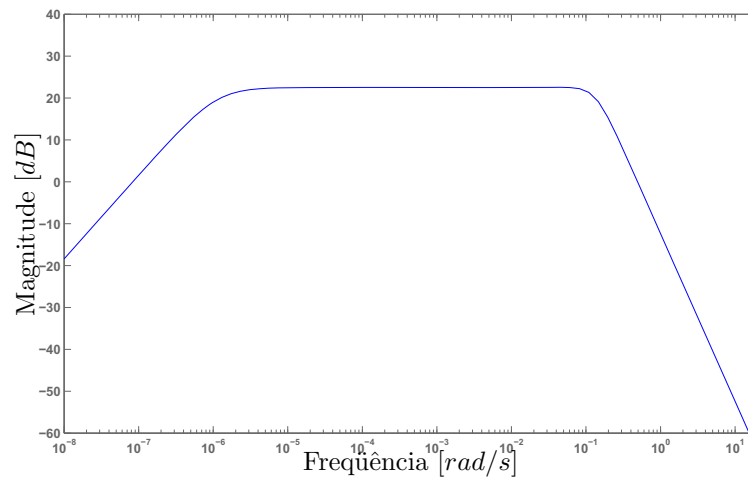


Figura 18: Diagrama de Bode do filtro  $J_2(z)$ .

O diagrama de Bode de  $J_2(z)$  ilustrado na Figura 18 demonstra que o filtro projetado atende às especificações de projeto.

O controlador  $K_c(z)$  discreto que minimiza a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $w(k)$  para  $z(k)$  do sistema descrito em (5.5), com centro em  $0,3$  e raio de  $0,6$  no plano  $z$  como região de restrição

de pólos obtido com o uso das LMIs (2.14), (2.15) e (2.16) foi

$$K_c(z) = \frac{(-1,0460z^2 - 1,5675z - 0,6138) * 10^6}{z^3 + 2,0196z^2 + 2,5054z + 0,5304}. \quad (5.7)$$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $w(k)$  para  $z(k)$  obtida no projeto foi de  $6,52 \times 10^{-5}$ . O valor calculado implica uma grande atenuação do efeito do sinal de perturbação. A Figura 19 ilustra a resposta em frequência da magnitude da função transferência  $Z(z)/W(z)$ .

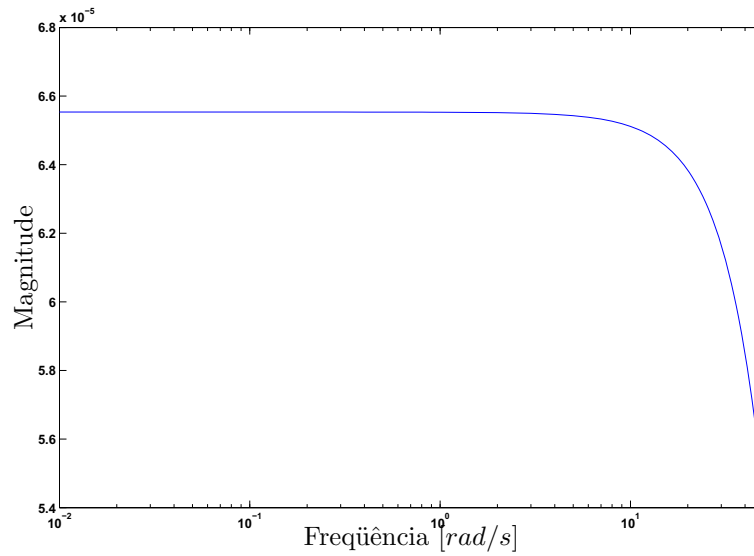


Figura 19: Resposta em frequência de  $Z(z)/W(z)$

Na seqüência é projetado o rastreador para frequências entre  $10^{-5}$  e  $0,1$   $rad/s$  minimizando-se a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $r(k)$  para  $e(k)$  usando o projeto de rastreamento com modificação de zeros com peso na frequência, conforme descrito no Teorema 2.3.

O valor da norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema é  $1,49$  enquanto que o maior valor da magnitude para a faixa de frequência de operação especificada em projeto foi  $3,1 \times 10^{-3}$ . Isto implica que para a faixa de frequência especificada em projeto, o rastreador opera adequadamente.

A Figura 20 ilustra a resposta em frequência de  $E(z)/R(z)$  descrito em (2.9) e pode-se verificar que a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do projeto na faixa de frequência de operação atende às características para um sistema rastreador de sinal e os parâmetros de modificação de zeros obtidos são:

$$M = \begin{bmatrix} 0,0001 \\ 0,0028 \\ 1,1115 \end{bmatrix} \text{ e } N = 3,9576 \times 10^4. \quad (5.8)$$

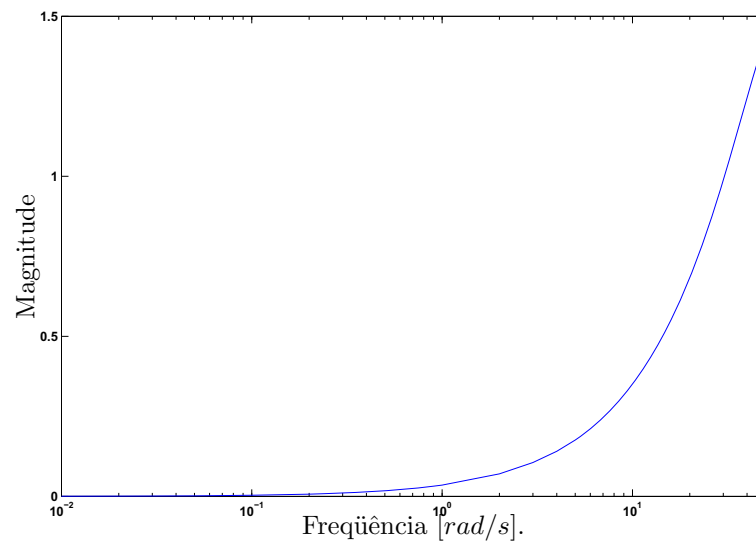


Figura 20: Resposta em frequência da função de transferência  $E(z)/R(z)$ .

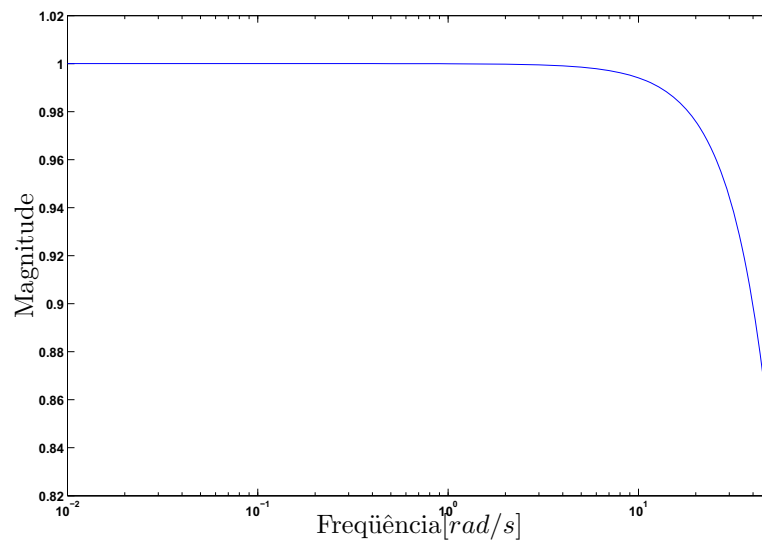


Figura 21: Resposta em frequência da função de transferência  $Z(z)/R(z)$ .

A resposta em frequência de  $Z(z)/R(z)$  é ilustrada na Figura 21. Este diagrama é outra forma de verificar o funcionamento do rastreador para baixas frequências, pois observa-se que o sistema apresenta ganho unitário para a faixa de frequência especificada em projeto.

Para a simulação considera-se um sinal de entrada  $r(kT) = \text{sen}(0,01kT)$  e um sinal de perturbação  $w(k)$  que apresenta amplitudes aleatórias com amplitude máxima igual a 1. Tem-se a referência e o ruído ilustrados na Figura 22.

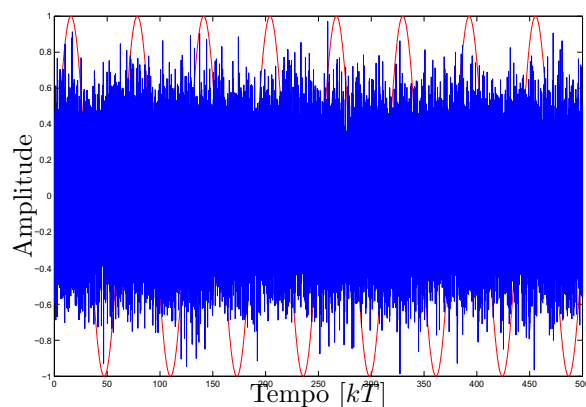


Figura 22: Sinais  $r(kT)$  e  $w(kT)$  do sistema.

Usando os valores de  $K_c(z)$ ,  $M$  e  $N$  obtidos em (5.7) e (5.8), tem-se o resultado de simulação ilustrado na Figura 23.

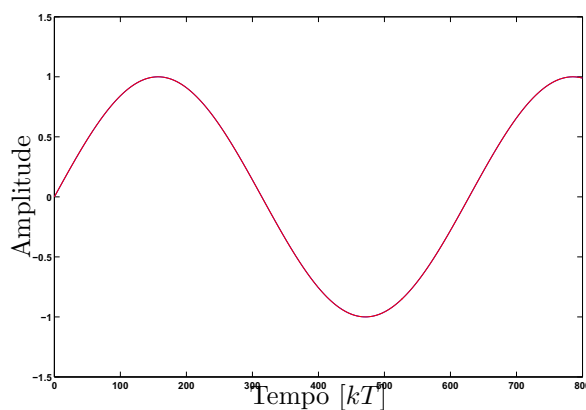


Figura 23: Sinal de referência e sinal de saída praticamente sobrepostos.

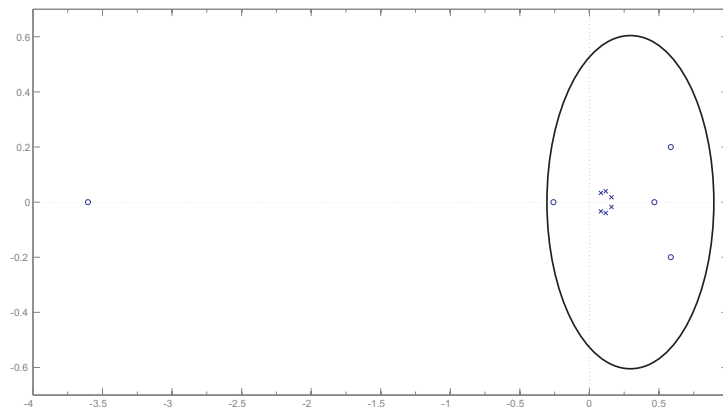


Figura 24: Mapa de pólos e zeros do sistema de malha fechada obtidos com  $K_c(z)$ ,  $M$ ,  $N$  e círculo de restrição de pólos.

Para este exemplo os zeros do sistema são  $-3,6043$ ;  $0,585 + 0,2i$ ;  $0,585 - 0,2i$ ;  $-0,2587$  e  $0,467$ . Os pólos da planta realimentada com o controlador são  $0,0826 + 0,0333i$ ;  $0,0826 - 0,0333i$  e  $0,159 + 0,0176i$ ;  $0,159 - 0,0176i$  e  $0,117 + 0,0395i$ ;  $0,117 - 0,0395i$  e  $0,1161$ . É possível observar que os pólos da planta realimentada com o controlador foram alocados corretamente na região de restrição escolhida. A Figura 24 ilustra os pólos e zeros do sistema obtido.

O exemplo citado mostra que o rastreador opera adequadamente para a faixa de frequência escolhida.

### 5.3 Exemplo 3

Neste exemplo considera-se um sistema contínuo linear invariante no tempo de quarta ordem (DORF; BISHOP, 2001) na sua forma discretizada que representa a dinâmica do posicionamento de uma cabeça de leitura de disco rígido. Projeta-se um rastreador com rejeição à perturbação que está presente em sua estrutura e utiliza-se um período de amostragem de  $0,01$  segundos para o projeto. Seja o sistema descrito na forma de variáveis de estado dado por:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9804 & 0,0196 & 0,0090 & 0,0001 \\ 0,8188 & 0,1812 & 0,0028 & 0,0067 \\ -3,0875 & 3,0875 & 0,7964 & 0,0190 \\ 132,866 & -132,866 & 0,7615 & 0,1261 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0023 \\ 0,0004 \\ 0,4487 \\ 0,1399 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0,0023 \\ 0,0004 \\ 0,4487 \\ 0,1399 \end{bmatrix} w(k),$$

$$z(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

$$z(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

sendo  $x(k)$  o vetor de estados,  $u(k)$  o sinal de controle e  $w(k)$  é um sinal de distúrbio acrescentado ao sistema.

Como especificação de projeto, o rastreador deve operar em sinais de baixa frequência (até  $0,1 \text{ rad/s}$ ), então é proposto o filtro  $J_3(z)$

$$J_3(z) = \frac{(0,0413z^3 + 0,4477z^2 + 0,4414z + 0,0396) \times 10^{-8}}{z^4 - 3,9302z^3 + 5,7919z^2 - 3,7932z - 0,9315}.$$

O diagrama de Bode de  $J_3$  ilustrado na Figura 25 demonstra que o filtro projetado atende às especificações de projeto.

