

ROBERTO CAMPOS LEONI

GRÁFICO DE HOTELLING COM ESQUEMAS ESPECIAIS DE AMOSTRAGEM
PARA O MONITORAMENTO DE PROCESSOS BIVARIADOS
AUTOCORRELACIONADOS

Tese apresentada à Faculdade de
Engenharia do Campus de Guaratinguetá,
Universidade Estadual Paulista, para a
obtenção do título de Doutor em Ciências
na área de Gestão e Otimização.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Marcela Aparecida Guerreiro Machado

Coorientador: Prof. Dr. Antonio Fernando Branco Costa

Guaratinguetá
2015

L585g Leoni, Roberto Campos
Gráfico de Hotelling com esquemas especiais de amostragem para o
monitoramento de processos bivariados autocorrelacionados / Roberto
Campos Leoni - Guaratinguetá, 2015
140 f. : il.

Bibliografia: f. 118-124

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de
Engenharia de Guaratinguetá, 2015.

Orientadora: Prof^a Dr^a Marcela Aparecida Guerreiro Machado
Coorientador: Prof. Dr. Antonio Fernando Branco Costa

1. Amostragem (Estatística) 2. Autocorrelação (Estatística) I. Título

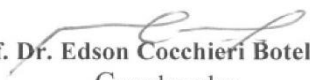
CDU 519.243(043)

ROBERTO CAMPOS LEONI

**ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“DOUTOR EM CIÊNCIAS”**

**PROGRAMA: ENGENHARIA MECÂNICA
ÁREA: GESTÃO E OTIMIZAÇÃO**

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

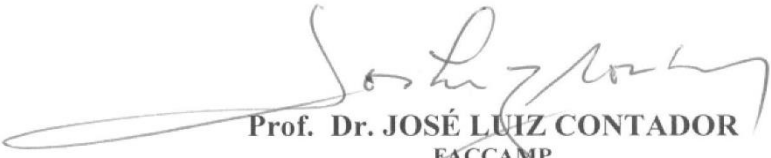

Prof. Dr. Edson Cocchieri Botelho
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


**Profª. Dr.ª MARCELA APARECIDA GUERREIRO
MACHADO DE FREITAS**
Orientadora / UNESP/FEG


Prof. Dr. FERNANDO AUGUSTO SILVA MARINS
UNESP/FEG


Prof. Dr. ANEIRSON FRANCISCO DA SILVA
UNESP/FEG


Prof. Dr. JOSÉ LUIZ CONTADOR
FACCAMP


Prof. Dr. BRUNO CHAVES FRANCO

Maio de 2015

DADOS CURRICULARES

ROBERTO CAMPOS LEONI

NASCIMENTO	15.03.1977 – RIO DE JANEIRO / RJ
FILIAÇÃO	Roberto Cândido Leoni Wanda Campos Leoni
1995/1999	Curso de Graduação em Estatística no IME – Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ.
2000	Curso de Extensão em Aplicações Complementares às Ciências Militares– Escola de Administração do Exército – EsAEx – BA.
2003/2004	Curso de Pós-Graduação em Matemática e Estatística na Universidade Federal de Lavras – UFLA – MG.
2010	Curso de Pós-Graduação em Ciências Militares – Escola de Aperfeiçoamento de Oficiais – EsAO – RJ.
2009/2011	Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, nível de Mestrado, na Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista - UNESP.
2011/2015	Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, nível de Doutorado, na Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista - UNESP.

DEDICATÓRIA

À minha esposa Shirley e filha Maria Clara.
Dedico a vocês este trabalho como forma de compensar
um pouco das horas que me afastei do vosso convívio.

AGRADECIMENTOS

À Professora Dra. Marcela Aparecida Guerreiro Machado pela orientação.

Ao Professor Dr. Antônio Fernando Branco Costa, a quem devoto a mais sincera e efusiva admiração.

À minha mãe e pai que com muita luta nunca desistiram de minha educação escolar, sempre me lembrarei da coragem, amor e firmeza.

A Nossa Senhora Aparecida. Eu vos consagro os meus trabalhos, sofrimentos, alegrias e toda a minha vida.

Aos amigos da AMAN: Cap Túlio, Cel Ben Hur, Cel Amauri Harvey e Cap Carvalho pelo apoio no trabalho.

Aos professores da FEG-UNESP e aos funcionários do Departamento de Produção que com muita dedicação colaboram com as atividades de ensino e apoio ao ensino.

Aos professores membros da banca, pelas críticas e sugestões que contribuíram para melhorar a apresentação e qualidade da pesquisa.

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, colaboraram para transformar este trabalho em realidade.

LEONI, R. C. **Gráfico de Hotelling com esquemas especiais de amostragem para o monitoramento de processos bivariados autocorrelacionados**. 2015. 140p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.

RESUMO

A suposição mais importante para o emprego dos gráficos de controle é a de independência entre as medidas da característica de qualidade de um processo. A violação da hipótese de independência diminui o poder de detecção do gráfico de controle. Nesta tese, o gráfico T^2 de Hotelling é empregado para monitorar processos bivariados com observações da amostra representadas por um modelo autoregressivo multivariado de primeira ordem - VAR(1). Contrapondo a esse efeito negativo da falta de independência, são sugeridas duas estratégias de amostragem: (1) na estratégia de amostragem sistemática, as amostras são obtidas através da seleção de um elemento da linha de produção e, em seguida, pulam-se s elementos consecutivos antes de se selecionar o próximo; (2) na estratégia de amostragem composta, os elementos são selecionados de dois subgrupos racionais consecutivos para formar a amostra. O emprego dessas estratégias sempre melhoram o desempenho do gráfico, exceto quando apenas uma variável é afetada por uma causa especial e as observações desta variável não são autocorrelacionadas. Os ensaios realizados mostraram que se pular $s=1$ elemento com a estratégia sistemática, o número médio de amostras até o sinal (NMA) reduz em mais de 30%, em média. Se dois itens são pulados ($s=2$), esse número aumenta para 40%. Na estratégia de amostragem composta, observou-se uma redução média de 25% no NMA .

PALAVRAS-CHAVE: Gráfico de controle, Autocorrelação, Amostragem sistemática, Amostragem composta, T^2 de Hotelling.

LEONI, R. C. **Hotelling charts with special sampling schemes to monitor bivariate autocorrelated processes.** 2015. 140p. Thesis (Doctorate in Mechanical Engineering) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.

ABSTRACT

The most important of the assumptions made concerning control charts is that of independence of the quality characteristics observations. The violation of the independence assumption decreases the power of the control chart. In this thesis, is considered the T^2 control chart for bivariate samples of size n with observations modeled by a first order vector autoregressive model – VAR (1). To counteract the undesired effect of the autocorrelation two sampling strategies are applied: (1) the systematic sampling strategy, where the samples are obtained by selecting an element of the production line and skipping s consecutive elements before selecting the next one; (2) the mixed sampling strategy where the samples elements are selected from the two consecutive rational subgroups. The sampling strategies always improves the chart's performance, except when only one variable is affected by the assignable cause and the observations of this variable are not autocorrelated. If only one element is skipped, the average run length (ARL) reduces in more than 30%, on average. If two elements are skipped, this number increases to 40%. With the mixed sample, the average reduction is 25% in the ARL.

KEYWORDS: Control chart, Autocorrelation, s -skip sampling, Mixed sampling, Hotelling T^2 chart

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Artigos que compõem o referencial teórico da tese.	22
Figura 2. Fator de impacto e quantidade de artigos relevantes por periódico.	22
Figura 3. Etapas da pesquisa.	27
Figura 4. Tanque com volume V e fluxos de material de entrada e saída.	31
Figura 5. Correlação entre valores sucessivos de x_t	32
Figura 6. Um pêndulo simples em movimento.	33
Figura 7. Movimento harmônico de um pêndulo em função do tempo.	34
Figura 8. Representação gráfica dos modelos (21) e (23).	39
Figura 9. Critério de informação AIC, HQ, SC e FPE.	47
Figura 10. Resíduos versus valores ajustados e correlograma da variável x	48
Figura 11. Resíduos versus valores ajustados e correlograma da variável y	48
Figura 12. Coeficientes estimados para o modelo VAR(1).	49
Figura 13. Teste de <i>Portmanteau</i> e <i>Jarque-Bera</i>	49
Figura 14. Função densidade de probabilidade da distribuição normal bivariada e gráfico de contorno ($\rho = 0,7$).	54
Figura 15. Elipse de confiança processo de fabricação de pinos ($\alpha=0,05$).	57
Figura 16. Elipse de confiança e limites de controle de Shewhart do processo de fabricação de pinos ($\alpha=0,05$).	58
Figura 17. Gráfico de controle T^2 de Hotelling do processo de fabricação de pinos ($\alpha=0,05$). Fonte: o próprio autor.	58
Figura 18. Elipse de controle e gráfico de controle T^2 de Hotelling do processo de fabricação de pinos na Fase II.	59
Figura 19. Diagrama de dispersão das variáveis: diâmetro interno, espessura e comprimento.	61
Figura 20. Gráfico de controle T^2 de Hotelling do processo de fabricação de tubos de fibra de carbono (Fase I).	62
Figura 21. Gráfico de controle T^2 de Hotelling do processo de fabricação de tubos de fibra de carbono (Fase II).	62
Figura 22. Decomposição Mason, Tracy e Young (1995) calculada com o software <i>R</i>	64

Figura 23. Elipses $a = b = 0; a = b = 0,9; \rho = 0,7$.	67
Figura 24. Elipses: $a = b \in 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; \rho = 0,3$.	69
Figura 25. Elipses: $a = b \in 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; \rho = 0,7$.	69
Figura 26. Elipses: $a = b \in 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; \rho = 0,9$.	70
Figura 27. Elipse: $a=b=0$ e $\rho = 0,7$.	72
Figura 28. Elipse: $a=b=0,7$ e $\rho = 0,7$.	72
Figura 29. Gráficos T^2 de Hotelling; $\delta = (1,0;1,0)^T$.	73
Figura 30. Gráficos T^2 de Hotelling; $\delta = (2,0;2,0)^T$.	74
Figura 31. Gráficos T^2 de Hotelling; $\delta = (3,0;3,0)^T$.	74
Figura 32. Valores do NMA ($\delta_1=\delta_2=1,0; a=b; n \in \{1;2;5\}$).	81
Figura 33. Valores do NMA ($\delta_1=0; \delta_2=1,0; a=0; b \neq 0; n \in \{1;2;5\}$).	81
Figura 34. Valores do NMA ($\delta_1=1,0; \delta_2=0,75; a=0; b \neq 0; n \in \{2;5\}$).	81
Figura 35. Gráfico de controle de T^2 para o diâmetro interno (X) e espessura (Y).	86
Figura 36. NMAs dos gráficos de T^2 e $SU \bar{X}$; $a=0,5; b=0,5; \delta_X=\delta_Y \in (0,5;1,0;1,5)$.	90
Figura 37. NMAs dos gráficos de T^2 e $SU \bar{X}$; $a=0,5; b=0,5; \delta_X=0; \delta_Y \in (0,5;1,0;1,5)$.	90
Figura 38. NMAs dos gráficos de T^2 e $SU \bar{X}$; $a=0,0; b=0,5; \delta_X \in (0,5;1,0;1,5); \delta_Y=0$.	91
Figura 39. NMAs dos gráficos de T^2 e $SU \bar{X}$; $a=0,0; b=0,5; \delta_X=0; \delta_Y \in (0,5;1,0;1,5)$.	91
Figura 40. NMAs do gráfico $SU \bar{X}$; $a=0,0; b=0,5; \delta_X=\delta_Y \in (0,5;1,0;1,5)$.	92
Figura 41. NMAs do gráfico $SU \bar{X}$; $a=0,0; b=0,7; \delta_X=\delta_Y \in (0,5;1,0;1,5)$.	92
Figura 42. NMAs do gráfico $SU \bar{X}$; $a=0,0; b=0,5; \delta_X \in (0,5;1,0;1,5); \delta_Y=0$.	92
Figura 43. NMAs do gráfico $SU \bar{X}$; $a=0,0; b=0,7; \delta_X \in (0,5;1,0;1,5); \delta_Y=0$.	93
Figura 44. NMAs do gráfico $SU \bar{X}$; $a=0,0; b=0,5; \delta_X=0; \delta_Y \in (0,5;1,0;1,5)$.	93

Figura 45. NMAs do gráfico SU $\bar{X}$; $a=0,0$; $b=0,7$; $\delta_X=0$; $\delta_Y \in (0,5;1,0;1,5)$	93
Figura 46. NMAs do gráfico SU $\bar{X}$; $a=0,5$; $b=0,5$; $\delta_X=\delta_Y \in (0,5;1,0;1,5)$	94
Figura 47. NMAs do gráfico SU $\bar{X}$; $a=0,7$; $b=0,7$; $\delta_X=\delta_Y \in (0,5;1,0;1,5)$	94
Figura 48. NMAs do gráfico SU $\bar{X}$; $a=0,5$; $b=0,5$; $\delta_X \in (0,5,1,0,1,5)$, $\delta_Y=0$	94
Figura 49. NMAs do gráfico SU $\bar{X}$; $a=0,7$; $b=0,7$; $\delta_X \in (0,5,1,0,1,5)$, $\delta_Y=0$	95
Figura 50. NMA do gráfico de T_2 ; $a=0,5$; $b=0,5$; $\delta_1=0$, $\delta_2 \in (0,75;1,00;1,25;1,50)$	101
Figura 51. NMA do gráfico de T_2 ; $a=0,5$; $b=0,5$; $\delta_1=\delta_2 \in (0,75;1,00;1,25;1,50)$	101
Figura 52. NMA do gráfico de T_2 ; $a=0$; $b=0,5$; $\delta_1=0$; $\delta_2 \in (0,75;1,00;1,25;1,50)$. ..	102
Figura 53. NMA do gráfico de T_2 ; $a=0$; $b=0,7$; $\delta_1=0$; $\delta_2 \in (0,75;1,00;1,25;1,50)$. ..	103
Figura 54. Parâmetro de não centralidade; $a=b \in (0,2; 0,5; 0,7)$, $\delta_1=\delta_2 \in (0,5; 1,0)$	104
Figura 55. Parâmetro de não centralidade; $a=b \in (0,2; 0,5; 0,7)$, $\delta_1 \in (0,5; 1,0)$, $\delta_2=0,0$	105
Figura 56. Parâmetro de não centralidade; $a \in (0,2; 0,5; 0,7)$, $b=0$, $\delta_1 \in (0,5; 1,0)$, $\delta_2=0,0$	105
Figura 57. Parâmetro de não centralidade; $a=0$, $b \in (0,2; 0,5; 0,7)$, $\delta_1 \in (0,5; 1,0)$, $\delta_2=0,0$	106
Figura 58. Amostra composta.....	108
Figura 58. NMAs do gráfico de controle T_2 de Hotelling; $a=0,7$; $b=0,7$; $\rho \in (0; 0,3; 0,7)$	115
Figura 59. NMAs do gráfico de controle T_2 de Hotelling; $a=0,3$; $b=0,3$; $\rho \in (0; 0,3; 0,7)$	115
Figura 60. NMAs do gráfico de controle T_2 de Hotelling; $a=0$; $b=0,5$; $\rho \in (0; 0,3; 0,7)$	116

LISTA DE QUADROS

Quadro 1. Referências que se baseiam no modelo AR(1).	36
Quadro 2. Referências que se baseiam em modelos multivariados.	42

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Comprimentos dos semieixos das elipses.....	68
Tabela 2. Elementos de $\Gamma_X - 1; a \text{ e } b \in (0;0,5;0,7); \rho \in (0;0,7)$	77
Tabela 3. Valores do NMA - Gráfico de T_2 , $\delta_1 = \delta_2$	78
Tabela 4. Valores do NMA - Gráfico de T_2 , δ_1 ou $\delta_2 = 0$	79
Tabela 5. Valores do NMA - Gráfico de T_2 , $\delta_1 \neq \delta_2$	79
Tabela 6. Valores do NMA do gráfico de T_2 ; $\rho = 0,0$	82
Tabela 7. Valores do NMA do gráfico de T_2 ; $\rho = 0,3$	82
Tabela 8. Valores do NMA do gráfico de T_2 ; $\rho = 0,7$	83
Tabela 9. Desempenho do gráfico T_2 de Hotelling (subgrupos racionais).....	84
Tabela 10. Amostra preliminar.	85
Tabela 11. Médias amostrais e valores de T_2 com os dados do processo de perfuração.	86
Tabela 12. Elementos da matriz Γ_X^{-1} ; $a \text{ e } b \in (0; 0,2; 0,5; 0,7); \rho \in (0;0,7)$	97
Tabela 13. Valores do NMA - Gráfico de T_2 , $\delta_1 = \delta_2$	98
Tabela 14. Valores do NMA - Gráfico de T_2 , δ_1 ou $\delta_2 = 0$	99
Tabela 15. Valores do NMA - Gráfico de T_2 , $\delta_1 \neq \delta_2$	100
Tabela 16. Desempenho do gráfico T_2 de Hotelling (amostragem sistemática)..	103
Tabela 17. NMA do gráfico de T_2	107
Tabela 18. NMAs do gráfico de controle T_2 de Hotelling; $\rho = 0,0$	113
Tabela 19. NMAs do gráfico de controle T_2 de Hotelling; $\rho = 0,3$	113
Tabela 20. NMAs do gráfico de controle T_2 de Hotelling; $\rho = 0,7$	114
Tabela 21. Desempenho do gráfico T_2 de Hotelling (amostragem composta).....	116
Tabela F1. Valores de (a^*, b^*) em que $\lambda^2(1) = \lambda^2(n)$	136
Tabela G1. NMA dos gráficos SU $\bar{X}$ e T^2 ; $\delta_1 = \delta_2$	137
Tabela G2. NMA dos gráficos SU $\bar{X}$ e T^2 ; δ_1 ou $\delta_2 = 0$	137
Tabela G3. NMA dos gráficos SU $\bar{X}$ e T^2 ; $\delta_1 \neq \delta_2$	138

Tabela G4. NMA do gráfico SU $\bar{X}$; $\delta_1 = \delta_2$.....	138
Tabela G5. NMA do gráfico SU $\bar{X}$; δ_1 ou $\delta_2 = 0$.	139
Tabela G6. NMA do gráfico SU $\bar{X}$; $\delta_1 \neq \delta_2$.....	139

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<i>AR(1)</i>	Modelo autoregressivo de primeira ordem
<i>ARMA</i>	Autoregressivo média móvel
<i>ARMA(1,1)</i>	Modelo autoregressivo e de médias móveis de primeira ordem
<i>CEP</i>	Controle Estatístico do Processo
<i>CUSUM</i>	<i>Cumulative sum</i>
<i>EWMA</i>	<i>Exponentially weighted moving average</i>
<i>LC</i>	Limites de Controle
<i>LIC</i>	Limite inferior de controle
<i>LSC</i>	Limite superior de controle
<i>MCUSUM</i>	<i>Multivariate Cumulative Sum</i>
<i>MEWMA</i>	<i>Multivariate Exponentially Weighted Moving Average</i>
<i>NMA</i>	Número médio de amostras até o sinal
<i>NMA₀</i>	Número médio de amostras até o sinal durante o período em controle
<i>STD</i>	Estratégia padrão com subgrupo racional
<i>MS</i>	Estratégia de amostragem composta
<i>s-skip</i>	Estratégia de amostragem sistemática

LISTA DE SÍMBOLOS

T_t^2	Estatística de monitoramento do gráfico de Hotelling
$\bar{X}$	Média amostral
μ_0	Valor alvo da média do processo
h	Intervalo de tempo entre retirada de amostras
$E(.)$	Operador de valor esperado
$V(.)$	Operador de variância
X	Medida da característica da qualidade
α	Probabilidade de alarme falso – Erro Tipo I
β	Probabilidade de não detecção – Erro Tipo II
δ	Magnitude do deslocamento da média
e	Erro aleatório
λ^2	Parâmetro de não centralidade
μ	Média do processo
ϕ	Coefficiente de autocorrelação
$\sigma_{\bar{X}}^2$	Variância das médias
σ_X^2	Variância de X
ρ	Correlação
$\mathbf{X}$	Vetor com medidas da característica de qualidade
$\boldsymbol{\mu}_0$	Vetor de médias
$\boldsymbol{\Phi}$	Matriz com parâmetros autoregressivos
$\mathbf{e}$	Vetor com erros aleatórios.
Σ_X	Matriz de variância-covariância de um processo sem autocorrelação
Σ_e	Matriz de variância-covariância dos erros
$\otimes$	Produto de Kronecker
VAR (k)	Modelo vetor autoregressivo de ordem k
Γ	Matriz de variância-covariância
$\Gamma_{\bar{X}}$	Matriz de variância-covariância do vetor de médias amostrais
$\Gamma_{\bar{\mathbf{M}}}$	Matriz de variância-covariância do vetor de médias amostrais com amostragem composta

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	19
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS E CONTEXTUALIZAÇÃO DO PROBLEMA.....	19
1.2 OBJETIVOS DA PESQUISA	21
1.3 RELEVÂNCIA DO TEMA, JUSTIFICATIVAS E CONTRIBUIÇÕES ORIGINAIS DA TESE.....	21
1.4 MÉTODO DA PESQUISA	26
1.5 DELIMITAÇÕES DA PESQUISA.....	28
1.6 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	29
2. MODELOS QUE DESCREVEM AS CARACTERÍSTICAS DE QUALIDADE DE UM PROCESSO AUTOCORRELACIONADO	31
2.1 COMPREENDENDO A AUTOCORRELAÇÃO	31
2.2 MODELO UNIVARIADO.....	34
2.3 MODELO MULTIVARIADO	37
2.4 IDENTIFICAÇÃO, ESTIMATIVA E DIAGNÓSTICO DO MODELO	43
2.4.1 Identificação, estimativa e diagnóstico do modelo VAR(k)	44
3. GRÁFICOS DE CONTROLE MULTIVARIADOS	50
3.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS	50
3.1.1 Causas especiais e causas aleatórias de variação.....	50
3.1.2 Subgrupos racionais	50
3.1.3 Estatística de desempenho do gráfico de controle	51
3.1.4 Distribuição normal multivariada	53
3.2 GRÁFICOS DE CONTROLE PARA O MONITORAMENTO DO VETOR DE MÉDIAS	55
3.3 EFEITO DA AUTOCORRELAÇÃO EM PROCESSOS BIVARIADOS: UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA	64
3.3.1 Avaliação gráfica do efeito da autocorrelação com o processo em controle.....	66

3.3.2	Avaliação gráfica do efeito da autocorrelação com o processo fora de controle.....	70
4.	EFEITO DA AUTOCORRELAÇÃO NO DESEMPENHO DO GRÁFICO DE CONTROLE USANDO SUBGRUPOS RACIONAIS	75
4.1	DESEMPENHO DO GRÁFICO T_2 DE HOTELLING	75
4.2	EXEMPLO	84
4.3	DESEMPENHO DOS GRÁFICOS DE CONTROLE SIMULTÂNEOS UNIVARIADOS DE $\bar{X}$	86
4.3.1	Gráficos SU $\bar{X}$	87
4.3.2	Desempenho dos gráficos SU $\bar{X}$	89
5.	ESTRATÉGIA DE AMOSTRAGEM SISTEMÁTICA EM PROCESSOS AUTOCORRELACIONADOS	96
5.1	DESEMPENHO DO GRÁFICO T_2 DE HOTELLING SOB A ESTRATÉGIA DE AMOSTRAGEM SISTEMÁTICA.....	98
5.2	ESCOLHA DO PARÂMETRO S	104
6.	ESTRATÉGIA DE AMOSTRAGEM COMPOSTA EM PROCESSOS AUTOCORRELACIONADOS	108
6.1	PROPRIEDADES ESTATÍSTICAS DO GRÁFICO T_2 DE HOTELLING COM AMOSTRAS COMPOSTAS.....	110
6.2	DESEMPENHO DO GRÁFICO T_2 DE HOTELLING SOB A ESTRATÉGIA DE AMOSTRAGEM COMPOSTA	112
7.	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS.....	118
7.1	VERIFICAÇÃO DOS OBJETIVOS	118
7.2	CONCLUSÕES	119
7.3	SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS	120
	REFERÊNCIAS	121
	APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÃO DA EQUAÇÃO QUE REPRESENTA O FLUXO DE MATERIAL DE ENTRADA E SAÍDA DE UM TANQUE.....	129
	APÊNDICE B – PROCEDIMENTOS PARA CONSTRUÇÃO DO MODELO ATRAVÉS DO SOFTWARE R.	131
	APÊNDICE C – BANCO DE DADOS DOWEL1 E DOWEL2.....	132

APÊNDICE D – BANCO DE DADOS <i>CARBON1 E CARBON2</i>	133
APÊNDICE E – MATRIZ DE VARIÂNCIA-COVARIÂNCIA DE UM VETOR DE MÉDIAS AMOSTRAIS.	135
APÊNDICE F – VALORES DE a^* E b^* PARA OS QUAIS $\lambda^2(1) = \lambda^2(n)$	136
APÊNDICE G – NMA DOS GRÁFICOS SU $\bar{X}$ E T^2	137
APÊNDICE H – MATRIZ DE VARIÂNCIA-COVARIÂNCIA DE UM VETOR DE MÉDIAS AMOSTRAIS CONSIDERANDO A ESTRATÉGIA DE AMOSTRAGEM SISTEMÁTICA.	140

1. INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS E CONTEXTUALIZAÇÃO DO PROBLEMA

Métodos estatísticos desempenham um papel central no monitoramento da variabilidade de características de qualidade relacionadas a processos de manufatura ou serviços, quando se deseja que seja feita de forma econômica.

Na década de 30, Shewhart (1931) lançou as bases para emprego dos gráficos de controle e, ainda naquela época, reconheceu a necessidade de monitorar processos considerando o controle multivariado.

Os gráficos de controle são uma das técnicas principais do controle estatístico de processos (CEP), e seu uso sistemático auxilia na redução da variabilidade e na melhoria do desempenho e manutenção da eficiência de processos de produção.

Quando os gráficos de controle foram criados, destinavam-se à indústria de partes discretas e não havia praticamente nenhum grau de automação (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005; MONTGOMERY, 2009).

Uma das hipóteses básicas para uso de gráficos de controle é a independência entre observações ao longo do tempo. Quando essa hipótese é violada, tem-se um processo com observações autocorrelacionadas. Processos contínuos e por batelada são extremamente frequentes na indústria química e metalúrgica. Tais processos raramente produzem observações independentes (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005).

A violação da hipótese de independência não se restringe a processos contínuos ou por batelada. Processos discretos altamente automatizados também costumam apresentar observações autocorrelacionadas (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005).

A hipótese de independência entre as observações de uma variável pode ser violada pelas altas taxas de amostragem empregadas na seleção de elementos que compõem a amostra segundo o instante de fabricação, ou seja, quando as medidas das

observações são realizadas em um curto espaço de tempo (KIM; JITPITAKLERT; SUKCHOTRAT, 2010).

Na indústria há exemplos típicos de sistemas produtivos que são instrumentados com sensores, permitindo medir as características de qualidade com maior frequência e, conseqüentemente, uma maior quantidade de dados é disponibilizada para análise em curto espaço de tempo. Esses processos apresentam variáveis cujas observações são autocorrelacionadas (KOURTI; MACGREGOR, 1995).

Pan e Jarrett (2011) descrevem alguns desses processos que podem apresentar observações autocorrelacionadas. Por exemplo, na preparação do composto químico dióxido de silício, principal matéria prima na produção de vidros, é preciso monitorar características de qualidade autocorrelacionadas, tais como: temperatura e pressão. A autocorrelação também pode ser observada no monitoramento do setor de serviços, para maiores detalhes e outros exemplos veja Pan e Jarrett (2011).

A dependência em série entre observações tem um sério impacto sobre o desempenho dos gráficos de controle, pois reduz a sensibilidade para detectar causas especiais presentes no processo (FRANCO et al., 2013). Com a violação da hipótese de independência, tem-se um problema de pesquisa: como a autocorrelação afeta as propriedades dos gráficos de controle e, conseqüentemente, o desempenho?

Portanto, pretende-se verificar nesta tese algumas questões:

- Qual é o efeito da autocorrelação no desempenho do gráfico de controle T^2 de Hotelling?
- Qual é o efeito da autocorrelação no desempenho de dois gráficos simultâneos univariados para monitorar as médias?
- Como o uso de diferentes estratégias de amostragens como ação pode minimizar o problema da autocorrelação no gráfico de controle T^2 de Hotelling?

1.2 OBJETIVOS DA PESQUISA

O objetivo geral desta tese foi melhorar o desempenho do gráfico de controle T^2 de Hotelling em processos bivariados que apresentem observações autocorrelacionadas.

Como objetivos específicos, teve-se:

- Desenvolver as matrizes de variância-covariância da estatística de monitoramento do gráfico T^2 de Hotelling considerando diferentes estratégias de amostragem.
- Avaliar o efeito da autocorrelação no desempenho do gráfico de controle T^2 de Hotelling usando subgrupos racionais.
- Aplicar as estratégias de amostragem sistemática e composta para monitorar variáveis de processos bivariados cujas observações são autocorrelacionadas.
- Comparar o desempenho do gráfico de controle T^2 de Hotelling usando subgrupos racionais com as estratégias de amostragem sistemática e composta.
- Avaliar o efeito da autocorrelação no desempenho de dois gráficos simultâneos univariados para monitorar as médias ($SU \bar{X}$).

1.3 RELEVÂNCIA DO TEMA, JUSTIFICATIVAS E CONTRIBUIÇÕES ORIGINAIS DA TESE

Para compreensão do problema da pesquisa e composição do referencial teórico desta tese, foram identificados trabalhos relacionados ao tema autocorrelação em bases de dados referenciais. Foram usadas as palavras chaves: *auto correlated*, *autocorrelation*, *autoregressive*, *correlated data*, *correlation*, *first order autoregressive models*, *multivariate first order autoregressive models*, *multivariate chart* e *Hotelling T^2 chart*. A Figura 1 mostra a frequência de artigos citados nesta tese de acordo com o ano em que foram publicados. Observa-se que a partir do ano de 2002 começaram a surgir, de forma mais regular, artigos relacionados com o tema autocorrelação em processos com mais de uma variável.

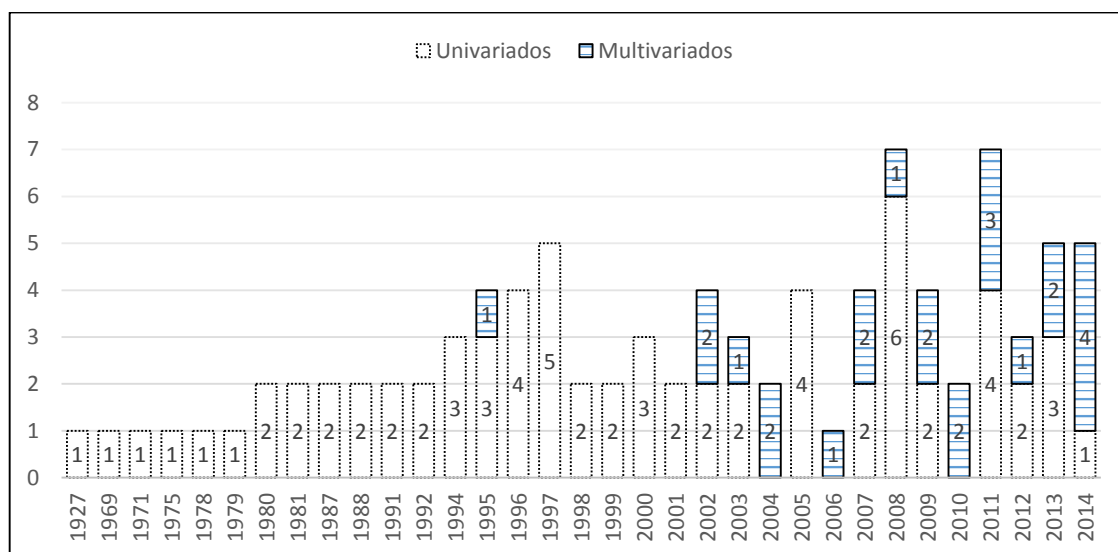


Figura 1. Artigos que compõem o referencial teórico da tese.

Fonte: o próprio autor.

Algumas referências se destacam na composição desta tese. A Figura 2 ilustra o fator de impacto e a quantidade de artigos mais relevantes desta tese por periódico. Verifica-se uma crescente importância em relação ao tema autocorrelação.

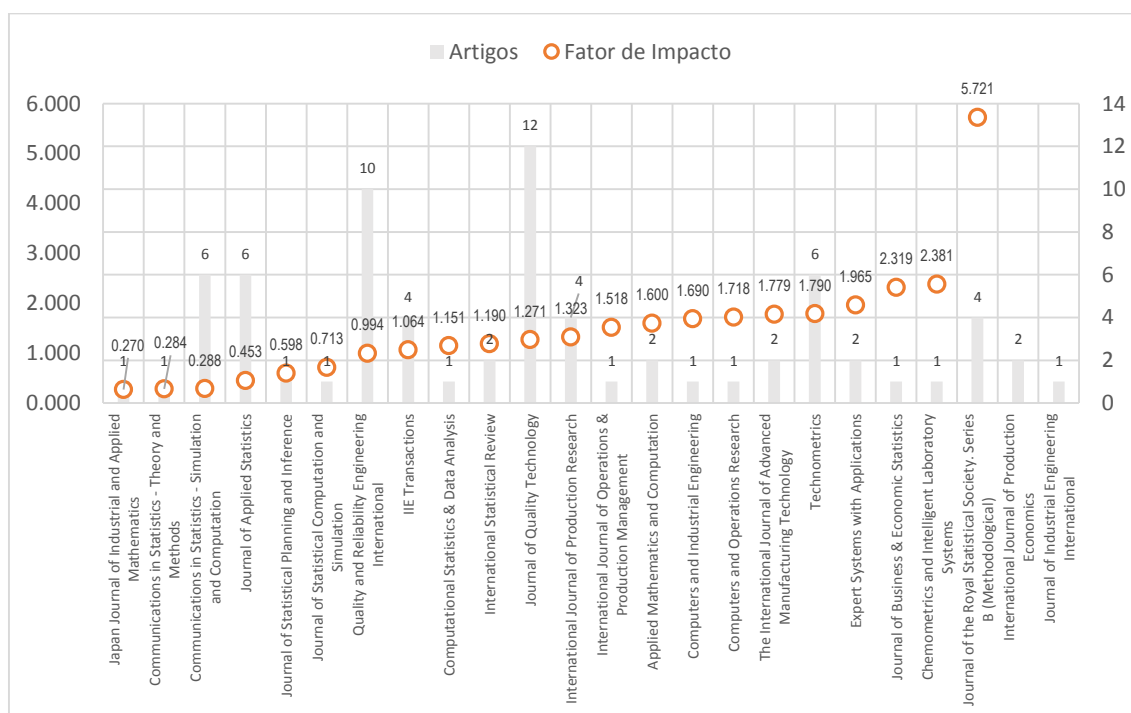


Figura 2. Fator de impacto e quantidade de artigos relevantes por periódico.

Fonte: o próprio autor.

A questão da autocorrelação em processos univariados, aqueles que apresentam apenas uma característica de qualidade sendo monitorada, foi previamente discutida por

diversos autores a partir da década de 90 (ALWAN; RADSON, 1992; ALWAN; ROBERTS, 1988; BAGSHAW; JOHNSON, 1975; MONTGOMERY; MASTRANGELO, 1991; WARDELL; MOSKOWITZ; PLANTE, 1994; ZHANG, 1998).

Duas soluções gerais para o problema surgiram na literatura. A primeira solução se refere ao ajuste dos limites de controle do gráfico levando em consideração a autocorrelação na estimativa do desvio padrão do processo. A segunda solução está relacionada com o ajuste de um modelo de série temporal aos dados e posterior uso dos resíduos gerados com o modelo para monitorar a característica de qualidade do processo.

Contudo, os gráficos de Shewhart baseados nos resíduos não apresentam as mesmas propriedades que os dados originais apresentam quando são independentes. Utilizando-se os resíduos, há uma maior probabilidade de detectar uma causa especial na primeira amostra após a mudança no processo, contudo, a capacidade de detecção a partir da primeira amostra depende da estrutura de autocorrelação e, dessa forma, pode provocar excessivo atraso na detecção de uma mudança no processo (ZHANG, 1997).

Há, no entanto, processos em que é necessário monitorar mais de uma característica de qualidade. O uso de vários gráficos univariados em processos que requer o controle simultâneo de várias características de qualidade não é aconselhado na prática, pois há aumento do erro tipo I, ou seja, considerar um processo em controle quando na verdade o mesmo encontra-se fora de controle (MACGREGOR, 1997; MONTGOMERY, 2009).

Assim o emprego de gráficos de controle univariados para monitorar várias características de qualidade não é tão eficiente quanto o emprego de gráficos de controle multivariados. Estes gráficos são mais adequados para monitorar processos com duas ou mais características de qualidade.

Os gráficos de controle multivariados tradicionais são: o gráfico de controle T^2 de Hotelling (HOTELLING, 1947), o gráfico de controle MCUSUM (*multivariate cumulative sum*) (CROSIER, 1988) e o gráfico de controle MEWMA (*multivariate exponentially weighted moving average*) (LOWRY et al., 1992). Uma ampla revisão

sobre o emprego de gráficos de controle multivariados é apresentada em Bersimis, Psarakis e Panaretos (2007) e Kourti (2005).

A preocupação relacionada com o impacto da autocorrelação nos dados se estende também ao caso multivariado. Um pressuposto importante para o desempenho desejado do gráfico T^2 de Hotelling é que os dados sejam independentes ao longo do tempo. No entanto, na realidade, dados coletados ao longo do tempo podem exibir certo grau de autocorrelação. É de se esperar que os gráficos de controle multivariados que foram desenvolvidos assumindo observações independentes sejam afetados pela violação deste pressuposto.

Muitos pesquisadores têm estudado os efeitos da autocorrelação no desempenho dos gráficos de controle. Alguns propuseram soluções para melhorar a sensibilidade do gráfico de controle na presença de dados autocorrelacionados, porém, a principal conclusão é que não há uma solução ótima (única) para tratar este problema, sendo este problema digno de investigação (HUANG; BISGAARD; XU, 2013; HUANG; XU; BISGAARD, 2013; HWARNG; WANG, 2010; KALGONDA; KULKARNI, 2004; KIM; JITPITAKLERT; SUKCHOTRAT, 2010; NIAKI; DAVOODI, 2009). Uma revisão detalhada da literatura sobre gráficos para dados univariados e multivariados autocorrelacionados pode ser encontrada em Psarakis e Papaleonida (2007).

Dependendo do grau da autocorrelação, o desempenho de um gráfico de controle pode ser seriamente afetado. Para reduzir o efeito indesejado de autocorrelação no desempenho do gráfico de $\bar{X}$, Costa e Castagliola (2011) propuseram uma estratégia de amostragem denominada *s-skip*. Esta estratégia consiste em selecionar de forma sistemática os elementos da linha de produção que constituirão a amostra. Esta técnica também é conhecida como amostragem sistemática (BOLFARINE; BUSSAB, 2007). Os resultados apresentados por Costa e Castagliola (2011) indicam que em processos univariados o efeito indesejado da autocorrelação pode ser reduzido através da formação de amostras com itens não vizinhos de acordo com a sequência em que foram produzidos.

Mais recentemente, Franco et al. (2014) realizaram o projeto estatístico e econômico do gráfico de controle de $\bar{X}$ em processos com observações autoregressivas de primeira ordem usando a estratégia *s-skip*. Comparações numéricas mostraram que a estratégia de amostragem padrão (amostras que se baseiam no conceito de subgrupos

racionais) nunca apresenta desempenho superior a estratégia de amostragem *s-skip* na presença de qualquer nível de autocorrelação.

Outra estratégia denominada amostragem composta (*mixed sampling*) foi apresentada por Franco et al. (2013). O emprego dessa estratégia consiste em formar as amostras com unidades selecionadas a partir de dois subgrupos racionais vizinhos.

Análises realizadas por Franco et al. (2013) indicam melhor desempenho da amostra composta quando há altos níveis de autocorrelação em gráficos univariados. Os autores apontam que a escolha entre as técnicas deve ser guiada através dos níveis de autocorrelação, ou seja, quando a característica de qualidade apresenta baixo nível de autocorrelação, a amostragem *s-skip* deve ser preferida, caso contrário, deve-se dar preferência a estratégia de amostragem composta.

Levando-se em consideração a relevância do tema autocorrelação e o que há disponível na literatura, esta tese propõe uma extensão do emprego de duas estratégias de amostragem direcionadas a processos bivariados cujas características de qualidade sejam autocorrelacionadas. Essas estratégias são:

- Estratégia de amostragem composta que utiliza uma combinação das medidas de dois subgrupos racionais consecutivos no cálculo do vetor de médias amostrais.
- Estratégia de amostragem sistemática que emprega medidas de itens igualmente espaçados, segundo o instante em que são produzidos e retirados da linha de produção.

Além dessas contribuições, esta tese também apresenta:

- Extensão das propriedades estatísticas do gráfico T^2 de Hotelling para o caso bivariado em que as observações da amostra são autocorrelacionadas;
- Desenvolvimento analítico das matrizes de variância-covariância da estatística de monitoramento do gráfico T^2 de Hotelling para diferentes estratégias de amostragem: amostragem padrão, amostragem sistemática e amostragem composta;
- Extensão das propriedades estatísticas de dois gráficos de controle simultâneos univariados de $\bar{X}$ quando as observações da amostra são autocorrelacionadas.

As contribuições dessa tese geraram artigos que foram submetidos a periódicos internacionais com relevante fator de impacto, cujo *status* na data de defesa é fornecido a seguir:

- “*Simultaneous Univariate $\bar{X}$ Charts to Control Bivariate Processes with Autocorrelated Data*” - DOI: 10.1002/qre.1697, aceito para publicação no periódico *Quality and Reliability Engineering International* que possui fator de impacto 0,961 e classificação B1 de acordo com o Qualis – Capes.
- “*The effect of the autocorrelation on the performance of the T^2 chart*”, aceito para publicação no periódico *European Journal of Operational Research* que possui fator de impacto 1,843 e classificação A1 de acordo com o Qualis – Capes.
- “*The T^2 chart with mixed samples to control bivariate autocorrelated processes*”, aceito com revisão para publicação no periódico *International Journal of Production Research* que possui fator de impacto 1,323 e classificação A2 de acordo com o Qualis – Capes.
- “*The skipping strategy to reduce the effect of the autocorrelation on the T^2 chart’s performance*”, aceito para publicação no periódico *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* que possui fator de impacto 1,779 e classificação B1 de acordo com o Qualis - Capes.

1.4 MÉTODO DA PESQUISA

Seguindo uma abordagem quantitativa, o modelo básico que norteia a construção do método de pesquisa desta tese é o método de modelagem apresentado por Arenales et al. (2007). Utilizando-se técnicas analíticas, as variáveis que compõem o modelo da pesquisa (modelo que é uma abstração da realidade) foram manipuladas com o objetivo de melhorar os resultados já disponíveis no meio científico (MIGUEL et al., 2012).

Quanto aos objetivos, a presente pesquisa é classificada como axiomática normativa (BERTRAND; FRANSOO, 2002; MIGUEL et al., 2012). Esta tipologia tem como objetivos desenvolver normas, estratégias e ações para melhorar resultados disponíveis na literatura, encontrar solução ótima para novos problemas ou, ainda, comparar o desempenho de estratégias a respeito de um mesmo problema.

Para melhor ilustrar as etapas da pesquisa, a Figura 3 apresenta o método empregado desde a caracterização do problema até a avaliação dos resultados.

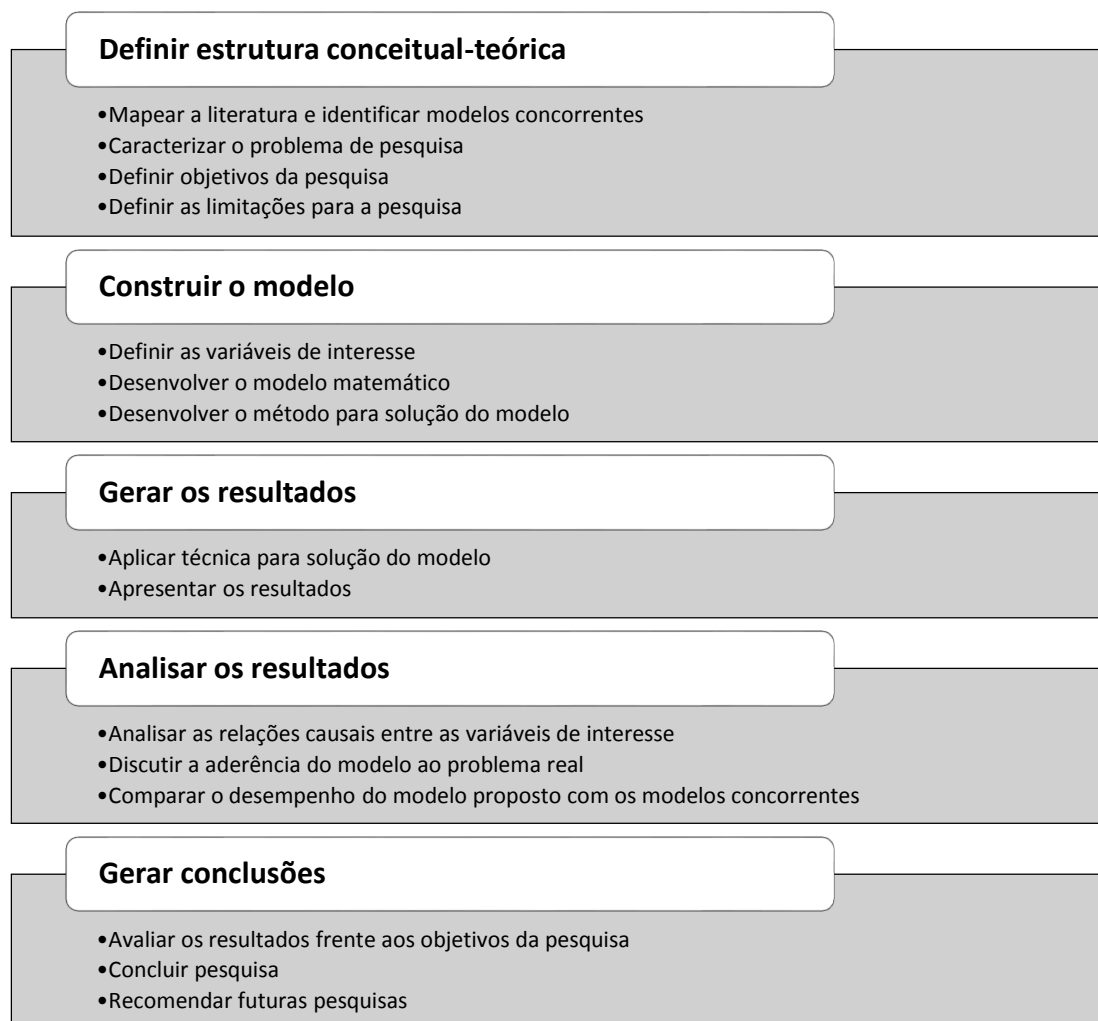


Figura 3. Etapas da pesquisa.
Fonte: o próprio autor.

Uma etapa fundamental no trabalho foi o desenvolvimento analítico do modelo que representa as matrizes de variância-covariância da estatística de monitoramento do gráfico T^2 de Hotelling.

A ideia básica para esse desenvolvimento é considerar a distribuição amostral do vetor de médias quando os dados são autocorrelacionados (ver Apêndice E). Para isso, é necessário considerar o modelo de autocorrelação que representa os dados em estudo. Escolheu-se o modelo estacionário vetor autoregressivo de primeira ordem– VAR (1).

Este modelo foi selecionado por ser amplamente utilizado para representar processos com variáveis correlacionadas e observações autocorrelacionadas.

Por meio do desenvolvimento analítico da matriz de variância-covariância é possível avaliar o real efeito da autocorrelação quando o gráfico T^2 de Hotelling é empregado.

E por fim, as estratégias de amostragem sistemática e composta são consideradas na construção da estatística de monitoramento do gráfico de T^2 . Procurou-se melhorar o desempenho do gráfico de controle T^2 de Hotelling através do uso das estratégias de amostragem, amenizando assim o efeito da autocorrelação.

1.5 DELIMITAÇÕES DA PESQUISA

Diversas linhas de pesquisa norteiam o desenvolvimento e aplicação de gráficos de controle podendo-se citar os gráficos de controle adaptativos, gráficos robustos, gráficos com regras especiais, gráficos baseados em componentes principais e gráficos com erro de medição nas variáveis (BERSIMIS; PSARAKIS; PANARETOS, 2007).

Nesta tese, investigou-se o efeito da autocorrelação em gráficos por variáveis, mais especificamente, aqueles relacionados ao controle do vetor de médias. Esses tipos de gráficos possuem forte apelo prático.

Duas fases distintas devem ser consideradas na construção de um gráfico de controle (WOODALL, 2000). Na primeira fase, espera-se que o processo esteja isento de causas especiais para que os parâmetros do gráfico sejam estimados. Na segunda fase, o gráfico de controle é utilizado para avaliar se o processo se mantém em controle estatístico. Dado que o processo está sob controle, esta tese analisa a aplicação de gráficos de controle a partir da segunda fase.

Os resultados apresentados são baseados no cenário em que as observações dentro dos subgrupos racionais são dependentes e essa dependência é representada por um modelo estacionário autoregressivo multivariado de primeira ordem – VAR (1). Este modelo é amplamente utilizado quando as variáveis de um processo são correlacionadas

e autocorrelacionadas. O capítulo 2 aborda detalhadamente este modelo e apresenta diversos trabalhos que se apoiam no modelo VAR (1).

Supõem-se, também, que o mecanismo gerador dos resíduos do modelo VAR (1) se ajustam a uma distribuição normal bivariada.

Apesar das delimitações aqui apresentadas, as mesmas não distanciam o problema investigado da realidade encontrada em processos industriais.

1.6 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

A tese está estruturada em mais seis capítulos.

O Capítulo 2 é dedicado a apresentação do conceito de autocorrelação, dos modelos utilizados para representar variáveis de processos que geram dados autocorrelacionados e como estes modelos podem ser identificados na prática.

O Capítulo 3 apresenta o gráfico de controle T^2 de Hotelling e uma avaliação do efeito da autocorrelação através de uma abordagem geométrica.

O Capítulo 4 apresenta um dos principais resultados teóricos desta tese, a dedução da matriz de variância-covariância ($\Gamma_{\bar{X}}$) do vetor de médias amostrais ($\bar{X}$). Esta matriz é necessária para calcular o poder de detecção do gráfico de controle T^2 de Hotelling. O Capítulo 4 também apresenta uma análise do efeito da autocorrelação quando subgrupos racionais são utilizados para calcular a estatística de monitoramento de T^2 ; apresenta as propriedades estatísticas de dois gráficos simultâneos univariados de $\bar{X}$ quando as características de qualidade apresentam autocorrelação e correlação e apresenta, por fim, uma análise do efeito da autocorrelação quando subgrupos racionais são utilizados em gráficos simultâneos univariados de $\bar{X}$.

Os Capítulos 5 e 6 apresentam duas estratégias de amostragem adaptadas ao gráfico de controle T^2 de Hotelling. A matriz de variância-covariância ($\Gamma_{\bar{X}}$) do vetor de médias amostrais ($\bar{X}$) foi deduzida analiticamente, considerando as estratégias propostas.

No Capítulo 7 estão as conclusões do estudo e sugestões para futuras pesquisas seguidas das referências bibliográficas citadas no texto e os Apêndices que tratam de:

Apêndice A: Apresenta a demonstração da equação que representa o fluxo de material de entrada e saída de um tanque.

Apêndice B: Apresenta os procedimentos para construção de um modelo com o software R.

Apêndice C: Apresenta o banco de dados *dowell* e *dowel2* do pacote *msqc* utilizado no software R.

Apêndice D: Apresenta o banco de dados *carbon1* e *carbon2* do pacote *msqc* utilizado no software R.

Apêndice E: Apresenta a matriz de variância-covariância de um vetor de médias amostrais para dados autocorrelacionados.

Apêndice F: Apresenta alguns resultados específicos, para os quais o gráfico de T^2 para observações individuais possui melhor desempenho que o gráfico de T^2 para amostras de tamanho n .

Apêndice G: Apresenta os *NMAs* dos Gráficos $SU \bar{X}$ e T^2 .

Apêndice H: Apresenta a matriz de variância-covariância de um vetor de médias amostrais para dados autocorrelacionados considerando a estratégia de amostragem sistemática.

2. MODELOS QUE DESCREVEM AS CARACTERÍSTICAS DE QUALIDADE DE UM PROCESSO AUTOCORRELACIONADO

Aqui são abordados o conceito de autocorrelação, os modelos que representam as características de qualidade de um processo cujas variáveis são autocorrelacionadas e, por fim, apresentam-se algumas técnicas para avaliar se o modelo é adequado para representar as características de qualidade de um processo.

