

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO MESQUITA FILHO”  
FACULDADE DE ENGENHARIA  
CAMPUS ILHA SOLTEIRA**

**MODELOS DE PROGRAMAÇÃO INTEIRA MISTA  
PARA A ALOCAÇÃO ÓTIMA DE BANCOS DE  
CAPACITORES EM SISTEMAS DE DISTRIBUIÇÃO  
DE ENERGIA ELÉTRICA RADIAIS**

**ÉERICA TATIANE ALMEIDA RIBEIRO**

Ilha Solteira – SP

2013



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**“ JÚLIO MESQUITA FILHO”**  
Campus de Ilha Solteira

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**“Modelos de Programação Inteira Mista para a Alocação  
Ótima de Bancos de Capacitores em Sistemas de  
Distribuição de Energia Elétrica Radiais”**

**ÉRICA TATIANE ALMEIDA RIBEIRO**

**Orientador :** Prof. Dr. Marcos Julio Rider Flores

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia – UNESP – Campus de Ilha Solteira, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.  
Área de Conhecimento: Automação.

Ilha Solteira – SP

2013

## FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

R484m Ribeiro, Érica Tatiane Almeida.  
Modelos de programação inteira mista para a alocação ótima de bancos de capacitores em sistemas de distribuição de energia elétrica radiais / Érica Tatiane Almeida Ribeiro. – Ilha Solteira : [s.n.], 2013  
102 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Engenharia Elétrica, Automação, 2013

Orientador: Marcos Julio Rider Flores  
Inclui bibliografia

1. Alocação de bancos de capacitores. 2. Programação linear inteira mista. 3. Programação cônica de segunda ordem inteira mista. 4. Sistemas de distribuição de energia elétrica radiais.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA



**CERTIFICADO DE APROVAÇÃO**

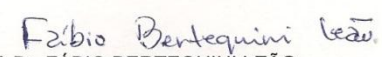
**TÍTULO:** Modelos de Programação Inteira Mista para a Alocação Ótima de Bancos de Capacitores em Sistemas de Distribuição de Energia Elétrica Radiais

**AUTORA:** ÉRICA TATIANE ALMEIDA RIBEIRO

**ORIENTADOR:** Prof. Dr. MARCOS JULIO RIDER FLORES

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica, Área: AUTOMAÇÃO, pela Comissão Examinadora:

  
Prof. Dr. MARCOS JULIO RIDER FLORES  
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

  
Prof. Dr. FÁBIO BERTEQUINI LEÃO  
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

  
Prof. Dr. ROBERTO CAYETANO LOTERO  
Departamento de Engenharia Elétrica / Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Data da realização: 26 de abril de 2013.

## **DEDICATÓRIA**

Dedico este trabalho a Deus, pela saúde, fé, muita força e perseverança que ele me proporcionou durante os momentos difíceis. Ao meu namorado pelo companheirismo. Aos meus amigos que sempre acreditaram e acreditam em mim. A todos os professores que contribuíram para a minha formação e que acreditaram no meu potencial intelectual. A minha família, que me amparou em todos os momentos e me deram educação, conselhos e toda minha estrutura de caráter. E por fim, agradeço ao meu orientador que me forneceu grandes conhecimentos e ensinamentos, que teve muita paciência e humildade durante esse período de estudos.

## **AGRADECIMENTOS**

Difícil agradecer todas as pessoas que de algum modo fizeram ou fazem parte da minha vida, por isso agradeço a todos que de alguma forma me ajudaram na realização deste trabalho. Obrigada a todas as pessoas que contribuíram para meu sucesso e para meu crescimento pessoal e profissional.

Um agradecimento especial aos meus pais, José Freitas Ribeiro e Terezinha Oliveira de Almeida Ribeiro, ao meu irmão, Carlos Henrique Almeida Ribeiro, ao meu namorado, Roger Aparecido Ferreira de Freitas, ao meu orientador, Marcos Julio Rider Flores, aos meus colegas do LAPSEE, aos meus amigos, que mesmo distante me apoiaram durante este período de muitos estudos, aos professores Fábio e Rubén, que acompanharam meu trabalho e contribuíram com suas sugestões de melhorias.

Agradeço a CAPES, pelo apoio financeiro, possibilitando minha dedicação exclusiva.

## RESUMO

Neste trabalho é apresentado o desenvolvimento de um modelo de programação linear inteira mista e outro de programação cônica de segunda ordem inteira mista para resolver o problema de alocação de bancos de capacitores fixos e/ou chaveados ao longo dos alimentadores primários de sistemas de distribuição de energia elétrica radiais, com o propósito de melhorar o perfil da magnitude de tensão e minimizar os custos de perdas de energia e de investimento. Nos modelos propostos, o cálculo do ponto de operação em regime permanente de sistemas de distribuição radiais é modelado matematicamente usando expressões lineares e cônicas de segunda ordem. O uso dos modelos garante a convergência para a solução ótima usando ferramentas de otimização clássica existentes. Os sistemas testes de 70, 136, 202 e 400 nós são utilizados para mostrar a exatidão dos modelos matemáticos, como também a eficiência das técnicas de solução propostas para resolver o problema de alocação de bancos de capacitores em sistemas de distribuição radiais.

**Palavras-chave:** Alocação de bancos de capacitores. Programação linear inteira mista. Programação cônica de segunda ordem inteira mista. Sistemas de distribuição de energia elétrica radiais.

## ABSTRACT

This work shows the development of a mixed integer linear programming model and a mixed integer second-order conic programming model to solve the allocation problem of fixed or switched capacitors banks in radial electrical distribution systems, with the aims to improve the voltage magnitude profile and minimize the energy losses and investment costs. In the proposed models, the steady-state operation point of the radial distribution system is modeled through linear and second-order conic expressions. The use of a mixed-integer linear programming model and a second-order conic programming model guarantee convergence to optimality using existing optimization software. The test systems of 70, 136, 202 and 400 nodes are used in order to show the accuracy of the mathematical models, as well as the efficiency of the proposed solution technique to solve the allocation problem of fixed or switched capacitors banks in a radial distribution system.

**Keywords:** Optimal allocation of capacitors banks. Mixed integer linear programming. Mixed integer second-order cone programming. Radial electrical distribution systems.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1</b> — Classificação normalizada da Tensão de Atendimento	20
<b>Figura 2</b> — Sistema de distribuição de três nós	29
<b>Figura 3</b> — Discretização do quadrado da magnitude da tensão	33
<b>Figura 4</b> — Exemplo ilustrativo da discretização do quadrado da magnitude da tensão	34
<b>Figura 5</b> — Ilustração da modelagem linear por partes da função $P_{ij,d}^2$	36
<b>Figura 6</b> — Exemplo ilustrativo da modelagem linear por partes da função $P_{ij,d}^2$	37
<b>Figura 7</b> — Sistema de 2 nós e 1 circuito	45
<b>Figura 8</b> — Solução ótima	46
<b>Figura 9</b> — Exemplo numérico do sistema de dois nós	46
<b>Figura 10</b> — Solução ótima do problema	47
<b>Figura 11</b> — Perfil da magnitude de tensão do sistema de 70 nós	49
<b>Figura 12</b> — Diagrama unifilar do sistema de distribuição de 136 nós	50
<b>Figura 13</b> — Perfil da magnitude de tensão do sistema de 136 nós	51
<b>Figura 14</b> — Diagrama unifilar do sistema de distribuição de 202 nós	53
<b>Figura 15</b> — Perfil da magnitude de tensão do sistema de 202 nós	54
<b>Figura 16</b> — Perfil da magnitude de tensão do sistema de 400 nós	55
<b>Figura 17</b> — Alocação de bancos de capacitores chaveados	59
<b>Figura 18</b> — Alocação de bancos de capacitores fixos	59
<b>Figura 19</b> — Perfil da magnitude de tensão do sistema de 70 nós sem bancos de capacitores	69
<b>Figura 20</b> — Perfil da magnitude de tensão do sistema de 70 nós com bancos de capacitores	70
<b>Figura 21</b> — Perfil da magnitude de tensão do sistema de 136 nós sem bancos de capacitores	72
<b>Figura 22</b> — Perfil da magnitude de tensão do sistema de 136 nós com bancos de capacitores	73
<b>Figura 23</b> — Perfil da magnitude de tensão do sistema de 202 nós sem bancos de capacitores	75
<b>Figura 24</b> — Perfil da magnitude de tensão do sistema de 202 nós com bancos de capacitores	76

- Figura 25** — Perfil da magnitude de tensão do sistema de 400 nós sem bancos de capacitores 78
- Figura 26** — Perfil da magnitude de tensão do sistema de 400 nós com bancos de capacitores 79

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 1</b> — Tensões Nominais padronizadas	21
<b>Quadro 2</b> — Perdas de Potência Ativa do Sistema de 70 nós	48
<b>Quadro 3</b> — Perdas de Potência Ativa do Sistema de 136 nós	51
<b>Quadro 4</b> — Perdas de Potência Ativa do Sistema de 202 nós	52
<b>Quadro 5</b> — Perdas de Potência Ativa do Sistema de 400 nós	55
<b>Quadro 6</b> — Resultados do sistema de 70 nós	70
<b>Quadro 7</b> — Resultados da alocação de BC no sistema de 70 nós	71
<b>Quadro 8</b> — Resultado após a alocação de BC no sistema de 136 nós	73
<b>Quadro 9</b> — Resultados da alocação de BC no sistema de 136 nós	74
<b>Quadro 10</b> — Resultado após a alocação de BC no sistema de 202 nós	76
<b>Quadro 11</b> — Resultados da alocação de BC no sistema de 202 nós	77
<b>Quadro 12</b> — Resultado após a alocação de BC no sistema de 400 nós	79
<b>Quadro 13</b> — Resultados da alocação de BC no sistema de 400 nós	80

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1</b> — Pontos de entrega ou conexão em Tensão Nominal superior a 1KV e inferior a 69 KV	20
<b>Tabela 2</b> — Erros percentuais das perdas de potência ativa para o sistema de 70 nós	49
<b>Tabela 3</b> — Erros percentuais das perdas de potência ativa para o sistema de 136 nós	52
<b>Tabela 4</b> — Erros percentuais das perdas de potência ativa para o sistema de 202 nós	54
<b>Tabela 5</b> — Erros percentuais das perdas de potência ativa para o sistema de 400 nós	56

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AG	Algoritmos Genéticos
AMPL	A Modeling Language for Mathematical Programming
ANEEL	Agência Nacional de Energia Elétrica
BC	Banco de Capacitores
CNOPO	Condições Necessárias de Otimalidade de Primeira Ordem
FC	Fluxo de Carga
KNITRO	Nonlinear Interior-point Trust Region Optimizer
LAPSEE	Laboratório de Planejamento de Sistemas de Energia Elétrica
MCSO	Modelo Cônico de Segunda Ordem
MCSOIM	Modelo Cônico de Segunda Ordem Inteiro Misto
MLIM	Modelo Linear Inteiro Misto
MNL	Modelo Não Linear
MNLIM	Modelo Não Linear Inteiro Misto
NR	Newton-Raphson
PA	Potência Ativa
PESD	Planejamento da Expansão dos Sistemas de Distribuição de energia elétrica
SDEE	Sistemas de Distribuição de Energia Elétrica
SOCP	Second-Order Cone Programming
TA	Tensão de Atendimento
TC	Tensão Contratada
TL	Tensão de Leitura
TN	Tensão Nominal

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Conjuntos:

- $\Omega_l$  Conjunto dos circuitos.  
 $\Omega_b$  Conjunto de nós.  
 $\Omega_d$  Conjunto de níveis de demandas.

### Variáveis:

- $\Delta_{ij,d,y}^P$  Valor do  $y$ -ésimo bloco de  $P_{ij,d}$ .  
 $\Delta_{ij,d,y}^Q$  Valor do  $y$ -ésimo bloco de  $Q_{ij,d}$ .  
 $I_{ij,d}$  Magnitude da corrente no circuito  $ij$  no nível de demanda  $d$ .  
 $I_{ij,d}^{qdr}$  Variável que representa o quadrado de  $I_{ij,d}$  no nível de demanda  $d$ .  
 $I_{ij}$  Magnitude da corrente no circuito  $ij$ .  
 $I_{ij}^{qdr}$  Variável que representa o quadrado de  $I_{ij}$ .  
 $P_{i,d}^S$  Fluxo de potência ativa fornecido pela subestação no circuito  $ij$  no nível de demanda  $d$ .  
 $P_i^S$  Fluxo de potência ativa fornecido pela subestação no circuito  $ij$ .  
 $P_{ij,d}$  Fluxo de potência ativa no circuito  $ij$  no nível de demanda  $d$ .  
 $P_{ij}$  Fluxo de potência ativa no circuito  $ij$ .  
 $P_{j,d,s}^c$  Variável de correção de potência usada na discretização de  $V_{j,d}^{qdr} I_{ij,d}^{qdr}$ .  
 $Q_{i,d}^S$  Fluxo de potência reativa fornecido pela subestação no circuito  $ij$  no nível de demanda  $d$ .  
 $Q_i^S$  Fluxo de potência reativa fornecido pela subestação no circuito  $ij$ .  
 $Q_{ij,d}$  Fluxo de potência reativa no circuito  $ij$  no nível de demanda  $d$ .  
 $Q_{ij}$  Fluxo de potência reativa no circuito  $ij$ .  
 $V_{i,d}$  Magnitude de tensão no nó  $i$  no nível de demanda  $d$ .  
 $V_{i,d}^{qdr}$  Variável que representa o quadrado de  $V_{i,d}$  no nível de demanda  $d$ .  
 $V_i$  Magnitude de tensão no nó  $i$ .  
 $V_i^{qdr}$  Variável que representa o quadrado de  $V_i$ .  
 $n_{i,d}$  Número de módulos de capacitores operantes no nó  $i$  no nível de demanda  $d$ .

$n_i^{cp}$	Número de módulos de capacitores instalados no nó $i$ .
$q_i$	Variável binária para alocação de um banco de capacitor fixo ou chaveado no nó $i$ .
$q_i^{sw}$	Variável binária para alocação de um equipamento chaveado para módulos de capacitores no nó $i$ .
$x_{i,d,s}$	Variável binária usada na discretização de $V_{i,d}^{qdr}$ .

### Constantes:

$\bar{\Delta}^V$	Limite máximo do passo de discretização de $V_{i,d}^{qdr}$ .
$\bar{\Delta}_{ij}^S$	Limite superior de cada bloco de discretização do fluxo de potencia ativa e reativa no circuito $ij$ .
$\bar{I}_{ij}$	Limite máximo da magnitude de corrente no circuito $ij$ .
$\bar{n}_b^{cp}$	Número máximo de módulos de capacitores que podem ser instalados no nó do sistema.
$\bar{n}^{cp}$	Número máximo de bancos de capacitores fixos ou chaveados que podem ser adicionados no sistema.
$D_d$	Número de horas em um ano do nível de demanda $d$ (h).
$P_{i,d}^D$	Demanda de potência ativa no nó $i$ no nível de demanda $d$ .
$P_i^D$	Demanda de potência ativa no nó $i$ .
$Q^{cp}$	Potência Reativa de cada módulo de capacitor (kVAr).
$Q_{i,d}^D$	Demanda de potência reativa no nó $i$ no nível de demanda $d$ .
$Q_i^D$	Demanda de potência reativa no nó $i$ .
$R_{ij}$	Resistência do circuito $ij$ .
$\bar{V}$	Magnitude da tensão máxima (kV).
$\underline{V}$	Magnitude da tensão mínima (kV).
$V^{nom}$	Magnitude da tensão nominal.
$X_{ij}$	Reatância do circuito $ij$ .
$Z_{ij}$	Impedância do circuito $ij$ .
$c_d^{ls}$	Custo da energia nos níveis de demanda $d$ (US\$/kWh).
$c^{fx}$	Custo de instalação dos bancos de capacitores fixos ou chaveados (US\$).
$c^{sw}$	Custo do equipamento dos bancos de capacitores chaveados (US\$).
$c^{un}$	Custo unitário de cada módulo de capacitor (US\$).

- $k_c$  Fator de recuperação de capital do banco de capacitor.
- $m_{ij,y}^s$  Inclinação do  $y$ -ésimo bloco do fluxo de potência ativa e reativa no circuito  $ij$ .
- $t_l$  Taxa de recuperação dos custos das perdas de potência ativa.
- $S$  Número de discretizações da variável  $V_i^{qdr}$  e  $V_{i,d}^{qdr}$ .
- $Y$  Número de blocos da linearização por partes.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>18</b>
1.1	Níveis de Tensão em Regime Permanente para Sistemas de Distribuição	19
1.2	Revisão Bibliográfica	21
1.3	Objetivos	27
1.4	Estrutura do Trabalho	27
<b>2</b>	<b>Cálculo do Ponto de Operação de Sistemas de Distribuição Radiais Usando os Modelos Linear Inteiro Misto e Cônico de Segunda Ordem</b>	<b>28</b>
2.1	Introdução	28
2.2	Hipóteses	29
2.3	Modelo Não Linear para o Problema de Fluxo de Carga	30
2.4	Linearização	32
2.4.1	<i>Linearização do produto <math>V_{j,d}^{qdr} I_{ij,d}^{qdr}</math></i>	32
2.4.2	<i>Linearização do termo quadrático <math>P_{ij,d}^2 + Q_{ij,d}^2</math></i>	35
2.5	Modelo Linear Inteiro Misto	38
2.6	Programação Cônica	39
2.7	Modelo Cônico de Segunda Ordem	41
2.8	Testes e resultados	47
2.8.1	<i>Sistema de 70 nós</i>	48
2.8.2	<i>Sistema de 136 nós</i>	50
2.8.3	<i>Sistema de 202 nós</i>	52
2.8.4	<i>Sistema de 400 nós</i>	55

2.9	Comentários do capítulo	56
<b>3</b>	<b>Alocação Ótima de Bancos de Capacitores em Sistemas de Distribuição de Energia Elétrica Radiais</b>	<b>58</b>
3.1	Bancos de Capacitores Fixos e Chaveados	58
3.2	Modelo Não Linear do Problema de Alocação de Bancos de Capacitores	59
3.3	Linearização	63
3.4	Linearização do termo quadrático $P_{ij}^2 + Q_{ij}^2$	63
3.5	Modelo Linear Inteiro Misto para o problema de Alocação de Bancos de Capacitores	65
3.6	Modelo Cônico de Segunda Ordem Inteiro Misto para o problema de Alocação de Bancos de Capacitores	66
<b>4</b>	<b>Testes e Resultados</b>	<b>68</b>
4.1	Introdução	68
4.1.1	<i>Sistema de distribuição de 70 nós</i>	68
4.1.2	<i>Sistema de distribuição de 136 nós</i>	71
4.1.3	<i>Sistema de distribuição de 202 nós</i>	75
4.1.4	<i>Sistema de distribuição de 400 nós</i>	77
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>81</b>
	<b>Referências</b>	<b>83</b>
	<b>Apêndice A – Dados dos sistemas de distribuição testados</b>	<b>87</b>
A.1	Sistema de distribuição de 70 nós	87
A.2	Sistema de distribuição de 136 nós	89
A.3	Sistema de distribuição de 202 nós	92
A.4	Sistema de distribuição de 400 nós	96

# 1 Introdução

O planejamento da expansão dos sistemas de distribuição de energia elétrica (PESD) é um processo de tomada de decisões, que busca identificar o melhor plano para alcançar as metas da companhia de distribuição de energia elétrica, cujo principal objetivo é determinar o conjunto de investimentos que garantem uma operação econômica e confiável da rede (NG et al., 2000). Assim, altos custos de investimentos e de operação ressaltam a importância do PESD (GÖNEN, 1986).

Um dos grandes problemas no PESD é manter o perfil das magnitudes de tensão dentro dos limites de operação estabelecidos pelo órgão que regulamenta a concessão destas empresas (ANEEL, 2001), pois se a magnitude de tensão ultrapassar esses limites, a empresa será penalizada por tal ato (GÖNEN, 1986). Com isso, as concessionárias procuram solucionar este problema no aspecto técnico e econômico, tentando manter a qualidade do serviço tanto para os consumidores como para o órgão regulamentador, já que um perfil da magnitude de tensão adequado, além de satisfazer os consumidores traz benefícios às distribuidoras, fazendo com que os equipamentos operem corretamente e diminuam as perdas de potência ativa do sistema de distribuição (KERSTING, 2001).

O desenvolvimento de modelos matemáticos de otimização e de técnicas de solução para resolver o problema de PESD são de suma importância para as empresas distribuidoras, devido ao crescimento da demanda e a necessidade de atender os consumidores, dentro ou fora de sua área de concessão, com qualidade de fornecimento de energia, segurança, altos índices de confiabilidade, proteção ao meio ambiente e custos competitivos.

Ferramentas computacionais desenvolvidas a partir de técnicas de otimização e heurísticas adotadas no processo de planejamento, podem gerar reduções substanciais nos custos de expansão e operação. Desta forma, torna-se importante para os departamentos de planejamento das empresas do setor elétrico de distribuição o desenvolvimento dessas ferramentas computacionais para análise e planejamento que contemplem a confiabilidade e a qualidade do fornecimento de energia elétrica de maneira econômica, levando-se em consideração o montante dos investimentos a serem aplicados nos projetos de PESD.

Ao encontrar um problema de perfil de tensão no sistema de distribuição primário de energia elétrica, uma das soluções que é muito praticada pelas empresas é a alocação de

bancos de capacitores em nós adequados e com um controle ótimo de seus pontos de operação.

Os bancos de capacitores são instalados para reduzir as perdas de energia, melhorar o perfil das magnitudes de tensão e corrigir o fator de potência do sistema, entre outras vantagens, que são adquiridas dependendo da localização, capacidade e tamanho do banco de capacitor. Estas escolhas são complexas, pois os sistemas de distribuição são extensos, mas com as pesquisas, gradativamente obtém-se um modelo matemático mais exato, utilizando melhores técnicas para encontrar soluções mais próximas às soluções globais ou a própria solução global.

Desde 1960 o problema de alocação ótima de bancos de capacitores é estudado, mas foi em 1980 que surgiram os modelos matemáticos que são usados até hoje (HAFFNER et al., 2009).

## **1.1 Níveis de Tensão em Regime Permanente para Sistemas de Distribuição**

A Resolução ANEEL (Agência Nacional de Energia Elétrica) 505, de 26 de Novembro de 2001, estabelece os níveis de tensão que devem ser respeitados pelas distribuidoras em regime permanente. Se os níveis de tensão não são atendidos em regime permanente as empresas estão sujeitas a multa.

As definições utilizadas, relacionadas aos valores de tensão empregados para sua classificação, são:

- Tensão de Atendimento (TA): valor eficaz de tensão no ponto de entrega ou de conexão, obtido por meio de medição, podendo ser classificada em adequada, precária ou crítica, de acordo com a leitura efetuada;
- Tensão Contratada (TC): valor eficaz de tensão que deverá ser informado ao consumidor por escrito, ou estabelecido em contrato;
- Tensão de Leitura (TL): valor eficaz de tensão, integralizado a cada dez minutos, obtido de medição por meio de equipamentos apropriados;
- Tensão Nominal (TN): valor eficaz de tensão pelo qual o sistema é projetado.

A tensão de atendimento é classificada de acordo com as faixas de variação da tensão de leitura, conforme mostrado na Tabela 1, que sintetiza a classificação das faixas de

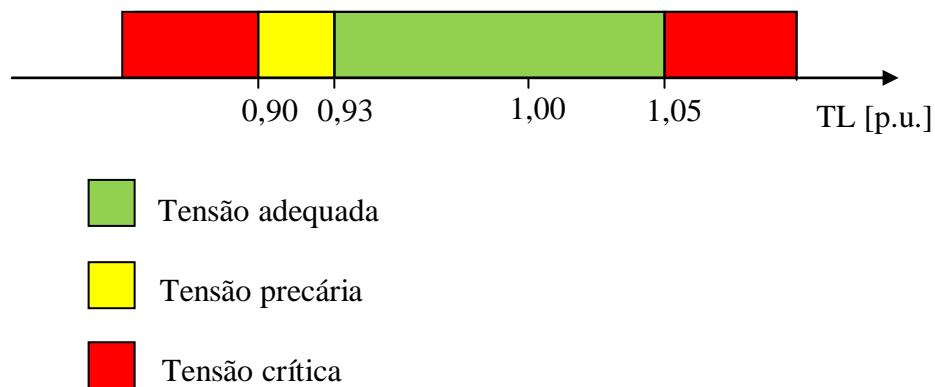
tensão adotadas no sistema elétrico brasileiro, para níveis de tensão entre 1 kV e 69 kV. A Figura 1 complementa a informação contida na Tabela 1.

**Tabela 1** — Pontos de entrega ou conexão em Tensão Nominal superior a 1KV e inferior a 69 KV

Classificação da Tensão de Atendimento (TA)	Faixa de variação da Tensão de Leitura (TL) em relação à Tensão Contratada (TC)
Adequada	$0,93 TC \leq TL \leq 1,05 TC$
Precária	$0,90 TC \leq TL < 0,93 TC$
Crítica	$TL < 0,90 TC$ ou $TL > 1,05 TC$

Fonte: Dados da pesquisa do autor

**Figura 1** — Classificação normalizada da Tensão de Atendimento



Fonte: Dados da pesquisa do autor

A partir da análise da figura pode ser verificado que tensões compreendidas entre 0,93 e 1,05 p.u., em relação a uma tensão nominal de 1 p.u., encontram-se dentro da faixa de tensão denominada *Adequada*, a qual é a faixa operativa dos sistemas de distribuição. Valores de tensão abaixo de 0,9 p.u. e acima de 1,05 p.u. enquadram-se na faixa de tensão denominada *Crítica*, em que o fornecimento de energia nesta faixa pode danificar os equipamentos dos consumidores. A faixa de tensão denominada *Precária* encontra-se entre 0,9 e 0,93 p.u. É importante destacar que não há uma faixa de tensão *Precária* acima da tensão *Adequada* (ANEEL, 2001).

Desta forma, o sistema é enquadrado em níveis operativos quando os valores de tensão estão compreendidos apenas na faixa *Adequada*, já as faixas de tensão *Precária* e

*Crítica* estão nos níveis não operativos. As tensões nominais padronizadas e a faixa de valores adequados, precários e críticos das tensões de leitura são mostrados no Quadro 1.

**Quadro 1** — Tensões Nominais padronizadas

Tensões nominais padronizadas				
Tensão nominal (TN)		Faixa de valores adequados das tensões de leitura (TL) em relação à TN (Volts)	Faixa de valores precários das tensões de leitura (TL) em relação à TN (Volts)	Faixa de valores críticos das tensões de leitura (TL) em relação à TN (Volts)
Ligação	Volts			
Trifásica	(220) / (127)	(201 = TL = 231) / (116 = TL = 133)	(189 = TL < 201 ou 231 < TL = 233) / (109 = TL < 116 ou 133 < TL = 140)	(TL < 189 ou TL > 233) / (TL < 109 ou TL > 140)
	(380) / (220)	(348 = TL = 396) / (201 = TL = 231)	(327 = TL < 348 ou 396 < TL = 403) / (189 = TL < 201 ou 231 < TL = 233)	(TL < 327 ou TL > 403) / (TL < 189 ou TL > 233)
Monofásica	(254) / (127)	(232 = TL = 264) / (116 = TL = 132)	(220 = TL < 232 ou 264 < TL = 269) / (109 = TL < 116 ou 132 < TL = 140)	(TL < 220 ou TL > 269) / (TL < 109 ou TL > 140)
	(440) / (220)	(402 = TL = 458) / (201 = TL = 229)	(380 = TL < 402 ou 458 < TL = 466) / (189 = TL < 201 ou 229 < TL = 233)	(TL < 380 ou TL > 466) / (TL < 189 ou TL > 233)

Fonte: Dados da pesquisa do autor

## 1.2 Revisão Bibliográfica

A seguir são destacados alguns trabalhos existentes na área de alocação de bancos de capacitores em sistemas de distribuição de energia elétrica.

(BARAN et al., 1989) propõem uma formulação geral e uma metodologia de solução eficiente que tem sido desenvolvida para o problema de alocação de bancos de capacitores em sistemas de distribuição radiais, determinando a localização, quantidade, tipo e tamanho de bancos de capacitores. O objetivo é reduzir o desvio da magnitude de tensão, as perdas de energia e minimizar o custo de investimento dos bancos de capacitores. A metodologia divide o problema original em dois subproblemas ou níveis de hierarquia, sendo

um problema mestre e um problema escravo. O problema mestre é usado para determinar a localização dos bancos de capacitores. O problema escravo é usado pelo problema mestre para determinar o tipo e tamanho dos bancos de capacitores alocados no sistema. Os resultados apresentados indicam que a metodologia é computacionalmente eficiente e o esquema de decomposição tem um bom desempenho.

(CHIANG et al., 1990) apresenta uma nova formulação do problema de alocação de bancos capacitores que é um problema de otimização combinatorial com uma função objetivo não diferenciável. A metodologia proposta se baseia na metaheurística *simulated annealing* e tem como objetivo determinar a localização, tipo e tamanho dos bancos de capacitores, e a configuração do controle destes bancos, considerando diferentes níveis de carga. A metodologia proposta foi testada no sistema de 69 nós.

(BOONE et al., 1993) apresentam um algoritmo genético aplicado ao problema de alocação ótima de bancos de capacitores no sistema de distribuição. O modelo matemático considerado é o mesmo apresentado em (CHIANG et al., 1990). A metodologia proposta foi testada no sistema de 69 nós. Os autores concluem que o algoritmo genético proposto pode ser estendido para resolver o problema de alocação de bancos de capacitores fixos e/ou chaveados.

(SUNDHARARAJAN et al., 1994) apresentam outro algoritmo genético aplicado ao problema de alocação ótima de bancos de capacitores no sistema de distribuição. O objetivo é determinar o tamanho, tipo e número de bancos de capacitores a serem instalados no sistema de distribuição, com o objetivo de minimizar as perdas de potência ativa na demanda máxima e as perdas de energia no sistema de distribuição considerando o custo de investimento dos bancos de capacitores. O método proposto foi testado para os sistemas de 9 e 30 nós.

(HUANG et al., 1996) apresentam uma metodologia de solução baseada no *Tabu Search* para determinar a localização, tipo, quantidade e tamanho dos bancos de capacitores que devem ser instalados no sistema de distribuição, assim como também o controle destes bancos para os diferentes níveis de demanda. Um método baseado na análise de sensibilidade foi usado para selecionar o conjunto de nós candidatos para instalar bancos de capacitores e assim reduzir o espaço de busca do problema original. A metodologia proposta foi testada no sistema de 69 nós.