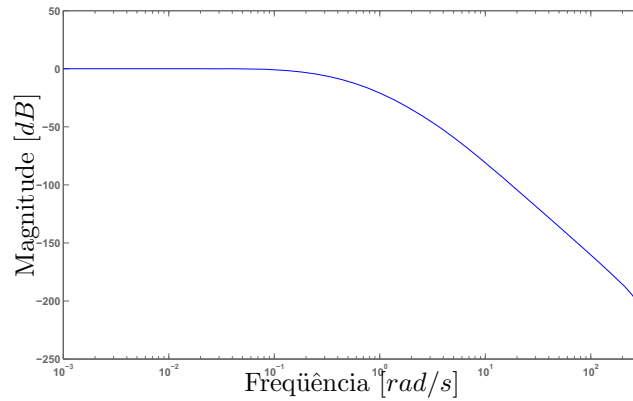


Figura 25: Diagrama de Bode do filtro  $J_3(z)$ .

O controlador  $K_c(z)$  discreto que minimiza a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $w(k)$  para  $z(k)$  do sistema descrito em (5.9) com centro em 0,5 e raio de 0,4 no plano  $z$  como região de restrição de pólos obtido com o uso das LMIs (2.14), (2.15) e (2.16) foi

$$K_c(z) = \frac{-63,6851z^3 - 95,1096z^2 + 73,7649z + 25,2297}{z^4 + 1,4028z^3 + 0,7751z^2 + 0,1648z + 0,0104}. \quad (5.11)$$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $w(k)$  para  $z(k)$  obtida no projeto foi 0,056. O valor calculado implica em uma grande atenuação do efeito do sinal de perturbação. A Figura 26 ilustra a resposta em frequência da magnitude da função transferência de  $Z(z)/W(z)$ .

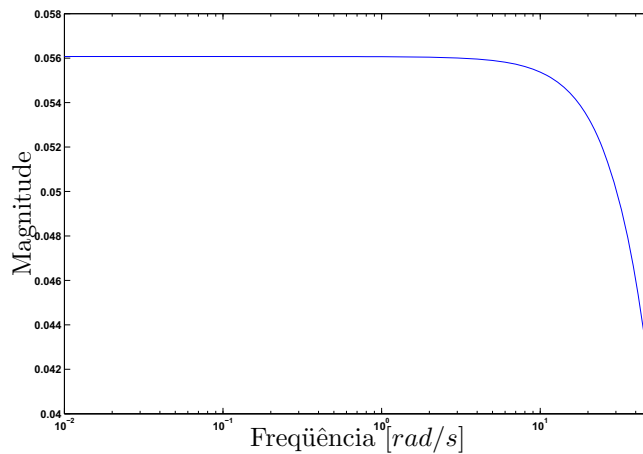


Figura 26: Resposta em frequência de  $Z(z)/W(z)$ .

Na sequência é projetado o rastreador para baixas frequências de até 0,1

$rad/s$  minimizando-se a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $r(k)$  para  $e(k)$  usando o projeto de rastreamento com modificação de zeros com peso na frequência, conforme descrito no Teorema (2.3).

Na modificação de zeros discretos minimiza-se a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $r(k)$  para  $e(k)$  para sinais de baixa frequência (até  $0,1 rad/s$ ), sendo  $e(k)$  o erro entre a saída e a entrada, a fim de constituir um seguidor de referência. O valor da norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema é  $1,5$ ; enquanto que o maior valor da magnitude para a faixa de frequência de operação especificada em projeto foi  $5,82 \times 10^{-5}$ . Isto implica que para a faixa de frequência especificada em projeto, o rastreador opera adequadamente.

A Figura 27 ilustra a resposta em frequência de  $E(z)/R(z)$  descrito em (2.9) e pode-se verificar que a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do projeto na faixa de frequência de operação (até  $0,1 rad/s$ ) atende às características para um sistema rastreador de sinal. A Figura 27 não ilustra o valor da norma  $\mathcal{H}_\infty$  devido ao teorema de amostragem de Shannon Isermann (1989). O teorema de amostragem de Shannon afirma existirem erros no sinal amostrado para sinais de frequência com valor maior do que a metade do valor da frequência de amostragem. Neste exemplo a frequência de amostragem é de  $100 rad/s$ , portanto só são amostrados sinais de frequência de até  $50 rad/s$ . Os parâmetros de modificação de zeros obtidos são:

$$M = \begin{bmatrix} -0,0001 \\ -0,0096 \\ 0,8440 \\ -3,9404 \end{bmatrix} \text{ e } N = 180,0563. \quad (5.12)$$

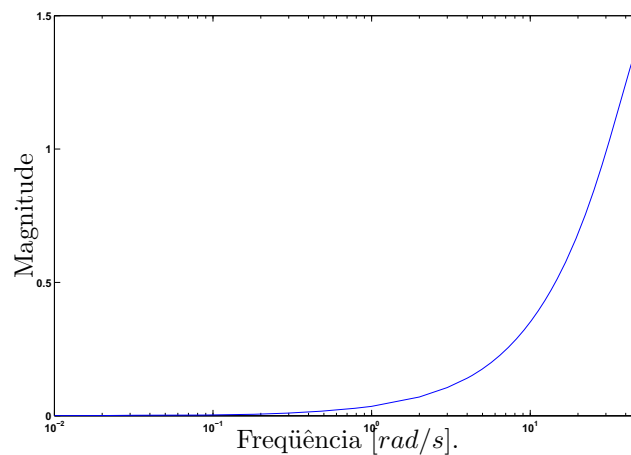


Figura 27: Resposta em frequência da função de transferência  $E(z)/R(z)$ .

A resposta em frequência de  $Z(z)/R(z)$  é ilustrada na Figura 28. Este diagrama

é outra forma de verificar o funcionamento do rastreador para baixas frequências, pois observa-se que o sistema apresenta ganho unitário para a faixa de frequência especificada em projeto.

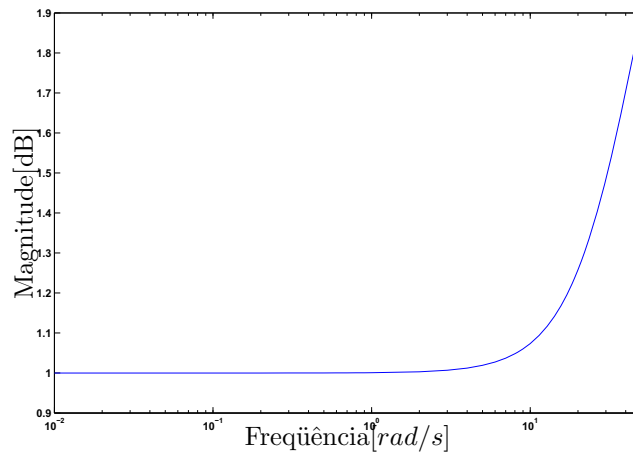


Figura 28: Resposta em frequência da função de transferência  $Z(z)/R(z)$ .

Para simulação, primeiramente considera-se uma entrada degrau unitário. O resultado da simulação é mostrado na Figura 29.

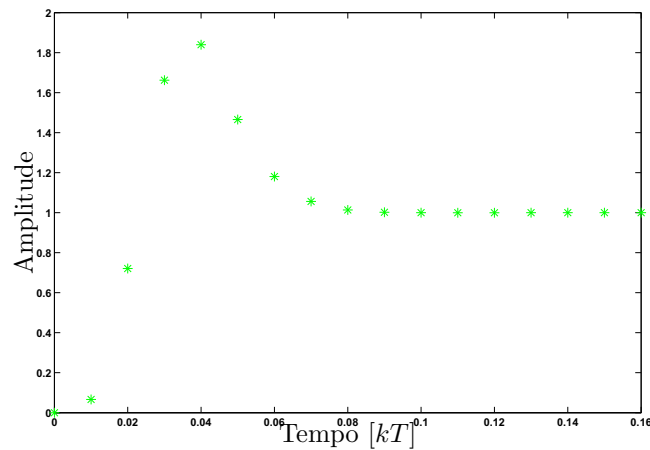


Figura 29: Resposta do sistema para uma entrada degrau unitário.

Em seguida, considera-se um sinal de entrada  $r(kT) = \text{sen}(0,1kT)$  e um sinal de perturbação  $w(k)$  que apresenta amplitudes aleatórias com amplitude máxima igual a 1. A entrada de referência e o ruído do sistema podem ser observados na Figura 30.

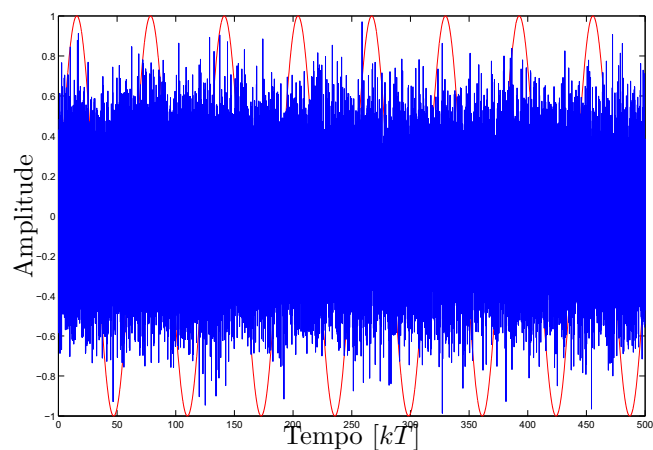


Figura 30: Sinais  $r(kT)$  e  $w(kT)$  do sistema.

Usando os valores de  $K_c(z)$ ,  $M$  e  $N$  obtidos em (5.11) e (5.12), tem-se o resultado de simulação ilustrado na Figura 31.

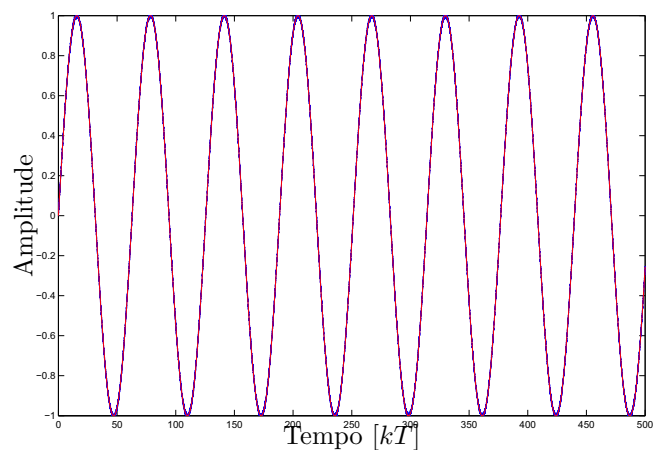


Figura 31: Sinal de referência e sinal de saída praticamente sobrepostos.

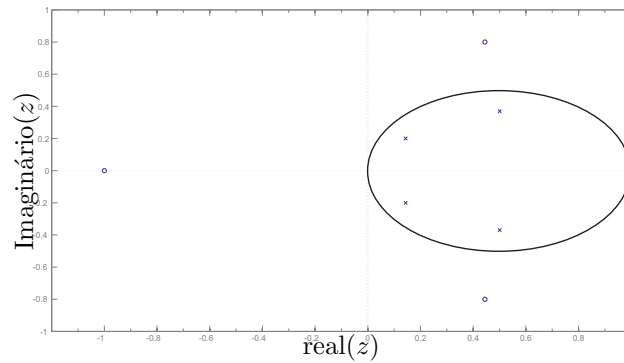


Figura 32: Mapa de pólos e zeros do sistema de malha fechada obtidos com  $K_c(z)$ ,  $M$ ,  $N$  e círculo de restrição de pólos.

Para este exemplo os zeros do sistema são  $-1$ ;  $0,45 + 0,814i$  e  $0,45 - 0,814i$ . Os pólos da planta realimentada com o controlador são  $0,502 + 0,324i$ ;  $0,502 - 0,324i$ ;  $0,116 + 0,202i$  e  $0,116 - 0,202i$ . É possível observar que os pólos da planta realimentada com o controlador foram alocados corretamente na região de restrição escolhida. A Figura 32 ilustra os pólos e zeros do sistema.

## 5.4 Exemplo 4

Neste exemplo considera-se um SLIT discreto, de segunda ordem com atraso no tempo (FRANKLIN; POWELL; WORKMAN, 1990) considerando-se a existência de um bloqueador de ordem zero. Projeta-se um rastreador discreto com rejeição à perturbação que está presente em sua estrutura, utiliza-se um período de amostragem de  $0,01$  segundos,  $a = 1$  e o atraso  $\lambda = 0,005s$  para o projeto.

Encontramos:  $\lambda = 2 * 0,01 - 0,5 * 0,01$  logo,  $l = 1$  e  $m = 0,5$

Substituindo em (2.37), teremos:

$$H(z) = (1 - e^{-0,005}) \frac{z + \frac{(e^{-0,005} - e^{-0,01})}{(1 - e^{-0,005})}}{z(z - e^{-0,01})},$$

$$H(z) = \frac{0,0050z + 0,0050}{z^2 - 0,9900z}. \quad (5.13)$$

Seja o sistema descrito na forma de variáveis de estado dado por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0,99 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w(k), \\ z(k) &= \begin{bmatrix} 0,005 & 0,005 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

sendo  $x(k)$  o vetor de estados,  $u(k)$  o sinal de controle e  $w(k)$  é um sinal de distúrbio acrescentado ao sistema.