2.1 COMPREENDENDO A AUTOCORRELAÇÃO

Montgomery (2009) descreve que basicamente todos os processos são regidos por elementos inerciais e quando o intervalo entre amostras se torna pequeno em relação a essas forças, as observações apresentam correlação ao longo do tempo. Como exemplo, uma demonstração analítica da autocorrelação pode ser representada por um sistema simples de um tanque com volume V e fluxos de material de entrada e saída.

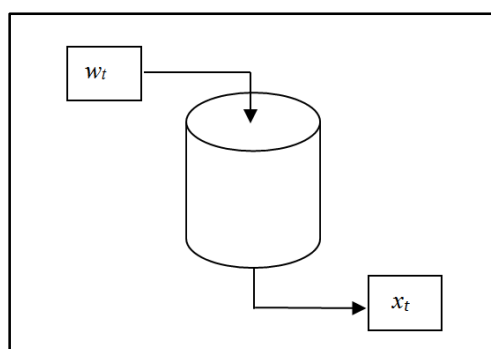


Figura 4. Tanque com volume V e fluxos de material de entrada e saída.
Fonte: Adaptado de Montgomery (2009).

A Figura 4 ilustra um tanque em que w_t e x_t representam a concentração de certo material nos fluxos de entrada e saída em um instante t . Admitindo-se homogeneidade dentro do tanque, a relação entre as concentrações de entrada e saída do tanque é dada por (MONTGOMERY, 2009):

$$x_t = w_t - T \frac{dx}{dt} \quad (1)$$

em que: $T=V/f$, V é o volume do tanque e f é a taxa do fluxo de material de entrada e saída.

Quando o fluxo de entrada apresenta uma variação w_0 tipo degrau no instante $t=0$, a concentração na saída pode ser modelada por:

$$x_t = w_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad (2)$$

Como na prática observa-se x_t em intervalos de tempo Δt pequenos e igualmente espaçados, nesse caso (veja a demonstração no Apêndice A):

$$x_t = x_{t-1} + (w_0 - x_{t-1}) \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{T}} \right) \quad (3)$$

$$x_t = aw_0 + (1-a)x_{t-1}$$

em que: $a = 1 - e^{-\frac{\Delta t}{T}}$

A concentração do fluxo de saída depende da concentração do fluxo de entrada (w_t) e do intervalo de amostragem (Δt). Admitindo-se que as observações de w_t sejam não correlacionadas, a autocorrelação em x_t será:

$$\rho = (1-a) = e^{-\frac{\Delta t}{T}} \quad (4)$$

Se $\Delta t \leq T$, as observações sobre a concentração de saída sempre serão correlacionadas entre si, entretanto, se Δt for muito maior que T , ρ tende a zero (ver Figura 5).

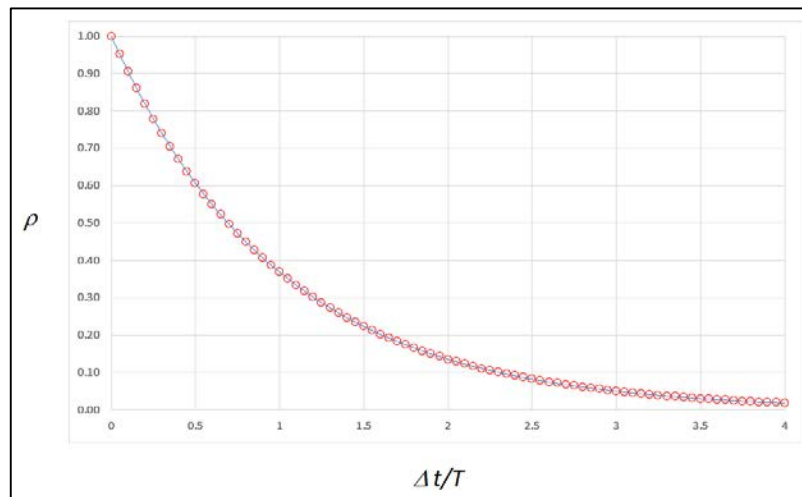


Figura 5. Correlação entre valores sucessivos de x_t .

Fonte: o próprio autor.

O inverso da expressão $\Delta t/T$ representa o número de amostras por constante de tempo (T). A seleção de uma amostra quatro vezes por constante de tempo resulta em $\Delta t/T = 0,25$ ($\rho=0,78$). Observa-se na Figura 5 que ρ é praticamente igual a zero quando $\Delta t/T > 4$.

Outro modelo analítico pode ser encontrado em Yule (1927) que usou o movimento dinâmico de um pêndulo como inspiração para a formulação de um modelo autoregressivo que explica a dependência ao longo do tempo em uma série temporal. Se um pêndulo com massa m sob a influência da gravidade está em equilíbrio e é subitamente atingido por uma força de impulso único, ele começa a executar um movimento harmônico e a frequência deste movimento depende do comprimento do pêndulo, da massa, da força de impulso e de atrito e da viscosidade do meio em que se encontra o pêndulo. As forças que afetam um pêndulo em movimento são apresentadas na Figura 6.

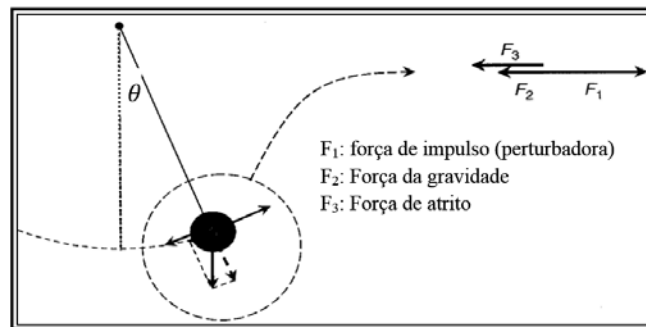


Figura 6. Um pêndulo simples em movimento.

Fonte: Adaptado de Bisgaard e Kulahci (2011).

A Figura 7 ilustra o movimento harmônico de um pêndulo $x(t)$ em posição de equilíbrio no instante de tempo quando $t=0$ (BISGAARD; KULAHCI, 2011). Este movimento é descrito aproximadamente por uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes conforme (5).

$$m \frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + k\theta = A\tau(t) \quad (5)$$

em que $\tau(t)$ é uma função impulso que força o pêndulo a sair do seu equilíbrio, A é o tamanho do impacto que coloca o pêndulo em movimento e θ o ângulo representado na Figura 6.

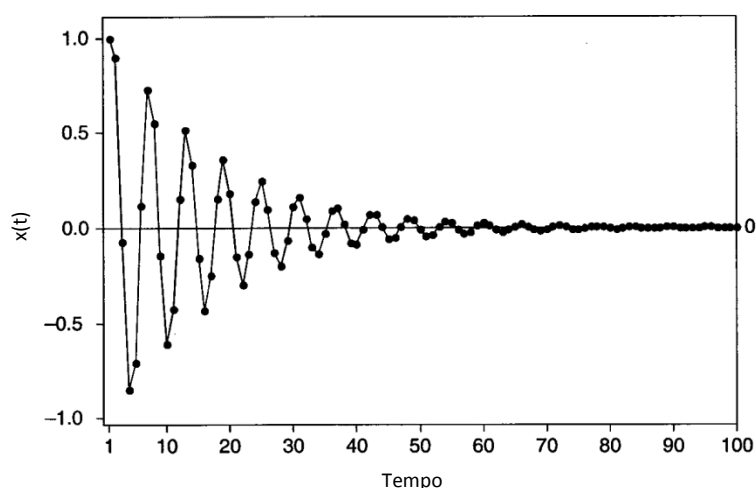


Figura 7. Movimento harmônico de um pêndulo em função do tempo.

Fonte: Adaptado de Bisgaard e Kulahci (2011).

As equações diferenciais são utilizadas para descrever o comportamento dinâmico de processos em função do tempo. Contudo, dados de séries temporais são normalmente observados em unidades discretas de tempo, por exemplo, a cada hora ou a cada minuto. Yule (1927) mostrou de forma empírica, gerando dados simulados, que a equação diferencial (5) pode ser representada pelo modelo:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + e_t \quad (6)$$

Portanto, se observada em tempo discreto, o comportamento oscilatório de um pêndulo pode ser descrito pela expressão (6), que é um modelo de série temporal autoregressivo de segunda ordem, com X_t dependendo das observações X_{t-1} e X_{t-2} , dos parâmetros autoregressivos ϕ_1 e ϕ_2 e de um erro aleatório e_t (BOX; JENKINS; REINSEL, 2008).

Nas seções 2.2 e 2.3 é apresentada uma revisão bibliográfica associada ao tema autocorrelação em processos univariados e multivariados.

2.2 MODELO UNIVARIADO

O modelo autoregressivo de primeira ordem, AR(1), é utilizado por diversos autores para modelar a falta de independência entre observações de itens vizinhos de uma variável (ATIENZA; TANG; ANG, 1998; CLARO; COSTA; MACHADO, 2008; COSTA; CASTAGLIOLA, 2011; COSTA; CLARO, 2008, 2009; MAGALHÃES; HO; COSTA, 2008; MONTGOMERY; MASTRANGELO, 1991; RUNGER; WILLEMAIN,

1995, 1996; SUPERVILLE; ADAMS, 1994; TESTIK, 2005; TIMMER; PIGNATIELLO, 2003). A expressão que representa o modelo AR(1) é:

$$X_t - \mu = \phi(X_{t-1} - \mu) + e_t, \quad t = 1, 2, \dots, \infty \quad (7)$$

sendo: X_t o t -ésimo item observado; $\mu = \mu_0$ (média em controle); ϕ o coeficiente autoregressivo e $e_t \sim N(0, \sigma_e)$ - erro aleatório associado ao i -ésimo item.

O nível de autocorrelação pode ser mensurado analiticamente por meio da função de autocorrelação (MONTGOMERY, 2009):

$$\rho_h = \frac{Cov(X_t, X_{t-h})}{V(X_t)} \quad (8)$$

em que: $Cov(X_t, X_{t-h})$ é a covariância de observações separadas por h períodos de tempo e $V(X_t)$ é a variância das observações X_t .

Para o modelo AR(1) a covariância é dada por (MONTGOMERY; JENNINGS; KULAHCI, 2008):

$$Cov(X_t, X_{t-h}) = \phi^h \frac{\sigma_e^2}{1 - \phi^2} \quad (9)$$

e a variância do processo e do erro tem a seguinte relação (MONTGOMERY; JENNINGS; KULAHCI, 2008):

$$V(X_t) = \sigma_X^2 = \frac{\sigma_e^2}{1 - \phi^2} \quad (10)$$

A função de autocorrelação para o modelo AR(1) será:

$$\rho_h = \phi^h \quad h = 1, 2, 3, \dots, H \quad (11)$$

A função de autocorrelação pode ser usada para determinar o intervalo de tempo mínimo necessário para a autocorrelação se dissipar. Em geral, assume-se que o intervalo entre retirada das amostras é suficientemente espaçado para garantir que os valores de X de uma amostra sejam independentes dos valores de X de uma amostra anterior.

Costa, Epprecht e Carpinetti (2005) recomenda calcular ρ_h para diversos espaçamentos ($h \geq 0$) e verificar o menor valor de h para o qual:

$$\rho_h < 2/\sqrt{N} \quad (12)$$

sendo N o número de observações individuais para o cálculo de ρ_h .

O intervalo de tempo mínimo necessário para dissipar a autocorrelação será então igual a h vezes o intervalo de tempo entre observações consecutivas utilizadas no cálculo da função de autocorrelação.

Quando $n > 1$ são considerados os conceitos de subgrupos racionais e a expressão usada para representar a variabilidade das observações é (CRYER; CHAN, 2008):

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n} \left[1 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n} \right) \rho_h \right] \quad (13)$$

sendo n o tamanho do subgrupo racional. Observe-se que se $\rho_h = 0$ para todo $i \geq 1$,

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n}.$$

O Quadro 1 apresenta as principais referências relacionadas a gráficos de controle, quando há autocorrelação representada pelo modelo AR(1), e o objetivo principal de cada artigo.

Quadro 1. Referências que se baseiam no modelo AR(1).

Referência	Objetivo da Pesquisa
Bagshaw e Johnson (1975)	Demonstrar o efeito da autocorrelação em gráficos <i>CUSUM</i> .
Montgomery e Mastrangelo (1991)	Pesquisar a estratégia de modificar a abertura dos limites de controle do gráfico de $\bar{X}$ para melhorar o desempenho, ou seja, melhorar a capacidade do gráfico em detectar causas especiais.
Alwan e Radson (1992)	Estudar o impacto da autocorrelação no erro α (<i>Tipo I</i>) do gráfico de $\bar{X}$.
Runger e Willemain (1995)	Demonstrar que os gráficos $\bar{X}$ e <i>CUSUM</i> apresentam melhor desempenho quando comparados com métodos baseados em séries temporais da família <i>ARIMA</i> .
Yang e Yang (2005)	Propor o uso de uma combinação dos gráficos de Shewhart baseado em resíduos e o <i>simple cause-selecting</i> , proposto por Zhang (1997), no monitoramento da média de uma característica de qualidade X .
Costa e Claro (2008)	Estudar o desempenho do gráfico de $\bar{X}$ com amostragem dupla.
Costa e Castagliola (2011)	Aplicar uma estratégia de amostragem sistemática no gráfico de $\bar{X}$ para reduzir o efeito negativo da autocorrelação, pois este efeito diminui o poder do gráfico de controle em detectar causas especiais.
Lwin (2011)	Estudar o efeito da estimação de parâmetros em gráficos <i>EWMA</i> .
Costa e Machado (2011)	Propor a abordagem de cadeias de Markov para estudar o desempenho dos gráficos de $\bar{X}$ com parâmetros variáveis e amostragem dupla.
Lin, Guh e Shiue (2011)	Propor um modelo para o monitoramento em tempo real, a fim de reconhecer padrões não naturais em presença de autocorrelação.

2.3 MODELO MULTIVARIADO

Os procedimentos clássicos de controle em processos multivariados consideram a hipótese básica de que as observações seguem distribuição normal multivariada e sejam independentes, com vetor de médias $\boldsymbol{\mu}_0$ e matriz de variância-covariância Σ_x .

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu}_0 + \mathbf{e}_t \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (14)$$

com $\mathbf{X}_t$, vetor de ordem $p \times 1$ (p é o número de variáveis), representando as observações; $\mathbf{e}_t$ são vetores aleatórios independentes de ordem $p \times 1$.

Observe-se que $\mathbf{e}_t$ seguem uma distribuição normal multivariada cuja média é zero e matriz de variância-covariância Σ_e .

$$\mathbf{e}_t \sim N_p(0, \Sigma_e) \quad (15)$$

com $\Sigma_e = (a_{ij})_{p \times p}$.

A hipótese de independência é violada em muitos processos de manufatura, o que torna a expressão (14) inadequada para representar tais observações. Nesse caso, vetores autoregressivos de primeira ordem - VAR(1) são usados para modelar processos multivariados com correlação temporal entre observações de uma mesma variável e correlação entre observações de diferentes características de qualidade (ARKAT; NIAKI; ABBASI, 2007; BILLER; NELSON, 2003; HUANG; BISGAARD; XU, 2013; HWARNG; WANG, 2010; ISSAM; MOHAMED, 2008; JARRETT; PAN, 2007; KALGONDA; KULKARNI, 2004; KALGONDA, 2012; KIM; JITPITAKLERT; SUKCHOTRAT, 2010; MASTRANGELO; FORREST, 2002; NIAKI; DAVOODI, 2009).

O modelo autoregressivo multivariado de primeira ordem, VAR(1), é dado por:

$$\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}_0 = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_0) + \mathbf{e}_t \quad (16)$$

sendo $\mathbf{X}_t = (x_{1t}, \dots, x_{pt})^T$ o vetor de dados de ordem $p \times 1$; $\boldsymbol{\mu}_0 = (\mu_{01}, \dots, \mu_{0p})^T$ o vetor de médias de ordem $p \times 1$, $\boldsymbol{\Phi}$ uma matriz com os parâmetros autoregressivos de ordem $p \times p$ e $\mathbf{e}_t = (e_{1t}, \dots, e_{pt})^T$ são vetores de erros aleatórios independentes de ordem $p \times 1$ com distribuição normal multivariada de média zero e matriz de variância-covariância Σ_e .

Se Φ é uma matriz nula, a expressão (16) é equivalente a expressão (14), ou seja, tem-se o modelo clássico para dados independentes ao longo do tempo. Caso contrário, os dados serão dependentes ao longo do tempo.

Sem perda de generalidade, supondo que $\mu_0 = 0$ e que $p=2$ (processo bivariado), o modelo VAR(1) pode ser reescrito sob a forma:

$$\begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t-1} \\ x_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} \quad (17)$$

ou ainda,

$$x_{1t} = \phi_{11}x_{1t-1} + \phi_{12}x_{2t-1} + e_{1t} \quad (18)$$

$$x_{2t} = \phi_{21}x_{1t-1} + \phi_{22}x_{2t-1} + e_{2t} \quad (19)$$

sendo que ϕ_{ij} corresponde ao (i,j) -ésimo elemento da matriz Φ , ϕ_{12} representa a dependência linear de x_{1t} sobre x_{2t-1} dado x_{1t-1} .

Observe-se que se $\phi_{12} = 0$, x_{1t} dependerá apenas de x_{1t-1} , de forma similar, ϕ_{21} representa a dependência linear de x_{2t} sobre x_{1t-1} dado x_{2t-1} e, se $\phi_{21} = 0$, x_{2t} dependerá apenas de x_{2t-1} . Para maiores detalhes consultar Box, Jenkins e Reinsel (2008), Lütkepohl (2005) e Tsay (2002).

Em artigos que tratam sobre gráficos de controle para monitoramento de processos multivariados com autocorrelação não é comum o uso de modelos autoregressivos multivariados com ordem superior a um. Contudo, pode ser possível o uso de tais modelos para representar processos em ambientes fabris (KALGONDA, 2012). A generalização do modelo VAR(1) para o modelo de ordem k , denominado VAR(k), é dada por:

$$\mathbf{X}_t - \mu_0 = \Phi_1(\mathbf{X}_{t-1} - \mu_0) + \dots + \Phi_k(\mathbf{X}_{t-k} - \mu_0) + \mathbf{e}_t, \quad k \geq 1 \quad (20)$$

sendo $\mathbf{X}_t = (x_{1t}, \dots, x_{pt})^T$ o vetor de dados de ordem $p \times 1$; $\mu_0 = (\mu_{01}, \dots, \mu_{0p})^T$ o vetor de médias de ordem $p \times 1$, Φ_i são matrizes com os parâmetros autoregressivos de ordem $p \times p$ e $\mathbf{e}_t = (e_{1t}, \dots, e_{pt})^T$ são vetores aleatórios independentes de ordem $p \times 1$ com distribuição normal multivariada de média zero e matriz de variância-covariância Σ_e .

Os modelos VAR(k) são estacionários se as raízes do determinante do polinômio $I_p - \Phi_1 z - \dots - \Phi_k z^k$ excedem, em módulo, o valor unitário (LÜTKEPOHL, 2005). Como exemplo, considere o modelo VAR(1):

$$\begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t-1} \\ x_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Verifica-se que as raízes do polinômio $0,35z^2 - 1,2z + 1$ podem ser obtidas pela expressão (22) e são iguais a $z_1 = 2$ e $z_2 = 1,4286$:

$$\det \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix} z \right] \quad (22)$$

Desta forma, conclui-se que o modelo da expressão (21) é estacionário porque ambas as raízes são maiores, em módulo, que o valor unitário.

Um exemplo de processo não estacionário é dado pela expressão (23), com o $\det(I_2 - \Phi z) = 0,7z^2 - 1,7z + 1$ e as raízes iguais a $z_1 = 1,0$ e $z_2 = 1,4286$:

$$\begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t-1} \\ x_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Como uma das raízes não é maior, em módulo, que o valor unitário, logo o processo não é estacionário.

A Figura 8 ilustra os dois processos apresentados nas equações (21) e (23). Na geração das séries, admitiu-se: $\Sigma_e = (a_{ij})_{2 \times 2}$; $a_{ij} = 1$ se $i = j$; $a_{ij} = 0,4$ se $i \neq j$.

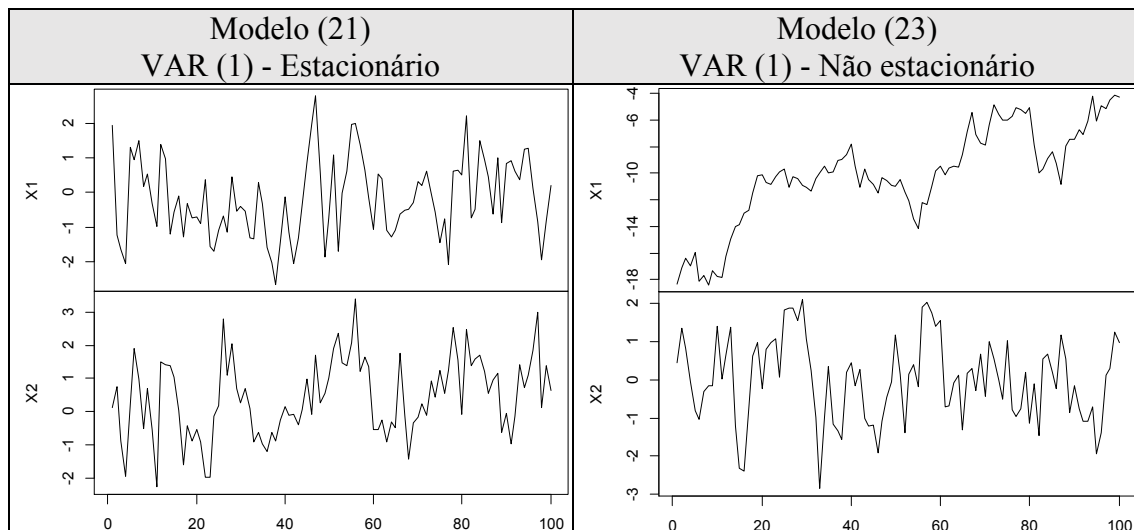


Figura 8. Representação gráfica dos modelos (21) e (23).

Fonte: o próprio autor.

A estrutura de variação do modelo $\text{VAR}(k)$ é representada pela matriz de variância-covariância (LÜTKEPOHL, 2005; SHUMWAY; STOFFER, 2006). Sob a

hipótese de que processo seja estacionário, $E(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\mu}_0$ para todo t , a matriz de variância-covariância será:

$$\Gamma_x(h) = E\left[(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}_0)(\mathbf{X}_{t-h} - \boldsymbol{\mu}_0)^T\right] \quad h = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

sendo $E[\cdot]$ o operador de valor esperado.

Ser estacionário significa que $\boldsymbol{\mu}_0$ é constante para todo $\mathbf{X}_t$ e a matriz de variância-covariância não depende de t , dependendo apenas de h que representa o intervalo ao longo do tempo entre o vetor $\mathbf{X}_t$ e $\mathbf{X}_{t-h}$ (*lag* h). Para uma definição formal de processo estacionário consultar Box, Jenkins e Reinsel (2008).

A matriz $\Gamma_x(h)$ é formada pelos elementos $\gamma_{ij}(h)$ dados por:

$$\gamma_{ij}(h) = E\left[(X_{it} - \mu_{0i})(X_{jt-h} - \mu_{0j})^T\right] \quad i, j = 1, 2, \dots, \quad (25)$$

A matriz de variância-covariância para o *lag* 0 ($h=0$), é representada por:

$$\Gamma = \Gamma_x(0) = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1k} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{k1} & \gamma_{k2} & \cdots & \gamma_{kk} \end{bmatrix} \quad (26)$$

sendo γ_{ij} da matriz Γ a variância de X_{it} , quando $i=j$, e a covariância entre X_{it} e X_{jt} quando $i \neq j$.

Como a matriz de variância-covariância depende originalmente da unidade de medida das variáveis envolvidas, sua interpretação por vezes não é simples. Pode-se usar uma forma mais conveniente de avaliar a relação das variáveis no processo através de uma função adimensional que é dada pela utilização da matriz de correlação:

$$R_x(h) = D^{-1/2} \Gamma_x(h) D^{-1/2} \quad (27)$$

sendo D é a matriz diagonal formada pelos elementos $\gamma_{ij}(h)$, para todo $i=j$, da matriz $\Gamma_x(h)$.

O coeficiente de correlação entre X_{it} e X_{jt} , para o *lag* 0 ($h=0$), será:

$$\rho_{ij}(0) = \frac{\gamma_{ij}}{\sqrt{\gamma_{ii}\gamma_{jj}}} \quad (28)$$

com $\rho_{ij}(0) = \rho_{ji}(0), \forall (i, j); -1 \leq \rho_{ij}(0) \leq 1, \forall (i, j)$ e $\rho_{ii}(0) = 1, \forall i$.

A matriz de variância-covariância, $\Gamma_x(0)$, pode ser obtida pela relação de *Yule-Walker* quando Φ e Σ_e são conhecidos (LÜTKEPOHL, 2005).

Se o processo for representado por um modelo VAR(1), tem-se:

$$\Gamma = \Gamma_x(0) = \Phi \Gamma_x(0) \Phi^T + \Sigma_e \quad (29)$$

ou, de forma explícita:

$$Vec \Gamma = \left(I_{p^2} - \Phi \otimes \Phi \right)^{-1} Vec \Sigma_e \quad (30)$$

sendo Vec o operador de vetorização de matrizes que transformam a matriz em um vetor e $\otimes$ o produto de Kronecker.

Após o cálculo de $\Gamma_x(0)$, $\Gamma_x(h)$, obtém-se:

$$\Gamma_x(h) = \Phi \Gamma_x(h-1) \quad (31)$$

Para exemplificar a obtenção das matrizes de variância-covariância e correlação considere o modelo bivariado VAR(1) apresentado em (16):

$$\mu = (0,0)^T, \Phi = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{bmatrix} \text{ e } \Sigma_e = \begin{bmatrix} 1 & 0,4 \\ 0,4 & 1 \end{bmatrix}$$

De acordo com a expressão (30), tem-se:

$$Vec \Gamma = \left(I_4 - \Phi \otimes \Phi \right)^{-1} Vec \Sigma_e$$

$$Vec \Gamma = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,5 \times 0,5 & 0,5 \times 0 & 0 & 0 \\ 0,5 \times 0 & 0,5 \times 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 \times 0,5 & 0,7 \times 0 \\ 0 & 0 & 0,7 \times 0 & 0,7 \times 0,7 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0,4 \\ 0,4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,3333 \\ 0,6154 \\ 0,6154 \\ 1,9608 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1,3333 & 0,6154 \\ 0,6154 & 1,9608 \end{bmatrix} \Leftrightarrow R_x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0,3806 \\ 0,3806 & 1 \end{bmatrix}$$

Para mais detalhes de como obter a matriz de variância-covariância de um modelo VAR(k) consultar Lütkepohl (2005).

Supondo que $\mathbf{X}_t$ seja um vetor de dados com distribuição p -variada e seguindo o modelo dado na expressão (16), de acordo com Kalgonda e Kulkarni (2004) e Kalgonda (2012), tem-se:

$$\mathbf{X}_t \sim N_p[\mu_0; \Gamma_x(0)] \quad (32)$$

com $\mathbf{X}_t$ representando observações das características de qualidade de um produto.

Na presença de autocorrelação, conhecer a matriz de variância-covariância é importante porque ela pode ser usada tanto para monitorar média ou a variabilidade do processo. Observe-se que se o processo está em controle estatístico, $\mathbf{X}_t$ segue uma distribuição normal multivariada com vetor de médias $\boldsymbol{\mu}_0$ e matriz de variância-covariância $\Gamma_x(0)$.

Artigos relacionados ao tema controle de processos multivariados que geram observações autocorrelacionadas são recentes. O Quadro 2 apresenta importantes referências relacionadas ao emprego e desempenho de gráficos de controle que se baseiam em modelos multivariados, bem como os objetivos principais de cada artigo.

Quadro 2. Referências que se baseiam em modelos multivariados.

Referência	Objetivo da Pesquisa
Charnest (1995)	Utilizar simulação de Monte Carlo para analisar a taxa de erro tipo I de gráficos de controle quando os dados são gerados por processos multivariados que produzem vetores de observações dependentes ao longo do tempo.
Mastrangelo e Forrest (2002)	Apresentar um programa para gerar dados multivariados com autocorrelação com o propósito de serem utilizados para comparar o desempenho de gráficos de controle multivariados.
Apley e Tsung (2002)	Apresentar as diretrizes para uso do gráfico de T^2 autoregressivo.
Dyer, Conerly e Adams (2003)	Avaliar o desempenho de gráficos de controle, através de simulação, baseando-se na previsão multivariada de processos <i>ARMA</i> .
Jiang (2004)	Examinar as propriedades do teste T^2 quando não há informação sobre o tipo de deslocamento provocado por uma causa especial.
Kalgonda e Kulkarni (2004)	Propor um gráfico de controle denominado <i>Z-chart</i> que além de identificar desvios nas médias ajuda a identificar a variável afetada por alguma causa especial.
Noorossana e Vaghefi (2006)	Avaliar o efeito da autocorrelação no gráfico de controle <i>MCUSUM</i> .
Arkat, Niaki e Abbasi (2007)	Aplicar redes neurais artificiais para previsão e monitoramentos de resíduos com o gráfico <i>MCUSUM</i> .
Psarakis e Papaleonida (2007)	Apresentar uma revisão sobre gráficos de controle em processos cujas características de qualidade são autocorrelacionadas.
Issam e Mohamed (2008)	Aplicar a técnica de <i>support vector regression</i> e monitorar os resíduos com o gráfico de controle <i>MCUSUM</i> para o controle do vetor de médias.
Niaki e Davoodi (2009)	Utilizar redes neurais artificiais para monitorar processos de manufatura que são multivariados e autocorrelacionados.
Vargas, Alfaro e Mondéjar (2009)	Introduzir a técnica de modelagem multivariada denominada <i>state-space</i> em controle estatístico de processos.
Kim, Jitpitaklert e Sukchotrat (2010)	Examinar a viabilidade da utilização de gráficos de controle baseados na técnica <i>one-class classification</i> para lidar com processos multivariados com autocorrelação.
Brian Hwang e Wang (2010)	Propor o uso de redes neurais para detectar e identificar desvio(s) na(s) média(s) de processos multivariados e autocorrelacionados.
Pan e Jarrett (2011)	Sugerir diretrizes para a construção de gráficos de controle baseados em resíduos do modelo VAR.
Chen e Nembhard (2011)	Propor um novo gráfico de controle denominado <i>MCuscore</i> para monitorar deslocamentos no vetor de médias.

Requeijo e Souza (2011)	Apresentar uma aplicação do gráfico de T^2 em um processo cujas variáveis são representadas por um modelo VAR.
Snoussi (2011)	Apresentar um procedimento de controle das médias em processos com produção limitada que são multivariados e apresentam autocorrelação.
Kalgonda (2012)	Adaptar o gráfico <i>Z-chart</i> a modelos VAR de ordem superior a um.
Huang, Bisgaard e Xu (2013)	Propor a modelagem do processo com o modelo VARIMA e realiza o monitoramento através de dois gráficos de controle: o primeiro aplicado aos valores de previsão obtidos com o modelo e o segundo gráfico de controle monitora os resíduos do modelo.
Huang, Xu e Bisgaard (2013)	Desenvolver uma classe de modelos de cadeias de Markov para avaliar o <i>ARL</i> de gráficos de controle tradicionais para processos multivariados e autocorrelacionados.
Narvand, Soleimani e Raissi (2013)	Propor o gráfico de T^2 baseado em modelo linear misto na presença de autocorrelação com ênfase na fase II.
Alfaro Navarro et al. (2014)	Desenvolver um sistema para construção de gráficos de controle baseando-se na modelagem espaço-estado (<i>state-space</i>) em processos multivariados e autocorrelacionados.
Vanhatalo e Kulahci (2014)	Estudar o desempenho simulado do gráfico de T^2 empregando amostras unitárias em processos que apresentam dados autocorrelacionados.
Leoni, Machado e Costa (2014)	Apresentar as propriedades estatísticas e estudar o desempenho de dois gráficos simultâneos univariados em processos que apresentam dados autocorrelacionados.

2.4 IDENTIFICAÇÃO, ESTIMATIVA E DIAGNÓSTICO DO MODELO

Construir um modelo adequado que represente observações de um processo real não é uma tarefa trivial e para fazê-lo é necessário seguir algumas etapas que podem ser repetidas inúmeras vezes até a escolha de um modelo julgado adequado. De um modo geral, é necessário: realizar a especificação (identificação) do modelo; estimar os parâmetros e; realizar o diagnóstico do modelo.

Ao fazer a identificação do modelo, tenta-se satisfazer o princípio da parcimônia, isto é, o modelo selecionado deve apresentar o menor número possível de parâmetros. A identificação do modelo pode ser feita pela análise visual de dois gráficos de correlograma. O primeiro gráfico apresenta o comportamento da função de autocorrelação em relação a defasagem (ou *lag*) das observações e o segundo gráfico apresenta a função de autocorrelação parcial em relação a defasagem das observações (MORETTIN; TOLOI, 2004).

O estágio de especificação (identificação) da construção do modelo ficará restrito ao modelo $VAR(k)$, pois esta tese tem o propósito de trabalhar com processos influenciados pela autocorrelação e tais processos são representados na literatura por modelos autoregressivos.

Apresentam-se, na seção 2.4.1, algumas técnicas estatísticas que podem ser utilizadas para identificar o modelo VAR(k), viabilizar a ordem do modelo, a estimação dos parâmetros e o diagnóstico para validar o modelo. Para mais detalhes, há literatura disponível sobre modelagem de séries temporais em: Box, Jenkins e Reinsel (2008); Lütkepohl (2005); Shumway e Stoffer (2006) e Tsay (2002).

2.4.1 Identificação, estimativa e diagnóstico do modelo VAR(k)

Na prática, quando Φ e Σ_e são desconhecidos, pode-se estimar a matriz de covariância a partir de uma amostra $\{\mathbf{X}_t\}_{t=1}^n$:

$$\hat{\Gamma}_x(h) = \frac{1}{n-1} \sum_{t=h+1}^n (\mathbf{X}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{X}_{t-h} - \hat{\boldsymbol{\mu}}) \quad h = 0, 1, 2, \dots \quad (33)$$

sendo $\hat{\boldsymbol{\mu}} = n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_t$ (estimador do vetor de médias) e o elemento (i, j) da expressão (33) dado por:

$$\hat{\gamma}_{ij}(h) = n^{-1} \sum_{t=h+1}^n (x_{it} - \bar{x}_i)(x_{j,t-h} - \bar{x}_j) \quad h = 0, 1, 2, \dots \quad (34)$$

A partir da matriz de variância-covariância, pode-se estimar a matriz de correlação:

$$\hat{\mathbf{R}}_x(h) = \mathbf{D}^{-1/2} \hat{\Gamma}_x(h) \mathbf{D}^{-1/2} \quad (35)$$

sendo o elemento (i, j) de (35) dado por:

$$\hat{\rho}_{ij}(h) = \frac{\gamma_{ij}(h)}{\sqrt{\gamma_{ii}(h)\gamma_{jj}(h)}} \quad (36)$$

Observe-se que se $\mathbf{X}_t$ é um processo linear estacionário e $\mathbf{e}_t$ um vetor com distribuição normal, então $\hat{\mathbf{R}}_x(h)$ é um estimador consistente de $\mathbf{R}_x(h)$. As propriedades assintóticas de amostragem da função de autocorrelação $\hat{\rho}_{ij}(h)$ são discutidas e apresentadas em Box, Jenkins e Reinsel (2008).

Quando $\mathbf{X}_t$ for um ruído branco tem-se $\text{Var}[\hat{\rho}_{ij}(h)] \simeq 1/(n-h)$, que é um caso particular importante porque serve como auxílio na identificação do modelo adequado. De modo prático admite-se que, se algum dos coeficientes $\hat{\rho}_{ij}(h)$ for maior do que o valor $\pm 2/\sqrt{n}$, a autocorrelação será significativa ao nível aproximado de 95% de significância.

Em um modelo autoregressivo a identificação pode ser realizada através da função de autocorrelação versus o *lag* h que decai de acordo com exponenciais e/ou senoides amortecidas, infinita em extensão e a função de autocorrelação parcial que é finita, apresentando um corte após o *lag* h (MORETTIN; TOLOI, 2004).

Para estimar os parâmetros de um modelo $VAR(k)$, dois métodos são muito comuns: o método dos mínimos quadrados e o método de máxima verossimilhança. Sabe-se que sob a hipótese de normalidade, ambos os métodos são equivalentes (LÜTKEPOHL, 2005). Há vários aplicativos estatísticos que auxiliam na tarefa de estimação. Nesta tese, ilustra-se o uso do pacote estatístico *R* (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2013) para as aplicações e exemplos apresentados (ver Apêndice B). O *R* pode ser adquirido de forma livre na Internet em: <http://www.r-project.org>.

Na etapa prévia de estimação, são obtidos os resíduos do modelo, que em analogia com a análise de regressão, são expressos como a diferença entre os valores observados e previstos. Se o modelo foi apropriadamente especificado e seus parâmetros bem estimados, o correlograma dos resíduos se comporta aproximadamente como um ruído branco (MORETTIN; TOLOI, 2004).

Outros métodos, principalmente aqueles baseados em uma função penalizadora, podem ser usados para identificação do modelo. Entre estes métodos encontram-se, por exemplo (AKAIKE, 1969, 1971; HANNAN; QUINN, 1979; LÜTKEPOHL, 2005; QUINN, 1980; SCHWARZ, 1978):

- critério de informação de Akaike (AIC)

$$AIC(k) = \log \det[\hat{\Sigma}_e(k)] + \frac{2kp^2}{T} \quad (37)$$

Sendo T o tamanho da amostra, k a ordem do modelo e p o número de variáveis.

- critério de Hannan-Quinn (HQ)

$$HQ(k) = \log \det[\hat{\Sigma}_e(k)] + \frac{2\ln\ln T}{T} kp^2 \quad (38)$$

- critério de Schwarz (SC)

$$SC(k) = \log \det[\hat{\Sigma}_e(k)] + \frac{\ln T}{T} kp^2 \quad (39)$$

- critério do erro de previsão do preditor (FPE)

$$FPE(k) = \left(\frac{T + pk + 1}{T - pk - 1} \right)^p \det[\hat{\Sigma}_e(k)] \quad (40)$$

Na etapa de diagnóstico, analisa-se a qualidade do modelo que foi especificado e estimado, ou seja, quão bem ele se ajusta aos dados e se as hipóteses do modelamento estão satisfeitas (CHATFIELD, 2004). Além de ser importante observar a autocorrelação dos resíduos em *lags* individuais, é útil aplicar um teste estatístico que leve em consideração sua magnitude como um grupo.

Pode-se aplicar um teste estatístico que leve em consideração as hipóteses: $H_0 : \mathbf{R}_h = (R_1, \dots, R_h) = 0$ e $H_1 : \mathbf{R}_h \neq 0$ (h representa o último *lag* sobre o qual será calculada a estatística) com o objetivo de evidenciar a presença de autocorrelação.

A estimativa da matriz de correlação é usada para testar as hipóteses anunciadas através do teste multivariado de *Portmanteau* (HOSKING, 1980, 1981; LI; MCLEOD, 1981; PEÑA; RODRIGUEZ, 2002):

$$Q(h) = T^2 \sum_{i=1}^h \frac{1}{T-i} \text{vec}(\hat{R}_{(i)}^T) (\hat{R}_{(0)}^{-1} \otimes \hat{R}_{(0)}^{-1}) \text{vec}(\hat{R}_{(i)}) \quad (41)$$

sendo: h a defasagem (*lag*) e T o tamanho da amostra .

Observe-se que sob a hipótese nula de não existência de correlação e autocorrelação tem-se $Q(h) \sim \chi_{(p^2(h-k))}^2$. Sendo p o número de variáveis e k a ordem do modelo VAR(k).

A estatística $Q(h)$ pode ser reescrita como:

$$Q(h) = n^2 \sum_{i=1}^h \frac{1}{n-i} \text{traço}(\hat{\Gamma}_{(i)}^T \hat{\Gamma}_{(0)}^{-1} \hat{\Gamma}_{(i)}' \hat{\Gamma}_{(0)}^{-1}) \quad (42)$$

Na fase de diagnóstico, é preciso também avaliar a suposição de normalidade dos resíduos. Pode-se aplicar o teste multivariado de *Jarque-Bera* para esse fim (JARQUE; BERA, 1987; LÜTKEPOHL, 2005), com a estatística teste dada por:

$$JB = (T \mathbf{b}_1' \mathbf{b}_1 / 6) + \left[T (\mathbf{b}_2 - 3\mathbf{k})' (\mathbf{b}_2 - 3\mathbf{k}) / 24 \right] \quad (43)$$

sendo T o número de observações, e $\mathbf{b}_1$ e $\mathbf{b}_2$ sendo, respectivamente, o terceiro e o quarto vetor momento não central dos resíduos padronizados da estimativa de $\mathbf{e}_t$.

Observe-se que sob a hipótese nula de normalidade, a estatística teste JB segue uma distribuição *qui-quadrado* com $2p$ graus de liberdade ($JB \sim \chi_{2p}^2$).

Para exemplificar o processo de identificação e estimação, considere o modelo VAR(1) apresentado em (16). O software *R* foi usado para simular 500 pares de dados de acordo com os parâmetros: $\boldsymbol{\mu} = (0,0)^T$, $\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{bmatrix}$ e $\Sigma_e = \begin{bmatrix} 1 & 0,4 \\ 0,4 & 1 \end{bmatrix}$.

As Figuras 9-13 ilustram parcialmente alguns resultados gerados pelo software *R* após a execução das linhas de comandos apresentadas no Apêndice B.

A Figura 9 indica, através dos critérios AIC, HQ, SC e FPE, que o modelo a ser estimado deve ser de ordem 1, ou seja, VAR(1).

\$selection					
AIC(n)	HQ(n)	SC(n)	FPE(n)		
1	1	1	1		
\$criteria					
	1	2	3	4	5
AIC(n)	-0.2425371	-0.2371456	-0.21293838	-0.197889472	-0.18539977
HQ(n)	-0.2225187	-0.1971088	-0.15288318	-0.117815868	-0.08530776
SC(n)	-0.1925442	-0.1371598	-0.06295972	0.002082073	0.06456467
FPE(n)	0.7846350	0.7888791	0.80821500	0.820482359	0.83081528

Figura 9. Critério de informação AIC, HQ, SC e FPE.

Fonte: o próprio autor.

Nas Figuras 10 e 11, são apresentados os dados observados e ajustados ao modelo. É possível observar pela análise do correlograma que os resíduos se comportam aproximadamente como um ruído branco, indicando que o modelo VAR(1) se ajusta de forma adequada aos dados.

Os coeficientes estimados são apresentados na Figura 12. Observe que apenas o coeficiente 0,4697 e 0,7427 são estatisticamente significativos, o que está de acordo com o modelo simulado.

O teste multivariado de *Portmanteau* evidencia a hipótese estatística de que os resíduos são independentes e a hipótese de distribuição normal multivariada é verificada pelo teste de *Jarque-Bera* (Figura 13).

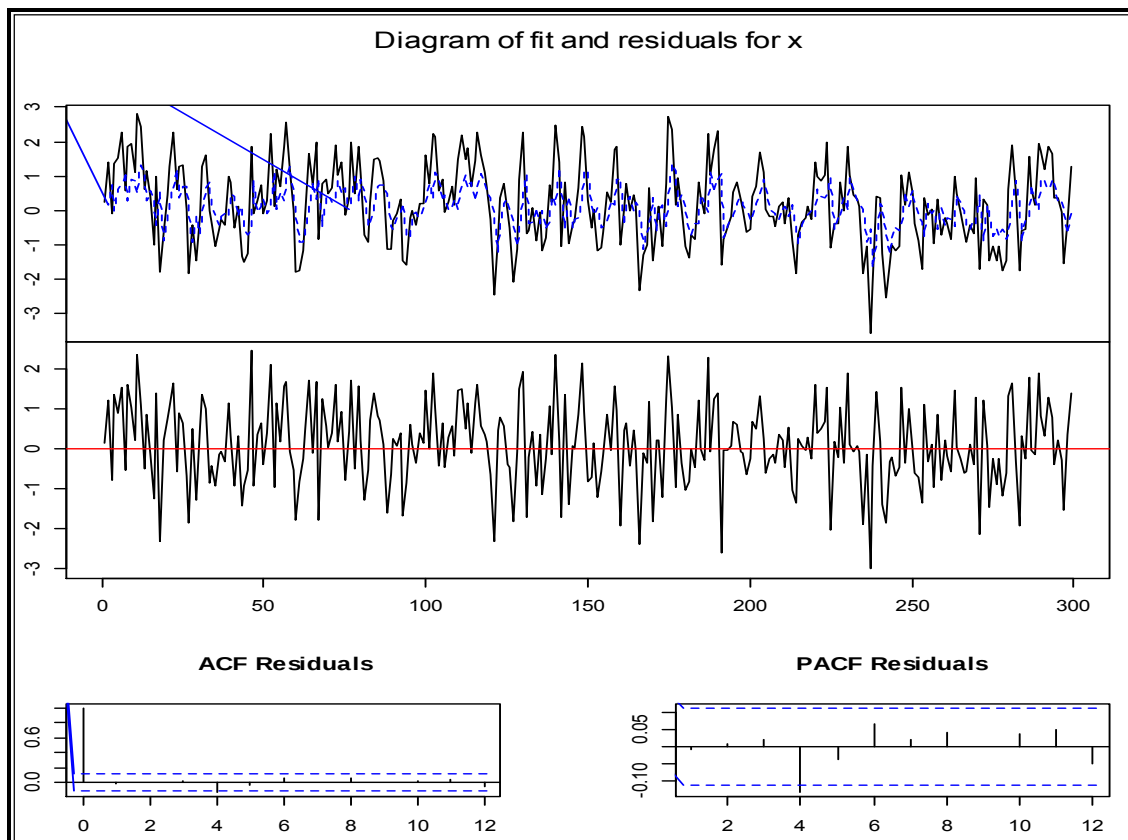


Figura 10. Resíduos versus valores ajustados e correlograma da variável x .

Fonte: o próprio autor.

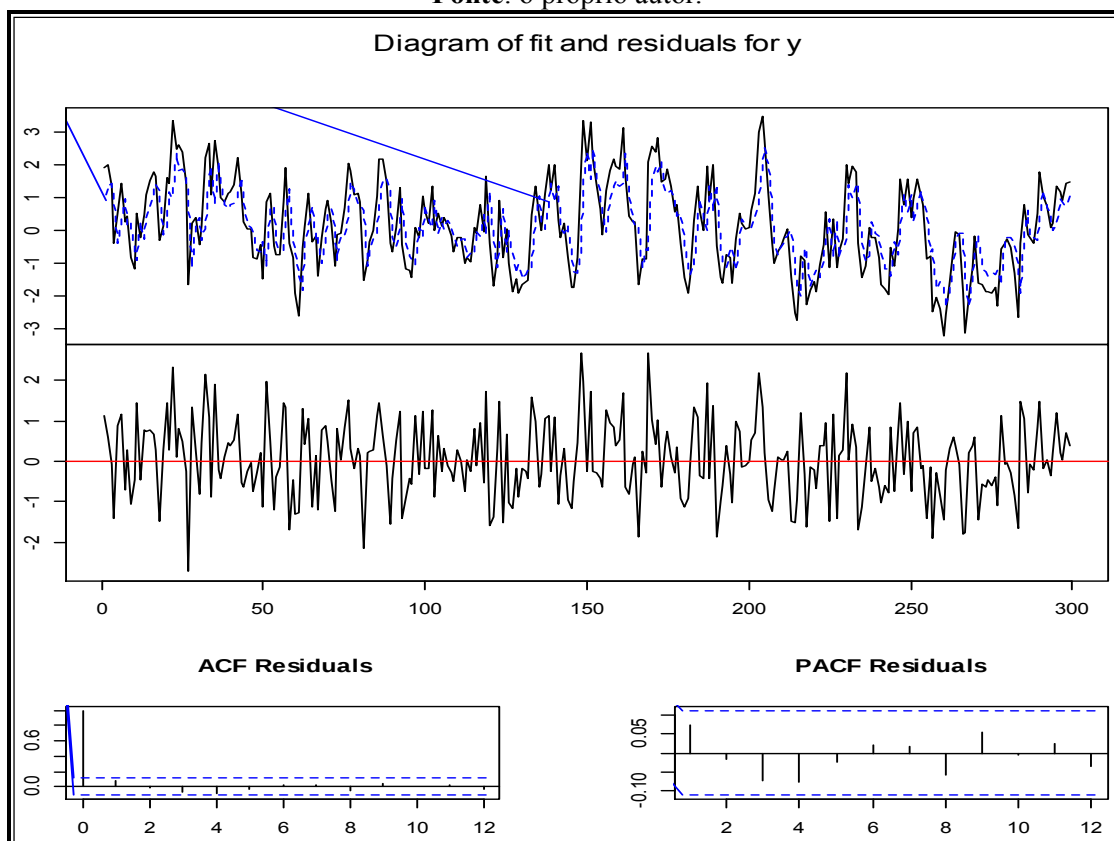


Figura 11. Resíduos versus valores ajustados e correlograma da variável y .

Fonte: o próprio autor.

```

Estimation results for equation x:
=====
x = x.l1 + y.l1

      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
x.l1  0.46970    0.05556   8.454 1.28e-15 ***
y.l1  0.03491    0.04705   0.742   0.459
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Estimation results for equation y:
=====
y = x.l1 + y.l1

      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
x.l1 -0.05068    0.05163  -0.982   0.327
y.l1  0.74271    0.04373  16.984 <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

Figura 12. Coeficientes estimados para o modelo VAR(1).

Fonte: o próprio autor.

