UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E
CIÊNCIAS EXATAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Lilian Esquinelato da Silva

ENSINO INTRADISCIPLINAR DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS:
O CASO DO *ALGEBLOCKS*

Rio Claro –SP

2018

LILIAN ESQUINELATO DA SILVA

ENSINO INTRADISCIPLINAR DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: O CASO DO *ALGEBLOCKS*

Dissertação apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", campus de Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Profª Drª Lourdes de la Rosa Onuchic

Rio Claro –SP

2018

510.07 Silva, Lilian Esquinelato da
S586e Ensino intradisciplinar de Matemática através da resolução de problemas: o caso do Algeblocks / Lilian Esquinelato da Silva. - Rio Claro, 2018
218 f. : il., figs., quadros

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientadora: Lourdes de la Rosa Onuchic

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Resolução de problemas. 3. Algeblocks. 4. Ensino - Aprendizagem - Avaliação de Matemática através da R. P. 5. Ensino intradisciplinar. 6. Conexões - Aritmética, álgebra e geometria. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP - Ana Paula Santulo C. de Medeiros / CRB 8/7336

LILIAN ESQUINELATO DA SILVA

ENSINO INTRADISCIPLINAR DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: O CASO DO *ALGEBLOCKS*

Dissertação apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", campus de Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic - Orientadora

ICMC/USP/São Carlos (SP)

Profa. Dra. Miriam Godoy Penteado

IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Inocêncio Fernandes Balieiro Filho

FEIS/UNESP/Ilha Solteira (SP)

Resultado: Aprovado

Rio Claro – SP, 09 de Abril de 2018

AGRADECIMENTO

Agradeço a todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho. Sabemos que toda caminhada não se caminha só e, por isso, o meu muito obrigada por cada um que trilhou ao meu lado!

Agradeço a Deus por sempre ter conduzido meus passos, dando-me saúde e sabedoria para lidar com os desafios durante minha caminhada.

Aos meus pais, Edna e Luiz Carlos, pelo amor incondicional e por serem as pessoas que me inspiram todos os dias.

Ao meu irmão Rodrigo com quem aprendi o significado de dividir e compartilhar.

Ao meu amigo, companheiro e esposo Fredy por todo o amor, carinho e ternura que me brinda todos os dias.

À minha orientadora, Lourdes de la Rosa Onuchic, pela disponibilidade e pelo apoio com que orientou este trabalho. Minha admiração pela professora e ser humano que é.

À professora Miriam Penteado e ao professor Inocêncio Balieiro pela atenção e cuidado nas leituras e contribuições neste trabalho. Minha gratidão e admiração pelos profissionais e pessoas que são.

Aos meus amigos do GTERP, em especial: Sabrina, Egídio, Cecília, Luiz, Márcio e Nilton meu muito obrigada pelo apoio e sugestões durante minha pesquisa.

Aos professores que participaram da minha formação até aqui, minha admiração pela competência e profissionalismo e acima de tudo pela dedicação dada à formação humana de cada estudante.

À Escola Estadual Carolina Augusta Seraphim, em especial aos professores Elías e Norma e aos estudantes do 8º ano, meu muito obrigada por contribuírem para o andamento desta pesquisa e pela amizade.

Aos colegas e professores das disciplinas cursadas no mestrado.

Ao CNPq pelo financiamento.

“[...] Não diga as coisas com pressa. Mais vale um silêncio certo, que uma palavra errada. O poeta mineiro Carlos Drummond de Andrade recomendava aos poetas: Convive com os teus poemas antes de escrevê-los. Tem paciência, se obscuros. Calma, se te provocam. Espera que cada um se realize e consuma com seu poder de palavra e seu poder de silêncio."
A recomendação do poeta é sábia e pertinente. Um poema só é bem, só é bom, se maturado na sementeira do silêncio. Antes de se tornar palavra, a poesia é experiência de vida silenciosa. Os artistas sabem disso, e nós precisamos aprender.
[...] Só diz bem, aquele que pensou antes no que iria dizer, e ouve melhor aquele que se calou para escutar. A regra é simples, mas exigente.

Por isso hoje, nesse tempo de palavras muitas, queiramos a beleza dos silêncios poucos...”

Padre Fábio de Melo. *Silêncios e Palavras*

Resumo

Esta pesquisa tem como objetivo investigar como o material manipulativo *Algeblocks* e a Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas contribuem para o Ensino Intradisciplinar. Esta pesquisa foi desenvolvida seguindo a Metodologia Científica de Romberg–Onuchic, apresentada por Onuchic e Noguti (2014). A fundamentação teórica desta pesquisa tem como base três variáveis-chave: Conexões no Ensino de Matemática, Materiais Manipulativos e Resolução de Problemas. Procuramos investigar pesquisas que trabalham o ensino de Matemática fazendo conexões entre diferentes ramos da Matemática e as contribuições do *Algeblocks* para o desenvolvimento do projeto pedagógico de Matemática, ao adotar a Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Para tanto, estabelecemos como procedimentos da pesquisa a elaboração de um Projeto Pedagógico e sua aplicação em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual da rede pública de ensino da cidade de Rio Claro - SP. Esse Projeto envolve o Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática com uso dos *Algeblocks* trabalhando a compreensão de conceitos matemáticos. Percebemos que o trabalho do professor de Matemática ao fazer uso da Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas dá a possibilidade, com o uso do *Algeblocks,* de trabalhar conceitos matemáticos realizando as conexões entre diferentes ramos da Matemática.

Palavras-chaves: Resolução de Problemas. *Algeblocks*. Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Ensino Intradisciplinar. Conexões: Aritmética, Álgebra e Geometria.

Abstract

This research aims to investigate how the *Algeblocks* manipulative and Methodology of Mathematics Teaching-Learning-Evaluation through Problem Solving contribute to Intradisciplinary Teaching. This research was developed following the Scientific Methodology of Romberg–Onuchic presented by Onuchic and Noguti (2014). The theoretical basis of this research is based on three key variables: Connections in Teaching Mathematics, Manipulative Materials and Problem Solving. We seek to investigate researches that work the teaching of Mathematics making connections between different branches of Mathematics and the contributions of the Manipulative Material for the development of learning of Mathematics by adopting the Methodology of Mathematics Teaching-Learning-Evaluation through Problem Solving. Therefore, we established as research procedures the elaboration of a Project and its application in an 8th grade class of Elementary School of a state school of the public school of the city of Rio Claro - SP. This Project involves the teaching-learning-evaluation of Mathematics with use of the *Algeblocks* making the concrete representations of abstract concepts. We realized that the work of the Mathematics teacher in making use of the Methodology of Teaching-Learning-Evaluation of Mathematics through Problem Solving gives the possibility, with the use of *Algeblocks*, of working mathematical concepts making the connections between the different branches of Mathematics.

Keywords: Problem Solving. *Algeblocks*. Teaching-Learning-Evaluation of Mathematics through Problem Solving. Intradisciplinary Teaching. Connections: Arithmetic, Algebra and Geometry

Índice de Figuras

Índice de Quadros

Sumário

Introdução

A pesquisa que resulta nesta dissertação quer mostrar um caminho para se trabalhar o ensino intradisciplinar, uma forma de se ensinar fazendo conexões entre diferentes ramos da Matemática, segundo Lorenzato (2006), fazendo uso do material manipulativo *Algeblocks*. Para isso, foi aplicado um Projeto apoiado na Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

A pesquisa está estruturada de acordo com a Metodologia Científica de Romberg–Onuchic e tem como Metodologia Pedagógica a Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

A dissertação está dividida em quatro capítulos. O primeiro capítulo busca apresentar quais as concepções que se tem sobre pesquisa em Educação Matemática a partir de alguns referenciais teóricos. Em seguida, é apresentada a Metodologia Científica, Modelo de Romberg–Onuchic, que lhe dá estrutura. No Modelo de Romberg-Onuchic há três blocos que, em essência, o primeiro pretende identificar o problema da pesquisa, o segundo é planejar e executar um plano para, usando os dados da pesquisa, buscar a solução do problema e, no terceiro bloco acontece a análise das evidências obtidas na análise da aplicação do Projeto.

O segundo capítulo inicia-se com 1º Bloco de Romberg–Onuchic para descobrir o problema da pesquisa. No capítulo 2 é apresentado o Fenômeno de Interesse desta pesquisa, o Modelo Preliminar elaborado a partir desse fenômeno e são definidas as variáveis-chave desta pesquisa. Para esta pesquisa o Fenômeno de Interesse é o ensino intradisciplinar de Matemática, com o uso de material manipulativo, adotando a Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. E as variáveis-chave que se apresentam no Modelo Preliminar são: Conexões no Ensino de Matemática; Material Manipulativo e Resolução de Problemas. Em Conexões no Ensino de Matemática sãos apresentados resultados de pesquisas que utilizam conexões entre os diferentes ramos da Matemática como uma forma a apresentar diferentes aplicações de um mesmo conceito matemático, visto com diferentes visões. Na seção em que é apresentado o Material Manipulativo, os *Algeblocks*, é destacada a importância de se usar material manipulativo no ensino de Matemática e também as potencialidades dos *Algeblocks*.

Na seção que fala sobre Resolução de Problemas apresenta-se uma abordagem histórica sobre a Resolução de Problemas e também sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

A partir dos estudos dessas variáveis-chave construiu-se o Modelo Modificado e definiram-se as seguintes questões:

- Como promover o ensino intradisciplinar de Matemática, apoiado na Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas com o uso do material manipulativo *Algeblocks*?
- O uso do material manipulativo *Algeblocks* e da Metodologia de Ensino - Aprendizagem- Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas permitem motivar os estudantes a aprender *Álgebra* e perceber as conexões com procedimentos aritméticos e geométricos?

Para buscar responder essas questões, no Terceiro Capítulo: 2º bloco de Romberg–Onuchic apresentam-se as estratégias e os procedimentos elaborados para conduzir a busca por respostas às Perguntas construídas. Nesta pesquisa o Procedimento Geral em Ação foi o de: Aplicar um Projeto para trabalhar Matemática intradisciplinar com o material manipulativo *Algeblocks*, fazendo uso da Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

No Quarto Capítulo é apresentado o 3º Bloco de Romberg–Onuchic: coletar evidências, interpretar evidências, relatar resultados e antecipar ação de outros. Nesse capítulo pretende-se responder a pergunta desta pesquisa. Retomando-se a fundamentação teórica e a análise das evidências para relatar a resposta da pergunta.