(NG et al., 2000) apresentam a evolução das pesquisas e fornece uma avaliação da praticidade e exatidão dos algoritmos para resolver o problema de alocação de bancos de capacitores em sistemas de distribuição. Este artigo destaca as vantagens e desvantagens das

técnicas e fornece um guia prático para a alocação de bancos de capacitores que engenheiros e pesquisadores possam usar.

(LEVITIN et al., 2000) apresentam outro algoritmo genético para resolver o problema de alocação de bancos de capacitores em sistemas de distribuição, considerando diferentes níveis de demanda. Um método rápido para o cálculo das perdas de energia baseado nas curvas da demanda diária normalizada é proposto com o objetivo de obter a redução de perdas de energia anual.

(GALLEGO et al., 2001) apresentam o problema de alocação de bancos de capacitores na rede de distribuição radial com o objetivo de determinar o tipo, tamanho, localização e esquema de controle dos bancos. Os autores afirmam que é um problema combinatorial “*hard*” que pode ser formulado como um programa não linear inteiro misto, em que o número de soluções com mínimo local e o número de opções para ser analisadas aumentam exponencialmente com o tamanho do sistema de distribuição. O problema foi solucionado usando um *Tabu Search*, junto com funcionalidades de outras metaheurísticas, tais como algoritmos genéticos, *simulated annealing* e heurísticas práticas. O método proposto foi testado usando três sistemas de distribuição disponíveis na literatura.

(MEKHAMER et al., 2002) neste artigo é apresentado duas estratégias heurísticas para a alocação de fontes de potência reativa nos alimentadores de um sistema de distribuição radial. Uma estratégia minimiza os custos de investimento e a outra minimiza as perdas de potência ativa.

(SOUZA et al., 2004) apresentam um algoritmo micro genético com lógica fuzzy para resolver o problema de alocação de bancos de capacitores. A função objetivo considera o ganho econômico obtido pela redução de perdas de energia elétrica em contraste com o custo de aquisição e instalação de bancos de capacitores fixos e chaveados. Um programa de fluxo de carga simples e eficiente é usado para avaliar cada indivíduo do algoritmo micro genético. O modelo calcula o tamanho, localização e o controle dos bancos de capacitores alocados na rede de distribuição.

Em (MILOŠVIĆ et al., 2004) é apresentado um novo algoritmo genético para resolver o problema de alocação de bancos de capacitores. Estes bancos são alocados nos alimentadores primários para melhorar o perfil da magnitude de tensão durante as horas de maior consumo, de modo a não comprometer a qualidade do fornecimento de energia para os consumidores. O algoritmo genético proposto leva em conta a volatilidade dos preços da energia.

(CHIOU et al., 2004) apresenta uma metaheurística baseada na evolução diferencial híbrida da direção das formigas, com programação inteira, para solucionar o problema de alocação de bancos de capacitores com eficácia para sistemas de grande porte. A utilização de uma busca de colônia de formiga com evolução diferencial híbrida tem como objetivo melhorar o operador de mutação para acelerar a busca da solução ótima.

(PIRES et al., 2005) neste artigo foi apresentado um modelo multiobjetivo e uma estratégia de solução baseada em *Tabu Search* para fornecer suporte na decisão do problema de alocação de bancos de capacitores. Esta formulação tem duas funções objetivo, uma minimiza as perdas de potência ativa e a outra minimiza os custos de investimento dos bancos de capacitores. A estratégia foi desenvolvida para sistemas de distribuição radial, e foi aplicada no sistema elétrico português.

Em (LADJAVARDI et al., 2008) foi proposto um algoritmo genético com lógica *fuzzy* para o problema de alocação ótima de bancos de capacitores na rede de distribuição na presença de harmônicos de tensão e corrente. A função objetivo considera as perdas de energia e o custo de investimento dos bancos de capacitores. Os limites da qualidade do perfil da magnitude de tensão e o número de bancos de capacitores permitidos em cada nó são considerados nas restrições. A principal contribuição foi a melhoria simultânea da qualidade da magnitude de tensão e o custo de investimento no sistema de energia.

(TENG et al., 2008) apresentam um método de controle ótimo de bancos de capacitores para um sistema de distribuição desequilibrado, considerando geração distribuída. A geração distribuída tem diferentes características de operação (magnitude de tensão e fator de potência constante, etc) influenciando no planejamento e operação dos sistemas de distribuição. Os resultados obtidos pelo método podem integrar a operação dos geradores distribuídos no problema de planejamento ótimo de bancos de capacitores, com uma operação eficaz e eficiente, tendo um ótimo potencial para ser utilizado nas aplicações futuras de redes inteligentes.

(CHANG, 2008) apresenta um novo algoritmo de busca de colônia de formigas para resolver o problema da reconfiguração dos alimentadores primários considerando a alocação de bancos de capacitores. Dos resultados aplicados em dois sistemas testes mostrados na literatura, pode-se concluir que a reconfiguração dos alimentadores e alocação de bancos de capacitores reduz perdas de potência elétrica e melhora o perfil da magnitude de tensão, e mostra que simultaneamente, as técnicas são mais eficientes do que considerando apenas uma delas.

(SILVA et al., 2008) apresentam um algoritmo heurístico construtivo para solucionar o problema de alocação ótima de bancos de capacitores. O *Busbar Sensitivity Index*, baseado nos multiplicadores de lagrange do problema de otimização, foram utilizados para reduzir o espaço de busca. O uso da função sigmóide representa o estado discreto dos bancos de capacitores, que contribuiu para uma boa performance global do algoritmo. Este algoritmo pode ser aplicado como uma ferramenta para obter conjuntos de soluções factíveis que podem ser usadas como solução inicial para algoritmo genético e outros tipos de metaheurísticas.

(PARK et al., 2009) apresentam um modelo para a alocação de bancos de capacitores nos sistemas de distribuição considerando o custo anualizado destes dispositivos. A relação entre o número de operações e o tempo de vida dos dispositivos foi formulada para calcular o custo anualizado total, incluindo o custo de investimento e o custo total das perdas de energia. A solução foi determinada usando um algoritmo genético especializado.

(HAFFNER et al., 2009) apresentaram um modelo de otimização linear inteiro misto para o problema de alocação e realocação de bancos de capacitores fixos e automáticos em redes de distribuição de energia elétrica, considerando a variação diária da carga e a definição simultânea do *tap* ótimo dos transformadores de distribuição, minimizando os custos de investimento e da operação do sistema. Ao comparar os resultados obtidos utilizando o melhor *tap* para os transformadores de distribuição com as soluções sem ajuste, mostraram a importância deste ajuste para manter as tensões dentro dos limites específicos, porém em relação à redução de perdas ele é pouco eficiente. Este método de otimização clássica apresenta uma solução de grande qualidade, uma vez que a solução deste foi bem próxima da solução do fluxo de carga não linear.

(SEGURA et al., 2010) apresentam um algoritmo heurístico construtivo para solucionar o problema de alocação ótima de bancos de capacitores nos sistemas de distribuição radial. O índice de sensibilidade é obtido através da solução da versão relaxada do modelo matemático. As soluções obtidas pelo algoritmo podem não competir com recentes metaheurísticas, porém são melhores do que (HUANG et al., 1996), principalmente por representar menos investimento, mais economia e se aproximar da solução apresentada em (GALLEGO et al., 2001). Outra observação foi que a alocação de bancos de capacitores foi eficiente na redução das perdas de potência elétrica do sistema, mas nem sempre ele pode solucionar a queda de tensão.

(KALANTARI et al., 2011) usam um algoritmo genético para resolver o problema de alocação de geradores distribuídos e bancos de capacitores para reduzir as perdas de potências elétrica e melhorar o perfil da magnitude de tensão no sistema de distribuição. O

método de fluxo de potência de varredura *backward forward* é utilizado para avaliar cada indivíduo do algoritmo genético de forma rápida.

(CHANG et al., 2011) apresentam um procedimento baseado na lógica *fuzzy* e no algoritmo imune para a alocação e dimensionamento de bancos de capacitores em sistemas de distribuição de energia elétrica desequilibrados. Primeiramente, a lógica *fuzzy* determina o local mais adequado para a alocação do banco de capacitor, depois através do algoritmo imune é determinado o tamanho do mesmo.

(FARAHANI et al., 2012) propuseram um algoritmo genético para resolver o problema de reconfiguração e alocação de bancos de capacitores nos sistemas de distribuição de energia elétrica. A função objetivo minimiza o custo total da alocação dos bancos de capacitores e as perdas de energia durante o horizonte de planejamento, considerando as restrições de magnitude de tensão nos nós e a máxima capacidade de corrente nos condutores.

(HUANG et al., 2012) apresentam uma nova abordagem de otimização baseada no crescimento da planta para resolver o problema de alocação de bancos de capacitores em sistemas de distribuição de energia elétrica. O método foi caracterizado pelo mecanismo de crescimento do fototropismo da planta, em que a função do processo de otimização o imita para alocar os bancos de capacitores. A função objetivo minimiza as perdas de potência elétrica e a emissão de dióxido de carbono.

#### Comentários finais da revisão bibliográfica

Ao término desta revisão bibliográfica é possível constatar a evolução gradativa dos métodos de otimização, procurando encontrar a solução ótima do problema de alocação de bancos de capacitores. A maioria dos métodos usam algoritmos heurísticos construtivos e metaheurísticas. Poucos trabalhos abordam as técnicas de otimização clássica para solucionar o problema de alocação de bancos de capacitores. Os trabalhos existentes na literatura consideram modelos relaxados ou simplistas. Também observamos que, na maioria dos primeiros trabalhos, os modelos consideravam somente a minimização das perdas de potência elétrica, atualmente a maioria dos trabalhos considera, além disto, o custo de investimento de bancos de capacitores, que podem ser fixos ou chaveados. Mesmo com várias pesquisas a respeito, até então, nenhum trabalho encontrou a solução ótima global do problema em questão.

### 1.3 Objetivos

O objetivo deste trabalho é desenvolver um modelo linear inteiro misto e um modelo cônico de segunda ordem inteiro misto, para resolver o problema de dimensionamento e alocação de bancos de capacitores fixos e chaveados, ao longo dos alimentadores primários de sistemas de distribuição de energia elétrica (SDEE) radiais, visando melhorar o perfil de tensão, minimizar as perdas de potência ativa nos trechos da rede e a minimização dos custos de instalação dos bancos de capacitores. O uso dos modelos de programação linear inteira mista (MLIM) e cônica de segunda ordem inteira mista (MCSOIM) garantem a convergência para a solução ótima, usando as ferramentas de otimização clássica existentes.

### 1.4 Estrutura do Trabalho

Esta dissertação está organizada da seguinte forma:

No capítulo 1 foi apresentada uma introdução ao problema de alocação de bancos de capacitores, os objetivos desta dissertação e uma revisão bibliográfica.

No capítulo 2, estão descritos os modelos de programação não linear, linear inteira mista e cônica de segunda ordem, usados para calcular o ponto de operação em regime permanente de um SDEE radial.

No capítulo 3 serão mostrados os modelos não linear, linear inteiro misto e cônico de segunda ordem inteiro misto para o problema de alocação de bancos de capacitores em SDEE radiais.

No capítulo 4 serão apresentados os resultados obtidos pela metodologia proposta para a alocação de bancos de capacitores nos SDEE testes radiais de 70, 136, 202 e 400 nós.

Finalmente, no Capítulo 5, são apresentadas algumas considerações finais e perspectivas de trabalhos.

## 2 Cálculo do Ponto de Operação de Sistemas de Distribuição Radiais Utilizando um Modelo Linear Inteiro Misto e um Modelo Cônico de Segunda Ordem

Neste capítulo é apresentado o sistema de equações não-lineares utilizado para calcular o ponto de operação em regime permanente de um sistema de distribuição radial e a dedução da linearização destas equações para resolver o problema de fluxo de carga (FC) utilizando um problema de programação linear inteiro misto e cônico de segunda ordem.

### 2.1 Introdução

O objetivo principal do cálculo de fluxo de carga (FC) é determinar o estado de operação em regime permanente do sistema elétrico (ARRILLAGA, 1991), obtendo as magnitudes de tensões e os ângulos de fase em todos os nós e, conseqüentemente, outras grandezas derivadas destas, como fluxos de potências ativa e reativa, magnitudes da corrente nos circuitos, potências reativas dos geradores, perdas de potências ativa e reativa, entre outras.

Matematicamente, o problema de FC pode ser modelado como um sistema de equações algébricas não lineares. A maioria dos problemas de FCs para sistemas de transmissão são resolvidos utilizando o método iterativo de Newton-Raphson (NR) ou suas versões desacopladas XB e BX (ARRILLAGA, 1991; STOTT, 1974).

Para resolver o problema de FC em SDEE também é possível usar o método NR ou suas versões desacopladas. Porém, os SDEE apresentam duas características muito específicas. A primeira é que eles operam de forma radial, não apresentando laços ou malhas, o que é uma vantagem porque simplifica a complexidade do problema de FC. A segunda é que alguns apresentam uma relação  $R/X$  muito elevada quando comparada com valores típicos encontrados nos sistemas de transmissão e sub-transmissão, sendo uma desvantagem, pois pode produzir divergência no processo da resolução do problema de FC.

Com relação a primeira característica do SDEE, foram desenvolvidos algoritmos especializados para solucionar o problema de FC (os chamados FC de varredura), como mostrados em (GOSWAMI, 1992; SEGURA, 2010). O algoritmo tem este nome por ser um processo iterativo que faz um percurso dos nós finais em direção à subestação e vice-versa. Todos estes algoritmos apresentam a vantagem adicional de que são mais rápidos que as

versões NR e desacopladas. Nas subseções 2.2 e 2.3 são mostradas as deduções das equações do problema de FC para sistemas de distribuição radiais.

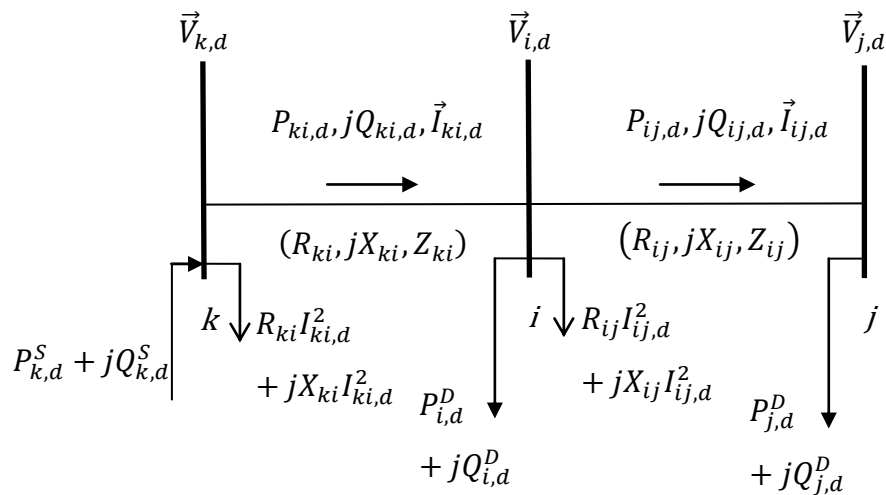
## 2.2 Hipóteses

A fim de representar o funcionamento em regime permanente de um sistema de distribuição de energia, são feitas as seguintes hipóteses (comumente usadas nos programas de FC de varredura):

- 1- As demandas das cargas no sistema de distribuição são representadas como potências ativa e reativa constantes;
- 2- No circuito  $ij$  o nó  $i$  está mais próximo da subestação que o nó  $j$ ;
- 3- As perdas de potências ativa e reativa no circuito  $ij$  estão concentradas no nó  $i$ .
- 4- O sistema é balanceado e representado pelo seu equivalente monofásico.

A ilustração de uma parcela de um sistema de distribuição está apresentada na Figura 2.

**Figura 2** — Sistema de distribuição de três nós



Fonte: Dados da pesquisa do autor

As quatro considerações são mostradas na Figura 2, onde  $\vec{V}_{i,d}$  e  $\vec{I}_{ij,d}$  são os fasores da tensão no nó  $i$  e o fluxo de corrente no circuito  $ij$ , respectivamente, no nível de demanda  $d$ .  $R_{ij}I_{ij,d}^2$  e  $X_{ij}I_{ij,d}^2$  são as perdas de potências ativa e reativa do circuito  $ij$ , respectivamente, no nível de demanda  $d$ .

### 2.3 Modelo Não Linear para o Problema de Fluxo de Carga

Observando a Figura 2, a queda de tensão em um circuito é definida pela equação (1).

$$\vec{V}_{i,d} - \vec{V}_{j,d} = \vec{I}_{ij,d}(R_{ij} + jX_{ij}) \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (1)$$

em que  $\vec{I}_{ij,d}$  pode ser calculada usando a equação (2).

$$\vec{I}_{ij,d} = \left( \frac{P_{ij,d} + jQ_{ij,d}}{\vec{V}_{j,d}} \right)^* \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (2)$$

A equação (2) é substituída na equação (1) para obter a equação (3).

$$(\vec{V}_{i,d} - \vec{V}_{j,d})\vec{V}_{j,d}^* = (P_{ij,d} - jQ_{ij,d})(R_{ij} + jX_{ij}) \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (3)$$

Considerando que  $\vec{V}_{i,d} = V_{i,d}(\cos\theta_{ij,d} + j\sin\theta_{ij,d})$ ,  $\vec{V}_{j,d} = V_{j,d}(\cos\theta_{ij,d} + j\sin\theta_{ij,d})$  e  $\theta_{ij,d} = \theta_{i,d} - \theta_{j,d}$ , onde  $\theta_{i,d}$  é o ângulo de fase na barra  $i$  no nível de demanda  $d$ . Logo, a equação (3) pode ser escrita como a equação (4).

$$\begin{aligned} V_{i,d}V_{j,d}[\cos\theta_{ij,d} + j\sin\theta_{ij,d}] - V_{j,d}^2 \\ = (P_{ij,d} - jQ_{ij,d})(R_{ij,d} + jX_{ij,d}) \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \end{aligned} \quad (4)$$

Identificando as partes reais e imaginárias na equação (4), temos:

$$V_{i,d}V_{j,d} \cos\theta_{ij,d} = V_{j,d}^2 + (R_{ij}P_{ij,d} + X_{ij}Q_{ij,d}) \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (5)$$

$$V_{i,d}V_{j,d} \sin\theta_{ij,d} = X_{ij}P_{ij,d} - R_{ij}Q_{ij,d} \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (6)$$

Sabendo que  $\sin^2(\theta_{ij,d}) + \cos^2(\theta_{ij,d}) = 1$ ; e somando os quadrados de (5) e (6), temos a equação (7):

$$V_{i,d}^2 - 2(R_{ij}P_{ij,d} + X_{ij}Q_{ij,d}) - Z_{ij}^2 I_{ij,d}^2 - V_{j,d}^2 = 0 \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (7)$$

Em que a magnitude do fluxo de corrente  $I_{ij,d}$  é mostrado na equação (8).

$$I_{ij,d}^2 = \frac{P_{ij,d}^2 + Q_{ij,d}^2}{V_{j,d}^2} \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (8)$$

Em (7) a diferença angular entre as tensões é eliminada, e é possível obter a magnitude da tensão do último nó ( $V_{j,d}$ ) em termos da magnitude da tensão do nó inicial ( $V_{i,d}$ ), do fluxo de potência ativa ( $P_{ij,d}$ ), do fluxo de potência reativa ( $Q_{ij,d}$ ), da magnitude de corrente ( $I_{ij,d}$ ) e dos parâmetros elétricos do ramo  $ij$ . As equações convencionais de balanço de carga são mostradas em (9) e (10), seguindo o apresentado na Figura 2.

$$\sum_{ki \in \Omega_l} P_{ki,d} - \sum_{ij \in \Omega_l} (P_{ij,d} + R_{ij} I_{ij,d}^2) + P_{i,d}^s = P_{i,d}^D \quad \forall i \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (9)$$

$$\sum_{ki \in \Omega_l} Q_{ki,d} - \sum_{ij \in \Omega_l} (Q_{ij,d} + X_{ij} I_{ij,d}^2) + Q_{i,d}^s = Q_{i,d}^D \quad \forall i \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (10)$$

O sistema de equações não lineares das equações (7)-(10) representam a operação em regime permanente de um sistema de distribuição radial e são frequentemente utilizados no método de varredura de FC (CESPEDES, 1990; SHIRMOHAMMADI et al., 1988) e no FC ótimo de um sistema de distribuição radial (SEGURA et al., 2010). No entanto, para dar continuidade a nosso trabalho, é possível calcular este ponto de operação resolvendo um problema de programação não linear.

Utilizando as equações (7)-(10) é possível escrever um modelo de programação não linear, o qual calcula o ponto de operação em regime permanente de um sistema de distribuição radial, conforme mostrado nas equações (11)-(17).

$$\min v = \sum_{d \in \Omega_d} D_d \sum_{ij \in \Omega_l} R_{ij} I_{ij}^{qdr} \quad (11)$$

Sujeito a

$$\sum_{ki \in \Omega_l} P_{ki,d} - \sum_{ij \in \Omega_l} (P_{ij,d} + R_{ij} I_{ij,d}^{qdr}) + P_{i,d}^s = P_{i,d}^D \quad \forall i \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (12)$$

$$\sum_{ki \in \Omega_l} Q_{ki,d} - \sum_{ij \in \Omega_l} (Q_{ij,d} + X_{ij} I_{ij,d}^{qdr}) + Q_{i,d}^s = Q_{i,d}^D \quad \forall i \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (13)$$

$$V_{i,d}^{qdr} - 2(R_{ij} P_{ij,d} + X_{ij} Q_{ij,d}) - Z_{ij}^2 I_{ij,d}^{qdr} - V_{j,d}^{qdr} = 0 \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (14)$$

$$V_{j,d}^{qdr} I_{ij,d}^{qdr} = P_{ij,d}^2 + Q_{ij,d}^2 \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (15)$$

$$\underline{V}^2 \leq V_{i,d}^{qdr} \leq \bar{V}^2 \quad \forall i \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (16)$$

$$0 \leq I_{ij,d}^{qdr} \leq \bar{I}_{ij}^2 \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (17)$$

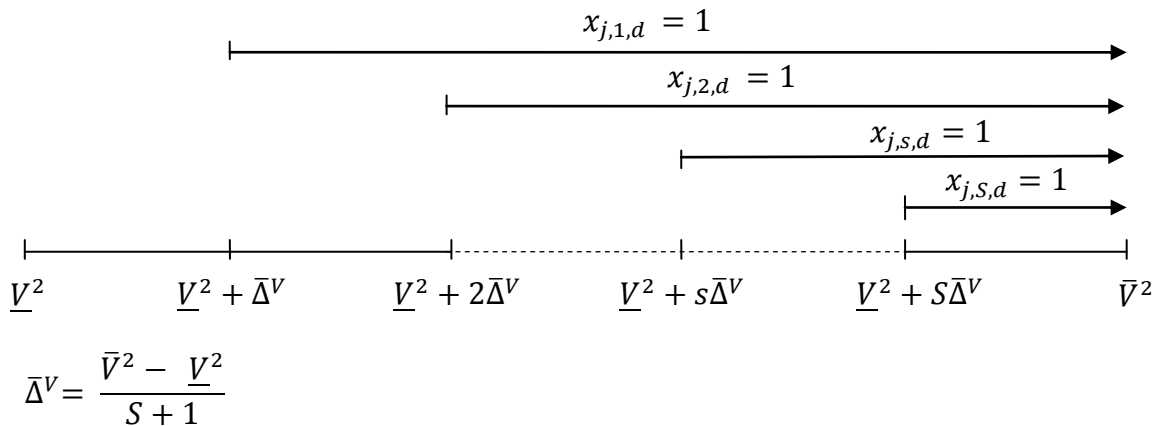
Em que  $V_{i,d}^{qdr}$  e  $I_{ij,d}^{qdr}$  são as variáveis que representam o quadrado da magnitude de tensão no nó  $i$  e o quadrado da magnitude do fluxo de corrente no circuito  $ij$ , respectivamente, nos diferentes níveis de demanda, que são utilizadas para substituir as variáveis  $V_{i,d}^2$  e  $I_{ij,d}^2$  nas equações (7)-(10). Note que (11), (12), (13), (14), (16) e (17) são equações lineares, enquanto (15) é uma equação não linear devido ao produto de  $V_{j,d}^{qdr}$  e  $I_{ij,d}^{qdr}$ , e o quadrado dos fluxos de potência ativa e reativa.

A função objetivo representa a minimização das perdas de energia do sistema.

## 2.4 Linearização

### 2.4.1 Linearização do produto $V_{j,d}^{qdr} I_{ij,d}^{qdr}$

Como visto a variável  $V_{j,d}^{qdr}$  está compreendida entre os valores mínimo  $\underline{V}^2$  e máximo  $\bar{V}^2$ . O membro esquerdo de (15) é linearizado pela discretização de  $V_{j,d}^{qdr}$  usando a variável binária  $x_{j,s,d} \forall s = 1 \dots S$ . Se  $V_{j,d}^{qdr}$  é maior que  $\underline{V}^2 + s\bar{\Delta}^V$  temos que  $x_{j,s,d} = 1$ , como mostrado na Figura 3. Note que  $s$  indica o intervalo de discretização no qual se encontra  $V_{j,d}^{qdr}$ . Esta condição é modelada em (18) mostrando como as variáveis  $x_{j,s,d}$  são calculadas.

**Figura 3** — Discretização do quadrado da magnitude da tensão

Fonte: Dados da pesquisa do autor

$$\left. \begin{aligned}
 \underline{V}^2 + \sum_{s=1}^S (x_{j,s,d} \bar{\Delta}^V) \leq V_{j,d}^{qdr} \leq \underline{V}^2 + \bar{\Delta}^V + \sum_{s=1}^S (x_{j,d,s} \bar{\Delta}^V) \quad \forall j \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (a) \\
 x_{j,s,d} \leq x_{j,s-1,d} \quad \forall j \in \Omega_b, s = 2 \dots S, \forall d \in \Omega_d \quad (b) \\
 x_{j,s,d} \in \{0,1\} \quad \forall j \in \Omega_b, s = 1 \dots S, \forall d \in \Omega_d \quad (c)
 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Na equação (19) tem-se uma primeira aproximação de  $V_{j,d}^{qdr}$ , que é igual ao ponto médio do primeiro intervalo de discretização mais a soma do limite máximo do passo de discretização.

$$V_{j,d}^{qdr} = \left( \underline{V}^2 + \frac{1}{2} \bar{\Delta}^V \right) + \sum_{s=1}^S (x_{j,s,d} \bar{\Delta}^V) \quad \forall j \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (19)$$

Assim, o produto  $V_{j,d}^{qdr} I_{ij,d}^{qdr}$  é calculado a partir da equação (19) como mostrado na equação (20).

$$V_{j,d}^{qdr} I_{ij,d}^{qdr} = \left( \underline{V}^2 + \frac{1}{2} \bar{\Delta}^V \right) I_{ij,d}^{qdr} + \sum_{s=1}^S (x_{j,s,d} \bar{\Delta}^V I_{ij,d}^{qdr}) \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (20)$$

Considerando o termo não linear das correções de potências sucessivas  $x_{j,s,d} \bar{\Delta}^V I_{ij,d}^{qdr} = P_{j,s,d}^c$ , temos (21).

$$V_{j,d}^{qdr} I_{ij,d}^{qdr} = \left( \underline{V}^2 + \frac{1}{2} \bar{\Delta}^V \right) I_{ij,d}^{qdr} + \sum_{s=1}^S P_{j,s,d}^c \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (21)$$

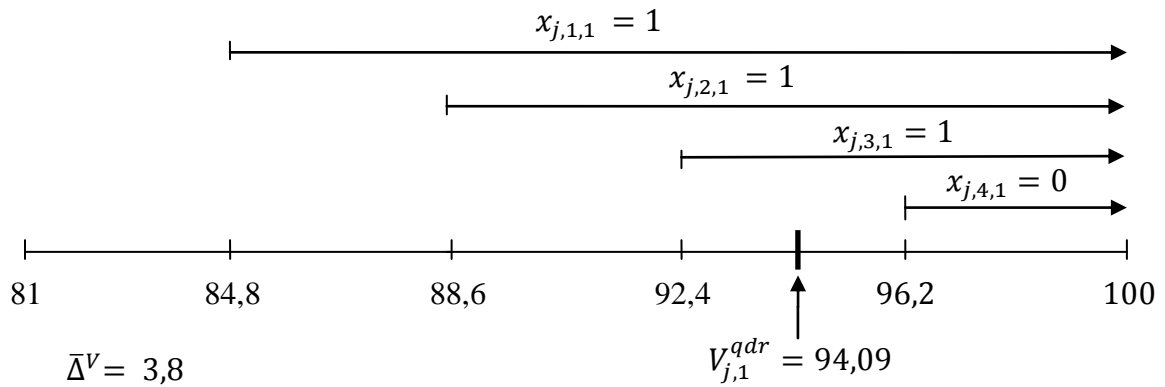
$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \bar{\Delta}^V I_{ij,d}^{qdr} - P_{j,s,d}^c &\leq \bar{\Delta}^V \bar{I}_{ij}^2 (1 - x_{j,s,d}) & \forall ij \in \Omega_l, s = 1 \dots S, \forall d \in \Omega_d (a) \\ 0 \leq P_{j,s,d}^c &\leq \bar{\Delta}^V \bar{I}_{ij}^2 x_{j,s,d} & \forall ij \in \Omega_l, s = 1 \dots S, \forall d \in \Omega_d (b) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

A equação (21) é a aproximação linear do produto de  $V_{j,d}^{qdr}$  e  $I_{ij,d}^{qdr}$ . A equação (22) define os valores de  $P_{j,s,d}^c, \forall ij \in \Omega_l, s = 1 \dots S, \forall d \in \Omega_d$ . Se  $x_{j,s,d} = 0$  então  $P_{j,s,d}^c = 0$  e  $0 \leq I_{ij,d}^{qdr} \leq \bar{I}_{ij}^2$ ; caso contrário  $P_{j,s,d}^c = \bar{\Delta}^V I_{ij,d}^{qdr}$  e  $0 \leq P_{j,s,d}^c \leq \bar{\Delta}^V \bar{I}_{ij}^2$ , em que  $\bar{\Delta}^V \bar{I}_{ij}^2$  proporciona um grau suficiente de liberdade para  $P_{j,s,d}^c$ .