```

Portmanteau Test (asymptotic)

data:  Residuals of VAR object xy.var
Chi-squared = 48.3513, df = 60, p-value = 0.8598

JB-Test (multivariate)

data:  Residuals of VAR object xy.var
Chi-squared = 3.4274, df = 4, p-value = 0.489

```

Figura 13. Teste de *Portmanteau* e *Jarque-Bera*.

Fonte: o próprio autor.

Ilustrou-se aqui, de forma prática, alguns procedimentos para auxiliar na escolha do modelo autoregressivo multivariado. Para mais detalhes sobre as técnicas apresentadas, recomenda-se consultar as referências indicadas nesta seção.

3. GRÁFICOS DE CONTROLE MULTIVARIADOS

3.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

3.1.1 Causas especiais e causas aleatórias de variação

O gráfico de controle exibe uma estatística calculada a partir dos dados cuja finalidade é distinguir causas comuns das causas especiais de variação. Variabilidade é algo inevitável, pois quando se produz diferentes unidades de um determinado produto, por mais bem controlada e projetada que seja a produção, há a presença de um componente impossível de ser extinto que é a variabilidade natural do processo, fruto de causas comuns ou aleatórias que atuam durante o processo de produção. Este tipo de causa não exige nenhuma ação gerencial, pois o processo é dito estar em controle estatístico. Ocasionalmente, podem ocorrer mudanças que afetem a distribuição da variável aleatória monitorada, ou seja, alguma perturbação gerada por causas especiais modifica a média (mudança do valor alvo) e/ou aumenta o grau com que os dados estão dispersos. Causas especiais são problemas que devem ser diagnosticados e eliminados de um processo, pois neste caso há irregularidade. O seu surgimento pode ser provocado por vários fatores: desajuste no equipamento, falta de experiência dos operadores, matéria prima de outro fornecedor e etc (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005).

3.1.2 Subgrupos racionais

O conceito de subgrupo racional indica a retirada de pequenas amostras, constituídas de dados obtidos quase num mesmo instante, a intervalos de tempos regulares. A construção dos subgrupos pode ser afetada por causas especiais e causas comuns de variação (MONTGOMERY, 2009). O objetivo é que se tenha presente dentro dos subgrupos apenas causas comuns e a ocorrência de causas especiais se dê entre subgrupos, pois ao admitir a formação destes, espera-se que a chance de conter dados de diferentes populações seja mínima, em outras palavras, espera-se que a chance da causa especial ocorrer durante a formação do subgrupo seja mínima. Em processos de produção, a ordem temporal é uma base lógica para a construção dos subgrupos racionais e, dependendo da natureza do processo estudado, podem ser a cada hora, dia, quartos de

hora e etc. A formação do subgrupo racional é importante porque ao selecionar de maneira apropriada a amostra, obtém-se o máximo de informação útil para controle do processo (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005; LEDOLTER; BURRILL, 1999)

Ledolter e Burrill (1999) relatam que esquemas de amostragem que dão informação suficiente para detectar uma causa especial consistem de grandes amostras selecionadas com alta frequência. Porém, por razões que envolvam custos, não é viável este procedimento. Na prática, indústrias acabam selecionando pequenas amostras, quatro ou cinco unidades, com maior frequência. Pequenas amostras funcionam bem se for possível tolerar pequenas mudanças em um parâmetro do processo, caso contrário, grandes amostras são necessárias. Um subgrupo racional consiste em unidades similares e deve incluir unidades produzidas sob condições idênticas de material, equipamento, método de manufatura e outras condições particulares inerentes ao processo. A seleção de um subgrupo deve ser realizada minimizando a chance de que as unidades dentro do subgrupo sejam afetadas por causas especiais e provendo a máxima oportunidade de que diferenças entre subgrupos, provocadas por causas especiais, sejam aparentes no gráfico de controle.

Wheeler e Chambers (1992) orientam que a disposição das observações em subgrupos deve considerar: (i) nunca agrupar conscientemente observações originárias de diferentes fluxos do processo, pois isto pode disfarçar a presença de causas especiais; (ii) coletar no menor intervalo possível de tempo os dados com o objetivo de minimizar a variação dentro de cada subgrupo para aumentar a sensibilidade do gráfico de controle às variações existentes entre os subgrupos; (iii) manter intervalos longos entre as amostras com o objetivo de permitir que fatores de variação existentes no ambiente do processo se manifestem, maximizando a oportunidade para variação entre os subgrupos; (iv) adotar subgrupos com tamanho de amostra maior que a unidade, assim, ao monitorar a média das observações, espera-se tornar mais fácil detectar diferenças entre subgrupos; (v) preparar planos de amostragem e procedimentos operacionais e usá-los na rotina de monitoramento.

3.1.3 Estatística de desempenho do gráfico de controle

O desempenho de um gráfico de controle pode ser avaliado como uma sequência de testes de hipóteses em que a cada intervalo de tempo são anunciadas e testadas sempre

duas hipóteses: H_0 : processo livre de causas especiais; H_1 : Processo sob a influência de causas especiais.

Se o processo estiver em controle (H_0 verdadeira), α (ou erro tipo I) representa o risco (probabilidade) de erroneamente considerar-se o processo fora de controle (tem-se um alarme falso nesse cenário) (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005).

Se o processo estiver fora controle (H_1 verdadeira), β (ou erro tipo II) representa o risco (probabilidade) de erroneamente considerar-se o processo em controle (tem-se um cenário em que a causa especial não é detectada pelo gráfico) (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005).

A estatística de eficiência mais usual de um gráfico de controle é o *NMA* - número médio de amostras até o sinal (APLEY; TSUNG, 2002; COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005; HUANG; BISGAARD; XU, 2013; HWARNG; WANG, 2010; JIANG, 2004; PAN; JARRETT, 2011; VANHATALO; KULAHCI, 2014). O *NMA* é dado por:

$$NMA = \frac{1}{P} \quad (44)$$

sendo $P = \alpha$, se o processo estiver em controle e $P = 1 - \beta$, se o processo estiver fora controle.

O *NMA* também é denominado *NMAo* quando $P = \alpha$. Se, por exemplo, $\alpha = 0,0027$, tem-se em média, um alarme falso a cada $1/0,0027=370,4$ amostras.

Quando o processo está sob a ação de causas especiais, o poder do gráfico de controle está relacionado com o erro tipo II, sendo $P = 1 - \beta$. Nesse caso, o *NMA* representa o número médio de amostras até o sinal de um alarme verdadeiro anunciado pelo gráfico de controle.

Baseando-se no gráfico de controle T^2 de Hotelling (apresentado mais detalhadamente na seção 3.2), a probabilidade P pode ser obtida em função da distribuição de probabilidade *qui-quadrado* não central (MASON; YOUNG, 2002).

Suponha que o vetor de médias e a matriz de variância-covariância sejam conhecidos. Se uma causa especial atua na média do processo, deslocando-a para um novo patamar, o vetor $(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}_0)$ pode ser representado por:

$$(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}_0) = (\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}_0 + \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_1) = (\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\delta}) \quad (45)$$

em que $\delta = (\mu_1 - \mu_0)$ indica a magnitude do deslocamento na média e μ_1 é o vetor de médias fora de controle

A estatística T_t^2 de Hotelling seguirá distribuição *qui-quadrado* não central $(\chi_{(p,\lambda)}^2)$

$$(\mathbf{X}_t - \mu_1 + \delta)^T \Sigma_0^{-1} (\mathbf{X}_t - \mu_1 + \delta) \sim \chi_{(p,\lambda)}^2 \quad (46)$$

Alguns trabalhos que tratam de esquemas de controle de processos multivariados utilizam o parâmetro de não centralidade (λ^2) como medida de deslocamento no vetor de médias do processo (ALT, 1985; APARISI; HARO, 2001; APARISI, 1996; MASON; YOUNG, 2002)

$$\lambda^2 = (\mu_1 - \mu_0)^T \Sigma_0^{-1} (\mu_1 - \mu_0) \quad (47)$$

Esta medida possui distribuição *qui-quadrado* não central com p graus de liberdade e parâmetro de não centralidade λ^2 . Observa-se que λ^2 é função do deslocamento na média e da matriz de variância-covariância. Desta forma, o desempenho do gráfico de controle de T^2 é calculado de forma exata pelo número médio de amostras até o sinal de fora de controle (*NMA*):

$$NMA = \left\{ 1 - \left[\Pr(\chi_{(p,\lambda)}^2 < LSC) \right] \right\}^{-1} \quad (48)$$

em que LSC representa o limite superior de controle do gráfico de controle de T^2 .

3.1.4 Distribuição normal multivariada

Seja $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)^T$ um vetor aleatório de dimensão p . O vetor $\mathbf{X}$ terá distribuição normal p -variada com vetor de médias μ e matriz de variância-covariância Σ_{pxp} , ou seja, $\mathbf{X} \sim N_p(\mu; \Sigma_{pxp})$, se a função densidade de probabilidade de $\mathbf{X}$ for (MINGOTI, 2005):

$$f(x_1, x_2, \dots, x_p) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{\left[-\frac{1}{2} (x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu) \right]} \quad (49)$$

em que $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)^T \in \mathbb{R}^p$; $-\infty < x_i < +\infty$ ($i = 1, 2, \dots, p$); $\mu \in \mathbb{R}^K$; Σ_{pxp} matriz de variância-covariância positiva definida.

Quando $p=2$, tem-se o caso bivariado:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)|\Sigma|^{1/2}} e^{\left[-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right]} \quad (50)$$

sendo $\mu = (\mu_1, \mu_2)^T$; $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \rho\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}} \\ \rho\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$ e ρ representa o coeficiente de correlação populacional entre as variáveis aleatórias X_1 e X_2 ($-1 < \rho < +1$).

O valor de ρ define a forma geométrica da relação entre X_1 e X_2 . A Figura 14 ilustra uma distribuição normal bivariada com coeficiente de correlação $\rho = 0,7$.

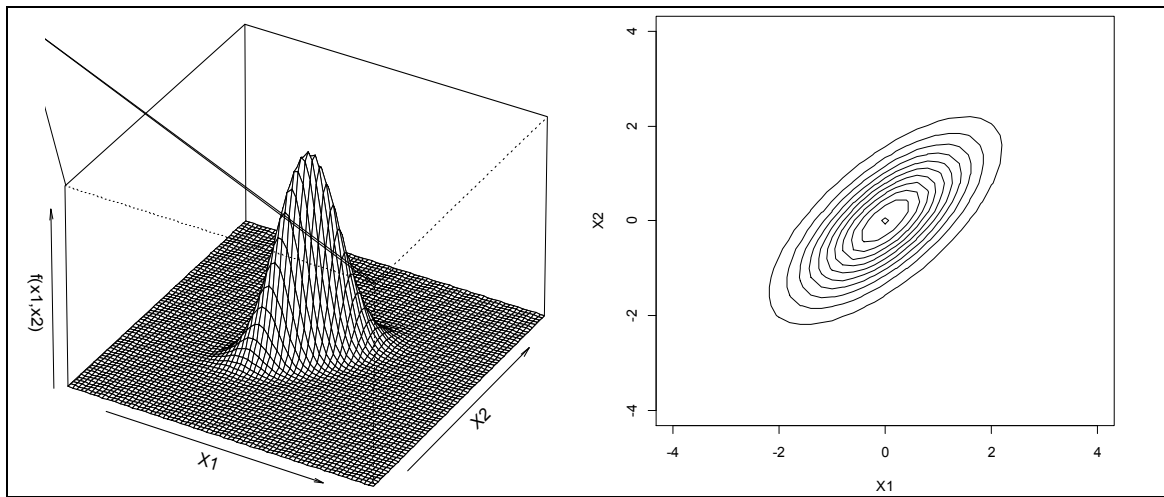


Figura 14. Função densidade de probabilidade da distribuição normal bivariada e gráfico de contorno ($\rho = 0,7$).

Fonte: o próprio autor.

A distância do vetor $\mathbf{X}$ ao vetor de médias μ é denominada distância de Mahalanobis (MAHALANOBIS, 1936).

$$D^2 = (\mathbf{X} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \mu) \quad (51)$$

Se os dados são normalmente distribuídos, as elipses da Figura 14 representam todos os pontos equidistantes, na distância de Mahalanobis, da origem. Isto sugere que todos esses pontos têm a mesma probabilidade de serem regidas por uma distribuição normal bivariada com centro em (0,0).

A matriz de variância-covariância Σ pode ser decomposta e relacionada com os autovalores e autovetores normalizados.

$$\Sigma_{pxp} = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i e_i^T = O \Lambda O^T \quad (52)$$

em que e_i é um autovetor normalizado referente ao autovalor λ_i , sendo $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$; $O = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_p]$ e $\Lambda_{p \times p}$ é uma matriz diagonal com elementos igual a $a_{ii} = \lambda_i$ com $i=1, 2, \dots, p$.

Para todos os vetores $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)^T$, tem-se que:

$$D^2 = \sum_{i=1}^p \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} e_i^T (x - \mu) \right]^2 \quad (53)$$

A expressão (53) é uma elipsoide com dimensão p e o eixo principal da elipsoide estará na direção correspondente à variável X_i de maior variabilidade, o que corresponde ao autovetor relacionado com o maior autovalor de $\Sigma_{p \times p}$. O segundo eixo estará relacionado com a variável de segunda maior variabilidade e assim sucessivamente até o p -ésimo eixo relacionado com a variável de menor variabilidade (GENTLE, 2007).

Se $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}; \Sigma_{p \times p})$ então D^2 possui distribuição χ_p^2 com p graus de liberdade, ou seja, D^2 é um elipsoide cuja forma geométrica dependerá, além dos parâmetros da distribuição normal, do nível de confiança (α).

$$D^2 = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \leq \chi_{\alpha, p}^2 \quad (54)$$

3.2 GRÁFICOS DE CONTROLE PARA O MONITORAMENTO DO VETOR DE MÉDIAS

Uma das soluções mais utilizadas para monitorar processos com duas ou mais características de qualidade foi proposta por Hotelling (1947) através do uso da estatística T_t^2 . O gráfico T^2 de Hotelling é uma versão multivariada do gráfico de controle de $\bar{X}$ de Shewhart (SHEWHART, 1931), tornando-se o dispositivo de controle mais utilizado no monitoramento do vetor médias do processo. A estatística T_t^2 pode ser calculada com uma única observação de cada característica de qualidade ou através da média das amostras de várias características de qualidade monitoradas simultaneamente. Através da distribuição de probabilidade de T_t^2 é possível estabelecer limites de controle adequados para o gráfico T^2 de Hotelling (BERSIMIS; PSARAKIS; PANARETOS, 2007; MASON; YOUNG, 2002).

Supondo-se que sejam conhecidos o vetor de médias ($\boldsymbol{\mu}_0$) e a matriz de variância-covariância (Σ_0), o gráfico de T^2 usa a distância estatística T_t^2 que possui distribuição χ_p^2 com p graus de liberdade quando o processo encontra-se em controle estatístico, ou seja, $LSC = \chi_p^2$ (ALT, 1985; BERSIMIS; PSARAKIS; PANARETOS, 2007).

Essa distância estatística T_t^2 é proporcional a distância de Mahalanobis.

$$T_t^2 = n(\bar{\mathbf{X}}_t - \boldsymbol{\mu}_0)^T \Sigma_0^{-1} (\bar{\mathbf{X}}_t - \boldsymbol{\mu}_0) \quad (55)$$

sendo n é o tamanho do t -ésimo subgrupo racional e $\bar{\mathbf{X}}_t$ é o vetor das médias amostrais das p variáveis para o t -ésimo subgrupo racional. Quando ($n=1$) T_t^2 se reduz a distância de Mahalanobis:

$$T_t^2 = (\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}_0)^T \Sigma_0^{-1} (\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}_0) \quad (56)$$

Para ilustrar, considere o banco de dados *dowell* (ver Apêndice C) de um processo de fabricação de um pino passador (pino guia) que é apresentado no pacote MSQC do software *R* (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2013).

Duas características são mensuradas e avaliadas: diâmetro e comprimento do pino. O vetor de médias do processo é $\boldsymbol{\mu}_0 = (0,50; 1,00)^T$ e a matriz de variância-covariância

$$\Sigma_0 = \begin{pmatrix} 4,91 \cdot 10^{-0,5} & 8,58 \cdot 10^{-0,5} \\ 8,58 \cdot 10^{-0,5} & 4,20 \cdot 10^{-0,4} \end{pmatrix}.$$

Os autovalores e autovetores da matriz Σ_0 são iguais a: $\lambda^T = (4,39 \cdot 10^{-04} \quad 3,02 \cdot 10^{-05})$, $e_1^T = (0,22 \quad -0,98)$ e $e_2^T = (-0,98 \quad 0,22)$.

A Figura 15 ilustra a distância de Mahalanobis como uma região de controle das características de qualidade: diâmetro e comprimento.

O controle individual das variáveis diâmetro e comprimento através dos tradicionais gráficos de Shewhart aumenta o erro tipo I (erro α), por essa razão, o controle simultâneo é mais indicado (MONTGOMERY, 2009).

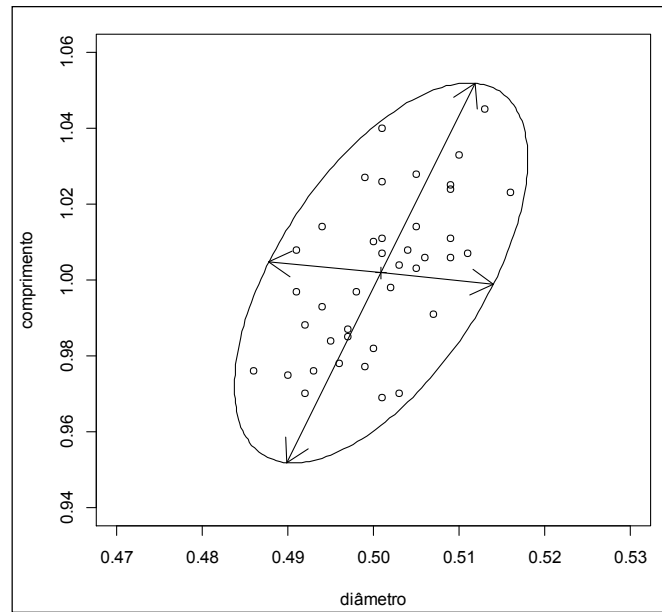


Figura 15. Elipse de confiança processo de fabricação de pinos ($\alpha=0,05$).

Fonte: o próprio autor.

Supondo que p características de qualidade: $X_1, X_2, \dots, X_p$ sejam variáveis aleatórias normais independentes e identicamente distribuídas. Então, de acordo com o gráfico de $\bar{X}$, $Pr(|\bar{X}_i| > k\sigma) = \alpha_i$. Se $\alpha_i = \alpha$, tem-se que: $Pr(|\cap_{i=1}^p \bar{X}_i| < k\sigma) = (1 - \alpha_i)^p$. Portanto, conclui-se que em geral, quando monitoramos p características de qualidade independentes com gráficos de controle, o erro tipo I global será:

$$\alpha' = 1 - (1 - \alpha)^p \quad (57)$$

A Figura 16 representa os limites de controle do gráfico de Shewhart com a elipse de confiança do processo de fabricação de pinos. É fácil observar que com o processo em controle, os limites individuais de Shewhart apontam evidências de causas especiais atuantes no processo que na realidade, para o exemplo, são alarmes falsos.

Comparando-se as estatísticas T_t^2 com o $LSC = \chi_{(p, \alpha)}^2$ é possível monitorar o processo de fabricação de pinos na ordem temporal de produção. De forma muito simples, quando $T_t^2 > LSC = \chi_{(p, \alpha)}^2$, há evidência de causa especial atuante no processo. A Figura 17 ilustra essa técnica que é conhecida como gráfico de controle multivariado T^2 de Hotelling ou gráfico de controle χ^2 (assim denominado quando μ_0 e Σ_0 são conhecidos ou estimados com precisão).

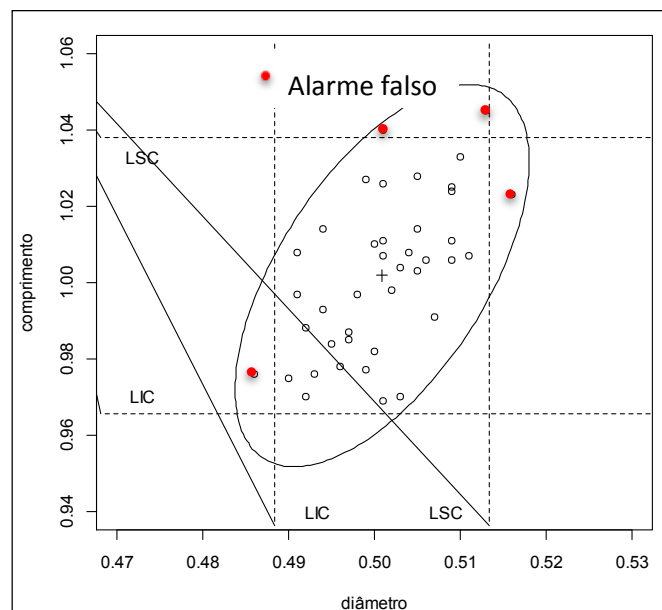


Figura 16. Elipse de confiança e limites de controle de Shewhart do processo de fabricação de pinos ($\alpha=0,05$).

Fonte: o próprio autor.

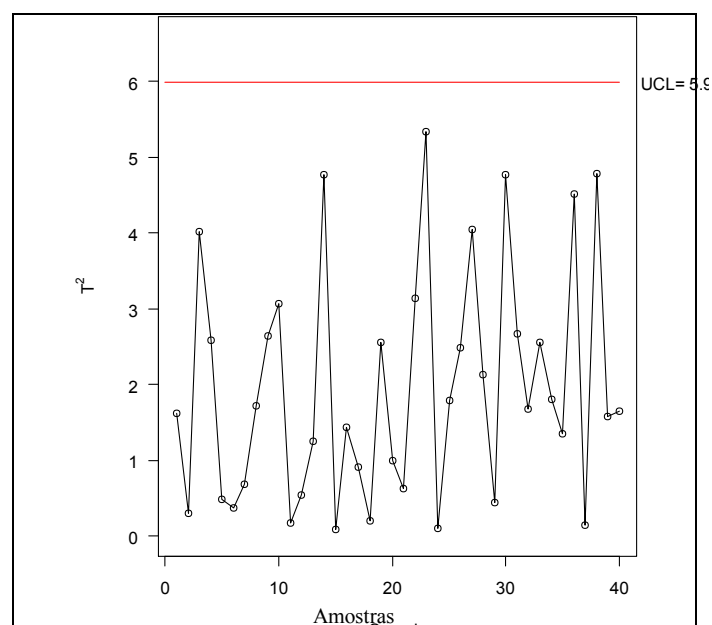


Figura 17. Gráfico de controle T^2 de Hotelling do processo de fabricação de pinos ($\alpha=0,05$).

Fonte: o próprio autor.

Na Fase I, amostras em número suficiente são analisadas quanto à presença de causas especiais agindo sobre o processo e possível correlação entre valores consecutivos da característica de interesse. Se os dados são independentes e o processo está em controle, o conjunto de dados pode ser utilizado para estabelecer os limites de controle;

na Fase II, os limites determinados na Fase I são projetados para comparação com os dados futuros de tal sorte a determinar se o processo permanece ou não sob controle (BERSIMIS; PSARAKIS; PANARETOS, 2007; FALTIN et al., 1997).

Seguindo o exemplo sobre processo de fabricação de pinos, considere o banco de dados *dowel2* (ver Apêndice C) que é apresentado no pacote MSQC do software *R*. Esses dados são de 32 amostras coletadas para monitoramento durante a Fase II. A Figura 18 ilustra a elipse de controle e gráfico de controle T^2 de Hotelling do processo de fabricação de pinos na Fase II. É fácil observar que na quarta amostra há evidência estatística de que o processo tenha sofrido influência de alguma causa especial, pois a estatística de controle supera o $LSC=5,99$.

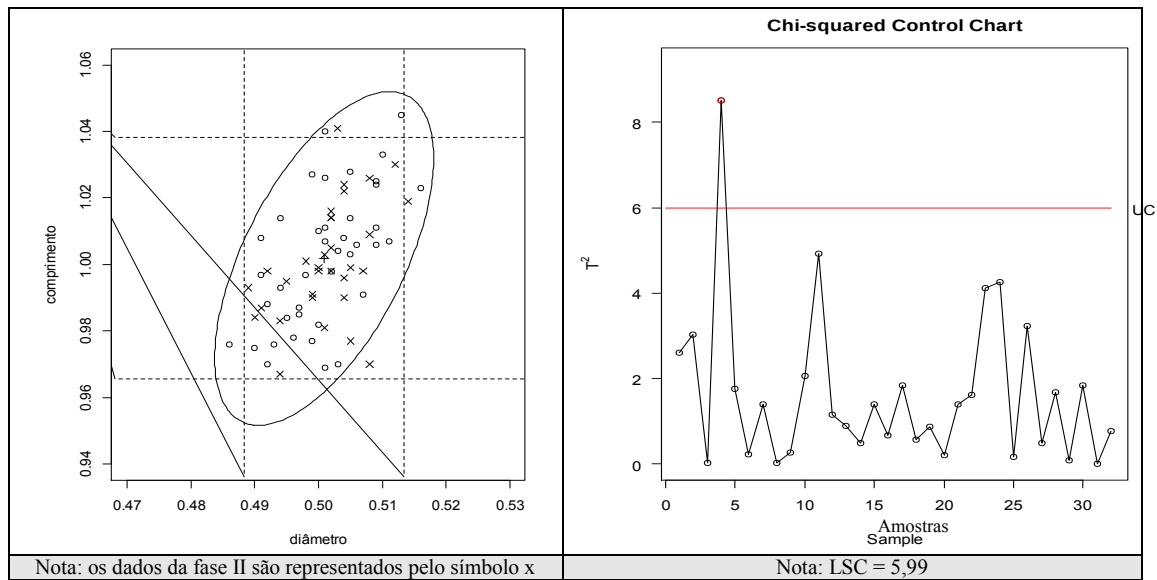


Figura 18. Elipse de controle e gráfico de controle T^2 de Hotelling do processo de fabricação de pinos na Fase II.

Fonte: o próprio autor.

Quando o vetor de médias (μ_0) e a matriz de covariâncias (Σ_0) são desconhecidos e precisam ser estimados, os limites de controle são calculados de acordo com a fase de monitoramento e tamanho da amostra:

Para amostras ($n > 1$), os limites de controle são:

- Fase I

$$\begin{cases} LIC = 0 \\ LSC = \frac{p(m-1)(n-1)}{mn - m - p + 1} F_{\alpha, p, mn - m - p + 1} \end{cases} \quad (58)$$

- Fase II

$$\begin{cases} LIC = 0 \\ LSC = \frac{p(m+1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha,p,mn-m-p+1} \end{cases} \quad (59)$$

em que p =número de características de qualidade monitoradas simultaneamente; m =número de amostras; n =tamanho da amostra; $F_{\alpha,p,mn-m-p+1}$ =distribuição F-*Snedecor* com nível de significância α e $p; mn-m-p+1$ graus de liberdade.

Para amostras de tamanho unitário ($n=1$), os limites de controle são:

- Fase I

$$\begin{cases} LIC = 0 \\ LSC = \frac{(m-1)^2}{m} \beta_{\alpha,p/2,(m-p-1)/2} \end{cases} \quad (60)$$

- Fase II

$$\begin{cases} LIC = 0 \\ LSC = \frac{p(m+1)(m-1)}{m^2-mp} F_{\alpha,p,m-p} \end{cases} \quad (61)$$

sendo: $\beta_{\alpha,p/2,(m-p-1)/2}$ =distribuição de probabilidade Beta com nível de significância α e $p/2; (m-p-1)/2$ graus de liberdade; $F_{\alpha,p,m-p}$ =distribuição de probabilidade F-*Snedecor* com nível de significância α e $p; m-p$ graus de liberdade.

Para ilustrar o emprego do gráfico de controle T^2 em ambas as Fases I e II, considere os bancos de dados *carbon1* (para a Fase I) e *carbon2* (para a Fase II) referentes a um processo de fabricação de tubos de fibra de carbono que acompanha o pacote *MSQC* do software *R* (ver Apêndice D). Três características são mensuradas e avaliadas: diâmetro interno, espessura e comprimento. A estimativa do vetor de médias do processo é $\bar{\mathbf{X}} = (0,99 \ 1,04 \ 49,98)^T$ e a estimativa da matriz de variância-covariância amostral

$$S = \begin{pmatrix} 0,0025 & 0,0036 & 0,0067 \\ 0,0036 & 0,0140 & 0,0100 \\ 0,0067 & 0,0100 & 0,059 \end{pmatrix}. \text{ A Figura 19 ilustra a correlação entre as variáveis.}$$

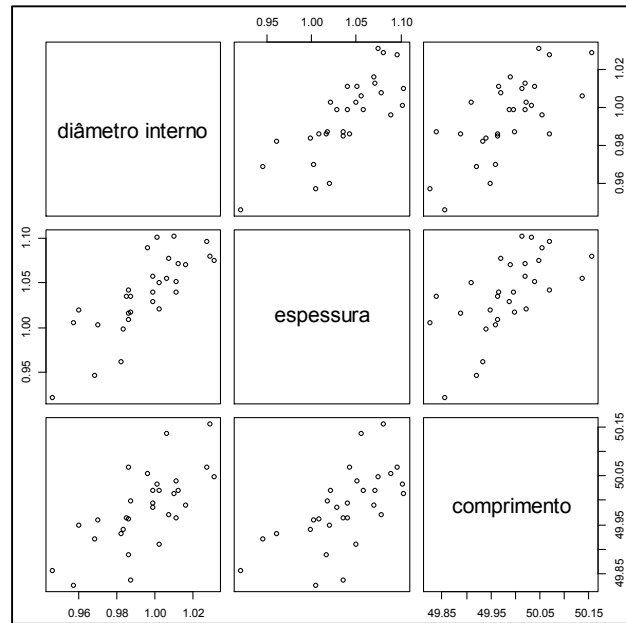


Figura 19. Diagrama de dispersão das variáveis: diâmetro interno, espessura e comprimento.

Fonte: o próprio autor.

Para a Fase I, o banco de dados fornece para $m=30$ amostras com tamanho $n=8$ cada. As estatísticas T_t^2 são calculadas facilmente com a expressão $T_t^2 = n(\bar{\mathbf{X}}_t - \bar{\mathbf{X}})^T S^{-1}(\bar{\mathbf{X}}_t - \bar{\mathbf{X}})$. Para ilustrar o cálculo, considere o valor de T_1^2 .

$$T_1^2 = 8 \left((1,03 \ 1,08 \ 50,16) - (0,99 \ 1,04 \ 49,98) \right)^T \times$$

$$\begin{pmatrix} 0,0025 & 0,0036 & 0,0067 \\ 0,0036 & 0,0140 & 0,0100 \\ 0,0067 & 0,0100 & 0,0590 \end{pmatrix}^{-1} \times \left((1,03 \ 1,08 \ 50,16) - (0,99 \ 1,04 \ 49,98) \right)$$

$$T_1^2 = 4,99$$

Na Fase I, o LSC é obtido pela expressão (48).

$$LSC = \frac{3(30-1)(8-1)}{30 \times 8 - 30 - 3 + 1} F_{0,01;3;30,8-30-3+1} = 11,35$$

Por fim, o gráfico de controle pode ser construído. A Figura 20 ilustra a Fase I do monitoramento do processo de tubos de fibra de carbono.

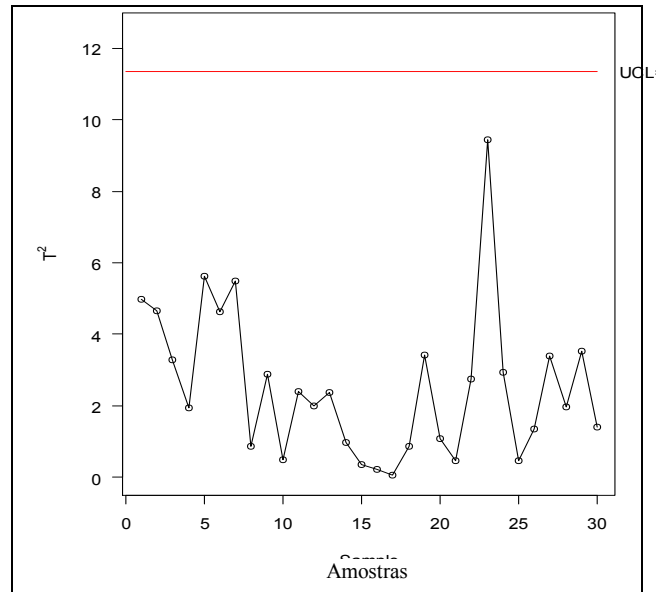


Figura 20. Gráfico de controle T^2 de Hotelling do processo de fabricação de tubos de fibra de carbono (Fase I).

Fonte: o próprio autor.

Para a Fase II o banco de dados fornece $m=25$ amostras com tamanho $n=8$. O LSC é obtido pela expressão 49, ou seja, $LSC = \frac{3(30+1)(8-1)}{30 \times 8 - 30 - 3 + 1} F_{0,01;3;30,8-30-3+1} = 12,13$. O Gráfico de controle T^2 de Hotelling para a Fase II é apresentado na Figura 21.

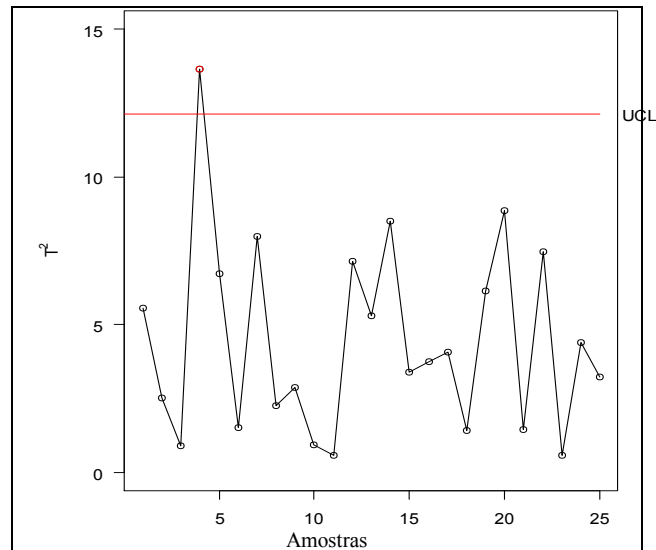


Figura 21. Gráfico de controle T^2 de Hotelling do processo de fabricação de tubos de fibra de carbono (Fase II).

Fonte: o próprio autor.

Através da análise gráfica, é possível observar que a 4ª amostra apresenta evidências de que alguma causa especial atua no processo.

Para identificar qual das características de qualidade sofreu deslocamento em seu valor médio, emprega-se um método para decompor a estatística T_t^2 (ALT, 1985; DOGANAKSOY; FALTIN; TUCKER, 1991; MASON; TRACY; YOUNG, 1995; MURPHY, 1987; WIERDA, 1994)

O método de Mason, Tracy e Young (1995) será apresentado em etapas para ilustrar a decomposição da estatística T_t^2 em componentes que refletem a contribuição de cada variável. As etapas são:

- (i) Calcular a estatística T_j^2 para cada variável:

$$T_j^2 = \frac{n(x_j - \bar{x}_j)^2}{S_j^2} \quad (62)$$

sendo: $\bar{x}_j$ e S_j^2 , respectivamente, a média e a variância de da j -ésima variável.

- (ii) Comparar com o LSC :

$$LSC = \frac{p(m+1)(m-1)}{m^2 - mp} F_{\alpha, p, m-p} \quad (63)$$

- (iii) Excluir as variáveis que satisfaçam a relação: $T_j^2 > LSC$.
- (iv) Calcular a estatística de T^2 para a combinação das variáveis que não satisfaz a condição (iii), por exemplo: $T_{(x_i, x_j)}^2$, sendo $i \neq j$.
- (v) Comparar cada estatística calculada em (iv) com o LSC em (ii).
- (vi) Realizar o procedimento de forma iterativa até a última combinação que inclui todas as características de qualidade.

Empregando a técnica de decomposição na 4ª amostra, tem-se:

$$T_1^2 = 2,44; T_2^2 = 12,26; T_3^2 = 3,82; \bar{X}_{4,j} = [1,02; 1,19; 50,15]$$

$$LSC = \frac{1(30+1)(30-1)}{30^2 - 30 \cdot 1} F_{\alpha=0,01,1,30-1} = 7,85$$

Como $T_2^2 = 12,26 > 7,85$, x_2 contribui de forma significativa para que a 4ª amostra apresente evidência de causa especial.

Todas as combinações que inclui x_2 devem ser eliminadas. Restando apenas o par $T_{(x_1, x_3)}^2$.

$$T^2_{(x_1, x_3)} = 8 \left((1,02 \ 50,15) - (0,99 \ 1,04) \right)^T \times$$

$$\begin{pmatrix} 0,0025 & 0,0067 \\ 0,0067 & 0,0592 \end{pmatrix}^{-1} \times \left((1,02 \ 50,15) - (0,99 \ 1,04) \right) = 4,15$$

$$LSC = \frac{2(30+1)(30-1)}{30^2 - 30.2} F_{\alpha=0,01,2,30-2} = 9,77$$

Se $T^2_{(x_1, x_3)} < 9,77$, conclui-se que x_1 e x_3 não contribuem para o sinal.

A decomposição de Mason, Tracy e Young (1995) está disponível no software *R* através do pacote MSQC. A Figura 22 ilustra a decomposição da 4ª amostra.

Observa-se que todas as combinações em que x_2 está incluída, o p -valor é inferior ao nível de significância $\alpha = 0,01$ adotado. Evidenciando, portanto, a influência desta variável.

	t2	decomp	ucl	p-value	1	2	3
[1,]	3.3800	6.9823	0.0763	1	0	0	
[2,]	12.2223	6.9823	0.0015	2	0	0	
[3,]	4.0347	6.9823	0.0540	3	0	0	
[4,]	12.3549	9.7767	0.0001	1	2	0	
[5,]	4.8015	9.7767	0.0158	1	3	0	
[6,]	12.9364	9.7767	0.0001	2	3	0	
[7,]	13.6477	12.1347	0.0000	1	2	3	

Figura 22. Decomposição Mason, Tracy e Young (1995) calculada com o software *R*.

Fonte: o próprio autor.

3.3 EFEITO DA AUTOCORRELAÇÃO EM PROCESSOS BIVARIADOS: UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA

O gráfico T^2 de Hotelling foi criado para ser usado quando a hipótese de independência entre as observações de uma ou mais características de qualidade não é violada. Desconsiderar o efeito dessa hipótese é bastante prejudicial para o desempenho do gráfico de controle.

Para estudar o efeito da autocorrelação, considerou-se a distância:

$$D^2 = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \Gamma^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_0) \quad (64)$$

sendo Γ calculada pela expressão (30).

Sem perda de generalidade, seja $\Phi = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, $\Sigma_e = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$,

$\mu_0 = (\mu_{01} = 0; \mu_{02} = 0)^T$ e $\mathbf{X} = (x; y)$.

Das expressões (30) e (64) segue que a distância D^2 equivale a:

$$D^2 = (x \ y) \begin{bmatrix} \frac{1}{1-a^2} & \frac{\rho}{1-ab} \\ \frac{\rho}{1-ab} & \frac{1}{1-b^2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{-a^3bx^2 + 2\rho a^2b^2xy + a^2x^2 - 2\rho a^2xy - ab^3y^2 + abx^2 + aby^2 - 2\rho b^2xy + b^2y^2 - x^2 + 2\rho xy - y^2}{(ab-1)^{-1}(-a^2b^2\rho^2 + a^2b^2 + a^2\rho^2 - 2ab + b^2\rho^2 - \rho^2 + 1)} \quad (65)$$

a equação (65) representa a influência de a , b e ρ na distância D^2 .

Se $a=b=0$, ou seja, $\Phi = 0$ (não há autocorrelação), a distância D^2 se reduz a:

$$D^2 = (x^2 - 2\rho xy + y^2) / (1 - \rho^2) \quad (66)$$

Quando não há autocorrelação, ou seja, os dados são independentes, D^2 possui distribuição *qui-quadrado* com p graus de liberdade (χ_p^2). Para avaliar o efeito da autocorrelação, utilizou-se o caso bivariado e $\alpha = 0,005$ ($\chi_{p=2; \alpha=0,005}^2$), sendo, neste caso, $D^2 = 10,5966$.

Quando não há deslocamento, o processo encontra-se em controle estatístico. Espera-se, neste caso, que o sinal dado pelo gráfico seja um alarme falso. Baseando-se na expressão (48), adotar o valor $D^2 = 10,5966$, equivale a um $NMA_0 = 1/0,005 = 200$, ou seja, um alarme falso, em média, para cada 200 amostras avaliadas quando é utilizado o gráfico T^2 de Hotelling.

Baseando-se no modelo VAR(1), o vetor de médias do processo quando em controle (μ_0) pode sofrer deslocamentos da ordem de δ para um novo patamar (μ_1), em que δ é um vetor de ordem $(px1)$ e cada elemento representa a magnitude do deslocamento no valor médio da p -ésima variável. Para se ter uma ideia do que ocorre na média do processo após um deslocamento, o modelo VAR(1) é aqui representado em função do vetor de erros (e_t) e do vetor de médias (μ_0):

$$\mathbf{X}_t = \mu_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi^i e_{t-i} \quad (67)$$

Se o deslocamento ocorrer no vetor de médias do processo em controle, em algum instante de tempo $t = T$, então a média de $\mathbf{X}_t$ mudará de μ_0 para:

$$\xi = \mu_0 + \delta \quad (68)$$

Sem perda de generalidade, considerando-se $\boldsymbol{\mu}_0 = 0$, a mudança no vetor de médias pode ser representada em três estágios:

$$\mathbf{X}_t = \begin{cases} \Phi \mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{e}_t & t < T \\ \boldsymbol{\delta} + \Phi \mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{e}_t & t = T \\ (I - \Phi)\boldsymbol{\delta} + \Phi \mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{e}_t & t > T \end{cases} \quad (69)$$

O gráfico de melhor desempenho será o que detectar com maior rapidez, a partir de um instante de tempo $t = T$, alteração no valor médio das características de qualidade que estão sendo monitoradas.

Na avaliação gráfica do efeito da autocorrelação, considerou-se que o deslocamento seja descrito pela expressão (68). Por exemplo, em um processo bivariado, a ocorrência de uma causa especial desloca o vetor de médias $\boldsymbol{\mu}_0 = (\mu_{01} = 0; \mu_{02} = 0)^T$ para um novo patamar $\boldsymbol{\mu}_1 = (\mu_{01} + \delta_{1\mu}; \mu_{02} + \delta_{2\mu})^T$.

Nas Seções 3.3.1 e 3.3.2, a avaliação gráfica é apresentada com o processo em controle ($\boldsymbol{\delta} = 0$) e com o processo fora de controle ($\boldsymbol{\delta} \neq 0$), respectivamente.

3.3.1 Avaliação gráfica do efeito da autocorrelação com o processo em controle

Em um processo isento de autocorrelação ($a=b=0$) e considerando $\rho = 0,7$, tem-se $D^2 = 1,9608x^2 - 2,7451xy + 1,9608y^2$. Quando há presença de autocorrelação, supondo $a = b = 0,9$ e $\rho = 0,7$, $D^2 = 0,3725x^2 - 0,5216xy + 0,37256y^2$. As elipses que representam as curvas de nível das distribuições para $D^2 = 10,5966$ são ilustradas na Figura 23.

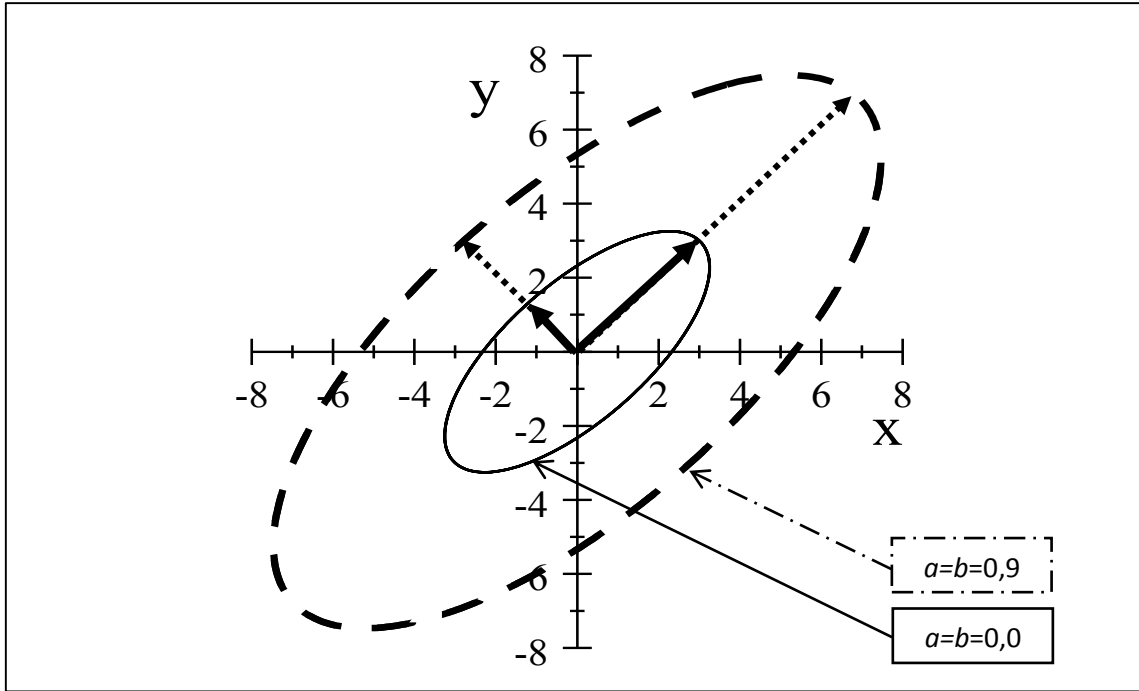


Figura 23. Elipses $a = b = 0$; $a = b = 0,9$; $\rho = 0,7$.

Fonte: o próprio autor.

A autocorrelação aumenta o semieixo da elipse (veja a elipse em que $a=b=0,9$ na Figura 23). Quando a , b e ρ são conhecidos, a distância D^2 , ver expressão (65), que é uma forma quadrática, pode ser reescrita como:

$$mx^2 - 2nxy + oy^2 = \chi_{\alpha,p}^2 \quad (70)$$

em que m , n e o são constantes.

Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores associados aos autovetores e_1^T e e_2^T de A :

$$A = \begin{pmatrix} m & -n \\ -n & o \end{pmatrix} \quad (71)$$

Aplicando o Teorema dos eixos principais em $\mathcal{R}^2$ (ANTON; RORRES, 2012), a expressão (70) pode ser reescrita como:

$$(x \ y) \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \chi_{\alpha,p}^2 \quad (72)$$