O Projeto foi desenvolvido em 12 encontros com um grupo de alunos do 8º ano de uma escola estadual. Os conceitos como: número inteiro, adição, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros, expressões algébricas, polinômios, adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios e produtos notáveis puderam ser explorados fazendo uso do material manipulativo *Algeblocks* e adotando a Metodologia de Ensino- Aprendizagem- Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, com os alunos trabalhando ativamente na leitura, na comunicação e no uso de materiais, mostrando-lhes, concretamente os correspondentes conceitos abstratos.

Capítulo 1: Metodologia de Pesquisa

1.1 Posição de pesquisadores sobre pesquisa

1.2 Metodologia de Pesquisa

1.3 A proposta Metodológica de Thomas A. Romberg

1.4 O Modelo de Romberg-Onuchic

CAPÍTULO 1: METODOLOGIA DE PESQUISA

1.1 Posição de pesquisadores sobre pesquisa

No livro *Carta de uma orientadora: o primeiro projeto de pesquisa* de Debora Diniz, falando com suas orientandas, apresenta a seguinte resposta para: o que é um problema de pesquisa?

> Mas o que é um problema de pesquisa? Um problema de pesquisa não é um "problema" rotineiramente: "Estou com um problema: de dor de cabeça." Em pesquisa, problema é aquilo que inquieta, que provoca nossa curiosidade acadêmica, mas que tem a possibilidade de ser explorado e, para as mais ousadas, até mesmo de ser solucionado. (DINIZ, 2012)

1.1.1 O que é pesquisa?

Segundo Romberg (1992), o termo pesquisa refere-se a processos - a coisas que se faz e não a objetos que alguém pode tocar ou ver. Além disso, diz ele que o fato de fazer pesquisa não pode ser visto como uma ação mecânica ou como um conjunto de atividades que indivíduos seguem de uma maneira prescrita ou predeterminada.

Ubiratan D'Ambrósio (1996, p. 79) diz que, na etimologia da palavra, pesquisa está ligada à investigação, à busca, e a ideia, sempre a mesma, é a de mergulhar na busca de explicações dos porquês e dos comos, com foco em uma prática. Assim, pesquisa é o que permite a interface interativa entre teoria e prática e partir para a prática é como em um mergulho no desconhecido.

Fiorentini e Lorenzato (2006) dizem que pesquisa é um processo de estudo que consiste na busca disciplinada e metódica de saberes ou compreensões acerca de um fenômeno, problema ou questão da realidade ou presente na literatura que inquieta/instiga o pesquisador perante o que se sabe ou se diz a respeito.

Ainda, D'Ambrósio (2006), diz que há duas vertentes para pesquisa: a pesquisa quantitativa e a pesquisa qualitativa. A primeira, envolve grande número de indivíduos e recorre aos métodos estatísticos para coletar e analisar os dados obtidos, enquanto a segunda tem, em sua essência, a intenção do pesquisador como a interpretação de dados e discursos.

1.1.2 Pesquisa em Educação Matemática

Kilpatrick (1992), em *A History of Resarch in Matematics Education,* escreveu que a história da pesquisa em Educação Matemática é parte da história de um campo – Educação Matemática – que tem se desenvolvido ao longo dos últimos dois séculos, quando matemáticos e educadores voltaram sua atenção ao que é e a como é, ou deveria ser, ensinada e aprendida a Matemática na escola.

Desde o início, pesquisa em Educação Matemática tem sido moldada por forças dentro da grande área de pesquisa educacional, que abandonou, há cerca de um século, a especulação filosófica por uma abordagem mais científica.

Mas, a pesquisa em Educação Matemática tem lutado bastante para atingir sua própria identidade. Ela tem tentado fórmular suas próprias questões e seus próprios caminhos para atingi-la, tentando definir-se e tentando desenvolver um grupo de pessoas que se identifiquem como pesquisadores em Educação Matemática.

Ainda nesse artigo, Kilpatrick (1992, p. 5) afirma que a pesquisa em Educação Matemática teve a influência de duas disciplinas: a Matemática e a Psicologia.

No artigo *Fincando estacas: uma tentativa de demarcar a Educação Matemática como campo profissional e científico,* de Jeremy Kilpatrick (1996, p. 99),

> O campo da Educação Matemática tem aspectos profissionais e acadêmicos. Do lado acadêmico, a questão do que é considerado pesquisa está ainda sendo debatida. Um exame de dois conjuntos de critérios propostos para avaliar a qualidade da pesquisa em Educação Matemática revela que, apropriadamente interpretados, os critérios emprestados das ciências naturais e sociais são relevantes para um campo que está tentando ser científico. Do lado profissional, a Educação Matemática deve inevitavelmente preocupar-se com a aplicação do conhecimento especializado para auxiliar os estudantes e os professores que são seus clientes. [...]. Os educadores matemáticos universitários precisam trabalhar junto com matemáticos e com professores em sala de aula no desenvolvimento da teoria e da prática.

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 07) sobre o surgimento da Educação Matemática no Brasil teve início a partir do MMM[1], durante a década de 1980:

> É nesse período que surge a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) e os primeiros programas de pós-graduação em Educação Matemática. (...). Podemos afirmar que, no início do século XXI, havia no Brasil uma comunidade de educadores matemáticos que contava com uma associação própria (SBEM congregando cerca de 12 mil associados).

---

[1] Movimento da Matemática Moderna.

1.2 Metodologia de Pesquisa

O termo metodologia, segundo Souza (2010, p. 23), refere-se ao corpo de regras e diligências estabelecidas para realizar uma pesquisa. Também, esse termo é entendido como método ou ramo da lógica que se ocupa dos métodos das diferentes ciências.

De acordo com Santos

> Teorizar é levantar um problema e, para ele, gerar soluções possíveis. [...] O próximo passo é escolher, entre várias soluções possíveis, a mais adequada ao suprimento da necessidade geradora inicial. Este é o conteúdo da técnica, a aplicação dos resultados teóricos. [...]. Como se percebe, ação teórica e ação prática são indissociáveis no homem, da mesma forma que sua animalidade e sua racionalidade. Na verdade, a função essencial da razão humana é a de melhorar a vida; da teoria, aprimorar a prática; da racionalidade, melhorar o animal humano. A capacidade de questionar intencionalmente é, pois, a marca maior da racionalidade. É o que permite, ao ser racional, ir além das respostas naturais, únicas, para as suas necessidades impostas por instinto/ambiente/rotina, e diversificar. A razão, assim, manifesta-se na diversidade das respostas. (SANTOS, 2007, p. 18-19)

Então, se pesquisar é o exercício intencional da pura atividade intelectual, visando a melhorar as condições práticas da existência, como pesquisar? Quais são as atividades que um pesquisador desenvolve ao longo de sua pesquisa? Que métodos usa o pesquisador para realizar sua pesquisa? (ONUCHIC; et al; 2014, p. 56)

A escolha de uma metodologia de pesquisa dependerá do tipo do trabalho do pesquisador, como relata Souza (2010, p. 23).

> Adotar uma metodologia de pesquisa depende do tipo do trabalho e o que se objetiva com ele. Utilizar uma metodologia adequada é fundamental, pois serve de guia para o pesquisador durante todo o desenvolvimento do trabalho. Ela possibilita tratar do tema proposto dentro de limites fixos, tomando cuidado para que o pesquisador não perca o foco da pesquisa, isto é, dirigindo-se a caminhos que não se referem ao tema a ser pesquisado. Os métodos utilizados pelo pesquisador garantem a fidedignidade e a qualidade da pesquisa. Porém, não há uma única metodologia de pesquisa correta a ser adotada para um trabalho. A escolha da metodologia depende do tipo de estudo, do objetivo da pesquisa e da crença e conhecimento do pesquisador.

Para estruturar este trabalho escolhemos a metodologia de pesquisa de Thomas A. Romberg (1992), que sofreu uma modificação em 2014 por Onuchic, no Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP).

1.3 A proposta Metodológica de Thomas A. Romberg

No ano de 1992 Thomas A. Romberg, um matemático e professor da Universidade de Wisconsin-Madison-USA, publicou o artigo *Perspectives on Scholarship and Research Methods,* que foi traduzido por Onuchic e Boero em 2007, com o nome *Perspectivas sobre o conhecimento e Métodos de Pesquisa*, na revista do Boletim de Educação Matemática (Bolema), ligada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP – Rio Claro/SP.

Nesse artigo, Romberg (1992) pretende identificar nas ciências sociais as amplas tendências de pesquisa que estão relacionadas ao estudo do ensino e da aprendizagem nos ambientes escolares e determina como essas tendências têm influenciado o estudo de Matemática nas escolas. Ele procura identificar pelo menos cinco amplas tendências de pesquisa nas ciências sociais, relacionadas ao estudo do ensino e da aprendizagem em ambientes escolares e que são as seguintes: Crescimento de Pesquisa; Crescente diversidade em métodos de pesquisa; Uma mudança na epistemologia; Uma mudança na psicologia da aprendizagem; e O crescimento da consciência política. Esse autor apresenta as tendências em tópicos separados, mas ressalta que as tendências estão interrelacionadas e não verdadeiramente independentes.

Antes de apresentar essas tendências Romberg (1992) apresenta algumas características da Educação Matemática como um campo de estudo.

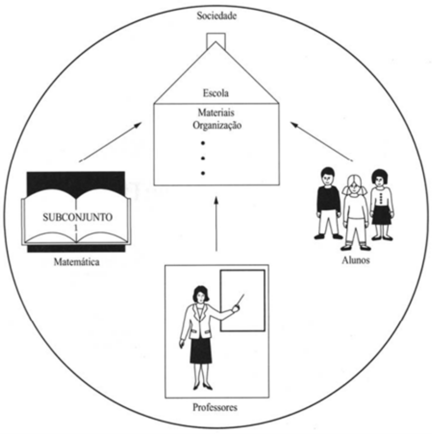
1.3.1 A Educação Matemática como um campo de estudo

Como disse Romberg (1992, p. 49, tradução nossa)

> É importante considerar a Educação Matemática como um campo de estudo porque, como Shulmam (1988) argumentou, a escola é complexa; assim, as perspectivas e os procedimento de investigação acadêmica de muitas disciplinas foram usadas para investigar as questões que surgem e são inerentes aos processos envolvidos no ensino e na aprendizagem de Matemática nas escolas.

