

Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

**Problemas elípticos envolvendo o operador
 $(1, q)$ -Laplaciano e do tipo double- phase
e**

**Problemas singulares quasilineares elípticos
envolvendo os operadores laplaciano e
curvatura-média**

Relatório de Pós-doutorado realizado na Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Unidade Faculdade de Ciências e Tecnologia FCT

Supervisor: Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

PROGRAMA DE PÓS-DOCTORADO DA UNESP

Presidente Prudente

2026

RESUMO

Neste projeto foi proposto o estudo de problemas quasilineares elípticos envolvendo o operador $(1, q)$ -Laplaciano, consistindo no limite de problemas do tipo (p, q) -Laplaciano, quando p converge a 1. Uma outra frente de trabalho que nós trilhamos foi o estudo de problemas que envolve operadores laplaciano e curvatura-média. Mais precisamente, Nesta parte do projeto foi proposto s o estudo de problemas quasilineares elípticos envolvendo o operador 1-laplaciano e não-linearidades singulares.

PALAVRAS CHAVE: p -laplaciano; 1-laplaciano; curvatura média; problemas quasilineares elípticos; problemas singulares.

ABSTRACT

This project proposed the study of quasilinear elliptic problems involving the Laplacian operator $(1, q)$, consisting of the limit of problems of the type (p, q) -Laplacian, when p converges to 1. Another line of work we pursued was the study of problems involving Laplacian operators and mean-curvature. More precisely, in this part of the project, the study of quasilinear elliptic problems involving the 1-Laplacian operator and singular nonlinearities was proposed.

KEYWORDS: p -laplacian; 1-laplacian; mean curvature operator; quasilinear elliptic equations; singular problems.

1 Introdução

Neste projeto foi proposto o estudo de problemas quasilineares elípticos envolvendo o operador $(1, q)$ -laplaciano, consistindo no limite de problemas do tipo (p, q) -Laplaciano, quando p converge a 1. Em geral, as soluções de tais problemas tem mais regularidade do que aquelas de problemas envolvendo somente o operador 1-laplaciano, possibilitando estudá-las em espaços de Sobolev usuais. Nesse projeto, foi também do nosso interesse o estudo do caso limite de problemas do tipo double-phase, quando o parâmetro p converge a 1.

Uma outra frente de trabalho que nós trilhamos foi o estudo de problemas que envolve operadores laplaciano e curvatura-média. Mais precisamente, Nesta parte do projeto foi proposto o estudo de problemas quasilineares elípticos envolvendo o operador 1-laplaciano e não-linearidades singulares. Foi obtido resultados de existência de soluções não-triviais, seguindo uma abordagem baseada na aproximação por soluções de problemas correspondentes envolvendo o operador p -laplaciano. Nesse processo, a parte mais delicada foram as estimativas uniformes em p para as soluções dos problemas aproximados, o que demandou o uso de refinadas técnicas de análise matemática.

2 Objetivos

O objetivo geral do projeto foi abordar questões de existência de soluções de problemas quasilineares elípticos que se modelam no espaço das funções de variação limitada. Foram levantadas algumas questões no estudo de problemas envolvendo o operador de curvatura média e o operador 1-Laplaciano, com vistas a utilização de métodos variacionais para a obtenção das soluções. O projeto visou explorar uma lacuna na literatura versando sobre problemas nesse espaço, a qual permitiu explorar para uma grande variedade de problemas quasilineares, técnicas amplamente utilizadas quando do estudo de problemas envolvendo o operador Laplaciano ou p -Laplaciano.