Dividindo a expressão (72) por $\chi_{\alpha,p}^2$, tem-se:

$$\frac{x^2}{\frac{\chi_{\alpha,p}^2}{\lambda_1}} + \frac{y^2}{\frac{\chi_{\alpha,p}^2}{\lambda_2}} = 1 \quad (73)$$

O comprimento dos semieixos da elipse são iguais a:

$$\sqrt{\frac{\chi_{\alpha,p}^2}{\lambda_i}}; i=1,2. \quad (74)$$

A Tabela 1 ilustra os comprimentos dos semieixos nos cenários em que $a = b \in \{0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9\}$ e $\rho = 0,7$.

Tabela 1. Comprimentos dos semieixos das elipses.

a	b	$\lambda_1^{(a,b)}$	$\lambda_2^{(a,b)}$	$\sqrt{\frac{\chi_{\alpha,p}^2}{\lambda_1}}$ Comprimento do semieixo 1	$\sqrt{\frac{\lambda_1^{(a,b)}}{\lambda_1^{(0,0)}}}$ Relação entre os comprimentos dos semieixos	$\sqrt{\frac{\chi_{\alpha,p}^2}{\lambda_2}}$ Comprimento do semieixo 2	$\sqrt{\frac{\lambda_2^{(a,b)}}{\lambda_2^{(0,0)}}}$ Relação entre os comprimentos dos semieixos
0	0	0,5882	3,3333	4,2443	1,000	1,7830	1,000
0,1	0,1	0,5824	3,3000	4,2657	1,005	1,7920	1,005
0,2	0,2	0,5647	3,2000	4,3318	1,015	1,8197	1,015
0,3	0,3	0,5353	3,0333	4,4493	1,027	1,8691	1,027
0,4	0,4	0,4941	2,8000	4,6309	1,041	1,9454	1,041
0,5	0,5	0,4412	2,5000	4,9009	1,058	2,0588	1,058
0,6	0,6	0,3765	2,1333	5,3054	1,083	2,2287	1,083
0,7	0,7	0,3000	1,7000	5,9432	1,120	2,4967	1,120
0,8	0,8	0,2118	1,2000	7,0739	1,190	2,9716	1,190
0,9	0,9	0,1118	0,6333	9,7371	1,376	4,0904	1,376

Nota: $\chi_{\alpha,p}^2 = 10,5966$. $\lambda_1^{(a,b)}$ representa o autovalor.

Fonte: o próprio autor.

Observando-se as Figuras 24-26, maior é a região elíptica na medida em que aumenta a autocorrelação (a e b aumentam).

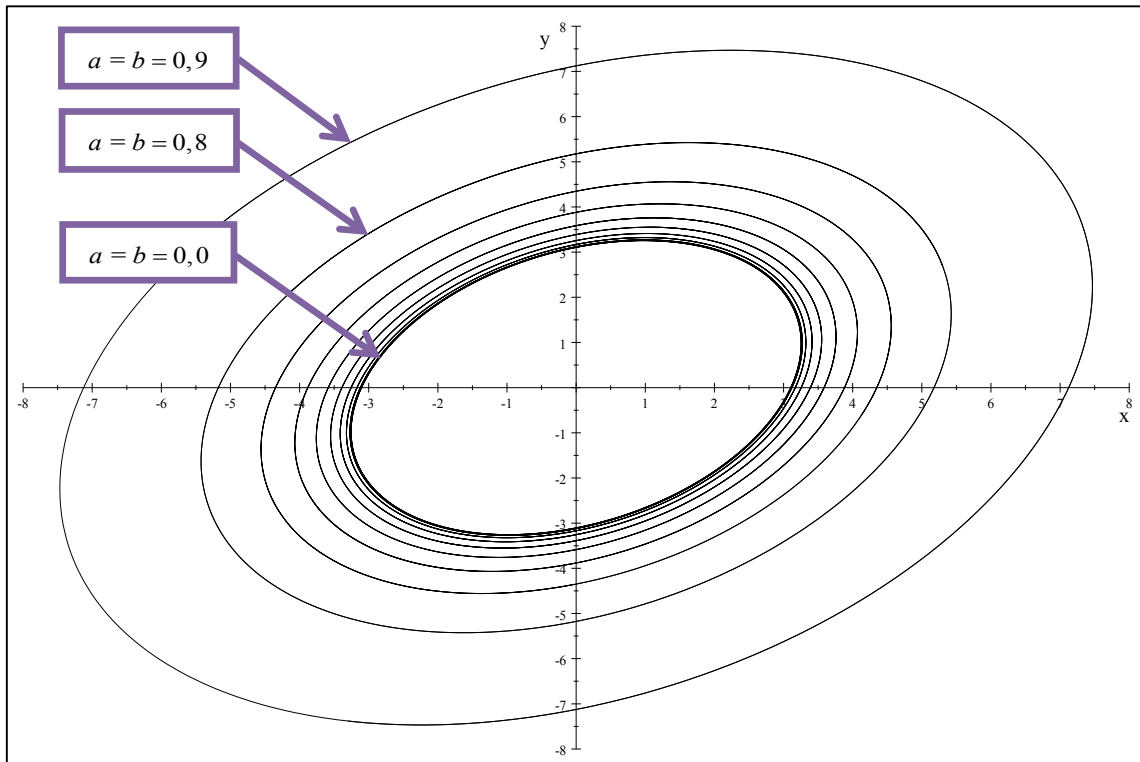


Figura 24. Ellipses: $a = b \in \{0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9\}$; $\rho = 0,3$.

Fonte: o próprio autor.

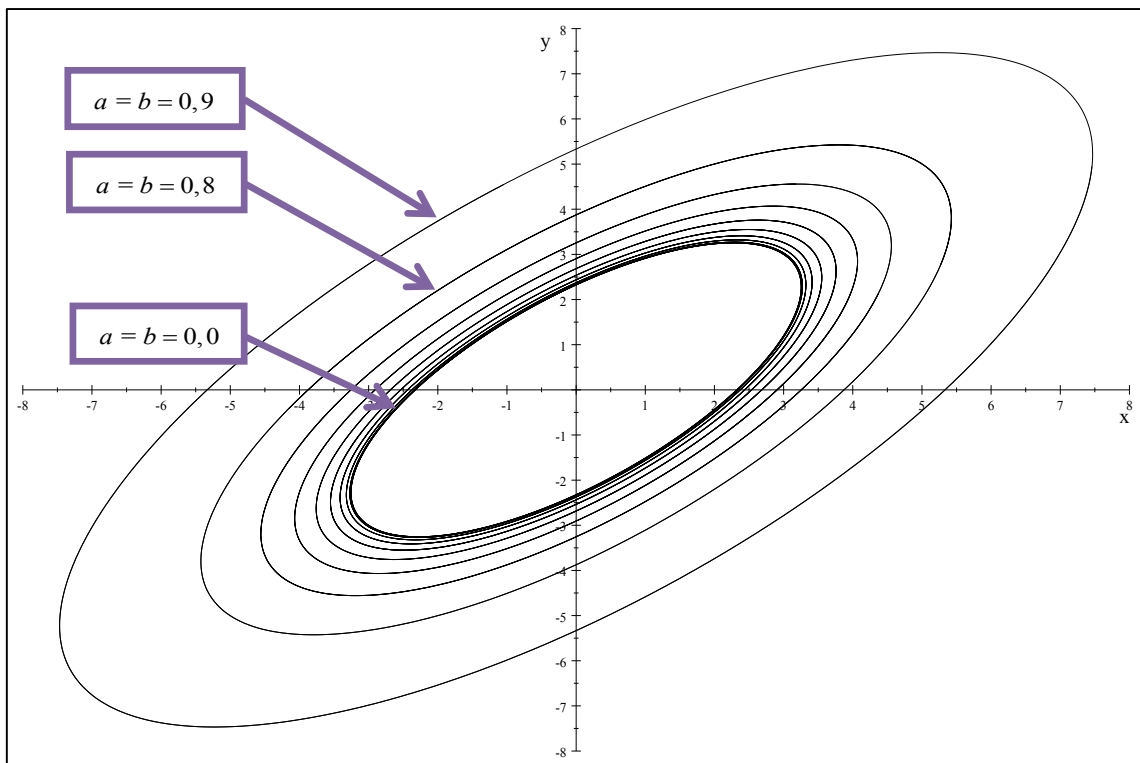


Figura 25. Ellipses: $a = b \in \{0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9\}$; $\rho = 0,7$.

Fonte: o próprio autor.

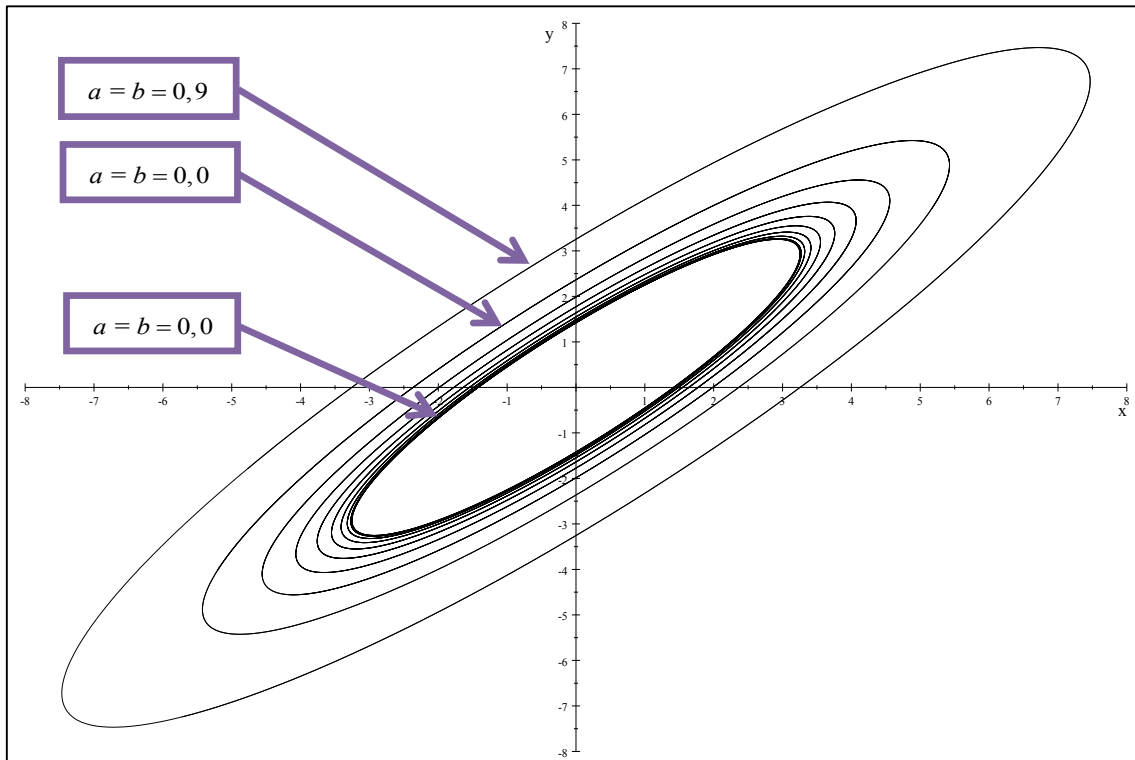


Figura 26. Elipses: $a = b \in \{0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9\}$; $\rho = 0,9$.

Fonte: o próprio autor.

Se os dados são normalmente distribuídos, as elipses das Figuras 24-26 representam todos os pontos equidistantes, na distância de Mahalanobis, da origem. Isto sugere que todos esses pontos têm a mesma probabilidade de serem regidos por uma distribuição normal bivariada com centro em $(0,0)$, pois $\mu_0 = 0$. No gráfico T^2 de Hotelling, com o limite de controle igual a $D^2 = 10,5966$, gera, em média, um alarme falso a cada 200 amostras coletadas quando $a=b=0$. O mesmo não ocorre quando $a=b \neq 0,0$, ou seja, a taxa média de alarmes falsos não corresponde a um alarme a cada 200 amostras coletadas, mesmo que seja usado como *LSC* o valor 10,5966. Esta consideração é válida quando as amostras unitárias coletadas no processo geram dados descritos por um modelo VAR(1), ou seja, equivale a dizer que as amostras unitárias são autocorrelacionadas.

3.3.2 Avaliação gráfica do efeito da autocorrelação com o processo fora de controle

A Figura 27 ilustra um processo isento de autocorrelação com $a=b=0$ e $\rho = 0,7$. A elipse tracejada com centro em $(0,0)$ representa um processo em controle e sua equação

é $D^2 = 1,9608x^2 - 2,7451xy + 1,9608y^2 = 10,5966$. As demais elipses representam a ocorrência de uma causa especial que desloca o vetor de médias $\mu_0 = (\mu_{01} = 0; \mu_{02} = 0)^T$ para um novo patamar:

- Deslocamento $\delta = 1 \rightarrow \mu_1 = (\mu_{01} + 1; \mu_{02} + 1)^T$; sendo:

$$D^2 = 1,9608x^2 - 2,7451xy - 1,1765x + 1,9608y^2 - 1,1765y + 1,1765 = 10,5966$$

- Deslocamento $\delta = 2 \rightarrow \mu_1 = (\mu_{01} + 2; \mu_{02} + 2)^T$; sendo:

$$D^2 = 1,9608x^2 - 2,7451xy - 2,3529x + 1,9608y^2 - 2,3529y + 4,7059 = 10,5966$$

- Deslocamento $\delta = 3 \rightarrow \mu_1 = (\mu_{01} + 3; \mu_{02} + 3)^T$; sendo:

$$D^2 = 1,9608x^2 - 2,7451xy - 3,5294x + 1,9608y^2 - 3,5294y + 10,588 = 10,5966$$

A Figura 28 ilustra um processo em que $a = b = 0,7$ e $\rho = 0,7$. A elipse tracejada com centro em $(0,0)$ representa um processo em controle e sua equação é $D^2 = x^2 - 1,4xy + y^2 = 10,06$. O valor 10,06 foi usado para que fosse possível fazer uma comparação justa que, na presença de autocorrelação, mantém a taxa média de alarmes falsos igual a um alarme a cada 200 amostras. As demais elipses representam a ocorrência de uma causa especial que desloca o vetor de médias $\mu_0 = (\mu_{01} = 0; \mu_{02} = 0)^T$ para um novo patamar:

- Deslocamento $\delta = 1 \rightarrow \mu_1 = (\mu_{01} + 1; \mu_{02} + 1)^T$; sendo:

$$D^2 = x^2 - 1,4xy - 0,18x + y^2 - 0,18y + 0,054 = 10,06$$

- Deslocamento $\delta = 2 \rightarrow \mu_1 = (\mu_{01} + 2; \mu_{02} + 2)^T$; sendo:

$$D^2 = x^2 - 1,4xy - 0,36x + y^2 - 0,36y + 0,216 = 10,06$$

- Deslocamento $\delta = 3 \rightarrow \mu_1 = (\mu_{01} + 3; \mu_{02} + 3)^T$; sendo:

$$D^2 = x^2 - 1,4xy - 0,54x + y^2 - 0,54y + 0,486 = 10,06$$

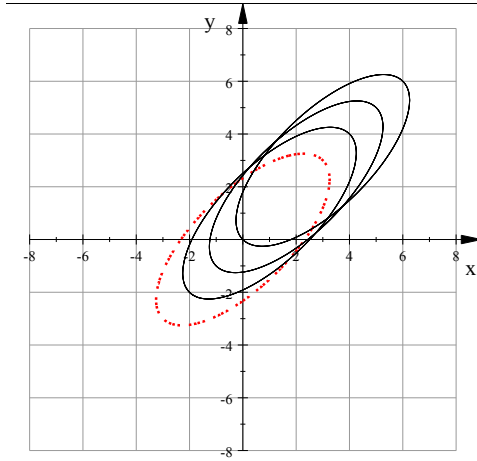


Figura 27. Elipse: $a=b=0$ e $\rho = 0,7$.
Fonte: o próprio autor.

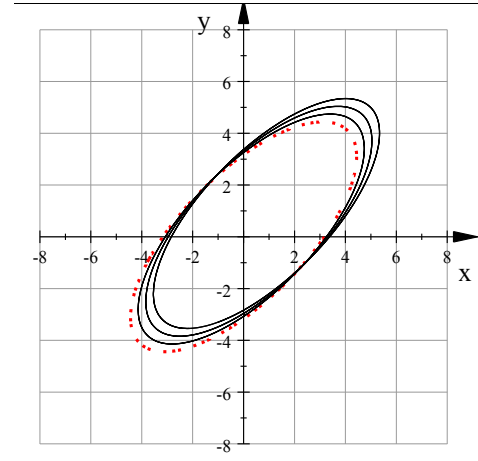


Figura 28. Elipse: $a=b=0,7$ e $\rho = 0,7$.
Fonte: o próprio autor.

Observa-se na Figura 27 que em processos sem autocorrelação ($a=b=0$) o deslocamento no vetor de médias causado por uma causa especial é representado pelas elipses que se afastam do centro em $(0,0)$, caracterizando que o gráfico de T^2 , nesse caso, apresenta desempenho superior em relação ao processo em que a autocorrelação está presente.

Na Figura 27, o semieixo principal da elipse se desloca da origem, $\mu_0 = (\mu_{01} = 0; \mu_{02} = 0)^T$, para um novo patamar $\mu_0 = (\mu_{01} = \delta; \mu_{02} = \delta)^T$, em que $\delta \in \{1, 2, 3\}$.

Na Figura 28, as elipses apresentam maior resistência em se manter próxima ao centro em $(0,0)$ quando ocorrem deslocamentos que desajustam o vetor de médias, significando que o desempenho do gráfico T^2 é inferior quando há presença de autocorrelação.

Ao contrário do que ocorre na Figura 27, na Figura 28 o semieixo principal da elipse se desloca da origem, $\mu_0 = (\mu_{01} = 0; \mu_{02} = 0)^T$ para um novo patamar inferior a $\mu_0 = (\mu_{01} = \delta; \mu_{02} = \delta)^T$, em que $\delta \in (1, 2, 3)$.

Doravante, dois processos bivariados foram simulados e o gráfico de T^2 aplicado para controlar as variáveis desses processos.

No primeiro processo: $\mu_0 = (0; 0)^T$; $a=b=0,0$; $\rho = 0,7$ e $LSC=10,5966$ ($NMA_0=200$).

No segundo processo: $\mu_0 = (0; 0)^T$; $a=b=0,7$; $\rho = 0,7$ e $LSC=10,06$ ($NMA_0=200$).

Os seguintes deslocamentos no vetor de médias foram adotados: $\delta = (1, 0; 1, 0)^T$, $\delta = (2, 0; 2, 0)^T$ e $\delta = (3, 0; 3, 0)^T$.

As observações das variáveis do primeiro e segundo processos foram geradas com os modelos da expressão (14) e expressão (16), respectivamente.

As Figuras 29, 30 e 31 ilustram os resultados. Em cada gráfico de T^2 , o processo sofre deslocamentos no vetor de médias a partir da amostra 50.

Os resultados evidenciam que a autocorrelação diminui o poder do gráfico em detectar uma causa especial que atua no vetor de médias do processo. Resultados similares foram ilustrados nas Figuras 27 e 28.

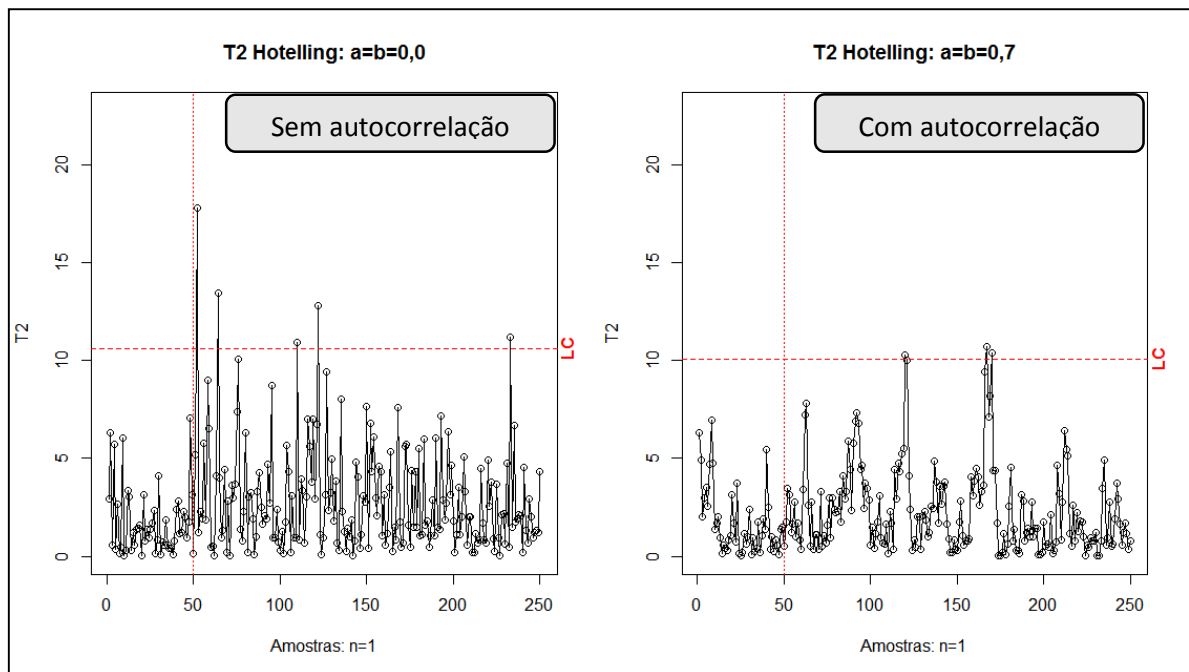


Figura 29. Gráficos T^2 de Hotelling; $\delta = (1, 0; 1, 0)^T$.

Fonte: o próprio autor.

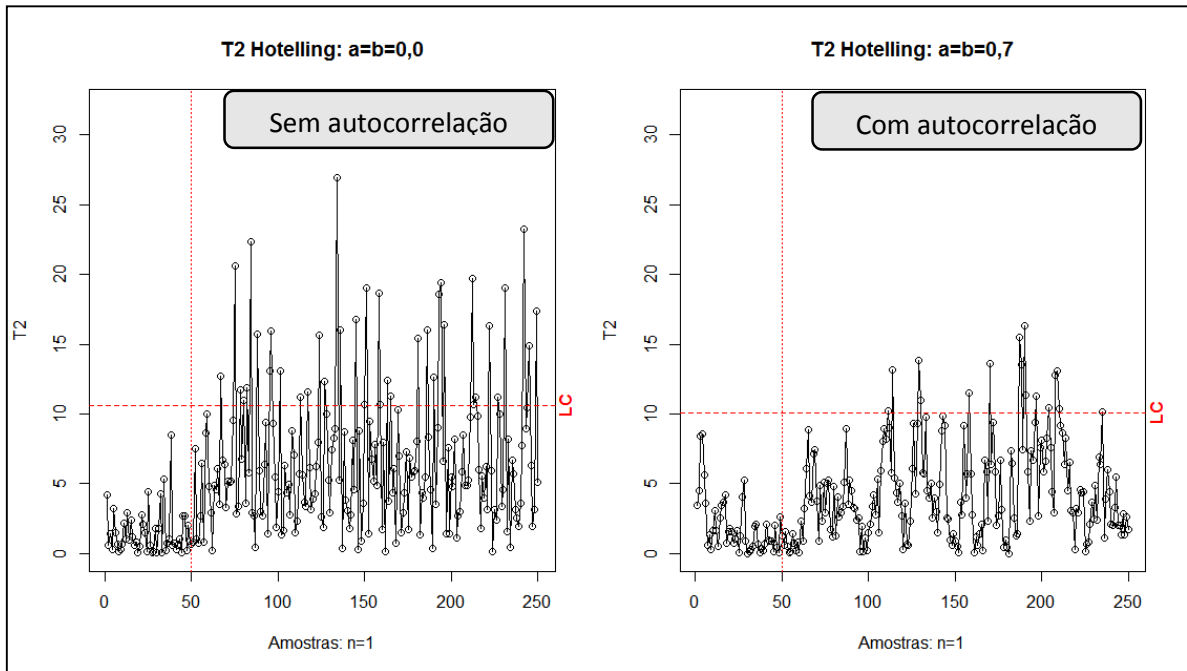


Figura 30. Gráficos T^2 de Hotelling; $\delta = (2, 0; 2, 0)^T$.

Fonte: o próprio autor.

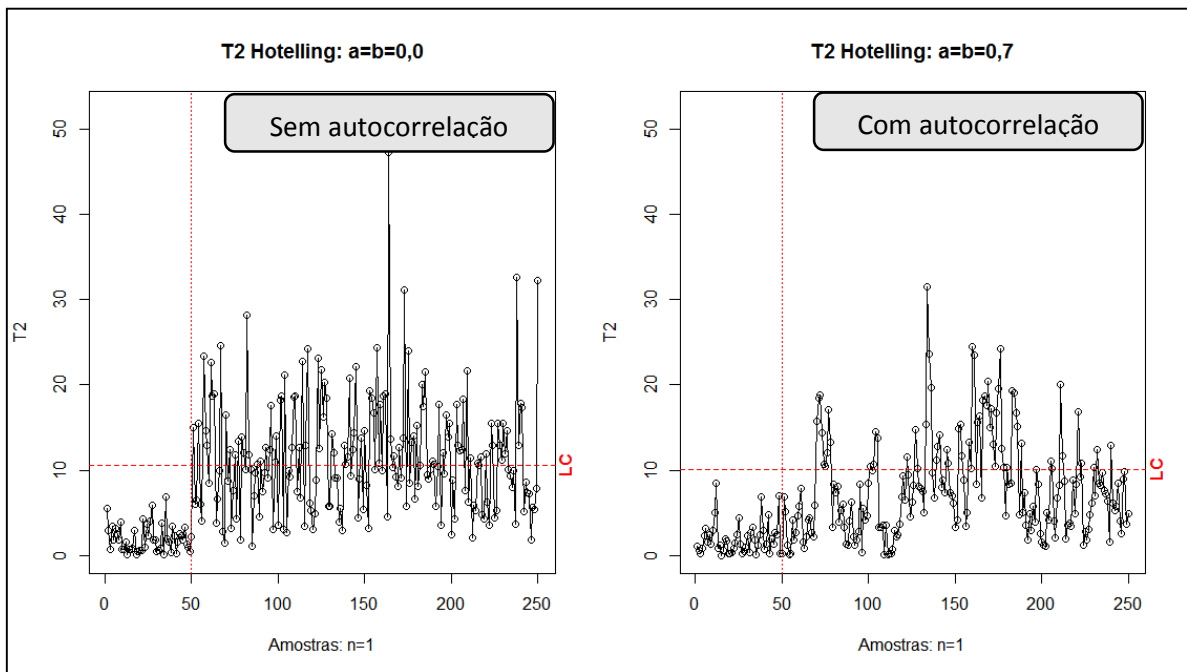


Figura 31. Gráficos T^2 de Hotelling; $\delta = (3, 0; 3, 0)^T$.

Fonte: o próprio autor.

4. EFEITO DA AUTOCORRELAÇÃO NO DESEMPENHO DO GRÁFICO DE CONTROLE USANDO SUBGRUPOS RACIONAIS

Em muitos processos modernos as observações das características de qualidade, coletadas com base no princípio dos subgrupos racionais de tamanho n , podem ser correlacionadas e autocorrelacionadas. Nesta seção será estudado o efeito da autocorrelação e da correlação no gráfico de controle T^2 de Hotelling e em gráficos de controle simultâneos univariados de $\bar{X}$ aplicados no monitoramento de processos com duas características de qualidade. Nesse contexto, sob a hipótese de que as observações são representadas por um vetor autorregressivo de primeira ordem – VAR(1), obtém-se a matriz de variância-covariância ($\Gamma_{\bar{X}}$) do vetor de médias amostrais ($\bar{X}$), veja Apêndice E. A matriz $\Gamma_{\bar{X}}$ é importante para investigar o efeito exato da autocorrelação e da correlação no desempenho dos gráficos de controle.

4.1 DESEMPENHO DO GRÁFICO T^2 DE HOTELLING

Para estudar o efeito da correlação e da autocorrelação no desempenho do gráfico de T^2 , assumiu-se um processo bivariado e amostras de tamanho $n=4$ sendo coletadas seguindo o princípio dos subgrupos racionais. O desempenho dos gráficos foi medido pelo número médio de amostras até o sinal (NMA). Quando o processo está em controle, o NMA mede o número médio de amostras até a ocorrência de um alarme falso (NMA_0). Quando o processo está fora de controle, o gráfico com menor NMA detecta com maior rapidez mudança no processo.

Considerando que:

$$\Phi = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad (75)$$

$$\Sigma_e = \begin{pmatrix} \sigma_{e_X}^2 & \sigma_{e_{XY}} \\ \sigma_{e_{XY}} & \sigma_{e_Y}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{e_X}^2 & \rho \sigma_{e_X} \sigma_{e_Y} \\ \rho \sigma_{e_X} \sigma_{e_Y} & \sigma_{e_Y}^2 \end{pmatrix} \quad (76)$$

e admitindo que $\Gamma = \Gamma_X(0) = \Sigma_X$, a partir das expressões (29), (75) e (76), tem-se:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-a^2)^{-1} \sigma_{e_X}^2 & (1-ab)^{-1} \sigma_{e_{XY}} \\ (1-ab)^{-1} \sigma_{e_{XY}} & (1-b^2)^{-1} \sigma_{e_Y}^2 \end{pmatrix} \quad (77)$$

A matriz de variância-covariância do vetor de médias amostrais formadas por subgrupos racionais de tamanho n é desenvolvida no Apêndice E:

$$\Gamma_{\bar{X}} = \begin{pmatrix} \zeta_{11} & \zeta_{12} \\ \zeta_{21} & \zeta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_X^2}{n} \left[1 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)a^j \right] & \frac{\sigma_{XY}}{n} \left[1 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)a^j + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)b^j \right] \\ \frac{\sigma_{XY}}{n} \left[1 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)a^j + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)b^j \right] & \frac{\sigma_Y^2}{n} \left[1 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)b^j \right] \end{pmatrix} \quad (78)$$

Na ausência da autocorrelação ($a=b=0$), $\Gamma_{\bar{X}}$ se reduz a $\Psi_{\bar{X}} = n^{-1}\Sigma$. Na prática, amostras preliminares são coletadas para estimar a matriz Γ e os parâmetros a , b e ρ .

Quando o vetor de médias $\mu_0 = (\mu_{01}, \mu_{02})^T$ e a matriz $\Gamma_{\bar{X}}$ são conhecidos, a estatística de monitoramento do gráfico T^2 de Hotelling é representada por:

$$T_t^2 = (\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)^T \Gamma_{\bar{X}}^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \mu_0) \quad (79)$$

Com o processo em controle, $T_t^2 \sim \chi_p^2$. Se ocorrer uma causa especial que provoque a mudança no vetor de médias para $\mu_1 = (\mu_{11}, \mu_{12})^T$, $T_t^2 \sim \chi_{(p,\lambda)}^2$ com parâmetro de não centralidade $\lambda^2 = \delta^T \Gamma_{\bar{X}}^{-1} \delta$, sendo $\delta = (\delta_1, \delta_2)^T = \left(\frac{\mu_{11} - \mu_{01}}{\sigma_{e_X}}, \frac{\mu_{12} - \mu_{02}}{\sigma_{e_Y}} \right)^T$. Sem perda de generalidade, considerou-se na avaliação do desempenho do gráfico de T^2 que $\mu_{01} = \mu_{02} = 0$ e $\sigma_{e_X} = \sigma_{e_Y} = 1, 0$. Na ausência de autocorrelação, o parâmetro de não centralidade é dado por $\lambda^2 = \delta^T \Psi_{\bar{X}}^{-1} \delta$. Como $\Gamma_{\bar{X}} > \Psi_{\bar{X}}$, então $\delta^T \Gamma_{\bar{X}}^{-1} \delta < \delta^T \Psi_{\bar{X}}^{-1} \delta$, pois $\Gamma_{\bar{X}}^{-1} < \Psi_{\bar{X}}^{-1}$. Conclui-se então que a autocorrelação reduz o poder o gráfico em detectar uma causa especial.

Baseando-se na expressão (79), tem-se:

$$T^2 = (\bar{\mathbf{X}}_1 + \delta_1)^2 \theta_{11} + (\bar{\mathbf{X}}_2 + \delta_2)^2 \theta_{22} + 2(\bar{\mathbf{X}}_1 + \delta_1)(\bar{\mathbf{X}}_2 + \delta_2) \theta_{12} \quad (80)$$

sendo $\bar{\mathbf{X}}_1$ e $\bar{\mathbf{X}}_2$ as médias amostrais das duas características de qualidades de um processo bivariado.

Seja $\Gamma_{\bar{X}}^{-1}$ a matriz inversa de $\Gamma_{\bar{X}}$ (expressão 78) definida por:

$$\Gamma_{\bar{X}}^{-1} = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{12} & \theta_{22} \end{pmatrix} \quad (81)$$

A Tabela 2 apresenta valores de θ_{11} , θ_{22} e θ_{12} para $\rho \in \{0; 0,7\}$, $n \in \{2, 4, 10\}$, e diversas combinações de a e b . Os elementos da diagonal principal de $\Gamma_{\bar{X}}^{-1}$ aumentam com

a correlação e com o tamanho da amostra, porém, diminuem com a autocorrelação. Quando as variáveis são independentes, os elementos da diagonal secundária de $\Gamma_{\bar{X}}^{-1}$ são iguais a zero. Na presença de correlação, eles se tornam negativos.

Tabela 2. Elementos de $\Gamma_{\bar{X}}^{-1}$; a e $b \in (0;0,5;0,7)$; $\rho \in \{0;0,7\}$.

ρ		0								0,7							
	a	0,0	0,0	0,2	0,0	0,5	0,0	0,7		0,0	0,0	0,2	0,0	0,5	0,0	0,7	
	b	0,0	0,2	0,2	0,5	0,5	0,7	0,7		0,0	0,2	0,2	0,5	0,5	0,7	0,7	
$n=2$	θ_{11}	2,00	2,00	1,60	2,00	1,00	2,00	0,60		3,92	3,80	3,14	3,24	1,96	2,73	1,18	
	θ_{22}	2,00	1,60	1,60	1,00	1,00	0,60	0,60		3,92	3,04	3,14	1,62	1,96	0,82	1,18	
	θ_{12}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		-2,75	-2,34	-2,20	-1,42	-1,37	-0,77	-0,82	
$n=4$	θ_{11}	4,00	4,00	2,86	4,00	1,45	4,00	0,75		7,84	7,70	5,60	6,87	2,85	5,86	1,48	
	θ_{22}	4,00	2,86	2,86	1,45	1,45	0,75	0,75		7,84	5,50	5,50	2,50	2,85	1,10	1,48	
	θ_{12}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		-5,49	-4,51	-3,92	-2,68	-2,00	-1,43	-1,03	
$n=10$	θ_{11}	10,0	4,00	6,68	10,0	2,88	10,0	1,23		19,61	19,46	13,09	18,45	5,66	16,65	2,41	
	θ_{22}	10,0	6,68	6,68	2,88	2,88	1,23	1,23		19,61	12,99	13,09	5,32	5,66	2,04	2,41	
	θ_{12}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		-13,73	-11,09	-9,17	-6,71	-3,96	-3,69	-1,68	

Os *NMA*s apresentados nas Tabelas 3, 4 e 5 foram calculados com a expressão (48). Consideraram-se variáveis não correlacionadas, $\rho = 0$, e variáveis com baixa e alta correlação, $\rho = 0,3$ e $0,7$. As Tabelas 3 e 5 apresentam os casos em que as duas variáveis são afetadas por causas especiais (na Tabela 3, $\delta_1 = \delta_2$, e na Tabela 5, $\delta_1 \neq \delta_2$). Na Tabela 4, consideraram-se os casos em que apenas uma variável é afetada por uma causa especial (δ_1 ou $\delta_2 = 0$).

Na ausência de autocorrelação ($a = b = 0$) ou na presença de duas variáveis com o mesmo nível de autocorrelação ($a = b \neq 0$), a alta dependência entre ambas as variáveis melhora o desempenho do gráfico de T^2 em sinalizar deslocamentos na média de apenas uma variável ($\delta_1 \neq 0$; $\delta_2 = 0$ ou $\delta_1 = 0$; $\delta_2 \neq 0$).

Por exemplo, na Tabela 4, se $(a; b; \delta_1; \delta_2) = (0; 0; 0; 1,0)$ e as variáveis são não correlacionadas ($\rho = 0$), o gráfico de T^2 requer, em média, 9,41 amostras para sinalizar o deslocamento na média.

Esse número diminui para 3,15 quando as variáveis são altamente correlacionadas ($\rho = 0,7$). Efeito contrário é observado quando o deslocamento ocorre em ambas as variáveis.

Por exemplo, na Tabela 3, se $(a; b; \delta_1; \delta_2) = (0,7; 0,7; 1,0; 1,0)$ e as variáveis são não correlacionadas ($\rho = 0$), o gráfico de T^2 requer, em média, 41,01 amostras para sinalizar o deslocamento na média. Esse número aumenta para 76,85 quando as variáveis são altamente correlacionadas ($\rho = 0,7$).

Se apenas uma variável é autocorrelacionada e somente uma é afetada por uma causa especial ($a \neq 0; b = 0$ ou $a = 0; b \neq 0$ e $\delta_1 \neq 0; \delta_2 = 0$ ou $\delta_1 = 0; \delta_2 \neq 0$), alta dependência entre as duas variáveis melhora o desempenho do gráfico de T^2 .

Tabela 3. Valores do NMA - Gráfico de T^2 , $\delta_1 = \delta_2$.

$(a; b)$		$(0; 0)$		$(0,0; 0,2)$		$(0,2; 0,2)$		$(0,0; 0,7)$		$(0,7; 0,7)$	
δ_1	δ_2	λ	NMA	λ	NMA	λ	NMA	λ	NMA	λ	NMA
0,0	0,0	0,00	370,40	0,00	370,40	0,00	370,40	,00	370,40	0,00	370,40
$\rho=0,0$											
0,5	0,5	1,41	27,73	1,31	34,43	1,20	43,87	1,09	55,16	0,61	159,45
0,75	0,75	2,12	7,74	1,96	9,99	1,79	13,43	1,63	17,96	0,92	80,52
1,0	1,0	2,83	3,06	2,62	3,89	2,39	5,22	2,18	7,07	1,23	41,01
1,25	1,25	3,54	1,68	3,27	2,02	2,99	2,60	2,72	3,43	1,53	21,85
1,5	1,5	4,24	1,21	3,93	1,36	3,59	1,63	3,27	2,03	1,84	12,35
$\rho=0,3$											
0,5	0,5	1,24	39,83	1,15	48,07	1,05	60,48	1,02	64,48	0,54	187,11
0,75	0,75	1,86	11,92	1,73	15,06	1,57	20,25	1,53	22,03	0,81	103,84
1,0	1,0	2,48	4,62	2,31	5,87	2,10	8,05	2,04	8,83	1,08	56,91
1,25	1,25	3,10	2,34	2,88	2,89	2,62	3,88	2,55	4,24	1,34	31,98
1,5	1,5	3,72	1,51	3,46	1,77	3,14	2,25	3,06	2,43	1,61	18,70
$\rho=0,7$											
0,5	0,5	1,08	55,82	1,02	64,12	,92	81,12	1,01	65,51	0,47	214,55
0,75	0,75	1,63	18,24	1,53	21,87	1,38	30,04	1,52	22,51	0,71	130,24
1,0	1,0	2,17	7,19	2,04	8,76	1,83	12,50	2,02	9,04	0,94	76,85
1,25	1,25	2,71	3,48	2,55	4,20	2,29	6,00	2,53	4,34	1,18	45,73
1,5	1,5	3,25	2,06	3,07	2,42	2,75	3,33	3,04	2,48	1,41	27,90

Por exemplo, na Tabela 4, se $(a; b; \delta_1; \delta_2) = (0; 0,2; 1,0; 0)$ e ambas as variáveis são não correlacionadas ($\rho = 0$), o gráfico de T^2 requer, em média, 9,41 amostras para sinalizar o deslocamento na média. Esse número diminui para 3,24 quando as variáveis são altamente correlacionadas ($\rho = 0,7$).

Os NMA s são sempre maiores quando a variável autocorrelacionada é afetada por uma causa especial. Por exemplo, na Tabela 4, se $\rho = 0,3$ e $(a; b; \delta_1; \delta_2) = (0; 0,2; 0; 1,0)$ o gráfico de T^2 requer, em média, 13,99 amostras para sinalizar o deslocamento na média. Esse número diminui para 8,08 quando $(a; b; \delta_1; \delta_2) = (0; 0,2; 1,0; 0)$.

Tabela 4. Valores do NMA - Gráfico de T^2 , δ_1 ou $\delta_2 = 0$.

(a; b)		(0; 0)		(0,0; 0,2)		(0,2; 0,2)		(0,0; 0,7)		(0,7; 0,7)	
δ_1	δ_2	λ	NMA	λ	NMA	λ	NMA	λ	NMA	λ	NMA
0,0	0,0	0,00	370,40	0,00	370,40	0,00	370,40	0,00	370,40	0,00	370,40
$\rho=0,0$											
0,0	0,5	1,00	67,32	0,85	95,27	0,85	95,27	0,43	230,33	0,43	230,33
0,5	0,0	1,00	67,32	1,00	67,32	0,85	95,27	1,00	67,32	0,43	230,33
0,0	0,75	1,50	23,34	1,27	37,58	1,27	37,58	0,65	147,06	0,65	147,06
0,75	0,0	1,50	23,34	1,50	23,34	1,27	37,58	1,50	23,34	0,65	147,06
0,0	1,0	2,00	9,41	1,69	16,19	1,69	16,19	0,87	90,63	0,87	90,63
1,0	0,0	2,00	9,41	2,00	9,41	1,69	16,19	2,00	9,41	0,87	90,63
0,0	1,25	2,50	4,51	2,11	7,85	2,11	7,85	1,08	55,87	1,08	55,87
1,25	0,0	2,50	4,51	2,50	4,51	2,11	7,85	2,50	4,51	1,08	55,87
0,0	1,5	3,00	2,57	2,54	4,31	2,54	4,31	1,30	35,03	1,30	35,03
1,5	0,0	3,00	2,57	3,00	2,57	2,54	4,31	3,00	2,57	1,30	35,03
$\rho=0,3$											
0,0	0,5	1,05	60,48	0,89	87,08	,89	86,92	0,45	224,59	0,45	221,26
0,5	0,0	1,05	60,48	1,05	60,61	,89	86,92	1,03	62,91	0,45	221,26
0,0	0,75	1,57	20,25	1,33	33,13	1,33	33,05	0,67	140,79	0,68	137,24
0,75	0,0	1,57	20,25	1,57	20,31	1,33	33,05	1,55	21,33	0,68	137,24
0,0	1,0	2,10	8,05	1,77	13,99	1,77	13,94	0,89	85,39	0,91	82,48
1,0	0,0	2,10	8,05	2,09	8,08	1,77	13,94	2,06	8,52	0,91	82,48
0,0	1,25	2,62	3,88	2,21	6,73	2,21	6,71	1,12	51,96	1,14	49,82
1,25	0,0	2,62	3,88	2,62	3,89	2,21	6,71	2,58	4,09	1,14	49,82
0,0	1,5	3,14	2,25	2,66	3,72	2,66	3,71	1,34	32,25	1,36	30,74
1,5	0,0	3,14	2,25	3,14	2,26	2,66	3,71	3,09	2,36	1,36	30,74
$\rho=0,7$											
0,0	0,5	1,40	28,53	1,17	46,04	1,18	45,00	0,52	192,22	0,61	161,55
0,5	0,0	1,40	28,53	1,39	29,27	1,18	45,00	1,21	42,47	0,61	161,55
0,0	0,75	2,10	8,00	1,76	14,27	1,78	13,86	0,79	108,49	0,91	82,17
0,75	0,0	2,10	8,00	2,08	8,24	1,78	13,86	1,82	12,90	0,91	82,17
0,0	1,0	2,80	3,15	2,35	5,55	2,37	5,39	1,05	60,27	1,21	42,09
1,0	0,0	2,80	3,15	2,78	3,24	2,37	5,39	2,42	5,01	1,21	42,09
0,0	1,25	3,50	1,72	2,93	2,75	2,96	2,67	1,31	34,22	1,52	22,51
1,25	0,0	3,50	1,72	3,47	1,75	2,96	2,67	3,03	2,51	1,52	22,51
0,0	1,5	4,20	1,23	3,52	1,70	3,55	1,66	1,57	20,16	1,82	12,75
1,5	0,0	4,20	1,23	4,16	1,24	3,55	1,66	3,63	1,58	1,82	12,75

Tabela 5. Valores do NMA - Gráfico de T^2 , $\delta_1 \neq \delta_2$.

(a; b)		(0; 0)		(0,0; 0,2)		(0,2; 0,2)		(0,0; 0,7)		(0,7; 0,7)	
δ_1	δ_2	λ	NMA	λ	NMA	λ	NMA	λ	NMA	λ	NMA
0,0	0,0	0,00	370,40	0,00	370,40	0,00	370,40	0,00	370,40	0,00	370,40
$\rho=0,0$											
0,5	0,75	1,80	13,19	1,61	18,67	1,52	22,28	1,19	44,09	0,78	109,84
0,75	0,5	1,80	13,19	1,72	15,28	1,52	22,28	1,56	20,69	0,78	109,84
0,5	1,0	2,24	6,50	1,96	9,99	1,89	11,33	1,32	33,41	0,97	72,02
1,0	0,5	2,24	6,50	2,17	7,17	1,89	11,33	2,05	8,72	0,97	72,02
0,5	1,25	2,69	3,56	2,34	5,62	2,28	6,14	1,47	24,53	1,17	46,56
1,25	0,5	2,69	3,56	2,64	3,79	2,28	6,14	2,54	4,30	1,17	46,56
0,5	1,5	3,16	2,22	2,73	3,43	2,67	3,64	1,64	17,76	1,37	30,26
1,5	0,5	3,16	2,22	3,12	2,31	2,67	3,64	3,03	2,49	1,37	30,26
0,75	1,0	2,50	4,51	2,26	6,28	2,11	7,85	1,73	14,97	1,08	55,87
1,0	0,75	2,50	4,51	2,37	5,38	2,11	7,85	2,10	7,97	1,08	55,87
0,75	1,25	2,92	2,79	2,59	4,02	2,46	4,73	1,85	12,12	1,26	37,85
1,25	0,75	2,92	2,79	2,80	3,14	2,46	4,73	2,58	4,06	1,26	37,85
0,75	1,5	3,35	1,90	2,95	2,71	2,83	3,04	1,99	9,63	1,45	25,55
1,5	0,75	3,35	1,90	3,26	2,05	2,83	3,04	3,07	2,41	1,45	25,55
1,0	1,25	3,20	2,14	2,91	2,81	2,71	3,50	2,27	6,14	1,39	29,22
1,25	1,0	3,20	2,14	3,02	2,53	2,71	3,50	2,65	3,76	1,39	29,22
1,0	1,5	3,61	1,61	3,23	2,10	3,05	2,46	2,39	5,25	1,56	20,60
1,5	1,0	3,61	1,61	3,44	1,79	3,05	2,46	3,12	2,29	1,56	20,60
1,25	1,5	3,91	1,38	3,56	1,65	3,30	1,98	2,82	3,09	1,69	16,09
1,5	1,25	3,91	1,38	3,67	1,55	3,30	1,98	3,19	2,17	1,69	16,09
$\rho=0,3$											
0,5	0,75	1,61	18,95	1,43	27,08	1,36	31,11	1,09	55,75	0,70	132,76
0,75	0,5	1,61	18,95	1,56	20,86	1,36	31,11	1,50	23,26	0,70	132,76
0,5	1,0	2,04	8,76	1,77	14,02	1,73	15,13	1,19	44,37	0,89	86,86
1,0	0,5	2,04	8,76	2,02	9,15	1,73	15,13	2,00	9,40	0,89	86,86
0,5	1,25	2,51	4,43	2,15	7,42	2,12	7,71	1,32	33,36	1,09	55,14
1,25	0,5	2,51	4,43	2,50	4,50	2,12	7,71	2,51	4,47	1,09	55,14
0,5	1,5	3,00	2,56	2,55	4,24	2,54	4,30	1,48	24,25	1,30	34,97

1,5	0,5	3,00	2,56	3,00	2,57	2,54	4,30	3,01	2,53	1,30	34,97
0,75	1,0	2,21	6,75	1,99	9,61	1,87	11,74	1,59	19,66	0,96	73,77
1,0	0,75	2,21	6,75	2,12	7,75	1,87	11,74	2,01	9,29	0,96	73,77
0,75	1,25	2,62	3,88	2,30	5,91	2,21	6,71	1,67	16,68	1,14	49,82
1,25	0,75	2,62	3,88	2,56	4,18	2,21	6,71	2,50	4,51	1,14	49,82
0,75	1,5	3,07	2,42	2,65	3,73	2,59	4,02	1,78	13,62	1,33	33,02
1,5	0,75	3,07	2,42	3,03	2,51	2,59	4,02	3,00	2,57	1,33	33,02
1,0	1,25	2,82	3,08	2,56	4,20	2,39	5,25	2,09	8,09	1,22	41,24
1,25	1,0	2,82	3,08	2,69	3,57	2,39	5,25	2,51	4,42	1,22	41,24
1,0	1,5	3,21	2,12	2,85	2,98	2,72	3,46	2,17	7,18	1,39	28,90
1,5	1,0	3,21	2,12	3,11	2,31	2,72	3,46	3,00	2,56	1,39	28,90
1,25	1,5	3,44	1,79	3,13	2,29	2,90	2,82	2,60	3,97	1,49	23,78
1,5	1,25	3,44	1,79	3,26	2,04	2,90	2,82	3,02	2,51	1,49	23,78
$\rho=0,7$											
0,5	0,75	1,50	23,26	1,28	36,71	1,27	37,47	1,01	66,50	0,65	146,83
0,75	0,5	1,50	23,26	1,52	22,25	1,27	37,47	1,58	19,94	0,65	146,83
0,5	1,0	2,08	8,30	1,71	15,70	1,76	14,37	1,07	58,22	0,90	84,07
1,0	0,5	2,08	8,30	2,14	7,56	1,76	14,37	2,17	7,20	0,90	84,07
0,5	1,25	2,71	3,48	2,21	6,77	2,29	6,00	1,18	45,13	1,18	45,73
1,25	0,5	2,71	3,48	2,79	3,20	2,29	6,00	2,76	3,28	1,18	45,73
0,5	1,5	3,37	1,88	2,75	3,35	2,85	2,99	1,34	32,26	1,46	25,15
1,5	0,5	3,37	1,88	3,46	1,77	2,85	2,99	3,36	1,89	1,46	25,15
0,75	1,0	2,00	9,33	1,75	14,49	1,69	16,07	1,50	23,33	0,87	90,19
1,0	0,75	2,00	9,33	2,01	9,30	1,69	16,07	2,08	8,25	0,87	90,19
0,75	1,25	2,52	4,37	2,11	7,84	2,13	7,60	1,53	22,10	1,09	54,58
1,25	0,75	2,52	4,37	2,58	4,06	2,13	7,60	2,66	3,68	1,09	54,58
0,75	1,5	3,12	2,31	2,56	4,17	2,63	3,82	1,60	19,27	1,35	31,56
1,5	0,75	3,12	2,31	3,20	2,14	2,63	3,82	3,25	2,06	1,35	31,56
1,0	1,25	2,52	4,37	2,24	6,47	2,13	7,60	2,00	9,40	1,09	54,58
1,25	1,0	2,52	4,37	2,50	4,50	2,13	7,60	2,58	4,05	1,09	54,58
1,0	1,5	3,00	2,56	2,56	4,19	2,54	4,29	2,01	9,24	1,30	34,93
1,5	1,0	3,00	2,56	3,05	2,45	2,54	4,29	3,16	2,22	1,30	34,93
1,25	1,5	3,05	2,45	2,74	3,38	2,58	4,08	2,50	4,49	1,32	33,42
1,5	1,25	3,05	2,45	3,00	2,57	2,58	4,08	3,09	2,37	1,32	33,42

O desempenho do gráfico de T^2 é função dos elementos de $\Gamma_{\bar{X}}^{-1}$. Os parâmetros θ_{11} e θ_{22} aumentam com o tamanho da amostra, porém, θ_{11} diminui com a e θ_{22} diminui com b . Investigou-se em que níveis de autocorrelação o desempenho do gráfico de T^2 com amostras unitárias ($n = 1$) é equivalente ao desempenho do gráfico de T^2 utilizando amostras de tamanho $n > 1$.

A Tabela F1 do Apêndice F apresenta várias combinações de ρ , a , b e n em que $\Gamma_{\bar{X}}^{-1} = \Sigma_e^{-1}$; nesses casos, o poder de detecção do gráfico de T^2 baseado em amostras individuais é igual ao poder de detecção do gráfico de T^2 baseado em subgrupos racionais de tamanho n , veja o Apêndice F para maiores detalhes.

As Figuras 32 e 33 ilustram, para baixa e alta correlação ($\rho \in \{0,3;0,7\}$), o intervalo de valores para b em que o poder do gráfico de T^2 baseado em amostras unitárias é superior ao poder de detecção do gráfico de T^2 baseado em subgrupos racionais de tamanho $n=2$ (ou $n=5$).

Na Figura 32, $\delta_1=\delta_2=1,0$ e $a=b$; na Figura 33, $\delta_1=0$, $\delta_2=1,0$ e $a=0$. A Figura 34 ilustra o caso em que o NMA quase não depende de b .

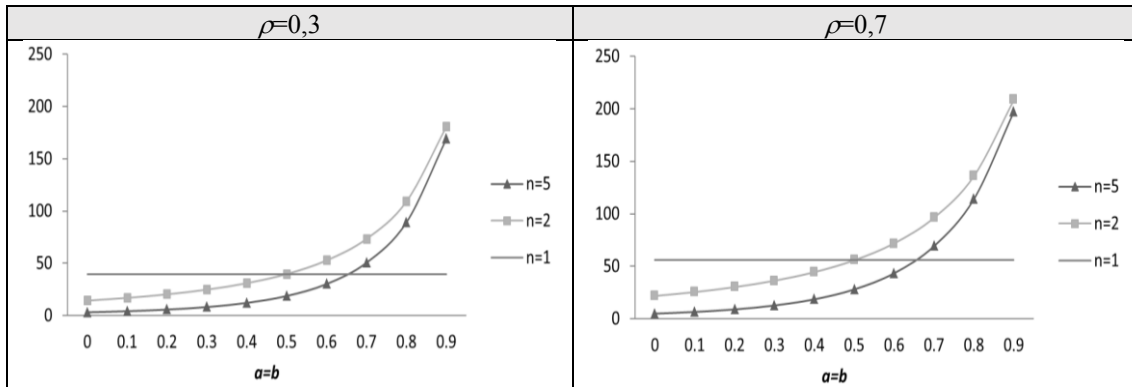


Figura 32. Valores do NMA ($\delta_1=\delta_2=1,0$; $a=b$; $n \in \{1;2;5\}$).

Fonte: o próprio autor.

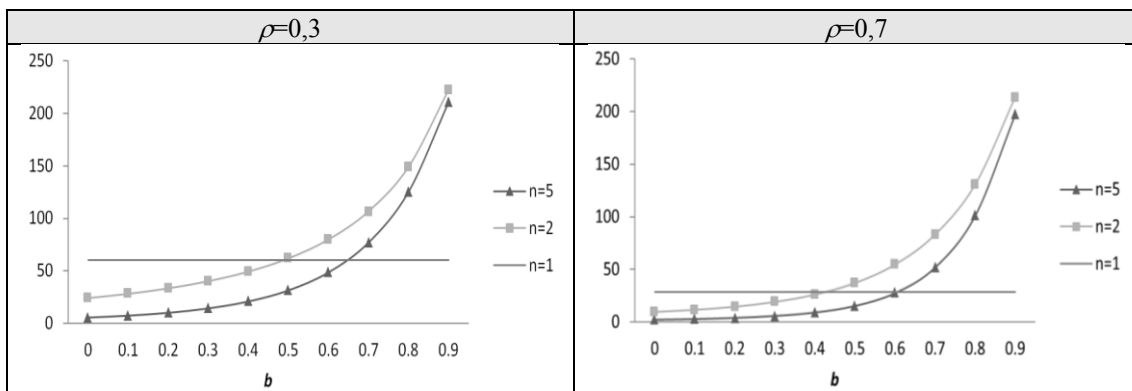


Figura 33. Valores do NMA ($\delta_1=0$; $\delta_2=1,0$; $a=0$; $b \neq 0$; $n \in \{1;2;5\}$).

Fonte: o próprio autor.

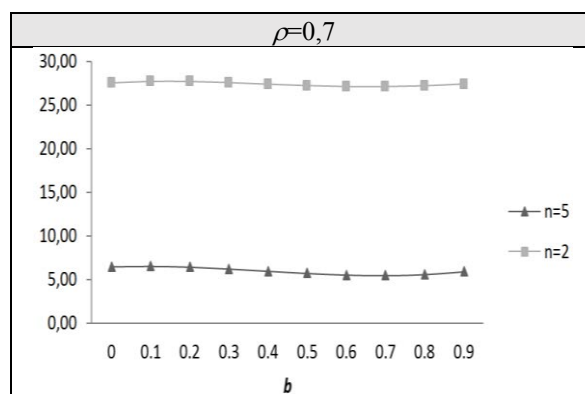


Figura 34. Valores do NMA ($\delta_1=1,0$; $\delta_2=0,75$; $a=0$; $b \neq 0$; $n \in \{2;5\}$).

Fonte: o próprio autor.

As Tabelas 6, 7 e 8 apresentam os NMAs para $n \in \{1; 2; 5\}$, $\rho \in \{0,0; 0,3; 0,7\}$ e 96 combinações de $(a; b; \delta_1; \delta_2)$. Quando duas variáveis autocorrelacionadas possuem alto nível de autocorrelação ($a=b=0,7$), o gráfico de T^2 para observações individuais possui melhor desempenho que o gráfico de T^2 para subgrupos racionais ($n=2$ ou $n=5$).

Quando apenas uma variável é autocorrelacionada ($a=0$; $b=0,5$ ou $a=0,5$; $b=0$), existem combinações de $(\rho; \delta_1; \delta_2)$ para as quais o gráfico de T^2 para observações individuais possui melhor desempenho que o gráfico de T^2 para subgrupos racionais ($n=2$ ou $n=5$).

Tabela 6. Valores do NMA do gráfico de T^2 ; $\rho=0,0$.

n=1 (0,0; 0,0)				n=2						n=5					
δ_1	δ_2	λ	NMA	(0,3; 0,3)		(0,5; 0,5)		(0,7; 0,7)		(0,3; 0,3)		(0,5; 0,5)		(0,7; 0,7)	
δ_1	δ_2	λ	NMA	λ	NMA	λ	NMA	λ	NMA	λ	NMA	λ	NMA	λ	NMA
0,0	0,0	0,0	370,4	0,0	370,4	0,0	370,4	0,0	370,4	0,0	370,4	0,0	370,4	0,0	370,4
0,0	0,5	0,5	202,2	0,5	167,0	0,5	202,2	0,3	250,8	0,8	96,43	0,6	147,5	0,4	221,0
0,0	1,0	1,0	67,32	1,1	45,02	1,0	67,32	0,7	111,6	1,6	16,52	1,3	35,24	0,9	82,32
0,0	1,5	1,5	23,34	1,7	13,87	1,5	23,34	1,1	47,15	2,5	4,40	1,9	10,27	1,3	30,66
0,5	0,0	0,5	202,2	0,5	167,0	0,5	202,2	0,3	250,8	0,8	96,43	0,6	147,5	0,4	221,0
0,5	0,5	0,7	129,8	0,8	97,11	0,7	129,8	0,5	183,3	1,1	44,59	0,9	80,88	0,6	149,3
0,5	1,0	1,1	51,88	1,3	33,47	1,1	51,88	0,8	90,90	1,8	11,56	1,4	25,71	1,0	64,74
0,5	1,5	1,5	19,91	1,8	11,70	1,5	19,91	1,2	41,18	2,6	3,72	2,0	8,63	1,4	26,37
1,0	0,0	1,0	67,32	1,1	45,02	1,0	67,32	0,7	111,6	1,6	16,52	1,3	35,24	0,9	82,32
1,0	0,5	1,1	51,88	1,3	33,47	1,1	51,88	0,8	90,90	1,8	11,56	1,4	25,71	1,0	64,74
1,0	1,0	1,4	27,73	1,6	16,71	1,4	27,73	1,1	54,51	2,3	5,33	1,8	12,44	1,2	36,08
1,0	1,5	1,8	13,19	2,1	7,60	1,8	13,19	1,4	28,75	3,0	2,50	2,3	5,59	1,6	17,77
1,5	0,0	1,5	23,34	1,7	13,87	1,5	23,34	1,1	47,15	2,5	4,40	1,9	10,27	1,3	30,66
1,5	0,5	1,5	19,91	1,8	11,70	1,5	19,91	1,2	41,18	2,6	3,72	2,0	8,63	1,4	26,37
1,5	1,0	1,8	13,19	2,1	7,60	1,8	13,19	1,4	28,75	3,0	2,50	2,3	5,59	1,6	17,77
1,5	1,5	2,1	7,74	2,5	4,45	2,1	7,74	1,6	17,69	3,5	1,65	2,7	3,32	1,9	10,56
(a; b)				(0,0; 0,5)		(0,5; 0,0)				(0,0; 0,5)		(0,5; 0,0)			
0,0	0,0	0,0	370,4	0,0	370,4	0,0	370,4			0,0	370,4	0,0	370,4		
0,0	0,5	0,5	202,2	0,5	202,2	0,7	129,8			0,6	147,5	1,1	51,88		
0,0	1,0	1,0	67,32	1,0	67,32	1,4	27,73			1,3	35,24	2,2	6,50		
0,0	1,5	1,5	23,34	1,5	23,34	2,1	7,74			1,9	10,27	3,3	1,90		
0,5	0,0	0,5	202,2	0,7	129,8	0,5	202,2			1,1	51,88	0,6	147,5		
0,5	0,5	0,7	129,8	0,8	90,90	0,8	90,90			1,2	35,65	1,2	35,65		
0,5	1,0	1,1	51,88	1,2	41,18	1,5	23,34			1,7	15,52	2,3	5,69		
0,5	1,5	1,5	19,91	1,6	17,19	2,1	7,08			2,2	6,41	3,4	1,82		
1,0	0,0	1,0	67,32	1,4	27,73	1,0	67,32			2,2	6,50	1,3	35,24		
1,0	0,5	1,1	51,88	1,5	23,34	1,2	41,18			2,3	5,69	1,7	15,52		
1,0	1,0	1,4	27,73	1,7	14,99	1,7	14,99			2,5	4,05	2,5	4,05		
1,0	1,5	1,8	13,19	2,0	8,51	2,3	5,56			2,9	2,66	3,6	1,62		
1,5	0,0	1,5	23,34	2,1	7,74	1,5	23,34			3,3	1,90	1,9	10,27		
1,5	0,5	1,5	19,91	2,1	7,08	1,6	17,19			3,4	1,82	2,2	6,41		
1,5	1,0	1,8	13,19	2,3	5,56	2,0	8,51			3,6	1,62	2,9	2,66		
1,5	1,5	2,1	7,74	2,6	3,98	2,6	3,98			3,8	1,39	3,8	1,39		

Tabela 7. Valores do NMA do gráfico de T^2 ; $\rho=0,3$.

n=1 (0,0; 0,0)				n=2						n=5					
δ_1	δ_2	λ	NMA	(0,3; 0,3)		(0,5; 0,5)		(0,7; 0,7)		(0,3; 0,3)		(0,5; 0,5)		(0,7; 0,7)	
δ_1	δ_2	λ	NMA	λ	NMA	λ	NMA	λ	NMA	λ	NMA	λ	NMA	λ	NMA
0,0	0,0	0,0	370,4	0,0	370,40	0,0	370,4	0,0	370,40	0,0	370,40	0,0	370,40	0,0	370,40
0,0	0,5	0,52	192,53	0,62	157,11	0,52	192,53	0,41	242,52	0,88	88,02	0,68	137,69	0,48	211,75
0,0	1,0	1,05	60,48	1,24	39,83	1,05	60,48	0,81	102,65	1,76	14,23	1,36	30,93	0,95	74,60
0,0	1,5	1,57	20,25	1,86	11,92	1,57	20,25	1,22	41,78	2,64	3,78	2,04	8,79	1,43	26,79
0,5	0,0	0,52	192,53	0,62	157,11	0,52	192,53	0,41	242,52	0,88	88,02	0,68	137,69	0,48	211,75
0,5	0,5	0,62	157,11	0,73	122,31	0,62	157,11	0,48	210,35	1,04	61,37	0,81	104,25	0,56	177,01
0,5	1,0	1,02	64,15	1,21	42,60	1,02	64,15	0,79	107,50	1,72	15,44	1,33	33,22	0,93	78,75
0,5	1,5	1,50	23,30	1,78	13,84	1,50	23,30	1,16	47,08	2,52	4,39	1,95	10,25	1,37	30,60
1,0	0,0	1,05	60,48	1,24	39,83	1,05	60,48	0,81	102,65	1,76	14,23	1,36	30,93	0,95	74,60
1,0	0,5	1,02	64,15	1,21	42,60	1,02	64,15	0,79	107,50	1,72	15,44	1,33	33,22	0,93	78,75
1,0	1,0	1,24	39,83	1,47	24,90	1,24	39,83	0,96	73,49	2,08	8,22	1,61	18,83	1,13	50,66
1,0	1,5	1,61	18,95	1,90	11,10	1,61	18,95	1,24	39,46	2,70	3,53	2,09	8,18	1,46	25,15
1,5	0,0	1,57	20,25	1,86	11,92	1,57	20,25	1,22	41,78	2,64	3,78	2,04	8,79	1,43	26,79
1,5	0,5	1,50	23,30	1,78	13,84	1,50	23,30	1,16	47,08	2,52	4,39	1,95	10,25	1,37	30,60

1,5	1,0	1,61	18,95	1,90	11,10	1,61	18,95	1,24	39,46	2,70	3,53	2,09	8,18	1,46	25,15