O diagrama abaixo (de E.G. Begle, apud Romberg, 1992, p. 50) deixa claro como os componentes do processo da educação escolar (escola, professores, estudantes, Matemática e escolarização) estão interrelacionados dentro da sociedade.

Figura 1: A relação de sociedade, Matemática, estudantes, professores e escolarização.
(Adaptado de E.G. Begle, notas de classe para um seminário em Educação Matemática, 1961)



Fonte: Retirado do artigo – Perspectivas sobre o conhecimento e Métodos de Pesquisa – Onuchic e Boero (2007)

Nesse diagrama, Romberg, comenta que

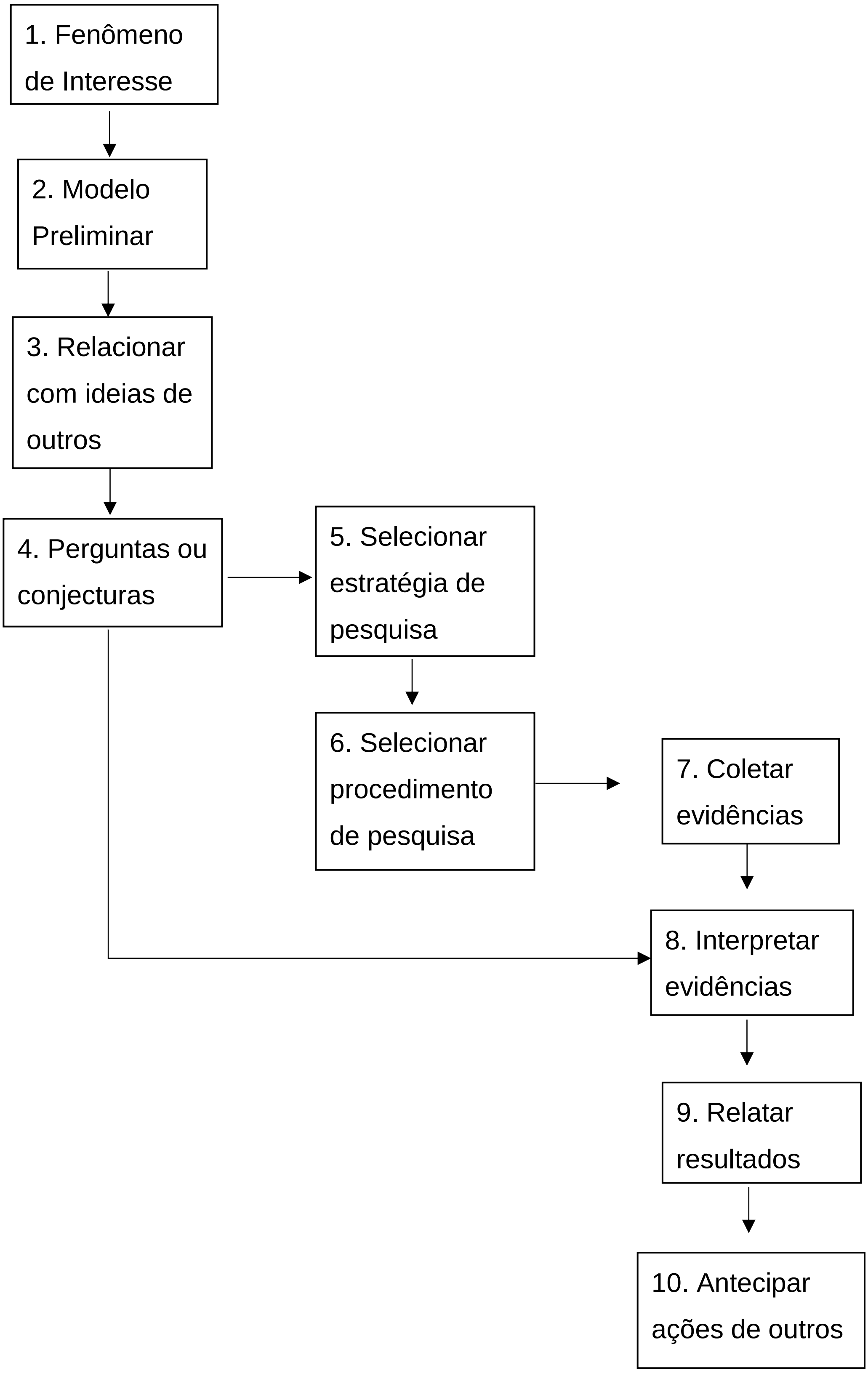
> o empreendimento de escolaridade está situado dentro de um contexto social; o currículo das ciências Matemática envolve um subconjunto da Matemática; o ensino é levado avante por um professor com um grupo de estudantes em uma sala de aula escolar durante um algum tempo. (ROMBERG, 1992, p. 49, tradução nossa)

1.3.2 Atividades de pesquisadores (Fluxograma de Romberg)

Romberg, com o objetivo de orientar um caminho de pesquisa, apresenta um modelo (ver Figura 2) em que descreve dez atividades, organizadas em um fluxograma, e distribuídas em três blocos: o primeiro bloco trata da identificação do problema da pesquisa (nas atividades 1, 2, 3 e 4); o segundo bloco se propõe a resolver esse problema, em que estratégias e procedimentos de trabalho são levantados e selecionados (nas atividades 5 e 6); e o terceiro bloco (atividades 7, 8, 9, 10), após o procedimento geral ser posto em ação, trata da análise das informações obtidas, buscando tudo que ficou evidente frente à questão ou à conjectura levantada.

A ordem desse modelo facilita ao pesquisador a organizar a pesquisa principalmente para pesquisadores iniciantes. Romberg ressalta que o modelo não é algo exclusivo, pois haja vista que os livros-texto que falam sobre metodologias de pesquisa fazem algo semelhante. Destaca também que “embora as atividades estejam apresentadas em uma ordem sequencial, elas não precisam ser seguidas necessariamente nessa ordem” (ROMBERG, 1992, p. 54). Ainda ele diz que “a interação entre fatores tais como: intenção do pesquisador, as suposições, as conjecturas, a disponibilidade de informações, os métodos e, assim por diante, não podem na prática ser separados tão nitidamente.” (ROMBERG, 2007, p.98)

Figura 2: Fluxograma de atividades proposta por Romberg



Fonte: Retirado do artigo – Perspectivas sobre o conhecimento e Métodos de Pesquisa Onuchic e Boero (2007)

➢ **Primeiro Bloco: Identificação do Problema da Pesquisa**

Atividade 1 – Fenômeno de Interesse

A identificação do fenômeno de interesse é o início de uma pesquisa, isto é, o que leva o pesquisador a pesquisar sobre certos fatos que possam ser descritos ou explicados cientificamente. Toda pesquisa começa com uma curiosidade. No caso da Educação Matemática, um fenômeno pode estar relacionado com o modo de aprendizagem dos estudantes, como os estudantes interagem com a Matemática, como os estudantes respondem aos professores, como os professores planejam seu ensino e entre outros.

Atividade 2 – Modelo Preliminar

O modelo preliminar serve como um ponto de partida para a pesquisa e mostra como as variáveis nele identificadas pelo pesquisador servirão como possível fundamentação teórica.

O Modelo Preliminar é o primeiro modelo feito como guia para o desenrolar da pesquisa, isto é, a ideia inicial do trabalho, em que se encontram os elementos constituintes do fenômeno de interesse e as relações entre eles.

Atividade 3 – Relacionar com ideias de outros pesquisadores

> Ao *Relacionar com ideias de outros* o pesquisador deverá apresentar, em um texto, as contribuições de outros pesquisadores que ele julga importantes para a sua pesquisa, sem, no entanto, discutir tais ideias. Trata-se de um momento em que o pesquisador "ouve" os outros sem se manifestar. (ONUCHIC, et al, 2014, p. 61)

Atividade 4 – Perguntas ou Conjecturas

Este é um passo-chave no processo de pesquisa porque, quando se examina um particular fenômeno, uma quantidade de perguntas potenciais inevitavelmente aparece. Decidir quais perguntas examinar não é fácil.

As conjecturas estão baseadas em algumas relações entre as variáveis que caracterizam o fenômeno e nas ideias sobre aquelas variáveis-chave e suas relações com o esboçado no modelo.

➢ <u>**Segundo bloco: Planejamento**</u>

Atividade 5 – Selecionar uma Estratégia Geral de Pesquisa

Para selecionar uma estratégia geral de pesquisa a afim de obter evidência, a decisão sobre que métodos usar segue diretamente das questões que se seleciona, a partir da visão de mundo na qual estas questões estão situadas, da tentativa de modelo que se tenha construído para explicar o Fenômeno de Interesse, e da conjectura que se tenha feito sobre evidência necessária.

A Estratégia Geral de Pesquisa tem de atender e satisfazer o Fenômeno de Interesse afim de responder à pergunta: **O que devo fazer?**

Atividade 6 – Selecionar um Procedimento Geral

Os Procedimentos de Pesquisa direcionam o pesquisador: **Como pesquisar?** Este é o momento de ação das estratégias já selecionadas e o modo como elas serão executadas.

É nesse passo que as técnicas usualmente ensinadas em cursos de métodos de pesquisa são importantes: como selecionar uma amostra, como obter informações (entrevista, pergunta, observação, teste), como organizar as informações uma vez que ela tenha sido coletada, e assim por diante. Há um grande número de procedimentos específicos que se poderia seguir para diferentes tipos de perguntas. Deve-se tomar cuidado ao selecionar procedimentos que irão esclarecer as questões.

➢ <u>**Terceiro bloco: Considerações Finais.**</u>

Atividade 7 – Obter evidências

Após o Procedimento Geral ser executado o pesquisador irá fazer a Coleta das evidências para atender a pergunta da sua pesquisa. Este passo pode ser feito sem rodeios, uma vez que se tenha decidido coletar certa informação para construir um argumento, considerando as perguntas que foram feitas.