3 Materiais e métodos

A metodologia utilizada foi a padrão na pesquisa teórica em matemática, consistindo na pesquisa bibliográfica de artigos relacionados ao tema central de estudo, entendimento das técnicas empregadas e discussão dos resultados. Para o desenvolvimento desse projeto, foram usadas as seguintes ferramentas

- Métodos variacionais, que garantem a existência de pontos críticos de certos funcionais. Foram usados principalmente o Teorema do Passo da Montanha e o teorema que afirma que todo ponto de mínimo local é também crítico. Conceitos como coercividade, monotonia e convexidade de funcionais também foram usados;
- O método de Nehari;
- Métodos topológicos, especialmente o Teorema de Leray-Lions e os Teoremas do Ponto Fixo de Schauder e de Brouwer, vide por exemplo [9] e [4];
- Teoria de Morse, junto à Teoria dos Grupos Críticos, que é uma ferramenta moderna que vem sendo utilizada recentemente no estudo de problemas quasilineares elípticos;
- O princípio do máximo fraco e o método de sub-super solução. Vide [7];
- A Teoria de Pairing de Anzelotti-Chen-Frid, essencial para o estudo de problemas modelados em $BV(\Omega)$. Vide por exemplo [1], [2] e [5];
- O Princípio de Concentração-Compacidade de Lions, utilizado frequentemente no estudo de problemas com termos de crescimento crítico. Vide por exemplo [10] e [6];
- Resolução de problemas auxiliares cujas soluções em algum sentido convergem para um certo limite, que por sua vez resolve um problema original;
- Estudo dos espaços $W^{1,\mathcal{H}_{\log}}(\Omega)$ e $W_0^{1,\mathcal{H}_{\log}}(\Omega)$, introduzidos recentemente em [3].

4 Resultados e discussão

Os resultados obtidos na pesquisa podem ser segmentados nos seguintes trabalhos. Alguns já estão publicados. Outros estão já submetidos em revistas internacionais ou ainda em andamento.

Trabalhos publicados

1. Giovany M. Figueredo; M. T. O. Pimenta ; P. Winkert . The asymptotic behavior of constant sign and nodal solutions of p -Laplacian problems as p goes to 1. *NONLINEAR ANALYSIS-THEORY METHODS & APPLICATIONS*, v. 251, p. 113677-113690, 2025.
2. Cardoso, J. A. ; Albuquerque, J. C. ; Carvalho, J. ; Giovany M. Figueredo . On a planar equation involving p -Laplacian with zero mass and Trudinger-Moser nonlinearity. *NONLINEAR ANALYSIS-REAL WORLD APPLICATIONS*, v. 81, p. 104227-104244, 2025.
3. LIMA, E. D. ; E.D da Silva ; Oliveira Junior, J. C. O. . Positive solutions for a Kirchhoff type problem with critical growth via nonlinear Rayleigh quotient. *CALCULUS OF VARIATIONS AND PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS*, v. 64, p. 1-49, 2025.
4. Baraket, S. ; Ghorbal A.B. ; Giovany M. Figueiredo . On Caffarelli-Kohn-Nirenberg Type Problems with a Sign-Changing Term. *JOURNAL OF GEOMETRIC ANALYSIS*, v. 34, p. 142-156, 2024.
5. O trabalho seguinte foi escrito junto com os professores Marcos T.O. Pimenta, Matheus Stapenhorst e Patrick Winkert

Este trabalho discutiu o comportamento assintótico do problema singular

$$-\Delta_p u - \Delta_q u = u^{-\gamma} + \lambda u^{r-1} \quad \text{em } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \quad (4.1)$$

quando $p \rightarrow 1^+$, onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, é um domínio limitado com fronteira Lipschitziana $\partial\Omega$, $\lambda > 0$, $0 < \gamma < 1 < p < q < N$ e $q < r < q^* = \frac{Nq}{N-q}$. Neste trabalho, foi provada a existência de pelo menos duas soluções fracas pertencentes ao espaço de Sobolev usual $W_0^{1,q}(\Omega)$ do problema

$$-\Delta_1 u - \Delta_q u = u^{-\gamma} + \lambda u^{r-1} \quad \text{em } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \quad (4.2)$$

quando o parâmetro λ é suficientemente pequeno. Mais precisamente, o nosso principal resultado é o seguinte