Como especificação de projeto, o rastreador deve operar em sinais de baixa frequência (até  $0,1 \text{ rad/s}$ ), então é proposto o filtro  $J_4(z)$

$$J_4(z) = \frac{(0,4500z + 0,4500) \times 10^{-7}}{z^2 - 1,9999z - 0,9999}.$$

O diagrama de Bode de  $J_4(z)$  ilustrado na Figura 33 demonstra que o filtro projetado atende às especificações de projeto.

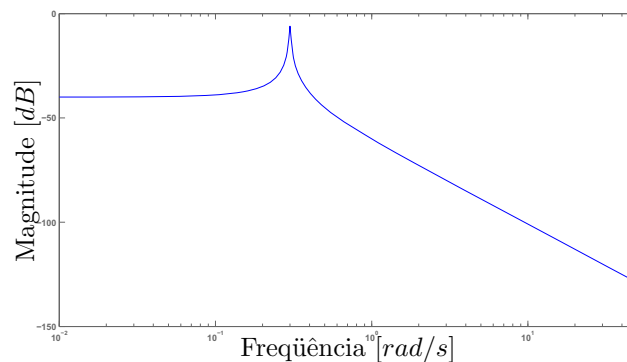


Figura 33: Diagrama de Bode do filtro  $J_4(z)$ .

Projeta-se um controlador  $K_c(z)$  discreto que minimiza a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $w(k)$  para  $z(k)$  do sistema descrito em (5.14) com centro em  $0,5$  e raio de  $0,49$  no plano  $z$  como região de restrição de pólos com o uso das LMIs (2.14), (2.15) e (2.16). Depois projeta-se

um rastreador para baixas frequências de até  $0,1 \text{ rad/s}$  minimizando-se a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $r(k)$  para  $e(k)$  usando o projeto de rastreamento com modificação de zeros e peso na frequência.

O compensador discreto  $K_c(z)$  projetado para este sistema é,

$$K_c(z) = \frac{-24,1395z - 4,6956}{z^2 - 0,2981z + 0,1392}. \quad (5.15)$$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $w(k)$  para  $z(k)$  atingida no projeto é  $0,0342$ , o que implica em uma grande atenuação do sinal de perturbação. A Figura 34 ilustra a resposta em frequência da função transferência  $Z(z)/W(z)$ .

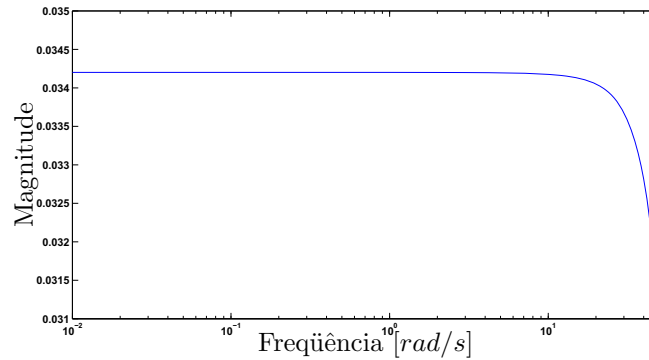


Figura 34: Resposta em frequência da função transferência  $Z(z)/W(z)$ .

Na modificação de zeros minimiza-se a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $r(k)$  para  $e(k)$  do sistema discreto para sinais de baixa frequência (até  $0,1 \text{ rad/s}$ ), sendo  $e(k)$  o erro entre a saída e a entrada, afim de constituir um seguidor de referência. O valor da norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema é  $1,32$ ; enquanto que o valor da maior magnitude na faixa de frequência de operação especificada em projeto foi  $3,13 \times 10^{-3}$ , isto implica que para a faixa de frequência especificada em projeto, o rastreador opera adequadamente.

A Figura 35 ilustra a resposta em frequência de  $E(z)/R(z)$  descrito em (2.12) e pode-se verificar que a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do projeto na faixa de frequência de operação (até  $0,1 \text{ rad/s}$ ) atende às características para um sistema rastreador de sinal. Os parâmetros de modificação de zeros obtidos são:

$$M = \begin{bmatrix} 0,0088 \\ -0,0030 \end{bmatrix} \text{ e } N = 31,4617 \quad (5.16)$$

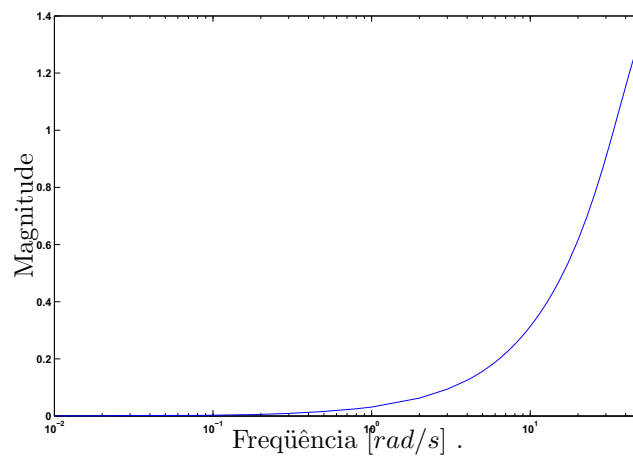


Figura 35: Resposta em frequência da função de transferência  $E(z)/R(z)$  descrita em (2.12).

A resposta em frequência de  $Z(z)/R(z)$  é ilustrado na Figura 36. Este diagrama é outra forma de verificar o funcionamento do rastreador para baixas frequências, pois observa-se que o sistema apresenta ganho unitário para a faixa de frequência especificada em projeto (até 0,1  $rad/s$ ).

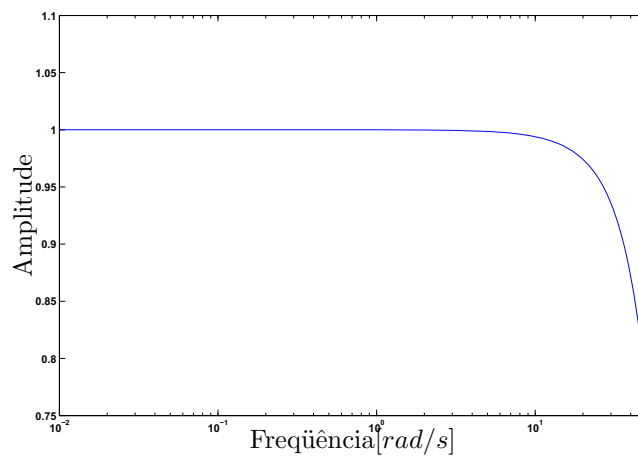


Figura 36: Resposta em frequência da função de transferência  $Z(z)/R(z)$

Em um primeiro momento simula-se a resposta a uma entrada degrau, o resultado é apresentado na Figura 37.

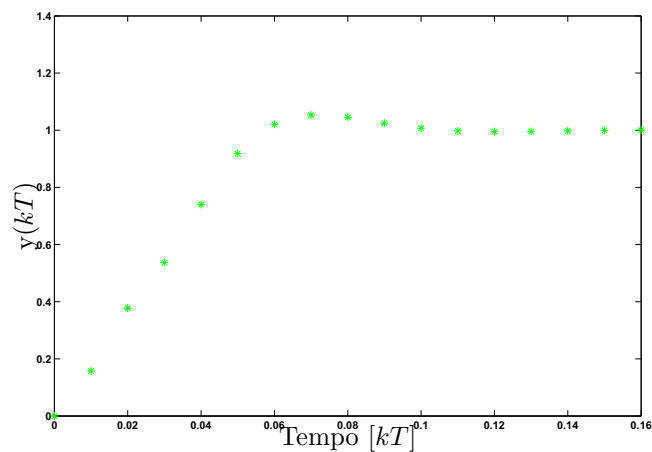


Figura 37: Resposta ao degrau unitário

Em uma segunda simulação consideração um sinal rampa na entrada  $r(k) = 0,7kT$ . O resultado da simulação é mostrado na Figura 38.

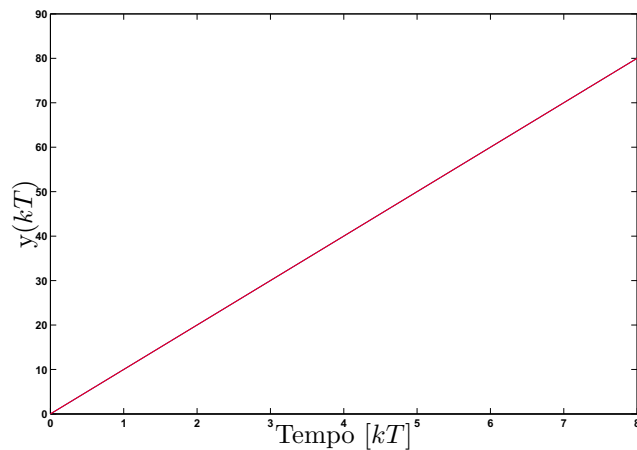


Figura 38: Resposta a rampa - Sinais de entrada e saída sobrepostos

Em uma terceira simulação considera-se um sinal de entrada  $r(k) = \text{sen}(0,1kT)$  e um sinal de perturbação  $w(kT)$  que apresenta amplitudes aleatórias. Para a simulação considera-se que a máxima amplitude deste sinal é 0,1. A entrada de referência e o ruído do sistema podem ser observados na Figura 39.

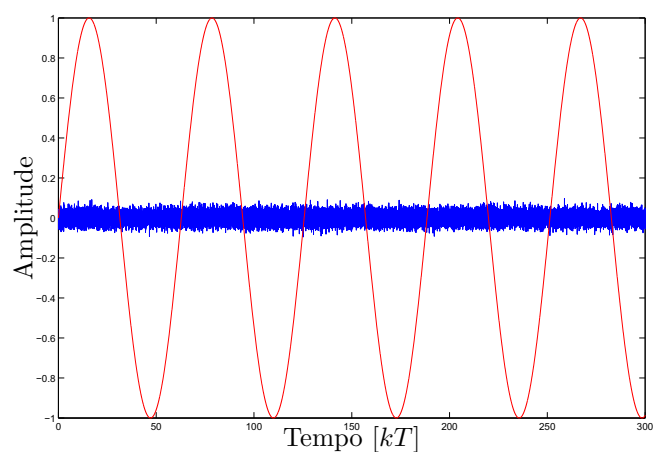


Figura 39: Sinais  $r(kT)$  e  $w(kT)$  do sistema.

Utilizando os valores de  $K_c(z)$ ,  $M$  e  $N$  obtidos em 5.15 e 5.16, tem-se o resultado de simulação ilustrado na Figura 40.

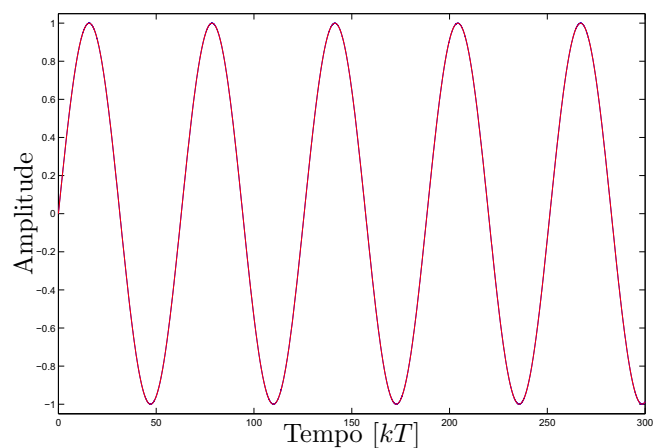


Figura 40: Sinal de referência e sinal de saída praticamente sobrepostos.

O mapa de pólos e zeros do sistema é mostrado na Figura 41. É possível verificar que os pólos da planta realimentada com o controlador foram alocados corretamente na região de restrição escolhida.

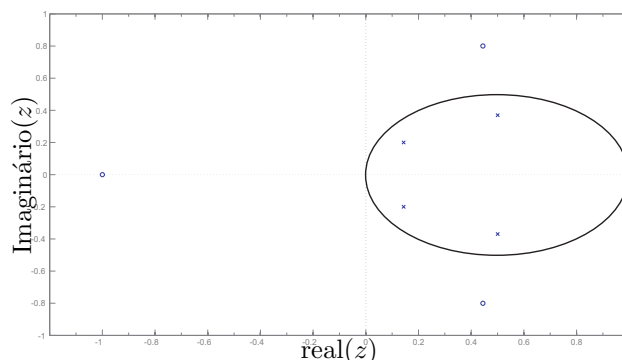


Figura 41: Mapa de pólos e zeros do sistema de malha fechada obtidos com  $K_c(z)$ ,  $M$ ,  $N$  e círculo de restrição de pólos.

Para este exemplo os zeros do sistema são  $-1$ ;  $0,4446 + 0,8004i$  e  $0,4446 - 0,8004i$ . Os pólos da planta realimentada com o controlador são  $0,5004 + 0,3694i$ ;  $0,5004 - 0,3694i$ ;  $0,1436 + 0,2002i$  e  $0,1436 - 0,2002i$ . É possível observar que os pólos da planta realimentada com o controlador foram alocados corretamente na região de restrição escolhida. A Figura 41 ilustra os pólos e zeros do sistema.

Pode-se notar a eficiência desta metodologia nos exemplos citados acima, além de ocorrer a rejeição do efeito da perturbação ainda foi possível otimizar o erro de rastreamento para as faixas de frequência especificadas. Foi comprovado o bom funcionamento da metodologia para sistemas com atraso com entradas degrau, rampa e senóides de baixas frequências.