Atividade 8 – Interpretar as evidências coletadas

Após as evidências terem sido coletadas, o pesquisador analisará as informações, qualitativas ou quantitativas, sempre observando quais são importantes para responder à pergunta da pesquisa. É importante perceber que, em cada investigação, é coletada mais informação do que se precisa para responder a questão. Parte delas é relevante, parte é irrelevante e parte até não compreensível.

Atividade 9 – Relatar resultados

Nesta atividade o pesquisador apresentará um texto escrito respondendo sua pergunta da pesquisa, relatando seu caminho e suas referências ao interpretar as evidências.

Atividade 10 – Antecipar ações de outros

Como parte da comunidade acadêmica, o pesquisador deverá apresentar sua investigação e, também, contribuir para "possibilidades de trabalhos futuros envolvendo seu objeto de pesquisa." (ONUCHIC, et al, 2014, p. 65).

Membros de uma comunidade de estudo discutem ideias entre si, reagem às ideias uns dos outros e sugerem novos passos, modificações de estudos anteriores, elaborações de procedimentos e assim por diante. Os pesquisadores tentam situar cada equipe acadêmica (estudo em uma cadeia de investigações). Coisas que vieram antes e coisas que vêm depois de qualquer particular estudo são importantes.

1.4 O Modelo de Romberg–Onuchic

Alterações do Modelo de Romberg são apresentados no livro *Resolução de Problemas: Teoria e Prática,* no capítulo *A pesquisa Científica e a Pesquisa Pedagógica,* que as reproduzo aqui quase que em sua inteireza.

O GTERP, após alguns anos desenvolvendo pesquisas com base no Modelo Metodológico de Romberg, sugere algumas alterações ao modelo inicialmente proposto e, ainda, acrescenta uma nova atividade a ser nele desenvolvida, criando um novo modelo. A esse novo Modelo, que iremos apresentar aqui, chamamos Modelo Metodológico de Romberg–Onuchic. (ONUCHIC; NOGUTI, 2014, p. 57)

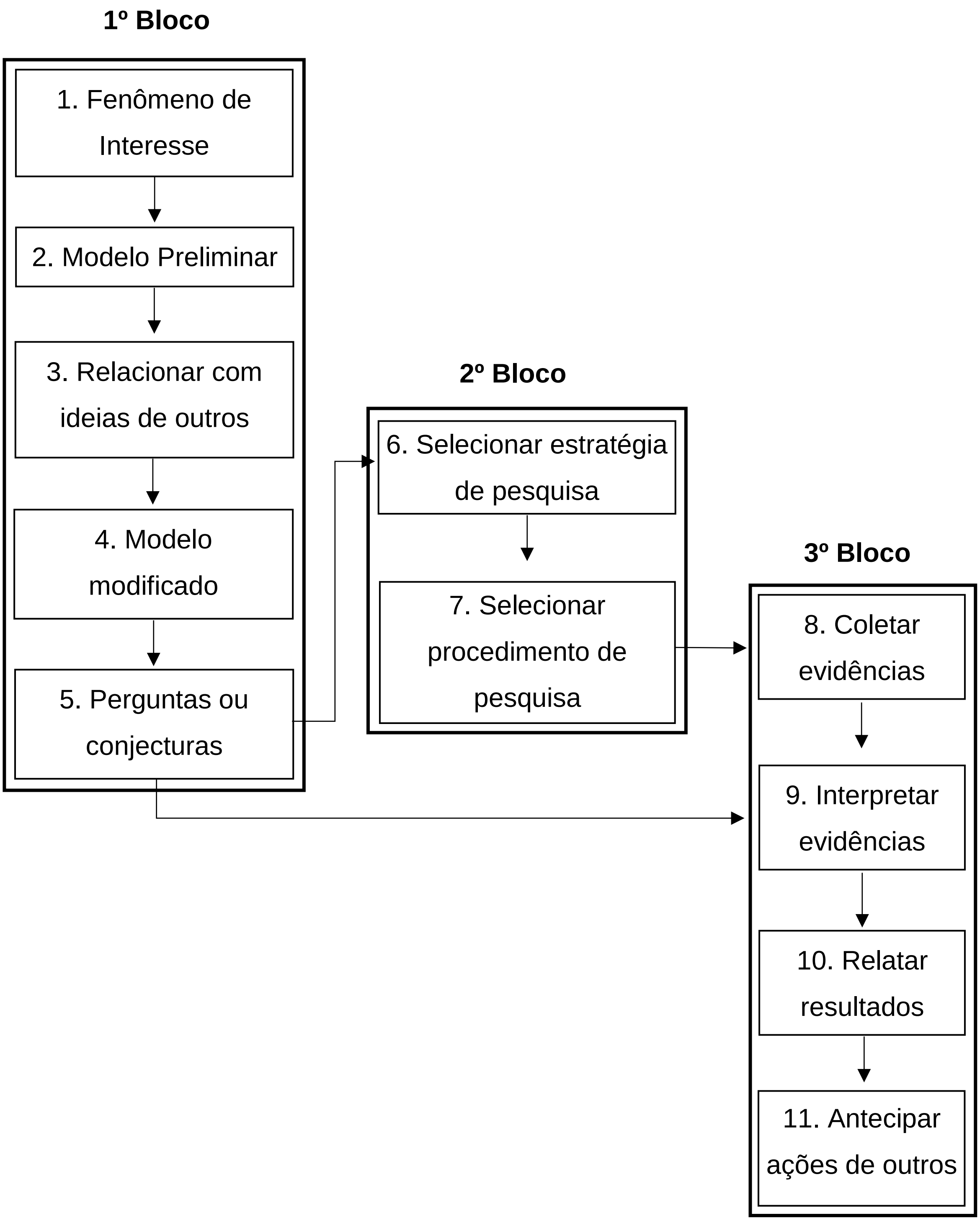
> Romberg (1992) considera que as atividades envolvidas em fazer pesquisa incorporam mais características de uma arte do que as de uma disciplina puramente técnica. (ONUCHIC; NOGUTI 2014, p. 57)

No trabalho realizado por um pesquisador, muitas vezes se torna importante estabelecer um plano de ação e, também, levantar estratégias e procedimentos que o levem à solução do problema inicialmente proposto.

Diante dessas necessidades, durante alguns anos de pesquisa, observação e uso do Modelo Metodológico de Romberg, os membros do GTERP, que utilizaram e utilizam esse modelo para compor suas dissertações e teses, perceberam que alguns passos poderiam ser alterados a fim de estabelecer um modelo mais completo para a realidade e os objetivos do grupo. Sendo assim, fez-se necessário que o novo modo de trabalho, em pesquisas científicas desenvolvidas pelo GTERP, fosse apresentado à comunidade científica, com as contribuições que foram sendo somadas ao Modelo de Romberg nesse tempo. (ONUCHIC; NOGUTI, 2014, p. 57-58).

As contribuições ao Modelo não se apresentam apenas na inserção de uma nova atividade, *Modelo Modificado,* a mais do que as dez atividades inicialmente propostas por Romberg, mas, também, nas definições de cada uma das atividades do pesquisador (ONUCHIC; NOGUTI, 2014, p. 59).

Figura 3: Fluxograma de Romberg–Onuchic



Fonte: Retirado do Livro Resolução de Problemas Teoria e Prática (ONUCHIC; et al, 2014)

1.4.1 1º Bloco de Romberg–Onuchic

Atividade 1 – Fenômeno de interesse

Como toda pesquisa começa com uma curiosidade sobre um particular fenômeno do mundo real, na Educação Matemática o *Fenômeno de Interesse* se manifesta, em geral, no envolvimento de professores; de estudantes; de como se relacionam professores e estudantes; de como os estudantes se comportam nesse processo; de como os professores ensinam e como os estudantes aprendem. Então, ao estabelecer um *Fenômeno de Interesse,* estamos comprometidos, como diz Santos (2007), a trabalhar com algo que nos está incomodando. A partir desse passo, inicia-se a elaboração do projeto de pesquisa, que será minuciosamente estudado e descrito nas atividades 2 a 5.

Atividade 2 – Modelo Preliminar

Ao construir um *Modelo Preliminar,* o pesquisador faz suposições sobre certos aspectos importantes como variáveis do *Fenômeno de Interesse* e de como eles estão relacionados.

O *Modelo Preliminar* funciona como um guia para o pesquisador no desenvolvimento da pesquisa, podendo sofrer alterações de acordo com avanços da mesma. "Um pesquisador faz suposições sobre certos aspectos importantes como as variáveis do fenômeno de interesse e de como estes aspectos estão relacionados, depois os ilustra em um modelo" (ROMBERG, 2007, p.99). Tal modelo é pensado pelo pesquisador quando inicia sua pesquisa e pode apresentar, ainda, poucas informações para o seu desenvolvimento. É possível que o pesquisador esboce uma *pergunta preliminar* para o modelo pensado que possa atender a contento o *Fenômeno de Interesse* e o próprio *Modelo Preliminar* criado.

A partir do *Modelo Preliminar,* o pesquisador obtém *variáveis-chave* que irão auxiliá-lo a identificar e a relacionar o fenômeno e o modelo feito às ideias de outros – ou seja, pesquisar e "ouvir" o que outros (comunidade, pesquisadores, teóricos, os que fazem aplicação, ...) podem contribuir com sua pesquisa – trata-se de uma revisão teórica e de outros trabalhos já realizados que irão auxiliar o pesquisador, fundamentando sua pesquisa.

Atividade 3 – Relacionar com as ideias de outros

O pesquisador utiliza “recortes” de outros autores ou suas obras para que, num segundo momento, possa se apoiar nas ideias desses autores, para a construção de seu *Modelo Modificado* e da *Pergunta da Pesquisa.* O pesquisador deve estar a par de pesquisas já desenvolvidas, ou que estão em desenvolvimento, relacionadas ao seu tema de trabalho. Conhecendo o que outros pesquisadores pensam, suas ideias e concepções teóricas, ele terá subsídios para preencher eventuais lacunas de pesquisa e saberá como tais ideias e concepções podem ampliar, explicar ou modificar o seu *Modelo Preliminar* levando-o a um *Modelo Modificado.*

Atividade 4 – Modelo modificado

O *Modelo Modificado* da pesquisa, em geral, é mais abrangente do que o inicialmente proposto, e deve conduzir o pesquisador à sua *Pergunta* ou *Conjectura da pesquisa.*

Atividade 5 – Pergunta ou conjectura

A *Pergunta da Pesquisa* surge após o pesquisador relacionar o seu *Fenômeno de Interesse* e o *Modelo Modificado* com *as ideias de outros.*

1.4.2 2º Bloco de Romberg–Onuchic

Para resolver o problema de pesquisa proposto, deve-se elaborar um plano de ação. Este plano é focado no *Modelo Modificado* e deve contemplar itens importantes que nele apareceram.