#### Exemplo ilustrativo

Considere os seguintes dados:  $V_{j,1} = 9,7 \text{ kV}$ ;  $I_{ij,1} = 250 \text{ A}$ ;  $\underline{V} = 9 \text{ kV}$ ;  $\bar{V} = 10 \text{ kV}$  e  $S = 4$ . Assim:  $V_{j,1}^{qdr} = 94,09 \text{ kV}^2$ ;  $I_{ij,1}^{qdr} = 62500 \text{ A}$  e  $\bar{\Delta}^V = 3,8 \text{ kV}^2$ . Na Figura 4 está o exemplo ilustrativo da discretização do quadrado da magnitude da tensão.

**Figura 4** — Exemplo ilustrativo da discretização do quadrado da magnitude da tensão



Fonte: Dados da pesquisa do autor

Da equação (18) podemos encontrar os valores das variáveis binárias  $x_{j,s}$ .

$$x_{j,1,1} = x_{j,2,1} = x_{j,3,1} = 1 \text{ e } x_{j,4,1} = 0$$

Da equação (22) podemos encontrar os valores de  $P_{j,s}^c$ .

$$P_{j,1,1}^c = P_{j,2,1}^c = P_{j,3,1}^c = 237500 \text{ e } P_{j,4,1}^c = 0$$

Assim da equação (19) conclui-se que:

$$(\underline{V}^2 + \frac{1}{2}\bar{\Delta}^V) I_{ij}^{qdr} + \sum_{s=1}^4 P_{j,s,1}^c = (81 + \frac{1}{2}3,8)62500 + 237500 + 237500 + 237500 + 0$$

$$\left(\underline{V}^2 + \frac{1}{2}\bar{\Delta}V\right) I_{ij,1}^{qdr} + \sum_{s=1}^4 P_{j,s,1}^c = 5893750 VA^2$$

Sendo o valor exato de:

$$V_{j,1}^{qdr} I_{ij,1}^{qdr} = (94,09)62500 = 5880625 VA^2$$

Do exemplo ilustrativo foi observado que o resultado da aproximação linear de  $V_{j,1}^{qdr} I_{ij,1}^{qdr}$  tem um erro de 0,22% quando é comparado com o valor exato. Este erro pode ser reduzido aumentando o valor de  $S$ .

#### 2.4.2 Linearização do termo quadrático $P_{ij,d}^2 + Q_{ij,d}^2$

O membro direito de (15) é linearizado como descrito em (FRANCO, 2013) e definido nas equações (23) e (24).

$$P_{ij,d}^2 + Q_{ij,d}^2 = \sum_{y=1}^Y m_{ij,y}^S \Delta_{ij,y,d}^P + \sum_{y=1}^Y m_{ij,y}^S \Delta_{ij,y,d}^Q \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} P_{ij,d} &= \sum_{y=1}^Y \Delta_{ij,y,d}^P && \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (a) \\ Q_{ij,d} &= \sum_{y=1}^Y \Delta_{ij,y,d}^Q && \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (b) \\ 0 \leq \Delta_{ij,y,d}^P &\leq \bar{\Delta}_{ij}^S && \forall ij \in \Omega_l, y = 1 \dots Y, \forall d \in \Omega_d \quad (c) \\ 0 \leq \Delta_{ij,y,d}^Q &\leq \bar{\Delta}_{ij}^S && \forall ij \in \Omega_l, y = 1 \dots Y, \forall d \in \Omega_d \quad (d) \\ 0 \leq P_{ij,d} &&& \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (e) \\ 0 \leq Q_{ij,d} &&& \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (f) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Em que

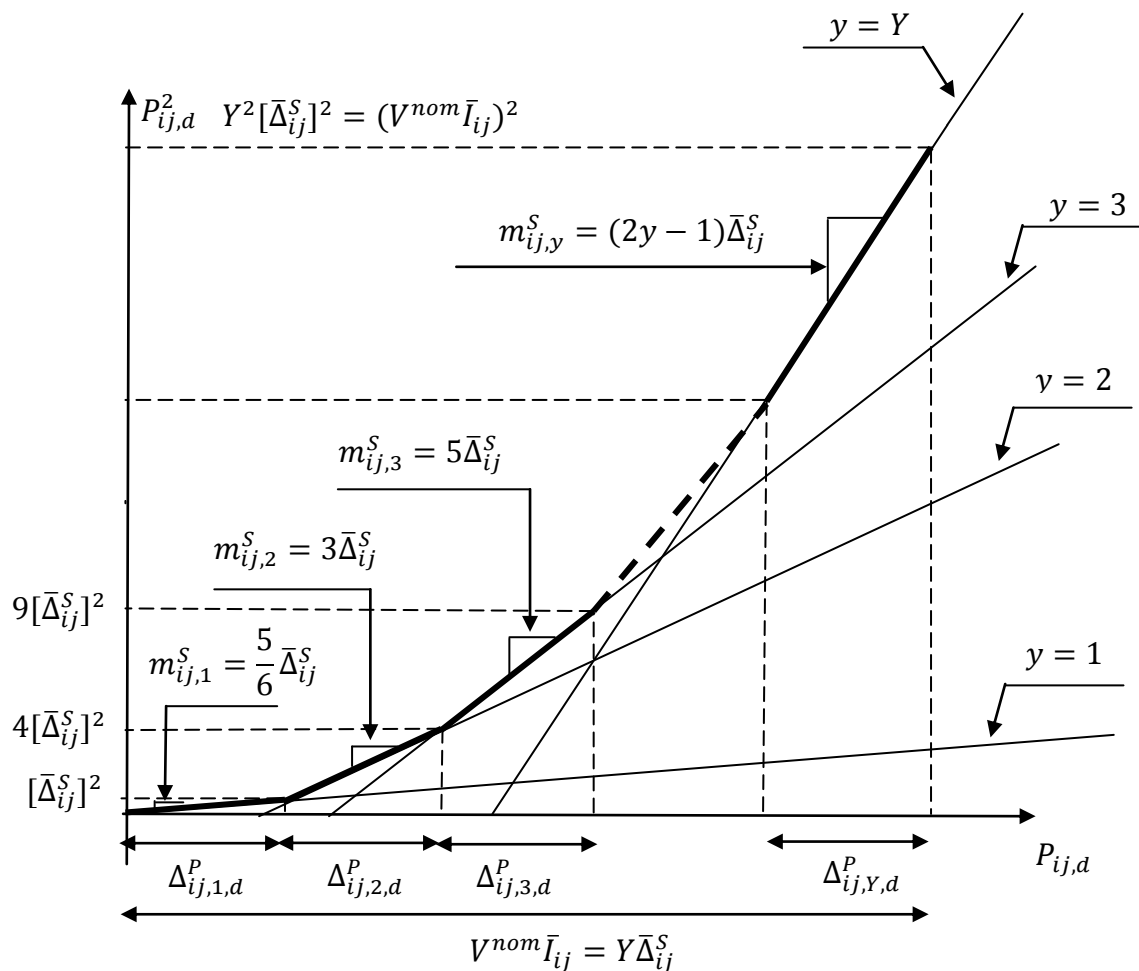
$$m_{ij,y}^S = \frac{5}{6} \bar{\Delta}_{ij}^S \quad \forall ij \in \Omega_l, y = 1$$

$$m_{ij,y}^S = (2y - 1) \bar{\Delta}_{ij}^S \quad \forall ij \in \Omega_l, y = 2 \dots Y$$

$$\bar{\Delta}_{ij}^S = \frac{V^{nom} \bar{I}_{ij}}{Y} \quad \forall ij \in \Omega_l$$

Note que as equações (23) e (24) são um conjunto de expressões lineares do membro direito da equação (15); e  $m_{ij,y}^S$  e  $\bar{\Delta}_{ij}^S$  são parâmetros constantes. A linearização de  $P_{ij,d}^2$  é mostrado na Figura 5. As expressões  $\sum_{y=1}^Y m_{ij,y}^S \Delta_{ij,y,d}^P$  e  $\sum_{y=1}^Y m_{ij,y}^S \Delta_{ij,y,d}^Q$  são as aproximações lineares de  $P_{ij,d}^2$  e  $Q_{ij,d}^2$ , respectivamente. As equações (24.a) e (24.b) afirmam que  $P_{ij,d}$  e  $Q_{ij,d}$  são iguais a soma dos valores em cada bloco da discretização, respectivamente. As equações (24.c) e (24.d) definem os limites superiores e inferiores da contribuição de cada bloco de  $P_{ij,d}$  e  $Q_{ij,d}$ , respectivamente.

**Figura 5** — Ilustração da modelagem linear por partes da função  $P_{ij,d}^2$



Fonte: Dados da pesquisa do autor.

É importante destacar que os valores dos blocos da discretização  $\Delta_{ij,y,d}^P$  e  $\Delta_{ij,y,d}^Q$  devem ser preenchidos de forma sequencial em função do valor de  $y$  (considerado do valor menor para o maior). Esta condição pode ser garantida pela minimização de  $P_{ij}^2$  e  $Q_{ij}^2$  de

forma implícita ou explícita. Podemos observar que nas equações (11)-(17) do problema,  $P_{ij}^2 + Q_{ij}^2$  é minimizada de forma implícita, de acordo com a função objetivo (11) e a equação (15), considerando circuitos com valores de  $R_{ij}$  diferentes de zero.

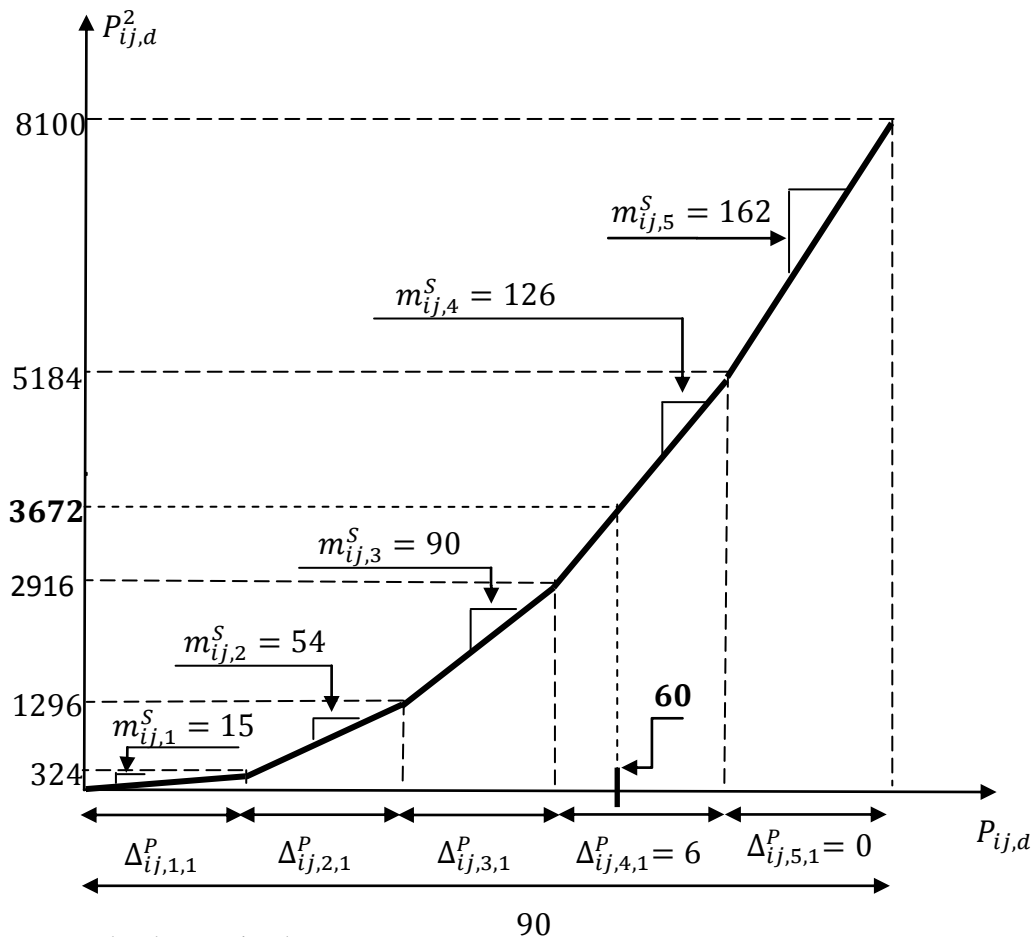
#### Exemplo ilustrativo

Considere os seguintes dados:  $P_{ij,1} = 60 \text{ kW}$ ,  $V^{nom} \bar{I}_{ij} = 90 \text{ kVA}$  e  $Y = 5$ .

Assim, podemos obter:  $\bar{\Delta}_{ij}^S = 18 \text{ kVA}$  e os valores de  $m_{ij,y}^S$ .

$$m_{ij,1}^S = 15, \quad m_{ij,2}^S = 54, \quad m_{ij,3}^S = 90, \quad m_{ij,4}^S = 126, \quad m_{ij,5}^S = 162$$

**Figura 6** — Exemplo ilustrativo da modelagem linear por partes da função  $P_{ij,d}^2$



Na Figura 6 é mostrado o exemplo ilustrativo da modelagem linear por partes da função  $P_{ij,d}^2$ . Da equação (22) podemos encontrar os valores das variáveis  $\Delta_{ij,y,d}^P$ .

$$\Delta_{ij,1,1}^P = \Delta_{ij,2,1}^P = \Delta_{ij,3,1}^P = 18, \quad \Delta_{ij,4,1}^P = 6 \text{ e } \Delta_{ij,5,1}^P = 0$$

Assim da equação (21) conclui-se que:

$$\sum_{y=1}^Y m_{ij,y}^S \Delta_{ij,y,d}^P = (15)18 + (54)18 + (90)18 + (126)6 + (162)0$$

$$\sum_{y=1}^Y m_{ij,y}^S \Delta_{ij,y,d}^P = 3618 \text{ kW}^2$$

Sendo o valor exato de:

$$P_{ij,d}^2 = (60)60 = 3600 \text{ kW}^2$$

Do exemplo ilustrativo foi observado que o resultado da modelagem linear por partes da função  $P_{ij,d}^2$  tem um erro de 0,5% quando é comparada com o valor exato. Este erro pode ser reduzido aumentando o valor de Y.

## 2.5 Modelo Linear Inteiro Misto

O ponto de operação em regime permanente de um sistema de distribuição radial pode ser calculado usando um problema linear inteiro misto como mostrado nas equações seguintes.

$$\min v = \sum_{d \in \Omega_d} D_d \sum_{ij \in \Omega_l} R_{ij} I_{ij}^{qdr} \quad (25)$$

Sujeito a

$$\sum_{ki \in \Omega_l} P_{ki,d} - \sum_{ij \in \Omega_l} (P_{ij,d} + R_{ij} I_{ij}^{qdr}) + P_{i,d}^S = P_{i,d}^D \quad \forall i \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (26)$$

$$\sum_{ki \in \Omega_l} Q_{ki,d} - \sum_{ij \in \Omega_l} (Q_{ij,d} + X_{ij} I_{ij}^{qdr}) + Q_{i,d}^S = Q_{i,d}^D \quad \forall i \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (27)$$

$$V_{i,d}^{qdr} - 2(R_{ij} P_{ij,d} + X_{ij} Q_{ij,d}) - Z_{ij}^2 I_{ij}^{qdr} - V_{j,d}^{qdr} = 0 \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (28)$$

$$\left( \underline{V}^2 + \frac{1}{2} \overline{\Delta V} \right) I_{ij,d}^{qdr} + \sum_{s=1}^S P_{j,s,d}^c = \sum_{y=1}^Y m_{ij,y}^S \Delta_{ij,y,d}^P + \sum_{y=1}^Y m_{ij,y}^S \Delta_{ij,y,d}^Q \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (29)$$

$$P_{ij,d} = \sum_{y=1}^Y \Delta_{ij,y,d}^P \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (30)$$

$$Q_{ij,d} = \sum_{y=1}^Y \Delta_{ij,y,d}^Q \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (31)$$

$$\underline{V}^2 + \sum_{s=1}^S (x_{j,s,d} \bar{\Delta}^V) \leq V_{j,d}^{qdr} \leq \underline{V}^2 + \bar{\Delta}^V + \sum_{s=1}^S (x_{j,s,d} \bar{\Delta}^V) \quad \forall j \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (32)$$

$$0 \leq \bar{\Delta}^V I_{ij,d}^{qdr} - P_{j,s,d}^c \leq \bar{\Delta}^V \bar{I}_{ij}^{-2} (1 - x_{j,s,d}) \quad \forall ij \in \Omega_l, s = 1 \dots S, \forall d \in \Omega_d \quad (33)$$

$$0 \leq P_{j,s,d}^c \leq \bar{\Delta}^V \bar{I}_{ij}^{-2} x_{j,s,d} \quad \forall ij \in \Omega_l, s = 1 \dots S, \forall d \in \Omega_d \quad (34)$$

$$\underline{V}^2 \leq V_{i,d}^{qdr} \leq \bar{V}^2 \quad \forall i \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (35)$$

$$0 \leq I_{ij,d}^{qdr} \leq \bar{I}_{ij}^{-2} \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (36)$$

$$x_{j,s,d} \leq x_{j,s-1,d} \quad \forall j \in \Omega_b, s = 2 \dots S, \forall d \in \Omega_d \quad (37)$$

$$0 \leq \Delta_{ij,y,d}^P \leq \bar{\Delta}_{ij}^S \quad \forall ij \in \Omega_l, y = 1 \dots Y, \forall d \in \Omega_d \quad (38)$$

$$0 \leq \Delta_{ij,y,d}^Q \leq \bar{\Delta}_{ij}^S \quad \forall ij \in \Omega_l, y = 1 \dots Y, \forall d \in \Omega_d \quad (39)$$

$$0 \leq P_{ij,d} \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (40)$$

$$0 \leq Q_{ij,d} \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (41)$$

$$x_{j,s,d} \in \{0,1\} \quad \forall j \in \Omega_b, s = 1 \dots S, \forall d \in \Omega_d \quad (42)$$

A equação (29) é obtida através da igualdade entre os membros direitos das equações (21) e (23). As equações (29)-(34) e (37)-(42) substituem a equação (15). Note que, teve um aumento no número de variáveis contínuas e o aparecimento de variáveis binárias devido à linearização. Este tipo de problema de otimização pode ser resolvido com a ajuda de “solvers” comerciais.

Considerando as hipóteses da subseção 2.2, o modelo linear inteiro misto pode ser utilizado para modelar outros problemas de otimização de sistemas de distribuição radiais usando expressões lineares e resolvê-las utilizando técnicas de otimização clássica (como por exemplo, um algoritmo de “*Branch and Bound*”).

## 2.6 Programação Cônica

Problemas de programação cônica podem ser vistos como uma generalização dos problemas de programação linear, e um caso particular é a programação cônica de segunda ordem (SOCP – Second-Order Cone Programming), também conhecido como cones de Lorentz. Estes são problemas convexos de otimização, em que uma função objetivo linear é

minimizada sobre restrições lineares e restrições de cone quadrático, ou seja, o problema de otimização cônica é um problema de otimização linear mais uma restrição da forma:

$$x \in C$$

em que  $C$  é um cone convexo.

Cones convexos são os principais itens envolvidos na otimização cônica, cuja definição é:

Um conjunto  $C$  é um cone se, e somente se:

- ele é fechado sob um escalar multiplicativo não negativo, ou seja,

$$x \in C \Rightarrow \lambda x \in C \text{ para todo } \lambda \in \mathfrak{R}^+$$

- ele é fechado sob a adição,

$$x \in C \text{ e } y \in C \Rightarrow x + y \in C$$

- ele possui o elemento nulo,

$$C \cap -C = \{0\}, \text{ onde } -C \text{ significa o conjunto } \{x \mid -x \in C\}$$

Abaixo estão representadas algumas formas de cones convexos.

- $C = \{x \in \mathfrak{R}^n\}$
- $C = \left\{x \in \mathfrak{R}^n: x_1 \geq \sqrt{\sum_{j=2}^n x_j^2}\right\}$
- $C = \{x \in \mathfrak{R}^n: 2x_1x_2 \geq \sum_{j=3}^n x_j^2, x_1, x_2 \geq 0\}$

Embora esses cones pareçam limitados eles podem ser usados para modelar diversos tipos de problemas. Através de manipulações algébricas os problemas de programação linear robusta, programação quadrática, por exemplo, são reformulados como um problema SOCP podendo ser otimizados com maior eficiência. Existem muitos problemas de otimização cônica na literatura científica, por exemplo, o problema clássico de Fermat-Weber (minimização de soma de normas) e otimização de portfólios.

Pela importância e aplicabilidade do problema SOCP há softwares específicos para sua resolução, como por exemplo, o CVXOPT e o SeDuMi e os *solvers* comerciais CPLEX e MOSEK.

## 2.7 Modelo Cônico de Segunda Ordem

O ponto de operação em regime permanente de um sistema de distribuição radial pode também ser calculado usando um problema de programação cônico de segunda ordem, como mostrado nas equações seguintes.

$$\min v = \sum_{d \in \Omega_d} D_d \sum_{ij \in \Omega_l} R_{ij} I_{ij}^{qdr} \quad (43)$$

Sujeito a

$$\sum_{ki \in \Omega_l} P_{ki,d} - \sum_{ij \in \Omega_l} (P_{ij,d} + R_{ij} I_{ij,d}^{qdr}) + P_{i,d}^s = P_{i,d}^D \quad \forall i \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (44)$$

$$\sum_{ki \in \Omega_l} Q_{ki,d} - \sum_{ij \in \Omega_l} (Q_{ij,d} + X_{ij} I_{ij,d}^{qdr}) + Q_{i,d}^s = Q_{i,d}^D \quad \forall i \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (45)$$

$$V_{i,d}^{qdr} - 2(R_{ij} P_{ij,d} + X_{ij} Q_{ij,d}) - Z_{ij}^2 I_{ij,d}^{qdr} - V_{j,d}^{qdr} = 0 \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (46)$$

$$V_{j,d}^{qdr} I_{ij,d}^{qdr} \geq P_{ij,d}^2 + Q_{ij,d}^2 \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (47)$$

$$\underline{V}^2 \leq V_{i,d}^{qdr} \leq \bar{V}^2 \quad \forall i \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (48)$$

$$0 \leq I_{ij,d}^{qdr} \leq \bar{I}_{ij}^2 \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (49)$$

Este é um problema cônico convexo que pode ser resolvido com o solver comercial CPLEX com o objetivo de encontrar o ótimo global. O modelo é simples, funcional e não possui acréscimo de variáveis contínuas, variáveis binárias e nem restrições, tornando-o mais rápido computacionalmente do que o modelo linear inteiro misto mostrado em (25)-(42).

Para mostrar a equivalência entre os modelos não linear (11)-(17) e cônico de segunda ordem (43)-(49), precisamos demonstrar que no ponto ótimo do problema (43)-(49), a restrição cônica (47) está ativa e é igual à restrição (15) do problema não linear. Para esta demonstração vamos utilizar as condições de otimalidade de primeira ordem de Karush–Kuhn–Tucker.

### Demonstração

Devido à: 1) característica de operação radial dos sistemas de distribuição; 2) não negatividade das variáveis  $V_i^{qdr}$  e  $I_{ij}^{qdr}$ ; e 3) relação entre as variáveis  $V_j^{qdr}$ ,  $I_{ij}^{qdr}$ ,  $P_{ij}$  e  $Q_{ij}$  para cada linha  $ij$ , é possível substituir a restrição (15) pela restrição cônica de segunda ordem

(47). Pode-se mostrar que no ponto de solução do problema (43)-(49), a restrição (47) está ativa e é igual à restrição (15).

Seja o problema de programação não linear dado em (50)-(54).

$$\text{Min } v = \sum_{ij \in \Omega_l} R_{ij} I_{ij}^{qdr} \quad (50)$$

Sujeito a

$$\sum_{ki \in \Omega_l} P_{ki} - \sum_{ij \in \Omega_l} (P_{ij} + R_{ij} I_{ij}^{qdr}) + P_i^s - P_i^D = 0 \quad : \varphi_i \quad \forall i \in \Omega_b \quad (51)$$

$$\sum_{ki \in \Omega_l} Q_{ki} - \sum_{ij \in \Omega_l} (Q_{ij} + X_{ij} I_{ij}^{qdr}) + Q_i^s - Q_i^D = 0 \quad : \omega_i \quad \forall i \in \Omega_b \quad (52)$$

$$V_i^{qdr} - 2(R_{ij} P_{ij} + X_{ij} Q_{ij}) - Z_{ij}^2 I_{ij}^{qdr} - V_j^{qdr} = 0 \quad : \pi_{ij} \quad \forall ij \in \Omega_l \quad (53)$$

$$V_j^{qdr} I_{ij}^{qdr} \geq P_{ij}^2 + Q_{ij}^2 \quad : \rho_{ij} \quad \forall ij \in \Omega_l \quad (54)$$

Em que  $\varphi_i$ ,  $\omega_i$ ,  $\pi_{ij}$  e  $\rho_{ij}$  são as variáveis duais das respectivas restrições. O objetivo é mostrar que no ponto de solução do problema (50)-(54) a restrição (54) deve estar ativa ( $V_j^{qdr} I_{ij}^{qdr} = P_{ij}^2 + Q_{ij}^2$ ). A função lagrangeana  $\mathcal{L}$  do problema (50)-(54) é definida como (55):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_{ij \in \Omega_l} R_{ij} I_{ij}^{qdr} + \sum_{i \in \Omega_b} \varphi_i \left( \sum_{ki \in \Omega_l} P_{ki} - \sum_{ij \in \Omega_l} (P_{ij} + R_{ij} I_{ij}^{qdr}) + P_i^s - P_i^D \right) \\ & + \sum_{i \in \Omega_b} \omega_i \left( \sum_{ki \in \Omega_l} Q_{ki} - \sum_{ij \in \Omega_l} (Q_{ij} + X_{ij} I_{ij}^{qdr}) + Q_i^s - Q_i^D \right) \\ & + \sum_{ij \in \Omega_l} \pi_{ij} (V_i^{qdr} - 2(R_{ij} P_{ij} + X_{ij} Q_{ij}) - Z_{ij}^2 I_{ij}^{qdr} - V_j^{qdr}) \\ & + \sum_{ij \in \Omega_l} \rho_{ij} (P_{ij}^2 + Q_{ij}^2 - V_j^{qdr} I_{ij}^{qdr}) \end{aligned} \quad (55)$$

A solução do problema (50)-(54) pode ser calculada como o ponto estacionário da função lagrangeana. As Condições Necessárias de Otimalidade de Primeira Ordem (CNOPO) de Karush–Kuhn–Tucker são:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dI_{ij}^{qdr}} = R_{ij} - R_{ij}\varphi_i - X_{ij}\omega_i - Z_{ij}^2\pi_{ij} - \rho_{ij}V_j^{qdr} = 0 \quad \forall ij \in \Omega_t \quad (56)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dP_i^s} = \varphi_i = 0 \quad \forall i \in SE \quad (57)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dQ_i^s} = \omega_i = 0 \quad \forall i \in SE \quad (58)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dP_{ij}} = -\varphi_i + \varphi_j - 2R_{ij}\pi_{ij} + 2\rho_{ij}P_{ij} = 0 \quad \forall ij \in \Omega_t \quad (59)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dQ_{ij}} = -\omega_i + \omega_j - 2X_{ij}\pi_{ij} + 2\rho_{ij}Q_{ij} = 0 \quad \forall ij \in \Omega_t \quad (60)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dV_i^{qdr}} = \sum_{j \in \Omega_{b_i}^+} \pi_{ij} - \pi_{ki} - \rho_{ki}I_{ki}^{qdr} = 0 \quad \forall i \in \Omega_b \quad (61)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\varphi_i} = \sum_{ki \in \Omega_t} P_{ki} - \sum_{ij \in \Omega_t} (P_{ij} + R_{ij}I_{ij}^{qdr}) + P_i^s - P_i^D = 0 \quad \forall i \in \Omega_b \quad (62)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\omega_i} = \sum_{ki \in \Omega_t} Q_{ki} - \sum_{ij \in \Omega_t} (Q_{ij} + X_{ij}I_{ij}^{qdr}) + Q_i^s - Q_i^D = 0 \quad \forall i \in \Omega_b \quad (63)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\pi_{ij}} = V_i^{qdr} - 2(R_{ij}P_{ij} + X_{ij}Q_{ij}) - Z_{ij}^2I_{ij}^{qdr} - V_j^{qdr} = 0 \quad \forall ij \in \Omega_t \quad (64)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\rho_{ij}} \rightarrow (P_{ij}^2 + Q_{ij}^2 - V_j^{qdr}I_{ij}^{qdr} = 0 \text{ e } \rho_{ij} > 0) \text{ ou} \quad \forall ij \in \Omega_t \quad (65)$$

$$(0 > P_{ij}^2 + Q_{ij}^2 - V_j^{qdr}I_{ij}^{qdr} \text{ e } \rho_{ij} = 0)$$

A restrição (65) representa as restrições de complementaridade do problema, e depende se (54) está ativa ( $P_{ij}^2 + Q_{ij}^2 - V_j^{qdr}I_{ij}^{qdr} = 0$ ) ou inativa ( $0 > P_{ij}^2 + Q_{ij}^2 - V_j^{qdr}I_{ij}^{qdr}$ ) na solução do problema (50)-(54).