## 5.5 Exemplo 5

Neste exemplo considera-se um sistema contínuo linear invariante no tempo de segunda ordem (DORF; BISHOP, 2001), na sua forma discretizada que representa a dinâmica de um circuito RLC. Deseja-se projetar um sistema de rastreamento com rejeição de distúrbio aplicado a planta. Utiliza-se um período de amostragem de 0,06 segundos para o projeto. O sistema contém um parâmetro incerto onde  $-0,2737 < \sigma < -0,1097$ . Seja o sistema descrito na forma de variáveis de estado dado por:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,996 & \sigma \\ 0,055 & 0,832 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0,12 \\ 0,0033 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0,12 \\ 0,0033 \end{bmatrix} w(k),$$

$$z(k) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

sendo  $x(k)$  o vetor de estado,  $u(k)$  o sinal de controle e  $w(k)$  é um sinal de distúrbio acrescentado ao sistema.

Como especificação de projeto, o rastreador deve operar em sinais de frequências até  $1 \text{ rad/s}$ , então é proposto o filtro  $J_5(z)$

$$J_5(z) = \frac{-26,12z + 26,93}{z^2 - 0,776z + 0,7861}.$$

O diagrama de Bode de  $J_5(z)$  ilustrado na Figura 42 demonstra que o filtro projetado atende às especificações de projeto.

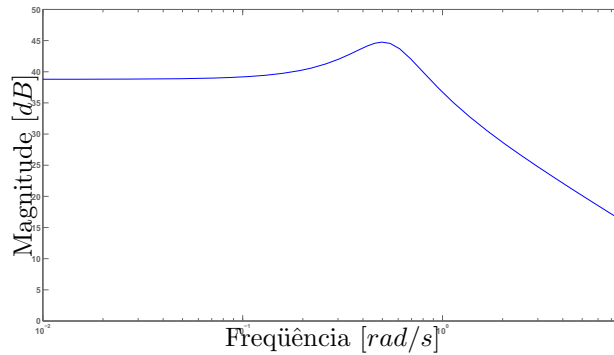


Figura 42: Diagrama de Bode do filtro  $J_5(z)$ .

O controlador  $K_{ci}(z)$  discreto que proporciona o melhor desempenho para minimizar o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  de  $w(k)$  para  $z(k)$  do sistema descrito em (5.17), obtido com o uso das LMIs (2.14) e (2.16) é

$$K_c(z) = K_{ci}(z) = \frac{(-498,64z + 252,87) * 10^3}{z^2 + 4,0235z + 2,91}. \quad (5.18)$$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $w(k)$  para  $z(k)$  obtida no projeto para o primeiro vértice do politopo

foi de 0,01556 e para o segundo vértice do politopo foi de 0,0159. O valor do custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  obtido foi 0,3668. Os valores calculados implicam uma grande atenuação do efeito do sinal de perturbação. A Figura 43 ilustra a resposta em frequência da magnitude da função transferência  $Z(z)/W(z)$ .

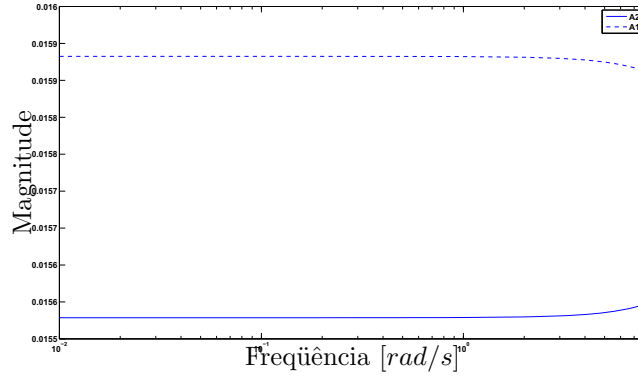


Figura 43: Resposta em frequência de  $Z(z)/W(z)$ . (A1) primeiro vértice do politopo de incertezas, (A2) segundo vértice do politopo de incertezas.

Na seqüência é projetado o rastreador para frequências abaixo de 1 *rad/s* minimizando-se o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  de  $r(k)$  para  $e(k)$  usando o projeto de rastreamento com peso na frequência, conforme descrito no Teorema (3.3).

O maior valor da magnitude para a faixa de frequência de operação especificada em projeto para o primeiro vértice do politopo foi 0,0112, enquanto que para o segundo vértice do politopo foi 0,0142. O valor do custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  obtido foi 0,0142. Isto implica que para a faixa de frequência especificada em projeto, o rastreador opera adequadamente.

A Figura 44 ilustra a resposta em frequência de  $E(z)/R(z)$  descrito em (2.9) e pode-se verificar que o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  do projeto na faixa de frequência de operação atende às características para um sistema rastreador de sinal e os parâmetros de modificação de zeros obtidos são:

$$M = \begin{bmatrix} 5,708 \\ -0,001 \end{bmatrix} \text{ e } N = 68,99. \quad (5.19)$$

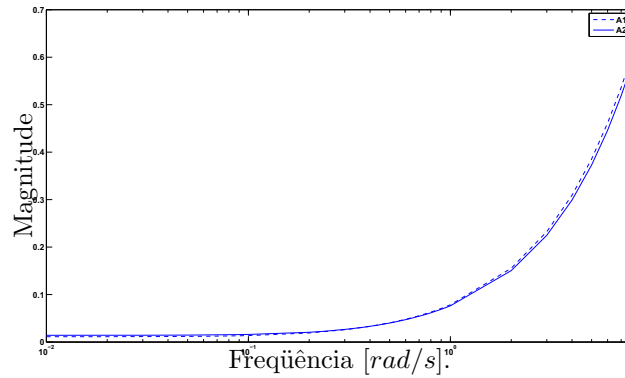


Figura 44: Resposta em frequência da função de transferência  $E(z)/R(z)$ . (A1) primeiro vértice do polítopo de incertezas, (A2) segundo vértice do polítopo de incertezas.

Para a simulação considera-se um sinal de entrada  $r(kT) = \text{sen}(0,1kT)$  e um sinal de perturbação  $w(k)$  que apresenta amplitudes aleatórias com amplitude máxima igual a 1.

Usando os valores de  $K_c(z)$ ,  $M$  e  $N$  obtidos em (5.18) e (5.19), tem-se o resultado de simulação ilustrado na Figura 45.

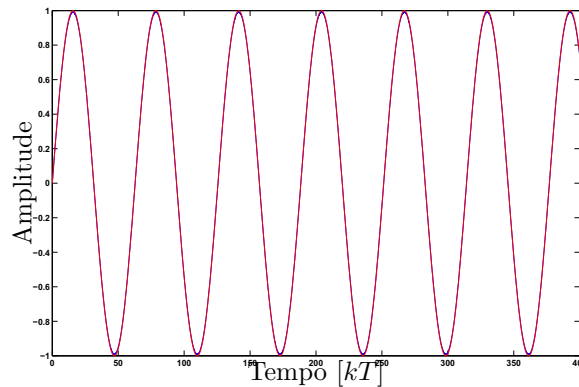


Figura 45: Sinal de referência e sinal de saída praticamente sobrepostos. Considerou-se para a simulação do sistema de rastreamento o vértice A1.

O rastreador operou de forma adequada para a faixa de frequência especificada em projeto para sistema discreto incerto.

## 5.6 Exemplo 6

Neste exemplo considera-se um sistema contínuo linear invariante no tempo de terceira ordem (DORF; BISHOP, 2001), na sua forma discretizada que representa a dinâmica do

ângulo de rolamento de um avião a jato de alto desempenho. Projeta-se um rastreador com rejeição à perturbação que está presente em sua estrutura e utiliza-se um período de amostragem de 0,01 segundos para o projeto. O sistema contém um parâmetro incerto onde  $0,8340 < \alpha < 0,8681$ . Seja o sistema descrito na forma de variáveis de estado dado por:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -0,2635 & -0,4477 \\ 0,0093 & 0,9987 & -0,0023 \\ 0 & 0,01 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0093 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0,0093 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w(k),$$

$$z(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

sendo  $x(k)$  o vetor de estado,  $u(k)$  o sinal de controle e  $w(k)$  é um sinal de distúrbio acrescentado ao sistema.

Como especificação de projeto, o rastreador deve operar em sinais de frequências abaixo de 5 *rad/s*, então é proposto o filtro  $J_6(z)$

$$J_6(z) = \frac{(0,2101z^2 + 0,4924z + 0,1221) * 10^6}{z^3 - 0,3064z^2 - 0,3254z - 0,3679}.$$

O controlador  $K_{ci}(z)$  discreto que proporciona o melhor desempenho para minimizar o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  de  $w(k)$  para  $z(k)$  do sistema descrito em (5.20), obtido com o uso das LMIs (2.14) e (2.16) é

$$K_c(z) = K_{ci}(z) = \frac{(-5,2259z^2 + 8,7687z - 3,7214) * 10^5}{z^3 + 1,7379z^2 + 1,6360z + 0,3342}. \quad (5.21)$$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $w(k)$  para  $z(k)$  obtida no projeto para o primeiro vértice do politopo foi de  $2,580 \times 10^{-4}$  e para o segundo vértice do politopo foi de  $2,582 \times 10^{-4}$ . O valor do custo garantido obtido foi  $2,590 \times 10^{-4}$ . Os valores calculados implicam uma grande atenuação do efeito do sinal de perturbação. A Figura 46 ilustra a resposta em frequência da magnitude da função transferência  $Z(z)/W(z)$ .

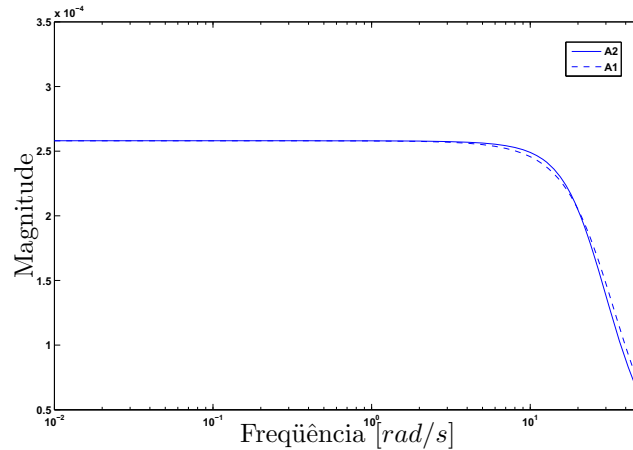


Figura 46: Resposta em frequência de  $Z(z)/W(z)$ . (A1) primeiro vértice do politopo de incertezas, (A2) segundo vértice do politopo de incertezas.

Na sequência é projetado o rastreador para frequências abaixo de  $5 \text{ rad/s}$  minimizando-se o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  de  $r(k)$  para  $e(k)$  usando o projeto de rastreamento com peso na frequência, conforme descrito no Teorema (3.3).

O maior valor da magnitude para a faixa de frequência de operação especificada em projeto para o primeiro vértice do politopo foi 0,0804, enquanto que para o segundo vértice do politopo foi 0,0805. O valor do custo garantido obtido foi 0,0807. Isto implica que para a faixa de frequência especificada em projeto, o rastreador opera adequadamente.

A Figura 47 ilustra a resposta em frequência de  $E(z)/R(z)$  descrito em (2.9) e pode-se verificar que o maior valor de magnitude do projeto na faixa de frequência de operação atende às características para um sistema rastreador de sinal e os parâmetros de modificação de zeros obtidos são:

$$M = \begin{bmatrix} 1 \\ 1350 \\ -10866 \end{bmatrix} \text{ e } N = 5,46 \times 10^3. \quad (5.22)$$

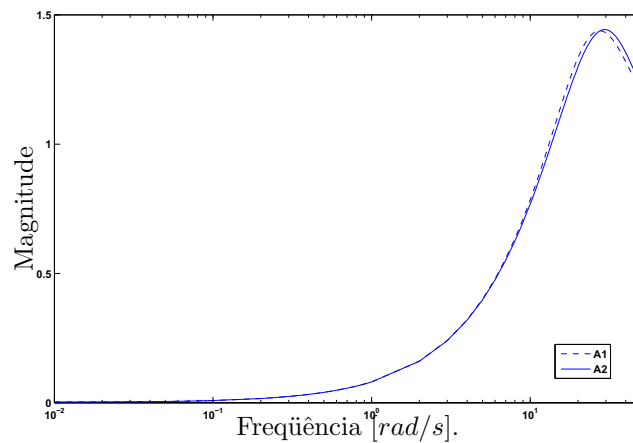


Figura 47: Resposta em frequência da função de transferência  $E(z)/R(z)$ . (A1) primeiro vértice do polítopo de incertezas, (A2) segundo vértice do polítopo de incertezas.

Para a simulação considera-se um sinal de entrada  $r(kT) = \text{sen}(1kT)$  e um sinal de perturbação  $w(k)$  que apresenta amplitudes aleatórias com amplitude máxima igual a 1.

Usando os valores de  $K_c(z)$ ,  $M$  e  $N$  obtidos em (5.21) e (5.22), tem-se o resultado de simulação ilustrado na Figura 48.