1,5	1,5	1,86	11,92	2,20	6,85	1,86	11,92	1,44	26,25	3,12	2,29	2,42	5,04	1,69	16,10
(a; b)				(0,0; 0,0)		(0,0; 0,5)		(0,5; 0,0)		(0,0; 0,5)		(0,5; 0,0)			
0,0	0,0	0,0	370,4	0,0	370,4	0,0	370,4			0,0	370,4	0,0	370,4		
0,0	0,5	0,52	192,53	0,52	194,74	0,73	122,43			0,68	138,95	1,16	46,84		
0,0	1,0	1,05	60,48	1,04	61,99	1,47	24,94			1,35	31,46	2,33	5,68		
0,0	1,5	1,57	20,25	1,56	20,92	2,20	6,86			2,03	8,97	3,49	1,72		
0,5	0,0	0,52	192,53	0,73	122,43	0,52	194,74			1,16	46,84	0,68	138,95		
0,5	0,5	0,62	157,11	0,78	110,83	0,78	110,83			1,17	46,20	1,17	46,20		
0,5	1,0	1,02	64,15	1,10	53,96	1,42	27,40			1,52	22,56	2,24	6,50		
0,5	1,5	1,50	23,30	1,53	21,83	2,12	7,73			2,04	8,87	3,37	1,88		
1,0	0,0	1,05	60,48	1,47	24,94	1,04	61,99			2,33	5,68	1,35	31,46		
1,0	0,5	1,02	64,15	1,42	27,40	1,10	53,96			2,24	6,50	1,52	22,56		
1,0	1,0	1,24	39,83	1,56	20,92	1,56	20,92			2,34	5,58	2,34	5,58		
1,0	1,5	1,61	18,95	1,83	12,50	2,17	7,19			2,62	3,86	3,37	1,87		
1,5	0,0	1,57	20,25	2,20	6,86	1,56	20,92			3,49	1,72	2,03	8,97		
1,5	0,5	1,50	23,30	2,12	7,73	1,53	21,83			3,37	1,88	2,04	8,87		
1,5	1,0	1,61	18,95	2,17	7,19	1,83	12,50			3,37	1,87	2,62	3,86		
1,5	1,5	1,86	11,92	2,33	5,65	2,33	5,65			3,51	1,70	3,51	1,70		

Tabela 8. Valores do NMA do gráfico de T^2 ; $\rho=0,7$.

n=1				n=2						n=5					
(0,0; 0,0)				(0,3; 0,3)		(0,5; 0,5)		(0,7; 0,7)		(0,3; 0,3)		(0,5; 0,5)		(0,7; 0,7)	
δ_1	δ_2	λ	NMA	λ	NMA	λ	NMA	λ	NMA	λ	NMA	λ	NMA	λ	NMA
0,0	0,0	0,0	370,4	0,0	370,40	0,0	370,4	0,0	370,40	0,0	370,40	0,0	370,4	0,0	370,40
0,0	0,5	0,70	131,83	0,83	98,93	0,70	131,83	0,54	185,41	1,18	45,74	0,91	82,54	0,64	151,40
0,0	1,0	1,40	28,53	1,66	17,24	1,40	28,53	1,08	55,82	2,35	5,50	1,82	12,84	1,27	37,05
0,0	1,5	2,10	8,00	2,49	4,60	2,10	8,00	1,63	18,24	3,53	1,69	2,73	3,42	1,91	10,91
0,5	0,0	0,70	131,83	0,83	98,93	0,70	131,83	0,54	185,41	1,18	45,74	0,91	82,54	0,64	151,40
0,5	0,5	0,54	185,41	0,64	149,93	0,54	185,41	0,42	236,29	0,91	82,18	0,70	130,68	0,49	204,87
0,5	1,0	1,04	61,81	1,23	40,83	1,04	61,81	0,80	104,42	1,74	14,66	1,35	31,75	0,95	76,10
0,5	1,5	1,69	16,32	2,00	9,48	1,69	16,32	1,31	34,67	2,83	3,05	2,19	6,98	1,53	21,80
1,0	0,0	1,40	28,53	1,66	17,24	1,40	28,53	1,08	55,82	2,35	5,50	1,82	12,84	1,27	37,05
1,0	0,5	1,04	61,81	1,23	40,83	1,04	61,81	0,80	104,42	1,74	14,66	1,35	31,75	0,95	76,10
1,0	1,0	1,08	55,82	1,28	36,36	1,08	55,82	0,84	96,35	1,82	12,75	1,41	28,07	0,99	69,28
1,0	1,5	1,50	23,26	1,78	13,82	1,50	23,26	1,16	47,02	2,52	4,38	1,95	10,23	1,37	30,56
1,5	0,0	2,10	8,00	2,49	4,60	2,10	8,00	1,63	18,24	3,53	1,69	2,73	3,42	1,91	10,91
1,5	0,5	1,69	16,32	2,00	9,48	1,69	16,32	1,31	34,67	2,83	3,05	2,19	6,98	1,53	21,80
1,5	1,0	1,50	23,26	1,78	13,82	1,50	23,26	1,16	47,02	2,52	4,38	1,95	10,23	1,37	30,56
1,5	1,5	1,63	18,24	1,93	10,66	1,63	18,24	1,26	38,18	2,73	3,40	2,11	7,86	1,48	24,25
(a; b)				(0,0; 0,5)		(0,5; 0,0)				(0,0; 0,5)		(0,5; 0,0)			
0,0	0,0	0,0	370,4	0,0	370,4	0,0	370,4			0,0	370,4	0,0	370,4		
0,0	0,5	0,70	131,83	0,64	151,65	0,90	84,20			0,86	92,28	1,48	24,28		
0,0	1,0	1,40	28,53	1,27	37,17	1,80	13,26			1,72	15,36	2,96	2,67		
0,0	1,5	2,10	8,00	1,91	10,95	2,70	3,53			2,58	4,08	4,44	1,15		
0,5	0,0	0,70	131,83	0,90	84,20	0,64	151,65			1,48	24,28	0,86	92,28		
0,5	0,5	0,54	185,41	0,71	128,52	0,71	128,52			1,12	51,26	1,12	51,26		
0,5	1,0	1,04	61,81	1,01	66,39	1,49	23,68			1,35	31,93	2,48	4,61		
0,5	1,5	1,69	16,32	1,53	22,17	2,36	5,44			1,96	10,08	3,93	1,36		
1,0	0,0	1,40	28,53	1,80	13,26	1,27	37,17			2,96	2,67	1,72	15,36		
1,0	0,5	1,04	61,81	1,49	23,68	1,01	66,39			2,48	4,61	1,35	31,93		
1,0	1,0	1,08	55,82	1,42	27,23	1,42	27,23			2,25	6,40	2,25	6,40		
1,0	1,5	1,50	23,26	1,62	18,39	2,16	7,31			2,33	5,71	3,56	1,65		
1,5	0,0	2,10	8,00	2,70	3,53	1,91	10,95			4,44	1,15	2,58	4,08		
1,5	0,5	1,69	16,32	2,36	5,44	1,53	22,17			3,93	1,36	1,96	10,08		
1,5	1,0	1,50	23,26	2,16	7,31	1,62	18,39			3,56	1,65	2,33	5,71		
1,5	1,5	1,63	18,24	2,13	7,58	2,13	7,58			3,37	1,88	3,37	1,88		

Em geral, o desempenho do gráfico T^2 de Hotelling quando associado a técnica de amostragem com subgrupos racionais pode ser resumido de acordo com a Tabela 9. Baseando-se na comparação entre dois níveis distintos de correlação entre variáveis ($\rho \uparrow$),

o *NMA* tende a ser maior nos cenários em que ambas as variáveis são autocorrelacionadas ($a=b \neq 0$) e o deslocamento ocorre no vetor de médias ($\delta_1 \neq 0$; $\delta_2 \neq 0$). Nos demais cenários o *NMA* tende a ser menor.

Tabela 9. Desempenho do gráfico T^2 de Hotelling (subgrupos racionais).

Autocorrelação	Deslocamento	Correlação	Desempenho
$a=b \neq 0$	$\delta_1 = 0$; $\delta_2 \neq 0$	$\rho \uparrow$	NMA ↓
	$\delta_1 \neq 0$; $\delta_2 = 0$		NMA ↑
	$\delta_1 \neq 0$; $\delta_2 \neq 0$		NMA ↓
$a=0$; $b \neq 0$	$\delta_1 = 0$; $\delta_2 \neq 0$		NMA ↓
$a \neq 0$; $b=0$	$\delta_1 \neq 0$; $\delta_2 = 0$		NMA ↓
$a \neq 0$; $b \neq 0$	$\delta_1 \neq 0$; $\delta_2 \neq 0$		NMA ↓

4.2 EXEMPLO

Motivado pelo exemplo apresentado em Santos-Fernández (2012), admite-se que o diâmetro interno (X) e a espessura (Y) de tubos de fibra de carbono são monitorados durante o processo de perfuração. Com o processo em controle estatístico, uma amostra preliminar foi coletada e as duas características de qualidade foram mensuradas, veja a Tabela 10. Com a amostra preliminar foi possível concluir que as duas características de qualidade se ajustam a um modelo VAR (1). Foi também estimado o vetor de médias em controle (μ_0), a matriz de variância-covariância (Γ) e a matriz de autocorrelação (Φ), veja Montgomery (2009) para maiores detalhes:

$$\hat{\mu}_0 = (\mu_{0X}, \mu_{0Y})^T = (10,44; 30,00)^T;$$

$$\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_x^2 & \hat{\sigma}_{xy} \\ \hat{\sigma}_{xy} & \hat{\sigma}_y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4962 & 0,3741 \\ 0,3741 & 0,5888 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} \hat{a} & 0 \\ 0 & \hat{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\hat{\sigma}_{x_i, x_{i-1}}}{\hat{\sigma}_x^2} & 0 \\ 0 & \frac{\hat{\sigma}_{y_i, y_{i-1}}}{\hat{\sigma}_y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4820 & 0 \\ 0 & 0,4782 \end{pmatrix}$$

sendo $\hat{\sigma}_{x_i, x_{i-1}}$ a covariância das observações de X separadas por um período de tempo e $\hat{\sigma}_{y_i, y_{i-1}}$ a covariância de Y por definição similar.

As expressões (76), (77) e (78) são usadas para estimar a correlação, a matriz de covariância dos erros e a matriz de variância-covariância $\Gamma_{\bar{X}}$:

$$\hat{\rho} = \frac{(1-\hat{a}.\hat{b}).\hat{\sigma}_{xy}}{\sqrt{[(1-\hat{a}^2).\hat{\sigma}_x^2][(1-\hat{b}^2).\hat{\sigma}_y^2]}} = 0,6921;$$

$$\hat{\Sigma}_e = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{e_x}^2 & \hat{\sigma}_{e_{xy}} \\ \hat{\sigma}_{e_{xy}} & \hat{\sigma}_{e_y}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\hat{a}^2).\hat{\sigma}_x^2 & (1-\hat{a}.\hat{b}).\hat{\sigma}_{xy} \\ (1-\hat{a}.\hat{b}).\hat{\sigma}_{xy} & (1-\hat{b}^2).\hat{\sigma}_y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3809 & 0,2879 \\ 0,2879 & 0,4542 \end{pmatrix};$$

$$\hat{\Gamma}_{\bar{X}} = \begin{pmatrix} \hat{\zeta}_X^2 & \hat{\zeta}_{XY} \\ \hat{\zeta}_{XY} & \hat{\zeta}_Y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2145 & 0,1612 \\ 0,1612 & 0,2529 \end{pmatrix}$$

A matriz de variância-covariância foi estimada para subgrupos racionais de tamanho $n=5$. Finalmente, o vetor de médias em controle e a matriz inversa de $\Gamma_{\bar{X}}$ são empregadas para calcular a estatística de monitoramento do gráfico T^2 de Hotelling:

$$T_t^2 = (\bar{x}-10,44 \quad \bar{y}-30,00) \begin{pmatrix} 8,95 & -5,70 \\ -5,70 & 7,59 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}-10,44 \\ \bar{y}-30,00 \end{pmatrix}$$

Tabela 10. Amostra preliminar.

Observação	X	Y
1	9,42	28,45
2	10,78	29,80
3	10,40	31,57
4	10,43	30,72
5	10,30	29,91
6	9,55	29,21
7	10,85	30,03
8	10,21	29,68
9	10,58	30,05
10	9,53	29,21
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮
299	10,53	30,13
300	11,37	30,66

A Figura 35 ilustra o gráfico de T^2 com $LSC=11,83$ ($NMA_{\theta}=370,4$). Os valores das estatísticas de monitoramento são apresentados na Tabela 11. As amostras foram simuladas considerando a presença de causas especiais que modificaram o vetor de médias de $\hat{\mu}_0 = (10,44; 30,00)^T$ para $\hat{\mu}_1 = (10,75; 30,67)'$, ou seja, $\delta_1 = 0,5$ e $\delta_2=1,0$.

O gráfico de T^2 requer, em média, 29,25 amostras para sinalizar a mudança. Esse número é reduzido para 5,1 amostras quando X e Y são independentes.

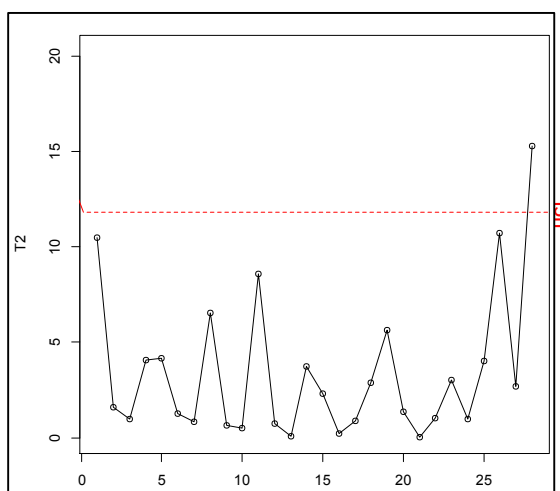


Figura 35. Gráfico de controle de T^2 para o diâmetro interno (X) e espessura (Y).
Fonte: o próprio autor.

Tabela 11. Médias amostrais e valores de T^2 com os dados do processo de perfuração.

Amostra	$\bar{X}$	$\bar{Y}$	T^2
1	11,82	31,50	10,52
2	10,85	29,98	1,60
3	10,84	30,47	0,96
4	9,79	30,04	4,08
5	10,52	30,79	4,16
6	10,73	30,56	1,27
7	10,77	30,46	0,84
8	10,59	31,03	6,57
9	10,37	29,65	0,66
10	10,76	30,30	0,49
:	:	:	:
26	11,52	31,64	10,72
27	9,94	30,08	2,70
28	11,44	31,93	15,29

4.3 DESEMPENHO DOS GRÁFICOS DE CONTROLE SIMULTÂNEOS UNIVARIADOS DE $\bar{X}$

A ideia de monitorar múltiplas características de qualidade com apenas um gráfico de controle foi introduzida por Hotelling (1947). É sempre mais fácil lidar com apenas um gráfico de controle, no entanto, o gráfico apenas sinaliza mudança no processo e não é capaz de identificar as variáveis afetadas por alguma causa especial. Uma abordagem

para resolver esse problema é o uso simultâneo de vários gráficos de $\bar{X}$ (RUNGER; MONTGOMERY, 1997; SEREL; MOSKOWITZ; TANG, 2000).

Machado e Costa (2008) compararam o desempenho do gráfico T^2 de Hotelling com os gráficos simultâneos univariados de $\bar{X}$ (SU $\bar{X}$) em processos bivariados. Quando ambas as variáveis são positivamente correlacionadas o gráfico SU $\bar{X}$ apresenta, em geral, melhor desempenho. Contudo, Machado e Costa (2008) não investigaram a influência da autocorrelação no desempenho dos gráficos de controle. Nesta seção, será estudado o desempenho dos gráficos SU $\bar{X}$ aplicados em processos bivariados que apresentam autocorrelação e correlação.

4.3.1 Gráficos SU $\bar{X}$

Considere duas características de qualidade X e Y representadas por distribuições normais. Os gráficos de controle simultâneos univariados baseados nas variáveis originais (SU $\bar{X}$) será adotado para monitorar processos com autocorrelação e correlação.

Supondo que ambas as variáveis X e Y sejam independentes, os limites de controle de amplitude 3-sigma podem ser dimensionados se ambas são monitoradas isoladamente com o gráfico de $\bar{X}$. Com o processo em controle estatístico, cada gráfico de $\bar{X}$ tem a probabilidade $\alpha = 0,0027$ (erro tipo I) de a observação exceder os limites de controle (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005).

A probabilidade de que ambas as variáveis estejam dentro dos limites de controle quando o processo está sob controle é $(1-0,0027)(1-0,0027)=0,994607$. De acordo com a expressão (57), o erro tipo I global nesse caso será $\alpha' = 1-0,994607=0,0054$.

Se as variáveis são correlacionadas, o que é o mais comum em processos multivariados, procedimentos mais complexos devem ser empregados para obter limites de controle, dado um valor específico de α' .

Os limites de controle para dois gráficos simultâneos de $\bar{X}$ são $\mu_{0,X} \pm k \sigma_X / \sqrt{n}$ para X e $\mu_{0,Y} \pm k \sigma_Y / \sqrt{n}$ para Y . Sendo n o tamanho da amostra, $\mu_0 = (\mu_{0,X}, \mu_{0,Y})^T$ o vetor de médias de um processo bivariado e $\begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$ a matriz de covariância. Supõe-

se que o processo esteja em controle estatístico e que X e Y sigam um modelo normal bivariado. O coeficiente de abertura dos limites de controle k , para um dado valor de α' é obtido pela relação:

$$\alpha' = 1 - \Pr \left(-k < \frac{\bar{X} - \mu_{0,X}}{\sigma_X / \sqrt{n}} < k \cap -k < \frac{\bar{Y} - \mu_{0,Y}}{\sigma_Y / \sqrt{n}} < k \mid \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 \right) \quad (82)$$

$$\alpha' = 1 - \Pr(-k < Z_1 < k \cap -k < Z_2 < k) \quad (83)$$

$$\alpha' = 1 - \int_{-k}^k \int_{-k}^k f(z_1, z_2) dz_1 dz_2 \quad (84)$$

sendo $f(z_1, z_2)$ a função de densidade conjunta de uma distribuição normal padrão com correlação ρ .

Por exemplo, da expressão (82), se X e Y são não correlacionadas ($\rho = 0$, $n=4$, $\alpha'=0,0027$), $k=6,4099$. Por outro lado, se X e Y são correlacionadas ($\rho = 0,7$, $n=4$, $\alpha'=0,0027$), $k = 6,3656$. Note que o cálculo do erro tipo I é mais complexo quando há correlação e o uso da expressão (57) nesse caso promove distorções que se tornam mais graves quando p aumenta.

Se as duas características são também autocorrelacionadas, a probabilidade do erro tipo I deve ser calculada usando os elementos de $\Gamma_{\bar{X}}$ (veja Apêndice E):

$$\alpha' = 1 - \Pr \left(-k < \frac{\bar{X} - \mu_{0,X}}{\zeta_X} < k \cap -k < \frac{\bar{Y} - \mu_{0,Y}}{\zeta_Y} < k \mid \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}'_0 \right) \quad (85)$$

Por exemplo, usando a expressão (85), se X e Y são correlacionadas e autocorrelacionadas, e para o caso particular em que $\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$; $\Sigma_e = \begin{bmatrix} 1 & 0,3 \\ 0,3 & 1 \end{bmatrix}$, $k=3,8635$.

Os riscos α e β são, respectivamente, os erros tipo I e tipo II. Na presença de autocorrelação, o erro tipo II será dado por:

$$\beta = \Pr \left(-k < \frac{\bar{X} - \mu_{1,X}}{\zeta_X} < k \cap -k < \frac{\bar{Y} - \mu_{1,Y}}{\zeta_Y} < k \mid \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}'_1 \right) \quad (86)$$

sendo $\boldsymbol{\mu}_1 = (\mu_{1,X}, \mu_{1,Y})^T$. Sem perda de generalidade, supondo $\boldsymbol{\mu}_0 = (0,0)^T$, então,

$\boldsymbol{\mu}_1 = (\delta_X, \delta_Y)^T$ e o erro tipo II será:

$$\beta = \Pr \left(-k - \frac{\delta_X}{\zeta_X} < Z_1 < k - \frac{\delta_X}{\zeta_X} \cap -k - \frac{\delta_Y}{\zeta_Y} < Z_2 < k - \frac{\delta_Y}{\zeta_Y} \right) \quad (87)$$

4.3.2 Desempenho dos gráficos SU $\bar{X}$

Para estudar o efeito da correlação e da autocorrelação no desempenho dos gráficos SU $\bar{X}$, assumiu-se um processo bivariado e amostras de tamanho n foram coletadas seguindo o princípio dos subgrupos racionais. O desempenho dos gráficos foi medido pelo número médio de amostras até o sinal (NMA).

O desempenho do gráfico SU $\bar{X}$ foi avaliado e os resultados são apresentados nas Tabelas G1 a G6 (ver apêndice G). Consideraram-se variáveis não correlacionadas, $\rho = 0$, e variáveis com baixo, $\rho = 0,3$, e alto grau de correlação $\rho = 0,7$. Escolheram-se para as análises observações independentes e autocorrelacionadas, sendo, $a, b \in \{0; 0,2; 0,5; 0,7\}$; amostras de tamanho $n \in \{1; 2; 4\}$ e deslocamentos na média δ_x e $\delta_y \in \{0,0; 0,5; 1,0; 1,5\}$. Os limites de controle dos gráficos foram ajustados para um alarme falso a cada 370,4 amostras.

Na Figura 36, assume-se que ambas as variáveis X e Y apresentam o mesmo nível de autocorrelação ($a=b=0,5$) e o deslocamento da média ocorre em ambas as variáveis com igual intensidade. O gráfico de T^2 é muito afetado pela correlação, que diminui o poder do gráfico, reduzindo a capacidade de detecção de uma causa especial que altera o vetor de médias; não se pode dizer o mesmo em relação aos gráficos simultâneos de $\bar{X}$. Os gráficos SU $\bar{X}$ mantêm praticamente estáveis os NMA s. Por exemplo, no gráfico de T^2 , o NMA aumenta de 93,65 ($\rho=0,0$) para 145,92 ($\rho=0,7$) quando $\delta_X = \delta_Y = 0,5$. No gráfico SU $\bar{X}$, o NMA aumenta de 106,52 ($\rho=0,0$) para 112,24 ($\rho=0,7$). Quando as variáveis são correlacionadas ($\rho > 0$), os gráficos SU $\bar{X}$ apresentam melhor desempenho que o gráfico de T^2 .

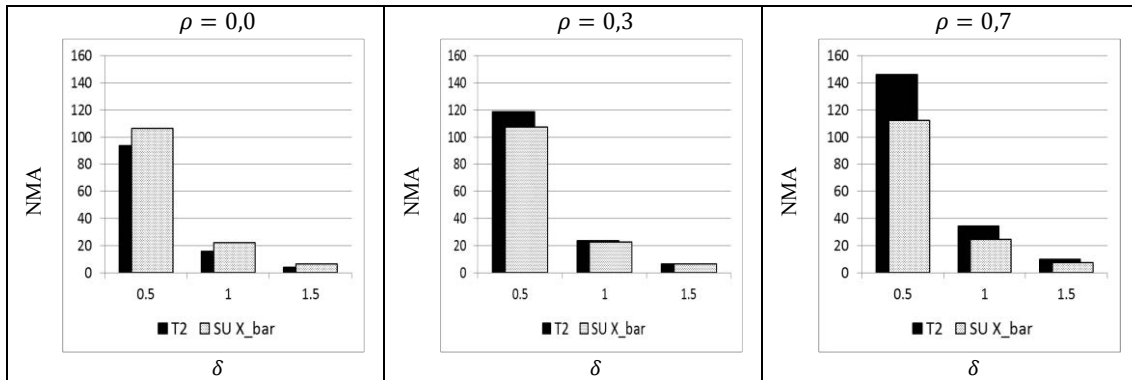


Figura 36. *NMA*s dos gráficos de T^2 e $SU \bar{X}$; $a=0,5$; $b=0,5$; $\delta_X=\delta_Y \in (0,5;1,0;1,5)$.

Fonte: o próprio autor.

A Figura 37 apresenta as variáveis X e Y com o mesmo nível de autocorrelação ($a=b=0,5$) e o deslocamento da média ocorre em apenas Y . O gráfico T^2 é afetado pela correlação, que aumenta o poder do gráfico, ou seja, o *NMA* do gráfico de T^2 reduz substancialmente com o aumento da correlação. Os gráficos $SU \bar{X}$ mantêm praticamente estáveis os *NMA*s. Por exemplo: no gráfico T^2 o *NMA* diminui de 163,04 ($\rho=0,0$) para 95,44 ($\rho=0,7$) quando $\delta_Y=0,5$. Nos gráficos $SU \bar{X}$ o *NMA* diminui 165,30 ($\rho=0,0$) para 162,47 ($\rho=0,7$).

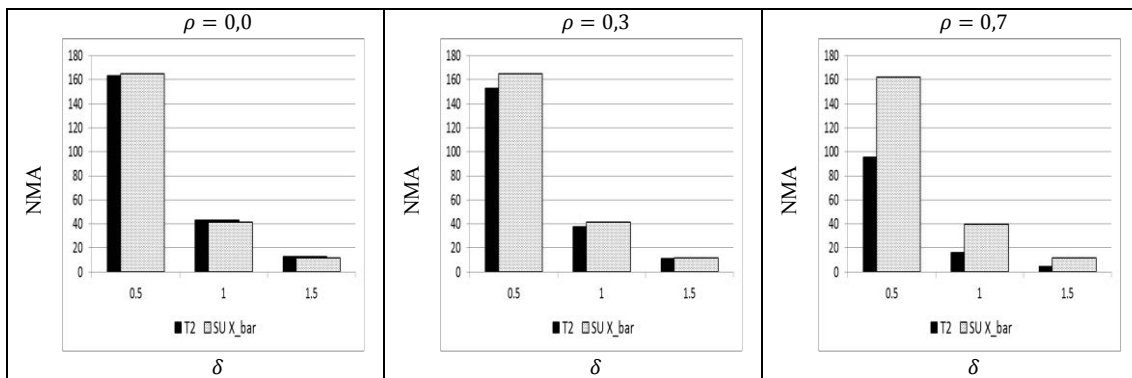


Figura 37. *NMA*s dos gráficos de T^2 e $SU \bar{X}$; $a=0,5$; $b=0,5$; $\delta_X=0$; $\delta_Y \in (0,5;1,0;1,5)$.

Fonte: o próprio autor.

Na Figura 38, assume-se que apenas a variável Y apresenta autocorrelação ($b=0,5$) e o deslocamento da média ocorre apenas na variável independente (X). A correlação aumenta o poder do gráfico de T^2 , consequentemente, aumenta também a capacidade detecção de uma causa especial que altera a média de X . Os gráficos $SU \bar{X}$ mantêm praticamente estáveis os *NMA*s. Por exemplo: No gráfico de T^2 , o *NMA* diminui de 67,32

($\rho=0,0$) para 34,34 ($\rho=0,7$) quando $\delta_X=0,5$. Nos gráficos $SU \bar{X}$, o *NMA* diminui de 66,34 ($\rho=0,0$) para 65,04 ($\rho=0,7$). Na Figura 39, a causa especial atua somente na variável autocorrelacionada. O cenário é semelhante ao mostrado na Figura 38, ou seja, o desempenho dos gráficos $SU \bar{X}$ permanece inalterado com o aumento da correlação e o *NMA* do gráfico de T^2 reduz substancialmente com o aumento da correlação.

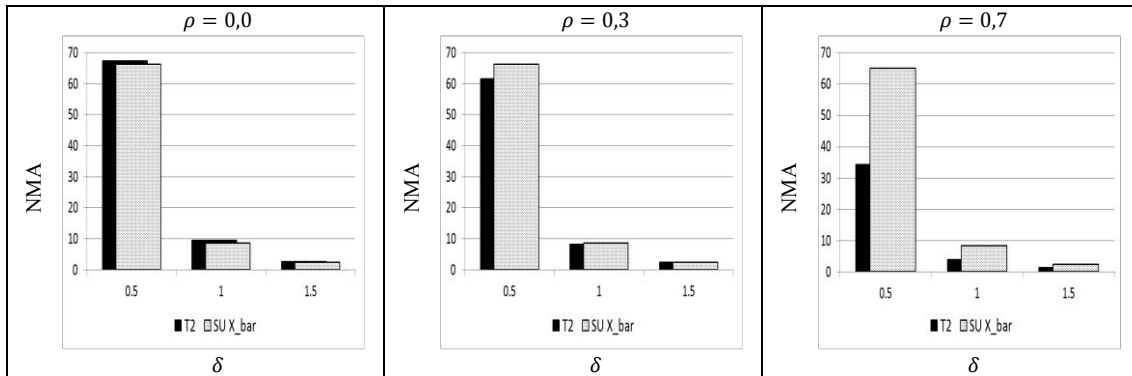


Figura 38. *NMA*s dos gráficos de T^2 e $SU \bar{X}$; $a=0,0$; $b=0,5$; $\delta_X \in (0,5;1,0;1,5)$; $\delta_Y=0$.
Fonte: o próprio autor.

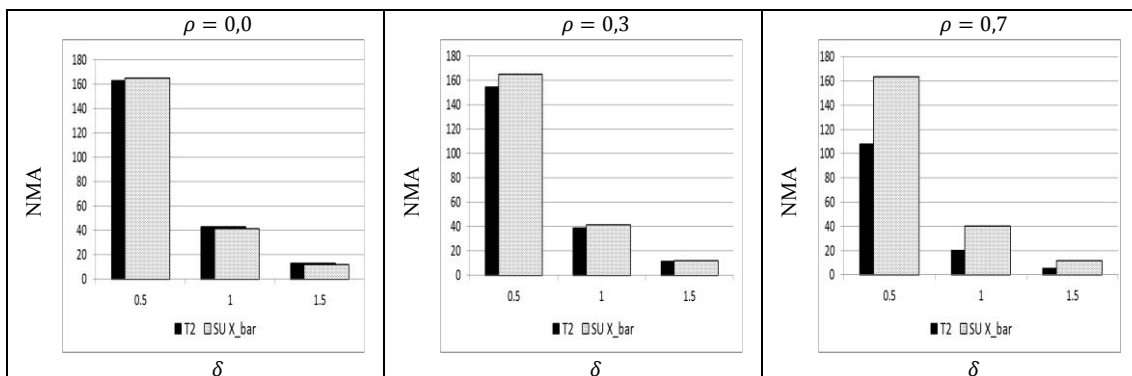


Figura 39. *NMA*s dos gráficos de T^2 e $SU \bar{X}$; $a=0,0$; $b=0,5$; $\delta_X=0$; $\delta_Y \in (0,5;1,0;1,5)$.
Fonte: o próprio autor.

Quando o deslocamento da média ocorre em ambas as variáveis, os gráficos $SU \bar{X}$ possuem melhor desempenho na medida em que as variáveis apresentem altos níveis de autocorrelação associados a altos níveis de correlação. Caso o deslocamento da média ocorra em apenas uma variável, o gráfico de T^2 ganha em desempenho (ver Tabelas G1, G2 e G3 do Apêndice G).

As Figuras 40 a 49 ilustram o efeito do tamanho da amostra no desempenho dos gráficos $SU \bar{X}$. Os valores exatos do *NMA* são apresentados no Apêndice G.

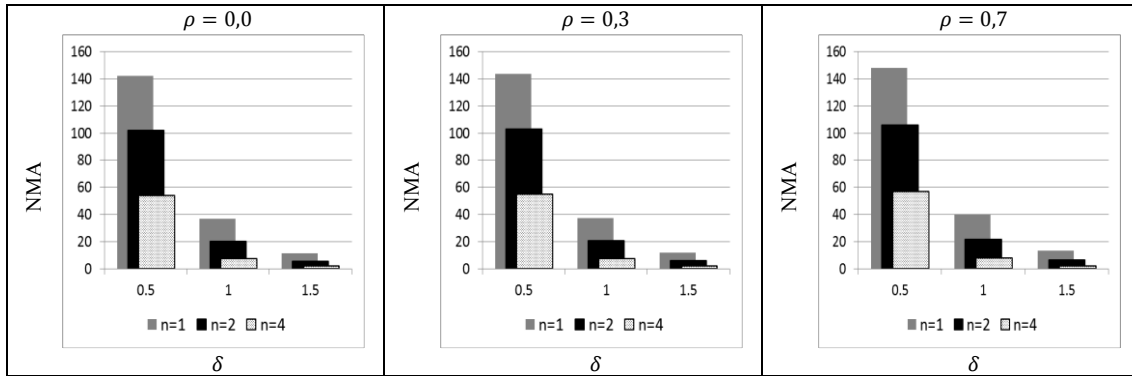


Figura 40. NMAs do gráfico SU $\bar{X}$; $a=0,0$; $b=0,5$; $\delta_X=\delta_Y \in (0,5;1,0;1,5)$.
Fonte: o próprio autor.

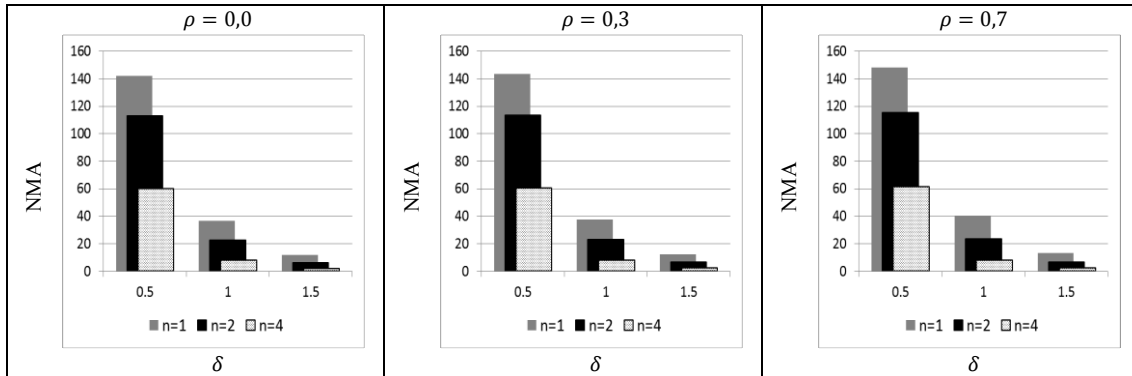


Figura 41. NMAs do gráfico SU $\bar{X}$; $a=0,0$; $b=0,7$; $\delta_X=\delta_Y \in (0,5;1,0;1,5)$.
Fonte: o próprio autor.

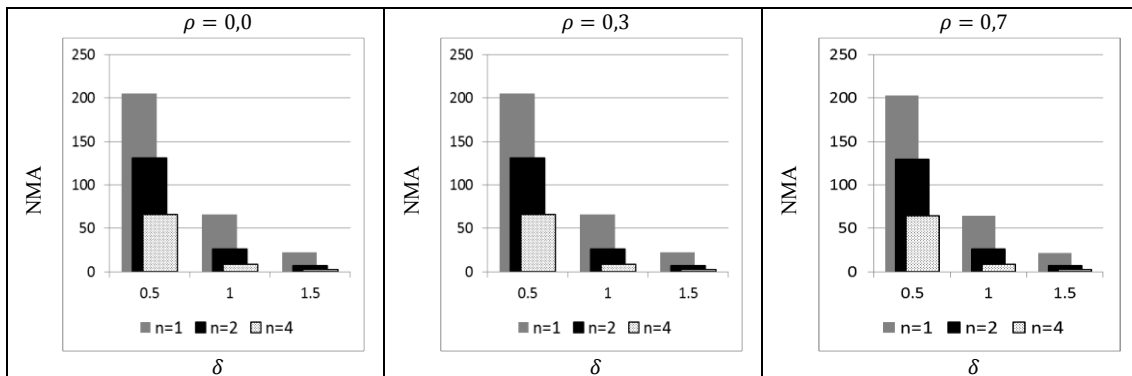


Figura 42. NMAs do gráfico SU $\bar{X}$; $a=0,0$; $b=0,5$; $\delta_X \in (0,5;1,0;1,5)$; $\delta_Y=0$.
Fonte: o próprio autor.

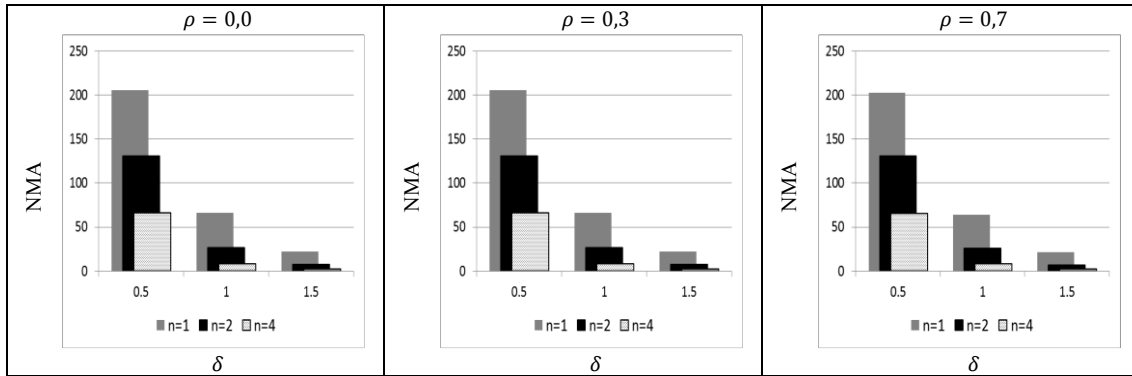


Figura 43. NMAs do gráfico $SU \bar{X}$; $a=0,0$; $b=0,7$; $\delta_X \in (0,5;1,0;1,5)$; $\delta_Y = 0$.
Fonte: o próprio autor.

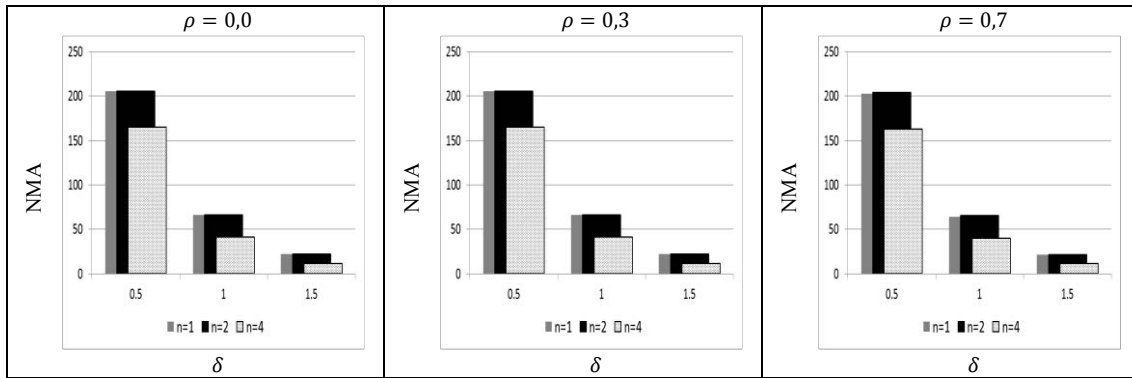


Figura 44. NMAs do gráfico $SU \bar{X}$; $a=0,0$; $b=0,5$; $\delta_X=0$; $\delta_Y \in (0,5;1,0;1,5)$.
Fonte: o próprio autor.

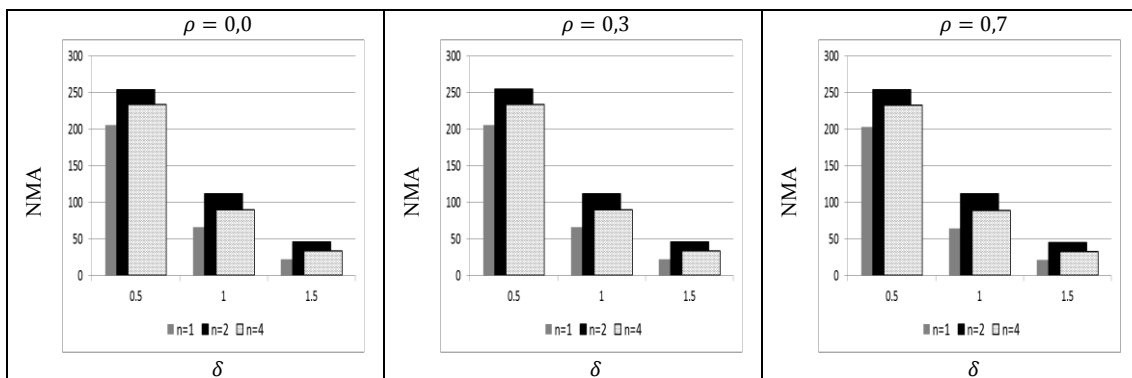


Figura 45. NMAs do gráfico $SU \bar{X}$; $a=0,0$; $b=0,7$; $\delta_X=0$; $\delta_Y \in (0,5;1,0;1,5)$.
Fonte: o próprio autor.

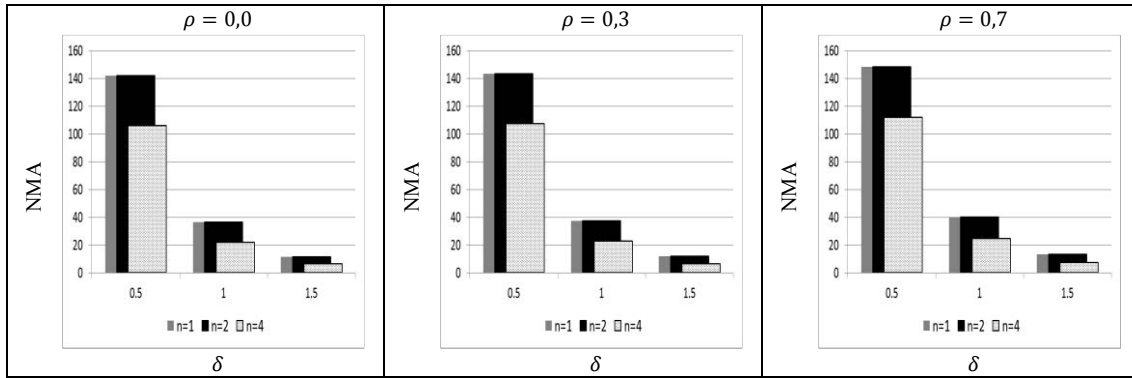


Figura 46. NMAs do gráfico SU $\bar{X}$; $a=0,5$; $b=0,5$; $\delta_X=\delta_Y \in (0,5;1,0;1,5)$.
Fonte: o próprio autor.

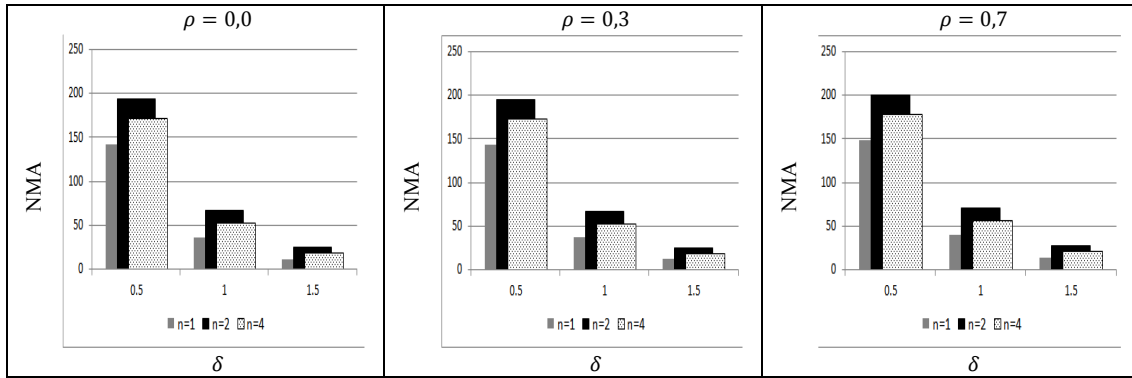


Figura 47. NMAs do gráfico SU $\bar{X}$; $a=0,7$; $b=0,7$; $\delta_X=\delta_Y \in (0,5;1,0;1,5)$.
Fonte: o próprio autor.

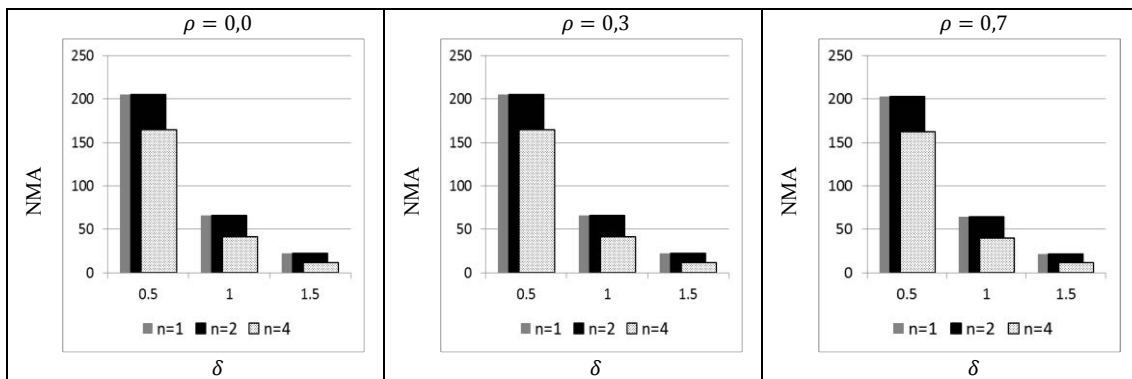


Figura 48. NMAs do gráfico SU $\bar{X}$; $a=0,5$; $b=0,5$; $\delta_X \in (0,5;1,0;1,5)$, $\delta_Y = 0$.
Fonte: o próprio autor.

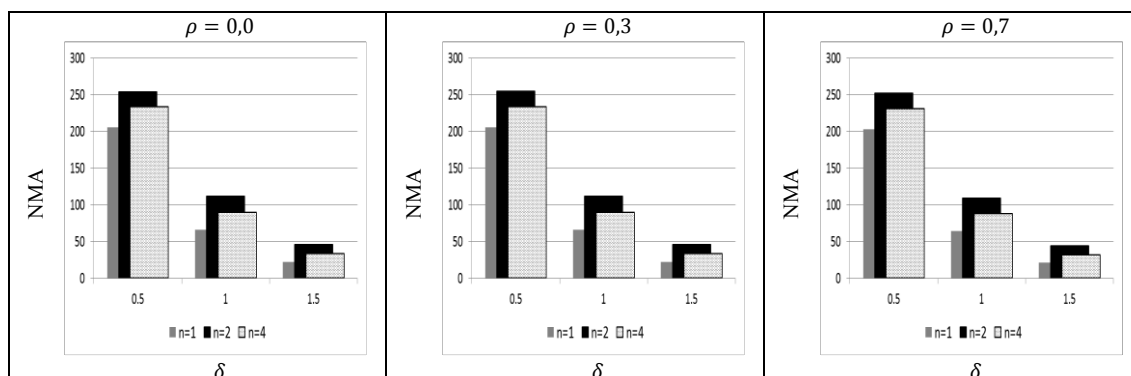


Figura 49. NMAs do gráfico SU $\bar{X}$; $a=0,7$; $b=0,7$; $\delta_X \in (0.5, 1.0, 1.5)$, $\delta_Y = 0$.
Fonte: o próprio autor.

Independentemente do tipo de deslocamento, autocorrelação ou correlação, o poder do gráfico sempre aumenta com o aumento do tamanho da amostra. Contudo, há casos em que trabalhar com amostras unitárias ($n=1$) é mais vantajoso.

Baseando-se nas Figuras 44 a 49, adotar amostras unitárias é melhor que amostras de tamanho 2. Em alguns casos, adotar amostras unitárias é melhor que amostras de tamanho 4, veja as Figuras 45, 47 e 49.

5. ESTRATÉGIA DE AMOSTRAGEM SISTEMÁTICA EM PROCESSOS AUTOCORRELACIONADOS

Costa e Castagliola (2011) propuseram uma estratégia de amostragem denominada *s-skip*. De acordo com esta estratégia, as amostras são obtidas através da seleção de um elemento da linha de produção e, em seguida, pulam-se s elementos consecutivos antes de se selecionar o próximo.

Esse tipo de amostragem é conhecido como amostragem sistemática (BOLFARINE; BUSSAB, 2007). Costa e Castagliola (2011) recomendam que s não seja superior a dois, pois nesse caso, há uma ruptura do conceito de subgrupo racional. Mais recentemente, Franco et al. (2014) realizaram o projeto estatístico e econômico do gráfico de controle de $\bar{X}$ em processos com observações autoregressivas de primeira ordem usando a estratégia *s-skip*.

O apelo prático de pular observações reside no fato de que o desempenho do gráfico no monitoramento de processos autocorrelacionados aumenta substancialmente quando algumas observações são ignoradas. Baseando-se nessa premissa, considerou-se nesta seção a estratégia de amostragem sistemática para melhorar o desempenho do gráfico de controle T^2 de Hotelling.

A dedução da matriz de variância-covariância do vetor de médias amostrais $(\Gamma_{\bar{X}})$ considerando a estratégia de amostragem sistemática não é simples, contudo necessária para obter λ^2 , parâmetro de não centralidade da distribuição *qui-quadrado* (Veja Apêndice H).

O poder do gráfico de controle T^2 de Hotelling é função de λ^2 , logo o conhecimento da matriz de variância-covariância facilita a investigação do efeito da correlação e da autocorrelação no gráfico de controle. O efeito combinado da autocorrelação e da correlação no desempenho do gráfico T^2 Hotelling sob a estratégia de amostragem sistemática é digno de investigação, pois não há referências de trabalhos que utilizam esta estratégia em processos com duas ou mais variáveis.

Nesta seção, será estudado o efeito da autocorrelação e correlação no gráfico de T^2 em um processo bivariado. Obteve-se a matriz de variância-covariância do vetor de médias amostrais formadas por subgrupos racionais de tamanho n selecionados com base

na estratégia de amostragem sistemática (ver Apêndice H), de tal modo que se pode escrever que:

$$\Gamma_{\bar{X}} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_X^2}{n} \left[1 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)a^{(s+1)j} \right] & \frac{\sigma_{XY}}{n} \left[1 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)a^{(s+1)j} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)b^{(s+1)j} \right] \\ \frac{\sigma_{XY}}{n} \left[1 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)a^{(s+1)j} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)b^{(s+1)j} \right] & \frac{\sigma_Y^2}{n} \left[1 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)b^{(s+1)j} \right] \end{pmatrix} \quad (88)$$

sendo $\sigma_X^2 = \frac{\sigma_{e_X}^2}{1-a^2}$; $\sigma_Y^2 = \frac{\sigma_{e_Y}^2}{1-b^2}$; $\sigma_{XY} = \frac{\sigma_{e_{XY}}}{1-ab}$.

O parâmetro de não centralidade (λ) da distribuição de T^2 é função dos elementos da matriz inversa de variância-covariância. Sob a hipótese de emprego da estratégia de amostragem sistemática, buscou-se conhecer o comportamento de $\Gamma_{\bar{X}}^{-1}$ diante do efeito da autocorrelação e da correlação no desempenho do gráfico de controle T^2 de Hotelling.

A Tabela 12 apresenta valores de θ_{11} , θ_{22} e θ_{12} , considerando-se: $n=4$, $\rho \in \{0; 0,7\}$ e a e $b \in \{0; 0,2; 0,5; 0,7\}$. Os elementos da diagonal principal de $\Gamma_{\bar{X}}^{-1}$ aumentam à medida que aumenta a correlação (ρ) e a amplitude do intervalo de amostragem (s). Contudo, os elementos da diagonal principal de $\Gamma_{\bar{X}}^{-1}$ diminuem com a presença da autocorrelação (a, b). Quando as variáveis são independentes, os elementos da diagonal secundária de $\Gamma_{\bar{X}}^{-1}$ são iguais a zero e na presença de correlação, eles são negativos.

Tabela 12. Elementos da matriz $\Gamma_{\bar{X}}^{-1}$; a e $b \in \{0; 0,2; 0,5; 0,7\}$; $\rho \in \{0; 0,7\}$.

ρ		0							0,7						
	a	0,0	0,0	0,2	0,0	0,5	0,0	0,7	0,0	0,0	0,2	0,0	0,5	0,0	0,7
	b	0,0	0,2	0,2	0,5	0,5	0,7	0,7	0,0	0,2	0,2	0,5	0,5	0,7	0,7
$s=0$	θ_{11}	4,00	4,00	2,86	4,00	1,45	4,00	0,75	7,84	7,70	5,60	6,87	2,85	5,86	1,48
	θ_{22}	4,00	2,86	2,86	1,45	1,45	0,75	0,75	7,84	5,50	5,50	2,50	2,85	1,10	1,48
	θ_{12}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-5,49	-4,51	-3,92	-2,68	-2,00	-1,43	-1,03
$s=1$	θ_{11}	4,00	4,00	3,62	4,00	2,08	4,00	1,00	7,84	7,56	7,09	6,45	4,07	5,58	1,97
	θ_{22}	4,00	3,62	3,62	2,08	2,08	1,00	1,00	7,84	6,83	7,09	3,35	4,07	1,40	1,97
	θ_{12}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-5,49	-4,93	-4,96	-2,87	-2,85	-1,48	-1,38
$s=2$	θ_{11}	4,00	4,00	3,79	4,00	2,49	4,00	1,23	7,84	7,55	7,44	6,36	4,88	5,45	2,42
	θ_{22}	4,00	3,79	3,79	2,49	2,49	1,23	1,23	7,84	7,16	7,44	3,96	4,88	1,68	2,42
	θ_{12}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-5,49	-5,05	-5,21	-3,05	-3,42	-1,56	-1,69

5.1 DESEMPENHO DO GRÁFICO T^2 DE HOTELLING SOB A ESTRATÉGIA DE AMOSTRAGEM SISTEMÁTICA

Para estudar o efeito da correlação e da autocorrelação no desempenho do gráfico de T^2 sob a estratégia de amostragem sistemática, assumiu-se um processo bivariado e amostras de tamanho $n=4$ foram adotadas seguindo os intervalos de amostragem $s \in \{0,1,2\}$. O desempenho dos gráficos foi avaliado pelo número médio de amostras até o sinal (NMA). Quando em controle o processo, o NMA_0 foi fixado em 370,4. Os demais NMA s são apresentados nas Tabelas 13, 14 e 15. Considerou-se na análise do desempenho variáveis não correlacionadas, $\rho = 0$, e variáveis com baixa ou alta correlação, $\rho = 0,3$ ou $0,7$. Também foram consideradas observações independentes e autocorrelacionadas, ou seja: $a, b \in \{0; 0,2; 0,5; 0,7\}$.

Tabela 13. Valores do NMA - Gráfico de T^2 , $\delta_1 = \delta_2$.

(a; b)		(0; 0)			(0; 0,2)			(0; 0,5)			(0; 0,7)		
s		0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
δ_1	δ_2	NMA											
$\rho=0,0$													
,50	,50	27,73	34,43	29,74	28,78	46,56	40,51	37,09	55,16	51,84	49,02		
,75	,75	7,74	9,99	8,40	8,09	14,47	12,17	10,92	17,96	16,58	15,44		
1,00	1,00	3,06	3,89	3,30	3,18	5,63	4,72	4,24	7,07	6,50	6,03		
1,25	1,25	1,68	2,02	1,78	1,73	2,78	2,38	2,18	3,43	3,17	2,96		
1,50	1,50	1,21	1,36	1,25	1,23	1,71	1,53	1,43	2,03	1,90	1,80		
$\rho=0,3$													
,50	,50	39,83	48,07	42,20	40,96	59,46	53,24	49,45	64,48	61,80	59,30		
,75	,75	11,92	15,06	12,79	12,33	19,80	17,16	15,61	22,03	20,84	19,74		
1,00	1,00	4,62	5,87	4,97	4,79	7,86	6,74	6,10	8,83	8,30	7,83		
1,25	1,25	2,34	2,89	2,49	2,41	3,79	3,28	2,99	4,24	3,99	3,77		
1,50	1,50	1,51	1,77	1,58	1,54	2,21	1,95	1,81	2,43	2,31	2,20		
$\rho=0,7$													
,50	,50	55,82	64,12	58,39	56,95	67,08	66,04	63,61	65,51	67,22	67,16		
,75	,75	18,24	21,87	19,34	18,72	23,23	22,75	21,64	22,51	23,29	23,26		
1,00	1,00	7,19	8,76	7,66	7,40	9,36	9,14	8,66	9,04	9,39	9,37		
1,25	1,25	3,48	4,20	3,70	3,57	4,49	4,38	4,16	4,34	4,50	4,49		
1,50	1,50	2,06	2,42	2,16	2,10	2,56	2,51	2,39	2,48	2,56	2,56		
(a; b)		(0; 0)			(0,2; 0,2)			(0,5; 0,5)			(0,7; 0,7)		
s		0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
δ_1	δ_2	NMA											
$\rho=0,0$													
,50	,50	27,73	43,87	31,98	29,90	93,65	64,57	52,09	159,45	129,50	108,90		
,75	,75	7,74	13,43	9,15	8,45	36,68	22,08	16,69	80,52	58,64	45,48		
1,00	1,00	3,06	5,22	3,57	3,31	15,74	8,85	6,54	41,01	27,61	20,29		
1,25	1,25	1,68	2,60	1,89	1,79	7,62	4,25	3,19	21,85	13,98	9,98		
1,50	1,50	1,21	1,63	1,30	1,26	4,19	2,44	1,91	12,35	7,71	5,46		
$\rho=0,3$													
,50	,50	39,83	60,48	45,39	42,68	118,51	85,46	70,57	187,11	156,80	135,09		
,75	,75	11,92	20,25	14,01	12,98	51,43	32,28	24,86	103,84	78,44	62,47		
1,00	1,00	4,62	8,05	5,45	5,04	23,53	13,57	10,09	56,91	39,68	29,85		
1,25	1,25	2,34	3,88	2,70	2,52	11,72	6,53	4,83	31,98	21,04	15,25		
1,50	1,50	1,51	2,25	1,68	1,59	6,43	3,61	2,73	18,70	11,86	8,43		
$\rho=0,7$													
,50	,50	55,82	81,12	62,78	59,41	145,92	109,97	92,97	214,55	185,10	163,19		
,75	,75	18,24	30,04	21,27	19,78	70,22	46,13	36,31	130,24	102,03	83,48		
1,00	1,00	7,19	12,50	8,49	7,85	34,52	20,64	15,55	76,85	55,62	42,94		
1,25	1,25	3,48	6,00	4,08	3,78	17,96	10,17	7,52	45,73	31,13	23,04		
1,50	1,50	2,06	3,33	2,35	2,20	10,02	5,57	4,13	27,90	18,16	13,08		

Tabela 14. Valores do *NMA* - Gráfico de T^2 , δ_1 ou $\delta_2 = 0$.

(a; b)		(0; 0)			(0; 0,2)			(0; 0,5)			(0; 0,7)		
s		0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
δ_1	δ_2	NMA											
$\rho=0,0$													
,00	,50	67,32	95,27	75,12	71,36	163,04	126,03	108,04	230,33	201,94	180,35		
,50	,00	67,32	67,32	67,32	67,32	67,32	67,32	67,32	67,32	67,32	67,32	67,32	67,32
,00	1,00	9,41	16,19	11,09	10,26	42,87	26,28	20,02	90,63	67,10	52,66		
1,00	,00	9,41	9,41	9,41	9,41	9,41	9,41	9,41	9,41	9,41	9,41	9,41	9,41
,00	1,50	2,57	4,31	2,98	2,77	13,05	7,28	5,39	35,03	23,24	16,92		
1,50	,00	2,57	2,57	2,57	2,57	2,57	2,57	2,57	2,57	2,57	2,57	2,57	2,57
$\rho=0,3$													
,00	,50	60,48	87,08	68,09	64,54	154,61	118,79	101,38	224,59	196,46	175,07		
,50	,00	60,48	60,61	60,75	60,76	61,50	62,03	62,16	62,91	63,40	63,63		
,00	1,00	8,05	13,99	9,57	8,84	38,60	23,63	17,96	85,39	63,18	49,52		
1,00	,00	8,05	8,08	8,10	8,10	8,25	8,35	8,37	8,52	8,62	8,66		
,00	1,50	2,25	3,72	2,61	2,44	11,47	6,46	4,80	32,25	21,45	15,64		
1,50	,00	2,25	2,26	2,26	2,26	2,30	2,32	2,33	2,36	2,38	2,39		
$\rho=0,7$													
,00	,50	28,53	46,04	34,59	32,41	107,78	81,44	68,10	192,22	167,20	147,73		
,50	,00	28,53	29,27	30,07	30,10	34,34	37,40	38,16	42,47	45,26	46,61		
,00	1,00	3,15	5,55	3,91	3,63	19,93	12,57	9,57	60,27	45,09	35,34		
1,00	,00	3,15	3,24	3,34	3,34	3,87	4,28	4,39	5,01	5,43	5,64		
,00	1,50	1,23	1,70	1,37	1,31	5,36	3,35	2,61	20,16	13,90	10,30		
1,50	,00	1,23	1,24	1,26	1,26	1,36	1,44	1,46	1,58	1,67	1,72		