Usando (61) pode-se escrever uma expressão para  $\pi_{ki}$  em função das variáveis associadas aos circuitos que estão na jusante do circuito  $ki$ .

$$\pi_{ki} = \sum_{j \in \Omega_{b_i}^+} \pi_{ij} - \rho_{ki}I_{ki}^{qdr} \quad \forall i \in \Omega_b \quad (66)$$

Sabendo que para um nó terminal  $i$  não existem circuitos  $ij$ , então  $\pi_{ki} = -\rho_{ki}I_{ki}^{qdr}$ . Assim pode-se expressar  $\pi_{ki}$  em termos das variáveis  $\rho_{mn}$  correspondentes aos circuitos que ficam na jusante do nó  $k$  ( $\Omega_{F_k}$ ).

$$\pi_{ki} = - \sum_{mn \in \Omega_{F_k}} I_{mn}^{qdr} \rho_{mn} \quad \forall i \in \Omega_b \quad (67)$$

De (57) e (58) se sabe que  $\varphi_i$  e  $\omega_i$  são iguais à zero na subestação, assim usando (59) e (60) pode-se escrever uma relação recursiva para expressar as variáveis  $\varphi_j$  e  $\omega_j$ :

$$\varphi_j = \varphi_i + 2R_{ij}\pi_{ij} - 2\rho_{ij}P_{ij} \quad \forall ij \in \Omega_l \quad (68)$$

$$\omega_j = \omega_i + 2X_{ij}\pi_{ij} - 2\rho_{ij}Q_{ij} \quad \forall ij \in \Omega_l \quad (69)$$

Usando a relação (67),  $\varphi_j$  e  $\omega_j$  podem ser escritas em função das variáveis associadas aos nós que estão na montante do nó  $j$  ( $\Omega_{B_j}$ ).

$$\varphi_j = -2 \sum_{hk \in \Omega_{B_j}} \left[ R_{hk} \left( \sum_{mn \in \Omega_{F_h}} I_{mn}^{qdr} \rho_{mn} \right) - P_{hk} \rho_{hk} \right] \quad \forall ij \in \Omega_l \quad (70)$$

$$\omega_j = -2 \sum_{hk \in \Omega_{B_j}} \left[ X_{hk} \left( \sum_{mn \in \Omega_{F_h}} I_{mn}^{qdr} \rho_{mn} \right) - Q_{hk} \rho_{hk} \right] \quad \forall ij \in \Omega_l \quad (71)$$

A equação (56) pode ser escrita como:

$$R_{ij} = V_j^{qdr} \rho_{ij} + Z_{ij}^2 \pi_{ij} + R_{ij} \varphi_i + X_{ij} \omega_i \quad \forall ij \in \Omega_l \quad (72)$$

Usando as equações (67), (70) e (71) tem-se:

$$\begin{aligned} R_{ij} = & V_j^{qdr} \rho_{ij} - Z_{ij}^2 \sum_{mn \in \Omega_{F_i}} I_{mn}^{qdr} \rho_{mn} \\ & - 2R_{ij} \sum_{hk \in \Omega_{B_i}} \left[ R_{hk} \left( \sum_{mn \in \Omega_{F_h}} I_{mn}^{qdr} \rho_{mn} \right) - P_{hk} \rho_{hk} \right] \\ & - 2X_{ij} \sum_{hk \in \Omega_{B_i}} \left[ X_{hk} \left( \sum_{mn \in \Omega_{F_h}} I_{mn}^{qdr} \rho_{mn} \right) - Q_{hk} \rho_{hk} \right] \end{aligned} \quad \forall ij \in \Omega_l \quad (73)$$

Assumindo que existe uma solução para o problema (50)-(54) e que os fluxos de potência, as magnitudes de tensões e de correntes do sistema correspondem a essa solução, as equações (73) representam um sistema de equações lineares para as variáveis  $\rho_{ij}$ . Esse

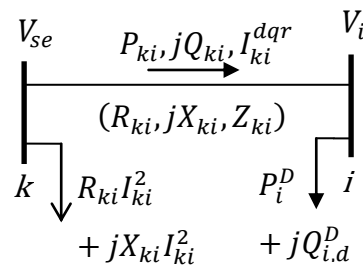
sistema é diagonalmente dominante devido a que o fator  $V_j^{qdr}$  associado a  $\rho_{ij}$  é muito maior que os demais coeficientes.

Além disso, pode-se mostrar que os coeficientes acima da diagonal do sistema de equações (73) são negativos, já que os fluxos de potência (os únicos que poderiam deixar o coeficiente positivo se esses fluxos são negativos) somente aparecem em nós na montante do nó  $i$ . Nesse caso, os coeficientes abaixo da diagonal são positivos.

O sistema pode ser escalonado para que corresponda a uma matriz triangular superior com os elementos fora da diagonal negativos. Como os termos independentes  $R_{ij}$  são positivos, a única forma em que o sistema apresenta solução é que as variáveis  $\rho_{ij}$  sejam maiores que zero. Dessa forma a restrição (54) está ativa e  $V_j^{qdr} I_{ij}^{qdr} = P_{ij}^2 + Q_{ij}^2, \forall ij \in \Omega_l$ .

Exemplo ilustrativo 1. Seja o sistema ilustrativo mostrado na Figura 7.

**Figura 7** — Sistema de 2 nós e 1 circuito



Fonte: Dados da pesquisa do autor

O problema de programação não linear (74)-(76) é dado por:

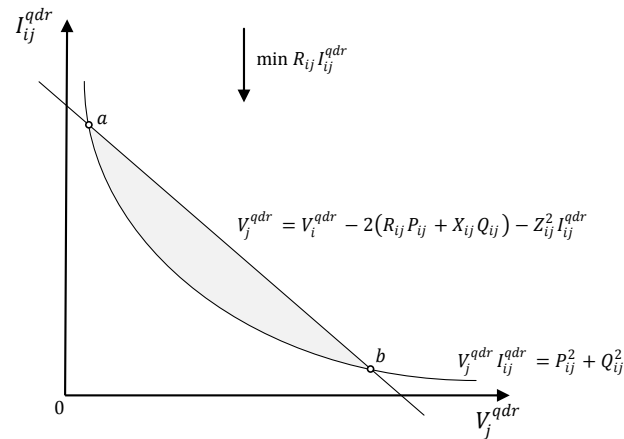
$$\min v = R_{ki} I_{ki}^{qdr} \quad (74)$$

Sujeito a

$$V_{se}^{qdr} - 2(R_{ki} P_i^D + X_{ki} Q_i^D) - Z_{ki}^2 I_{ki}^{qdr} - V_i^{qdr} = 0 \quad (75)$$

$$V_i^{qdr} I_{ki}^{qdr} \geq P_i^{D^2} + Q_i^{D^2} \quad (76)$$

A solução do problema (74)-(76) pode ser obtida graficamente, como mostrada na Figura 8.

**Figura 8** — Solução ótima

Fonte: Dados da pesquisa do autor

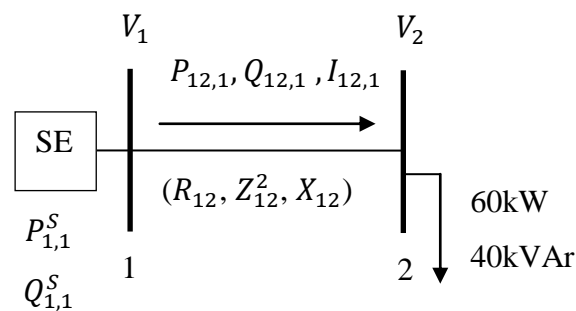
A área sombreada é a região factível do problema definida pelas restrições (75)-(76). A solução do problema (74)-(76) é dado pelo ponto *b* da Figura 8 e a restrição (76) está ativa.

Exemplo ilustrativo 2. Exemplo numérico usando o modelo cônico de segunda ordem.

Dado um sistema de dois nós. Considere os seguintes dados:

$$V_{1,1} = 12,66\text{kV}; R_{12} = 0,4 \Omega; Z_{12}^2 = 0,2 \Omega \text{ e } X_{12} = 0,2 \Omega.$$

O sistema exemplificado está representado na Figura 9.

**Figura 9** — Exemplo numérico do sistema de dois nós

Fonte: Dados da pesquisa do autor

Substituindo os valores dados no modelo cônico de segunda ordem, temos:

$$\min v = 0,4 I_{12,1}^{qdr}$$

$$P_{12,1} = 60$$

$$Q_{12,1} = 40$$

$$12,66^2 - 2(0,4P_{12,1} + 0,2Q_{12,1}) - 0,2I_{12,1}^{qdr} - V_{2,1}^{qdr} = 0$$

$$V_{2,1}^{qdr} I_{12,1}^{qdr} \geq P_{12,1}^2 + Q_{12,1}^2$$

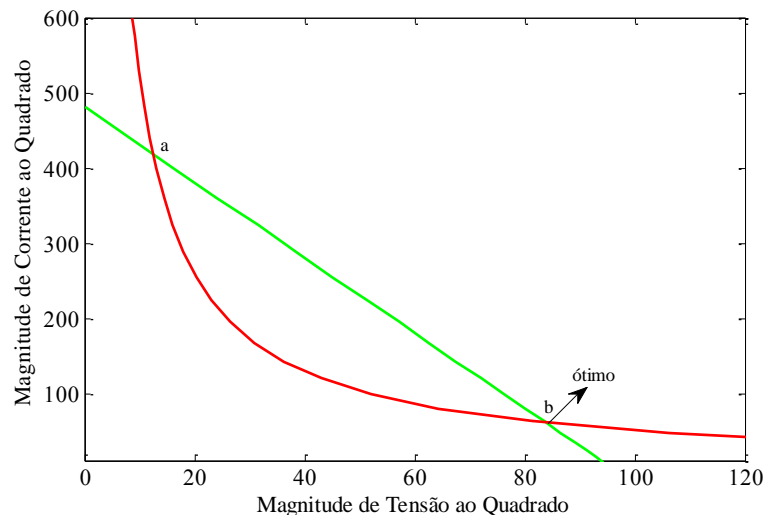
$$\min v = 0,4I_{12,1}^{qdr}$$

$$96,28 - 0,2I_{12,1}^{qdr} = V_{2,1}^{qdr}$$

$$V_{2,1}^{qdr} I_{12,1}^{qdr} \geq 5200$$

Graficamente, podemos constatar que a desigualdade da restrição cônica, tende a igualdade, como mostrado na Figura 10.

**Figura 10** — Solução ótima do problema



Fonte: Dados da pesquisa do autor

## 2.8 Testes e resultados

Nesta seção os sistemas teste de 70, 136, 202 e 400 nós são utilizados para mostrar a exatidão dos modelos matemáticos, assim como também a eficiência da técnica de solução proposta para calcular o ponto de operação em regime permanente de um sistema de distribuição radial. Para os testes foi utilizado um número de discretizações  $S = 5$  e um número de blocos de linearização  $Y = 20$ .

Os modelos não linear (MNL), linear inteiro misto (MLIM) e cônico de segunda ordem (MCSO) foram implementados na linguagem de modelagem AMPL (FOURER, 2003). O modelo não linear foi resolvido usando o *solver* comercial KNITRO (BYRD, 2006), enquanto que o modelo linear inteiro misto e o modelo cônico de segunda ordem foram

resolvidos com o *solver* comercial CPLEX (CPLEX, 2008), ambos os *solvers* foram chamados com suas opções padrões.

### 2.8.1 Sistema de 70 nós

Os dados do sistema de distribuição de 70 nós são apresentados no apêndice A.1 e foram retirados de (FRANCO, 2013). Este alimentador opera com demanda pesada provocando, assim, violações nas tensões em vários pontos da rede.

Para este sistema foram considerados três níveis de demanda: demanda leve, demanda média e demanda pesada. Os dados apresentados no apêndice A.1 são da demanda pesada, sendo que a demanda leve e média correspondem a 50% e 80%, respectivamente. As magnitudes de tensão máxima e mínima consideradas são de 12,66 kV e 11,25 kV, respectivamente e tensão nominal de 12,66 kV. Os valores da tensão mínima encontrados nos modelos MNL, MLIM e MCSO são 11,5102 kV, 11,5104 kV e 11,5102 kV, respectivamente, todos localizados no nó 66. No Quadro 2 estão os valores das perdas de potência ativa dos três níveis de demanda determinado com os três modelos estudados.

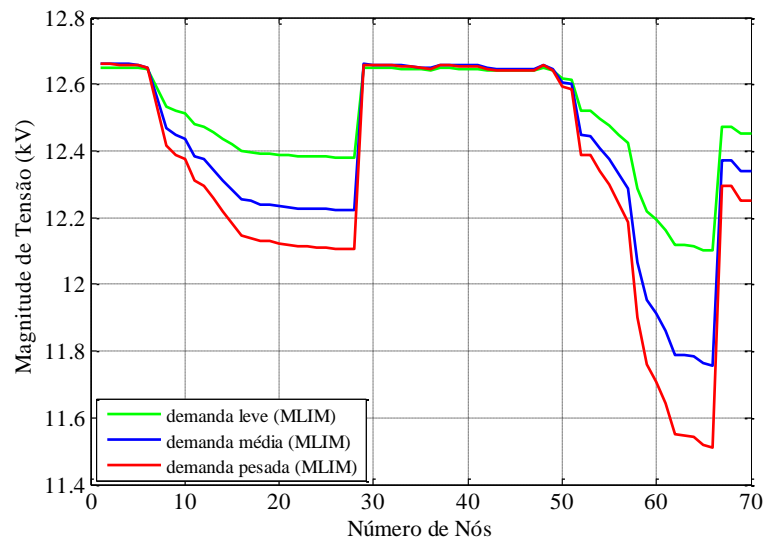
**Quadro 2** — Perdas de Potência Ativa do Sistema de 70 nós

Modelos	Perdas de Potência Ativa (kW) do Sistema de 70 nós		
	Demanda Leve	Demanda Média	Demanda Pesada
MNL	51,61	138,91	225,02
MLIM	52,89	140,36	224,94
MCSO	51,61	138,92	225,02

Fonte: Dados da pesquisa do autor

Do Quadro 2 podemos observar que os resultados do MLIM e do MCSO, em relação aos resultados do MNL, têm um erro de 0,6% e 0,00%, respectivamente, quando comparadas as perdas de potência ativa. Os valores das magnitudes de tensão e dos fluxos de potência ativa e reativa obtidos com o MNL e do MCSO têm erros máximos de 0%, considerando duas casas após a vírgula, em todos os níveis de demandas. Já o fluxo de corrente apresenta um erro máximo de 0,03% quando comparado os resultados dos dois métodos em questão.

Na figura 11 é mostrado o perfil da magnitude de tensão do sistema de 70 nós, considerando os três níveis de demanda.

**Figura 11** — Perfil da magnitude de tensão do sistema de 70 nós

Fonte: Dados da pesquisa do autor.

Na Tabela 2 são mostrados os erros percentuais das perdas de potência ativa em uma análise comparativa entre os modelos MNL e MLIM em função da variação de  $Y$  e  $S$ .

**Tabela 2** — Erros percentuais das perdas de potência ativa para o sistema de 70 nós

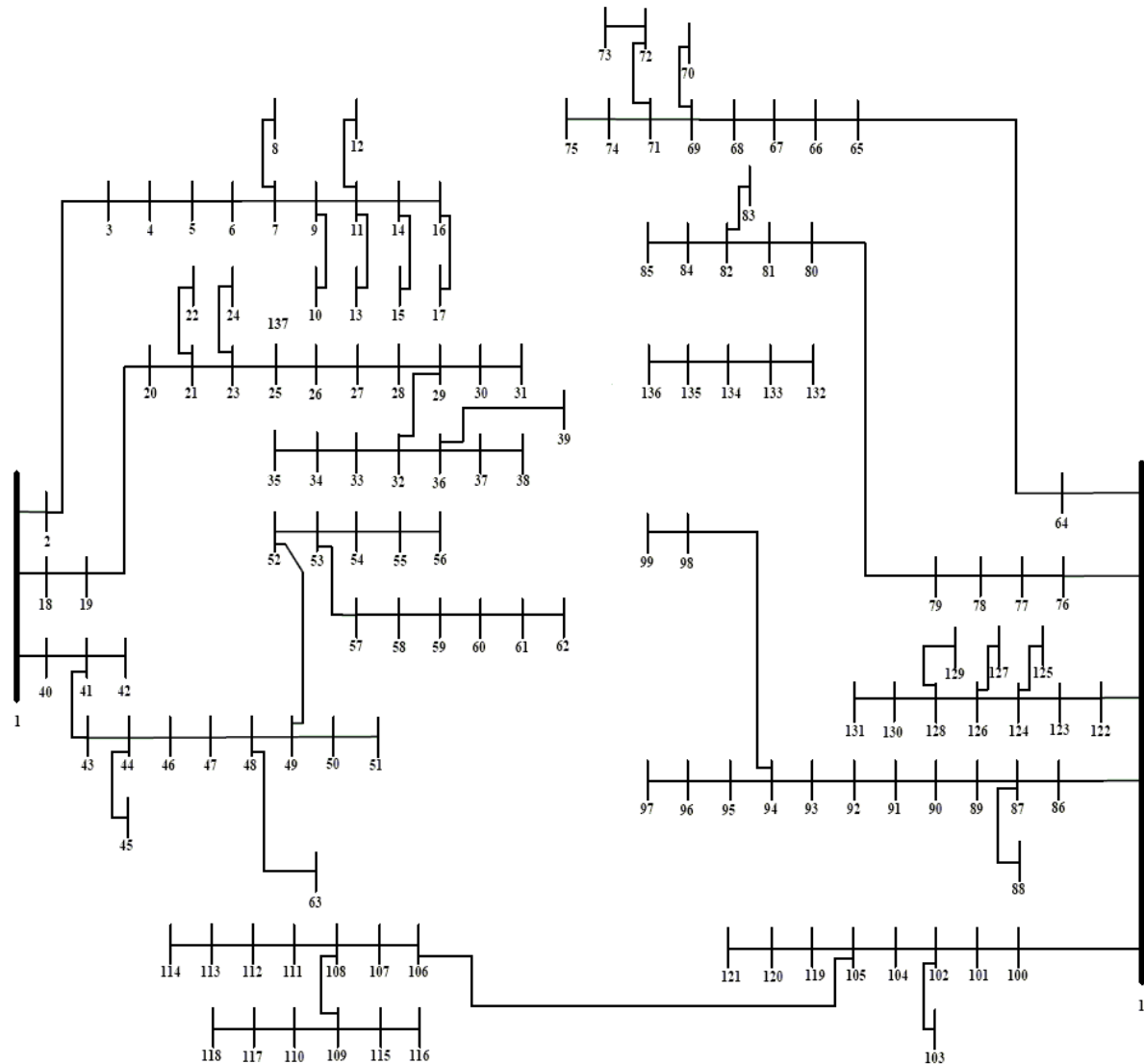
		$Y$						
		2	4	6	8	10	15	20
$S$	2	1,42	0,31	0,14	0,08	0,05	0,02	0,01
	4	1,42	0,32	0,15	0,08	0,05	0,02	0,01
	6	1,42	0,32	0,15	0,08	0,05	0,02	0,01
	8	1,42	0,31	0,14	0,08	0,05	0,02	0,01
	10	1,42	0,32	0,15	0,08	0,05	0,02	0,01

Fonte: Dados da pesquisa do autor.

### 2.8.2 Sistema de 136 nós

Os dados do sistema de distribuição de 136 nós são apresentados no apêndice A.2 e foram retirados do site do LAPSEE (Laboratório de Planejamento de Sistemas de Energia Elétrica). O diagrama unifilar é mostrado na Figura 12. Os valores de demandas apresentados no apêndice A.2 representam uma situação de demanda média.

**Figura 12** — Diagrama unifilar do sistema de distribuição de 136 nós



Fonte: Pereira (2009).

Este sistema tem uma tensão nominal de 13,8 kV e magnitudes de tensão máxima e mínima de 13,8 kV e 12 kV, respectivamente. A tensão mínima está localizada no nó 117 nos três modelos testados. As perdas de potência ativa deste sistema estão apresentadas no Quadro 3.

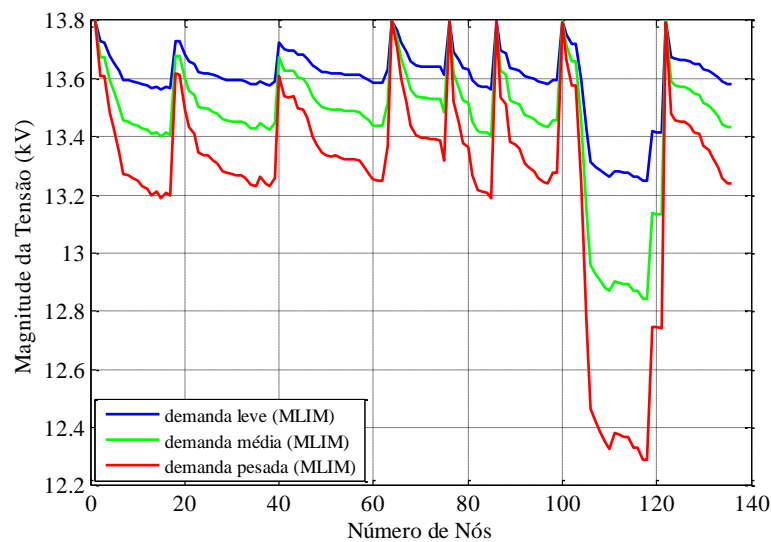
**Quadro 3** — Perdas de Potência Ativa do Sistema de 136 nós

Modelos	Perdas de Potência Ativa (kW) do Sistema de 136 nós		
	Demanda Leve	Demanda Média	Demanda Pesada
MNL	111,71	320,29	753,29
MLIM	113,01	320,15	749,73
MCSO	111,70	320,28	753,28

Fonte: Dados da pesquisa do autor

Do Quadro 3, o erro máximo foi de 0,20% quando comparadas as perdas de potência ativa do MLIM com do MNL. Quando comparado o MCSO com o MNL o erro é próximo de zero.

Na Figura 13 é mostrado o perfil das magnitudes da tensão, determinados pelo MLIM, com três demandas, que correspondem a 60% e 150% da demanda média, mostrada no apêndice A.2, do sistema de 136 nós testado.

**Figura 13** — Perfil da magnitude de tensão do sistema de 136 nós

Fonte: Dados da pesquisa do autor.

Na Tabela 3 estão os resultados de uma análise comparativa do erro percentual das perdas de potência ativa em função da variação de  $Y$  e  $S$ , do MNL com o MLIM.

**Tabela 3** — Erros percentuais das perdas de potência ativa para o sistema de 136 nós

		Y						
		2	4	6	8	10	15	20
S	2	46,58	7,00	1,10	1,22	0,01	0,06	0,05
	4	46,68	6,47	0,60	0,74	0,49	0,42	0,43
	6	46,42	7,13	1,28	1,40	0,18	0,25	0,25
	8	46,12	6,86	0,01	0,12	0,10	0,04	0,05
	10	46,30	6,99	1,15	1,28	0,06	0,12	0,11

Fonte: Dados da pesquisa do autor.

### 2.8.3 Sistema de 202 nós

Os dados do sistema de distribuição de 202 nós são apresentados no apêndice A.3 e o diagrama unifilar é mostrado na Figura 14. Estes dados foram retirados de (ALVES, 2012). Os valores das demandas apresentadas no apêndice A.3 correspondem a uma situação de demanda média. A demanda pesada corresponde a 166% da demanda média.

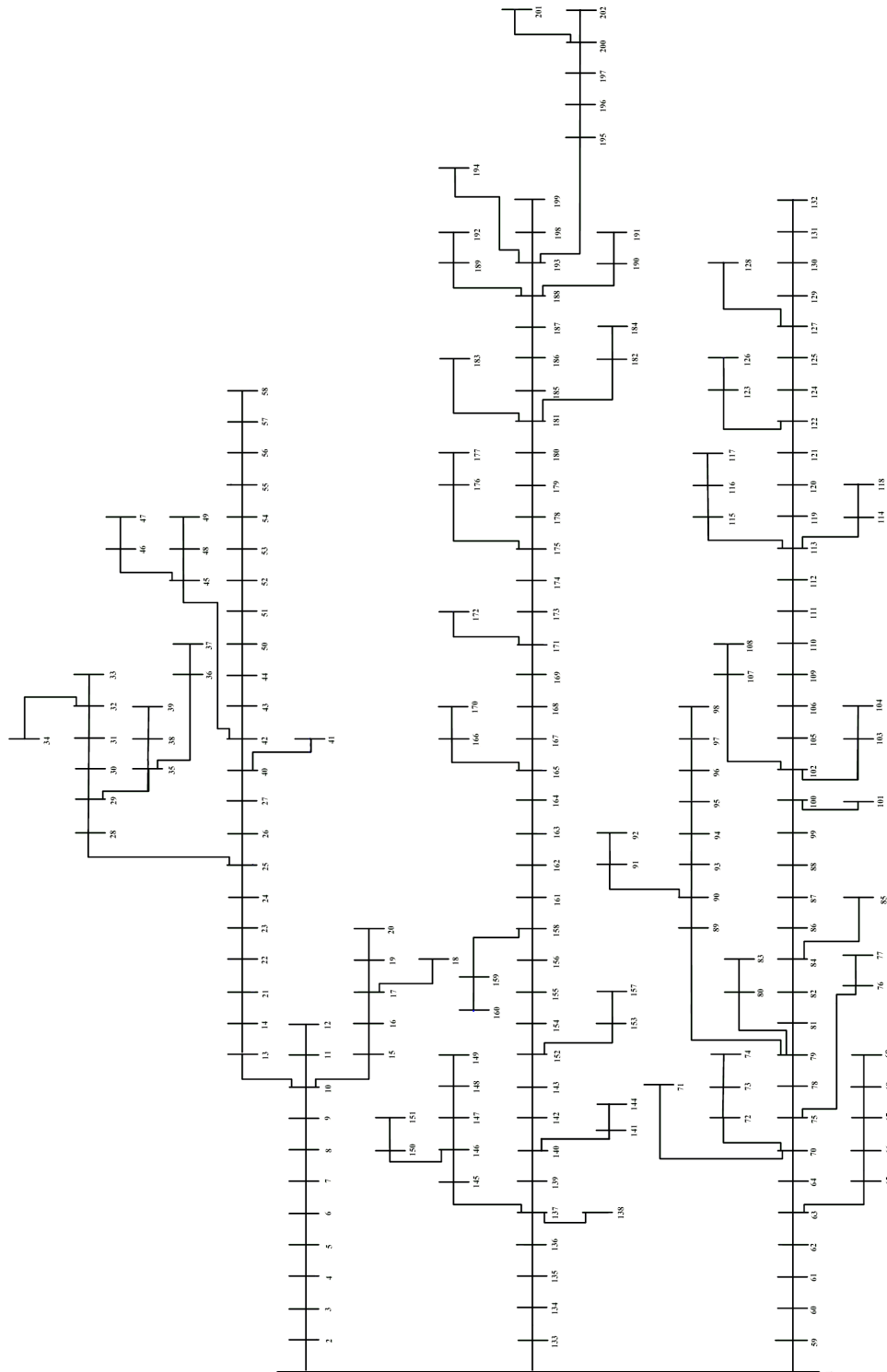
Este sistema tem uma tensão nominal de 13,8 kV e foram consideradas magnitudes de tensão máxima e mínima de 13,8 kV e 12 kV, respectivamente. Os valores da tensão mínima nos modelos MNL, MLIM e MCSO são 12,7842 kV, 12,7489 kV e 12,7842 kV, respectivamente, localizada no nó 202. No Quadro 4, estão os valores das perdas de potência ativa dos três níveis de demanda nos modelos MNL, MLIM e MCSO.

**Quadro 4** — Perdas de Potência Ativa do Sistema de 202 nós

Modelos	Perdas de Potência Ativa (kW) do Sistema de 202 nós	
	Demanda Média	Demanda Pesada
MNL	552,01	1.603,64
MLIM	558,59	1.641,10
MCSO	552,01	1.603,64

Fonte: Dados da pesquisa do autor

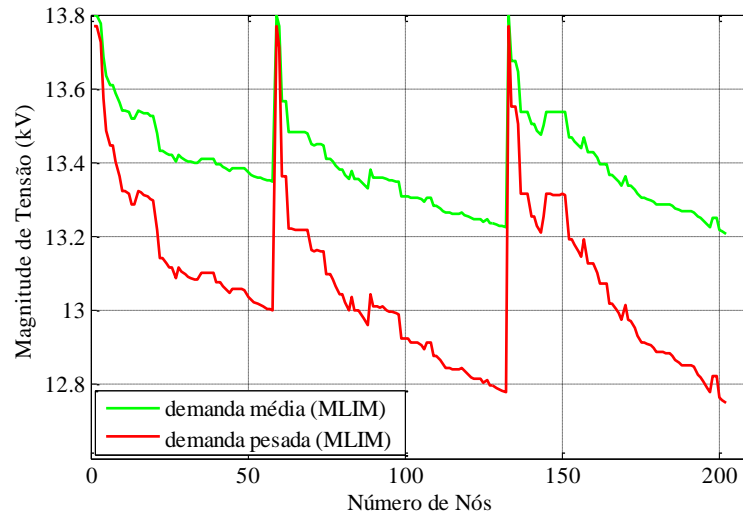
**Figura 14** — Diagrama unifilar do sistema de distribuição de 202 nós.



Fonte: Pereira (2009)

Ao compararmos o MLIM proposto com o MNL temos um erro de perda de potência ativa de 1,1%. Já quando comparamos o MNL com o MCSO, o erro foi zero, considerando duas casas após a vírgula. Na Figura 15 é mostrado o perfil das magnitudes de tensão das demandas consideradas, média e pesada.

**Figura 15** — Perfil da magnitude de tensão do sistema de 202 nós



Fonte: Dados da pesquisa do autor.

Na Tabela 4 é apresentada uma análise comparativa do erro percentual das perdas de potência ativa entre o MNL e o MLIM, em função da variação de  $Y$  e  $S$ .

**Tabela 4** — Erros percentuais das perdas de potência ativa para o sistema de 202 nós

		$Y$						
		2	4	6	8	10	15	20
$S$	2	4,51	1,58	0,67	0,24	0,12	0,01	0,02
	4	6,03	1,59	0,69	0,25	0,15	0,03	0,07
	6	5,11	1,57	0,95	0,44	0,19	0,01	0,08
	8	4,53	1,58	0,74	0,24	0,12	0,01	0,44
	10	4,54	1,57	0,70	0,24	0,65	0,97	0,07

Fonte: Dados da pesquisa do autor.

### 2.8.4 Sistema de 400 nós

Os dados do sistema de distribuição de 400 nós são apresentados no apêndice A.4 e foram retirados de (ALVES, 2012), que é encontrado no site do LAPSEE. Este sistema tem característica mista (área urbana e rural). Os valores de demandas apresentados no apêndice A.4 correspondem à operação com demanda média. A demanda pesada equivale a 150% dos valores da demanda média. A tensão mínima está localizada no nó 400 nos três modelos testados. As perdas de potência ativa deste sistema estão apresentadas no Quadro 5.