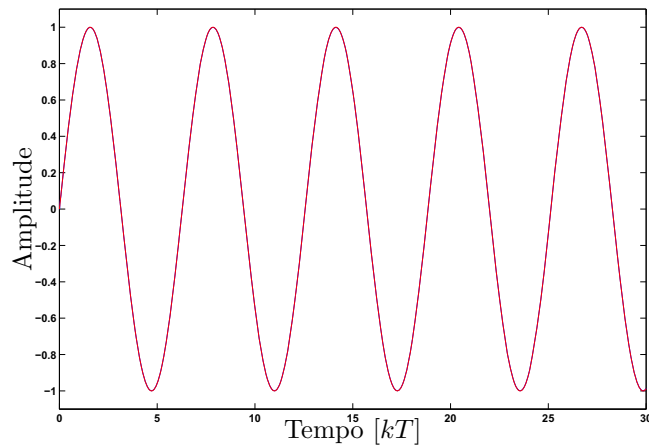


Figura 48: Sinal de referência e sinal de saída praticamente sobrepostos. Para a simulação do sistema de rastreamento considerou-se o vértice A1.

Neste exemplo utilizou-se a metodologia de rastreamento de sinais com modificação de zeros e rejeição de distúrbios aplicada a sistemas incertos. O sistema de rastreamento foi projetado considerando a incerteza na planta do tipo politópica. Foi demonstrado o bom desempenho da metodologia na faixa de frequência especificada.

## 5.7 Exemplo 7

Neste exemplo considera-se um sistema contínuo linear invariante no tempo de terceira ordem (DORF; BISHOP, 2001), na sua forma discretizada que representa a condição de pairar a aeronave em baixa altitude sobre uma pista de aterrissagem móvel de um pequeno navio, sob comando manual. Projeta-se um rastreador com rejeição à perturbação que está presente em sua estrutura e utiliza-se um período de amostragem de 0,08 segundos para o projeto. O sistema contém um parâmetro incerto onde  $-0,6853 < \alpha < -0,3062$ . O sistema descrito na forma de variáveis de estado é:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,079 & 0,031 \\ 0 & 0,97 & 0,076 \\ 0 & \alpha & 0,89 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,01 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0,01 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w(k),$$

$$z(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

sendo  $x(k)$  o vetor de estado,  $u(k)$  o sinal de controle e  $w(k)$  é um sinal de distúrbio acrescentado ao sistema.

Como especificação de projeto, o rastreador deve operar em sinais de frequências abaixo de 0,1 *rad/s*, então é proposto o filtro  $J_7(z)$

$$J_7(z) = \frac{(0,1065z^2 + 0,1064z) * 10^{-3}}{z^3 - 1,9977z^2 - 0,9967z}.$$

O controlador  $K_{ci}(z)$  discreto que proporciona o melhor desempenho para minimizar o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  de  $w(k)$  para  $z(k)$  do sistema descrito em (5.23), obtido com o uso das LMIs (2.14) e (2.16) é

$$K_c(z) = K_{ci}(z) = \frac{(-20,2254z^2 + 38,3998z - 18,6074)}{z^3 - 0,2805z^2 - 2,1488z + 1,4936}. \quad (5.24)$$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $w(k)$  para  $z(k)$  obtida no projeto para os dois vértices do politopo foi de 0,0162. O valor do custo garantido obtido foi de 0,0174. Os valores calculados implicam uma grande atenuação do efeito do sinal de perturbação. A Figura 49 ilustra a resposta em frequência da magnitude da função transferência  $Z(z)/W(z)$ .

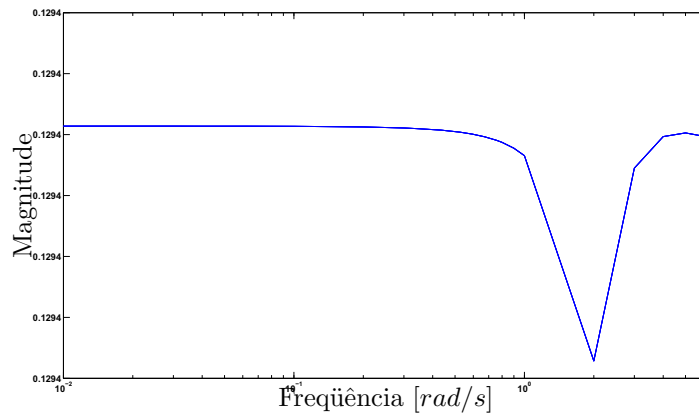


Figura 49: Resposta em frequência de  $Z(z)/W(z)$ . Vértices do politopo A1 e A2 praticamente sobrepostos.

Na seqüência é projetado o rastreador para frequências abaixo de  $0,1 \text{ rad/s}$  minimizando-se o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  de  $r(k)$  para  $e(k)$  usando o projeto de rastreamento com peso na frequência, conforme descrito em (2.35).

O maior valor da magnitude para a faixa de frequência de operação especificada em projeto para o primeiro vértice do politopo foi  $0,095$ , enquanto que para o segundo vértice do politopo foi  $0,148$ . O valor do custo garantido obtido foi de  $0,163$ . Isto implica que para a faixa de frequência especificada em projeto, o rastreador opera adequadamente.

A Figura 50 ilustra a resposta em frequência de  $E(z)/R(z)$  descrito em (2.9) e pode-se verificar que o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  do projeto na faixa de frequência de operação atende às características para um sistema rastreador de sinal e os parâmetros de modificação de zeros obtidos são:

$$M = \begin{bmatrix} -72,57 \\ -23,69 \\ -10,13 \end{bmatrix} \text{ e } N = 2,2179. \quad (5.25)$$

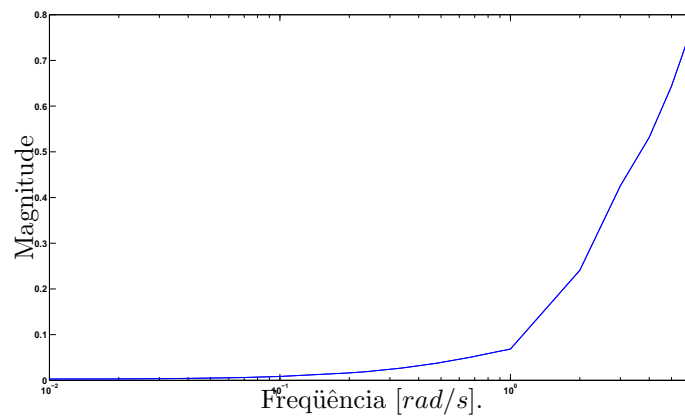


Figura 50: Resposta em freqüência da função de transferência  $E(z)/R(z)$ . Vértices do politopo A1 e A2 praticamente sobrepostos.

Usando os valores de  $K_c(z)$ ,  $M$  e  $N$  obtidos em (5.24) e (5.25), tem-se o resultado de simulação ilustrado na Figura 51.

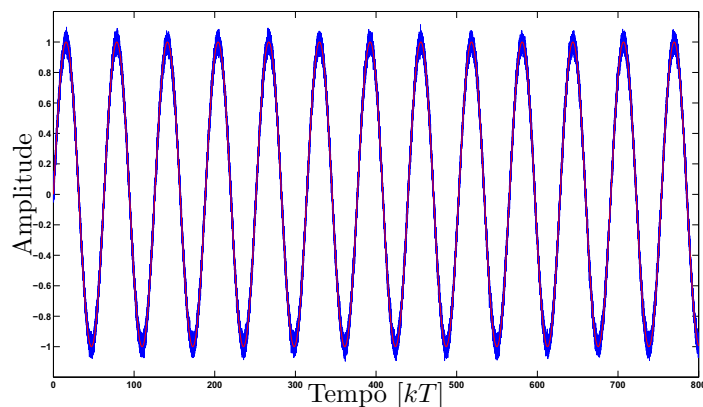


Figura 51: Sinal de referência e sinal de saída praticamente sobrepostos. Para a simulação do sistema de rastreamento considerou-se o vértice A1.

Para a simulação considera-se um sinal de entrada  $r(kT) = \text{sen}(0,01kT)$  e um sinal de perturbação  $w(k)$  que apresenta amplitudes aleatórias com amplitude máxima igual a 1.

Na Figura 51 é possível observar que o rastreador opera adequadamente para a faixa de freqüência especificada.

## 5.8 Exemplo 8

Neste exemplo considera-se um sistema contínuo linear invariante no tempo de segunda ordem (OGATA, 2003), na sua forma discretizada que representa a dinâmica de um sistema massa-mola-amortecedor. Projeta-se um rastreador com rejeição à perturbação que está presente em sua estrutura e utiliza-se um período de amostragem de 0,07 segundos para o projeto. O sistema contém uma falha no amortecedor  $-2 < \beta < 0$ . Seja o sistema descrito na forma de variáveis de estado dado por:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w(t),$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

Na sua forma discretizada:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,999 & 0,07 \\ -0,13 & \beta_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,009 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0,002 \\ 0,065 \end{bmatrix} w(k),$$

$$z(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

sendo  $x(k)$  o vetor de estado,  $u(k)$  o sinal de controle e  $w(k)$  é um sinal de distúrbio acrescentado ao sistema.

Como especificação de projeto, o rastreador deve operar em sinais de frequências abaixo de 0,1 *rad/s*, então é proposto o filtro  $J_8(z)$

$$J_8(z) = \frac{0,349z + 0,349}{z^2 - 1,99z + 0,99}.$$

O controlador  $K_{ci}(z)$  discreto que proporciona o melhor desempenho para minimizar o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  de  $w(k)$  para  $z(k)$  do sistema descrito em (5.27), obtido com o uso das LMIs (2.14) e (2.16) é

$$K_c(z) = K_{ci}(z) = \frac{(-549,8z + 485,07)}{z^2 + 2,21z + 1,2451}. \quad (5.28)$$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $w(k)$  para  $z(k)$  obtida no projeto para o primeiro vértice do politopo foi de 0,00163 e para o segundo vértice do politopo foi de 0,121. O valor do custo garantido obtido foi 0,211. Os valores calculados implicam uma grande atenuação do efeito do sinal de perturbação. A Figura 52 ilustra a resposta em frequência da magnitude da função transferência  $Z(z)/W(z)$ .

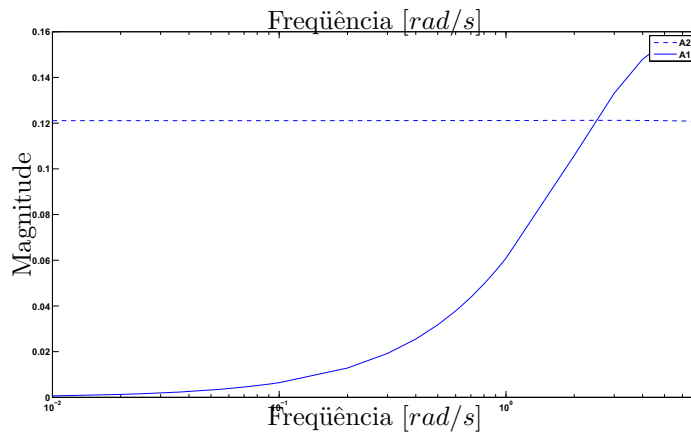


Figura 52: Resposta em frequência de  $Z(z)/W(z)$ . (A1) primeiro vértice do politopo de incertezas, (A2) segundo vértice do politopo de incertezas.

Na seqüência é projetado o rastreador para frequências abaixo de 0,1  $rad/s$  minimizando-se o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  de  $r(k)$  para  $e(k)$  usando o projeto de rastreamento com peso na frequência, conforme descrito em (2.35).

O maior valor da magnitude para a faixa de frequência de operação especificada em projeto para o primeiro vértice do politopo foi 0,016, enquanto que para o segundo vértice do politopo foi 0,023. O valor do custo garantido obtido foi 0,03. Isto implica que para a faixa de frequência especificada em projeto, o rastreador opera adequadamente.

A Figura 53 ilustra a resposta em frequência de  $E(z)/R(z)$  descrito em (2.9) e pode-se verificar que o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  do projeto na faixa de frequência de operação atende às características para um sistema rastreador de sinal e os parâmetros de modificação de zeros obtidos são:

$$M = \begin{bmatrix} 0,0051 \\ 0,0188 \\ -10866 \end{bmatrix} \text{ e } N = 20,46. \quad (5.29)$$

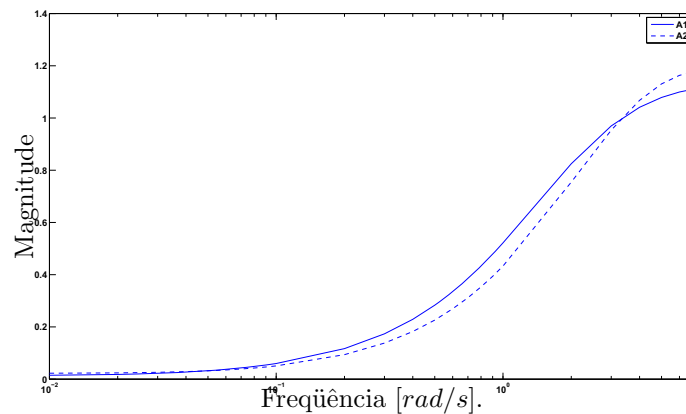


Figura 53: Resposta em frequência da função de transferência  $E(z)/R(z)$ . (A1) primeiro vértice do polítopo de incertezas, (A2) segundo vértice do polítopo de incertezas.

Para a simulação considera-se um sinal de entrada  $r(kT) = \text{sen}(0,01kT)$  e um sinal de perturbação  $w(k)$  que apresenta amplitudes aleatórias com amplitude máxima igual a 1.

Usando os valores de  $K_c(z)$ ,  $M$  e  $N$  obtidos em (5.28) e (5.29), tem-se o resultado de simulação ilustrado na Figura 54.