(a; b)		(0; 0)			(0,2; 0,2)			(0,5; 0,5)			(0,7; 0,7)		
s		0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
δ_1	δ_2	NMA											
$\rho=0,0$													
,00	,50	67,32	95,27	75,12	71,36	163,04	126,03	108,04	230,33	201,94	180,35		
,50	,00	67,32	95,27	75,12	71,36	163,04	126,03	108,04	230,33	201,94	180,35		
,00	1,00	9,41	16,19	11,09	10,26	42,87	26,28	20,02	90,63	67,10	52,66		
1,00	,00	9,41	16,19	11,09	10,26	42,87	26,28	20,02	90,63	67,10	52,66		
,00	1,50	2,57	4,31	2,98	2,77	13,05	7,28	5,39	35,03	23,24	16,92		
1,50	,00	2,57	4,31	2,98	2,77	13,05	7,28	5,39	35,03	23,24	16,92		
$\rho=0,3$													
,00	,50	60,48	86,92	67,80	64,26	153,08	116,62	99,17	221,26	192,21	170,40		
,50	,00	60,48	86,92	67,80	64,26	153,08	116,62	99,17	221,26	192,21	170,40		
,00	1,00	8,05	13,94	9,51	8,79	37,86	22,87	17,31	82,48	60,27	46,86		
1,00	,00	8,05	13,94	9,51	8,79	37,86	22,87	17,31	82,48	60,27	46,86		
,00	1,50	2,25	3,71	2,59	2,42	11,20	6,23	4,62	30,74	20,16	14,58		
1,50	,00	2,25	3,71	2,59	2,42	11,20	6,23	4,62	30,74	20,16	14,58		
$\rho=0,7$													
,00	,50	28,53	45,00	32,87	30,75	95,44	66,03	53,36	161,55	131,52	110,81		
,50	,00	28,53	45,00	32,87	30,75	95,44	66,03	53,36	161,55	131,52	110,81		
,00	1,00	3,15	5,39	3,68	3,42	16,24	9,14	6,76	42,09	28,40	20,91		
1,00	,00	3,15	5,39	3,68	3,42	16,24	9,14	6,76	42,09	28,40	20,91		
,00	1,50	1,23	1,66	1,32	1,28	4,32	2,51	1,96	12,75	7,96	5,65		
1,50	,00	1,23	1,66	1,32	1,28	4,32	2,51	1,96	12,75	7,96	5,65		

Na ausência de autocorrelação ($a = b = 0$) ou na presença de duas variáveis com o mesmo nível de autocorrelação ($a = b \neq 0$), a alta dependência entre duas variáveis aumenta o desempenho do gráfico de T^2 quando há deslocamento na média de apenas uma variável ($\delta_1 \neq 0$; $\delta_2 = 0$ ou $\delta_1 = 0$; $\delta_2 \neq 0$).

Por exemplo, se $a = b = \rho = 0$ e $(\delta_1; \delta_2) = (0; 1,0)$, o gráfico de T^2 requer, em média, $NMA=9,41$ amostras para sinalizar o deslocamento na média do processo. Esse número reduz para $NMA=3,15$ quando ambas as variáveis são altamente correlacionadas ($a = b = 0$; $\rho = 0,7$).

Se não há independência entre as observações das variáveis ($a = b = 0,5; \rho = 0$) e $(\delta_1; \delta_2) = (0; 1,0)$, o $NMA = 42,87$. Quando a correlação é alta ($a = b = 0,5; \rho = 0,7$), o NMA decresce para 16,24. Nesses dois últimos casos, a estratégia de emprego da amostragem sistemática ($s=2$) reduz os NMA s, respectivamente, de 42,87 para 20,02 e de 16,24 para 6,76, veja a Figura 50 e Tabela 13.

Tabela 15. Valores do NMA - Gráfico de T^2 , $\delta_1 \neq \delta_2$.

(a; b)		(0; 0)			(0; 0,2)			(0; 0,5)			(0; 0,7)		
s		0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
δ_1	δ_2	NMA											
$\rho=0,0$													
,50	1,00	6,50	9,99	7,42	6,97	20,48	14,41	11,75	33,41	27,67	23,58		
1,00	,50	6,50	7,17	6,72	6,62	8,15	7,69	7,41	8,72	8,51	8,32		
,50	1,50	2,22	3,43	2,51	2,37	8,44	5,28	4,12	17,76	13,15	10,33		
1,50	,50	2,22	2,31	2,25	2,23	2,43	2,37	2,34	2,49	2,47	2,45		
1,00	1,50	1,61	2,10	1,74	1,67	3,54	2,71	2,34	5,25	4,50	3,96		
1,50	1,00	1,61	1,79	1,66	1,64	2,09	1,94	1,85	2,29	2,22	2,15		
$\rho=0,3$													
,50	1,00	8,76	14,02	10,10	9,43	29,07	20,06	16,14	44,37	36,84	31,38		
1,00	,50	8,76	9,15	8,87	8,81	9,40	9,26	9,12	9,40	9,40	9,35		
,50	1,50	2,56	4,24	2,96	2,76	11,48	6,80	5,15	24,25	17,56	13,54		
1,50	,50	2,56	2,57	2,57	2,57	2,55	2,57	2,57	2,53	2,55	2,56		
1,00	1,50	2,12	2,98	2,34	2,23	5,23	3,88	3,27	7,18	6,18	5,43		
1,50	1,00	2,12	2,31	2,18	2,15	2,51	2,40	2,32	2,56	2,53	2,49		
$\rho=0,7$													
,50	1,00	8,30	15,70	10,27	9,38	39,85	25,91	19,99	58,22	49,07	41,80		
1,00	,50	8,30	7,56	8,24	8,35	6,92	7,97	8,38	7,20	7,91	8,32		
,50	1,50	1,88	3,35	2,26	2,09	1,75	6,84	4,93	32,26	22,39	16,67		
1,50	,50	1,88	1,77	1,89	1,91	12,74	1,94	2,02	1,89	2,03	2,12		
1,00	1,50	2,56	4,19	2,98	2,77	7,87	5,75	4,69	9,24	8,45	7,60		
1,50	1,00	2,56	2,45	2,55	2,56	2,24	2,46	2,53	2,22	2,38	2,47		
(a; b)		(0; 0)			(0,2; 0,2)			(0,5; 0,5)			(0,7; 0,7)		
s		0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
δ_1	δ_2	NMA											
$\rho=0,0$													
,50	1,00	6,50	11,33	7,68	7,10	31,74	18,81	14,13	72,02	51,69	39,67		
1,00	,50	6,50	11,33	7,68	7,10	31,74	18,81	14,13	72,02	51,69	39,67		
,50	1,50	2,22	3,64	2,55	2,38	11,00	6,12	4,53	30,26	19,82	14,33		
1,50	,50	2,22	3,64	2,55	2,38	11,00	6,12	4,53	30,26	19,82	14,33		
1,00	1,50	1,61	2,46	1,80	1,71	7,14	3,99	3,00	20,60	13,13	9,36		
1,50	1,00	1,61	2,46	1,80	1,71	7,14	3,99	3,00	20,60	13,13	9,36		
$\rho=0,3$													
,50	1,00	8,76	15,13	10,34	9,56	40,53	24,67	18,74	86,86	63,93	49,96		
1,00	,50	8,76	15,13	10,34	9,56	40,53	24,67	18,74	86,86	63,93	49,96		
,50	1,50	2,56	4,30	2,97	2,77	13,02	7,27	5,37	34,97	23,19	16,89		
1,50	,50	2,56	4,30	2,97	2,77	13,02	7,27	5,37	34,97	23,19	16,89		
1,00	1,50	2,12	3,46	2,44	2,28	10,43	5,80	4,30	28,90	18,86	13,61		
1,50	1,00	2,12	3,46	2,44	2,28	10,43	5,80	4,30	28,90	18,86	13,61		
$\rho=0,7$													
,50	1,00	8,30	14,37	9,80	9,06	38,82	23,52	17,82	84,07	61,60	47,98		
1,00	,50	8,30	14,37	9,80	9,06	38,82	23,52	17,82	84,07	61,60	47,98		
,50	1,50	1,88	2,99	2,14	2,01	8,90	4,95	3,69	25,15	16,24	11,65		
1,50	,50	1,88	2,99	2,14	2,01	8,90	4,95	3,69	25,15	16,24	11,65		
1,00	1,50	2,56	4,29	2,97	2,77	13,00	7,26	5,37	34,93	23,16	16,86		
1,50	1,00	2,56	4,29	2,97	2,77	13,00	7,26	5,37	34,93	23,16	16,86		

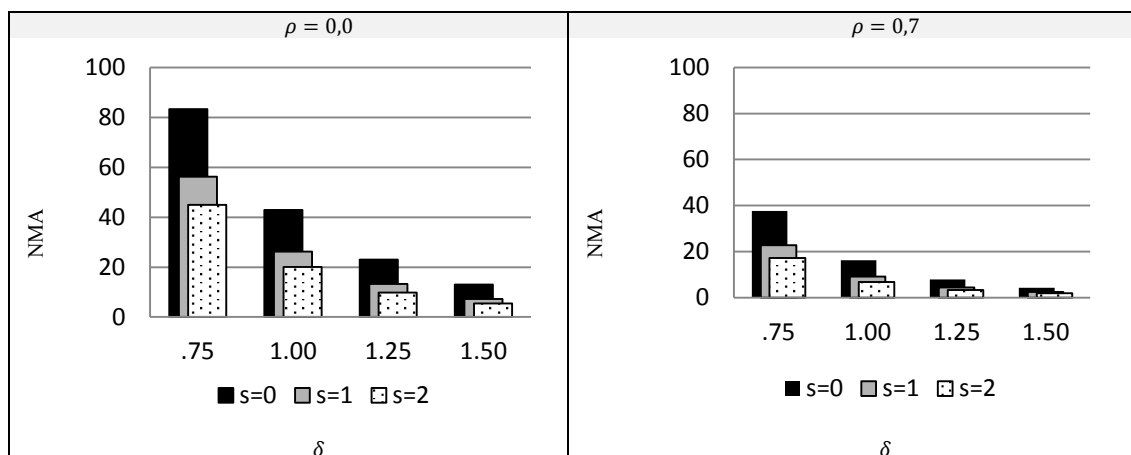


Figura 50. *NMA* do gráfico de T^2 ; $a=0,5$; $b=0,5$; $\delta_1=0$, $\delta_2 \in (0,75;1,00;1,25;1,50)$.

Fonte: o próprio autor.

Efeito contrário é observado se ocorre deslocamento na média das duas variáveis. Por exemplo, se $a=b=\rho=0$ e $(\delta_1; \delta_2) = (1,0; 1,0)$, o gráfico de T^2 requer, em média, $NMA=3,06$ amostras para sinalizar o deslocamento na média do processo. O *NMA* aumenta para 7,19 quando as variáveis apresentam alta correlação $a=b=0$; $\rho=0,7$.

Quando ambas são autocorrelacionadas e independentes, $a=b=0,5$; $\rho=0$ e $(\delta_1; \delta_2) = (1,0, 1,0)$, o $NMA=15,74$. O *NMA* aumenta para 34,52 quando há alta correlação $a=b=0,5$; $\rho=0,7$.

Nesses dois últimos casos, a estratégia de emprego da amostragem sistemática ($s=2$) reduz os *NMA*s, respectivamente de 15,74 para 6,54 e de 34,52 para 15,55, veja a Figura 51 e Tabela 14.

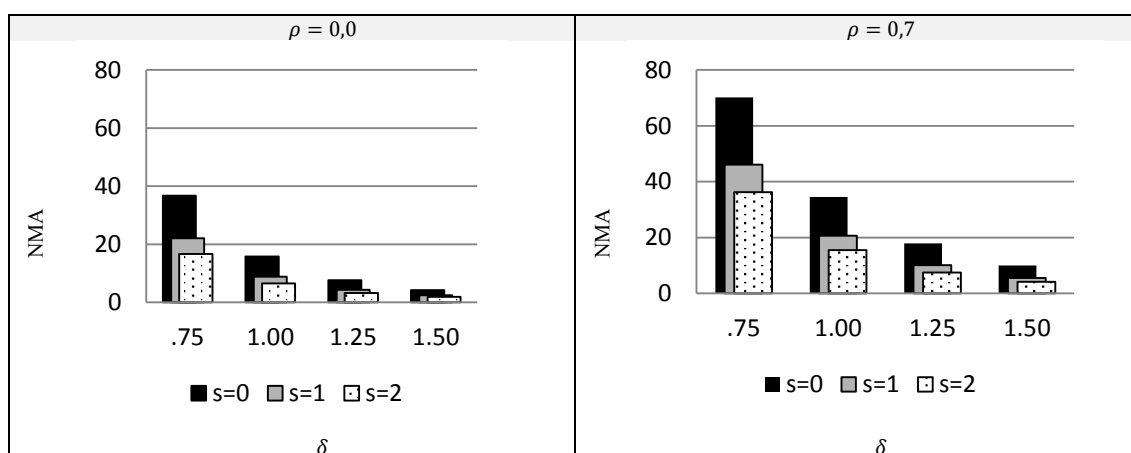


Figura 51. *NMA* do gráfico de T^2 ; $a=0,5$; $b=0,5$; $\delta_1=\delta_2 \in (0,75;1,00;1,25;1,50)$.

Fonte: o próprio autor.

Se apenas uma variável é autocorrelacionada e apenas uma sofre deslocamento na média, fruto de uma causa especial que atua no processo, ($a \neq 0$; $b=0$ ou $a=0$; $b \neq 0$ e $\delta_1 \neq 0$; $\delta_2=0$ ou $\delta_1=0$; $\delta_2 \neq 0$), alta dependência entre as duas variáveis aumenta o desempenho do gráfico de T^2 .

Por exemplo, se a causa especial modifica a média da variável independente (a ; b ; δ_1 ; δ_2) = (0; 0,2; 1,0; 0) e $\rho=0$, o $NMA=9,41$. Esse número diminui para $NMA=3,24$ quando há alta correlação ($\rho=0,7$). Nesse caso, a estratégia de amostragem sistemática não melhora o desempenho do gráfico de T^2 .

Quando a causa especial modifica a média da variável autocorrelacionada (a ; b ; δ_1 ; δ_2) = (0; 0,2; 0; 1,0) e $\rho=0$, o gráfico de T^2 requer, em média, 16,19 amostras para sinalizar. Esse número diminui para $NMA=5,55$ quando há alta correlação ($\rho=0,7$). Nesse último caso, aplicando a estratégia de amostragem sistemática ($s=2$) os NMA s, diminuem, respectivamente, de 10,26 para 3,63, veja a Figura 52. Para o cenário em que $b=0,7$, consulte a Figura 53.

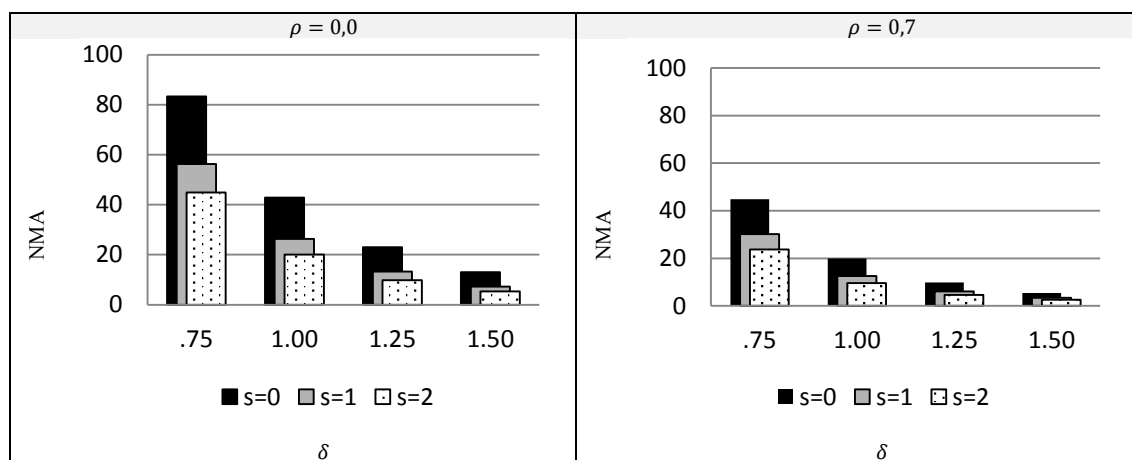


Figura 52. NMA do gráfico de T^2 ; $a=0$; $b=0,5$; $\delta_1=0$; $\delta_2 \in (0,75;1,00;1,25;1,50)$.

Fonte: o próprio autor.

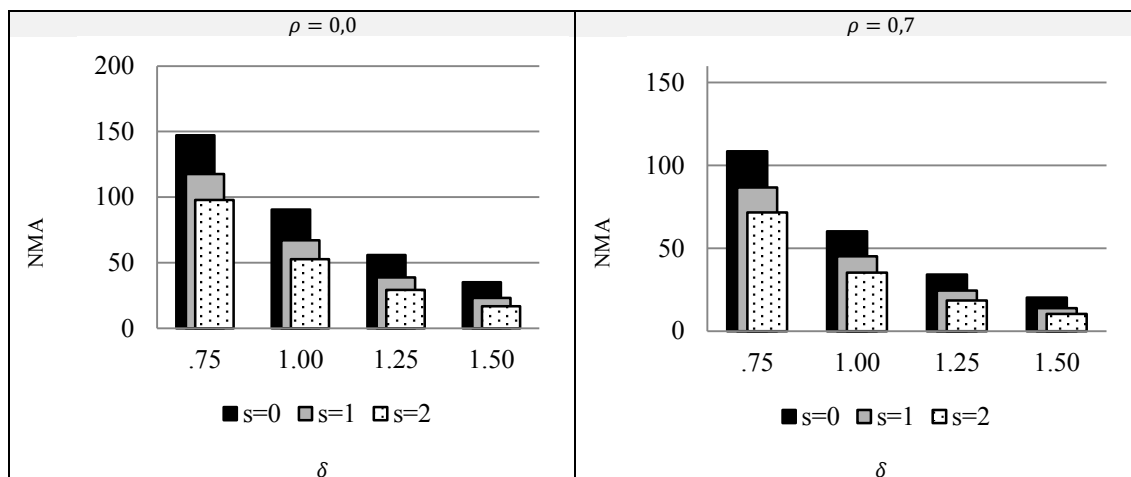


Figura 53. NMA do gráfico de T^2 ; $a=0$; $b=0,7$; $\delta_1=0$; $\delta_2 \in (0,75;1,00;1,25;1,50)$.

Fonte: o próprio autor.

Em geral, o desempenho do gráfico T^2 de Hotelling quando associado a técnica de amostragem sistemática pode ser resumido de acordo com a Tabela 16.

Tabela 16. Desempenho do gráfico T^2 de Hotelling (amostragem sistemática).

Autocorrelação	Deslocamento	Correlação	Desempenho gráfico de T^2 ($s > 0$)
$a=b \neq 0$	$\delta_1 = 0; \delta_2 \neq 0$ $\delta_1 \neq 0; \delta_2 = 0$	$\rho = \text{constante}$	NMA ↓
	$\delta_1 \neq 0; \delta_2 \neq 0$		
$a=0; b \neq 0$	$\delta_1 = 0; \delta_2 \neq 0$		
$a \neq 0; b=0$	$\delta_1 \neq 0; \delta_2 = 0$		NMA ↑
$a=0; b \neq 0$	$\delta_1 \neq 0; \delta_2 = 0$		
$a \neq 0; b=0$	$\delta_1 = 0; \delta_2 \neq 0$		

Mantendo-se o grau de correlação constante ($\rho = \text{constante}$), o NMA tende a ser menor nos cenários em que:

- Ambas as variáveis são autocorrelacionadas ($a=b \neq 0$) e o deslocamento ocorre no vetor de médias ($\delta_1 = 0; \delta_2 \neq 0$ ou $\delta_1 \neq 0; \delta_2 = 0$ ou $\delta_1 \neq 0; \delta_2 \neq 0$);
- Apenas uma variável é autocorrelacionada ($a \neq 0; b = 0$ / $a = 0; b \neq 0$) e o deslocamento ocorre na variável dependente ($\delta_1 \neq 0; \delta_2 = 0$ / $\delta_1 = 0; \delta_2 \neq 0$).

5.2 ESCOLHA DO PARÂMETRO s

Nesta seção será investigado como o parâmetro de não centralidade (λ^2) é influenciado pelo valor adotado para o parâmetro s quando a amostragem sistemática é empregada. Quanto maior o valor de λ^2 , melhor será o desempenho do gráfico de T^2 .

Sem perder a generalidade da análise, consideram-se os seguintes parâmetros: a e $b \in \{0,2; 0,5; 0,7\}$; $\rho \in \{0,3; 0,7\}$; δ_1 e $\delta_2 \in \{0,0; 0,5; 1,0\}$; $n=4$; $s \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,15,20\}$.

As Figuras 54-57 ilustram os valores de λ^2 em função do parâmetro s .

De acordo com a Figura 57, o emprego da estratégia de amostragem sistemática não é recomendada quando apenas uma das variáveis é autocorrelacionada e esta é robusta a ocorrência de causas especiais.

Nos demais cenários, Figura 54-56, o parâmetro de não centralidade aumenta quando o valor do parâmetro s também aumenta. É interessante notar que esse aumento é significativo para $s \in (1,2,3)$. Para valores de $s > 3$ esse aumento é marginal, exceto quando o nível de autocorrelação for alto.

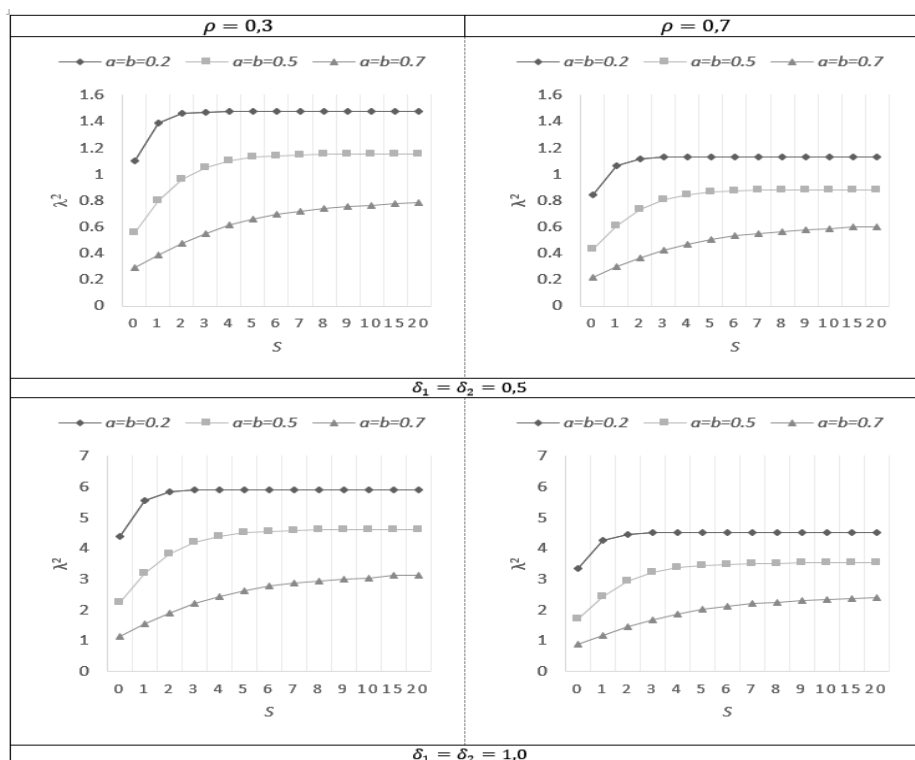


Figura 54. Parâmetro de não centralidade; $a=b \in (0,2; 0,5; 0,7)$, $\delta_1=\delta_2 \in (0,5; 1,0)$.

Fonte: o próprio autor.

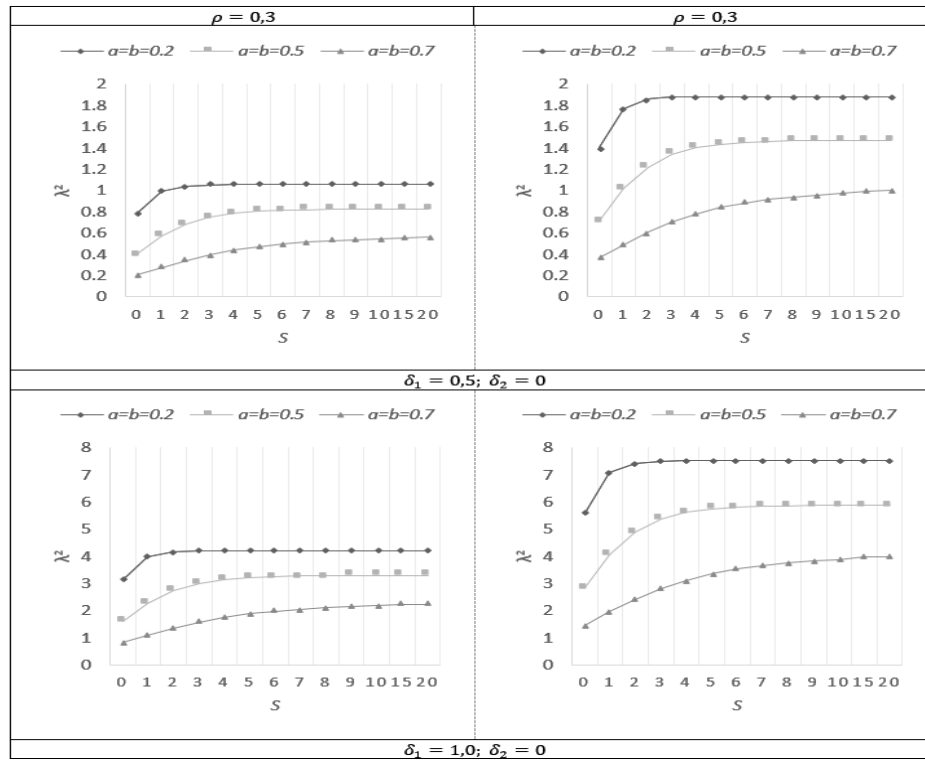


Figura 55. Parâmetro de não centralidade; $a=b \in (0,2; 0,5; 0,7)$, $\delta_1 \in (0,5; 1,0)$, $\delta_2=0,0$.
Fonte: o próprio autor.

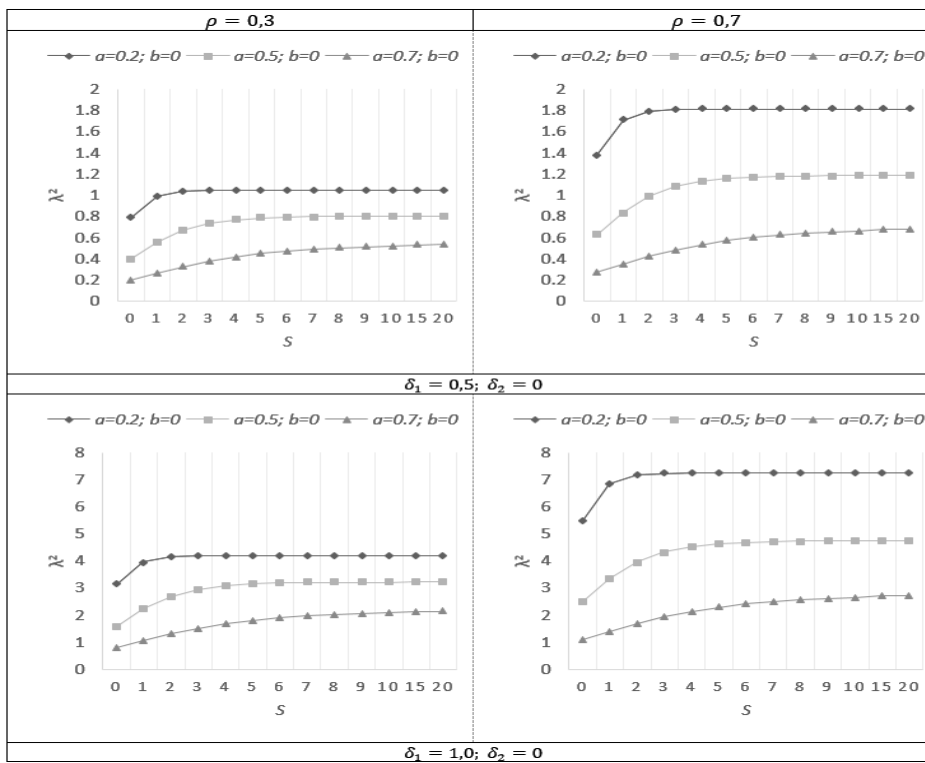


Figura 56. Parâmetro de não centralidade; $a \in (0,2; 0,5; 0,7)$, $b=0$, $\delta_1 \in (0,5; 1,0)$, $\delta_2=0,0$.
Fonte: o próprio autor.

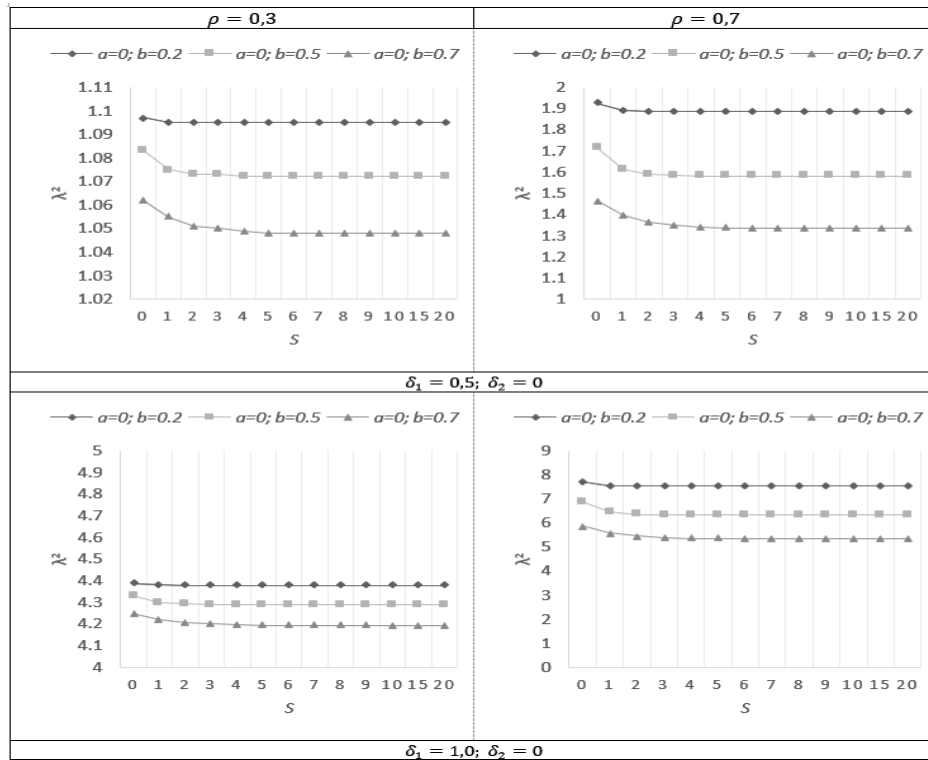


Figura 57. Parâmetro de não centralidade; $a=0$, $b \in (0,2; 0,5; 0,7)$, $\delta_1 \in (0,5; 1,0)$, $\delta_2=0,0$.
Fonte: o próprio autor.

Levando-se em conta o compromisso entre o ganho em desempenho do gráfico (menor NMA) e o esforço adicional para selecionar os quatro elementos da amostra, pular uma ou duas observações parece ser a melhor opção para as variáveis com baixo nível de autocorrelação (a e/ou $b = 0,2$). Se o nível da autocorrelação é moderado (a e/ou $b = 0,5$), pular duas ou três observações parece ser a decisão ideal.

O parâmetro de não centralidade também aumenta com a correlação, exceto quando as duas variáveis são autocorrelacionadas e a causa especial altera simultaneamente os valores alvos das médias.

Para ilustrar o desempenho do gráfico de T^2 combinado com a técnica de amostragem sistemática, considere as duas características de qualidade apresentadas em Montgomery (2009): a resistência a tração e o diâmetro de uma fibra têxtil.

As duas características de qualidade são correlacionadas, $\rho = 0,78$; $\mu_0 = (115,9; 0,0106)^T$ e $\Sigma_e = \begin{pmatrix} \sigma_{e_X}^2 & \sigma_{e_{XY}} \\ \sigma_{e_{XY}} & \sigma_{e_Y}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,23 & 0,79 \\ 0,79 & 0,83 \end{pmatrix}$.

Adotando-se amostras de tamanho $n=4$ em conjunto com do gráfico de T^2 , dois cenários são comparados na Tabela 17. No primeiro cenário, as variáveis são

consideradas não autocorrelacionadas ($a=b=0$) e no segundo as variáveis são consideradas autocorrelacionadas ($a=b=0,4$).

Mesmo a autocorrelação sendo considerada moderada, ela é capaz de reduzir o poder do gráfico de T^2 , o seja, reduz a capacidade do gráfico em sinalizar causas especiais que alteram o vetor de médias das variáveis de um processo.

Por exemplo, da Tabela 17, no primeiro cenário o NMA correspondente a ($\delta_1=0,5$; $\delta_2=1,0$) é igual a 14,23. No segundo cenário, esse número aumenta mais de 300% ($NMA=42,93$).

Tabela 17. NMA do gráfico de T^2 .

(a; b)		(0; 0)		(0,4; 0,4)		
<i>s</i>			0	1	2	3
δ_1	δ_2					
0	0,5	4,20	14,53	8,27	6,54	5,95
1	0	2,86	9,72	5,48	4,35	3,97
0,5	1	14,23	42,92	26,68	21,63	19,84
0,5	0	25,98	68,77	45,61	37,90	35,08
0	1	1,69	5,08	2,94	2,39	2,21
0,5	0,5	53,97	117,18	85,07	73,41	69,01
1	1	6,87	23,06	13,49	10,72	9,76

O emprego da técnica de amostragem sistemática reduz o efeito negativo da autocorrelação. Se adotado $s=1$, o $NMA = 26,69$ e, para $s=2$, o $NMA = 21,63$. A partir de $s=3$ a redução do NMA é marginal e talvez não seja compensador o esforço adicional para selecionar os elementos da amostra.

6. ESTRATÉGIA DE AMOSTRAGEM COMPOSTA EM PROCESSOS AUTOCORRELACIONADOS

A estratégia de amostragem composta consiste em selecionar unidades de dois subgrupos racionais consecutivos (FRANCO et al., 2013). Para ilustrar o emprego desta técnica, considere a Figura 58 que apresenta dois subgrupos racionais consecutivos de tamanho 5 ($n=5$) e a amostra composta. Uma amostra composta i é formada com unidades do subgrupo racional i (primeiro, terceiro e quinto elementos de acordo com o instante em que os elementos são selecionados da linha de produção) e unidades do subgrupo racional anterior $i-1$ (segundo e quarto elementos). Os elementos restantes do subgrupo racional corrente, isto é, segundo e quarto elementos, são utilizados para formar a próxima amostra composta $i+1$ e assim por diante.

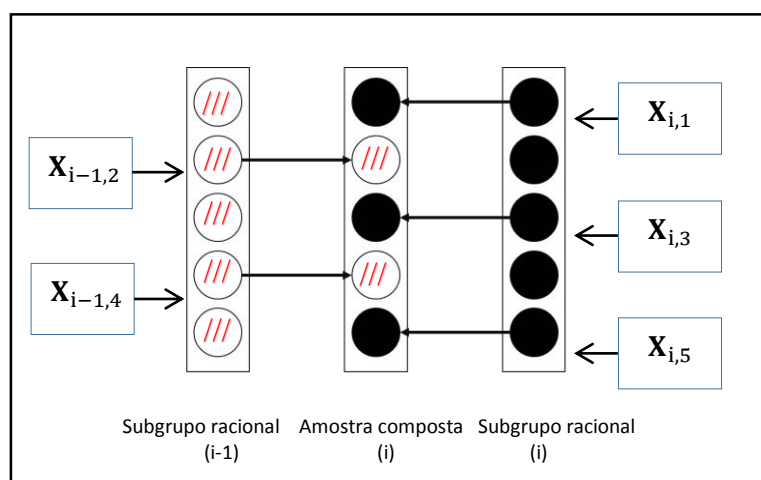


Figura 58. Amostra composta.
Fonte: Adaptado de Franco et al. (2013)

O vetor de médias da amostra composta i é dado por:

$$\bar{\mathbf{M}}_i = \frac{n_e}{n} \cdot \underbrace{\frac{1}{n_e} \sum_{t=1}^{n_e} \mathbf{X}_{i-1,2t}}_{\bar{\mathbf{Y}}_{i-1}} + \frac{n_o}{n} \cdot \underbrace{\frac{1}{n_o} \sum_{t=1}^{n_o} \mathbf{X}_{i,2t-1}}_{\bar{\mathbf{Z}}_i} \quad (89)$$

sendo: $\mathbf{X}_{k,l}$ o l -ésimo vetor com observações do k -ésimo subgrupo racional; $\bar{\mathbf{Y}}_{i-1}$ o vetor de médias das unidades de ordem par selecionadas do subgrupo racional $i-1$, e $\bar{\mathbf{Z}}_i$ o vetor de médias das unidades de ordem ímpar selecionadas do subgrupo racional i . Quando n é par, $n_e = n_o = n/2$, e quando n é ímpar, $n_e = (n-1)/2$ e $n_o = (n+1)/2$.

Admitindo-se que $\bar{\mathbf{Y}}_{i-1}$ e $\bar{\mathbf{Z}}_i$ são independentes, a matriz de variância-covariância $\Gamma_{\bar{\mathbf{M}}}$ do vetor de médias da amostra composta $\bar{\mathbf{M}}$ é dada por:

$$\Gamma_{\bar{\mathbf{M}}} = \begin{pmatrix} \zeta_X^2 & \zeta_{XY} \\ \zeta_{XY} & \zeta_Y^2 \end{pmatrix} = \left(\frac{n_e}{n}\right)^2 \cdot \Gamma_{\bar{\mathbf{Y}}} + \left(\frac{n_o}{n}\right)^2 \cdot \Gamma_{\bar{\mathbf{Z}}} \quad (90)$$

sendo $\Gamma_{\bar{\mathbf{Y}}}$ e $\Gamma_{\bar{\mathbf{Z}}}$ são, respectivamente, a matriz de variância-covariância do vetor de médias das amostras selecionadas do subgrupo racional $i-1$ e subgrupo racional i . De acordo com o modelo VAR (1):

$$\Gamma_{\bar{\mathbf{Z}}} = \frac{1}{n_o^2} \left\{ \left(\sum_{l=0}^{n_o-1} \Phi^{2l} \right) \Gamma \left(\sum_{l=0}^{n_o-1} \Phi^{2l} \right)^T + \sum_{k=1}^{n_o-1} \left\{ \sum_{j=1}^2 \left[\left(\sum_{l=1}^k \Phi^{2l-j} \right) \Sigma_e \left(\sum_{l=1}^k \Phi^{2l-j} \right)^T \right] \right\} \right\} \quad (91)$$

e

$$\Gamma_{\bar{\mathbf{Y}}} = \frac{1}{n_e^2} \left\{ \left(\sum_{l=0}^{n_e-1} \Phi^{2l+1} \right) \Gamma \left(\sum_{l=0}^{n_e-1} \Phi^{2l+1} \right)^T + \left(\sum_{l=0}^{n_e-1} \Phi^{2l} \right) \Sigma_e \left(\sum_{l=0}^{n_e-1} \Phi^{2l} \right)^T + \sum_{k=1}^{n_e-1} \left\{ \sum_{j=1}^2 \left[\left(\sum_{l=1}^k \Phi^{2l-j} \right) \Sigma_e \left(\sum_{l=1}^k \Phi^{2l-j} \right)^T \right] \right\} \right\} \quad (92)$$

Para ilustrar como se obtém a matriz $\Gamma_{\bar{\mathbf{M}}}$ considere o caso em que $n=5$, $\Phi = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$ e $\Sigma_e = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$. De acordo com as expressões (89), (91) e (92):

$$\bar{\mathbf{M}}_i = \underbrace{\frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \sum_{t=1}^2 \mathbf{X}_{i-1,2t}}_{\bar{\mathbf{Y}}_{i-1}} + \underbrace{\frac{3}{5} \times \frac{1}{3} \sum_{t=1}^3 \mathbf{X}_{i,2t-1}}_{\bar{\mathbf{Z}}_i} \quad (93)$$

$$\Gamma_{\bar{\mathbf{Y}}} = \frac{1}{4} [(\Phi + \Phi^3) \Gamma (\Phi + \Phi^3)' + (I + \Phi^2) \Sigma_e (I + \Phi^2)' + \Phi \Sigma_e \Phi' + \Sigma_e]$$

$$\Gamma_{\bar{\mathbf{Y}}} = \begin{pmatrix} 0,5989 & 0,3441 \\ 0,3441 & 0,8333 \end{pmatrix}$$

e

$$\Gamma_{\bar{\mathbf{Z}}} = \frac{1}{9} \left[(I + \Phi^2 + \Phi^4) \Gamma (I + \Phi^2 + \Phi^4)' + (\Phi + \Phi^3) \Sigma_e (\Phi + \Phi^3)' + (I + \Phi^2) \Sigma_e (I + \Phi^2)' + \Phi \Sigma_e \Phi' + \Sigma_e \right]$$

$$\Gamma_{\bar{\mathbf{Z}}} = \begin{pmatrix} 0,4122 & 0,2451 \\ 0,2451 & 0,6111 \end{pmatrix}$$

Finalmente, com a expressão (90):

$$\Gamma_{\bar{M}} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \Gamma_{\bar{Y}} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \Gamma_{\bar{Z}}$$

$$\Gamma_{\bar{M}} = \begin{pmatrix} 0,2442 & 0,1433 \\ 0,1433 & 0,3533 \end{pmatrix}$$

A inversa da matriz de variância-covariância $\Gamma_{\bar{M}}$ é utilizada para calcular a estatística de monitoramento do gráfico T^2 de Hotelling.

6.1 PROPRIEDADES ESTATÍSTICAS DO GRÁFICO T^2 DE HOTELLING COM AMOSTRAS COMPOSTAS

Quando a estratégia de amostras compostas é usada, a estatística de monitoramento do gráfico de T^2 é dada por:

$$T_t^2 = (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \Gamma_{\bar{M}}^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0) \quad (94)$$

sendo $\boldsymbol{\mu}_0 = (\mu_{0X}, \mu_{0Y})^T$. Se as matrizes $\boldsymbol{\Phi}$ e Σ_e são conhecidas ou estimadas com precisão, a estatística de monitoramento T_t^2 segue uma distribuição *qui-quadrado* com $p=2$ graus de liberdade (χ_p^2). Ocorrendo uma causa especial que modifique o vetor de médias para $\boldsymbol{\mu}_1 = (\mu_{1X}, \mu_{1Y})^T$, a distribuição de probabilidade da estatística de monitoramento T_t^2 se passa a ser uma distribuição *qui-quadrado não central* ($\chi_{(p,\lambda)}^2$) com parâmetro de não centralidade $\lambda^2 = \boldsymbol{\delta}^T \Gamma_{\bar{M}}^{-1} \boldsymbol{\delta}$, em que $\boldsymbol{\delta}$ representa a mudança padronizada no vetor de médias $\boldsymbol{\delta} = (\delta_X, \delta_Y)^T = \left(\frac{\mu_{1X} - \mu_{0X}}{\sigma_{eX}}, \frac{\mu_{1Y} - \mu_{0Y}}{\sigma_{eY}} \right)^T$ (FRANCO; COSTA; MACHADO, 2012; WU; MAKIS, 2008).

O erro tipo I do gráfico de T^2 é dado por:

$$\alpha = 1 - \Pr(\chi_p^2 < LSC) \quad (95)$$

sendo LSC o limite superior de controle do gráfico. O LSC é determinado de acordo com o $NMAo=1/\alpha$ desejado, sendo este valor uma função do $(1-\alpha)$ -ésimo quantil da distribuição *qui-quadrado* (CHAMP; JONES-FARMER; RIGDON, 2005).

Se uma causa especial ocorre entre os instantes em que se formam os subgrupos racionais $i-1$ e i , segue-se que $\bar{\mathbf{Y}}_{i-1} \sim N_2[\boldsymbol{\mu}_0; \Gamma_{\bar{Y}}]$ e $\bar{\mathbf{Z}}_i \sim N_2[\boldsymbol{\mu}_1; \Gamma_{\bar{Z}}]$, consequentemente, o

erro tipo II para a primeira amostra composta i formada depois da ocorrência da causa especial é dado por:

$$\beta_1 = \Pr(\chi_{(p, \lambda_1)}^2 < LSC) \quad (96)$$

sendo, $\lambda_1^2 = \boldsymbol{\delta}^T \Gamma_{\bar{M}}^{-1} \boldsymbol{\delta}$ com $\boldsymbol{\delta} = \frac{n_0}{n} (\delta_X, \delta_Y)^T$.

Para as sucessivas amostras compostas $i+1, i+2, \dots$, $\bar{\mathbf{Y}}_{i-1} \sim N_2[\boldsymbol{\mu}_1; \Gamma_{\bar{Y}}]$ e $\bar{\mathbf{Z}}_i \sim N_2[\boldsymbol{\mu}_1; \Gamma_{\bar{Z}}]$, conseqüentemente, o erro tipo II é dado por:

$$\beta_2 = \Pr(\chi_{(p, \lambda_2)}^2 < LSC) \quad (97)$$

sendo, $\lambda_2^2 = \boldsymbol{\delta}^T \Gamma_{\bar{M}}^{-1} \boldsymbol{\delta}$ com $\boldsymbol{\delta} = (\delta_X, \delta_Y)^T$.

Se NA é o número de amostras que antecedem um alarme, $P(NA = 1) = 1 - \beta_1$, $P(NA = 2) = \beta_1(1 - \beta_2)$, $P(NA = 3) = \beta_1\beta_2(1 - \beta_2)$, $P(NA = 4) = \beta_1\beta_2^2(1 - \beta_2)$ e, em geral,

$$P(NA = l) = \begin{cases} 1 - \beta_1 & \text{se } l = 1 \\ \beta_1\beta_2^{l-2}(1 - \beta_2) & \text{se } l > 1 \end{cases}. \quad (98)$$

O NMA do gráfico de T^2 será então:

$$\begin{aligned} NMA &= 1 \times (1 - \beta_1) + 2 \times \beta_1(1 - \beta_2) + 3 \times \beta_1\beta_2(1 - \beta_2) + 4 \times \beta_1\beta_2^2(1 - \beta_2) + \dots \\ &= 1 - \beta_1 + \beta_1(1 - \beta_2) \sum_{l=2}^{\infty} l\beta_2^{l-2}, \end{aligned} \quad (99)$$

Dado que a série $\sum_{l=2}^{\infty} l\beta_2^{l-2}$ é convergente, pode-se reescrevê-la para obter o NMA . Para tanto, basta considerar uma progressão geométrica com razão β_2 dada por:

$$1 + \beta_2 + \beta_2^2 + \beta_2^3 + \beta_2^4 + \dots = \frac{1}{1 - \beta_2} \quad (100)$$

ou ainda,

$$\beta_2^2 + \beta_2^3 + \beta_2^4 + \dots = -\frac{\beta_2^2}{1 - \beta_2} \quad (101)$$

Derivando em relação a β_2 , tem-se que:

$$2\beta_2 + 3\beta_2^2 + 4\beta_2^3 + \dots = \frac{\beta_2}{(1 - \beta_2)^2} (2 - \beta_2^2) \quad (102)$$

Dividindo ambos os lados por β_2 ,

$$2 + 3\beta_2 + 4\beta_2^2 + \dots = \frac{2 - \beta_2^2}{(1 - \beta_2)^2} \quad (103)$$

Logo, o NMA será dado por:

$$NMA = 1 - \beta_1 + \beta_1(1 - \beta_2) \frac{2 - \beta_2^2}{(1 - \beta_2)^2} = \frac{\beta_1}{(1 - \beta_2)} + 1 \quad (104)$$

Se a causa especial ocorrer antes da primeira amostra, então $NMA = 1/(1 - \beta_2)$, pois $\beta_1 = \beta_2$.

6.2 DESEMPENHO DO GRÁFICO T^2 DE HOTELLING SOB A ESTRATÉGIA DE AMOSTRAGEM COMPOSTA

Nesta seção, será investigado a influência da autocorrelação ($a; b$), correlação (ρ) e do deslocamento no vetor de médias ($\delta_X; \delta_Y$) no desempenho estatístico do gráfico T^2 de Hotelling. A estratégia de amostragem composta (MS – *mixed sampling*) é comparada com as estratégias de amostragem padrão (STD – *standard sampling*), estratégia em que as unidades são selecionadas de acordo com o conceito de subgrupos racionais, e amostragem sistemática seguindo o intervalo de amostragem $s=1$ (S1 – *skip sampling*). Assume-se que Φ se mantém constante quando o processo sai de um estado sob controle estatístico para um estado fora de controle estatístico. O valor do NMA_0 e o tamanho da amostra n foram fixados em 370,4 e 5, respectivamente.

As Tabelas 18-20 apresentam os valores do NMA do gráfico T^2 de Hotelling com as estratégias de amostragem MS, S1 e STD. Os níveis de autocorrelação ($a; b$) foram estratificados em baixo (0,3), médio (0,5) e alto (0,7). A Tabela 18 apresenta os resultados em que as duas variáveis não são correlacionadas ($\rho = 0,0$). A Tabela 19 ilustra os resultados em que as duas variáveis apresentam baixo nível de correlação ($\rho = 0,3$) e a Tabela 20 considera os resultados em que há alta correlação entre as duas variáveis ($\rho = 0,7$).

Em geral, o emprego da estratégia de amostragem composta reduz o efeito negativo da autocorrelação no desempenho do gráfico de controle T^2 de Hotelling. Por exemplo, na Tabela 18 quando as observações apresentam níveis medianos de autocorrelação ($a=b=0,5$) e $\delta = (0,5; 1,0)^T$, o gráfico de T^2 com a estratégia STD requer, em média, 25,7 amostras para sinalizar uma causa especial. O valor do NMA reduz para 12,3 (aproximadamente 52% menor) com a estratégia MS. Redução semelhante é observada nas variáveis que apresentam correlação ($\rho > 0$), vejam as Tabelas 19 e 20.

Nos casos em que a variável autocorrelacionada não é afetada por uma causa especial e as observações da outra variável são independentes ($a=0$ e $b>0$ ou $a>0$ e $b=0$), a estratégia de amostragem MS reduz o desempenho do gráfico de T^2 . Por exemplo, de acordo com a Tabela 18, se $(a=0; b=0,5)$ e $\delta = (1,0; 0)^T$, o gráfico de T^2 com a estratégia de amostragem STD requer, em média, 5,7 amostras para sinalizar uma causa especial. Com a estratégia MS o NMA aumenta para 6,6 (aproximadamente 14% a mais).

Tabela 18. NMA s do gráfico de controle T^2 de Hotelling; $\rho = 0, 0$.

$a \ b$	δ_x	δ_y	0,00	0,00	0,00	0,00	0,50	0,50	0,50	0,50	1,00	1,00	1,00	1,00	1,50	1,50	1,50	1,50
			0,00	0,50	1,00	1,50	0,00	0,50	1,00	1,50	0,00	0,50	1,00	1,50	0,00	0,50	1,00	1,50
0,0 0,0	STD		370,40	51,88	6,50	1,90	51,88	19,91	4,51	1,68	6,50	4,51	2,22	1,30	1,90	1,68	1,30	1,08
	MS		370,40	66,18	9,84	3,29	66,18	27,52	7,06	2,95	9,84	7,06	3,76	2,34	3,29	2,95	2,34	1,90
	S1		370,40	68,43	9,64	2,62	68,43	28,32	6,66	2,26	9,64	6,66	3,13	1,63	2,62	2,26	1,63	1,22
0,3 0,3	STD		370,40	96,43	16,52	4,40	96,43	44,59	11,56	3,72	16,52	11,56	5,33	2,50	4,40	3,72	2,50	1,65
	MS		370,40	96,65	17,19	5,18	96,65	45,06	12,28	4,51	17,19	12,28	6,10	3,30	5,18	4,51	3,30	2,43
	S1		370,40	107,01	19,69	5,29	107,01	51,41	13,89	4,46	19,69	13,89	6,43	2,95	5,29	4,46	2,95	1,89
0,5 0,5	STD		370,40	147,52	35,24	10,27	147,52	80,88	25,71	8,63	35,24	25,71	12,44	5,59	10,27	8,63	5,59	3,32
	MS		370,40	159,17	41,34	13,00	159,17	90,60	30,69	11,08	41,34	30,69	15,53	7,47	13,00	11,08	7,47	4,73
	S1		370,40	186,46	56,48	18,52	186,46	114,55	42,81	15,72	56,48	42,81	22,16	10,30	18,52	15,72	10,30	6,02
0,7 0,7	STD		370,40	221,08	82,32	30,66	221,08	149,32	64,74	26,37	82,32	64,74	36,08	17,77	30,66	26,37	17,77	10,56
	MS		370,40	96,65	17,19	5,18	52,51	29,30	9,89	4,10	7,30	6,03	3,97	2,67	2,70	2,56	2,25	1,95
	S1		370,40	107,01	19,69	5,29	51,88	30,29	10,38	3,83	6,50	5,35	3,36	2,04	1,90	1,78	1,51	1,27
0,0 0,5	STD		370,40	147,50	35,24	10,27	51,88	35,65	15,52	6,41	6,50	5,69	4,05	2,66	1,90	1,82	1,62	1,39
	MS		370,40	52,51	7,30	2,70	96,65	29,30	6,03	2,56	17,19	9,89	3,97	2,25	5,18	4,10	2,67	1,95
	S1		370,40	51,88	6,50	1,90	107,01	30,29	5,35	1,78	19,69	10,38	3,36	1,51	5,29	3,83	2,04	1,27
0,5 0,0	STD		370,40	51,88	6,50	1,90	147,52	35,65	5,69	1,82	35,24	15,52	4,05	1,62	10,27	6,41	2,66	1,39

Tabela 19. NMA s do gráfico de controle T^2 de Hotelling; $\rho = 0, 3$.

$a \ b$	δ_x	δ_y	0,00	0,00	0,00	0,00	0,50	0,50	0,50	0,50	1,00	1,00	1,00	1,00	1,50	1,50	1,50	1,50
			0,00	0,50	1,00	1,50	0,00	0,50	1,00	1,50	0,00	0,50	1,00	1,50	0,00	0,50	1,00	1,50
0,0 0,0	STD		370,40	46,13	5,57	1,70	46,13	29,33	6,06	1,90	5,57	6,06	3,25	1,62	1,70	1,90	1,62	1,24
	MS		370,40	59,47	8,54	2,98	59,47	39,29	9,22	3,29	8,54	9,22	5,26	2,86	2,98	3,29	2,86	2,24
	S1		370,40	61,52	8,25	2,30	61,52	40,61	8,98	2,62	8,25	8,98	4,74	2,16	2,30	2,62	2,16	1,53
0,3 0,3	STD		370,40	88,02	14,23	3,78	88,02	61,37	15,44	4,39	14,23	15,44	8,22	3,53	3,78	4,39	3,53	2,29
	MS		370,40	88,28	14,92	4,57	88,28	61,75	16,11	5,17	14,92	16,11	8,97	4,32	4,57	5,17	4,32	3,08
	S1		370,40	98,18	17,02	4,54	98,18	69,74	18,43	5,28	17,02	18,43	9,91	4,23	4,54	5,28	4,23	2,69
0,5 0,5	STD		370,40	137,69	30,93	8,79	137,69	104,25	33,22	10,25	30,93	33,22	18,83	8,18	8,79	10,25	8,18	5,04
	MS		370,40	149,26	36,54	11,26	149,26	115,03	39,09	12,97	36,54	39,09	22,89	10,55	11,26	12,97	10,55	6,82
	S1		370,40	176,55	50,39	15,99	176,55	141,12	53,65	18,49	50,39	53,65	32,39	14,93	15,99	18,49	14,93	9,29
0,7 0,7	STD		370,40	211,75	74,60	26,79	211,75	177,01	78,75	30,60	74,60	78,75	50,66	25,15	26,79	30,60	25,15	16,10
	MS		370,40	90,29	15,44	4,71	48,13	39,37	13,50	4,95	6,58	7,16	5,27	3,36	2,53	2,70	2,56	2,24
	S1		370,40	100,17	17,60	4,70	47,40	40,62	14,67	4,92	5,77	6,41	4,74	2,82	1,74	1,90	1,80	1,53
0,0 0,5	STD		370,40	138,95	31,46	8,97	46,84	46,20	22,56	8,87	5,68	6,50	5,58	3,86	1,72	1,88	1,87	1,70
	MS		370,40	48,13	6,58	2,53	90,29	39,37	7,16	2,70	15,44	13,50	5,27	2,56	4,71	4,95	3,36	2,24
	S1		370,40	47,40	5,77	1,74	100,17	40,62	6,41	1,90	17,60	14,67	4,74	1,80	4,70	4,92	2,82	1,53
0,5 0,0	STD		370,40	46,84	5,68	1,72	138,95	46,20	6,50	1,88	31,46	22,56	5,58	1,87	8,97	8,87	3,86	1,70

Tabela 20. *NMAs* do gráfico de controle T^2 de Hotelling; $\rho = 0,7$.

a	b	δ_x	0,00	0,00	0,00	0,00	0,50	0,50	0,50	0,50	1,00	1,00	1,00	1,00	1,50	1,50	1,50
		δ_y	0,00	0,50	1,00	1,50	0,00	0,50	1,00	1,50	0,00	0,50	1,00	1,50	0,00	0,50	1,00
0,0 0,0	STD	370,40	20,52	2,28	1,09	20,52	42,26	5,74	1,47	2,28	5,74	4,98	1,90	1,09	1,47	1,90	1,58
	MS	370,40	28,29	3,85	1,92	28,29	54,90	8,78	2,62	3,85	8,78	7,71	3,28	1,92	2,62	3,28	2,79
	S1	370,40	29,13	3,22	1,24	29,13	56,80	8,51	1,91	3,22	8,51	7,37	2,62	1,24	1,91	2,62	2,10
	STD	370,40	45,74	5,50	1,69	45,74	82,18	14,66	3,05	5,50	14,66	12,75	4,38	1,69	3,05	4,38	3,40
0,3 0,3	MS	370,40	46,20	6,28	2,46	46,20	82,46	15,35	3,84	6,28	15,35	13,46	5,17	2,46	3,84	5,17	4,19
	S1	370,40	52,67	6,64	1,93	52,67	92,01	17,53	3,63	6,64	17,53	15,29	5,27	1,93	3,63	5,27	4,06
	STD	370,40	82,54	12,84	3,42	82,54	130,68	31,75	6,98	12,84	31,75	28,07	10,23	3,42	6,98	10,23	7,86
	MS	370,40	92,35	16,00	4,86	92,35	142,15	37,46	9,12	16,00	37,46	33,35	12,95	4,86	9,12	12,95	10,16
0,7 0,7	S1	370,40	116,49	22,83	6,22	116,49	169,35	51,57	12,80	22,83	51,57	46,27	18,46	6,22	12,80	18,46	14,35
	STD	370,40	151,40	37,05	10,91	151,40	204,87	76,10	21,80	37,05	76,10	69,28	30,56	10,91	21,80	30,56	24,25
	MS	370,40	59,05	8,46	2,96	28,45	50,58	17,07	4,88	3,87	6,45	6,98	4,46	1,93	2,31	2,65	2,62
	S1	370,40	65,91	9,12	2,50	27,26	51,03	19,33	5,00	3,00	5,46	6,36	4,12	1,20	1,50	1,83	1,87
0,0 0,5	STD	370,40	92,28	15,36	4,08	24,28	51,26	31,93	10,08	2,67	4,61	6,40	5,71	1,15	1,36	1,65	1,88
	MS	370,40	28,45	3,87	1,93	59,05	50,58	6,45	2,31	8,46	17,07	6,98	2,65	2,96	4,88	4,46	2,62
	S1	370,40	27,26	3,00	1,20	65,91	51,03	5,46	1,50	9,12	19,33	6,36	1,83	2,50	5,00	4,12	1,87
	STD	370,40	24,28	2,67	1,15	92,28	51,26	4,61	1,36	15,36	31,93	6,40	1,65	4,08	10,08	5,71	1,88

As Figuras 58-60 ilustram os resultados obtidos com o emprego das três estratégias (MS, S1 e STD) em 63 diferentes cenários, considerando a autocorrelação, correlação e o deslocamento no vetor de médias.

A Figura 58 apresenta 18 casos com ($a=b=0,3$) e a Figura 59 ilustra outros 18 casos com ($a=b=0,7$), totalizando 36 casos; os valores do *NMA* que correspondem a estratégia de amostragem composta é menor em 34 dos 36 casos quando comparados com a estratégia STD e menor em 24 dos 36 casos quando comparados com a estratégia S1.