Atividade 6 – Selecionar estratégias de pesquisa

A seleção de uma estratégia geral e as decisões sobre que métodos utilizar, para resolver o problema proposto pela *Pergunta da pesquisa* ou *Conjectura levantada*, são ações provindas diretamente das questões selecionadas a partir da visão de mundo na qual elas estão inseridas e do modelo criado a fim de explicar o *Fenômeno de Interesse* considerado. Essas atitudes correspondem a responder à seguinte pergunta: **O que devo fazer?**

Nesse passo, o pesquisador estará buscando *Estratégias e Procedimentos* de pesquisa. O GTERP propõe que as Estratégias e Procedimentos, descritos por Romberg, sejam complementados por Estratégias Auxiliares e Procedimentos Auxiliares, de forma que o pesquisador consiga englobar um maior número de variáveis que se apresentam no *Modelo Modificado.*

Dessa forma, além da Estratégia Geral e do Procedimento Geral, se necessário devemos criar estratégias auxiliares específicas (E_1, E_2, E_3 , ..., E_n) de modo que, a partir delas, criemos procedimentos auxiliares relacionados (P_1, P_2 , P_3 , ..., P_n). A diferença entre as Estratégias e Procedimentos encontra-se basicamente em "pensar" o que fazer (estratégias) e colocar tais "pensamentos" em ação (procedimentos).

Sendo assim, propomos que o pesquisador pense em selecionar uma estratégia geral, que busque responder a *Pergunta ou Conjectura* da pesquisa e, a partir dessa estratégia geral, selecione também estratégias auxiliares (E_1, E_2, E_3 , ..., E_n) que serão importantes para que se consiga atender à estratégia geral.

Atividade 7 – Selecionar procedimento de pesquisa

Selecionada a estratégia geral e todas as condições exigidas, evidências devem ser coletadas. É, nesse passo, que o pesquisador deverá se perguntar: **Como devo fazer isso?**, em que as técnicas usualmente trabalhadas em cursos de métodos de pesquisa são importantes. Ou seja, o pesquisador está buscando *Procedimento de Pesquisa.*

Após elencar os *Procedimento Auxiliares,* o pesquisador deverá fazer um relato de como desenvolveu cada um deles, o que chamamos de *Procedimentos Auxiliares em Ação*, antes de descrever o seu *Procedimento Geral em Ação.* Nesse momento, o pesquisador utiliza o que "ouviu dos outros", ou seja, considera as leituras que fez e as referências teóricas que adotou e coloca a sua voz no relato e posterior análise dos dados.

1.4.3 3º Bloco de Romberg–Onuchic

Atividade 8 – Coletar evidências

No terceiro bloco do Modelo de Romberg–Onuchic, o pesquisador deverá coletar evidências e informações a partir das estratégias e procedimentos planejados no bloco anterior. Nesse estágio o pesquisador estará em sala de aula, ou analisando um material importante para sua investigação de onde possa obter informações relevantes para responder a *Pergunta* ou a *Conjectura de pesquisa.*

Atividade 9 – Interpretar as evidências

No estágio *Interpretar as evidências coletadas*, devem ser analisadas as informações produzidas, sempre observando quais delas são importantes frente ao problema levantado.

Atividade 10 – Relatar resultados

Coletadas e interpretadas as evidências, o pesquisador deve escrever seu relatório de pesquisa, isto é, deve-se *Relatar os resultados* obtidos, considerando o caminhar de sua pesquisa, suas referências teóricas e aplicações, sempre mantendo vivo o objetivo de responder a pergunta definida para sua pesquisa ou defender a conjectura levantada. Tal relato pode ser um artigo, uma dissertação ou mesmo uma tese.

Atividade 11 – Antecipar ações de outros

Finalmente, ser membro de uma comunidade de pesquisa implica na responsabilidade de informar, aos outros membros, sobre a investigação terminada e buscar seus comentários e críticas, ou seja, *Antecipar a ação de outros* pesquisadores em relação ao seu tema de pesquisa. Ao fazer isso, o pesquisador poderá também apresentar aos seus pares possibilidades de trabalhos futuros envolvendo seu objeto de pesquisa.

Capítulo 2: 1º Bloco de Romberg-Onuchic: Identificação do Problema da Pesquisa

CAPÍTULO 2: 1º BLOCO DE ROMBERG–ONUCHIC: Identificação do Problema da Pesquisa

> O objetivo da pesquisa em educação Matemática deveria ser o de produzir um novo conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática. Porque os estudantes aprendem a maior parte de sua Matemática nas salas de aula da escola, acredito que a principal missão de um programa de pesquisa seria a de identificar as componentes principais das salas de aula que promovem compreensão Matemática e esclarecem algumas das características organizacionais que contribuem ou impedem a operação de tais salas de aula. (ROMBERG, 1997, p. 379, tradução nossa)

Seguem, neste capítulo, as três atividades do primeiro bloco do Fluxograma de Romberg–Onuchic: Fenômeno de Interesse, Modelo Preliminar e Relacionar com ideias de outros. As duas primeiras atividades auxiliam a determinar as variáveis-chave para compor a sustentação teórica desta pesquisa. Para compreender o Fenômeno de Interesse determinado para esta pesquisa é apresentada a trajetória acadêmica e profissional da autora.

Minha trajetória acadêmica e profissional

Iniciei o curso de Licenciatura em Matemática em 2010 na Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Ilha Solteira. Escolhi este curso pois sempre desejei ser professora de Matemática. Durante o curso de Licenciatura em Matemática participei de três projetos de ensino. O primeiro foi o Projeto de Tecnologia Aplicada à Educação, coordenado pela Profa. Dra. Dalva Maria de Oliveira Villarreal. Esse projeto foi desenvolvido durante o ano de 2010 e tinha como objetivo ensinar Matemática por meio de softwares de jogos matemáticos no Ensino Fundamental I.

Em 2011, no primeiro semestre, fui monitora de Cálculo Diferencial e Integral I e o Prof. Dr. Ernandes Rocha de Oliveira era quem ministrava o curso. No segundo semestre desse ano, fui selecionada para fazer parte do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid), coordenado pelo Prof. Dr. Inocêncio Fernandes Balieiro Filho. Foi nesse projeto que tive o primeiro contato com a pesquisa em Educação Matemática.

Esse projeto do Pibid, no qual participei até dezembro de 2014, foi realizado em uma escola estadual de Ilha Solteira – SP. Primeiro acompanhei uma turma de 8ª série/ 9º ano e a professora que ministrava as aulas de Matemática tinha formação nessa área e, também, cursava, naquela época, uma pós-graduação. Nessa turma me deparei com as dificuldades dos estudantes em encontrarem as raízes da equação do 2º grau. Percebi, também, que para alguns estudantes não fazia sentido encontrar o valor de x colocando "a, b e c" na Fórmula de Bhaskara. E essa situação começou a me incomodar e me mobilizar na busca de um ensino de Matemática que pudesse dar sentido ao aluno e de encontrar uma forma de ensino dando-lhe oportunidade de perceber a importância da Matemática para o desenvolvimento de sua habilidade de raciocínio lógico, de organização e de generalização. Nesse momento recordei de aulas que tivera na 3ª série do Ensino Fundamental em que tive dificuldade para entender o processo da divisão. No início dessa aprendizagem, o algoritmo que me era apresentado não era significativo para mim. Então, lembrei-me de quando a professora utilizou o Material Dourado para explicar o processo do algoritmo da divisão e de quando consegui superar as dificuldades que tinha a esse respeito.

Em 2012 acompanhei uma turma de recuperação intensiva. Era uma turma de 8ª série/9º ano, formada por estudantes que tinham dificuldade de aprendizagem vindas da 7ª série/ 8º ano. Com essa turma, além da professora de Matemática trabalhar essas dificuldades, deveriam ser trabalhados também os conteúdos da 8ª série/ 9º ano previstos pelo Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias. Imaginem só o desafio para essa professora! Nessa turma eu também auxiliava a professora a preparar as aulas. Nós procurávamos problemas matemáticos que abordassem situações geométricas e, também, construir conceitos novos que ela precisava trabalhar. Por exemplo, ângulos correspondentes, alternos e colaterais. Então, nessa atividade, além de trabalhar esses conceitos de Geometria, também aproveitávamos para tirar dúvidas dos estudantes ao resolverem equações do primeiro grau. O trabalho que desenvolvi com essa professora me fez refletir muito em um ensino de Matemática fazendo conexões em diferentes ramificações da Matemática.

Tive, também, oportunidade de participar em 2012 do III Encontro dos Núcleos de Ensino & II Encontro Pibid da UNESP, em Bauru, do XI Encontro Paulista de Educação Matemática e I Encontro Pibid de Ilha Solteira - Polo Regional Ilha Solteira/ São José do Rio Preto.

Em 2013 apresentei trabalho no XI Encontro Nacional de Educação Matemática, em Curitiba, e também no VII Cibem - Congresso Iberoamericano de Educação Matemática, em Montevidéu – Uruguai. Nesses encontros apresentei relatos de experiência como bolsista do Pibid trabalhando dificuldades que os estudantes enfrentavam na aprendizagem de Matemática e de uma proposta de atividade para a demonstração do Teorema de Pitágoras.

Em 2014 lecionei Matemática em uma turma de 7ª série/ 8º ano. Senti na pele a responsabilidade de organizar uma aula e, mesmo assim, contar com imprevistos. Surgiu um desafio: como ensinar Álgebra com significado para estudantes da 7ª série/ 8º ano?