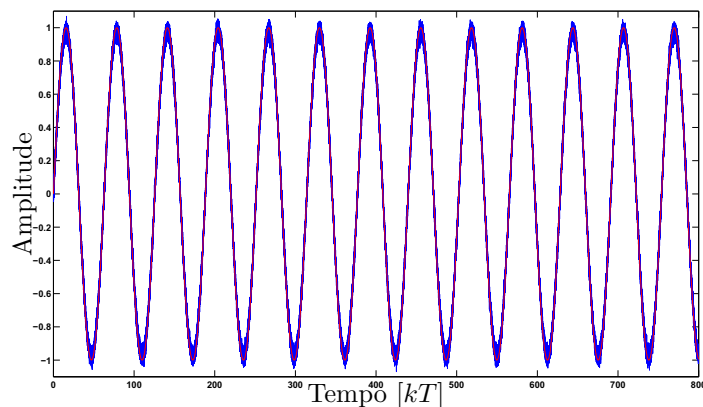


Figura 54: Sinal de referência e sinal de saída praticamente sobrepostos. Para a simulação do sistema de rastreamento considerou-se o vértice A1.

## 5.9 Exemplo 9

Neste exemplo considera-se um sistema contínuo linear invariante no tempo com múltiplas entradas e múltiplas saídas (DORF; BISHOP, 2001), na sua forma discretizada que representa o controle de um veículo flutuante. Deseja-se projetar um sistema de

rastreamento com rejeição de distúrbio aplicado a planta. Utiliza-se um período de amostragem de 0,09 segundos para o projeto. Seja o sistema descrito na forma de variáveis de estado dado por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1,021 & -0,438 \\ -0,073 & 0,656 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0,091 & 0,091 \\ -0,004 & -0,004 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0,091 & 0,091 \\ -0,004 & -0,004 \end{bmatrix} w(k), \\ z(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

sendo  $x(k)$  o vetor de estado,  $u(k)$  o sinal de controle e  $w(k)$  é um sinal de distúrbio acrescentado ao sistema.

Como especificação de projeto, o rastreador deve operar em sinais de frequências até  $1 \text{ rad/s}$ , então é proposto o filtro  $J_9(z)$

$$J_9(z) = \begin{bmatrix} \frac{(0,3634z+0,3624) \times 10^{-8}}{z^2-1,988z+0,992} \\ \frac{(0,3634z+0,3624) \times 10^{-8}}{z^2-1,988z+0,992} \end{bmatrix}$$

O controlador  $K_c(z)$  discreto que proporciona o melhor desempenho para minimizar o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  de  $w(k)$  para  $z(k)$  do sistema descrito em (5.30) com centro em 0,2 e raio de 0,25 no plano  $z$  como região de restrição de pólos obtido com o uso das LMIs (2.14), (2.15) e (2.16) foi

$$K_c(z) = \begin{bmatrix} \frac{(1,822z-0,513) \times 10^6}{z^2+0,538z-1,317} & \frac{(-1,771z+0,491) \times 10^6}{z^2+0,538z-1,317} \end{bmatrix}$$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $w(k)$  para  $z(k)$  obtida no projeto foi 0,0266. O valor calculado implica em uma grande atenuação do efeito do sinal de perturbação.

Na sequência é projetado o rastreador para baixas frequências de até  $1 \text{ rad/s}$  minimizando-se a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $r(k)$  para  $e(k)$  usando o projeto de rastreamento com modificação de zeros com peso na frequência, conforme descrito no Teorema (2.3).

Para o caso MIMO, analisa-se o desempenho do rastreador de sinais através da matriz de função de transferência de  $Z(z)$  para  $R(z)$ . A matriz de função de transferência de  $Z(z)$  para  $R(z)$  representa a relação entre as entradas de referência e os sinais de saída do sistema. Entretanto, nos exemplos anteriores, que abordavam casos SISO, o desempenho do rastreador foi observado através da análise da função transferência de  $E(z)$  para  $R(z)$ , o qual era conveniente para a análise do funcionamento do rastreador. Neste exemplo a matriz de transferência de  $Z(z)$  para  $R(z)$  pode ser descrita da seguinte maneira:

$$\Phi(z) = \begin{bmatrix} Z_{11}(z) & Z_{12}(z) \\ Z_{21}(z) & Z_{22}(z) \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Considera-se  $R_1(z)$  e  $R_2(z)$  as transformadas  $\mathcal{Z}$  dos sinais de entrada de referência do sistema, e  $Z_1(z)$  e  $Z_2(z)$  as transformadas  $\mathcal{Z}$  dos sinais de saída de referência do sistema. Ainda, as funções de transferência  $Z_{11}(z)$ ,  $Z_{12}(z)$ ,  $Z_{21}(z)$  e  $Z_{22}(z)$  são descritas em (5.31). Pode-se representar  $Z_1(z)$  e  $Z_2(z)$  conforme abaixo:

$$\begin{aligned} Z_1(z) &= R_1(z)Z_{11}(z) + R_2(z)Z_{12}(z) \\ Z_2(z) &= R_1(z)Z_{21}(z) + R_2(z)Z_{22}(z) \end{aligned} \quad (5.32)$$

A metodologia de rastreamento de sinais com modificação dos zeros proposta neste trabalho possibilita o rastreamento aplicado a sistemas MIMO apenas para sinais de referência iguais, pois o projeto não aborda desacoplamento de canais. Então, considera-se  $R_1(z) = R_2(z) = R_t(z)$ . Desta maneira pode-se reescrever (5.32) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \chi_1(z) &= \frac{Z_1(z)}{R_t(z)} = Z_{11}(z) + Z_{12}(z) \\ \chi_2(z) &= \frac{Z_2(z)}{R_t(z)} = Z_{21}(z) + Z_{22}(z) \end{aligned} \quad (5.33)$$

A análise do desempenho do rastreador é realizada baseando-se na equação (5.33). A Figura 55 ilustra a resposta em frequência da matriz função de transferência de  $Z(z)$  para  $R(z)$ . Ainda, considerando-se (5.33), pode-se descrever a função de transferência de  $Z(z)$  para  $R(z)$  conforme abaixo:

$$\Phi_t(z) = \begin{bmatrix} \frac{Z_1(z)}{R_t(z)} \\ \frac{Z_2(z)}{R_t(z)} \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Pode-se verificar (até 1 *rad/seg*) que a norma  $\mathcal{H}_\infty$  na banda de frequência apresenta características para um sistema de rastreamento, pois a magnitude da matriz função de

transferência de  $\Phi(z)$  para a faixa de frequência especificada em projeto é unitária. Os valores ótimos para os parâmetros  $M$  e  $N$  são:

$$M = \begin{bmatrix} 0,7886 & 0,7886 \\ -1,905 & -1,905 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad N = \begin{bmatrix} -2,8374 & 0,3580 \\ 6,9470 & 3,7517 \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

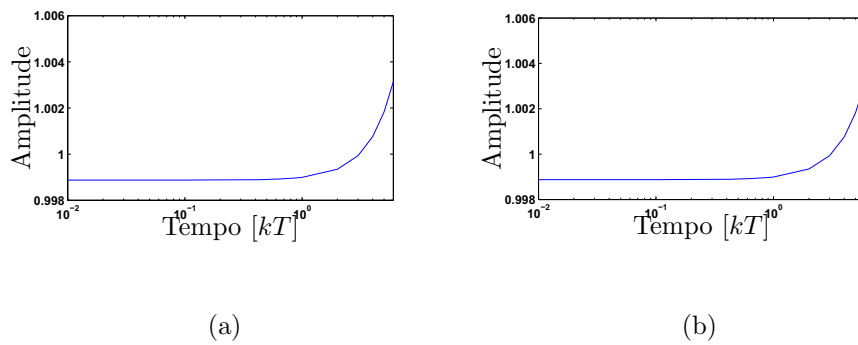


Figura 55: (a) Resposta em frequência de  $\chi_1(z)$ . (b) Resposta em frequência de  $\chi_2(z)$ , sendo  $\chi_1(z)$  e  $\chi_2(z)$  descritas em (5.33).

Na simulação considerou-se um sinal  $r(kT) = \begin{bmatrix} r_1(k) & r_2(k) \end{bmatrix} = [\text{sen}(0,1kT) \text{ sen}(0,1kT)]$  e um sinal de distúrbio  $w(t) = [w_1(k) \ w_2(k)]$  com amplitudes aleatórias. Neste exemplo, considerou-se 1 a máxima amplitude do sinal aleatório. O sinal  $z(k) = \begin{bmatrix} z_1(k) & z_2(k) \end{bmatrix}$  é o sinal de saída de referência do sistema. O resultado de simulação é ilustrado na Figura 56.

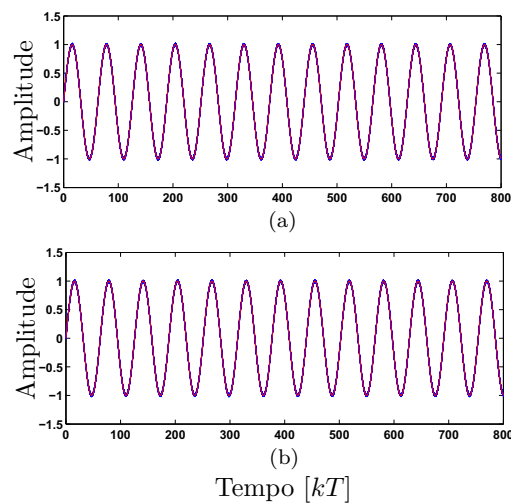


Figura 56: (a) Sinal de entrada  $z_1(k)$  e sinal de entrada  $r_1(k)$  estão praticamente sobrepostos. (b) Sinal de entrada  $z_2(k)$  e sinal de entrada  $r_2(k)$  estão praticamente sobrepostos.

Para este exemplo, os pólos do sistema realimentado são compostos pelos pólos alocados na especificada região:  $0,199 \pm 0,0555j$  e  $0,371 \pm 0,037j$ .

## 5.10 Exemplo 10

Considere o sistema não-linear massa-mola-amortecedor na forma de equações diferenciais (TANAKA; IKEDA; WANG, 1996) descrito em (5.36), e ilustrado na Figura 57.

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}(t) &= -0,02x(t) - 0,67x(t)^3 - 0,1\dot{x}(t)^3 + u(t) + w(t) \\
 y(t) &= x(t) \\
 z(t) &= x(t)
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

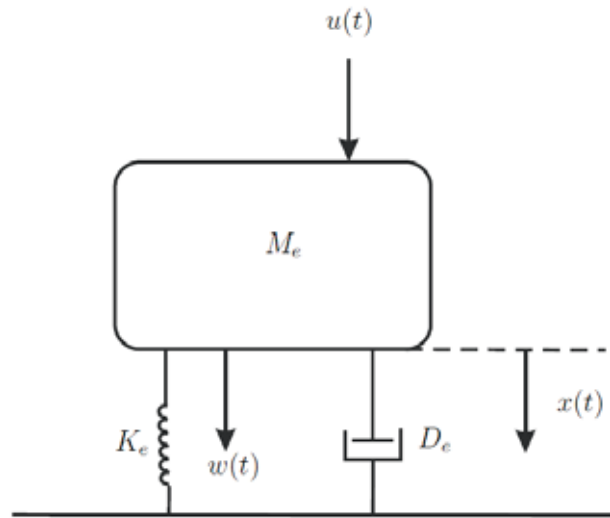


Figura 57: Sistema massa-mola-amortecedor

Deseja-se projetar um sistema de rastreamento e rejeição de distúrbio para o sistema massa-mola-amortecedor e utiliza-se a modelagem exata para este exemplo (TANIGUCHI et al., 2001). O sistema (5.36) é obtido considerando-se  $M_e = 1 \text{ Kg}$ ,  $D_e = 1 \text{ Ns/m}$  e  $K_e = 0,01 \text{ N/m}$  nos parâmetros indicados na Figura 57, vide (TANAKA; IKEDA; WANG, 1996) para maiores detalhes.