A Figura 60 apresenta outros 27 casos com ($a=0$ e $b=0,5$), os valores do *NMA* que correspondem a estratégia de amostragem composta é menor em apenas 14 dos 27 casos quando comparados com a estratégia STD e menor em 11 dos 27 casos quando comparados com a estratégia S1.

Em diversas aplicações a magnitude do deslocamento das médias é uma tarefa difícil para ser mensurada. Baseando-se nesse fato, a estratégia de amostragem composta é recomendada somente em processos bivariados que apresentam as duas variáveis autocorrelacionadas.

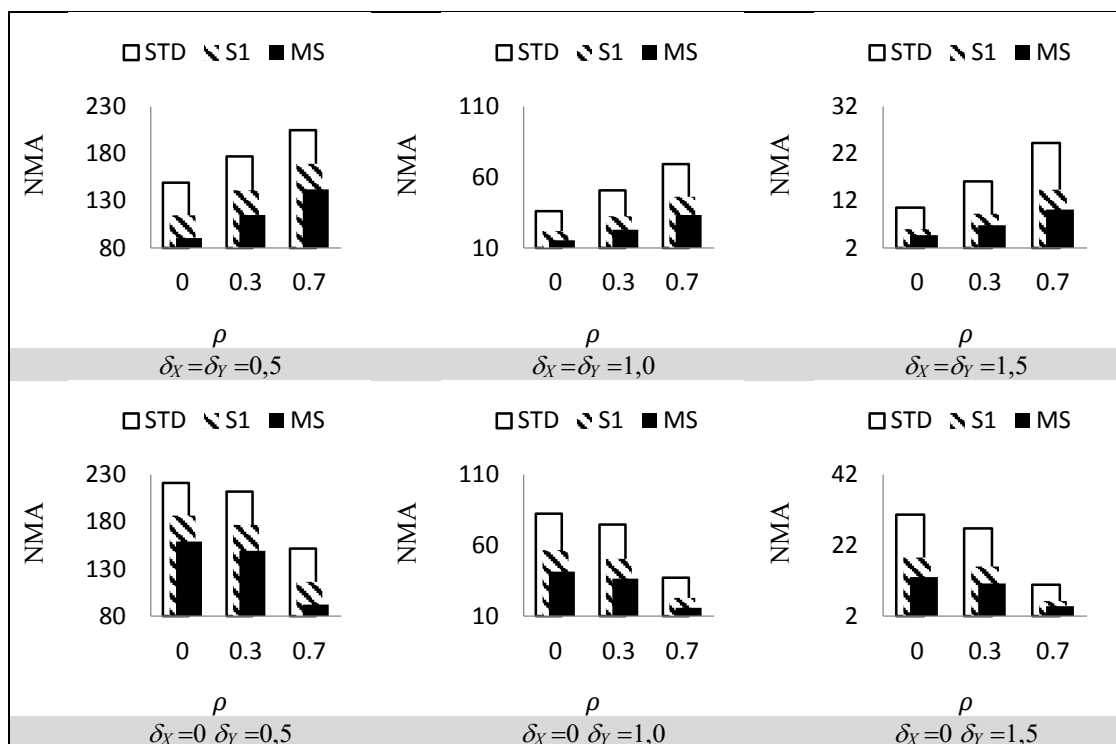


Figura 58. NMAs do gráfico de controle T^2 de Hotelling; $a=0,7$; $b=0,7$; $\rho \in (0; 0,3; 0,7)$.

Fonte: o próprio autor.

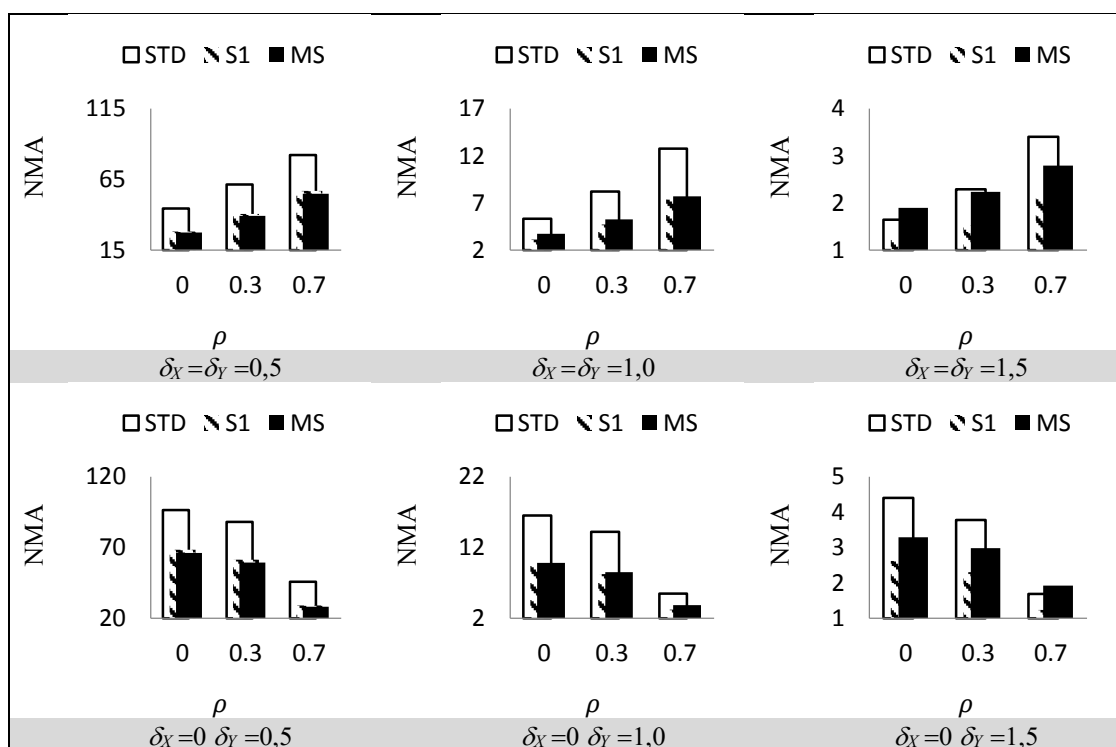


Figura 59. NMAs do gráfico de controle T^2 de Hotelling; $a=0,3$; $b=0,3$; $\rho \in (0; 0,3; 0,7)$.

Fonte: o próprio autor.

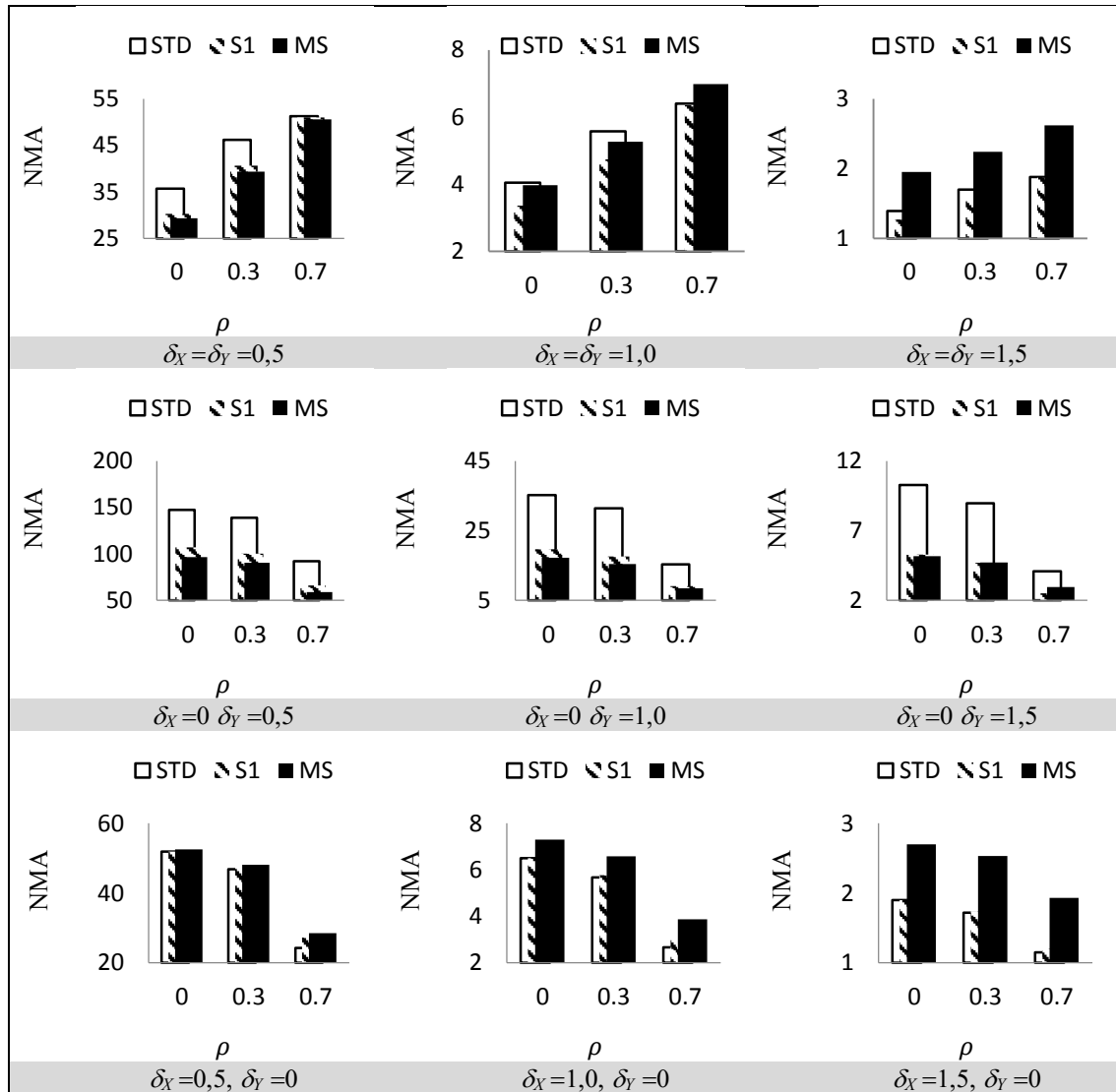


Figura 60. NMAs do gráfico de controle T^2 de Hotelling; $a=0$; $b=0.5$; $\rho \in (0; 0.3; 0.7)$.

Fonte: o próprio autor.

Em geral, o desempenho do gráfico T^2 de Hotelling quando associado a técnica de amostragem composta pode ser resumido de acordo com a Tabela 21.

Tabela 21. Desempenho do gráfico T^2 de Hotelling (amostragem composta).

Autocorrelação	Deslocamento	Correlação	Desempenho
$a=b \neq 0$	$\delta_1 = 0; \delta_2 \neq 0$ $\delta_1 \neq 0; \delta_2 = 0$	$\rho = \text{constante}$	NMA ↓
	$\delta_1 \neq 0; \delta_2 \neq 0$		
$a = 0; b \neq 0$	$\delta_1 = 0; \delta_2 \neq 0$		
$a \neq 0; b = 0$	$\delta_1 \neq 0; \delta_2 = 0$		
$a \neq 0; b \neq 0$	$\delta_1 = 0; \delta_2 \neq 0$		NMA ↑

Mantendo-se o grau de correlação constante (ρ =constante), o NMA tende a ser menor nos cenários em que:

- c) Ambas as variáveis são autocorrelacionadas ($a=b \neq 0$) e o deslocamento ocorre no vetor de médias ($\delta_1 = 0; \delta_2 \neq 0$ ou $\delta_1 \neq 0; \delta_2 = 0$ ou $\delta_1 \neq 0; \delta_2 \neq 0$);
- d) Apenas uma variável é autocorrelacionada ($a \neq 0; b = 0$ / $a = 0; b \neq 0$) e o deslocamento ocorre na variável dependente ($\delta_1 \neq 0; \delta_2 = 0$ / $\delta_1 = 0; \delta_2 \neq 0$).

7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

7.1 VERIFICAÇÃO DOS OBJETIVOS

Algumas questões nortearam o desenvolvimento desta tese. Procurou-se responder: qual é o efeito da autocorrelação no desempenho do gráfico de controle T^2 de Hotelling?; qual é o efeito da autocorrelação no desempenho de dois gráficos simultâneos univariados para monitorar as médias? e; como o uso de diferentes estratégias de amostragens como ação podem minimizar o problema da autocorrelação no gráfico de controle T^2 de Hotelling?

Portanto, no Capítulo 4, avaliou-se o efeito da autocorrelação no desempenho do gráfico de controle T^2 de Hotelling usando subgrupos racionais e o efeito da autocorrelação no desempenho de dois gráficos simultâneos univariados para monitorar as médias.

No Capítulo 5, aplicou-se a estratégia de amostragem sistemática para monitorar variáveis de processos bivariados cujas observações são autocorrelacionadas. O desempenho do gráfico de controle T^2 de Hotelling usando subgrupos racionais foi comparado com a estratégia de amostragem sistemática.

No Capítulo 6, aplicou-se a estratégia de amostragem composta para monitorar variáveis de processos bivariados cujas observações são autocorrelacionadas. O desempenho do gráfico de controle T^2 de Hotelling usando subgrupos racionais foi comparado com a estratégia de amostragem composta.

Concluindo-se, portanto, que a aplicação de esquemas de amostragem melhoram o desempenho do gráfico de controle T^2 de Hotelling quando há a presença de observações autocorrelacionadas.

Esta tese também apresentou o desenvolvimento analítico das matrizes de covariâncias da estatística de monitoramento do gráfico T^2 de Hotelling para diferentes estratégias de amostragens: subgrupos racionais, amostragem sistemática e amostragem composta.

Essas expressões são inéditas e possibilitaram a extensão das propriedades estatísticas do gráfico T^2 de Hotelling e de dois gráficos de controle simultâneos univariados de $\bar{X}$, englobando o caso bivariado em que as observações da amostra são autocorrelacionadas.

7.2 CONCLUSÕES

A presença da autocorrelação não pode ser negligenciada quando a ordem temporal da produção é adotada para a seleção das amostras, pois o desempenho do gráfico de controle é seriamente afetado.

Para reduzir o efeito negativo da autocorrelação e, conseqüentemente, melhorar o desempenho do gráfico T^2 de Hotelling, esta tese propôs incorporar na estatística de monitoramento o efeito da autocorrelação no desempenho do gráfico de controle. Os resultados permitem concluir que:

- a) A autocorrelação tem um impacto forte e negativo sobre o desempenho do gráfico de T^2 , especialmente quando mais frequentes e / ou mudanças maiores ocorrem na média da variável com o nível mais elevado de autocorrelação;
- b) Dependendo do nível de autocorrelação, o gráfico de T^2 com observações individuais pode apresentar desempenho superior que o gráfico de T^2 com amostras baseadas no conceito de subgrupos racionais. Por exemplo: em processos cujas variáveis apresentam o mesmo nível de autocorrelação e esse nível é moderado ou alto ($a=b>0,5$), o desempenho do gráfico com amostras baseadas em subgrupos racionais com duas observações é inferior quando comparado ao desempenho do gráfico com amostras unitárias;
- c) Se a autocorrelação de uma variável X é semelhante a autocorrelação de uma variável Y , ou seja, $a \cong b$, o gráfico de T^2 tem um melhor desempenho global quando as variáveis X e Y fortemente correlacionadas;
- d) Os gráficos $SU \bar{X}$ são seriamente afetados pela autocorrelação e pouco afetados pela correlação, contudo, não podemos dizer o mesmo em relação ao gráfico de T^2 ;
- e) Com a estratégia de pular elementos para formar a amostra, há melhora no desempenho do gráfico de T^2 , no entanto, se as duas variáveis são autocorrelacionadas, a correlação, em geral, reduz o desempenho do gráfico em sinalizar a ocorrência de causas especiais que atuam nas duas variáveis, sendo esta causa de igual ou diferente magnitude;
- f) A estratégia de amostragem sistemática não é recomendada quando apenas uma das variáveis é autocorrelacionada e esta é robusta a presença de causas especiais;

- g) Em geral, não é recomendado usar $s > 3$ na técnica de amostragem sistemática, pois além da ruptura do conceito de subgrupo racional, o ganho em poder no gráfico pode não ser significativo;
- h) A estratégia de amostragem composta é altamente recomendada para monitorar processos cujas variáveis sejam autocorrelacionadas, entretanto, se uma das variáveis não é livre de autocorrelação, a estratégia composta deve ser usada com cautela; dependendo da magnitude da causa especial, a estratégia pode reduzir o poder do gráfico.
- i) O uso das técnicas de amostragem sistemática e composta podem dificultar o processo de coleta e mensuração das observações. Cabe ao responsável pelo processo decidir entre o ganho em poder do gráfico de controle e a praticidade em não aplicar uma técnica mais complexa.

7.3 SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

Ainda há um espaço para pesquisas em aberto quando o assunto é a autocorrelação em processos multivariados. Com exemplo, uma possível extensão desta tese seria a ampliação dos estudos para o caso em que os parâmetros do processo são desconhecidos e, nesse caso, precisam ser estimados.

Outras possíveis direções para futuras pesquisas podem ser:

- Aplicar as estratégias propostas para gráficos de controle EWMA multivariado e CUSUM multivariado.
- Investigar o efeito dos erros do sistema de medição em processos multivariados que apresentam autocorrelação.
- Estender os resultados aqui apresentados para outros modelos de autocorrelação.
- Avaliar o desempenho estatístico-econômico do gráfico de controle de Hotelling em processos autocorrelacionados, considerando as estratégias de amostragem propostas.

REFERÊNCIAS

- AKAIKE, H. Fitting autoregressive models for prediction. **Annals of the Institute of Statistical Mathematics**, v. 21, n. 1, p. 243–247, 1969.
- AKAIKE, H. AUTOREGRESSIVE MODEL FITTING FOR CONTROL. **Annals of the Institute of Statistical Mathematics**, v. 23, n. 1, p. 163–180, 1971.
- ALFARO NAVARRO, J. L. et al. A new proposal to solve the autocorrelation problem for monitoring processes in the cutlery industry. **Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics**, 24 jan. 2014.
- ALT, F. B. Multivariate quality control. In: KOTZ, S.; JOHNSON, N.; READ, C. R. (Eds.). **Encyclopedia of Statistical Sciences**, vol. 6. New York: Wiley, 1985.
- ALWAN, L. C.; RADSON, D. TIME-SERIES INVESTIGATION OF SUBSAMPLE MEAN CHARTS. **IIE Transactions**, v. 24, n. 5, p. 66–80, nov. 1992.
- ALWAN, L.; ROBERTS, H. Time-series modeling for statistical process control. **Journal of Business & Economic Statistics**, v. 6, n. 1, p. 87–95, 1988.
- ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
- APARISI, F. Hotelling's T² control chart with adaptive sample sizes. **International Journal of Production Research**, v. 34, n. 10, p. 2853–2862, out. 1996.
- APARISI, F.; HARO, C. L. Hotelling's T² control chart with variable sampling intervals. **International Journal of Production Research**, v. 39, n. 14, p. 3127–3140, jan. 2001.
- APLEY, D.; TSUNG, F. The autoregressive T² chart for monitoring univariate autocorrelated processes. **Journal of Quality Technology**, v. 34, n. 1, p. 80–96, 2002.
- ARENALES, M. N. et al. **Pesquisa operacional**. Rio de Janeiro: Elsevier Campus, 2007.
- ARKAT, J.; NIAKI, S. T. A.; ABBASI, B. Artificial neural networks in applying MCUSUM residuals charts for AR(1) processes. **Applied Mathematics and Computation**, v. 189, n. 2, p. 1889–1901, jun. 2007.
- ATIENZA, O. O.; TANG, L. C.; ANG, B. W. A SPC procedure for detecting level shifts of autocorrelated procedures. **Journal of Quality Technology**, v. 30, n. 4, p. 340–351, 1998.
- BAGSHAW, M.; JOHNSON, R. A. The Effect of Serial Correlation on the Performance of CUSUM Tests II. **Technometrics**, v. 17, n. 1, p. 73, fev. 1975.
- BERSIMIS, S.; PSARAKIS, S.; PANARETOS, J. Multivariate Statistical Process Control Charts: An Overview. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 23, n. 5, p. 517–543, ago. 2007.

- BERTRAND, J. W. M.; FRANSOO, J. C. Operations management research methodologies using quantitative modeling. **International Journal of Operations & Production Management**, v. 22, n. 2, p. 241–264, 2002.
- BILLER, B.; NELSON, B. L. Modeling and generating multivariate time-series input processes using a vector autoregressive technique. **ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation**, v. 13, n. 3, p. 211–237, 1 jul. 2003.
- BISGAARD, S.; KULAHCI, M. **Time series analysis and forecasting by example**. Hoboken, N.J: Wiley, 2011.
- BOLFARINE, H.; BUSSAB, W. DE O. **Elementos de Amostragem**. 1. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2007.
- BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M.; REINSEL, G. C. **Time Series Analysis: Forecasting and Control**. 4. ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 2008.
- CHAMP, C. W.; JONES-FARMER, L. A.; RIGDON, S. E. Properties of the T 2 Control Chart When Parameters Are Estimated. **Technometrics**, v. 47, n. 4, p. 437–445, nov. 2005.
- CHARNEST, J. M. Tests for special causes with multivariate autocorrelated data. **Computers and Operations Research**, v. 22, n. 4, p. 443–453, 1995.
- CHATFIELD, C. **The analysis of time series.. an introduction**. 5. ed. New York: Chapman e Hall/CRC, 2004.
- CHEN, S.; NEMBHARD, H. B. Multivariate Cuscore control charts for monitoring the mean vector in autocorrelated processes. **IIE Transactions**, v. 43, n. 4, p. 291–307, 31 jan. 2011.
- CLARO, F. A. E.; COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. Double sampling control chart for a first order autoregressive process. **Pesquisa Operacional**, v. 28, n. 3, p. 545–562, dez. 2008.
- COSTA, A. F. B.; CASTAGLIOLA, P. Effect of measurement error and autocorrelation on the $\bar{X}$ chart. **Journal of Applied Statistics**, v. 38, n. 4, p. 661–673, abr. 2011.
- COSTA, A. F. B.; CLARO, F. A. E. Double sampling $\bar{X}$ control chart for a first-order autoregressive moving average process model. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 39, n. 5-6, p. 521–542, 10 out. 2008.
- COSTA, A. F. B.; CLARO, F. A. E. Economic Design of $\bar{X}$ Control Charts for Monitoring a First Order Autoregressive Process. **Brazilian Journal of Operations & Production Management**, v. 6, n. 2, p. 7–26, 2009.
- COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI, L. C. R. **Controle estatístico de qualidade**. 2. ed. São Paulo: Atlas, 2005.
- COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. Variable parameter and double sampling charts in the presence of correlation: The Markov chain approach. **International Journal of Production Economics**, v. 130, n. 2, p. 224–229, abr. 2011.
- CROSIER, R. B. Multivariate generalizations of cumulative sum quality control schemes. **Technometrics**, v. 30, n. 3, p. 291–303, 1988.

CRYER, J. D.; CHAN, K.-S. **Time Series Analysis with applications in R**. 2. ed. New York: Springer Science+Business Media, 2008.

DOGANAKSOY, N.; FALTIN, F. W.; TUCKER, W. T. Identification of out of control quality characteristics in a multivariate manufacturing environment. **Communications in Statistics - Theory and Methods**, v. 20, n. 9, p. 2775–2790, jan. 1991.

DYER, J.; CONERLY, M.; ADAMS, B. M. A simulation study and evaluation of multivariate forecast based control charts applied to ARMA processes. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, v. 73, n. 10, p. 709–724, out. 2003.

FALTIN, F. W. et al. Considerations in the monitoring of autocorrelated and independent data. **Journal of Quality Technology**, v. 29, n. 2, p. 131–133, 1997.

FRANCO, B. C. et al. A new sampling strategy to reduce the effect of autocorrelation on a control chart. **Journal of Applied Statistics**, v. 41, n. 7, p. 1408–1421, 20 dez. 2013.

FRANCO, B. C. et al. Economic design of Shewhart control charts for monitoring autocorrelated data with skip sampling strategies. **International Journal of Production Economics**, v. 151, p. 121–130, maio 2014.

FRANCO, B. C.; COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. Economic-statistical design of the $\bar{X}$ chart used to control a wandering process mean using genetic algorithm. **Expert Systems with Applications**, v. 39, n. 17, p. 12961–12967, dez. 2012.

GENTLE, J. E. **Matrix Algebra: Theory, Computations, and Applications in Statistics**. New York: Springer Science, 2007.

HANNAN, E. J.; QUINN, B. G. The Determination of the Order of an Autoregression. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)**, v. 41, n. 2, p. 190–195, 1979.

HOSKING, J. R. M. The Multivariate Portmanteau Statistic. **Journal of the American Statistical Association**, v. 75, n. 371, p. 602–608, 1980.

HOSKING, J. R. M. Equivalent Forms of the Multivariate Portmanteau Statistic. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)**, v. 43, n. 2, p. 261–262, 1981.

HOTELLING, H. Multivariate quality control, illustrated by the air testing of sample bombsights. In: EISERLHART, C.; HASTAY, M. W.; VALLIS, W. A. X. (Eds.). **Selected Techniques of Statistical Analysis**. New York: McGraw-Hill, 1947. p. 111–184.

HUANG, X.; BISGAARD, S.; XU, N. Model-based multivariate monitoring charts for Autocorrelated processes. **Quality and Reliability Engineering International**, 12 jun. 2013.

HUANG, X.; XU, N.; BISGAARD, S. A Class of Markov Chain Models for Average Run Length Computations for Autocorrelated Processes. **Communications in Statistics - Simulation and Computation**, v. 42, n. 7, p. 1495–1513, ago. 2013.

HWARNG, H. B.; WANG, Y. Shift detection and source identification in multivariate autocorrelated processes. **International Journal of Production Research**, v. 48, n. 3, p. 835–859, fev. 2010.

ISSAM, B. K.; MOHAMED, L. Support vector regression based residual MCUSUM control chart for autocorrelated process. **Applied Mathematics and Computation**, v. 201, n. 1-2, p. 565–574, jul. 2008.

JARQUE, C. M.; BERA, A. K. A Test for Normality of Observations and Regression Residuals. **International Statistical Review**, v. 55, n. 2, p. 163, 27 ago. 1987.

JARRETT, J. E.; PAN, X. The quality control chart for monitoring multivariate autocorrelated processes. **Computational Statistics and Data Analysis**, v. 51, n. 8, p. 3862–3870, maio 2007.

JIANG, W. Multivariate Control Charts for Monitoring Autocorrelated Processes. **Journal of Quality Technology**, v. 36, n. 4, p. 367–379, 2004.

KALGONDA, A. A. A note on generalization of Z chart. **Journal of Academia and Industrial Research**, v. 1, n. 6, p. 286–289, 2012.

KALGONDA, A. A.; KULKARNI, S. R. Multivariate Quality Control Chart for Autocorrelated Processes. **Journal of Applied Statistics**, v. 31, n. 3, p. 317–327, abr. 2004.

KIM, S. B.; JITPITAKLERT, W.; SUKCHOTRAT, T. One-Class Classification-Based Control Charts for Monitoring Autocorrelated Multivariate Processes. **Communications in Statistics - Simulation and Computation**, v. 39, n. 3, p. 461–474, 24 fev. 2010.

KOURTI, T. Application of latent variable methods to process control and multivariate statistical process control in industry. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, v. 19, n. 4, p. 213–246, maio 2005.

KOURTI, T.; MACGREGOR, J. F. Process analysis, monitoring and diagnosis, using multivariate projection methods. **Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems**, v. 28, n. 1, p. 3–21, abr. 1995.

LEDOLTER, J.; BURRILL, C. W. **Statistical quality control: strategies and tools for continual improvement**. New York: John Wiley & Sons, 1999.

LEONI, R. C.; MACHADO, M. A. G.; COSTA, A. F. B. Simultaneous Univariate $\bar{X}$ Charts to Control Bivariate Processes with Autocorrelated Data. **Quality and Reliability Engineering International**, n. 1, p. n/a–n/a, 12 jul. 2014.

LI, W. K.; MCLEOD, A. I. Distribution of the Residual Autocorrelations in Multivariate ARMA Time Series. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)**, v. 43, n. 2, p. 231–239, 1981.

LIN, S.-Y.; GUH, R.-S.; SHIUE, Y.-R. Effective recognition of control chart patterns in autocorrelated data using a support vector machine based approach. **Computers and Industrial Engineering**, v. 61, n. 4, p. 1123–1134, nov. 2011.

LOWRY, C. et al. A multivariate exponentially weighted moving average control chart. **Technometrics**, v. 34, n. 1, p. 46–53, 1992.

LÜTKEPOHL, H. **New Introduction to Multiple Time Series Analysis**. 1. ed. New York: Springer Berlin Heidelberg, 2005.

- LWIN, T. Parameter estimation in first-order autoregressive model for statistical process monitoring in the presence of data autocorrelation. **Journal of Statistical Planning and Inference**, v. 141, n. 8, p. 2556–2575, ago. 2011.
- MACGREGOR, J. F. Using On-Line Process Data to Improve Quality: Challenges for Statisticians. **International Statistical Review**, v. 65, n. 3, p. 309–323, dez. 1997.
- MACHADO, M. A. G.; COSTA, A. F. B. The use of principal components and univariate charts to control multivariate processes. **Pesquisa Operacional**, v. 28, n. 1, p. 173–196, abr. 2008.
- MAGALHÃES, M. S. DE; HO, L. L.; COSTA, A. F. B. **Controle Estatístico de Processos : a questão da autocorrelação, dos erros de mensuração e do monitoramento de mais de uma característica de qualidade**. XL Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional. Anais...João Pessoa - PB: 2008
- MAHALANOBIS, P. C. **On the generalised distance in statistics**. Proceedings National Institute of Science, India. **Anais...** 16 abr. 1936
- MASON, R. L.; TRACY, N. D.; YOUNG, J. C. Decomposition of T2 for Multivariate Control Chart Interpretation. **Journal of Quality Technology**, v. 27, n. 2, p. 99–108, 1995.
- MASON, R. L.; YOUNG, J. C. **Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications**. 1. ed. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.
- MASTRANGELO, C. M.; FORREST, D. R. Multivariate autocorrelated processes: Data and shift generation. **Journal of Quality Technology**, v. 34, n. 2, p. 216–221, 2002.
- MIGUEL, P. A. C. et al. Capítulo 8 – Modelagem e Simulação. In: **Metodologia De Pesquisa Em Engenharia De Produção**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012. p. 169–198.
- MINGOTI, S. A. **Análise de dados através de métodos de estatística multivariada: uma abordagem aplicada**. 1. ed. Belo Horizonte: UFMG, 2005.
- MONTGOMERY, D. C. **Introduction to Statistical Quality Control**. 6. ed. Hoboken, NJ: John Wiley and Sons, Inc., 2009.
- MONTGOMERY, D. C.; JENNINGS, C. L.; KULAHCI, M. **Introduction to time series analysis and forecasting**. 1. ed. Hoboken, NJ: John Wiley and Sons, Inc., 2008.
- MONTGOMERY, D. C.; MASTRANGELO, C. M. Some Statistical Process Control Methods for Autocorrelated Data. **Journal of Quality Technology**, v. 23, n. 3, p. 179–193, 1991.
- MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. C. M. **Análise de Séries Temporais**. 1. ed. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 2004.
- MURPHY, B. J. Selecting Out of Control Variables With the T2 Multivariate Quality Control Procedure. **The Statistician**, v. 36, n. 5, p. 571, 1987.
- NARVAND, A; SOLEIMANI, P.; RAISSI, S. Phase II monitoring of auto-correlated linear profiles using linear mixed model. **Journal of Industrial Engineering International**, v. 9, n. 12, p. 1–9, 2013.

NIAKI, S. T. A.; DAVOODI, M. Designing a multivariate–multistage quality control system using artificial neural networks. **International Journal of Production Research**, v. 47, n. 1, p. 251–271, jan. 2009.

NOOROSSANA, R.; VAGHEFI, S. J. M. Effect of Autocorrelation on Performance of the MCUSUM Control Chart. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 22, n. 2, p. 191–197, mar. 2006.

PAN, X.; JARRETT, J. E. Why and how to use vector autoregressive models for quality control: the guideline and procedures. **Quality & Quantity**, v. 46, n. 3, p. 935–948, 6 maio 2011.

PEÑA, D.; RODRIGUEZ, J. Powerful Lack of Portmanteau Fit for Time Test Series of. **Journal of the American Statistical Association**, v. 97, n. 458, p. 601–610, 2002.

PSARAKIS, S.; PAPALEONIDA, G. SPC procedures for monitoring autocorrelated processes. **Quality Technology and Quantitative Management**, v. 4, n. 4, p. 501–540, 2007.

QUINN, B. G. Order Determination for a Multivariate Autoregression. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)**, v. 42, n. 2, p. 182–185, 1980.

R DEVELOPMENT CORE TEAM. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing, 2013.

REQUEJO, J. G.; SOUZA, A. M. **T2 CONTROL CHART TO PROCESSES WITH CROSS-AUTOCORRELATION**. 41st International Conference on Computers and Industrial Engineering. **Anais...**2011

RUNGER, G. C.; MONTGOMERY, D. C. MULTIVARIATE AND UNIVARIATE PROCESS CONTROL: GEOMETRY AND SHIFT DIRECTIONS. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 13, n. 3, p. 153–158, maio 1997.

RUNGER, G. C.; WILLEMAIN, T. R. Model-Based and Model-Free Control of Autocorrelated Processes. **Journal of Quality Technology**, v. 27, n. 4, p. 283–292, 1995.

RUNGER, G. C.; WILLEMAIN, T. R. Batch-means control charts for autocorrelated data. **IIIE Transactions**, v. 28, n. 6, p. 483–487, jun. 1996.

SANTOS-FERNÁNDEZ, E. **Multivariate Statistical Quality Control Using R**. New York, NY: Springer New York, 2012. v. 14

SCHWARZ, G. Estimating the Dimension of a Model. **The Annals of Statistics**, v. 6, n. 2, p. 461–464, 1978.

SEREL, D. A.; MOSKOWITZ, H.; TANG, J. Univariate $\bar{X}$ control charts for individual characteristics in a multinomial model. **IIIE Transactions**, v. 32, n. 12, p. 1115–1125, dez. 2000.

SHEWHART, W. A. **Economic control of quality of manufactured product**. New York: D. Van Nostrand Company, 1931.

SHUMWAY, R. H.; STOFFER, D. S. **Time Series Analysis and Its Applications With R Examples**. New York: Springer Science+Business Media, 2006.

SNOUSSI, A. SPC for short-run multivariate autocorrelated processes SPC for short-run multivariate autocorrelated processes. **Journal of Applied Statistics**, v. 38, n. 10, p. 2303–2312, 2011.

SUPERVILLE, C. R.; ADAMS, B. M. An evaluation of forecast-based quality control schemes. **Communications in Statistics - Simulation and Computation**, v. 23, n. 3, p. 645–661, jan. 1994.

TESTIK, M. C. Model Inadequacy and Residuals Control Charts for Autocorrelated Processes. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 21, n. 2, p. 115–130, mar. 2005.

TIMMER, D. H.; PIGNATIELLO, J. J. Change Point Estimates for the Parameters of an AR(1) Process. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 19, n. 4, p. 355–369, jul. 2003.

TSAY, R. S. **Analysis of Financial Time Series**. New York: JohnWiley e Sons, INC, 2002.

VANHATALO, E.; KULAHCI, M. The Effect of Autocorrelation on the Hotelling T 2 Control Chart. **Quality and Reliability Engineering International**, p. n/a–n/a, 29 set. 2014.

VARGAS, M.; ALFARO, J. L.; MONDÉJAR, J. On the Run Length of a State-Space Control Chart for Multivariate Autocorrelated Data. **Communications in Statistics - Simulation and Computation**, v. 38, n. 9, p. 1823–1833, 8 set. 2009.

WARDELL, D. G.; MOSKOWITZ, H.; PLANTE, R. D. Distributions of Special-Cause Control Charts for Correlated Processes. **Technometrics**, v. 36, n. 1, p. 3–17, 1994.

WHEELER, D. J.; CHAMBERS, D. S. **Understanding Statistical Process Control**. 2. ed. Knoxville (TN): SPC Press, 1992.

WIERDA, S. J. Multivariate statistical process control—recent results and directions for future research. **Statistica Neerlandica**, v. 48, n. 2, p. 147–168, jul. 1994.

WOODALL, W. H. Controversies and Contradictions in Statistical Process Control. **Journal of Quality Technology**, v. 32, n. 4, p. 341–378, 2000.

WU, J.; MAKIS, V. Economic and economic-statistical design of a chi-square chart for CBM. **European Journal of Operational Research**, v. 188, n. 2, p. 516–529, jul. 2008.

YANG, S.-F.; YANG, C.-M. An approach to controlling two dependent process steps with autocorrelated observations. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 29, n. 1-2, p. 170–177, 6 jul. 2005.

YULE, G. . On a Method of Investigating Periodicities in Disturbed Series, with Special Reference to Wolfer's Sunspot Numbers. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Ser. A**, v. 226, p. 267–298, 1927.

ZHANG, N. Detection capability of residual control chart for stationary process data. **Journal of Applied Statistics**, v. 24, n. 4, p. 475–492, 1997.

ZHANG, N. F. Estimating process capability indexes for autocorrelated data. **Journal of Applied Statistics**, v. 25, n. 4, p. 559–574, ago. 1998.

APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÃO DA EQUAÇÃO QUE REPRESENTA O FLUXO DE MATERIAL DE ENTRADA E SAÍDA DE UM TANQUE.

A equação diferencial:

$$x_t = w_t - T \frac{dx_t}{dt} \quad (A1)$$

Pode ser reescrita na forma:

$$\frac{dx_t}{dt} + \frac{1}{T} x_t = \frac{1}{T} w_t \quad (A2)$$

Se o fluxo de entrada sofre uma mudança w_0 em $t=0$, tem-se:

$$\frac{dx_t}{dt} + \frac{1}{T} x_t = \frac{1}{T} w_0 \quad (A3)$$

A Equação em (A3) é da forma:

$$\frac{dy}{dt} + P(t)y = f(t) \quad (A4)$$

A Equação (A4) pode ser resolvida utilizando o fator de integração $e^{\int P(t)dt}$. Sendo $P(t) = 1/T$, então:

$$e^{\int P(t)dt} = e^{\int \frac{1}{T} dt} = e^{\frac{1}{T}t} \quad (A5)$$

Multiplicando a Equação (A3) por $e^{\frac{1}{T}t}$:

$$e^{\frac{1}{T}t} \left(\frac{dx_t}{dt} + \frac{1}{T} x_t \right) = e^{\frac{1}{T}t} \left(\frac{1}{T} w_0 \right) \quad (A6)$$

O primeiro termo de (A6) é exatamente a diferencial de $e^{\frac{1}{T}t} x_t$, logo:

$$d \left[e^{\frac{1}{T}t} x_t \right] = e^{\frac{1}{T}t} \frac{1}{T} w_0 \quad (A7)$$

Integrando ambos os lados:

$$e^{\frac{1}{T}t} x_t = w_0 e^{\frac{1}{T}t} + C \quad (A8)$$

Quando $t=0$, o fluxo de saída é igual a zero, assim:

$$C = -w_0 \quad (A9)$$

E a concentração de saída será dada por:

$$e^{\frac{1}{T}t} x_t = w_0 e^{\frac{1}{T}t} - w_0 \quad (A10)$$

$$e^{\frac{1}{T}t} x_t = w_0 \left(e^{\frac{1}{T}t} - 1 \right) \quad (A11)$$

$$x_t = w_0 \left(1 - e^{-\frac{1}{T}t} \right) \quad (A12)$$

Na prática não se observa x_t continuamente, mas sim em pequenos intervalos de tempo Δt igualmente espaçados. Neste caso, a equação diferencial (A3) assume a forma:

$$\frac{d(x_t - x_{t-1})}{d\Delta t} + \frac{1}{T} (x_t - x_{t-1}) = \frac{1}{T} (w_0 - x_{t-1}) \quad (A13)$$

APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÃO DA EQUAÇÃO QUE REPRESENTA O FLUXO DE MATERIAL DE ENTRADA E SAÍDA DE UM TANQUE (CONTINUAÇÃO).

Multiplicando ambos os membros da equação (A13) pelo fator de integração $e^{\int P(t)\Delta t} = e^{\int \frac{1}{T}\Delta t} = e^{\frac{\Delta t}{T}}$, tem-se:

$$e^{\frac{\Delta t}{T}} \left[\frac{d(x_t - x_{t-1})}{d\Delta t} + \frac{1}{T}(x_t - x_{t-1}) \right] = \frac{1}{T}(w_o - x_{t-1})e^{\frac{\Delta t}{T}} \quad (\text{A14})$$

$$d \left[e^{\frac{\Delta t}{T}}(x_t - x_{t-1}) \right] = \frac{1}{T}(w_o - x_{t-1})e^{\frac{\Delta t}{T}} \quad (\text{A15})$$

$$e^{\frac{\Delta t}{T}}(x_t - x_{t-1}) = \int \frac{1}{T}(w_o - x_{t-1})e^{\frac{\Delta t}{T}} d\Delta t \quad (\text{A16})$$

$$e^{\frac{\Delta t}{T}}(x_t - x_{t-1}) = (w_o - x_{t-1})e^{\frac{\Delta t}{T}} + C \quad (\text{A17})$$

Se $\Delta t = 0$,

$$C = -w_o + x_{t-1} \quad (\text{A18})$$

Logo,

$$e^{\frac{\Delta t}{T}}(x_t - x_{t-1}) = (w_o - x_{t-1})e^{\frac{\Delta t}{T}} - w_o + x_{t-1} \quad (\text{A19})$$

$$e^{\frac{\Delta t}{T}}(x_t - x_{t-1}) = (w_o - x_{t-1}) \left(e^{\frac{\Delta t}{T}} - 1 \right) \quad (\text{A20})$$

$$(x_t - x_{t-1}) = (w_o - x_{t-1}) \frac{\left(e^{\frac{\Delta t}{T}} - 1 \right)}{e^{\frac{\Delta t}{T}}} \quad (\text{A21})$$

$$(x_t - x_{t-1}) = (w_o - x_{t-1}) \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{T}} \right) \quad (\text{A22})$$

Finalmente,

$$x_t = x_{t-1} + (w_o - x_{t-1}) \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{T}} \right) \quad (\text{A23})$$

APÊNDICE B – PROCEDIMENTOS PARA CONSTRUÇÃO DO MODELO ATRAVÉS DO SOFTWARE R.

#Simula um modelo VAR(1)