Dessa forma, decidi buscar na Educação Matemática entendimentos para trabalhar em matemática em sala de aula. E como apresentar para os alunos a união dos diferentes ramos da Matemática, como apresenta Lorenzato (2006, p.60), em uma forma de ensino intradisciplinar, entendendo por ensino intradisciplinar o ensino “o qual pode ser reduzido sinteticamente, ao ensino integrado da Aritmética, Geometria e Álgebra”.

Assim descrevi meu percurso até a procura de um programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Em 2015 comecei a fazer parte do GTERP na UNESP, campus de Rio Claro / SP, em que comecei a ter conhecimento sobre a Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Feitas leituras na linha da Resolução de Problemas e com discussões em grupo no GTERP pude reconhecer que essa Metodologia poderia responder a meus anseios. Notei, nas pesquisas realizadas nessa linha, que a Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas oferece aos estudantes a possibilidade de construir novos conhecimentos ao longo da resolução de problemas e a oportunidade de vivenciar um trabalho significativo em sala de aula.

Em uma das reuniões do GTERP conheci o material manipulativo *Algeblocks* e vi nele a possibilidade de desenvolver o ensino de Matemática com conexões entre a Aritmética, a Álgebra e a Geometria, fazendo uso dessa metodologia pedagógica.

2.1 Atividade 1: Fenômeno de Interesse

Refletindo sobre minha experiência acadêmica e profissional estive sempre em busca de aprender como ensinar conceitos, conteúdos e procedimento matemáticos com significado e compreensão para o estudante. Assim, definimos o fenômeno de interesse a ser pesquisado:

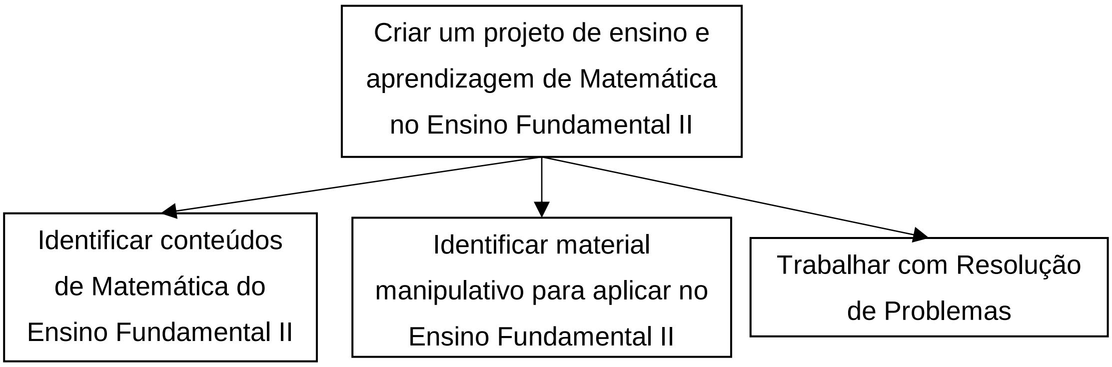
O ensino intradisciplinar de Matemática, com o uso de material manipulativo, adotando a Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

2.2 Atividade 2: Modelo Preliminar

> Um pesquisador faz suposições sobre certos aspectos importantes como variáveis do fenômeno de interesse e de como estes aspectos estão relacionados, depois os ilustra em um modelo. (ROMBERG, 2007, p. 99)

O *Modelo Preliminar* serve como ponto de partida para a pesquisa dessa forma. Assim na Figura 4, apresentamos um modelo que nos ajudará a dar sequência para a Atividade 3 – Relacionar com ideias de outros – segundo o Modelo de Romberg–Onuchic.

Figura 4: Modelo Preliminar da pesquisa



Fonte: Elaborada pelas autora e orientadora

Observando esse *Modelo Preliminar* percebe-se que os conteúdos matemáticos a serem abordados podem variar. Da mesma forma variaria o material manipulativo a ser utilizado. A Metodologia em Resolução de Problemas poderia ser escolhida entre os diferentes tipos de tratamento sobre Resolução de Problemas considerados em pesquisas.

Isto posto, definem-se essas variáveis como variáveis-chave para esta pesquisa:

- Conexões no Ensino de Matemática;
- Material Manipulativo e;
- Resolução de Problemas

e para cada uma dessas variáveis-chave será apresentado uma seção para relatar o que “outros” disseram a seu respeito e, consequentemente, contribuiriam ou influenciariam de alguma forma esta pesquisa. Portanto, as próximas seções falarão sobre essas três variáveis-chave.

2.3 Atividade 3: Relacionar com ideias de outros

Segundo Santos (2007), relacionar com ideias de outros nada mais é do que fazer uma pesquisa bibliográfica e, como ele mesmo afirma, é verdade que a pesquisa bibliográfica não costuma oferecer dados inéditos como a pesquisa de campo ou a de laboratório oferecem. Ressalte-se, porém, que ela em nada compromete a possibilidade de originalidade dos raciocínios que, a partir deles, possam ser desenvolvidos. A bem da verdade, dados já publicados podem, mesmo, possibilitar raciocínios inéditos, já que o conceito de inédito não se restringe a “realidade nova.”

2.3.1 Variável-chave: Conexões no Ensino de Matemática

O que exatamente é uma "conexão Matemática"? O que realmente acontece quando alguém está conectando ideias comuns aos diferentes ramos da Matemática? Qual é o papel do ato de fazer conexões no Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática?

Pensando nessas questões vamos analisar como "conexões Matemática" são compreendidas na literatura da Educação Matemática.

O Dicionário Houaiss apresenta treze termos para a palavra "conexão." Para nós, nesse contexto, foi aceita a seguinte: vinculo, união, ligação; relação lógica ou causal; nexo, coerência (HOUAISS, 2009). Entretanto, no Dicionário Aurélio, vemos, como sinônimos de conexão, analogia de coisa diferentes.

Começando com a ideia de que conexão Matemática seja "uma relação causal ou lógica" entre dois ramos da Matemática, um dos ramos enfrentaria algumas questões fundamentais. Por exemplo, uma conexão é uma melhor característica do assunto ou é uma característica da compreensão do estudante? Se uma conexão é uma característica da compreensão do estudante, então, ela um artifício ou um produto da aprendizagem, ou é uma conexão feita no processo ou na atividade? Talvez a resposta esteja no que já foi dito. Uma conexão Matemática é abordada de diversas maneiras na literatura como uma relação entre ideias Matemática, como uma relação que é construída pelo estudante e como um processo que faz parte do fazer Matemática. Entretanto, na concepção de Aurélio os três ramos da Matemática Aritmética, Álgebra e Geometria poderiam ser trabalhadas simultaneamente durante a resolução de um mesmo problema matemático.

Acreditamos ser interessante apresentar uma parte do relato de Linda Gojak[2] que conta sua experiência em sala de aula:

> Um dos momentos mais memoráveis que tive no ensino de Matemática ocorreu em uma aula de quinto ano. Começamos o ano usando tabelas retangulares como um modelo para desenvolver o conceito de números primos e compostos. Colocamos cartazes dos números de 1 a 100, feitos por estudantes, com representações de tabelas e listas de fatores para cada número, ao redor da sala. No final daquela unidade, todos os meus estudantes haviam dominado fatos de multiplicação e podiam fatorar com facilidade quando começamos

[2] Linda Gojak foi presidente do NCTM de 2012 – 2014. O seu relato completo está no Anexo desta Dissertação.

> nosso trabalho com frações. As conexões entre conceitos e o uso de representações concretas certamente levaram a uma compreensão mais profunda. Mais tarde, naquele ano, os estudantes trabalharam com uma variedade de modelos para encontrar área e perímetro de retângulos e estenderam essa experiência para encontrar as áreas de triângulos, paralelogramos e trapézios. A maioria dos estudantes foi capaz de generalizar uma fórmula, embora nem sempre a mais eficiente, para cada polígono. Um dia, um estudante comentou que isso era exatamente como o que eles tinham estudado no início do ano. Quando eu dei um olhar intrigado, a classe apontou para os cartazes ainda na parede de nossa primeira unidade de estudo e disse: "Você sabe, aquele fator e coisas múltiplas." Eu tive uma nova apreciação do poder de fornecer experiências que capacitasse os estudantes a fazer conexões entre ideias Matemática. Meus estudantes lembraram-se e compreenderam a Matemática que tínhamos estudado meses antes! [...]

Ainda, disse ela que:

> Muitos de nós aprendemos Matemática como pedaços isolados de informação. Tomar um conceito matemático e considerar como ele se origina, se estende e se conecta com outros conceitos ao longo das séries ajudará os professores a desenvolver uma compreensão mais profunda. É, então, que podemos planejar um ensino que garanta que nossos estudantes regularmente façam conexões para ajudá-los a dar sentido à Matemática que estão aprendendo. (tradução nossa)

Esse exemplo mostra a importância do item *Connection,* que é um dos Padrões de Procedimento do NCTM de 2000.

O documento de Princípios e Padrões para a Matemática Escolar[3] do NCTM identificam "conexões" como uma vertente fundamental no currículo de Matemática.

> A matemática não é uma coleção de ramos ou padrões separados, embora seja frequentemente particionada e apresentada dessa maneira. Em vez disso, a matemática é um campo de estudo integrado. Ver a matemática como um todo destaca a necessidade de estudar e pensar sobre as conexões dentro da disciplina, conforme refletidos tanto no currículo de uma determinada série como entre os níveis da série. Para enfatizar as conexões, os professores devem conhecer as necessidades de seus alunos, bem como a matemática que os alunos estudaram nas séries anteriores e o que eles estudarão nas séries seguintes[4]. (NCTM, 2000, p. 64, tradução nossa)

---

[3] Principles and Standards for School Mathematics. Disponível em: https://drive.google.com/open?id=0B_CtXlExoqOnQWFkQ0dDTDdscEE

[4] Mathematics is not a collection of separate strands or standards, even though it is often partitioned and presented in this manner. Rather, mathematics is an integrated field of study. Viewing mathematics as a whole highlights the need for studying and thinking about the connections within the discipline, as reflected both within the curriculum of a particular grade and between grade levels. To emphasize the

Há muita pesquisa que investiga conexões entre a Matemática e o mundo real, de acordo com Businskas (2008), em *Conversations About Connections: How Secondary Mathematics Teachers Conceptualize and Contend With mathematical Connections,* e poucas são as que pesquisam conexões entre diferentes ramos da Matemática.