Adotando-se:

$$x_1(t) = x(t) \quad \text{e} \quad x_2(t) = \dot{x}(t)$$

tem-se,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,02 - 0,67x_1(t)^2 & -0,1x_2(t)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) \quad (5.37)$$

Para o projeto do rastreador de sinais considera-se a seguinte faixa de valores para as variáveis de estado do sistema massa-mola-amortecedor:

$$\begin{cases} -1,5 \leq x_1(t) \leq 1,5 \\ -1,5 \leq x_2(t) \leq 1,5 \end{cases} \quad (5.38)$$

No processo de modelagem exata do sistema não-linear abordado neste exemplo adota-se:

$$\tilde{f}_{21}(x(t)) = -0,02 - 0,67x_1(t)^2 \quad \text{e} \quad \tilde{f}_{22}(x(t)) = -0,1x_2(t)^2.$$

Desta maneira pode-se reescrever (5.37),

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{f}_{21}(x(t)) & \tilde{f}_{22}(x(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) \quad (5.39)$$

Para obter-se a representação exata do sistema não-linear, de acordo com (TANIGUCHI et al., 2001), é necessário determinar os valores máximos e mínimos das funções  $\tilde{f}_{21}(x(t))$  e  $\tilde{f}_{22}(x(t))$  considerando a condição (5.38), desta maneira tem-se:

$$\text{Pontos de máximos e mínimos} = \begin{cases} a_{211} = \max \{ \tilde{f}_{21} \} = -0,02 \\ a_{212} = \min \{ \tilde{f}_{21} \} = -1,5275 \\ a_{221} = \max \{ \tilde{f}_{22} \} = -0,225 \\ a_{212} = \min \{ \tilde{f}_{22} \} = 0 \end{cases} \quad (5.40)$$

Segundo o método proposto por (TANIGUCHI et al., 2001), a função não-linear  $\tilde{f}_{21}$  pode ser representada, na forma exata, por um modelo *fuzzy* T-S, considerando-se quatro modelos locais. O número de modelos locais é igual a  $2^{nl}$ , sendo  $nl$  o número de não-linearidades presente no sistema. Desta maneira para  $a_{211}$  e  $a_{222}$  existem  $\sigma_{211}$  e  $\sigma_{212}$  tais que:

$$\tilde{f}_{21} = \sigma_{211}a_{211} + \sigma_{212}a_{212} \quad (5.41)$$

$$0 \leq \sigma_{211}, \sigma_{212} \leq 1$$

$$\sigma_{211} + \sigma_{212} = 1 \Leftrightarrow \sigma_{212} = 1 - \sigma_{211}$$

De (5.41) tem-se:

$$\sigma_{211} = \frac{\tilde{f}_{21} - a_{212}}{a_{211} - a_{212}} \quad \text{e} \quad \sigma_{212} = \frac{a_{211} - \tilde{f}_{21}}{a_{211} - a_{212}} \quad (5.42)$$

Da mesma maneira a função não-linear  $\tilde{f}_{22}$  pode ser representada na forma exata por:

$$\tilde{f}_{22} = \Gamma_{221}a_{221} + \Gamma_{222}a_{222} \quad (5.43)$$

sendo,

$$0 \leq \Gamma_{221}, \Gamma_{222} \leq 1$$

$$\Gamma_{221} + \Gamma_{222} = 1 \Leftrightarrow \Gamma_{222} = 1 - \Gamma_{221} \quad (5.44)$$

De (5.43) e (5.44) tem-se,

$$\Gamma_{221} = \frac{\tilde{f}_{22} - a_{222}}{a_{221} - a_{222}} \quad \text{e} \quad \Gamma_{222} = \frac{a_{221} - \tilde{f}_{22}}{a_{221} - a_{222}} \quad (5.45)$$

Após a determinação destes parâmetros pode-se reescrever (5.41) conforme a seguir:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{21} &= (\Gamma_{221} + \Gamma_{222})(\sigma_{211}a_{211} + \sigma_{212}a_{212}) \\ &= \Gamma_{221}\sigma_{211}a_{211} + \Gamma_{221}\sigma_{212}a_{212} + \Gamma_{222}\sigma_{211}a_{211} + \Gamma_{222}\sigma_{212}a_{212} \end{aligned} \quad (5.46)$$

Definindo-se em (5.46),

$$\begin{aligned} \alpha_1(x) &= \Gamma_{221}\sigma_{211}, \quad \alpha_2(x) = \Gamma_{221}\sigma_{212}, \quad \alpha_3(x) = \Gamma_{222}\sigma_{211}, \quad \alpha_4(x) = \Gamma_{222}\sigma_{212}, \\ \text{e } \alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \alpha_3(x) + \alpha_4(x) &= 1. \end{aligned} \quad (5.47)$$

obtem-se:

$$\tilde{f}_{21} = \alpha_1(x)a_{211} + \alpha_2(x)a_{212} + \alpha_3(x)a_{211} + \alpha_4(x)a_{212} \quad (5.48)$$

De maneira similar, pode-se reescrever  $\tilde{f}_{22}$ ,

$$\tilde{f}_{22} = \alpha_1(x)a_{221} + \alpha_2(x)a_{221} + \alpha_3(x)a_{222} + \alpha_4(x)a_{222} \quad (5.49)$$

Analisando-se (5.48) e (5.49) pode-se determinar os modelos locais para este sistema não-linear massa-mola-amortecedor,

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,02 & -0,225 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1,5275 & -0,225 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,02 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1,5275 & 0 \end{bmatrix}, \\ B_{11} &= B_{12} = B_{13} = B_{14} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ B_{21} &= B_{22} = B_{23} = B_{24} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ C_{11} &= C_{12} = C_{13} = C_{14} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ C_{21} &= C_{22} = C_{23} = C_{24} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Na sua forma discretizada (GAINO, 2009):

$$\begin{aligned}
A_1 &= \begin{bmatrix} 0,9996 & 0,2 \\ 0,04 & 0,9996 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} 0,9696 & 0,1980 \\ -0,3024 & 0,9696 \end{bmatrix}, \\
A_3 &= \begin{bmatrix} 0,9996 & 0,1955 \\ -0,0039 & 0,9556 \end{bmatrix}, & A_4 &= \begin{bmatrix} 0,9701 & 0,1936 \\ -0,3 & 0,9255 \end{bmatrix}, \\
B_{11} = B_{12} = B_{13} = B_{14} &= \begin{bmatrix} 0,0199 \\ 0,1980 \end{bmatrix}, \\
B_{21} = B_{22} = B_{23} = B_{24} &= \begin{bmatrix} 0,0199 \\ 0,1980 \end{bmatrix}, \\
C_{11} = C_{12} = C_{13} = C_{14} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
C_{21} = C_{22} = C_{23} = C_{24} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.51}$$

O período de amostragem utilizado foi de 0,2 segundos.

No processo de atenuação do efeito do sinal de distúrbio no sistema utilizou-se o Teorema 4.1 para o projeto do compensador  $\mathcal{H}_\infty$ . Em projeto, utilizou-se como restrição para alocação dos pólos uma região limitada por uma circunferência de raio  $r = 0,23$ , com centro em  $q = -0,7$ . Os vértices do controlador  $\mathcal{H}_\infty$ ,  $K_{fu}(\alpha)$ , obtido são:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \mathbf{A}_{fu} \\
A_{fu_{11}} &= \begin{bmatrix} -0,9650 & -0,0002 \\ 173,5119 & -4,0763 \end{bmatrix}, & A_{fu_{12}} &= \begin{bmatrix} -0,9650 & -0,0002 \\ 173,4950 & -3,7323 \end{bmatrix}, \\
A_{fu_{13}} &= \begin{bmatrix} -0,9350 & -0,0002 \\ 173,4818 & -6,1998 \end{bmatrix}, & A_{fu_{14}} &= \begin{bmatrix} -0,9650 & -0,0002 \\ 173,5304 & -7,8202 \end{bmatrix}, \\
A_{fu_{21}} &= \begin{bmatrix} -0,9755 & -0,0002 \\ 169,9577 & -4,3518 \end{bmatrix}, & A_{fu_{22}} &= \begin{bmatrix} -0,9755 & -0,0002 \\ 169,9662 & -4,0078 \end{bmatrix}, \\
A_{fu_{23}} &= \begin{bmatrix} -0,9755 & -0,0002 \\ 169,8982 & -2,4740 \end{bmatrix}, & A_{fu_{24}} &= \begin{bmatrix} -0,9755 & -0,0002 \\ 170,0546 & -7,1334 \end{bmatrix}, \\
A_{fu_{31}} &= \begin{bmatrix} -0,9654 & -0,0002 \\ 171,0581 & -1,9084 \end{bmatrix}, & A_{fu_{32}} &= \begin{bmatrix} -0,9654 & -0,0002 \\ 171,0660 & -5,5656 \end{bmatrix}, \\
A_{fu_{33}} &= \begin{bmatrix} -0,9654 & -0,0002 \\ 170,9842 & -4,0328 \end{bmatrix}, & A_{fu_{34}} &= \begin{bmatrix} -0,9654 & -0,0002 \\ 171,0927 & -1,9272 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{fu_{41}} &= \begin{bmatrix} -0,4973 & -0,0002 \\ 167,0996 & -0,2293 \end{bmatrix}, & A_{fu_{42}} &= \begin{bmatrix} -0,9753 & -0,0002 \\ 167,9168 & -15,1145 \end{bmatrix}, \\
A_{fu_{43}} &= \begin{bmatrix} -0,9753 & -0,0002 \\ 167,9359 & -6,0776 \end{bmatrix}, & A_{fu_{44}} &= \begin{bmatrix} -0,9753 & -0,0002 \\ 168,0151 & -3,9727 \end{bmatrix}. \\
\Rightarrow \mathbf{B}_{fu} & \\
B_{fu_1} &= \begin{bmatrix} -0,0037 \\ 7,6095 \end{bmatrix}, & B_{fu_2} &= \begin{bmatrix} -0,0037 \\ 7,4537 \end{bmatrix}, & B_{fu_3} &= \begin{bmatrix} -0,0037 \\ 7,5181 \end{bmatrix}, \\
B_{fu_4} &= \begin{bmatrix} -0,0037 \\ 7,4027 \end{bmatrix}. & & & & (5.52) \\
\Rightarrow \mathbf{C}_{fu} & \\
C_{fu_1} &= \begin{bmatrix} -3,4668 & -0,0079 \end{bmatrix} \times 10^4, & C_{fu_2} &= \begin{bmatrix} -4,3231 & -0,0077 \end{bmatrix} \times 10^4, \\
C_{fu_3} &= \begin{bmatrix} -4,2660 & -0,0078 \end{bmatrix} \times 10^4, & C_{fu_4} &= \begin{bmatrix} -4,2244 & -0,0076 \end{bmatrix} \times 10^4.
\end{aligned}$$

O controlador *fuzzy*  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser descrito da seguinte maneira:

$$A_{fu}(\alpha) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \alpha_i \alpha_j A_{fu_{ij}}, \quad B_{fu}(\alpha) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i B_{fu_i} \quad \text{e} \quad C_{fu}(\alpha) = \sum_{j=1}^4 \alpha_j C_{fu_j}.$$

sendo  $\alpha_i$  descrita em (5.47).

O valor do limitante da norma  $\mathcal{H}_\infty$  obtido de  $w(z)$  para  $z(z)$  foi de 0,0415, o que implica em uma atenuação do efeito do sinal de perturbação na saída do sistema massa-mola-amortecedor. A Figura 58 ilustra o diagrama de magnitude em função da frequência de  $w(z)$  para  $z(z)$ , obtida com (4.22) e (4.23). Os modelos locais utilizados para se obter os resultados ilustrados na Figura 58 são,

- modelo local 11 :  $A_1, B_{21}, C_{11}, C_{21}, A_{fu_{11}}, B_{fu_1}$  e  $C_{fu_1}$
- modelo local 22 :  $A_2, B_{22}, C_{12}, C_{22}, A_{fu_{22}}, B_{fu_2}$  e  $C_{fu_2}$
- modelo local 33 :  $A_3, B_{23}, C_{13}, C_{23}, A_{fu_{33}}, B_{fu_3}$  e  $C_{fu_3}$
- modelo local 44 :  $A_4, B_{24}, C_{14}, C_{21}, A_{fu_{44}}, B_{fu_4}$  e  $C_{fu_4}$

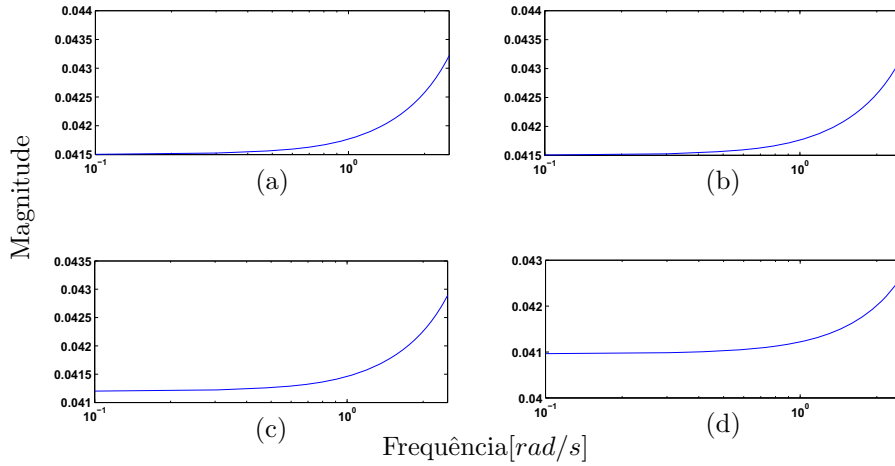


Figura 58: Resposta em frequência de  $Z(z)/W(z)$ . (a) Modelo local 11, (b) Modelo local 22, (c) Modelo local 33, (d) Modelo local 44.

Como especificação de projeto, o rastreador deve operar em sinais de frequências abaixo de  $1 \text{ rad/s}$ , então é proposto o filtro  $J_{10}(z)$

$$J_{10}(z) = \frac{(0,179z + 0,178) \times 10^{-6}}{z^2 - 1,97z + 0,988}.$$

Na sequência é projetado o rastreador para frequências abaixo de  $1 \text{ rad/s}$  minimizando-se a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $r(k)$  para  $e(k)$  usando o projeto de rastreamento com peso na frequência, conforme descrito em (4.51).

O maior valor da magnitude para a faixa de frequência de operação especificada em projeto para o modelo local 11 foi 0,0262, para o modelo local 22 foi 0,0234, para o modelo local 33 foi 0,0293 e para o modelo local 44 foi 0,0291. Isto implica que para a faixa de frequência especificada em projeto, o rastreador opera adequadamente.

A Figura 53 ilustra a resposta em frequência de  $E(z)/R(z)$  descrito em (2.9) e pode-se verificar que o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  do projeto na faixa de frequência de operação atende às características para um sistema rastreador de sinal.