**Quadro 5** — Perdas de Potência Ativa do Sistema de 400 nós

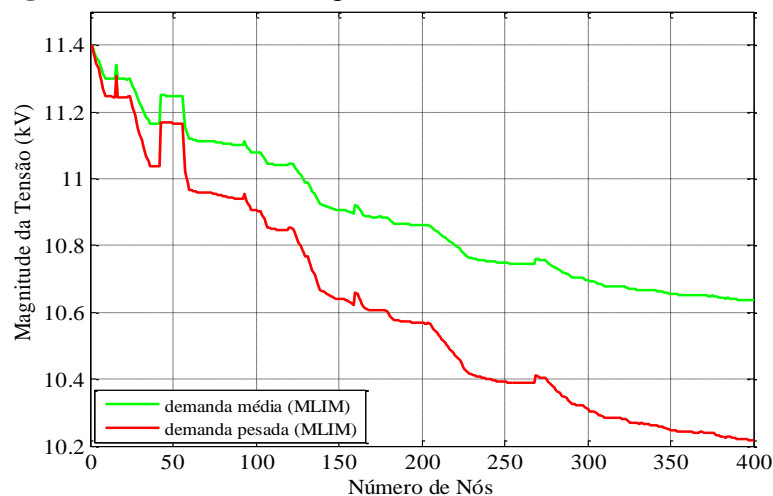
Modelos	Perdas de Potência Ativa (kW) do Sistema de 400 nós	
	Demanda Média	Demanda Pesada
MNL	149,63	356,73
MLIM	148,40	356,63
MCSO	149,63	356,74

Fonte: Dados da pesquisa do autor

Do Quadro 5, ao compararmos o MLIM proposto com o MNL temos um erro de perda de potência ativa de 0,3%. Já quando comparamos o MNL com o MCSO, o erro foi quase zero.

Na Figura 16 é mostrado o perfil das magnitudes da tensão com demandas média e pesada calculadas pelo MLIM.

**Figura 16** — Perfil da magnitude de tensão do sistema de 400 nós



Fonte: Dados da pesquisa do autor.

Na Tabela 5 é mostrada uma análise comparativa dos erros percentuais das perdas de potência ativa em função da variação de  $Y$  e  $S$ .

**Tabela 5** — Erros percentuais das perdas de potência ativa para o sistema de 400 nós

		$Y$						
		2	4	6	8	10	15	20
$S$	2	61,62	17,31	8,79	5,46	3,83	2,13	1,49
	4	61,08	16,90	8,34	5,13	3,51	1,80	1,15
	6	61,06	16,77	8,17	4,96	3,35	1,66	1,03
	8	60,97	16,78	8,27	5,03	3,40	1,71	1,07
	10	61,00	16,77	8,22	4,99	3,37	1,65	1,00

Fonte: Dados da pesquisa do autor.

## 2.9 Comentários do capítulo

Dois modelos para calcular o ponto de operação em regime permanente de um sistema de distribuição radial foram apresentados, sendo estes modelos implementados na linguagem de modelagem AMPL. Ambos os modelos garantem convergência e otimalidade usando *solvers* convencionais.

Quatro sistemas testes foram utilizados para mostrar a eficiência e a exatidão dos modelos propostos. Dos resultados encontrados conclui-se que ambos os modelos apresentam boa exatidão em comparação com o MNL, porém o MCSO apresenta melhores resultados do que o MLIM. Das Tabelas 2, 3, 4 e 5 podemos observar que, para o MLIM, erros menores são encontrados para valores maiores de  $Y$  e  $S$ , enquanto que os erros maiores são encontrados para os valores menores de  $Y$  e  $S$ . Note que quanto maior é o valor de  $Y$  menor será o erro porcentual das perdas, comparado com o aumento de  $S$ , assim podemos notar uma maior influência na redução do erro com o aumento do valor de  $Y$ . Entretanto, o aumento do valor de  $Y$  ocasiona um aumento no número de restrições lineares e de variáveis contínuas, enquanto que o aumento do valor de  $S$  ocasiona um aumento no número de restrições lineares e de variáveis binárias. Assim, é possível afirmar que os valores adequados de  $Y$  e  $S$ , para um compromisso entre eficiência e complexidade, são 20 e 4, respectivamente.

Os MLIM e MCSO podem ser utilizados para modelar outros problemas de otimização de sistemas de distribuição radiais (por exemplo, alocação de bancos de capacitores, alocação de reguladores de tensão e seleção ótima de condutores e recondutoramento) e resolvê-los utilizando técnicas de otimização clássica.

### 3 Alocação Ótima de Bancos de Capacitores em Sistemas de Distribuição de Energia Elétrica Radiais

Neste capítulo é apresentado o problema de alocação ótima de bancos de capacitores em sistemas de distribuição de energia elétrica radiais. Também são apresentados três modelos matemáticos para este problema: o modelo não linear inteiro misto; o modelo equivalente linear inteiro misto; e o modelo cônico de segunda ordem inteiro misto.

Visto que o modelo não linear inteiro misto para alocação de BCs não converge, mais dois modelos foram adicionados neste trabalho para que pudessem solucionar este problema. Com isso é possível analisar qual destes modelos apresenta soluções de melhor qualidade.

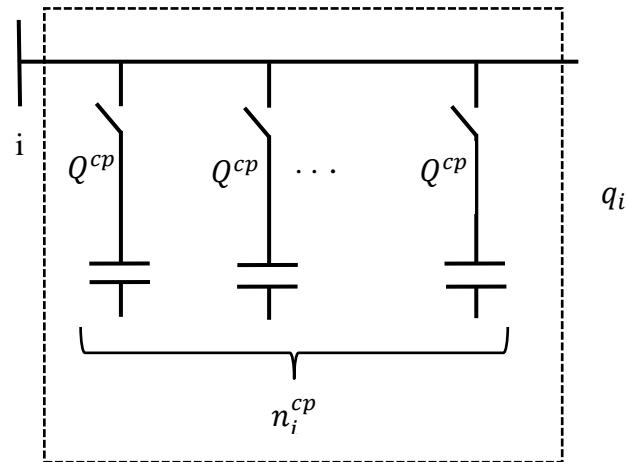
#### 3.1 Bancos de Capacitores Fixos e Chaveados

Os bancos de capacitores instalados nos SDEE radiais são fontes de potência reativa. Os BCs são formados por um ou mais módulos de capacitores. Eles podem ser fixos ou chaveados. Os bancos de capacitores fixos permanecem conectados em todos os níveis de demanda, já os bancos de capacitores chaveados possuem um equipamento para controlar a quantidade de potência reativa injetada na rede de distribuição em cada nível de demanda (SEGURA, 2006).

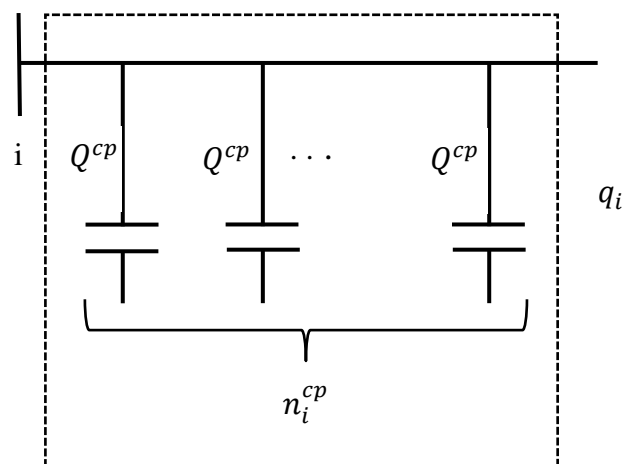
O objetivo da instalação destes bancos de capacitores é a melhoria do perfil da magnitude de tensão para que a mesma esteja dentro dos limites considerados adequados em todos os pontos de consumo.

Cada unidade padrão (módulo de capacitor) do banco de capacitores tem um valor  $Q^{cp}$ , com um custo por unidade,  $c^{un}$ . Tanto os capacitores fixos quanto os chaveados têm um custo de instalação,  $c^{fx}$ . Além disso, os capacitores chaveados tem um custo associado,  $c^{sw}$ , do equipamento de chaveamento da unidade padrão do capacitor.

Para exemplificar, na Figura 17 e na Figura 18 estão as representações dos modelos de bancos de capacitores chaveados e fixos, respectivamente.

**Figura 17** — Alocação de bancos de capacitores chaveados

Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Figura 18** — Alocação de bancos de capacitores fixos

Fonte: Elaboração do próprio autor.

### 3.2 Modelo Não Linear do Problema de Alocação de Bancos de Capacitores

O problema de alocação de bancos de capacitores pode ser modelado como um problema de programação não linear inteiro misto (MNLIM) como segue adiante.

$$\min k_c \sum_{i \in \Omega_b} (c^{fx} q_i + c^{sw} q_i^{sw} + c^{un} n_i^{cp}) + t_l \sum_{d \in \Omega_d} c_d^{ls} D_d \sum_{ij \in \Omega_l} (R_{ij} I_{ij,d}^{qdr}) \quad (77)$$

Sujeito a

$$\sum_{ki \in \Omega_l} P_{ki,d} - \sum_{ij \in \Omega_l} (P_{ij,d} + R_{ij} I_{ij,d}^{qdr}) + P_{i,d}^S = P_{i,d}^D \quad \forall i \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (78)$$

$$\sum_{ki \in \Omega_l} Q_{ki,d} - \sum_{ij \in \Omega_l} (Q_{ij,d} + X_{ij} I_{ij,d}^{qdr}) + Q_{i,d}^S + Q^{cp} n_{i,d} = Q_{i,d}^D \quad \forall i \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (79)$$

$$V_{i,d}^{qdr} - 2(R_{ij} P_{ij,d} + X_{ij} Q_{ij,d}) - Z_{ij}^2 I_{ij,d}^{qdr} - V_{j,d}^{qdr} = 0 \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (80)$$

$$V_{j,d}^{qdr} I_{ij,d}^{qdr} = P_{ij,d}^2 + Q_{ij,d}^2 \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (81)$$

$$\underline{V}^2 \leq V_{i,d}^{qdr} \leq \overline{V}^2 \quad \forall i \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (82)$$

$$0 \leq I_{ij,d}^{qdr} \leq \overline{I}_{ij} \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (83)$$

$$0 \leq n_i^{cp} \leq \overline{n}_b^{cp} q_i \quad \forall i \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (84)$$

$$n_{i,d} \leq n_i^{cp} \quad \forall i \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (85)$$

$$-\overline{n}_b^{cp} q_i^{sw} \leq n_{i,d} - n_{i,d-1} \leq \overline{n}_b^{cp} q_i^{sw} \quad \forall i \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \mid d > 1 \quad (86)$$

$$\sum_{i \in \Omega_b} q_i \leq \overline{n}^{cp} \quad (87)$$

$$n_{i,d} \text{ inteiro} \quad \forall i \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (88)$$

$$q_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in \Omega_b \quad (89)$$

$$q_i^{sw} \in \{0,1\} \quad \forall i \in \Omega_b \quad (90)$$

As equações (78)-(81) representam o estado de operação em regime permanente de um SDEE radial, enquanto as outras equações estão considerando a presença dos bancos de capacitores e diferentes níveis de demanda. Estas quatro equações são uma extensão das equações (12)-(15), mostradas no capítulo 2.

A seguir está a descrição de cada restrição do modelo matemático não linear inteiro misto.

A função objetivo (77) representa o custo total. A primeira parte representa o custo de investimento, que é dividido em custo de instalação de bancos de capacitores (fixos ou chaveados), custo do equipamento para o chaveamento dos bancos de capacitores e o custo total dos módulos de capacitores instalados e a segunda parte representa o custo anual das perdas de energia. Note que, na formulação a variável  $I_{ij,d}^{qdr}$  é usada para representar  $I_{ij,d}^2$ .

A restrição (78) representa o balanço de potência ativa (primeira lei de kirchhoff), em cada nó  $i$ , no nível de demanda  $d$ . O fluxo total de potência ativa chegando no nó ( $\sum_{ji \in \Omega_l} P_{ji,d}$ ) mais a injeção de potência ativa no nó pela subestação ( $P_{i,d}^S$ ) menos a soma do fluxo total de potência ativa que está deixando o nó mais as perdas no circuito ( $\sum_{ij \in \Omega_l} (P_{ij,d} + R_{ij} I_{ij,d}^{qdr})$ ) deve ser igual à demanda de potência ativa no nó ( $P_{i,d}^D$ ).

A restrição (79) representa o balanço de potência reativa (primeira lei de kirchhoff), considerando a presença de bancos de capacitores. Para cada nó  $i$  no nível de demanda  $d$ , o fluxo total de potência reativa chegando ( $\sum_{ji \in \Omega_l} Q_{ji,d}$ ) mais a injeção de potência reativa pela subestação ( $Q_{i,d}^S$ ) no nó, somando-se a injeção de potência reativa no nó fornecida pelos bancos de capacitores operantes ( $Q^{cp} n_{i,d}$ ) menos a soma do fluxo total de potência reativa que está deixando o nó mais suas perdas no circuito ( $\sum_{ij \in \Omega_l} (Q_{ij,d} + X_{ij} I_{ij,d}^{qdr})$ ) deve ser igual à demanda de potência reativa no nó ( $Q_{i,d}^D$ ).

Note que  $V_{i,d}^{qdr}$  é usado para representar  $V_{i,d}^2$ . A restrição (80) define a queda de tensão, em que a magnitude de tensão no nó final ( $V_{j,d}^{qdr}$ ) é calculada através do valor da magnitude de tensão no nó inicial ( $V_{i,d}^{qdr}$ ), menos o valor de demanda em um ponto de operação no sistema ( $2(R_{ij} P_{ij,d} + X_{ij} Q_{ij,d})$ ), menos as perdas de potência ativa e reativa no circuito  $ij$  ( $Z_{ij}^2 I_{ij,d}^{qdr}$ ). Esta equação representa a segunda lei de kirchhoff.

A restrição (81) é uma equação não linear devido ao produto da magnitude de tensão ( $V_{j,d}^{qdr}$ ) pela corrente ( $I_{ij,d}^{qdr}$ ), e ao quadrado dos fluxos de potência ativa ( $P_{ij,d}^2$ ) e reativa ( $Q_{ij,d}^2$ ). Ela representa o cálculo da magnitude do fluxo da corrente.

A restrição (82) representa as restrições da magnitude de tensão ao quadrado do nó, em que, para cada nó  $i$ , no nível de demanda  $d$ , o quadrado da magnitude de tensão ( $V_{i,d}^{qdr}$ ) é delimitado pelo valor mínimo ( $\underline{V}^2$ ) e pelo valor máximo ( $\overline{V}^2$ ).

A restrição (83) representa os limites do fluxo de corrente no circuito  $ij$ , no nível de demanda  $d$  ( $I_{ij,d}^{qdr}$ ), que é delimitado pelo zero e pelo valor máximo da corrente ao quadrado ( $\bar{I}_{ij}^2$ ).

A restrição (84) representa o limite do número de módulos de capacitores instalados ( $n_i^{cp}$ ) no nó  $i$ , delimitado pelo número mínimo, zero, e pelo cálculo do produto do número máximo de módulos de capacitores que podem ser instalados no nó do sistema ( $\overline{n_b^{cp}}$ ) pela variável binária que decide a alocação ou não dos bancos de capacitores ( $q_i$ ).

A restrição (85) representa que o número de módulos de capacitores operantes no nó  $i$ , no nível de demanda  $d$ , ( $n_{i,d}$ ) tem que ser menor ou igual ao número de módulos de capacitores instalados no nó  $i$  ( $n_i^{cp}$ ),.

Na restrição (86) a variável binária ( $q_i^{sw}$ ) decide se aloca ou não o equipamento de chaveamento nos bancos de capacitores no nó  $i$ , ou seja, o número dos módulos de capacitores chaveados ligados pode ser diferente em cada nível de demanda, enquanto que o número dos módulos de capacitores fixos é o mesmo para todos os níveis de demanda.

A restrição (87) representa o número máximo de bancos de capacitores que podem ser instalados no sistema, em que a somatória da variável binária, que decide se aloca ou não os bancos de capacitores ( $\sum_{i \in \Omega_b} q_i$ ), têm de ser menor ou igual ao número máximo de bancos de capacitores que podem ser adicionados no sistema ( $\overline{n^{cp}}$ ).

A restrição (88) representa a variável inteira ( $n_{i,d}$ ) que define o número de módulos de capacitores operantes no nó  $i$ , no nível de demanda  $d$ .

A restrição (89) representa a variável binária ( $q_i$ ), que decide pela alocação ou não dos bancos de capacitores fixos ou chaveados no nó  $i$ .

A restrição (90) representa a variável binária ( $q_i^{sw}$ ), que decide pela alocação ou não do equipamento de chaveamento nos bancos de capacitores no nó  $i$ .

Como pode ser notado, apenas a equação (81) é não linear, devido ao produto de  $V_{j,d}^{qdr}$  e  $I_{ij,d}^{qdr}$ , e ao quadrado dos fluxos de potência ativa e reativa ( $P_{ij,d}^2$  e  $Q_{ij,d}^2$ ). A seguir estão descritas as técnicas de linearização para obter uma restrição linear equivalente.

### 3.3 Linearização

Como vimos no Capítulo 2, o membro esquerdo ( $V_{j,d}^{qdr} I_{ij,d}^{qdr}$ ) de (81) é linearizado pela discretização de  $V_{j,d}^{qdr}$  usando a variável binária  $x_{j,d,s} \forall s = 1 \dots S$ . Temos que,  $x_{j,d,s} = 1$  se  $V_{j,d}^{qdr}$  é maior que  $\underline{V}^2 + s\bar{\Delta}^V$ , como é mostrado na Figura 3. Esta condição é modelada em (91), mostrando como as variáveis  $x_{j,d,s}$  são calculadas (ALVES, 2012).

$$\left. \begin{aligned} \underline{V}^2 + \sum_{s=1}^S (x_{j,d,s} \bar{\Delta}^V) &\leq V_{j,d}^{qdr} \leq \underline{V}^2 + \bar{\Delta}^V + \sum_{s=1}^S (x_{j,d,s} \bar{\Delta}^V) && \forall j \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (a) \\ x_{j,s,d} &\leq x_{j,s-1,d} && \forall j \in \Omega_b, s = 2 \dots S, \forall d \in \Omega_d \quad (b) \\ x_{j,s,d} &\in \{0,1\} && \forall j \in \Omega_b, s = 1 \dots S, \forall d \in \Omega_d \quad (c) \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

Da mesma forma que foi mostrado no Capítulo 2, o produto  $V_{j,d}^{qdr} I_{ij,d}^{qdr}$  é calculado usando o ponto médio do primeiro intervalo de discretização do quadrado da magnitude de tensão multiplicado pelo quadrado da magnitude do fluxo da corrente mais a soma das correções de potência sucessivas ( $x_{j,s,d} \bar{\Delta}^V I_{ij,d}^{qdr} = P_{j,s,d}^c$ ), como mostrado nas equações (92) e (93).

$$V_{j,d}^{qdr} I_{ij,d}^{qdr} = (\underline{V}^2 + \frac{1}{2} \bar{\Delta}^V) I_{ij,d}^{qdr} + \sum_{s=1}^S P_{j,s,d}^c \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (92)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \bar{\Delta}^V I_{ij,d}^{qdr} - P_{j,s,d}^c &\leq \bar{\Delta}^V \bar{I}_{ij}^2 (1 - x_{j,s,d}) && \forall ij \in \Omega_l, s = 1 \dots S, \forall d \in \Omega_d \quad (a) \\ 0 \leq P_{j,s,d}^c &\leq \bar{\Delta}^V \bar{I}_{ij}^2 x_{j,s,d} && \forall ij \in \Omega_l, s = 1 \dots S, \forall d \in \Omega_d \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

A equação (92) é a aproximação linear do produto de  $V_{j,d}^{qdr}$  e  $I_{ij,d}^{qdr}$ . A equação (93) define os valores de  $P_{j,s,d}^c, \forall ij \in \Omega_l, s = 1 \dots S, \forall d \in \Omega_d$ . Se  $x_{j,s,d} = 0$  então  $P_{j,s,d}^c = 0$  e  $0 \leq I_{ij,d}^{qdr} \leq \bar{I}_{ij}^2$ ; caso contrário  $P_{j,s,d}^c = \bar{\Delta}^V I_{ij,d}^{qdr}$  e  $0 \leq P_{j,s,d}^c \leq \bar{\Delta}^V \bar{I}_{ij}^2$ , em que  $\bar{\Delta}^V \bar{I}_{ij}^2$  proporciona um grau suficiente de liberdade para  $P_{j,s,d}^c$ .

### 3.4 Linearização do termo quadrático $P_{ij}^2 + Q_{ij}^2$

O membro direito ( $P_{ij,d}^2 + Q_{ij,d}^2$ ) de (81) é linearizado como descrito no Capítulo 2 e definido nas equações (94) e (95).

$$P_{ij,d}^2 + Q_{ij,d}^2 = \sum_{y=1}^Y m_{ij,y}^S \Delta_{ij,y,d}^P + \sum_{y=1}^Y m_{ij,y}^S \Delta_{ij,y,d}^Q \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (94)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{ij,d}^+ - Q_{ij,d}^- &= Q_{ij,d} & \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d & (a) \\ P_{ij,d} &= \sum_{y=1}^Y \Delta_{ij,y,d}^P & \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d & (b) \\ Q_{ij,d}^+ - Q_{ij,d}^- &= \sum_{y=1}^Y \Delta_{ij,y,d}^Q & \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d & (c) \\ 0 \leq \Delta_{ij,y,d}^P &\leq \bar{\Delta}_{ij}^S & \forall ij \in \Omega_l, y = 1 \dots Y, \forall d \in \Omega_d & (d) \\ 0 \leq \Delta_{ij,y,d}^Q &\leq \bar{\Delta}_{ij}^S & \forall ij \in \Omega_l, y = 1 \dots Y, \forall d \in \Omega_d & (e) \\ 0 \leq Q_{ij,d}^+ & & \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d & (f) \\ 0 \leq Q_{ij,d}^- & & \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d & (g) \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

Em que

$$m_{ij,y}^S = \frac{5}{6} \bar{\Delta}_{ij}^S \quad \forall ij \in \Omega_l, y = 1$$

$$m_{ij,y}^S = (2y - 1) \bar{\Delta}_{ij}^S \quad \forall ij \in \Omega_l, y = 2 \dots Y$$

$$\bar{\Delta}_{ij}^S = \frac{V^{nom} \bar{I}_{ij}}{Y} \quad \forall ij \in \Omega_l$$

Note que as equações (94) e (95) são um conjunto de expressões lineares do membro direito da equação (81), e  $m_{ij,y}^S$  e  $\bar{\Delta}_{ij}^S$  são parâmetros constantes. As expressões  $\sum_{y=1}^Y m_{ij,y}^S \Delta_{ij,y,d}^P$  e  $\sum_{y=1}^Y m_{ij,y}^S \Delta_{ij,y,d}^Q$  são as aproximações lineares de  $P_{ij,d}^2$  e  $Q_{ij,d}^2$ , respectivamente. Em (95.a),  $Q_{ij,d}^+$  e  $Q_{ij,d}^-$  são variáveis auxiliares não negativas para obter  $|Q_{ij,d}|$ . A equação (95.b) e (95.c) afirma que  $P_{ij,d}$  e  $|Q_{ij,d}|$  são iguais a soma dos valores em cada bloco da discretização. As equações (95.d) e (95.e) definem os limites superiores e inferiores de cada bloco de  $P_{ij,d}$  e  $|Q_{ij,d}|$ , respectivamente.

### 3.5 Modelo Linear Inteiro Misto para o problema de Alocação de Bancos de Capacitores

O problema de alocação de BCs em sistemas de distribuição radiais pode ser modelado usando o modelo linear inteiro misto como mostrado nas equações seguintes.

$$\min v = k_c \sum_{i \in \Omega_b} (c^{fx} q_i + c^{sw} q_i^{sw} + c^{un} n_i^{cp}) + t_l \sum_{d \in \Omega_d} c_d^{ls} D_d \sum_{ij \in \Omega_l} (R_{ij} I_{ij,d}^{qdr}) \quad (96)$$

Sujeito a

$$\sum_{ki \in \Omega_l} P_{ki,d} - \sum_{ij \in \Omega_l} (P_{ij,d} + R_{ij} I_{ij,d}^{qdr}) + P_{i,d}^S = P_{i,d}^D \quad \forall i \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (97)$$

$$\sum_{ki \in \Omega_l} Q_{ki,d} - \sum_{ij \in \Omega_l} (Q_{ij,d} + X_{ij} I_{ij,d}^{qdr}) + Q_{i,d}^S + Q^{cp} n_{i,d} = Q_{i,d}^D \quad \forall i \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (98)$$

$$V_{i,d}^{qdr} - 2(R_{ij} P_{ij,d} + X_{ij} Q_{ij,d}) - Z_{ij}^2 I_{ij,d}^{qdr} - V_{j,d}^{qdr} = 0 \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (99)$$

$$\left( \underline{V}^2 + \frac{1}{2} \bar{\Delta}^V \right) I_{ij,d}^{qdr} + \sum_{s=1}^S P_{j,s,d}^c = \sum_{y=1}^Y m_{ij,y}^S \Delta_{ij,y,d}^P + \sum_{y=1}^Y m_{ij,y}^S \Delta_{ij,y,d}^Q \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (100)$$

$$Q_{ij,d}^+ - Q_{ij,d}^- = Q_{ij,d} \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (101)$$

$$P_{ij,d} = \sum_{y=1}^Y \Delta_{ij,y,d}^P \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (102)$$

$$Q_{ij,d}^+ + Q_{ij,d}^- = \sum_{y=1}^Y \Delta_{ij,y,d}^Q \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (103)$$

$$\underline{V}^2 + \sum_{s=1}^S (x_{j,s,d} \bar{\Delta}^V) \leq V_{j,d}^{qdr} \leq \underline{V}^2 + \bar{\Delta}^V + \sum_{s=1}^S (x_{j,s,d} \bar{\Delta}^V) \quad \forall j \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (104)$$

$$0 \leq \bar{\Delta}^V I_{ij,d}^{qdr} - P_{j,s,d}^c \leq \bar{\Delta}^V \bar{I}_{ij}^{-2} (1 - x_{j,s,d}) \quad \forall ij \in \Omega_l, s = 1 \dots S, \forall d \in \Omega_d \quad (105)$$

$$0 \leq P_{j,s,d}^c \leq \bar{\Delta}^V \bar{I}_{ij}^{-2} x_{j,s,d} \quad \forall ij \in \Omega_l, s = 1 \dots S, \forall d \in \Omega_d \quad (106)$$

$$\underline{V}^2 \leq V_{i,d}^{qdr} \leq \bar{V}^2 \quad \forall i \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (107)$$

$$0 \leq I_{ij,d}^{qdr} \leq \bar{I}_{ij}^{-2} \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (108)$$

$$0 \leq n_i^{cp} \leq \overline{n_b^{cp}} q_i \quad \forall i \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (109)$$

$$n_{i,d} \leq n_i^{cp} \quad \forall i \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (110)$$

$$-\overline{n_b^{cp}} q_i^{sw} \leq n_{i,d} - n_{i,d-1} \leq \overline{n_b^{cp}} q_i^{sw} \quad \forall i \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \mid d > 1 \quad (111)$$

$$\sum_{i \in \Omega_b} q_i \leq \overline{n^{cp}} \quad (112)$$

$$x_{j,s,d} \leq x_{j,s-1,d} \quad \forall j \in \Omega_b, s = 2 \dots S, \forall d \in \Omega_d \quad (113)$$

$$0 \leq \Delta_{ij,y,d}^P \leq \overline{\Delta}_{ij}^S \quad \forall ij \in \Omega_l, y = 1 \dots Y, \forall d \in \Omega_d \quad (114)$$

$$0 \leq \Delta_{ij,y,d}^Q \leq \overline{\Delta}_{ij}^S \quad \forall ij \in \Omega_l, y = 1 \dots Y, \forall d \in \Omega_d \quad (115)$$

$$0 \leq P_{ij,d} \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (116)$$

$$0 \leq Q_{ij,d}^+ \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (117)$$

$$0 \leq Q_{ij,d}^- \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (118)$$

$$n_{i,d} \text{ inteiro} \quad \forall i \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (119)$$

$$x_{j,s,d} \in \{0,1\} \quad \forall j \in \Omega_b, s = 1 \dots S, \forall d \in \Omega_d \quad (120)$$

$$q_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in \Omega_b \quad (121)$$

$$q_i^{sw} \in \{0,1\} \quad \forall i \in \Omega_b \quad (122)$$

Note que o número de variáveis de operação foi aumentando com a linearização, enquanto que o número de variáveis de investimento não muda. Este problema de otimização pode ser resolvido com a ajuda de *solvers* comerciais, como o CPLEX.

### 3.6 Modelo Cônico de Segunda Ordem Inteiro Misto para o problema de Alocação de Bancos de Capacitores

O problema de alocação de BCs em sistemas de distribuição radiais também pode ser resolvido usando o modelo cônico de segunda ordem inteiro misto, segundo a demonstração feita no Capítulo 2. Este modelo está descrito nas equações a seguir.

$$\min k_c \sum_{i \in \Omega_b} (c^{fx} q_i + c^{sw} q_i^{sw} + c^{un} n_i^{cp}) + t_l \sum_{d \in \Omega_d} c_d^{ls} D_d \sum_{ij \in \Omega_l} (R_{ij} I_{ij,d}^{qdr}) \quad (123)$$

Sujeito a

$$\sum_{ki \in \Omega_l} P_{ki,d} - \sum_{ij \in \Omega_l} (P_{ij,d} + R_{ij} I_{ij,d}^{qdr}) + P_{i,d}^S = P_{i,d}^D \quad \forall i \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (124)$$

$$\sum_{ki \in \Omega_l} Q_{ki,d} - \sum_{ij \in \Omega_l} (Q_{ij,d} + X_{ij} I_{ij,d}^{qdr}) + Q_{i,d}^S + Q^{cp} n_{i,d} = Q_{i,d}^D \quad \forall i \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (125)$$

$$V_{i,d}^{qdr} - 2(R_{ij} P_{ij,d} + X_{ij} Q_{ij,d}) - Z_{ij}^2 I_{ij,d}^{qdr} - V_{j,d}^{qdr} = 0 \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (126)$$

$$V_{j,d}^{qdr} I_{ij,d}^{qdr} \geq P_{ij,d}^2 + Q_{ij,d}^2 \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (127)$$

$$\underline{V}^2 \leq V_{i,d}^{qdr} \leq \overline{V}^2 \quad \forall i \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (128)$$

$$0 \leq I_{ij,d}^{qdr} \leq \overline{I}_{ij}^2 \quad \forall ij \in \Omega_l, \forall d \in \Omega_d \quad (129)$$

$$0 \leq n_i^{cp} \leq \overline{n}_b^{cp} q_i \quad \forall i \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (130)$$

$$n_{i,d} \leq n_i^{cp} \quad \forall i \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (131)$$

$$-\overline{n}_b^{cp} q_i^{sw} \leq n_{i,d} - n_{i,d-1} \leq \overline{n}_b^{cp} q_i^{sw} \quad \forall i \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \mid d > 1 \quad (132)$$

$$\sum_{i \in \Omega_b} q_i \leq \overline{n}^{cp} \quad (133)$$

$$n_{i,d} \text{ inteiro} \quad \forall i \in \Omega_b, \forall d \in \Omega_d \quad (134)$$

$$q_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in \Omega_b \quad (135)$$

$$q_i^{sw} \in \{0,1\} \quad \forall i \in \Omega_b \quad (136)$$

Note que, este é um problema cônico convexo de segunda ordem inteiro misto que pode ser resolvido com o solver comercial CPLEX, cujo o objetivo é encontrar o ótimo global. O modelo é simples, funcional e não possui acréscimo de variáveis contínuas, variáveis binárias e restrições, tornando-o mais rápido computacionalmente do que o modelo linear inteiro misto mostrado em (96)-(122).