O documento *Curriculum and Evaluation Standards*[5] (NCTM, 1989, p.84) coloca como Padrão de Procedimento 4 - Conexões Matemática - e diz que, nos anos 5 a 8 correspondentes ao nosso Ensino Fundamental II, o currículo de Matemática deveria incluir a investigação de conexões Matemática, de modo que os estudantes pudessem:

- ver a Matemática como um todo integrado;
- explorar problemas e descrever resultados usando modelos ou representações Matemática, gráficos, numéricos, físicos, algébricos e verbais;
- usar uma ideia Matemática para sua posterior compreensão de outras ideias Matemática;
- aplicar pensamento e modelagem matemático para resolver problemas que surgem em outras disciplinas, tais como: arte, música, psicologia, ciência e negócios.
- valorizar o papel da Matemática em nossa cultura e sociedade (NCTM, 1998, p. 84, tradução nossa)

Como enfocar essas ideias?

Concordando com esse documento vemos que, para muitos estudantes, a Matemática do Ensino Fundamental II tem cobrado muito frequentemente o trabalho de “realizar contas” nos primeiros anos de escolaridade. A intenção deste padrão é a de ajudar os estudantes a ampliar sua perspectiva de ver a Matemática como um todo integrado mais do que um conjunto de tópicos isolados, e de reconhecer sua relevância e utilidade tanto na escola como fora dela.

O ensino de Matemática no Ensino Fundamental II deveria preparar os estudantes para expandir e aprofundar o estudo no Ensino Médio através de exploração e das interconexões entre ideias Matemática.

connections, teachers must know the needs of their students as well as the mathematics that the students studied in the preceding grades and what they will study in the following grades.

[5] Currículo e Padrões de Avaliação para a matemática escolar.

2.3.1.1 O Padrão de Procedimento: Conexões

Não é fácil mostrar para os estudantes as experiências entre as conexões e as interações de tópicos matemáticos.

O livro *Teaching Mathematics in the 21st Century: Methods and Activities for Grades 6-12* (2008), referindo-se ao Padrão Conexão, diz que “a Matemática é uma rede de ideias intimamente conectadas” e é vista com um olhar sobre sua natureza. Essas ideias estão ligadas por relações particulares entre os diferentes ramos da Matemática.

O Padrão Conexões é composto por duas partes:

- Primeira parte – ele é importante por conectar-se dentre de e entre ideias Matemática. Nessa visão os estudantes têm que ter oportunidade para ver como os conceitos matemáticos se constroem, se ligam um ao outro em uma rede de ideias conectadas.
- Segunda parte – a Matemática deve estar conectada ao mundo real e a outras disciplinas. Assim, a Matemática deveria, frequentemente, estar integrada a outras áreas disciplinares e suas aplicações Matemática deveriam ser exploradas em contexto do mundo real.

Coxford (1995, p.3), em seu artigo *The Case for Connections* no livro do ano de 1995 do NCTM*, diz que* “o conceito de conexões Matemática é assumido como tendo três aspectos relacionado: (1) Temas Unificadores; (2) Processos Matemáticos; e (3) Conectores Matemáticos.” Nenhum desacordo sobre completude ou independência desses aspectos é implicado. Mais do que isso, os três aspectos são usados para organizar os exemplos, as ilustrações, as sugestões e as discussões. (COXFORD, 1995, p. 4)

Temas Unificadores

Pode-se pensar em muitos possíveis temas tais como: modelagem, aplicação, variável e número que costumam chamar a atenção para a natureza conectada da Matemática. Para ilustrar o poder e o espalhamento dos temas nós escolhemos três para discussão: variável, dados e forma.

- **Variável**

> A noção de variável pode ajudar a conectar Álgebra, Geometria, Matemática discreta e cálculo. [...]. Por exemplo, como uma taxa constante de variável se relaciona com a função no gráfico e as equações lineares? Que mudanças ocorrem no gráfico de uma função quando um coeficiente na equação da função é alterado? [...] como o perímetro ou a área de uma figura plana muda quando é transformada usando isometria, transformações de medidas ou transformações lineares não específicas? [...] Cada uma dessas questões sugere oportunidade para conectar tópicos de Matemática relacionando-os através do tema variável. (COXFORD, 1995, p. 4-5, tradução nossa)

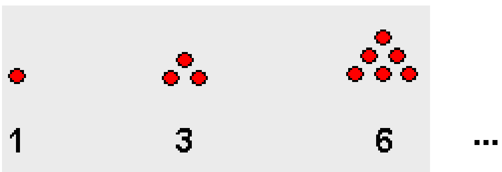
- **Dados**

Dados é outro tema que dá muitas oportunidades para enfatizar conexões em todos os aspectos da Matemática. Atividades escolares elementares nos quais estudantes coletam informação sobre um conceito, um procedimento ou uma situação-problema são exemplos de conectar por meio dos dados.

- **Forma**

A forma é outro tema unificador que pode ser usado para enfatizar conexões em Matemática. A noção de forma é central ao estudo da Geometria onde forma bidimensionais e tridimensionais e suas propriedades de relações são o foco primeiro. Números e forma são também relacionados através de números figurativos. Tais como: números triangulares e números quadráticos. Por exemplo números triangulares: 1, 3, 6, ..., podem ser colocados em uma forma triangular.

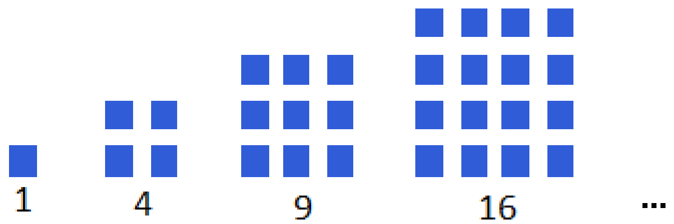
Figura 5: Exemplo de números triangulares



Fonte: http://logicamentepedagogia.blogspot.com.br/2010/04/

E os números quadráticos 1, 4, 9, 16, ... podem ser colocados em uma forma quadricular.

Figura 6: Exemplo de números quadráticos



Fonte: https://vemqueteexplico.blogspot.com.br/2012/01/numeros.html

Processos Matemáticos

O segundo aspecto, Processos Matemáticos de conexões Matemática inclui: representação, aplicação, resolução de problemas e raciocínio. Essas quatro categorias de atividade deveriam continuar em todo trabalho matemático feito pelos estudantes desde o pré-primário até a aprendizagem independente de um adulto. Em cada estágio, as atividades específicas deveriam ser apropriadas ao desenvolvimento, mas nenhuma deveria ser desprezada ou omitida.

- **Representação**

Para os estudantes terem uma compreensão profunda de um conceito eles precisam fazer conexões entre representações

> Por exemplo, os estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental deveriam desenvolver facilidade ao mover-se de ir e vir entre os modelos concretos e pictóricos; o nome oral e a representação simbólica de qualquer fração ou decimal. Essas conexões são vitais para que os estudantes deem sentido às operações depois sobre números. (COXFORD, 1995, p. 7, tradução nossa).

Em Geometria e Análise de Dados representações múltiplas são também vitais. Os dados devem ser observados, organizados em tabelas e quadros de frequência e ser representados graficamente numa variedade de modos para desenvolver uma visão conectada de dados e análise de dados. Analogamente, na Geometria, o de forma sintética, uma abordagem de desenhos de imagens precisa estar conectada e relacionada a outras representações que usam coordenadas, vetores e equações. Por exemplo, uma reflexão em uma linha horizontal pode ser introduzida sinteticamente; uma regra coordenada pode ser desenvolvida pela reflexão no eixo do x,

$$(x, y) \rightarrow (x, -y)$$

- **Aplicações, Resolução de Problemas e Raciocínio**

Aplicações, Resolução de Problemas e Raciocínio são discutidos juntos, uma vez que há pouco desacordo sobre sua importância no desenvolvimento de uma visão conectada da Matemática. Certamente Resolução de Problemas e Raciocínio têm sido pilares de ensino de Matemática por um longo tempo e Aplicações têm recentemente sido reavivado. Aplicações podem ajudar a conectar a Matemática e o aprendiz.

Aplicações e atividades de Resolução de Problemas precisam dar oportunidade para abordagens Matemática múltiplas de modo que os estudantes possam ver as conexões feita.

Por exemplo, o seguinte problema pode ter pelo menos três resoluções diferentes.

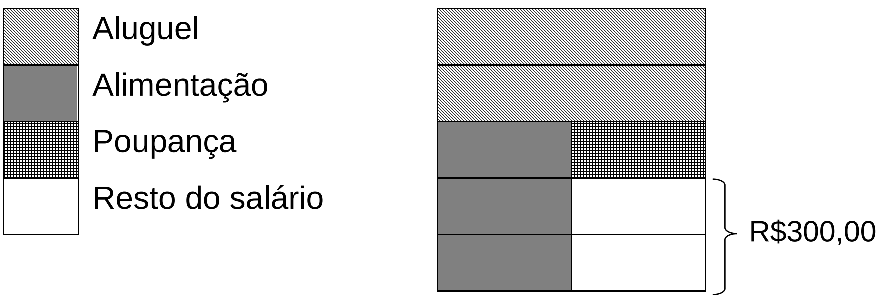
Problema 1: Problema do salário com frações

Do meu salário gastei $\frac{2}{5}$ com aluguel. Do que sobrou gastei metade com alimentação. Da segunda sobra coloquei na Poupança $\frac{1}{3}$. Restaram-me R$ 300,00. Qual é o valor do meu salário?