```
# comentário: X e Y são as duas variáveis simuladas.
library(mvtnorm)
T=300
cov.mat <- matrix(c(1, 0.4, 0.4, 1), nr = 2)
w <- rmvnorm(T, sigma = cov.mat)
cov(w)
wx <- w[, 1]
wy <- w[, 2]
x <- y <- rep(0, T)
x[1] <- wx[1]
y[1] <- wy[1]
for (i in 2:T) {
  x[i] <- 0.5 * x[i - 1] + 0.0 * y[i - 1] + wx[i]
  y[i] <- 0.0 * x[i - 1] + 0.7 * y[i - 1] + wy[i]
}
xy <- cbind(x,y)
```

#carrega o pacote vars

```
library(vars)
```

Escolha a ordem apropriada do modelo pelos critérios: (AIC, HQ, SC e FPE).

```
VARselect(xy, lag.max = 5, type = c("none"))
```

#Estime modelo VAR(p) e teste a significância dos parâmetros estimados. Escolha a ordem através do critério de informação: ic=c("AIC", "HQ", "SC", "FPE").

```
xy.var <- VAR(xy, type=c("none"), ic=c("AIC"))
coef(xy.var)
```

#Verifique as informações sobre o modelo ajustado.

```
summary(xy.var, equation="x")
summary(xy.var, equation="y")
```

Analise o diagrama dos valores ajustados; resíduos e correlogramas.

```
plot(xy.var, names="x")
plot(xy.var, names="y")
```

Teste de *Portmanteau*

```
serial.test(xy.var, lags.pt=16, type="PT.asymptotic")
```

#Teste de normalidade dos resíduos

```
normality.test(xy.var)
#qqnorm(resid(xy.var)); qqline(resid(xy.var), col = 2)
```

APÊNDICE C – BANCO DE DADOS *DOWEL1 E DOWEL2*.

amostra	<i>Dowel1</i>		<i>Dowel2</i>	
	diâmetro	comprimento	diâmetro	comprimento
1	0,492	0,988	0,494	0,967
2	0,501	1,011	0,489	0,993
3	0,491	1,008	0,501	1,003
4	0,492	0,970	0,508	0,970
5	0,505	1,003	0,507	0,998
6	0,500	1,010	0,499	0,991
7	0,497	0,985	0,508	1,009
8	0,509	1,006	0,500	0,998
9	0,490	0,975	0,499	0,990
10	0,499	1,027	0,490	0,984
11	0,498	0,997	0,503	1,041
12	0,497	0,987	0,504	1,022
13	0,500	0,982	0,494	0,983
14	0,503	0,970	0,502	1,014
15	0,501	1,007	0,504	0,990
16	0,509	1,011	0,502	1,016
17	0,495	0,984	0,492	0,998
18	0,504	1,008	0,495	0,995
19	0,491	0,997	0,505	0,999
20	0,494	0,993	0,502	0,998
21	0,506	1,006	0,504	1,024
22	0,494	1,014	0,501	0,981
23	0,501	1,040	0,514	1,019
24	0,503	1,004	0,505	0,977
25	0,499	0,977	0,498	1,001
26	0,507	0,991	0,512	1,030
27	0,501	0,969	0,502	1,014
28	0,501	1,026	0,491	0,987
29	0,505	1,014	0,502	1,005
30	0,516	1,023	0,508	1,026
31	0,511	1,007	0,500	0,999
32	0,505	1,028	0,504	0,996
33	0,510	1,033		
34	0,493	0,976		
35	0,496	0,978		
36	0,486	0,976		
37	0,502	0,998		
38	0,513	1,045		
39	0,509	1,024		
40	0,509	1,025		

Fonte: Pacote MSQC do software *R* (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2013)

APÊNDICE D – BANCO DE DADOS *CARBONI* E *CARBON2*.

<i>CARBONI</i>																
amostra	diâmetro interno								espessura							
1	0,99	1,00	1,02	1,09	1,03	1,03	0,99	1,08	1,09	1,15	1,16	1,16	1,02	0,86	1,18	1,02
2	1,09	0,88	0,92	1,01	0,98	0,97	0,93	0,97	0,90	0,95	0,89	1,13	0,96	0,95	0,78	1,01
3	1,06	1,05	1,01	0,98	1,02	0,94	1,02	0,97	1,18	1,14	1,03	0,91	1,01	0,94	1,15	1,08
4	1,00	0,98	0,99	0,93	1,09	0,97	1,00	1,06	0,99	1,02	1,02	0,95	1,15	0,92	1,23	1,12
5	0,91	0,88	1,05	0,95	1,01	0,94	0,89	1,03	0,97	1,02	1,24	0,83	1,10	0,88	0,76	1,24
6	1,02	1,04	1,03	0,92	1,01	1,05	1,07	1,11	1,12	0,97	1,15	0,83	1,21	1,04	1,14	1,14
7	0,96	0,93	0,93	1,00	1,03	0,91	0,98	0,94	1,16	1,04	1,07	1,03	1,02	0,97	0,96	0,91
8	0,98	1,07	1,06	1,01	0,98	0,98	0,97	0,97	0,98	1,17	0,94	1,06	0,99	0,96	0,94	1,13
9	1,05	1,00	1,02	0,93	0,96	1,06	0,97	1,02	1,26	1,05	1,24	0,90	1,07	1,03	1,08	1,18
10	1,01	0,94	0,96	1,00	1,06	0,97	0,98	0,98	0,93	1,02	1,08	1,07	1,14	0,96	0,96	0,98
11	1,00	0,97	0,97	1,08	1,00	1,01	0,98	1,07	1,00	1,11	0,90	1,19	1,19	1,22	1,18	1,03
12	0,97	1,03	1,06	0,98	1,04	0,97	1,10	0,98	1,17	1,04	0,98	0,95	1,12	0,99	1,15	1,16
13	0,94	0,94	0,99	1,05	0,97	0,95	1,07	0,85	0,89	0,98	1,01	1,14	0,92	0,97	1,30	0,81
14	0,96	1,01	0,99	0,99	1,00	1,02	1,04	1,08	0,95	1,11	1,10	0,84	1,07	1,13	1,14	1,07
15	0,98	1,03	1,07	0,95	1,01	0,93	0,97	1,05	0,96	1,25	1,07	0,93	1,17	1,04	1,00	1,04
16	0,97	0,94	0,92	1,03	0,98	1,07	0,98	1,10	0,92	0,91	0,94	1,11	0,92	1,25	1,03	1,15
17	0,99	1,01	1,01	1,02	0,98	0,99	0,94	1,05	0,98	1,28	1,09	0,92	0,96	0,99	1,08	1,02
18	1,00	1,03	1,05	0,99	0,98	0,93	0,94	0,95	0,93	1,29	1,01	0,92	0,95	0,90	1,02	0,97
19	1,01	1,03	1,00	1,03	1,00	0,97	0,90	0,92	1,07	1,12	1,04	0,98	0,93	0,99	0,75	0,81
20	1,02	0,99	1,04	0,98	1,01	0,93	1,14	0,99	0,99	1,07	1,02	1,28	1,01	0,86	1,34	1,00
21	0,95	0,93	1,06	0,94	0,93	1,01	1,04	1,02	1,03	1,08	1,04	0,99	0,93	1,00	1,08	1,13
22	0,94	1,06	0,93	1,00	0,97	0,98	0,96	1,05	0,84	1,23	1,00	1,16	1,00	1,12	0,81	1,18
23	0,98	0,87	0,99	0,92	0,91	0,93	0,90	1,07	0,92	0,73	1,02	0,77	0,92	0,90	0,95	1,16
24	1,06	0,95	1,01	1,00	0,94	0,99	1,03	0,99	1,13	0,94	0,98	1,19	1,08	1,15	1,10	1,14
25	1,07	1,00	0,97	1,00	0,90	1,10	0,94	0,91	1,25	1,03	1,09	0,94	1,02	1,02	0,95	0,77
26	0,95	0,95	0,99	0,98	1,02	1,05	0,99	0,96	0,90	1,07	1,01	1,00	1,07	1,10	1,10	0,88
27	0,94	1,03	0,96	0,91	1,03	0,99	1,05	0,99	0,83	1,24	1,03	0,70	1,13	1,28	1,05	1,02
28	0,98	1,02	1,06	1,00	1,02	0,99	1,00	1,02	0,90	1,05	1,13	1,01	0,99	1,08	0,98	1,18
29	1,01	0,98	1,07	0,97	1,04	1,06	1,00	1,09	1,05	0,94	1,19	0,92	1,15	1,22	1,14	1,16
30	0,99	0,99	1,02	1,07	1,03	1,09	0,92	0,95	0,96	0,99	1,09	1,27	1,16	1,24	0,97	0,94
amostra	comprimento															
1	50,17	50,21	49,87	50,28	50,23	50,08	49,99	50,42								
2	50,41	49,93	49,79	49,73	49,94	50,01	49,55	50,01								
3	50,40	50,27	50,07	50,13	49,99	50,09	50,15	49,99								
4	49,78	50,15	50,09	50,07	49,80	49,46	50,12	49,81								
5	49,65	49,52	49,97	49,87	49,93	49,76	49,37	50,53								
6	50,11	50,16	49,94	50,01	49,84	50,14	49,96	50,22								
7	50,07	50,15	50,00	49,76	50,20	49,60	50,01	49,80								
8	50,52	50,08	49,86	49,97	50,17	49,69	49,89	49,99								
9	50,15	49,95	49,83	50,23	50,00	50,16	50,02	49,92								
10	50,49	50,01	50,01	50,25	49,89	49,78	49,79	49,77								
11	50,33	49,97	49,70	50,00	49,86	50,08	50,09	50,08								
12	49,99	50,05	50,15	49,79	49,87	49,76	50,31	50,00								
13	49,83	50,14	50,09	50,62	49,75	49,49	50,36	49,40								
14	50,13	50,30	49,88	49,57	49,92	50,28	50,34	49,90								
15	49,96	50,02	50,42	49,85	50,06	49,49	50,28	50,08								
16	50,01	50,00	49,63	50,10	49,97	50,05	49,84	50,29								
17	50,05	49,51	50,30	50,25	49,88	50,09	49,70	50,18								
18	49,91	50,31	50,25	49,93	49,78	49,66	49,94	49,74								
19	50,11	49,72	50,33	50,07	49,70	49,81	50,04	49,68								
20	49,94	49,98	50,04	50,17	49,99	49,71	50,46	49,87								
21	49,81	49,60	50,29	49,77	49,76	50,03	50,33	50,12								
22	49,83	50,61	49,85	50,21	50,31	49,84	50,05	49,85								
23	49,78	49,86	49,93	49,86	49,71	50,13	49,60	49,98								
24	50,17	49,86	50,37	50,16	49,90	49,53	50,48	49,97								
25	50,09	49,76	50,17	50,04	49,72	50,44	49,78	49,70								
26	49,41	49,90	50,21	49,75	50,21	50,03	49,81	49,78								
27	50,02	49,87	49,38	49,45	50,01	49,97	50,12	49,88								
28	49,85	49,70	50,08	50,15	49,99	49,85	50,13	49,97								
29	50,28	49,86	50,20	49,99	49,89	50,10	50,02	50,21								
30	49,67	50,02	50,14	50,26	49,89	50,31	49,60	49,87								

Fonte: Pacote MSQC do software *R* (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2013).

APÊNDICE D – BANCO DE DADOS *CARBONI* E *CARBON2*.(CONTINUAÇÃO)

<i>CARBON2</i>																
amostra	diâmetro interno								espessura							
1	0.87	1.04	1.00	1.07	1.00	1.06	1.05	0.97	0.93	1.13	1.04	1.23	1.12	0.96	1.07	1.11
2	0.92	1.07	0.90	1.06	0.96	1.01	1.02	1.03	1.12	1.03	0.85	1.07	0.83	1.03	1.09	1.05
3	1.00	1.00	1.03	1.04	1.00	0.91	1.00	1.00	0.99	1.03	1.17	1.22	0.93	0.90	0.93	1.06
4	1.07	1.01	0.97	1.05	1.03	1.05	1.00	1.00	1.26	1.18	1.19	1.31	1.14	1.25	1.22	0.94
5	1.02	0.98	0.93	1.01	1.13	0.99	1.04	0.98	1.03	0.92	0.90	0.97	1.20	0.85	1.16	0.90
6	1.10	1.00	0.96	1.06	0.96	1.01	1.01	0.96	1.13	0.97	1.00	1.15	0.92	1.11	1.08	0.97
7	1.02	1.03	1.06	1.03	1.03	1.01	0.99	0.99	1.09	0.98	1.10	0.96	1.10	1.03	1.00	0.96
8	1.00	0.92	1.00	0.98	0.99	0.97	1.05	0.98	0.83	0.97	1.01	1.18	1.22	0.99	1.10	1.19
9	1.00	0.99	1.02	1.00	0.94	1.00	1.09	1.05	1.17	1.00	1.08	0.99	0.91	0.99	1.05	1.12
10	0.98	0.89	0.98	1.01	1.02	1.03	1.02	0.99	1.09	0.67	1.06	0.96	1.15	1.12	1.03	1.12
11	0.98	0.95	1.00	1.03	1.03	0.93	0.98	0.97	1.16	0.86	1.07	1.10	1.11	1.10	1.03	0.99
12	1.05	0.95	0.96	1.00	1.00	0.93	0.91	0.99	1.11	0.81	1.01	1.08	1.14	1.06	0.96	1.18
13	0.94	1.02	0.93	0.93	1.01	0.85	1.02	1.07	1.03	1.17	1.16	1.05	1.12	0.84	0.97	1.30
14	1.13	1.01	0.95	1.15	1.09	0.97	0.93	1.07	1.25	0.99	1.10	1.14	1.17	1.04	0.86	1.04
15	1.07	1.00	0.98	1.06	1.03	1.01	1.01	1.00	1.14	0.98	1.04	1.28	1.06	1.07	0.98	1.09
16	1.04	0.98	1.03	1.04	0.94	0.97	0.98	0.92	1.05	1.22	1.19	0.99	1.00	0.94	1.03	0.93
17	1.04	1.04	1.08	1.00	1.04	1.03	0.97	0.97	0.97	0.95	1.31	1.01	1.16	1.01	0.89	1.15
18	0.93	1.00	0.98	0.99	0.96	0.95	0.99	1.01	1.06	0.94	0.97	1.04	1.09	0.93	1.11	1.16
19	0.95	0.90	0.98	0.96	1.00	1.06	1.06	1.00	1.11	0.69	1.17	0.81	1.07	1.09	1.22	1.03
20	1.03	1.07	0.99	1.02	1.10	1.03	0.91	1.12	1.02	1.03	0.90	1.06	1.15	1.13	0.93	1.19
21	1.04	1.01	1.04	0.96	1.00	1.02	0.95	1.01	1.08	1.12	1.13	0.98	1.08	1.14	0.82	1.32
22	1.05	1.02	1.03	1.02	1.01	0.92	1.00	1.16	1.19	1.20	0.88	1.03	1.07	0.85	1.13	1.22
23	0.96	0.97	0.98	1.01	0.95	1.03	1.03	1.03	1.20	1.07	0.89	1.03	0.89	1.14	0.94	1.24
24	0.99	1.05	1.00	1.03	0.95	1.00	1.06	1.01	0.99	1.05	1.26	0.91	0.85	1.02	1.13	1.13
25	1.05	1.01	1.02	1.01	1.01	0.99	1.06	0.98	1.20	1.18	1.05	1.17	1.05	1.15	1.16	0.93
amostra	comprimento															
1	49.64	49.93	50.06	50.02	49.63	49.95	49.85	49.92								
2	49.68	50.14	49.52	50.40	49.66	49.65	49.92	50.44								
3	49.98	50.02	49.87	49.76	49.60	50.01	50.42	50.02								
4	50.28	50.27	50.15	50.41	50.42	50.06	49.79	49.84								
5	50.47	49.80	49.69	50.14	50.16	49.84	50.28	49.87								
6	50.39	49.48	50.03	50.11	49.85	50.52	49.88	49.88								
7	50.06	50.27	50.09	49.88	50.06	50.24	50.03	50.70								
8	49.80	49.92	49.82	50.21	50.24	50.05	50.26	50.19								
9	49.89	50.03	49.57	50.04	50.04	49.70	50.37	50.23								
10	50.07	49.67	50.00	50.22	49.85	50.17	49.71	49.65								
11	49.98	49.63	49.98	50.12	50.22	49.93	50.17	49.55								
12	50.33	50.05	49.62	50.38	50.30	50.38	49.96	49.84								
13	49.66	50.10	49.73	50.23	50.12	49.53	50.16	50.11								
14	50.58	50.08	49.85	50.29	50.12	50.02	49.99	50.16								
15	50.36	49.84	50.01	50.50	50.09	50.09	49.87	50.13								
16	50.55	50.02	49.92	50.22	50.04	50.12	50.10	49.92								
17	50.12	49.98	50.11	49.32	50.67	49.83	50.06	50.15								
18	49.42	50.05	49.85	49.85	49.97	50.04	50.07	49.87								
19	50.12	49.29	49.93	49.20	49.92	50.02	50.11	49.82								
20	50.24	50.03	50.24	50.01	50.36	50.31	49.31	50.57								
21	50.07	50.16	49.95	49.70	50.09	50.28	50.08	50.15								
22	50.60	50.12	50.05	50.08	50.09	49.79	50.00	50.85								
23	50.16	50.38	50.26	50.11	49.68	50.09	49.99	49.68								
24	49.90	49.93	49.99	50.02	49.58	49.91	50.04	50.06								
25	50.02	49.58	50.38	49.88	50.12	50.39	50.01	49.94								

Fonte: Pacote MSQC do software *R* (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2013).

APÊNDICE E – MATRIZ DE VARIÂNCIA-COVARIÂNCIA DE UM VETOR DE MÉDIAS AMOSTRAIS.

Considere que n elementos de uma amostra são coletados em curto espaço de tempo e o intervalo de amostragem é suficientemente grande para eliminar qualquer dependência entre amostras; o vetor de observações da j -ésima unidade é descrita por um modelo autoregressivo de primeira ordem:

$$\mathbf{X}_j = \sum_{i=1}^j \Phi^{j-i} \varepsilon_i ; j=1,2,\dots,n. \quad (\text{E1})$$

sendo $\varepsilon_i \sim N_2(\mu; \Sigma_e)$ com $\Sigma_e = (a_{ij})_{2 \times 2}$; $a_{ij} = 1$ se $i = j$; $a_{ij} = \rho$ se $i \neq j$ e $\Phi = \text{diag}(a; b)$.

De acordo com o modelo autoregressivo,

$$\text{Var}(X_j) = (\Phi^{j-1})\Gamma(\Phi^{j-1})' + (\Phi^{j-2})\Sigma_e(\Phi^{j-2})' + \dots + \Sigma_e \quad (\text{E2})$$

Se $\Gamma = \Phi\Gamma\Phi' + \Sigma_e$ (KALGONDA; KULKARNI, 2004), a matriz de variância-covariância do vetor de médias amostrais $(\Gamma_{\bar{X}})$ é dada por:

$$\Gamma_{\bar{X}} = \text{Var}\left[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right] \quad (\text{E3})$$

A partir de E1, E2 e E3, segue-se que,

$$\Gamma_{\bar{X}} = \frac{1}{n^2} \left[(I + \Phi + \Phi^2 + \dots + \Phi^{n-1})\Gamma(I + \Phi + \Phi^2 + \dots + \Phi^{n-1})' + \right. \\ \left. + (I + \Phi + \Phi^2 + \dots + \Phi^{n-2})\Sigma_e(I + \Phi + \Phi^2 + \dots + \Phi^{n-2})' + \dots + (I + \Phi)\Sigma_e(I + \Phi)' + \Sigma_e \right] \quad (\text{E4})$$

Após manipulação algébrica, tem-se:

$$\Gamma_{\bar{X}} = \begin{pmatrix} \zeta_X^2 = \frac{\sigma_X^2}{n} \left[1 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)a^j \right] & \zeta_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{n} \left[1 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)a^j + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)b^j \right] \\ \zeta_{XY} & \zeta_Y^2 = \frac{\sigma_Y^2}{n} \left[1 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)b^j \right] \end{pmatrix} \quad (\text{E5})$$

sendo $\sigma_X^2 = \frac{\sigma_{e_X}^2}{1-a^2}$; $\sigma_Y^2 = \frac{\sigma_{e_Y}^2}{1-b^2}$; $\sigma_{XY} = \frac{\sigma_{e_{XY}}}{1-ab}$

APÊNDICE F – VALORES DE a^* E b^* PARA OS QUAIS $\lambda^2(1) = \lambda^2(n)$.

O poder do gráfico de T^2 é função de $\lambda^2(n)$, parâmetro de não centralidade; consequentemente, se $\lambda^2(1) = \lambda^2(n)$ o poder de detecção de T^2 para observações individuais é igual ao poder para amostras com tamanho n . Quando $a=b$, os dois elementos da diagonal principal da matriz $\Gamma_{\bar{X}}$ são iguais; consequentemente, $\theta_{11}=\theta_{22}$ e $\lambda^2(n) = (\delta_1^2 + \delta_2^2)\theta_{11} + 2\delta_1\delta_2\theta_{12}$. Para $n=1$,

$$\lambda^2(1) = (\delta_1^2 + \delta_2^2)(1 - \rho^2)^{-1} - 2\delta_1\delta_2\rho(1 - \rho^2)^{-1} \quad (F1)$$

e para $n \geq 2$,

$$\lambda^2(n) = \left[(\delta_1^2 + \delta_2^2) - 2\rho\delta_1\delta_2n^2(1 - a^2) \right] \left\{ (1 - \rho^2) \left[n + 2 \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)a^j \right] \right\}^{-1} \quad (F2)$$

O valor de a^* em que $\lambda^2(1) = \lambda^2(n)$ é o valor de a tal que $\{a \in \mathbb{R} : 0 < a < 1\}$ e satisfaz a equação $n^2(a-1)^3(a+1) = -n + 2a + a^2n - 2a^{n+1}$. A Tabela C1 fornece valores de a^* para $n \in \{2;3;5;10;20\}$. O valor de a^* é independente de δ_1 , δ_2 e ρ .

Quando $a=0$ e $b \neq 0$, $\lambda^2(n) = \delta_1^2\theta_{11} + \delta_2^2\theta_{22} + 2\delta_1\delta_2\theta_{12}$ e a expressão geral de θ_{11} , θ_{22} e θ_{12} é muito complexa. Para $n=1$, $\lambda^2(1) = (\delta_1^2 + \delta_2^2)(1 - \rho^2)^{-1} - 2\delta_1\delta_2\rho(1 - \rho^2)^{-1}$, e para $n \geq 2$ com $\delta_1=0$, $\lambda^2(n)$ se reduz a:

$$\begin{aligned} \lambda^2(n) = & n^3 \delta_2^2 (b-1)^4 (b \\ & + 1) [b^3(n^2\rho^2 - n^2 + 2n\rho^2 + \rho^2) - b^2(n^2\rho^2 - n^2 + 2n - \rho^2) \\ & - b(n^2\rho^2 - n^2 + 2n\rho^2 - 2n) + b^{2n+2}\rho^2 - 2b^{n+3}\rho^2 - 2b^{n+2}\rho^2 \\ & + b^{2n+3}\rho^2 - 2b^{n+1}n + 2b^{n+2}n + n^2\rho^2 - n^2 + 2b^{n+1}n\rho^2 \\ & - 2b^{n+3}n\rho^2]^{-1} \end{aligned} \quad (F3)$$

A Tabela C1 fornece valores de b^* em que $\lambda^2(1) = \lambda^2(n)$ para ($\delta_1=0, a=0$). O valor de b^* é independente de δ_2 , porém depende de ρ . Quando $a=b>a^*$ ou quando $a=\delta_1=0$ e $b>b^*$, o gráfico de T^2 para observações individuais possui melhor desempenho que o gráfico de T^2 para amostras de tamanho n .

Tabela F1. Valores de (a^* , b^*) em que $\lambda^2(1) = \lambda^2(n)$.

n	2	3	5	10	20	
$a=b$	a^*					
	0,5	0,579	0,654	0,737	0,803	
	ρ	b^*				
$\delta_1=0, a=0$	0,0	0,501	0,58	0,655	0,737	0,803
	0,3	0,491	0,571	0,648	0,733	0,801
	0,5	0,469	0,553	0,635	0,725	0,793
	0,7	0,426	0,515	0,606	0,709	0,786

APÊNDICE G – NMA DOS GRÁFICOS SU $\bar{X}$ E T^2 .

Tabela G1. NMA dos gráficos SU $\bar{X}$ e T^2 ; $\delta_1 = \delta_2$.

(a;b)		(0; 0)		(0; 0,2)		(0; 0,5)		(0; 0,7)	
δ_x	δ_y	T^2	SU $\bar{X}$	T^2	SU $\bar{X}$	T^2	SU $\bar{X}$	T^2	SU $\bar{X}$
0,0	0,0	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40
$\rho=0,0$									
,50	,50	27,73	36,64	34,43	43,89	46,56	54,40	55,16	60,13
1,00	1,00	3,06	4,65	3,89	5,83	5,63	7,44	7,07	8,15
1,50	1,50	1,21	1,51	1,36	1,77	1,71	2,15	2,03	2,30
$\rho=0,3$									
,50	,50	39,83	37,50	48,07	44,76	59,46	55,05	64,48	60,51
1,00	1,00	4,62	4,95	5,87	6,15	7,86	7,65	8,83	8,25
1,50	1,50	1,51	1,62	1,77	1,90	2,21	2,22	2,43	2,33
$\rho=0,7$									
,50	,50	55,82	40,24	64,12	47,55	67,08	56,86	65,51	61,40
1,00	1,00	7,19	5,59	8,76	6,81	9,36	7,98	9,04	8,36
1,50	1,50	2,06	1,81	2,42	2,09	2,56	2,30	2,48	2,35
(a;b)		(0; 0)		(0,2; 0,2)		(0,5; 0,5)		(0,7; 0,7)	
δ_x	δ_y	T^2	SU $\bar{X}$	T^2	SU $\bar{X}$	T^2	SU $\bar{X}$	T^2	SU $\bar{X}$
0,0	0,0	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40
$\rho=0,0$									
,50	,50	27,73	36,64	43,87	54,79	93,65	106,52	159,45	170,95
1,00	1,00	3,06	4,65	5,22	7,96	15,74	22,17	41,01	51,65
1,50	1,50	1,21	1,51	1,63	2,27	4,19	6,40	12,35	17,82
$\rho=0,3$									
,50	,50	39,83	37,50	60,48	55,79	118,51	107,70	187,11	172,13
1,00	1,00	4,62	4,95	8,05	8,38	23,53	22,87	56,91	52,63
1,50	1,50	1,51	1,62	2,25	2,45	6,43	6,78	18,70	18,45
$\rho=0,7$									
,50	,50	55,82	40,24	81,12	59,21	145,92	112,24	214,55	176,93
1,00	1,00	7,19	5,59	12,50	9,36	34,52	24,88	76,85	55,95
1,50	1,50	2,06	1,81	3,33	2,78	10,02	7,60	27,90	20,19

Tabela G2. NMA dos gráficos SU $\bar{X}$ e T^2 ; δ_1 ou $\delta_2=0$.

(a;b)		(0; 0)		(0; 0,2)		(0; 0,5)		(0; 0,7)	
δ_x	δ_y	T^2	SU $\bar{X}$	T^2	SU $\bar{X}$	T^2	SU $\bar{X}$	T^2	SU $\bar{X}$
0,0	0,0	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40
$\rho=0,0$									
,00	,50	67,32	66,34	95,27	95,18	163,04	165,30	230,33	233,87
,00	1,00	9,41	8,67	16,19	15,11	42,87	41,43	90,63	90,37
,00	1,50	2,57	2,38	4,31	3,96	13,05	12,10	35,03	33,58
$\rho=0,3$									
,00	,50	60,48	66,33	87,08	95,18	154,61	165,35	224,59	233,92
,00	1,00	8,05	8,66	13,99	15,09	38,60	41,42	85,39	90,38
,00	1,50	2,25	2,38	3,72	3,95	11,47	12,09	32,25	33,57
$\rho=0,7$									
,00	,50	28,53	64,36	46,04	92,86	107,78	163,55	192,22	233,30
,00	1,00	3,15	8,39	5,55	14,60	19,93	40,50	60,27	89,64
,00	1,50	1,23	2,34	1,70	3,86	5,36	11,81	20,16	33,17
(a;b)		(0; 0)		(0,2; 0,2)		(0,5; 0,5)		(0,7; 0,7)	
δ_x	δ_y	T^2	SU $\bar{X}$	T^2	SU $\bar{X}$	T^2	SU $\bar{X}$	T^2	SU $\bar{X}$
0,0	0,0	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40
$\rho=0,0$									
,00	,50	67,32	66,34	95,27	95,18	163,04	165,30	230,33	233,87
,00	1,00	9,41	8,67	16,19	15,11	42,87	41,43	90,63	90,37
,00	1,50	2,57	2,38	4,31	3,96	13,05	12,10	35,03	33,58
$\rho=0,3$									
,00	,50	60,48	66,33	86,92	95,19	153,08	165,36	221,26	233,96
,00	1,00	8,05	8,66	13,94	15,09	37,86	41,42	82,48	90,38
,00	1,50	2,25	2,38	3,71	3,95	11,20	12,09	30,74	33,56
$\rho=0,7$									
,00	,50	28,53	64,36	45,00	92,73	95,44	162,47	161,55	231,44
,00	1,00	3,15	8,39	5,39	14,58	16,24	40,05	42,09	87,99
,00	1,50	1,23	2,34	1,66	3,85	4,32	11,69	12,75	32,43

APÊNDICE G – NMA DOS GRÁFICOS SU $\bar{X}$ E T^2 (CONTINUAÇÃO).

Tabela G3. NMA dos gráficos SU $\bar{X}$ e T^2 ; $\delta_1 \neq \delta_2$.

(a;b)		(0;0)		(0; 0,2)		(0; 0,5)		(0; 0,7)	
δ_x	δ_y	T^2	SU $\bar{X}$	T^2	SU $\bar{X}$	T^2	SU $\bar{X}$	T^2	SU $\bar{X}$
0,0	0,0	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40
$\rho=0,0$									
,50	1,00	6,50	7,92	9,99	12,86	20,48	27,59	33,41	42,85
,50	1,50	2,22	2,34	3,43	3,82	8,44	10,64	17,76	23,91
1,00	1,50	1,61	2,06	2,10	2,97	3,54	5,37	5,25	7,18
$\rho=0,3$									
,50	1,00	8,76	8,08	14,02	13,17	29,07	28,23	44,37	43,49
,50	1,50	2,56	2,36	4,24	3,87	11,48	10,86	24,25	24,38
1,00	1,50	2,12	2,16	2,98	3,15	5,23	5,66	7,18	7,37
$\rho=0,7$									
,50	1,00	8,30	8,23	15,70	13,70	39,85	30,04	58,22	45,38
,50	1,50	1,88	2,34	3,35	3,85	1,75	11,21	32,26	25,58
1,00	1,50	2,56	2,28	4,19	3,46	7,87	6,27	9,24	7,73
(a;b)		(0; 0)		(0,2; 0,2)		(0,5; 0,5)		(0,7; 0,7)	
δ_x	δ_y	T^2	SU $\bar{X}$	T^2	SU $\bar{X}$	T^2	SU $\bar{X}$	T^2	SU $\bar{X}$
0,0	0,0	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40
$\rho=0,0$									
,50	1,00	6,50	7,92	11,33	13,60	31,74	36,48	72,02	79,18
,50	1,50	2,22	2,34	3,64	3,87	11,00	11,67	30,26	31,94
1,00	1,50	1,61	2,06	2,46	3,33	7,14	9,77	20,60	26,37
$\rho=0,3$									
,50	1,00	8,76	8,08	15,13	13,85	40,53	36,95	86,86	79,91
,50	1,50	2,56	2,36	4,30	3,90	13,02	11,77	34,97	32,18
1,00	1,50	2,12	2,16	3,46	3,49	10,43	10,10	28,90	26,95
$\rho=0,7$									
,50	1,00	8,30	8,23	14,37	14,13	38,82	37,79	84,07	81,62
,50	1,50	1,88	2,34	2,99	3,86	8,90	11,66	25,15	32,07
1,00	1,50	2,56	2,28	4,29	3,69	13,00	10,70	34,93	28,36

Tabela G4. NMA do gráfico SU $\bar{X}$; $\delta_1 = \delta_2$.

(a;b)		(0; 0)			(0; 0,2)		(0; 0,5)		(0; 0,7)	
δ_x	δ_y	n=1	n=2	n=4	n=2	n=4	n=2	n=4	n=2	n=4
0,0	0,0	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40
$\rho=0,0$										
,50	,50	142,24	79,70	36,64	87,94	43,89	102,12	54,40	112,87	60,13
1,00	1,00	36,64	13,89	4,65	16,15	5,83	20,04	7,44	22,74	8,15
1,50	1,50	11,59	3,86	1,51	4,52	1,77	5,64	2,15	6,37	2,30
$\rho=0,3$										
,50	,50	143,44	80,82	37,50	89,03	44,76	102,98	55,05	113,43	60,51
1,00	1,00	37,50	14,45	4,95	16,73	6,15	20,49	7,65	23,01	8,25
1,50	1,50	12,10	4,13	1,62	4,80	1,90	5,86	2,22	6,49	2,33
$\rho=0,0$										
,50	,50	148,26	84,90	40,24	93,05	47,55	105,92	56,86	115,10	61,40
1,00	1,00	40,24	15,92	5,59	18,24	6,81	21,58	7,98	23,59	8,36
1,50	1,50	13,39	4,67	1,81	5,37	2,09	6,25	2,30	6,68	2,35
(a;b)		(0; 0)			(0,2; 0,2)		(0,5; 0,5)		(0,7; 0,7)	
δ_x	δ_y	n=1	n=2	n=4	n=2	n=4	n=2	n=4	n=2	n=4
0,0	0,0	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40
$\rho=0,0$										
,50	,50	142,24	79,70	36,64	98,09	54,79	142,24	106,52	193,84	170,95
1,00	1,00	36,64	13,89	4,65	19,34	7,96	36,64	22,17	66,24	51,65
1,50	1,50	11,59	3,86	1,51	5,50	2,27	11,59	6,40	24,61	17,82
$\rho=0,3$										
,50	,50	143,44	80,82	37,50	99,26	55,79	143,44	107,70	194,97	172,13
1,00	1,00	37,50	14,45	4,95	20,00	8,38	37,50	22,87	67,31	52,63
1,50	1,50	12,10	4,13	1,62	5,84	2,45	12,10	6,78	25,34	18,45
$\rho=0,7$										
,50	,50	148,26	84,90	40,24	103,68	59,21	148,26	112,24	199,62	176,93
1,00	1,00	40,24	15,92	5,59	21,84	9,36	40,24	24,88	71,07	55,95
1,50	1,50	13,39	4,67	1,81	6,57	2,78	13,39	7,60	27,49	20,19

APÊNDICE G – NMA DOS GRÁFICOS SU $\bar{X}$ E T^2 (CONTINUAÇÃO).

Tabela G5. NMA do gráfico SU $\bar{X}$; δ_1 ou $\delta_2=0$.

(a;b)		(0; 0)			(0; 0,2)		(0; 0,5)		(0; 0,7)	
δ_x	δ_y	n=1	n=2	n=4	n=2	n=4	n=2	n=4	n=2	n=4
0,0	0,0	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40
$\rho=0,0$										
,00	,50	205,44	130,96	66,34	154,93	95,18	205,44	165,30	254,45	233,87
,00	1,00	66,34	26,34	8,67	36,35	15,11	66,34	41,43	112,14	90,37
,00	1,50	22,03	7,12	2,38	10,34	3,96	22,03	12,10	45,76	33,58
$\rho=0,3$										
,00	,50	205,53	131,00	66,33	154,98	95,18	205,52	165,35	254,52	233,92
,00	1,00	66,33	26,32	8,66	36,34	15,09	66,34	41,42	112,18	90,38
,00	1,50	22,01	7,11	2,38	10,33	3,95	22,02	12,09	45,76	33,57
$\rho=0,7$										
,00	,50	202,77	128,20	64,36	152,35	92,86	204,23	163,55	254,19	233,30
,00	1,00	64,36	25,41	8,39	35,21	14,60	65,30	40,50	111,66	89,64
,00	1,50	21,25	6,90	2,34	10,01	3,86	21,59	11,81	45,42	33,17
(a;b)		(0; 0)			(0,2; 0,2)		(0,5; 0,5)		(0,7; 0,7)	
δ_x	δ_y	n=1	n=2	n=4	n=2	n=4	n=2	n=4	n=2	n=4
0,0	0,0	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40
$\rho=0,0$										
,00	,50	205,44	130,96	66,34	154,93	95,18	205,44	165,30	254,45	233,87
,00	1,00	66,34	26,34	8,67	36,35	15,11	66,34	41,43	112,14	90,37
,00	1,50	22,03	7,12	2,38	10,34	3,96	22,03	12,10	45,76	33,58
$\rho=0,3$										
,00	,50	205,53	131,00	66,33	154,99	95,19	205,53	165,36	254,54	233,96
,00	1,00	66,33	26,32	8,66	36,34	15,09	66,33	41,42	112,17	90,38
,00	1,50	22,01	7,11	2,38	10,33	3,95	22,01	12,09	45,74	33,56
$\rho=0,7$										
,00	,50	202,77	128,20	64,36	152,10	92,73	202,77	162,47	252,26	231,44
,00	1,00	64,36	25,41	8,39	35,12	14,58	64,36	40,05	109,52	87,99
,00	1,50	21,25	6,90	2,34	9,99	3,85	21,25	11,69	44,26	32,43

Tabela G6. NMA do gráfico SU $\bar{X}$; $\delta_1 \neq \delta_2$.

(a;b)		(0; 0)			(0; 0,2)		(0; 0,5)		(0; 0,7)	
δ_x	δ_y	n=1	n=2	n=4	n=2	n=4	n=2	n=4	n=2	n=4
0,0	0,0	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40
$\rho=0,0$										
,50	1,00	58,09	23,40	7,92	30,94	12,86	50,13	27,59	72,35	42,85
,50	1,50	21,07	6,91	2,34	9,88	3,82	19,95	10,64	37,46	23,91
1,00	1,50	17,47	5,85	2,06	7,77	2,97	12,63	5,37	17,72	7,18
$\rho=0,3$										
,50	1,00	58,71	23,76	8,08	31,43	13,17	50,82	28,23	73,03	43,49
,50	1,50	21,24	6,97	2,36	9,99	3,87	20,20	10,86	37,87	24,38
1,00	1,50	17,93	6,09	2,16	8,10	3,15	13,08	5,66	18,10	7,37
$\rho=0,7$										
,50	1,00	60,02	24,28	8,23	32,45	13,70	52,85	30,04	75,12	45,38
,50	1,50	21,10	6,89	2,34	9,96	3,85	20,59	11,21	38,88	25,58
1,00	1,50	18,94	6,46	2,28	8,75	3,46	14,18	6,27	19,02	7,73
(a;b)		(0; 0)			(0,2;0,2)		(0,5; 0,5)		(0,7; 0,7)	
δ_x	δ_y	n=1	n=2	n=4	n=2	n=4	n=2	n=4	n=2	n=4
0,0	0,0	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40
$\rho=0,0$										
,50	1,00	58,09	23,40	7,92	32,08	13,60	58,09	36,48	98,62	79,18
,50	1,50	21,07	6,91	2,34	9,99	3,87	21,07	11,67	43,37	31,94
1,00	1,50	17,47	5,85	2,06	8,39	3,33	17,47	9,77	35,78	26,37
$\rho=0,3$										
,50	1,00	58,71	23,76	8,08	32,52	13,85	58,71	36,95	99,42	79,91
,50	1,50	21,24	6,97	2,36	10,07	3,90	21,24	11,77	43,67	32,18
1,00	1,50	17,93	6,09	2,16	8,68	3,49	17,93	10,10	36,45	26,95
$\rho=0,7$										
,50	1,00	60,02	24,28	8,23	33,25	14,13	60,02	37,79	101,44	81,62
,50	1,50	21,10	6,89	2,34	9,97	3,86	21,10	11,66	43,62	32,07
1,00	1,50	18,94	6,46	2,28	9,21	3,69	18,94	10,70	38,23	28,36

APÊNDICE H – MATRIZ DE VARIÂNCIA-COVARIÂNCIA DE UM VETOR DE MÉDIAS AMOSTRAIS CONSIDERANDO A ESTRATÉGIA DE AMOSTRAGEM SISTEMÁTICA.

Considere que n elementos de uma amostra são coletados em curto espaço de tempo e o intervalo de amostragem t é suficientemente grande para eliminar qualquer dependência entre amostras; o vetor de observações da j -ésima unidade é descrita por um modelo autoregressivo de primeira ordem:

$$\mathbf{X}_j = \sum_{i=1}^j \Phi^{j-i} \varepsilon_i ; j=1,2,\dots,n. \quad (\text{H1})$$

sendo $\varepsilon_i \sim N_2(\mu; \Sigma_e)$ com $\Sigma_e = (a_{ij})_{2 \times 2}$; $a_{ij} = 1$ se $i = j$; $a_{ij} = \rho$ se $i \neq j$ e $\Phi = \text{diag}(a; b)$.

De acordo com o modelo autoregressivo,

$$\text{Var} (X_j) = (\Phi^{j-1})\Gamma(\Phi^{j-1})' + (\Phi^{j-2})\Sigma_e(\Phi^{j-2})' + \dots + \Sigma_e \quad (\text{H2})$$

Se $\Gamma = \Phi\Gamma\Phi' + \Sigma_e$ (KALGONDA e KULKARNI, 2004), a matriz de variância-covariância do vetor de médias amostrais $(\Gamma_{\bar{X}})$ é dada por:

$$\Gamma_{\bar{X}} = \text{Var} \left[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \right] \quad (\text{H3})$$

Quando as amostras são formadas usando a técnica de amostragem sistemática, a matriz de variância-covariância de um vetor de médias amostrais $(\Gamma_{\bar{X}})$ é dada por:

$$\Gamma_{\bar{X}} = \frac{1}{n^2} \text{Var} \left[\sum_{i=0}^{n-1} X_{1+(s+1)i} \right] = \frac{1}{n^2} \left[\begin{aligned} & \left(1 + \Phi^{(s+1)} + \Phi^{2(s+1)} + \dots + \Phi^{(n-1)(s+1)} \right) \Gamma \left(1 + \Phi^{(s+1)} + \Phi^{2(s+1)} + \dots + \Phi^{(n-1)(s+1)} \right)' + \\ & \left(\Phi^s + \Phi^{2s-1} + \dots + \Phi^{(n-1)s-1} \right) \Sigma_e \left(\Phi^s + \Phi^{2s-1} + \dots + \Phi^{(n-1)s-1} \right)' + \\ & \left(\Phi^{s-1} + \Phi^{2s} + \dots + \Phi^{(n-1)s} \right) \Sigma_e \left(\Phi^{s-1} + \Phi^{2s} + \dots + \Phi^{(n-1)s} \right)' + \dots + \Phi \Sigma_e \Phi' + \Sigma_e \end{aligned} \right] \quad (\text{H4})$$

Baseando-se nas equações (H1), (H2), (H3) e (H4), segue que:

$$\Gamma_{\bar{X}} = \frac{1}{n^2} \left\{ \left(\sum_{i=0}^{n-1} \Phi^{(s+1)i} \right) \Gamma \left(\sum_{i=0}^{n-1} \Phi^{(s+1)i} \right)' + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \sum_{j=1}^{s+1} \left[\left(\sum_{i=1}^k \Phi^{(s+1)i-j} \right) \Sigma_e \left(\sum_{i=1}^k \Phi^{(s+1)i-j} \right)' \right] \right\} \right\} \quad (\text{H5})$$

Após manipulação algébrica, a equação (A5) é representada por:

$$\Gamma_{\bar{X}} = \left(\begin{array}{cc} \zeta_X^2 = \frac{\sigma_X^2}{n} \left[1 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) a^{(s+1)j} \right] & \zeta_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{n} \left[1 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) a^{(s+1)j} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) b^{(s+1)j} \right] \\ \zeta_{XY} & \zeta_Y^2 = \frac{\sigma_Y^2}{n} \left[1 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) b^{(s+1)j} \right] \end{array} \right) \quad (\text{H6})$$

sendo $\sigma_X^2 = \frac{\sigma_{e_X}^2}{1-a^2}$; $\sigma_Y^2 = \frac{\sigma_{e_Y}^2}{1-b^2}$; $\sigma_{XY} = \frac{\sigma_{e_{XY}}}{1-ab}$.