## 4 Testes e Resultados

### 4.1 Introdução

Os modelos propostos no capítulo anterior foram testados usando os sistemas teste de 70, 136, 202 e 400 nós. Os testes têm como objetivo validar os modelos matemáticos, assim como mostrar a eficiência das técnicas das soluções propostas para determinar a alocação ótima de bancos de capacitores em SDDE radiais.

O modelo matemático linear inteiro misto e o modelo cônico de segunda ordem para o problema de alocação de bancos de capacitores mostrados, no Capítulo 3, foram implementados na linguagem de modelagem AMPL (FOURER, 2003) e solucionados usando o *solver* comercial CPLEX (CPLEX, 2008), chamado com suas opções padrões.

Para todos os testes foram considerados um número de discretizações  $S = 4$ , um número de blocos de linearização  $Y = 20$ , um custo de US\$ 1000,00 por instalação dos bancos de capacitores, de US\$900,00 por cada unidade padrão do banco de capacitor e de US\$ 300,00 por equipamento de chaveamento do banco de capacitor chaveado. As taxas de interesse do custo das perdas e de recuperação da construção do capacitor são iguais a 1,0. A potência reativa gerada é de 300 kVAr por módulo de capacitor. O custo de perdas é de US\$ 0,06 por kWh para os sistemas de 70 e 136 nós e de US\$ 0,02 por kWh para os sistemas de 202 e 400 nós.

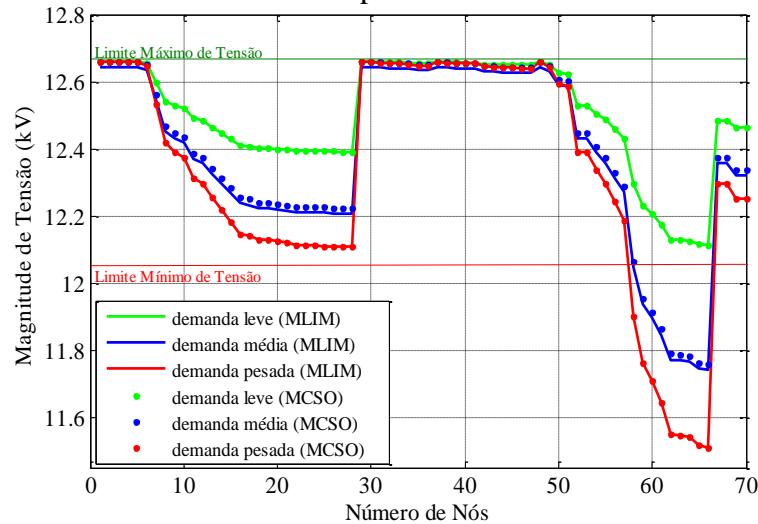
#### 4.1.1 Sistema de distribuição de 70 nós

Os dados do sistema de distribuição de 70 nós foram obtidos de (FRANCO, 2013), e apresentados no apêndice A.1. Para este sistema foram considerados três níveis de demanda: demanda leve, demanda média e demanda pesada. Os dados apresentados no apêndice A.1 são da demanda pesada, sendo que a demanda leve e média correspondem a 50% e 80%, respectivamente. O número de horas no ano é de 8.760 horas, sendo dividido para os níveis de demanda leve, média e pesada com uma duração de 1.000, 6.760 e 1.000 horas, respectivamente. Foram consideradas magnitudes de tensão máxima e mínima de 12,66 kV e 12,027 kV, respectivamente. Sendo que, a magnitude de tensão mínima é calculada seguindo os padrões exigidos pelas normas da ANEEL.

Na Figura 19 é apresentado o perfil da magnitude de tensão inicial do sistema (antes da alocação dos bancos de capacitores), obtido do FC calculado, usando o MLIM e o

MCSO. Podemos observar que a magnitude de tensão em alguns nós na demanda pesada (em vermelho) violam a faixa recomendada pela ANEEL.

**Figura 19** — Perfil da magnitude de tensão do sistema de 70 nós sem bancos de capacitores



Fonte: Dados da pesquisa do autor.

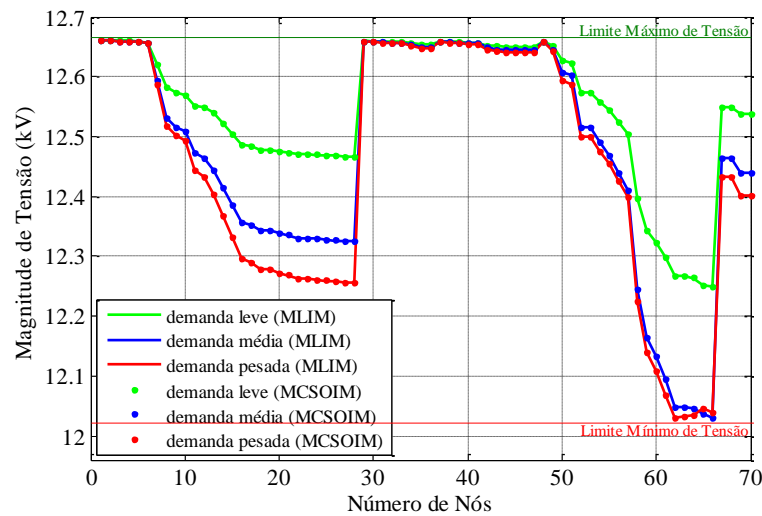
Note na Figura 19 que a magnitude de tensão mínima está localizada no nó 66 tanto no MLIM quanto no MCSO, com os valores de 11,5103 kV e 11,5102 kV, respectivamente. Os custos totais de perdas de energia foram iguais a US\$ 73.600,08 calculada a partir do MLIM e US\$ 72.942,68 para o MCSO.

Para eliminar as violações das magnitudes de tensão no sistema, será determinado o tamanho e localização de bancos de capacitores fixos ou chaveados usando o MLIM (95)-(121) e MCSOIM (122)-(135).

O número máximo de bancos de capacitores  $\overline{n^{cp}}$  é seis e o número máximo de módulos de capacitores  $\overline{n_b^{cp}}$  é quatro. Estes valores de foram escolhidos arbitrariamente.

O MLIM e o MCSOIM apresentam 707 e 140 variáveis binárias, 4.133 e 1.943 restrições, respectivamente. As soluções ótimas encontradas pelo *solver* CPLEX para ambos os modelos são iguais, sendo a alocação de três BC, um fixo (no nó 13), com dois módulos de capacitores, e dois chaveados (nos nós 62 e 65). O BC no nó 62 contém quatro módulos de capacitores, operando dois na demanda leve, três na demanda média e quatro na demanda pesada, e o BC no nó 65 contém quatro módulos de capacitores, estando em operação um na demanda média e quatro na demanda pesada. Após esta alocação dos BCs, o novo perfil da magnitude de tensão ficou dentro da faixa adequada, como pode ser visualizado na Figura 20.

**Figura 20** — Perfil da magnitude de tensão do sistema de 70 nós com bancos de capacitores



Fonte: Dados da pesquisa do autor.

Note que, o problema de violação das magnitudes de tensão nos nós do sistema foi resolvido, sendo o menor valor igual a 12,0303 kV para o obtido com o MLIM e 12,0304 kV para o obtido com o MCSOIM, ambos localizados no nó 62 da demanda pesada.

Um resumo dos resultados obtidos com o MCSO, o MLIM e o MCSOIM são mostrados no Quadro 6.

**Quadro 6** — Resultados do sistema de 70 nós

Modelos	Perdas de Potência (kW) por demanda			Tensão Mínima por nível de demanda		
	Leve	Média	Pesada	Leve	Média	Pesada
MCSO	52,89	140,36	224,94	12,11	11,76	11,51
MLIM	37,08	94,35	205,78	12,25	12,03	12,03
MCSOIM	36,15	93,82	204,81	12,25	12,03	12,03

Fonte: Dados da pesquisa do autor.

Da análise dos dados contidos no Quadro 6 é possível constatar que com a alocação de bancos de capacitores obtida com os modelos MLIM e MCSOIM, as perdas de potência ativa diminuiram em todos os níveis de demanda, quando comparadas com os valores obtidos com o MCSO sem alocação de BCs. Como consequência, tem-se um custo menor com as perdas de energia. Mesmo com o custo de investimento para a alocação dos BC, o custo total foi menor, como mostrado no Quadro 7.

**Quadro 7** — Resultados da alocação de BC no sistema de 70 nós

Modelos	Bancos de Capacitores (kVAr)					Custo das Perdas de Energia (US\$)	Custo de Investimento (US\$)	Custo Total (US\$)	Tempo (s)
	Nó	Tipo	Demanda						
			Leve	Média	Pesada				
MLIM	13	Fixo	600	600	600	52.841,50	12.600,00	65.441,50	387,91
	62	Chaveado	600	900	1200				
	65	Chaveado	0	300	1200				
MCSOIM	13	Fixo	600	600	600	52.510,43	12.600,00	65.110,43	216,20
	62	Chaveado	600	900	1200				
	65	Chaveado	0	300	1200				

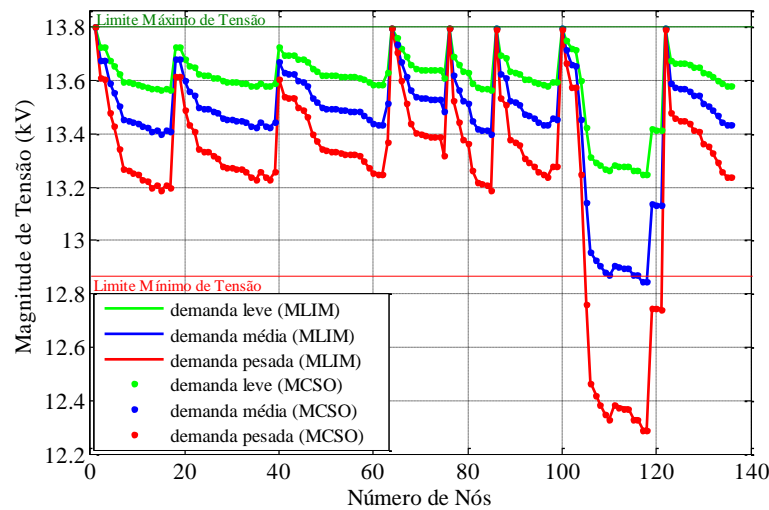
Fonte: Dados da pesquisa do autor.

Ao compararmos os modelos sem e com alocação de BCs, nota-se que após a alocação dos BC houve uma redução do custo total (função objetivo) de US\$ 73.600,08 para US\$ 65.441,50 com o MLIM e de US\$ 72.942,68 para US\$ 65.110,43 com o MCSOIM. Isto mostra a eficácia da instalação dos BCs. Da análise do Quadro7, o MCSOIM teve um custo total e um tempo computacional menor do que MLIM. Além disso, quando comparados os resultados dos modelos MLIM e MCSOIM com os obtidos em (FRANCO, 2013), é possível ver que o custo total de US\$ 66.995,50, ou seja, a soma do custo de perdas de US\$ 55.295,00 e do custo de investimento de US\$ 11.700,00, são maiores que nos modelos testados neste trabalho.

#### 4.1.2 Sistema de distribuição de 136 nós

Os dados do sistema de distribuição de 136 nós são apresentados no apêndice A.2. Para o problema de alocação de BCs com três níveis de demanda foram considerados: demanda leve, demanda média e demanda pesada, sendo que a demanda leve e pesada corresponde a 60% e 150% da demanda média, respectivamente (mostrada no apêndice A.2). O número de horas no ano é de 8.760 horas, sendo que os níveis de demanda leve, média e pesada correspondem a uma duração de 1.000, 6.760 e 1.000 horas respectivamente. Foram consideradas magnitudes de tensão máxima e mínima de 13,8 kV e 12,83 kV, respectivamente. A magnitude de tensão mínima é calculada seguindo os padrões exigidos pela ANEEL. A Figura 21 ilustra a magnitude de tensão inicial para cada nó do sistema (antes da alocação de BC) determinada usando os modelos MLIM e MCSOIM.

**Figura 21** — Perfil da magnitude de tensão do sistema de 136 nós sem bancos de capacitores



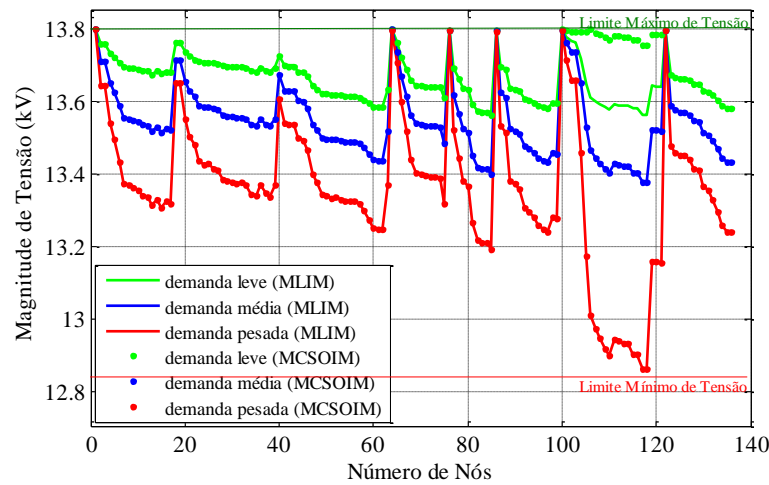
Fonte: Dados da pesquisa do autor.

Na Figura 21, a magnitude de tensão mínima está localizada no nó 117 no MLIM e no nó 118 no MCSO, com os valores de 12,2906 kV e 12,2881 kV, respectivamente. Os custos totais de perdas de energia foram iguais a US\$ 181.317,33 para a MLIM e US\$ 181.802,77 para o MCSOIM.

Para que não haja violações da magnitude de tensão, bancos de capacitores fixos ou chaveados serão instalados no sistema usando os modelos MLIM e MCSOIM, com  $\overline{n^{cp}}$  e  $\overline{n_b^{cp}}$  iguais a quatro.

O MLIM e o MCSOIM apresentam 1.572 e 272 variáveis binárias e 8.767 e 3.695 restrições, respectivamente. A solução ótima encontrada pelo *solver* CPLEX para o modelo MLIM é a alocação de quatro BCs, sendo três BC fixos (nos nós 14, 32, 109), com dois módulos de capacitores nos nós 14 e 32 e um no nó 109, e um BC chaveado (no nó 106), contendo quatro módulos de capacitores, operando dois na demanda leve e quatro na demanda média e pesada. Já para o MCSOIM a solução é alocar quatro BCs fixos (nos nós 14, 32, 106 e 109), com dois módulos de capacitores nos nós 14 e 32, quatro no nó 106 e um no nó 109. Depois desta alocação dos BCs, o novo perfil da magnitude de tensão está apresentado na Figura 22.

**Figura 22** — Perfil da magnitude de tensão do sistema de 136 nós com bancos de capacitores



Fonte: Dados da pesquisa do autor.

Na Figura 22 nota-se que o problema de violação das magnitudes de tensão nos nós do sistema foi resolvido, tendo o menor valor de 12,8597 kV para MLIM localizado no nó 117 e de 12,8604 kV para a MCSOIM localizado no nó 118.

No Quadro 8 e no Quadro 9 são mostrados resumos dos resultados obtidos com os modelos MCSO, MLIM e MCSOIM.

**Quadro 8** — Resultado após a alocação de BC no sistema de 136 nós

Modelos	Perdas de Potência (kW) por demanda			Tensão Mínima por nível de demanda		
	Leve	Média	Pesada	Leve	Média	Pesada
MCSO	111,70	320,28	753,28	13,25	12,84	12,29
MLIM	102,17	286,18	675,12	13,56	13,38	12,86
MCSOIM	105,75	286,65	674,58	13,56	13,38	12,86

Fonte: Dados da pesquisa do autor.

Ao analisar o Quadro 8 é possível perceber que com a alocação de BCs, quando comparados os valores obtidos com o MLIM e com o MCSO, sem alocação de BCs, houve uma redução de perdas de potência ativa, em cada nível de demanda, ocasionando, portanto, um custo menor de perdas de energia. Mesmo com o custo de investimento feito para a alocação dos BCs o custo total, como mostrado no Quadro 9, é menor que no caso sem alocação de BCs.

**Quadro 9** — Resultados da alocação de BC no sistema de 136 nós

Modelos	Bancos de Capacitores (kVAr)					Custo das Perdas de Energia (US\$)	Custo de Investimento (US\$)	Custo Total (US\$)	Tempo (s)
	Nó	Tipo	Demanda						
			Leve	Média	Pesada				
MLIM	14	Fixo	600	600	600	162.710,93	12.400,00	175.110,93	120.020,78
	32	Fixo	600	600	600				
	106	Chaveado	600	1200	1200				
	109	Fixo	300	300	300				
MCSOIM	14	Fixo	600	600	600	163.085,25	12.100,00	175.185,25	26.390,67
	32	Fixo	600	600	600				
	106	Fixo	1200	1200	1200				
	109	Fixo	300	300	300				

Fonte: Dados da pesquisa do autor.

Ao comparar os modelos sem e com alocação de BC, nota-se que, após a alocação dos BCs, houve uma redução do custo total (função objetivo) de US\$ 181.317,33 para US\$ 175.110,93 utilizando o MLIM e de US\$ 181.802,77 para US\$ 175.185,25 utilizando o MCSOIM, o que garante a eficácia da instalação dos BCs.

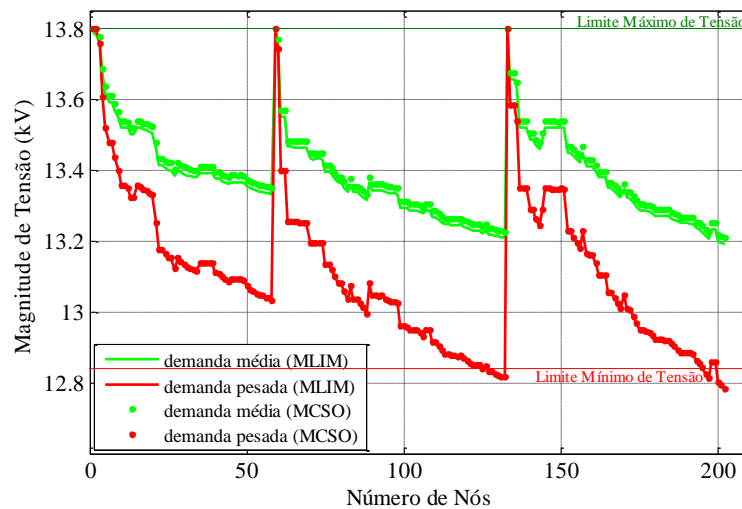
Da análise do Quadro 9, observa-se que há divergência dos resultados obtidos nos modelos testados. Note que, o MCSOIM teve um tempo computacional menor e um custo total maior do que o MLIM, porém a solução ótima encontrada pelo MLIM tem um pequeno erro de aproximação por causa da discretização ( $V_{j,d}^{qdr} I_{ij,d}^{qdr}$ ) e da linearização ( $P_{ij,d}^2 + Q_{ij,d}^2$ ) feita neste modelo, como foi mostrado no Capítulo 2 deste trabalho. Portanto, para garantir a confiabilidade dos resultados, as soluções encontradas pelo MLIM e MCSOIM foram fixadas no MNLIM, descrito no capítulo 3, com o objetivo de calcular o ponto de operação exato para ambas as soluções. Com o teste utilizando o MNLIM foi obtido um custo total de US\$ 175.184,67 e de US\$ 175.182,56, respectivamente, para os resultados obtidos com o MLIM e MCSOIM. Note que, o MCSOIM encontrou uma melhor solução quando comparado com o MLIM.

Assim, é possível concluir que apesar do MCSOIM ter obtido uma solução com um custo total maior (quando comparado com o MLIM, ver Quadro 9), o seu valor é o que mais se aproxima do MNLIM, comprovando que o MLIM obteve um valor menor (quando comparado com o MCSOIM, ver Quadro 9) por causa de suas aproximações.

#### 4.1.3 Sistema de distribuição de 202 nós

Os dados do sistema de distribuição de 202 nós são apresentados no apêndice A.3 e foram retirados de (ALVES, 2012), e está no site do LAPSEE. Os valores das demandas apresentadas no apêndice A.3 correspondem a uma situação de demanda média, sendo que para este problema de alocação de BC foram considerados os níveis de demanda média e demanda pesada, em que a demanda pesada corresponde a 166% da demanda média. O número de horas no ano para os níveis de demanda média e pesada são de 7760 e 1000, respectivamente. Foram consideradas magnitudes de tensão máxima e mínima de 13,8 kV e 12,83 kV, respectivamente. O valor do custo de perdas para este sistema é de US\$ 0,02 por kWh. Na Figura 23 estão as magnitudes de tensão iniciais do sistema (antes da alocação de BC), usando os modelos MLIM e MCSO.

**Figura 23** — Perfil da magnitude de tensão do sistema de 202 nós sem bancos de capacitores



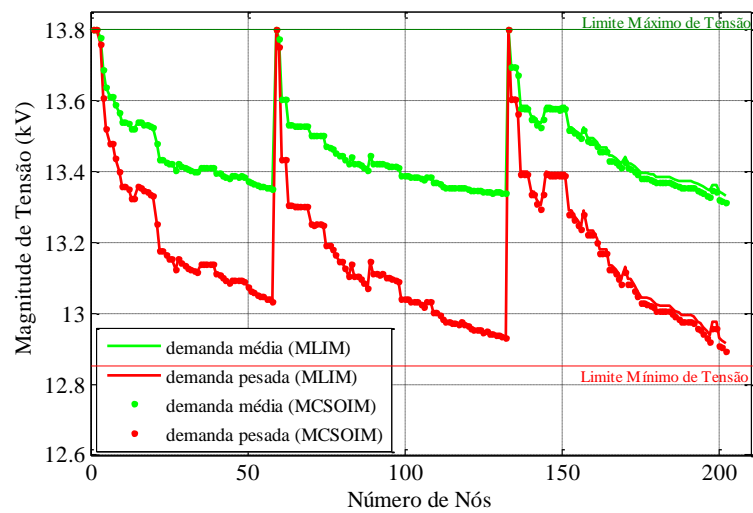
Fonte: Dados da pesquisa do autor.

É possível notar na Figura 23 que a magnitude de tensão mínima está localizada no nó 202 tanto no MLIM quanto no MCSO, com os valores de 12,7844 kV e 12,7842 kV, respectivamente. Os custos totais de perdas de energia foram iguais a US\$ 117.716,77 para a MLIM e US\$ 117.748,08 para o MCSO.

Para resolver este problema das violações das magnitudes de tensão, bancos de capacitores fixos ou chaveados serão instalados no sistema usando o MLIM e o MCSOIM, com  $\overline{n}^{cp}$  e  $\overline{n}_b^{cp}$  iguais a seis.

O MLIM e o MCSOIM apresentam 1874 e 404 variáveis binárias, 9424 e 3585 restrições, respectivamente. A solução ótima encontrada pelo *solver* CPLEX para o MLIM é a alocação de dois BCs fixos (nos nós 130 e 200), contendo cinco módulos de capacitores no nó 130 e seis no nó 200. Já para o MCSOIM a solução é alocar dois BCs fixos (também nos nós 130 e 200), ambos com 5 módulos de capacitores. Depois desta alocação dos BCs, o novo perfil da magnitude de tensão está apresentado na Figura 24.

**Figura 24** — Perfil da magnitude de tensão do sistema de 202 nós com bancos de capacitores



Fonte: Dados da pesquisa do autor.

Note que o problema de violação das magnitudes de tensão nos nós do sistema foi resolvido, sendo o menor valor de 12,9146 kV para MLIM localizado no nó 202 e de 12,8931 kV para a MCSOIM localizado no nó 202.

No Quadro 10 e no Quadro 11 são mostrados resumos dos resultados obtidos para os modelos MCSO, MLIM e MCSOIM.

**Quadro 10** — Resultado após a alocação de BC no sistema de 202 nós

Modelos	Perdas de Potência (kW) por demanda		Tensão Mínima por nível de demanda	
	Média	Pesada	Média	Pesada
MCSO	552,01	1.603,64	13,21	12,78
MLIM	489,61	1.474,06	13,33	12,91
MCSOIM	492,57	1.483,48	13,31	12,89

Fonte: Dados da pesquisa do autor.

Com a análise do Quadro 10, nota-se que ao alocar BCs houve redução de perdas de potência ativa, em cada nível de demanda, ocasionando um custo de perdas de energia e um custo total menor, mesmo com o custo de investimento feito para a alocação dos BCs, como mostrado no Quadro 11.

**Quadro 11** — Resultados da alocação de BC no sistema de 202 nós

Modelos	Bancos de Capacitores (kVAr)				Custo das Perdas de Energia (US\$)	Custo de Investimento (US\$)	Custo Total (US\$)	Tempo (s)
	Nó	Tipo	Demanda					
			Média	Pesada				
MLIM	130	Fixo	1500	1500	105.468,75	11.900,00	117.368,75	17.320,25
	200	Fixo	1800	1800				
MCSOIM	130	Fixo	1500	1500	106.117,07	11.000,00	117.117,07	133,12
	200	Fixo	1500	1500				

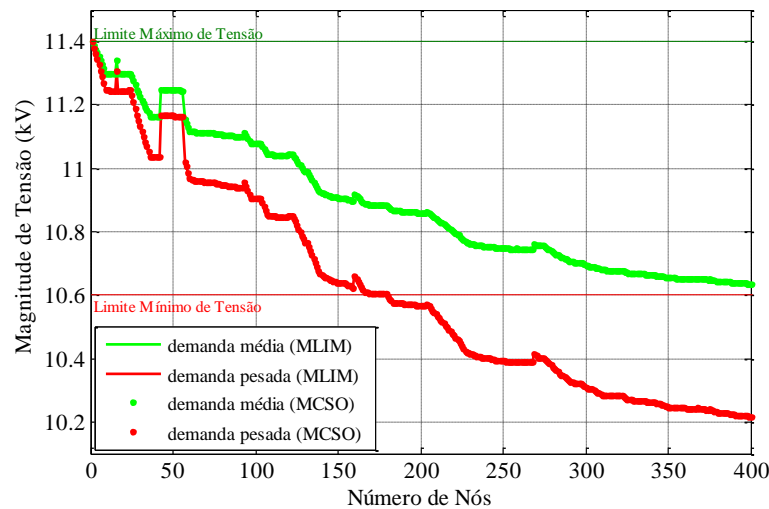
Fonte: Dados da pesquisa do autor.

Comparando os modelos sem e com alocação de BC, notamos que após a alocação dos BC houve uma redução do custo total (função objetivo) de US\$ 117.716,77 para US\$ 117.368,75 com o MLIM e de US\$ 117.748,08 para US\$ 117.117,07 com o MCSOIM. Isto mostra a eficácia da instalação dos BCs. Analisando o Quadro 11, vimos que há divergência dos resultados obtidos nos modelos testados, porém o MCSOIM teve um custo total e um tempo computacional menor do que MLIM.

#### 4.1.4 Sistema de distribuição de 400 nós

Os dados do sistema de distribuição de 400 nós são apresentados no apêndice A.4 e foram retirados de (ALVES, 2012), que é encontrado no site do LAPSEE. Os valores das demandas apresentadas no apêndice A.4 correspondem à operação com demanda média. A demanda pesada corresponde a 150% dos valores da demanda média. O número de horas no ano para os níveis de demanda média e pesada são de 7760 e 1000, respectivamente. Foram consideradas magnitudes de tensão máxima e mínima de 11,4 kV e 10,6 kV, respectivamente. Na Figura 25 está a magnitude de tensão inicial do sistema (antes da alocação de BC) usando o MLIM e o MCSO.

**Figura 25** — Perfil da magnitude de tensão do sistema de 400 nós sem bancos de capacitores



Fonte: Dados da pesquisa do autor.

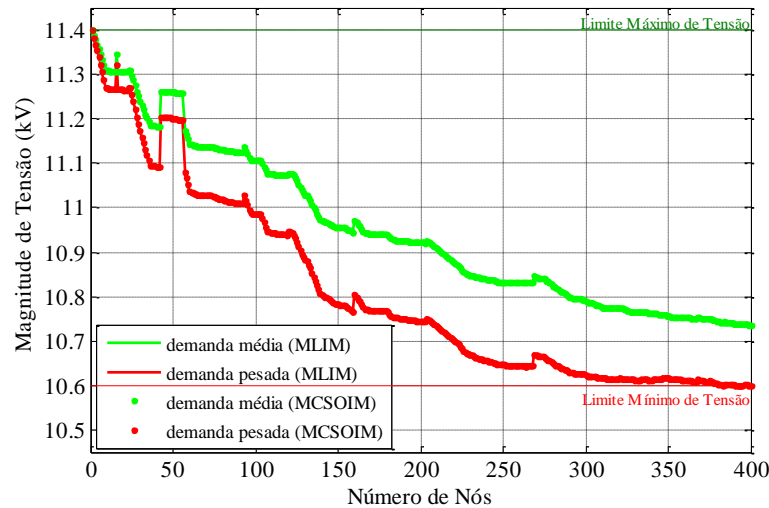
É possível observar na Figura 25 que a magnitude de tensão mínima está localizada no nó 400 tanto no MLIM quanto no MCSO, com os valores de 10,2178 kV e 10,2177 kV, respectivamente. Os custos totais de perdas de energia foram iguais a US\$ 30.392,67 para a MLIM e US\$ 30.357,19 para o MCSO.