Teorema 4.1 *Sejam $0 < \gamma < 1 < q < N$ e $q < r < q^*$. Então existe $\Lambda > 0$ tal que, para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$, o problema (4.2) possui pelo menos duas soluções fracas não triviais.*

Tais soluções foram encontradas primeiro estudando os problemas puramente singulares

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = f(x)u^{-\gamma} & \text{em } \Omega, \\ u \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta_1 u - \Delta_q u = f(x)u^{-\gamma} & \text{em } \Omega, \\ u \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde f é uma função não negativa com certas propriedades de somabilidade. Uma vez resolvidos esses problemas, foi utilizado o método de Nehari para obter soluções dos problemas (4.1) e (4.2). Até onde sabemos, este é o primeiro trabalho que traz resultados para problemas singulares envolvendo o $(1, q)$ -laplaciano. Recentemente, em [11] os autores obtiveram duas soluções para o problema

$$\begin{cases} -\Delta_1 u = \lambda u^{-\gamma} + u^{r-1} & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $0 < \gamma < 1 < r < 1^*$ e $\lambda > 0$ é suficientemente pequeno. Já em [8], os autores trabalharam com um problema envolvendo o operador 1-laplaciano e um termo não linear que pode explodir na origem. Em todos esses trabalhos, as soluções obtidas pertencem ao espaço $BV(\Omega)$. No nosso trabalho, conseguimos muito mais regularidade. De fato, ao invés de obtermos soluções em $BV(\Omega)$, obtemos elas no espaço de Sobolev usual $W_0^{1,q}(\Omega)$, sendo essa uma contribuição importante do trabalho.

Referências

- [1] AMBROSIO, L., FUSCO, N., PALLARA, D., *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*, Courier Corporation, (2000).
- [2] ANZELLOTTI, G., *Pairings between measures and bounded functions and compensated compactness*, Ann. Mat. Pura Appl., Vol. 135, 293-318 (1983).
- [3] ARORA, R., CRESPO-BLANCO, Á., WINKERT, P., *On logarithmic double phase problems*, J. Differential Equations, Vol. 433, Paper No. 113247, 60 pp (2025).
- [4] BOCCARDO, L., CROCE, G., *Elliptic partial differential equations: existence and regularity of distributional solutions*, Walter de Gruyter, 2013.
- [5] CHEN, G.-Q., FRID, H., *Divergence-measure fields and hyperbolic conservation laws*, Arch. Ration. Mech. Anal., Vol. 147, no. 2, 89-118, (1999).
- [6] GARCIA-AZORERO, J., PERAL-ALONSO, I., *Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a nonsymmetric term*. Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 323, no. 2, 877–895 (1991).
- [7] GILBARG, D., TRUDINGER, N., *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [8] LATORRE, M., OLIVA, F., PETITTA, F., SEGURA DE LEÓN, S., *The Dirichlet problem for the 1-Laplacian with a general singular term and L^1 -data*, Nonlinearity, Vol. 34, no. 3, 1791–1816 (2021).

- [9] LERAY, J., LIONS, J. L. *Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques nonlinéaires par les méthodes de Minty-Browder*, Bull. Soc. Math. France, Vol. 93, 97-107 (1965).
- [10] LIONS, P. L., *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. I*, Rev. Mat. Iberoamericana, Vol. 1, no. 1, 145–201 (1985).
- [11] ORTIZ CHATA, J. C., PIMENTA, M. T. O., SEGURA DE LEÓN, S., *Existence of solutions to a 1-Laplacian problem with a concave-convex nonlinearity*, J. Math. Anal. Appl., Vol. 525, no. 2, Paper No. 127149, 25 pp (2023).
- [12] ZHIKOV, V.V., *Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., Vol. 50, no. 4, 675–710 (1986).