Os parâmetros obtidos do projeto de rastreamento com modificação de zeros aplicados a sistemas não-lineares são:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0,001313 \\ 2,2886 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0,00129 \\ 2,2564 \end{bmatrix},$$

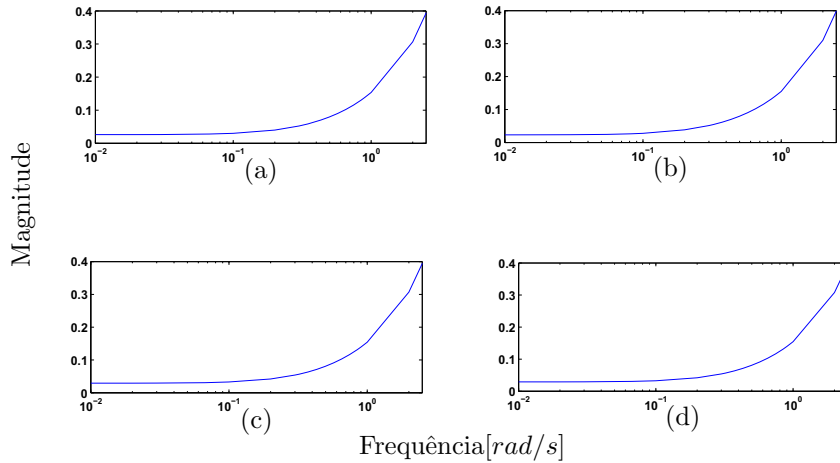


Figura 59: Resposta em frequência de  $E(z)/R(z)$ . (a) Modelo local 11, (b) Modelo local 22, (c) Modelo local 33, (d) Modelo local 44.

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0,00130 \\ 2,2741 \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} 0,00130 \\ 2,2649 \end{bmatrix},$$

$$N_1 = 60,591; \quad N_2 = 60,121; \quad N_3 = 60,276 \quad \text{e} \quad N_4 = 60,110.$$

Ainda pode-se descrever os parâmetros de modificação de zeros da seguinte maneira:

$$M(\alpha) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i M_i \quad \text{e} \quad N(\alpha) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i N_i. \quad (5.53)$$

sendo  $\alpha_i$  descrita em (5.47).

Na análise da Figura 59 foi considerado a adição dos seguintes parâmetros nos modelos locais:

modelo local 11 :  $M_1$  e  $N_1$

modelo local 22 :  $M_2$  e  $N_2$

modelo local 33 :  $M_3$  e  $N_3$

modelo local 44 :  $M_4$  e  $N_4$

Para este exemplo, os zeros para os modelos locais em malha fechada são: (a) modelo local 11:  $-0,975$  e  $-0,989 \pm 0,0756j$ , (b) modelo local 22:  $-0,975$  e  $-0,989 \pm 0,0756j$ , (c) modelo local 33:  $-0,975$  e  $-0,989 \pm 0,0756j$  e (d) modelo local 44:  $-0,975$  e  $-0,989 \pm 0,0756j$ . Os pólos de malha fechada nos modelo locais alocados na região são: (a) modelo local 11:  $-0,633 \pm 0,112j$ ;  $-0,847$  e  $-0,928$ ; (b) modelo local 22:  $-0,614 \pm 0,0931j$ ;

---

$-0,922$  e  $-0,894$ ; (c) modelo local 33:  $-0,639 \pm 0,0755j$ ;  $-0,924$  e  $-0,84$ ; (d) modelo local 44:  $-0,623 \pm 0,0987j$ ;  $-0,931$  e  $-0,875$ .

## 6 *Conclusão e perspectivas futuras*

Neste trabalho é proposta uma metodologia para variação dos zeros aplicados a sistemas discretos determinísticos, incertos e não-lineares para o rastreamento de sinais de referência, e simultaneamente a atenuação de distúrbio presente na planta. Considerando-se a Figura 1, pode-se atenuar o efeito do sinal de distúrbio presente na planta através da minimização da norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $w(k)$  para  $z(k)$ . Para o rastreamento de sinais utiliza-se a metodologia proposta com modificação ótima dos zeros a fim de minimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas determinísticos e não-lineares e o custo garantido de sistemas incertos entre o sinal de referência e o sinal de erro de rastreamento, sendo o erro de rastreamento a diferença entre o sinal de referência  $r(k)$  e o sinal de saída do sistema  $y(k)$ .

Nos sistemas determinísticos e não-lineares a rejeição da perturbação é alcançada a partir da alocação dos pólos do sistema discreto, enquanto que o rastreamento do sinal de referência é feito a partir do projeto de modificação dos zeros do sistema discreto, estando desacoplado o primeiro processo do segundo.

A inclusão de peso na frequência utilizado no projeto do rastreador viabiliza o projeto e possibilita ao projetista criar sistemas de rastreamento para sinais de referência em uma faixa de frequência especificada. Esta especificação da banda de frequência do sinal a ser rastreado apresenta-se como uma das principais vantagens da metodologia.

Na solução do problema do rastreamento com rejeição de distúrbios para sistemas não-lineares foi proposta uma metodologia que representa o sistema não-linear na forma de modelos locais lineares com os resultados apresentados no Exemplo 5.10. Utilizou-se os modelos Takagi-Sugeno para descrever as não-linearidades da planta. Porém, ressalta-se ainda, a necessidade da simulação da metodologia a um determinado sinal de entrada.

Os métodos de projeto são equacionados na forma de LMIs, assim, este projeto pode ser facilmente resolvido utilizando-se algoritmos de convergência polinomial ((CHIALI; GAHINET, 1996) e (PALHARES; TAKAHASHI; PERES, 1997) disponíveis na literatura.

Com o desenvolvimento das metodologias apresentadas neste trabalho, surgem novas possibilidades de pesquisas futuras, onde, cita-se:

- Resolver o problema do rastreamento com rejeição de distúrbios em sistemas discretos utilizando apenas um único conjunto de LMIs,
- Realizar a simulação discreta do rastreamento para uma dada entrada em sistemas discretos não-lineares,
- Realizar um estudo abordando projetos de sistemas de rastreamento com modificação de zeros e rejeição de distúrbios para sistemas MIMO desacoplados.

## *Referências*

- ANDREA, C. Q. *Controle Ótimo  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  com Alocação de Zeros para o Problema de Rastreamento usando LMI*. 2002. 95 f. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2002.
- ANDREA, C. Q.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. Controle ótimo  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  com modificação de zeros para o problema do rastreamento usando LMI. *Revista Controle & Automação*, Campinas, v. 15, n. 4, p. 413–442, Out./Dez. 2004.
- ANDREA, C. Q.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$ -Optimal control for the tracking problem with zero variation. *IET Control Theory & Applications*, Milan, v. 1, n. 3, p. 682–688, May 2007.
- ANDREA, C. Q.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; PINTO, O. P. P. Controle Ótimo  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas não-lineares com modelos Fuzzy Takagi-Sugeno. *Revista Controle & Automação*, Natal, v. 19, n. 3, p. 270–280, Jul./Set. 2008.
- CASTILLO, T. B.; MEDA, C. J. A. The Fuzzy Discrete-Time Robust Regulation Problem: An LMI approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 12, n. 3, p. 360–367, June 1994.
- CHEN, B. M.; LIN, Z.; LIU, K. Robust and perfect tracking of discrete-time systems. *Automatica*, Milan, v. 36, n. 2, p. 293–299, February 2002.
- CHIALI, M.; GAHINET, P.  $\mathcal{H}_\infty$  Design with pole placement constraints: an LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New Jersey, AC-41, p. 358–367, March 1996.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. *Sistemas de Controle Modernos*. 8th. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. 684 p.
- DOYLE, J. C.; GLOVER, K. *Robust and Optimal Control*. 2nd. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1996. 596 p.
- FARGES, C.; PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D.; DAAFOUS, J. Robust  $\mathcal{H}_2$  performance analysis and synthesis of linear polytopic discrete-time periodic systems via LMI. *System and Control Letters*, Amsterdam, v. 56, n. 7-8, p. 159–166, February 2007.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; WORKMAN, M. L. *Digital Control of Dynamic Systems*. 2nd. ed. Boston: Addison Wesley, 1990. 768 p.
- GAHINET, P.; NEMIROVSK, A.; LAUB, A.; CHIALI, M. *LMI Control Toolbox User's Guide*. Natick, MA.: The Mathworks, 1995.

- GAINO, R. *Controle de Movimentos de Pacientes Paraplégicos utilizando Modelos Fuzzy T-S*. 2009. 182 f. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2009.
- GONÇALVES, E. N.; PALHARES, R. M.; TAKAHASHI, R. H. C.; MESQUITA, R. C. New strategy for robust stability analysis of discrete-time uncertain systems. *System and Control Letters*, Amsterdam, v. 56, n. 7-8, p. 516–524, July 2007.
- ISERMANN, R. *Digital Control Systems - Fundamentals, Deterministic Control*. 2nd. ed. Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 1989. 336 p.
- KAPILA, V.; HADDAD, W. Robust controller synthesis for uncertain discrete-time periodic systems. *American Control Conference*, San Diego, v. 5, n. 24-26, p. 3129–3130, June 1998.
- KAU, S.; LIU, Y.; HONG, L.; LEE, C.; FANG, C.; LEE, L. A new LMI condition for robust stability of discrete-time uncertain systems. *Systems and Control Letters*, Amsterdam, v. 54, n. 12, p. 1195–1203, December 2005.
- LIMA, E. L. *Algebra Linear - Coleção Matemática Universitária*. 4th. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2000. 357 p.
- MENDES, R. A. T. *Controle Ótimo  $\mathcal{H}_\infty$  com Modificação de Zeros para o Problema do Rastreamento em Sistemas Discretos usando LMI*. 2007. 51 f. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2007b.
- MENDES, R. A. T.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; ANDREA, C. Q. Controle Ótimo  $\mathcal{H}_\infty$  com modificação de zeros para o problema do rastreamento em sistemas discretos com atraso no tempo usando lmi. In: BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS, CONTROL AND THEIR APPLICATIONS, 6., 2007, São José do Rio Preto. *Proceedings of the...* São José do Rio Preto: IBILCE, 2007. p. 1413–1420.
- MENDES, R. A. T.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; ANDREA, C. Q. Controle Ótimo  $\mathcal{H}_\infty$  com modificação de zeros para o problema do rastreamento em sistemas discretos utilizando a realimentação dinâmica da saída. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 17., 2008, Juiz de Fora. *Anais...* Juiz de Fora: SBA, 2008. v. 1. 7p. (Artigo 41419).
- MENDES, R. A. T.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; ANDREA, C. Q. Controle Ótimo  $\mathcal{H}_\infty$  com Modificação de Zeros para o Problema do Rastreamento em Sistemas Discretos usando LMI. *Revista TEMA - Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, v. 10, n. 2, p. 179–190, 2009.
- MESSNER, W. C.; KEMPF, C. J. Zero placement for designing discrete time repetitive controllers. *Control Engineering Practice*, Milan, v. 4, n. 4, p. 563–569, April 1996.
- M'SAAD, M.; ORTEGA, R.; LANDAU, I. D. Adaptive controllers for discrete-time systems with arbitrary zeros. *Automatica*, Saint-Martin, v. 21, n. 4, p. 413–423, July 1985.
- OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. 4th. ed. New Jersey: Prentice-Hall, 2003. 800 p.

- OLIVEIRA, M. C. *Controle de Sistemas Lineares Baseado nas Desigualdades Matriciais Lineares*. 1999. 152 f. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999.
- PALHARES, R. M.; TAKAHASHI, R. H. C.; PERES, P. L. D.  $\mathcal{H}_\infty$  and  $\mathcal{H}_2$  Guaranteed costs computation for uncertain linear systems. *International Journal of System Science*, Hants, v. 28, n. 2, p. 183–188, February 1997.
- PARK, J. H. On design of dynamic output feedback controller for GCS of large-scale systems with delays in interconnections: LMI optimization approach. *Applied Mathematics and Computation*, Ocean Isle Beach, v. 161, n. 5, p. 423–432, February 2005.
- SABERI, A.; SANNUTI, P.; STOORVOGEL, A.  $H_2$  optimal controllers with measurement feedback for discrete-time systems: flexibility in closed-loop pole placement. *Automatica*, v. 33, n. 3, p. 289–304, March 1997.
- SEN, M. De la. Pole-placement in discrete systems by using simple and multirate sample. *Journal of the Franklin Institute*, Bilbao, v. 333, n. 5, p. 721–746, September 1996.
- TANAKA, K.; IKEDA, T.; WANG, H. Robust Stabilization of a Class of Uncertain Nonlinear Systems via Fuzzy Control: Quadratic Stabilizability,  $\mathcal{H}_\infty$  Control Theory, and Linear Matrix Inequalities. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New Jersey, v. 4, n. 1, p. 1–13, February 1996.
- TANIGUCHI, T. B.; TANAKA, K.; OHTAKE, H.; WANG, H. O. Model Construction, Rule Reduction and Robust Compensation for Generalized Form of Takagi Sugeno Fuzzy Systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 9, n. 4, p. 525–538, August 2001.
- WANG, O. H.; TANAKA, K.; GRIFFIN, M. F. An approach to Fuzzy Control of Nonlinear Systems: Stability and Design Issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 4, n. 1, p. 14–23, February 1996.
- ZHOU, S.; LI, T.; SHAO, H.; ZENG, W. X. Output Feedback  $\mathcal{H}_\infty$  Control for Uncertain Discrete Time Hiperbolic Fuzzy Systems. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, v. 19, p. 487–499, August 2006.