Para resolver este problema das violações das magnitudes de tensão, bancos de capacitores fixos ou chaveados serão instalados no sistema usando o MLIM e o MCSOIM, com um valor de  $\overline{n}^{cp}$  igual a quatro e  $\overline{n}_b^{cp}$  igual a três.

O MLIM e o MCSOIM apresentam 2.808 e 400 variáveis binárias, 15.358 e 5.647 restrições, respectivamente. As soluções ótimas encontradas pelo *solver* CPLEX para o modelo MLIM é a alocação de quatro BCs, sendo um fixo (no nó 228), com dois módulos de capacitores, e três chaveados (nos nós 348, 350 e 398). O BC no nó 348 contém três módulos de capacitores, que operam apenas na demanda pesada; o BC instalado no nó 350 contém três módulos de capacitores, operando um módulo de capacitor na demanda média e três na demanda pesada, já o BC instalado no nó 398 contém dois módulos de capacitores, que operam apenas na demanda pesada. Para o MCSOIM a solução é alocar um BC fixo (também no nó 228), com dois módulos de capacitores, e três chaveados (também nos nós 348, 350 e 398), porém no nó 348 o BC com três módulos de capacitores, tem um módulo de capacitor operante na demanda média e três na demanda pesada; o BC instalado no nó 350 contém três módulos de capacitores, que estão operantes apenas na demanda pesada, e o BC instalado no

nó 398 contém dois módulos de capacitores, que estão operantes apenas na demanda pesada. Após esta alocação dos BCs, o novo perfil da magnitude de tensão ficou dentro da faixa de regulação, como pode ser visualizado na Figura 26.

**Figura 26** — Perfil da magnitude de tensão do sistema de 400 nós com bancos de capacitores



Fonte: Dados da pesquisa do autor.

Nota-se, pela Figura 26, que o problema de violação das magnitudes de tensão nos nós do sistema foi resolvido, com o menor valor de 10,6004 kV para MLIM e de 10,6001 kV para o MCSOIM ambos localizados no nó 393.

No Quadro 12 e no Quadro 13 são mostrados resumos dos resultados obtidos para os modelos MCSO, MLIM e MCSOIM.

**Quadro 12** — Resultado após a alocação de BC no sistema de 400 nós

Modelos	Perdas de Potência (kW) por demanda		Tensão Mínima por nível de demanda	
	Média	Pesada	Média	Pesada
MCSO	149,63	356,74	10,64	10,22
MLIM	129,54	453,36	10,74	10,60
MCSOIM	129,40	453,84	10,74	10,60

Fonte: Dados da pesquisa do autor.

Ao analisar o Quadro 12, nota-se que ao contrário dos sistemas testados anteriormente, ao alocar BCs, houve aumento de perdas de potência ativa, no nível de

demanda pesada, ocasionando um custo de perdas de energia e um custo total maior, como mostrado no Quadro 13.

**Quadro 13** — Resultados da alocação de BC no sistema de 400 nós

Modelos	Bancos de Capacitores (kVAr)				Custo das Perdas de Energia (US\$)	Custo de Investimento (US\$)	Custo Total (US\$)	Tempo (s)
	Nó	Tipo	Demanda					
			Média	Pesada				
MLIM	228	Fixo	600	600	29.171,97	13.900,00	43.071,97	54.800,76
	348	Chaveado	0	900				
	350	Chaveado	300	900				
	398	Chaveado	0	600				
MCSOIM	228	Fixo	600	600	29.159,17	13.900,00	43.059,17	67.708,63
	348	Chaveado	300	900				
	350	Chaveado	0	900				
	398	Chaveado	0	600				

Fonte: Dados da pesquisa do autor.

Ao compararmos os modelos sem e com alocação de BC, notamos que após a alocação dos BC houve um aumento do custo total (função objetivo) de US\$ 30.392,67 para US\$ 43.071,97 com o MLIM e de US\$ 30.357,19 para US\$ 43.059,17 com o MCSOIM. Isto ocorreu porque antes da alocação de BCs, o sistema de 400 nós estava violando a faixa de regulação exigida pela ANEEL, tornando-o infactível. Após a instalação dos BCs, o sistema se torna factível, comprovando a eficiência dos modelos para alocação de BCs. Com a análise do Quadro 13, vimos que há divergência dos resultados obtidos nos modelos testados, porém o MCSOIM teve um custo total menor do que MLIM.

## 5 Conclusões

Nesta dissertação foram desenvolvidos dois modelos matemáticos para resolver o problema de alocação ótima de bancos de capacitores em sistemas de distribuição radiais. O primeiro modelo é de programação linear inteiro misto e o segundo é de programação cônica de segunda ordem inteiro misto. Tanto o MLIM quanto o MCSOIM garantem a convergência e otimalidade usando *solvers* comerciais.

O ponto de operação em regime permanente do sistema de distribuição radial foi modelado utilizando expressões lineares inteiras mistas e cônicas de segunda ordem. No modelo linear inteiro misto, a restrição não linear do cálculo da magnitude de corrente, foi linearizada usando duas técnicas de linearização. Enquanto que no modelo cônico de segunda ordem, a restrição do cálculo da magnitude de corrente foi modelada como uma restrição cônica, e foi demonstrado que no ponto de solução a restrição cônica está ativa, mostrando que a solução é igual ao modelo não linear. Dos resultados encontrados podemos concluir que ambos os modelos apresentam boa exatidão para calcular o ponto de operação em regime permanente.

Os sistemas testes de 70, 136, 202 e 400 nós foram utilizados para mostrar a eficiência e a exatidão da metodologia proposta. Pode ser observado no decorrer das simulações que ambos os modelos propostos reduziram as perdas de potência ativa na maioria dos sistemas testes, e minimizaram as violações das magnitudes de tensões em todos os sistemas testados, que agora se encontram dentro dos limites adequados exigidos pela ANEEL.

Nota-se que, em geral, o MCSOIM encontrou a solução ótima com um tempo computacional menor, quando comparado com o tempo computacional requerido para resolver o MLIM. Adicionalmente, para o sistema de 136 nós, o MCSOIM encontrou uma solução melhor do que o MLIM. Assim, podemos concluir que o MLIM tem um erro de aproximação por causa das linearizações que são feitas. Enquanto que a restrição cônica do MCSOIM representa melhor a não linearidade da restrição do cálculo da magnitude de corrente.

Como sugestões para trabalhos futuros, podemos considerar o desenvolvimento de modelos matemáticos de programação linear inteira mista e programação cônica de segunda ordem para resolver os seguintes problemas: a) alocação simultânea de banco de capacitores e

reguladores de tensão; b) reconfiguração de sistemas de distribuição de energia elétrica; e c) o planejamento de sistema de distribuição de energia elétrica.

## Referências

ALVES, R. P. **Localização ótima de reguladores de tensão em sistemas de distribuição de energia elétrica radiais usando uma formulação linear inteira mista**. 2012. 95 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2012.

AGÊNCIA NACIONAL DE ENERGIA ELÉTRICA - ANEEL. **Resolução Nº505** - conformidades dos níveis de tensão em regime permanente nos sistemas de energia elétrica - 26 de novembro de 2001. 19 p. Disponível em: <<http://www.aneel.gov.br/>>. Acesso em: 04 setembro 2012.

ARRILLAGA, J.; ARNOLD, C. P. **Computer Analysis of Power Systems**. Chichester: John Wiley & Sons, 1991.

BARAN, M. E.; WU, F. F. Optimal capacitor placement on radial distribution systems. **IEEE Transactions on Power Delivery**, New York, v. 4, n. 1, p. 725-734, 1989.

BOONE, G.; CHIANG, H. D. Optimal capacitor placement in distribution systems by genetic algorithm. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, Oxford, v. 15, n. 3, p. 155–162, 1993.

BYRD, R. H.; NOCEDAL, J.; WALTZ, R. A. KNITRO: An integrated package for nonlinear optimization. **Large-Scale Nonlinear Optimization**. New York: Springer Verlag, p. 35-59, 2006.

CASTRO, C. A. **Reconfiguração automática de redes de distribuição de energia elétrica**. 1985. 186 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade de Campinas, Campinas, 1985.

CESPEDES, R. New method for the analysis of distribution networks. **IEEE Transactions Power Delivery**, New York, v. 5, n. 1, p. 391-396, 1990.

CHANG, C. F. Reconfiguration and capacitor placement for loss reduction of distribution systems by ant colony search algorithm. **IEEE Transactions Power Systems**, New York, v. 23, n. 4, p. 1747-1755, 2008.

CHANG, G. W.; CHANG, W. C.; CHUANG, C. S.; SHIH, D. Y. Fuzzy logic and immune-based algorithm for placement and sizing of shunt capacitor banks in a distorted power network. **IEEE Transactions on Power Delivery**, New York, v. 26, n. 4, p. 2145-2153, 2011.

CHIANG, H. D.; WANG, J. C.; COCKINGS, O.; SHIN, H. D. Optimal capacitor placement in distribution systems, part I: a new formulation and the overall problem. **IEEE Transactions on Power Delivery**, New York, v. 5, n. 2, p. 634-642, 1990.

CHIANG, H. D.; WANG, J. C.; COCKINGS, O.; SHIN, H. D. Optimal capacitor placement in distribution systems, part II: solution algorithms and numerical results. **IEEE Transactions on Power Delivery**, New York, v. 5, n. 2, p. 643-649, 1990.

CHIOU, J. P.; CHANG C. F.; SU, C. T. Ant direction hybrid differential evolution for solving large capacitor placement problems. **IEEE Transactions on Power Systems**, New York, v. 19, n. 4, p. 1794-1800, 2004.

CPLEX Optimization subroutine library guide and reference, version 11.0. **CPLEX division**. New York: ILOG Inc., 2008.

FARAHANI, V.; VAHIDI, B.; ABYANEH, H. A. Reconfiguration and capacitor placement simultaneously for energy loss reduction based on an improved reconfiguration method. **IEEE Transactions Power Systems**, New York, v. 27, n. 2, p. 587-595, 2012.

FOURER, R.; GAY, D. M. ;KERNIGHAN, B. W. **AMPL: a modeling language for mathematical programming**. 2. ed. Pacific Grove: Brooks/Cole-Thomson Learning, 2003. 517 p.

FRANCO, J. F.; RIDER, M. J.; LAVORATO, M.; ROMERO, R. Optimal allocation of capacitors in radial distribution systems with distributed generation. In: IEEE PES CONFERENCE on INNOVATIVE SMART GRID TECHNOLOGIES, ISGT LATIN AMERICA, 2011. **Conference of the...** Medellin: IEEE, 2011. p. 1-6. <<http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?arnumber=06083188>>. Acesso em: 08 jul. 2013.

FRANCO, J. F.; RIDER, M. J.; LAVORATO, M.; ROMERO, R. A mixed-integer LP model for the optimal allocation of voltage regulators and capacitors in radial distribution systems. **International Journal of Electrical Power and Energy Systems**, New York, v. 48, p. 123-130, 2013.

FRANCO, J. F.; RIDER, M. J.; LAVORATO, M.; ROMERO, R. Optimal conductor size selection and reconductoring in radial distribution systems using a mixed-integer lp approach. **IEEE Transactions Power Systems**, New York, v. 28, n. 1, p. 10-20, February 2013.

GALLEGO, R. A.; MOMTICELLI, A. J.; ROMERO, R. Optimal capacitor placement in radial distribution networks. **IEEE Transactions on Power Systems**, New York, v. 16, n. 4, p. 630-637, 2001.

GÖNEN, T. **Electric power distribution systems engineering**. New York: McGraw-Hill, 1986. 739 p.

GOSWAMI, S. K. e BASU, S. K. A new algorithm for the reconfiguration of distribution feeders for loss minimization. **IEEE Transactions Power Delivery**, New York, v. 7, n. 3, p. 1484-1491, 1992.

HAFFNER, S.; GASPERIN, L. V.; PEREIRA, L. A.; BARRETO, L. Alocação de bancos de capacitores em redes de distribuição de energia visando eliminar violações de tensão. **Revista Controle & Automação**, Campinas, v. 20, n. 4, p. 546-563, 2009.

HUANG, Y. C.; YANG, H. T.; HUANG, C. L. Solving the capacitor placement problem in a radial distribution system using tabu search approach. **IEEE Transactions on Power Systems**, New York, v. 11, n. 4, p. 1868-1873, 1996.

HUANG, S. J.; LIU, X. Z. A plant growth-based optimization approach applied to capacitor placement in power systems. **IEEE Transactions Power Systems**, Atlanta, v. 27, n. 4, p. 2138-2145, 2012.

KALANTARI, M.; KAZEMI, A. Placement of distributed generation unit and capacitor allocation in distribution systems using genetic algorithm. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON ENVIRONMENT AND ELECTRICAL ENGINEERING, 10, 2011, Rome. **Proceedings of the...** Rome: IEEE, 2011. p. 1-5. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=5874722>>. Acesso em: 15 jul. 2012.

KERSTING, W. H. Regulation of voltage. In: **Distribution system modeling and analysis**. Boca Raton: CRC Press, 2001. p. 145-198. Disponível em: <[http://prof.usb.br/~pdeoliveira/ct7235/k\\_dsma.pdf](http://prof.usb.br/~pdeoliveira/ct7235/k_dsma.pdf)>. Acesso em: 20 jun. 2012.

LADJAVARDI, M.; MASOUM, M. A. S. Genetically optimized fuzzy placement and sizing of capacitor banks in distorted distribution networks. **IEEE Transactions on Power Delivery**, New York, v. 23, n. 1, p. 449-456, 2008.

LEVITIN, G.; KALYUZHNY, A.; SHENKMAN, A.; CHERTKOV, M. Optimal capacitor allocation in distribution systems using a genetic algorithm and a fast energy loss computation technique. **IEEE Transactions on Power Delivery**, New York, v. 15, n. 2, p. 623-628, 2000.

MANTOVANI, J. R. S.; CASARI, F.; ROMERO, R. Reconfiguração de sistemas radiais utilizando o critério de queda de tensão. **SBA Controle e Automação**, São Paulo, v.11, n.3, dez. 2000.

MEKHAMER, S. F.; EL-HAWARY, M. E.; SOLIMAN, S. A.; MOUSTAFA, M. A.; MANSOUR, M. M. New heuristic strategies for reactive power compensation of radial distribution feeders. **IEEE Transactions on Power Delivery**, New York, v. 17, n. 4, p. 1128-1135, 2002.

MILOŠEVIĆ, B.; BEGOVIĆ, M. Capacitor placement for conservative voltage reduction on distribution feeders. **IEEE Transactions on Power Delivery**, New York, v. 19, n. 3, p. 1360-1367, 2004.

NG, H. N.; SALAMA, M. M. A.; CHIKHANI, A. Y. Classification of capacitor allocation techniques. **IEEE Transactions on Power Delivery**, New York, v. 15, n. 1, p. 387-392, 2000.

PARK, J. Y.; SOHN, J. M.; PARK, J. K. Optimal capacitor allocation in a distribution system considering operation costs. **IEEE Transactions Power Systems**, New York, v. 24, n. 1, p. 462-468, 2009.

PEREIRA, C. A. N. **Alocação ótima de reguladores de tensão em redes de distribuição de energia elétrica**. 2009. 106 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade de Campinas, Campinas, 2009.

PIRES, D. F.; MARTINS, A. G.; ANTUNES, C. H. A multiobjective model for VAR planning in radial distribution networks based on tabu search. **IEEE Transactions on Power Systems**, New York, v. 20, n. 2, p. 1089-1094, 2005.

SEGURA, S. **Alocação ótima de bancos de capacitores em sistemas de distribuição radial**. 2006. 138 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2006.

SEGURA, S.; ROMERO, R.; RIDER, M. J. Efficient heuristic algorithm used for optimal capacitor placement in distribution systems. **Electrical Power and Energy Systems**, Guildford, v. 32, n.1, p. 71-78, 2010. Disponível em: <[http://ac.els-cdn.com/S0142061509000982/1-s2.0-S0142061509000982-main.pdf?\\_tid=efb4c152-1980-11e3-b4b8-00000aab0f01&acdnat=1378752912\\_1dcee0dc55c63938ed3c88faf3896cba](http://ac.els-cdn.com/S0142061509000982/1-s2.0-S0142061509000982-main.pdf?_tid=efb4c152-1980-11e3-b4b8-00000aab0f01&acdnat=1378752912_1dcee0dc55c63938ed3c88faf3896cba)>. Acesso em: 25 jun. 2013.

SHIRMOHAMMADI, D.; HONG, H. W.; SEMLYEN, A. ; LLUO, G. X. A compensation-based power flow method for weakly meshed distribution and transmission networks. **IEEE Transactions Power Systems**, New York, v. 3, n. 2, p. 753-762, may 1988.

SILVA, I. C.; CARNEIRO, S.; OLIVEIRA, E. J.; COSTA, J. S.; PEREIRA, J. L. R.; GARCIA, P. A. N. A heuristic constructive algorithm for capacitor placement on distribution systems. **IEEE Transactions Power Systems**, New York, v. 23, n. 4, p. 1619-1626, 2008.

SOUZA, B. A.; ALVES, H. N.; FERREIRA, H. A. Microgenetic algorithms and fuzzy logic applied to the optimal placement of capacitor banks in distribution networks. **IEEE Transactions on Power Systems**, New York, v. 19, n. 2, p. 942-947, 2004.

STOTT, B. Review of load-flow calculation methods. **Proceedings of the IEEE**, New York, v. 62, n. 7, p. 916-929, 1974.

SUNDHARARAJAN, S.; PAHWA, A. Optimal selection of capacitors for radial distribution systems using a genetic algorithm. **IEEE Transactions on Power Systems**, New York, v. 9, n. 3, p. 1499-1507, 1994.

TENG, J. H.; CHEN, C. Y.; CHEN, C. F.; LIU, Y. H. Optimal capacitor control for unbalanced distribution systems with distributed generations. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON SUSTAINABLE ENERGY TECHNOLOGIES, 2008, Singapore. **Proceedings of the...** Singapore: IEEE, 2008. p. 755-760. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?arnumber=04747107>>. Acesso em: 12 jun. 2013.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA. FACULDADE DE ENGENHARIA, 2013. **Laboratório de planejamento de sistemas de energia elétrica**: banco de dados. Disponível em:<<http://www.feis.unesp.br/#!/departamentos/engenharia-eletrica/pesquisas-e-projetos/lapsee/downloads/materiais-de-cursos1193/>>. Acesso em: 15 mar. 2013.

## Apêndice A – Dados dos sistemas de distribuição testados

### A.1 - Sistema de distribuição de 70 nós

Tabela A.1— Dados do sistema de distribuição de 70 nós

Trecho Inicial	Final	Resistência ( $\Omega$ )	Reatância ( $\Omega$ )	Carga barra final (kW)	Carga barra final (kVAr)	Imax (kA)
1	2	0,0005	0,0012	0	0	400
2	3	0,0005	0,0012	0	0	400
3	4	0,0001	0,0001	0	0	400
3	29	0,0044	0,0108	0	0	400
4	5	0,0015	0,0036	0	0	400
4	37	0,0044	0,0108	0	0	400
5	6	0,0251	0,0294	2,6	2,2	400
5	48	0,0034	0,0084	40,4	30	400
6	7	0,3660	0,1864	75	54	400
7	8	0,3811	0,1941	30	22	400
8	9	0,0922	0,0470	28	19	400
9	10	0,0493	0,0251	145	104	400
9	52	0,0928	0,0473	145	104	400
10	11	0,8190	0,2707	8	5,5	400
10	54	0,1740	0,0886	8	5,5	400
11	12	0,1872	0,0619	0	0	400
12	13	0,7114	0,2351	45,5	30	400
12	67	0,2012	0,0611	60	35	400
13	14	1,0300	0,3400	60	35	400
13	69	0,7394	0,2444	0	0	400
14	15	1,0440	0,3450	1	0,6	400
15	16	1,0580	0,3496	114	81	400
16	17	0,1966	0,0650	5,3	3,5	400
17	18	0,3744	0,1238	0	0	400
18	19	0,0047	0,0016	28	20	400
19	20	0,3276	0,1083	0	0	400
20	21	0,2106	0,0696	14	10	400
21	22	0,3416	0,1129	14	10	400
22	23	0,0140	0,0046	26	18,6	400
23	24	0,1591	0,0526	26	18,6	400
24	25	0,3463	0,1145	0	0	400
25	26	0,7488	0,2475	0	0	400
26	27	0,3089	0,1021	0	0	400
27	28	0,1732	0,0572	14	10	400
29	30	0,0640	0,1565	19,5	14	400
30	31	0,3978	0,1315	6	4	400
31	32	0,0702	0,0232	26	18,55	400
32	33	0,3510	0,1160	26	18,55	400
33	34	0,8390	0,2816	0	0	400
34	35	1,7080	0,5646	24	17	400
35	36	1,4740	0,4873	24	17	400
37	38	0,0640	0,1565	1,2	1	400
38	39	0,1053	0,1230	0	0	400
39	40	0,0304	0,0355	6	4,3	400
40	41	0,0018	0,0021	0	0	400
41	42	0,7283	0,8509	39,22	26,3	400
42	43	0,3100	0,3623	39,22	26,3	400
43	44	0,0410	0,0478	0	0	400
44	45	0,0092	0,0116	79	56,4	400
45	46	0,1089	0,1373	384,7	274,5	400

46	47	0,0009	0,0012	384,7	274,5	400
48	49	0,0851	0,2083	40,5	28,3	400
49	50	0,2898	0,7091	3,6	2,7	400
50	51	0,0822	0,2011	4,35	3,5	400
52	53	0,3319	0,1114	26,4	19	400
54	55	0,2030	0,1034	24	17,2	400
55	56	0,2842	0,1447	0	0	400
56	57	0,2813	0,1433	0	0	400
57	58	1,5900	0,5337	0	0	400
58	59	0,7837	0,2630	100	72	400
59	60	0,3042	0,1006	0	0	400
60	61	0,3861	0,1172	1244	888	400
61	62	0,5075	0,2585	32	23	400
62	63	0,0974	0,0496	0	0	400
63	64	0,1450	0,0738	227	162	400
64	65	0,7105	0,3619	59	42	400
65	66	1,0410	0,5302	18	13	400
67	68	0,0047	0,0014	18	13	400
69	70	0,0047	0,0016	28	20	400

---

## A.2 - Sistema de distribuição de 136 nós

Tabela A.2 —Dados do sistema de distribuição de 136 nós

Trecho		Resistência	Reatância	Carga barra final		Imax
Inicial	Final	( $\Omega$ )	( $\Omega$ )	(kW)	(kVAr)	(kA)
1	2	0,33205	0,76653	0	0	247
2	3	0,00188	0,00433	47,78	19,009	247
3	4	0,2234	0,51535	42,551	16,929	243
4	5	0,09943	0,22953	87,022	34,622	239
5	6	0,15571	0,35945	311,31	123,86	230
6	7	0,16321	0,37677	148,87	59,228	201
7	8	0,11444	0,26417	238,67	94,956	22
7	9	0,05675	0,05666	62,299	24,786	163
9	10	0,52124	0,27418	124,59	49,571	11
9	11	0,10877	0,1086	140,16	55,768	145
11	12	0,39803	0,20937	116,81	46,474	11
11	13	0,91744	0,31469	249,2	99,145	24
11	14	0,11823	0,11805	291,45	115,59	97
14	15	0,50228	0,26421	303,72	120,84	29
14	16	0,05675	0,05666	215,39	85,695	39
16	17	0,29379	0,15454	198,59	79,007	19
1	18	0,33205	0,76653	0	0	223
18	19	0,00188	0,00433	0	0	223
19	20	0,22324	0,51535	0	0	223
20	21	0,10881	0,25118	30,127	14,729	223
21	22	0,71078	0,37388	230,97	112,92	227
21	23	0,18197	0,42008	60,256	29,459	198
23	24	0,30326	0,15952	230,97	112,92	22
23	25	0,02439	0,0563	120,51	58,915	169
25	26	0,04502	0,10394	0	0	157
26	27	0,01876	0,04331	56,981	27,857	157
27	28	0,11823	0,1123	364,67	178,28	151
28	29	0,02365	0,02361	0	0	115
29	30	0,18954	0,0997	124,65	60,939	18
30	31	0,39803	0,20937	56,981	27,857	5
29	32	0,05675	0,05666	0	0	97
32	33	0,09477	0,04985	85,473	41,787	47
33	34	0,41699	0,21934	0	0	39
34	35	0,11372	0,05982	396,74	193,96	39
32	36	0,07566	0,07555	0	0	49
36	37	0,3696	0,19442	181,15	88,563	42
37	38	0,26536	0,13958	242,17	118,39	24
36	39	0,05675	0,0566	75,316	36,821	7
1	40	0,33205	0,76653	0	0	246
40	41	0,11819	0,27283	1,254	0,531	246
41	42	2,96288	1,01628	6,274	2,66	1
41	43	0,00188	0,00433	0	0	246
43	44	0,06941	0,16024	117,88	49,971	246
44	45	0,81502	0,42872	62,668	25,566	5
44	46	0,06378	0,14724	172,29	73,034	228
46	47	0,13132	0,30315	458,56	194,39	212
47	48	0,06191	0,14291	262,96	111,47	168
48	49	0,11444	0,26417	235,76	99,942	121
49	50	0,28374	0,28331	0	0	10
50	51	0,28374	0,28321	109,22	46,298	10
49	52	0,04502	0,10394	0	0	87
52	53	0,02626	0,06063	72,809	30,865	87
53	54	0,06003	0,13858	258,47	109,57	33
54	55	0,03002	0,06929	69,169	29,322	8

55	56	0,02064	0,04764	21,843	9,26	2
53	57	0,10881	0,25118	0	0	46
57	58	0,25588	0,1346	20,527	8,702	46
58	59	0,41699	0,21934	150,55	63,819	44
59	60	0,50228	0,26421	220,69	93,552	30
60	61	0,3317	0,17448	92,384	39,163	9
61	62	0,20849	0,10967	0	0	1
48	63	0,13882	0,32047	226,69	96,098	21
1	64	0,0075	0,01732	0	0	147
64	65	0,27014	0,62362	294,02	116,97	147
65	66	0,3827	0,88346	83,015	33,028	119
66	67	0,33018	0,7622	83,015	33,028	111
67	68	0,3283	0,75787	103,77	41,285	103
68	69	0,17072	0,39409	176,41	70,184	94
69	70	0,55914	0,29412	83,015	33,028	7
69	71	0,05816	0,13425	217,92	86,698	69
71	72	0,7013	0,3689	23,294	9,267	10
72	73	1,02352	0,53839	5,075	2,019	10
71	74	0,06754	0,15591	72,638	28,899	45
74	75	1,32352	0,45397	405,99	161,52	38
1	76	0,01126	0,02598	0	0	158
76	77	0,72976	1,68464	100,18	42,468	158
77	78	0,22512	0,51968	142,52	60,417	149
78	79	0,20824	0,48071	96,042	40,713	135
79	80	0,0469	0,10827	300,45	127,37	126
80	81	0,6195	0,61857	141,24	59,873	97
81	82	0,34049	0,33998	279,85	118,63	83
82	83	0,56862	0,29911	87,312	37,013	8
82	84	0,10877	0,1086	243,85	103,37	47
84	85	0,56862	0,29911	247,75	105,03	24
1	86	0,01126	0,02598	0	0	265
86	87	0,41835	0,96575	89,878	38,101	265
87	88	0,10499	0,13641	1137,3	482,11	108
87	89	0,43898	1,01338	458,34	194,3	148
89	90	0,0752	0,02579	385,2	163,29	104
90	91	0,07692	0,17756	0	0	66
91	92	0,33205	0,76653	79,608	33,747	66
92	93	0,08442	0,19488	87,312	37,013	59
93	94	0,1332	0,30748	0	0	50
94	95	0,2932	0,29276	74,001	31,37	43
95	96	0,21753	0,21721	232,05	98,369	36
96	97	0,26482	0,26443	141,82	60,119	13
94	98	0,10318	0,23819	0	0	7
98	99	0,13507	0,31181	76,449	32,408	7
1	100	0,00938	0,02165	0	0	298
100	101	0,16884	0,38976	51,322	21,756	298
101	102	0,11819	0,27283	59,874	25,381	293
102	103	2,28608	0,78414	9,065	3,843	1
102	104	0,45587	1,05236	2,092	0,887	286
104	105	0,696	1,60669	16,735	7,094	286
105	106	0,45774	1,05669	1506,5	638,63	268
106	107	0,20298	0,26373	313,02	132,69	116
107	108	0,21348	0,27737	79,831	33,842	85
108	109	0,54967	0,28914	51,322	21,756	46
109	110	0,54019	0,28415	0	0	25
108	111	0,0455	0,05911	202,44	85,815	31
111	112	0,47385	0,24926	60,823	25,874	10
112	113	0,86241	0,45364	45,618	19,338	4
113	114	0,56862	0,29911	0	0	1
109	115	0,77711	0,40878	157,07	66,584	15

115	116	1,08038	0,5683	0	0	1
110	117	1,06633	0,57827	250,15	106,04	25
117	118	0,47385	0,24926	0	0	1
105	119	0,32267	0,74488	68,809	28,593	16
119	120	0,14633	0,33779	32,072	13,596	9
120	121	0,12382	0,28583	61,084	25,894	6
1	122	0,01126	0,02598	0	0	197
122	123	0,6491	1,49842	94,622	46,26	197
123	124	0,04502	0,10394	49,858	24,375	188
124	125	0,5264	0,18056	123,16	60,214	12
124	126	0,02064	0,04764	78,35	38,304	171
126	127	0,53071	0,27917	145,48	71,121	14
126	128	0,09755	0,2252	21,369	10,447	149
128	129	0,11819	0,27283	74,789	36,564	7
128	130	0,13882	0,32047	227,93	111,43	140
130	131	0,04315	0,09961	35,614	17,411	116
131	132	0,09192	0,2122	249,29	121,88	114
132	133	0,16134	0,37244	316,72	154,84	89
133	134	0,37832	0,37775	333,82	163,2	57
134	135	0,39724	0,39664	249,29	121,88	24
135	136	0,2932	0,29276	0	0	1

### A.3 - Sistema de distribuição de 202 nós

Tabela A.3 — Dados do sistema de distribuição de 202 nós

Trecho		Resistência	Reatância	Carga barra final		Imax
Inicial	Final	( $\Omega$ )	( $\Omega$ )	(kW)	(kVAr)	(kA)
1	2	0	0	0	0	1520
2	3	0,01883	0,04232	38,25	23,7	1493
3	4	0,065905	0,14812	0	0	1484
4	5	0,03766	0,08464	63,75	39,5	1484
5	6	0,01883	0,04232	0	0	1470
6	7	0	0	0	0	1497
7	8	0,01883	0,04232	38,25	23,7	1470
8	9	0,016947	0,038088	95,2	58,99	1463
9	10	0,01883	0,04232	63,75	39,5	1442
10	11	0	0	0	0	408
11	12	0,05935	0,04654	510	316,02	111
10	13	0,01883	0,04232	0	0	1197
13	14	0	0	0	0	1224
10	15	0	0	0	0	410
15	16	0,046705	0,02445	63,75	39,5	125
16	17	0,09341	0,0489	127,5	79,01	111
17	18	0,074728	0,03912	63,75	39,5	15
17	19	0,18682	0,0978	63,75	39,5	69
19	20	0,074728	0,03912	255	158,01	56
14	21	0,03766	0,08464	0	0	1197
21	22	0,041426	0,093104	0	0	1197
22	23	0	0	255	158,01	1224
23	24	0,00659	0,014812	255	158,01	1143
24	25	0,00659	0,014812	382,5	237,02	1089
25	26	0	0	0	0	879
26	27	0,024479	0,055016	191,25	118,51	779
25	28	0	0	0	0	420
28	29	0,065387	0,03423	51	31,6	243
29	30	0,046705	0,02445	95,63	59,25	197
30	31	0,046705	0,02445	95,63	59,25	176
31	32	0,046705	0,02445	0	0	155
32	33	0,059416	0,02026	350,63	217,26	78
32	34	0,089124	0,03039	350,63	217,26	78
29	35	0,09341	0,0489	0	0	35
35	36	0	0	0	0	77
36	37	0,037364	0,01956	63,75	39,5	15
35	38	0	0	0	0	110
38	39	0,037364	0,01956	95,63	59,25	23
27	40	0,009415	0,02116	0	0	740
40	41	0,037135	0,012663	255	158,01	57
40	42	0,009415	0,02116	0	0	687
42	43	0,009415	0,02116	191,25	118,51	575
43	44	0,009415	0,02116	95,63	59,25	534
42	45	0,059416	0,02026	0	0	147
45	46	0	0	0	0	77
46	47	0,037135	0,012663	63,75	39,5	17
45	48	0	0	0	0	402
48	49	0,037135	0,012663	605,63	375,27	134
44	50	0,014122	0,03174	573,75	355,52	515
50	51	0,013181	0,029624	191,25	118,51	398
51	52	0,011298	0,025392	255	158,01	360
52	53	0,011298	0,025392	765	474,03	312
53	54	0,011298	0,025392	255	158,01	198
54	55	0,011298	0,025392	0	0	141

55	56	0,07427	0,025325	0	0	141
56	57	0	0	318,75	197,51	410
57	58	0,103978	0,035455	318,75	197,51	71
1	59	0	0	0	0	4088
59	60	0,01597	0,04095	25,5	15,8	2108
60	61	0,099014	0,25389	0	0	2102
61	62	0	0	0	0	2117
62	63	0,041522	0,10647	0	0	2102
63	64	0	0	0	0	2066
63	65	0,019164	0,04914	95,63	59,25	53
65	66	0	0	0	0	162
66	67	0,01597	0,04095	38,25	23,7	32
67	68	0	0	0	0	120
68	69	0,133686	0,045585	102	63,2	23
64	70	0,01883	0,04232	0	0	2051
70	71	0,111405	0,037988	89,25	55,3	20
70	72	0	0	0	0	44
72	73	0,133686	0,045585	0	0	9
73	74	0,081697	0,027858	38,25	23,7	9
70	75	0,020713	0,046552	0	0	2024
75	76	0	0	0	0	405
76	77	0,163394	0,055715	510	316,02	113
75	78	0,011298	0,025392	595	368,69	1913
78	79	0,007532	0,016928	0	0	1784
79	80	0	0	0	0	347
79	81	0,009415	0,02116	382,5	237,02	1439
81	82	0,011298	0,025392	0	0	1356
80	83	0,126259	0,043053	350,63	217,26	78
82	84	0	0	0	0	1383
84	85	0,013181	0,029624	38,25	23,7	12
84	86	0,004707	0,01058	255	158,01	1349
86	87	0,005649	0,012696	446,25	276,52	1293
87	88	0,009415	0,02116	382,5	237,02	1199
79	89	0	0	0	0	425
89	90	0,178248	0,06078	0	0	275
90	91	0	0	0	0	110
91	92	0,111405	0,037987	95,63	59,25	23
90	93	0	0	191,25	118,51	428
93	94	0,056046	0,027924	216,75	134,31	212
94	95	0,028023	0,013962	95,63	59,25	164
95	96	0,028023	0,013962	191,25	118,51	141
96	97	0,028023	0,013962	63,75	39,5	99
97	98	0,051375	0,025597	382,5	237,02	86
88	99	0,020713	0,046552	0	0	1116
99	100	0	0	0	0	1143
100	101	0,014122	0,03174	63,75	39,5	17
100	102	0,005649	0,012696	0	0	1103
102	103	0	0	0	0	77
103	104	0,07427	0,025325	63,75	39,5	15
102	105	0,004707	0,01058	127,5	79,01	1041
105	106	0,005649	0,012696	95,63	59,25	1014
102	107	0,00659	0,014812	106,25	65,84	53
107	108	0,010356	0,023276	127,5	79,01	32
106	109	0,011298	0,025392	95,63	59,25	993
109	110	0	0	0	0	1010
110	111	0,007532	0,016928	127,5	79,01	974
111	112	0,007532	0,016928	127,5	79,01	947
112	113	0,007532	0,016928	0	0	921
113	114	0	0	0	0	77
113	115	0,005649	0,012696	318,75	197,51	249

115	116	0,007532	0,016928	350,63	217,26	179
116	117	0,009415	0,02116	446,25	276,52	101
114	118	0,051989	0,017727	63,75	39,5	17
113	119	0,007532	0,016928	127,5	79,01	719
119	120	0,007532	0,016928	63,75	39,5	690
120	121	0,00659	0,014812	382,5	237,02	677
121	122	0,005649	0,012696	0	0	594
122	123	0	0	76,5	47,4	335
122	124	0	0	255	158,01	608
124	125	0,015064	0,033856	191,25	118,51	471
123	126	0,065387	0,03003	255	158,01	57
125	127	0,009415	0,02116	233,75	144,84	431
127	128	0,009415	0,02116	573,75	355,52	129
127	129	0,015064	0,033856	276,25	171,18	321
129	130	0,013181	0,029624	255	158,01	260
130	131	0,013181	0,029624	393,13	243,6	203
131	132	0,016947	0,038088	510	316,02	116
1	133	0	0	0	0	2036
133	134	0,069671	0,156584	0	0	2019
134	135	0	0	0	0	2034
135	136	0,015064	0,033856	0	0	2019
136	137	0,060256	0,135424	0	0	2019
137	138	0,009415	0,02116	0	0	14
137	139	0	0	63,75	39,5	1986
139	140	0,020713	0,046552	0	0	1958
140	141	0	0	0	0	77
140	142	0,009415	0,02116	38,25	23,7	1944
142	143	0,005649	0,012696	38,25	23,7	1935
141	144	0,028023	0,01467	63,75	39,5	15
137	145	0	0	0	0	240
145	146	0,074728	0,03912	63,75	39,5	48
146	147	0,056046	0,02934	0	0	21
147	148	0	0	0	0	110
148	149	0,037364	0,01956	95,63	59,25	23
146	150	0	0	0	0	77
150	151	0,046705	0,02445	63,75	39,5	15
143	152	0,005649	0,012696	0	0	1928
152	153	0	0	0	0	77
152	154	0,005649	0,012696	63,75	39,5	1914
154	155	0,005649	0,012696	212,5	131,68	1901
155	156	0,005649	0,012696	63,75	39,5	1854
153	157	0,037364	0,01956	63,75	39,5	15
156	158	0,005649	0,012696	0	0	1841
158	159	0,028023	0,01467	63,75	39,5	23
159	160	0,046705	0,02445	38,25	23,7	9
158	161	0,009415	0,02116	63,75	39,5	1818
161	162	0,011298	0,025392	0	0	1805
162	163	0	0	0	0	1820
163	164	0	0	95,63	59,25	1820
164	165	0,01883	0,04232	0	0	1784
165	166	0	0	0	0	399
165	167	0,005649	0,012696	446,25	276,52	1652
167	168	0,005649	0,012696	191,25	118,51	1556
168	169	0,007532	0,016928	255	158,01	1514
166	170	0,065387	0,03423	605,63	375,27	135
169	171	0	0	63,75	39,5	1484
171	172	0,07122	0,055848	127,5	79,01	29
171	173	0,009415	0,02116	63,75	39,5	1418
173	174	0,009415	0,02116	191,25	118,51	1404
174	175	0,009415	0,02116	0	0	1362

175	176	0	0	0	0	230
176	177	0,074728	0,03912	208,25	129,04	47
175	178	0,003766	0,008464	191,25	118,51	1317
178	179	0,003766	0,008464	127,5	79,01	1277
179	180	0,005649	0,012696	127,5	79,01	1248
180	181	0	0	0	0	3930
181	182	0	0	0	0	152
181	183	0,046705	0,02445	255	158,01	57
182	184	0,0607165	0,031785	127,5	79,01	29
181	185	0,005649	0,012696	850	526,7	1140
185	186	0,005649	0,012696	127,5	79,01	962
186	187	0,005649	0,012696	510	316,02	935
187	188	0,005649	0,012696	0	0	879
188	189	0	0	0	0	396
188	190	0	0	0	0	212
190	191	0,0385775	0,030251	191,25	118,51	44
189	192	0,0504475	0,039559	448,38	277,83	101
188	193	0,022596	0,050784	255	158,01	740
193	194	0,065387	0,03423	510	316,02	114
193	195	0,046705	0,02445	382,5	237,02	452
195	196	0,046705	0,02445	255	158,01	375
196	197	0,046705	0,02445	191,25	118,51	326
193	198	0,009415	0,02116	446,25	276,52	131
198	199	0,009415	0,02116	133,88	82,96	33
197	200	0,046705	0,02445	95,63	59,25	290
200	201	0,112092	0,05868	382,5	237,02	86
200	202	0,09341	0,0489	1030,2	638,36	233

## A.4 - Sistema de distribuição de 400 nós

Tabela A.4 — Dados do sistema de distribuição de 400 nós

Trecho		Resistência ( $\Omega$ )	Reatância ( $\Omega$ )	Carga barra final		Imax (kA)
Inicial	Final			(kW)	(kVAr)	
1	2	0,0378	0,0125	0	0	731
2	3	0,0305	0,0101	0	0	731
3	4	0,0309	0,0102	0	0	731
4	5	0,0331	0,0109	0	0	731
5	6	0,0378	0,0125	0	0	731
6	7	0,0326	0,0107	0	0	723
7	8	0,0378	0,0125	0	0	723
8	9	0,0422	0,0139	0	0	723
9	10	0,0326	0,0107	0	0	30
10	11	0,0331	0,0109	0	0	30
11	12	0,0305	0,0101	69	29,25	30
12	13	0,0378	0,0125	0	0	15
13	14	0,0378	0,0125	0	0	15
14	15	0,0378	0,0125	0	0	10
6	16	0,0378	0,0125	46	19,5	10
14	17	0,0422	0,0139	0	0	15
17	18	0,0368	0,0121	0	0	15
18	19	0,0347	0,0114	0	0	15
19	20	0,0431	0,0093	0	0	15
20	21	0,0516	0,0111	0	0	15
21	22	0,0331	0,0109	69	29,25	15
9	23	0,0378	0,0125	0	0	15
23	24	0,0339	0,0112	69	29,25	15
9	25	0,0339	0,0112	0	0	685
25	26	0,0378	0,0125	0	0	685
26	27	0,042	0,0139	0	0	685
27	28	0,0441	0,0146	0	0	685
28	29	0,0378	0,0125	0	0	645
29	30	0,0378	0,0125	0	0	645
30	31	0,0378	0,0125	0	0	645
31	32	0,0368	0,0121	0	0	645
32	33	0,0347	0,0114	0	0	645
33	34	0,0284	0,0094	0	0	645
34	35	0,0326	0,0107	0	0	645
35	36	0,0326	0,0107	0	0	645
36	37	0,0441	0,0146	0	0	15
37	38	0,0422	0,0139	0	0	15
38	39	0,0378	0,0125	0	0	15
39	40	0,0378	0,0125	0	0	15
40	41	0,0331	0,0109	0	0	15
41	42	0,0305	0,0101	69	29,25	15
28	43	0,0339	0,0112	0	0	10
43	44	0,0305	0,0101	0	0	10
44	45	0,0309	0,0102	0	0	10
45	46	0,0309	0,0102	0	0	10
46	47	0,0326	0,0107	41,4	17,55	10
28	48	0,0331	0,0109	0	0	39
48	49	0,0294	0,0097	0	0	39
49	50	0,0305	0,0101	69	29,25	39
50	51	0,0378	0,0125	0	0	24
51	52	0,0378	0,0125	0	0	24
52	53	0,0331	0,0109	0	0	24
53	54	0,0339	0,0112	0	0	24
54	55	0,0339	0,0112	69	29,25	24

55	56	0,0422	0,0139	41,4	17,55	10
36	57	0,0378	0,0125	0	0	632
57	58	0,0339	0,0112	103,5	43,88	632
58	59	0,042	0,0139	0	0	614
59	60	0,0441	0,0146	0	0	614
60	61	0,0284	0,0094	0	0	77
61	62	0,0305	0,0101	0	0	77
62	63	0,0331	0,0109	0	0	77
63	64	0,0326	0,0107	0	0	77
64	65	0,0284	0,0094	0	0	77
65	66	0,0378	0,0125	0	0	10
66	67	0,0305	0,0101	0	0	10
67	68	0,0378	0,0125	0	0	10
68	69	0,0284	0,0094	0	0	10
69	70	0,0326	0,0107	0	0	10
70	71	0,0441	0,0146	0	0	10
71	72	0,042	0,0139	41,4	17,55	10
65	73	0,0339	0,0112	0	0	67
73	74	0,0331	0,0109	27,6	11,7	67
74	75	0,0309	0,0102	0	0	61
75	76	0,0294	0,0097	0	0	61
76	77	0,0368	0,0121	0	0	61
77	78	0,0347	0,0114	69	29,25	61
78	79	0,0305	0,0101	0	0	46
79	80	0,0347	0,0114	0	0	46
80	81	0,0422	0,0139	0	0	46
81	82	0,0326	0,0107	0	0	46
82	83	0,0284	0,0094	69	29,25	46
83	84	0,0326	0,0107	0	0	31
84	85	0,0441	0,0146	0	0	31
85	86	0,042	0,0139	0	0	31
86	87	0,0378	0,0125	69	29,25	31
87	88	0,0378	0,0125	0	0	15
88	89	0,0284	0,0094	0	0	15
89	90	0,0309	0,0102	0	0	15
90	91	0,0294	0,0097	0	0	15
91	92	0,0368	0,0121	69	29,25	15
60	93	0,0326	0,0107	0	0	556
93	94	0,0339	0,0112	0	0	556
94	95	0,0331	0,0109	0	0	556
95	96	0,0326	0,0107	0	0	556
96	97	0,0284	0,0094	0	0	556
97	98	0,0368	0,0121	0	0	10
98	99	0,0368	0,0121	0	0	10
99	100	0,0441	0,0146	0	0	10
100	101	0,0294	0,0097	0	0	10
101	102	0,0309	0,0102	0	0	10
102	103	0,0284	0,0094	41,4	17,55	10
97	104	0,0326	0,0107	0	0	549
104	105	0,0378	0,0125	0	0	549
105	106	0,0331	0,0109	0	0	549
106	107	0,0331	0,0109	0	0	549
107	108	0,0378	0,0125	0	0	39
108	109	0,0339	0,0112	0	0	39
109	110	0,0331	0,0109	0	0	39
110	111	0,0305	0,0101	0	0	39
111	112	0,0378	0,0125	0	0	39
112	113	0,0378	0,0125	103,5	43,88	39
113	114	0,0284	0,0094	0	0	15
114	115	0,042	0,0139	0	0	15

115	116	0,0441	0,0146	0	0	15
116	117	0,0326	0,0107	0	0	15
117	118	0,0284	0,0094	0	0	15
118	119	0,0347	0,0114	69	29,25	16
107	120	0,0378	0,0125	0	0	23
120	121	0,0368	0,0121	0	0	23
121	122	0,0347	0,0114	103,5	43,88	23
107	123	0,0305	0,0101	0	0	507
123	124	0,0305	0,0101	0	0	507
124	125	0,0331	0,0109	0	0	507
125	126	0,0339	0,0112	69	29,25	507
126	127	0,0347	0,0114	0	0	497
127	128	0,0368	0,0121	0	0	497
128	129	0,0284	0,0094	0	0	497
129	130	0,0326	0,0107	0	0	497
130	131	0,0378	0,0125	41,4	17,55	10
130	132	0,0441	0,0146	0	0	491
132	133	0,0326	0,0107	0	0	491
133	134	0,0441	0,0146	0	0	491
134	135	0,042	0,0139	41,4	17,55	491
135	136	0,0378	0,0125	0	0	485
136	137	0,042	0,0139	0	0	485
137	138	0,0378	0,0125	0	0	485
138	139	0,0347	0,0114	0	0	485
139	140	0,0368	0,0121	0	0	114
140	141	0,0331	0,0109	0	0	114
141	142	0,0422	0,0139	27,6	11,7	114
142	143	0,0305	0,0101	0	0	108
143	144	0,0378	0,0125	0	0	108
144	145	0,0441	0,0146	0	0	108
145	146	0,0339	0,0112	0	0	108
146	147	0,042	0,0139	0	0	108
147	148	0,0305	0,0101	0	0	108
148	149	0,0305	0,0101	0	0	16
149	150	0,0642	0,0138	0	0	16
150	151	0,0463	0,01	0	0	16
151	152	0,0503	0,0108	69	29,25	16
148	153	0,0284	0,0094	0	0	92
153	154	0,0368	0,0121	13,8	5,85	92
154	155	0,0347	0,0114	0	0	89
155	156	0,0441	0,0146	0	0	89
156	157	0,0495	0,0107	0	0	89
157	158	0,0575	0,0124	0	0	89
158	159	0,0575	0,0124	391	165,75	89
139	160	0,0294	0,0097	0	0	426
160	161	0,0284	0,0094	0	0	426
161	162	0,0441	0,0146	0	0	426
162	163	0,0326	0,0107	0	0	426
163	164	0,042	0,0139	46	19,5	426
164	165	0,0378	0,0125	0	0	422
165	166	0,0331	0,0109	0	0	422
166	167	0,0378	0,0125	0	0	34
167	168	0,0422	0,0139	0	0	34
168	169	0,0378	0,0125	0	0	34
169	170	0,0441	0,0146	0	0	25
170	171	0,0305	0,0101	0	0	25
171	172	0,0642	0,0138	69	29,25	16
171	173	0,0516	0,0111	41,4	17,55	10
169	174	0,0378	0,0125	0	0	10
174	175	0,0331	0,0109	0	0	10

175	176	0,0294	0,0097	0	0	10
176	177	0,0326	0,0107	0	0	10
177	178	0,0284	0,0094	41,4	17,55	10
166	179	0,0305	0,0101	0	0	409
179	180	0,0378	0,0125	0	0	409
180	181	0,0331	0,0109	0	0	409
181	182	0,0305	0,0101	0	0	409
182	183	0,0339	0,0112	0	0	409
183	184	0,0294	0,0097	41,4	17,55	10
183	185	0,0347	0,0114	0	0	24
185	186	0,0378	0,0125	0	0	24
186	187	0,0339	0,0112	0	0	24
187	188	0,0378	0,0125	0	0	24
188	189	0,0294	0,0097	0	0	24
189	190	0,0284	0,0094	0	0	24
190	191	0,0422	0,0139	0	0	24
191	192	0,0378	0,0125	0	0	24
192	193	0,0331	0,0109	0	0	24
193	194	0,0331	0,0109	9,2	3,9	24
194	195	0,0284	0,0094	0	0	22
195	196	0,0326	0,0107	0	0	22
196	197	0,0642	0,0138	0	0	22
197	198	0,0431	0,0093	0	0	22
198	199	0,0559	0,012	0	0	10
199	200	0,0516	0,0111	27,6	11,7	10
198	201	0,0516	0,0111	0	0	16
201	202	0,0503	0,0108	0	0	16
202	203	0,0326	0,0107	69	29,25	16
183	204	0,0326	0,0107	0	0	399
204	205	0,0305	0,0101	0	0	399
205	206	0,0378	0,0125	0	0	399
206	207	0,0378	0,0125	0	0	399
207	208	0,0326	0,0107	0	0	399
208	209	0,0326	0,0107	0	0	399
209	210	0,0422	0,0139	0	0	399
210	211	0,0331	0,0109	0	0	399
211	212	0,0339	0,0112	0	0	399
212	213	0,0331	0,0109	9,2	3,9	399
213	214	0,0305	0,0101	0	0	399
214	215	0,0378	0,0125	9,2	3,9	399
215	216	0,0326	0,0107	0	0	398
216	217	0,0441	0,0146	0	0	398
217	218	0,0305	0,0101	0	0	398
218	219	0,0331	0,0109	0	0	398
219	220	0,0368	0,0121	9,2	3,9	398
220	221	0,0339	0,0112	0	0	398
221	222	0,0284	0,0094	0	0	398
222	223	0,0326	0,0107	0	0	398
223	224	0,0503	0,0108	0	0	398
224	225	0,0516	0,0111	13,8	5,85	398
225	226	0,042	0,0139	0	0	397
226	227	0,0441	0,0146	0	0	397
227	228	0,0339	0,0112	0	0	397
228	229	0,0767	0,0101	0	0	31
229	230	0,099	0,013	0	0	31
230	231	0,0891	0,0117	0	0	31
231	232	0,1039	0,0137	0	0	31
232	233	0,0767	0,0101	0	0	31
233	234	0,0866	0,0114	0	0	31
234	235	0,0668	0,0088	0	0	31

235	236	0,0816	0,0108	0	0	31
236	237	0,0559	0,012	0	0	31
237	238	0,0527	0,0113	0	0	31
238	239	0,0668	0,0088	0	0	31
239	240	0,0671	0,0144	9,2	3,9	10
239	241	0,0767	0,0101	0	0	29
241	242	0,0717	0,0095	0	0	10
241	243	0,0891	0,0117	0	0	29
243	244	0,0767	0,0101	0	0	29
244	245	0,0995	0,0131	0	0	29
245	246	0,0799	0,0105	0	0	29
246	247	0,0816	0,0108	0	0	29
247	248	0,0668	0,0088	0	0	10
248	249	0,1039	0,0137	0	0	10
249	250	0,0799	0,0105	0	0	10
250	251	0,0779	0,0103	0	0	10
248	252	0,0767	0,0101	0	0	10
252	253	0,0995	0,0131	0	0	10
253	254	0,0891	0,0117	0	0	10
254	255	0,0717	0,0095	0	0	10
255	256	0,0891	0,0117	0	0	10
256	257	0,0779	0,0103	41,4	17,55	10
247	258	0,0891	0,0117	0	0	19
258	259	0,0575	0,0124	0	0	19
259	260	0,0463	0,01	41,4	17,55	10
259	261	0,0575	0,0124	0	0	10
261	262	0,0995	0,0131	0	0	10
262	263	0,0799	0,0105	0	0	10
263	264	0,0767	0,0101	41,4	17,55	10
263	265	0,0799	0,0105	0	0	10
265	266	0,0891	0,0117	0	0	10
266	267	0,0866	0,0114	0	0	10
267	268	0,0816	0,0108	0	0	10
228	269	0,0368	0,0121	0	0	322
269	270	0,0339	0,0112	0	0	322
270	271	0,0305	0,0101	0	0	322
271	272	0,0495	0,0107	0	0	10
272	273	0,0671	0,0144	0	0	10
273	274	0,0575	0,0124	9,2	3,9	10
271	275	0,0305	0,0101	0	0	322
275	276	0,0378	0,0125	0	0	322
276	277	0,0331	0,0109	0	0	322
277	278	0,0305	0,0101	0	0	322
278	279	0,0378	0,0125	0	0	322
279	280	0,042	0,0139	69	29,25	322
280	281	0,0378	0,0125	0	0	318
281	282	0,0378	0,0125	0	0	318
282	283	0,0339	0,0112	0	0	318
283	284	0,0378	0,0125	0	0	318
284	285	0,0378	0,0125	0	0	318
285	286	0,0495	0,0107	27,6	11,7	10
285	287	0,0326	0,0107	0	0	317
287	288	0,0378	0,0125	0	0	317
288	289	0,0422	0,0139	0	0	317
289	290	0,0284	0,0094	0	0	317
290	291	0,0309	0,0102	0	0	317
291	292	0,0431	0,0093	103,5	43,88	24
291	293	0,0331	0,0109	0	0	314
293	294	0,0559	0,012	0	0	10
294	295	0,0447	0,0096	0	0	10

295	296	0,0495	0,0107	0	0	10
296	297	0,0431	0,0093	0	0	10
293	298	0,0305	0,0101	0	0	314
298	299	0,0331	0,0109	0	0	314
299	300	0,042	0,0139	0	0	314
300	301	0,0441	0,0146	0	0	314
301	302	0,0575	0,0124	0	0	11
302	303	0,0503	0,0108	0	0	11
303	304	0,0463	0,01	46	19,5	11
301	305	0,0368	0,0121	0	0	313
305	306	0,0339	0,0112	0	0	313
306	307	0,0347	0,0114	0	0	313
307	308	0,0495	0,0107	41,4	17,55	10
307	309	0,0378	0,0125	0	0	313
309	310	0,042	0,0139	0	0	313
310	311	0,0463	0,01	0	0	10
311	312	0,0575	0,0124	0	0	10
312	313	0,0642	0,0138	0	0	10
313	314	0,0495	0,0107	0	0	10
314	315	0,0431	0,0093	0	0	10
315	316	0,0503	0,0108	27,6	11,7	10
315	317	0,047	0,0101	0	0	10
317	318	0,0495	0,0107	0	0	10
318	319	0,0642	0,0138	0	0	10
319	320	0,0431	0,0093	13,8	5,85	10
310	321	0,0339	0,0112	0	0	313
321	322	0,0516	0,0111	27,6	11,7	10
321	323	0,0331	0,0109	0	0	313
323	324	0,0378	0,0125	0	0	313
324	325	0,0378	0,0125	0	0	313
325	326	0,0326	0,0107	0	0	313
326	327	0,0527	0,0113	0	0	13
327	328	0,0495	0,0107	0	0	13
328	329	0,0639	0,0137	0	0	13
329	330	0,0671	0,0144	0	0	13
330	331	0,0575	0,0124	41,4	17,55	10
330	332	0,0463	0,01	0	0	10
332	333	0,0516	0,0111	13,8	5,85	10
326	334	0,0331	0,0109	0	0	313
334	335	0,0284	0,0094	0	0	313
335	336	0,0527	0,0113	0	0	16
336	337	0,0559	0,012	0	0	16
337	338	0,0516	0,0111	0	0	16
338	339	0,0503	0,0108	0	0	16
339	340	0,0463	0,01	69	29,25	16
335	341	0,0339	0,0112	0	0	315
341	342	0,0378	0,0125	0	0	315
342	343	0,0378	0,0125	0	0	315
343	344	0,0671	0,0144	0	0	10
344	345	0,0639	0,0137	41,4	17,55	10
343	346	0,0326	0,0107	0	0	316
346	347	0,0378	0,0125	0	0	316
347	348	0,0378	0,0125	0	0	316
348	349	0,0305	0,0101	0	0	195
349	350	0,0331	0,0109	0	0	195
350	351	0,0339	0,0112	0	0	25
351	352	0,0331	0,0109	0	0	25
352	353	0,0378	0,0125	0	0	25
353	354	0,0378	0,0125	0	0	25
354	355	0,0642	0,0138	41,4	17,55	10

354	356	0,0305	0,0101	0	0	16
356	357	0,0422	0,0139	0	0	10
356	358	0,0422	0,0139	0	0	16
358	359	0,0326	0,0107	0	0	10
358	360	0,0326	0,0107	0	0	16
360	361	0,0339	0,0112	0	0	16
361	362	0,0463	0,01	0	0	16
362	363	0,0671	0,0144	0	0	16
363	364	0,0575	0,0124	0	0	16
364	365	0,0639	0,0137	0	0	16
365	366	0,0431	0,0093	0	0	16
366	367	0,0527	0,0113	69	29,25	16
350	368	0,0717	0,0095	0	0	82
368	369	0,0693	0,0091	0	0	82
369	370	0,0891	0,0117	0	0	16
370	371	0,0891	0,0117	0	0	16
371	372	0,0799	0,0105	0	0	16
372	373	0,0779	0,0103	0	0	16
373	374	0,0575	0,0124	69	29,25	16
369	375	0,0668	0,0088	0	0	79
375	376	0,0816	0,0108	0	0	79
376	377	0,0866	0,0114	0	0	79
377	378	0,0799	0,0105	0	0	79
378	379	0,0779	0,0103	0	0	79
379	380	0,0717	0,0095	0	0	79
380	381	0,0799	0,0105	0	0	16
381	382	0,0891	0,0117	0	0	16
382	383	0,0891	0,0117	69	29,25	16
380	384	0,0503	0,0108	0	0	79
384	385	0,0516	0,0111	0	0	79
385	386	0,0503	0,0108	0	0	79
386	387	0,0463	0,01	0	0	79
387	388	0,0575	0,0124	0	0	79
388	389	0,0575	0,0124	0	0	79
389	390	0,0639	0,0137	0	0	79
390	391	0,0671	0,0144	0	0	79
391	392	0,0642	0,0138	0	0	10
392	393	0,0575	0,0124	41,4	17,55	10
391	394	0,0503	0,0108	0	0	80
394	395	0,0463	0,01	0	0	80
395	396	0,0575	0,0124	0	0	80
396	397	0,0575	0,0124	0	0	80
397	398	0,0516	0,0111	0	0	80
398	399	0,0503	0,0108	0	0	16
399	400	0,0559	0,012	69	29,25	16