Fonte: "As Diferentes "Personalidades" do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas" de Lourdes Onuchic e Norma Allevato. Publicado no BOLEMA, vol 21, núm. 31,2008, pp. 79-102

Usando representação geométrica:

Figura 7: Ligações entre os diferentes ramos da Matemática



Fonte: Adaptação do artigo de Onuchic e Allevato (2008)

Pode-se notar na representação da figura 7 que o salário foi dividido em 10 partes iguais e que $\frac{2}{10}$ do salário correspondem a $R\$300{,}00$. Assim, $\frac{1}{10}$ vale $R\$\ 150{,}00$ e o todo, $\frac{10}{10}$, o salário, é $R\$1.500{,}00$

E em outra resolução seria a seguinte:

$$1^{\text{º}}\ \text{gasto} = \frac{2}{5}\ \text{do salário}$$

$$1^{\text{ª}}\ \text{sobra} = \frac{5}{5}\ \text{do salário} - \frac{2}{5}\ \text{do salário} = \frac{3}{5}\ \text{do salário}$$

$$2^{\text{º}}\ \text{gasto} = \frac{1}{2}(1^{\text{ª}}\ sobra) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\ \text{do salário}\right) = \frac{3}{10}\ \text{do salário}$$

$$2^{\text{ª}}\ \text{sobra} = \frac{3}{10}\ \text{do salário}$$

$$3^{\text{º}}\ \text{gasto} = \frac{1}{3}\ (2^{\text{ª}}\ \text{sobra}) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}\ \text{do salário}\right) = \frac{1}{10}\ \text{do salário}$$

$$3^{\text{ª}}\ \text{sobra} = \frac{3}{10}\ \text{do salário} - \frac{1}{10}\ \text{do salário} = \frac{2}{10}\ d\text{o salário}$$

Se a 3ª sobra é $\frac{2}{10}$ do salário $=\ R\$\ 300{,}00$, então $\frac{1}{10}$ do salário $=\ R\$\ 150{,}00$, e o salário todo será $\frac{10}{10}$ do salário $= R\$\ 1.500{,}00$.

Algebricamente o problema pode ser resolvido por meio da seguinte equação. Seja x o meu salário, então

$$x - \frac{2}{5}x - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}x\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}.\frac{3}{5}x\right) = R\$\ 300{,}00$$

$$x - \frac{2}{5}x - \frac{1}{10}x - \frac{1}{30}x = R\$\ 300{,}00$$

$$30.x - 30.\frac{2}{5}x - 30.\frac{1}{10}x - 30.\frac{1}{30}x = 30.R\$\ 300{,}00$$

$$30x - 12x - 9x - 3x = R\$9000{,}00$$

$$6x = R\$9000{,}00$$

Resultando $x = R\$1.500{,}00$.

Num sentido verdadeiramente real, o aspecto Processos Matemáticos de conexões Matemática forma uma rede contínua de ênfases. Os quatros processos identificados aqui deveriam ocorrer regularmente no ensino de Matemática. Os estudantes deveriam vê-los usados e os usarem em relação a todos os conteúdos de Matemática, e os professores deveriam apontar para o seu uso regularmente. Desse modo, a Matemática toda é vista como interrelacionada e conectada.

Conectores Matemáticos

O terceiro aspecto, Conectores Matemáticos, inclui ideias Matemática tais como: função, algoritmo (procedimento), gráfico, razão, variável e transformação.

> [Conectores Matemáticos] são ideias matemática que surgem em relação ao estudo de um amplo espectro de tópicos. Sendo assim, eles permitem aos estudantes verem o uso de uma ideia em muitas situações diferentes e talvez aparentemente não relacionadas. (COXFORD, 1995, p. 10, tradução nossa).

- **Função**

O conceito de função é especialmente útil ao trabalhar conexão matemática ao mundo externo, uma vez que é possível modelar situações da vida real por funções.

Roger P. Day (1995), no artigo *Using Functions to Make Mathematical Connections* em *Standards*[6] *(1989, p.98),* observou que “um dos temas centrais da Matemática é o estudo de padrões e funções” (NCTM, 1989, p.98, tradução nossa). Padrões para os graus k-4, 5-8 e 9-12, correspondentes à nossa escola básica (Ensino Fundamental I, Ensino Fundamental II e Ensino Médio), defendem a importância do estudo de padrões e funções. Esse documento sugere estabelecer uma forte fundamentação para o conceito de função usando investigações informais no Ensino Fundamental I e no Ensino Fundamental II, com extensões ao simbolismo formal e à discussão de funções no Ensino Médio. As relações funcionais oferecem um solo fértil para fazer conexões Matemática. Como uma ideia unificadora da Matemática, o conceito de função ajuda os estudantes a conectarem diferentes ideias e procedimentos matemáticos. Relações funcionais também fornecem conexões a outras áreas de conteúdo e uma perspectiva para ver fenômenos do mundo real.

---

[6] Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics (1989)

- **Algoritmos**

A ideia de algoritmo ou procedimento é aquela que está espalhada em muitas coisas que fazemos. O crescimento na importância da tecnologia computacional tem aumentado o interesse em fazer algoritmos. Uma vez que um procedimento é desenvolvido por estudantes e validado matematicamente, o procedimento está pronto para ser programado de modo que uma calculadora e um computador possa desempenhá-lo. Isso ajuda os estudantes a ver as conexões da Matemática ao mundo externo e, também, ajuda a neutralizar o medo do funcionamento misterioso do computador.

- **Gráficos**

Gráficos parecem ser outro tipo de conector especialmente com o mundo das realizações reais e de contratempos. Nos níveis iniciais os gráficos podem ser usados para representar muitos conjuntos de dados do dia a dia. Semanalmente gráficos sumarizam o comparecimento, realizações, jogos ganhos em eventos esportivos, estudantes trazendo almoços e assim fazer uma conexão obvia da Matemática com a vida. Os gráficos, assim, ilustram uma situação modelada matematicamente.

No currículo os gráficos são usados para representar soluções de equações ou desigualdades; representar funções e relações; representar situações problema; exibir dados visualmente de modo que tendências possam ser observadas; representar padrões encontrados em todos os ramos; e, na Matemática discreta, serve como objeto de estudo e para modelar uma variedade de situações.

Gráfico é um conector que precisa de maior ênfase em nossos planos de ensino para contrabalançar a pesada confiança na abstração e na simbolização em muito do que se faz. O gráfico também ajuda os estudantes com diferentes estilos de aprendizagem "conectar-se" com a Matemática mais facilmente.

- **Variável**

Variável é outro conector penetrante. Variável tem vários significados, desde incógnita em um problema para argumento mutável em uma função, para um puro símbolo encontrado em afirmações como a propriedade distributiva. Na Matemática do Ensino Fundamental, buscar soluções para equações como $3 + \Delta = 9$ ou $5 - 2 = \Delta$ leva os estudantes a um significado de variável. Usando uma expressão como $8.x$ para gerar um padrão $8, 16, 24, \ldots$ é outro uso da variável. O uso da calculadora dá origem a uma ideia de variável como um local armazenando um número. Na análise de dados, as variáveis oferecem uma maneira de conectar a Matemática com o mundo do aprendiz através da coleta de dados e a análise de situações interessantes para os estudantes. As variáveis podem representar alturas, horas de TV assistidas, número de brinquedos, e assim por diante. Na Geometria a variável assume um sutil e poderoso papel no raciocínio matemático. Em situações de prova, quando vemos "seja um ΔABC um triângulo isósceles" ou usamos alguma outra afirmação desse tipo, a variável é ΔABC e representa a classe de triângulos isósceles. Assim, mesmo que vejamos um esboço de um triângulo isósceles, a prova é para a classe de todos esses triângulos, da mesma forma que a prova de

se $ab = ac \rightarrow b = c,$ com $a \neq 0,$ e a, b, c números reais,

é uma prova para todos os números reais. Um exame do conteúdo que está sendo ensinado provavelmente irá recompensá-lo com mais maneiras em que você pode mostrar a conexão da Matemática usando o conector variável.

- **Razão**

O último conector proposto aqui é o de razão. Ele é útil em quase todos os níveis de estudo matemático. Na escola elementar, a ideia de razão é introduzida e usada em situações como duas bolachas para uma criança em uma festa ou a razão de estudantes com olhos castanhos para aqueles com outras cores. Uma vez que as razões geralmente são geradas fora de situações familiares aos estudantes, ela produz outra maneira de conectar os estudantes à Matemática. As razões são encontradas em porcentagens nos últimos anos da escola primária, e as questões sobre razões levam, por exemplo, naturalmente à ideia de π como razão.

- **Transformação**

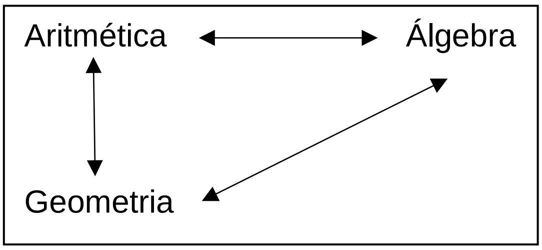
No artigo *Transformations: Making Connections in high school mathematics* de Mary L. Crowley (1995, p. 79) é apresentada uma citação sobre transformações como conector matemático:

> O estudo das transformações fornece uma nova visão de problemas geométricos padronizados. Mas, mais importante, o ponto de vista da transformação serve para unificar a Matemática. O conceito de transformação ilumina os estudos de funções, vetores, grupos, matrizes, números complexos e Álgebra linear.
> [Richard C. Brow, Transformational Geometry]

2.3.1.2 Ensino Matemática com Conexões

Nesta seção serão apresentados pesquisas que mostram a importância de relacionar os ramos da Matemática e como as diferentes representações a aplicações de um conceito matemático contribuem para o processo de ensino-aprendizagem.

Figura 8: Ligações entre os diferentes ramos da Matemática



Fonte: Elaborada pela autora

Aritmética e Geometria:

No artigo *Connecting number and geometry* de Lowell Leake (1995) é levantada uma pergunta interessante: Que conexão mais importante pode haver do que a que há entre Número e Geometria? Leake (1995) mostra, como professores nos primeiros anos escolares, podem construir essa conexão quando eles ensinam as propriedades básicas de adição e multiplicação. Nesse processo, outras conexões aparecerão entre Número e Álgebra e entre o plano bidimensional e o espaço tridimensional.

Aritmética e Álgebra:

No artigo *Using Number Sentences to Introduce the Idea of Variable,* de Fujii e Stephens (2008, p.127), mostra-se o conhecimento crescente de estudantes, da escola básica, sobre as operações aritméticas como base para o desenvolvimento de ideias sobre quantidades variáveis numéricas. Relacionar expressões numéricas e simbólicas fornece uma ponte importante, entre as operações Aritméticas e as ideias sobre variável, que os estudantes precisam atravessar continuamente durante seus anos de Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Nos primeiros anos da escola primária, o foco está sobre o desenvolvimento de uma fundamentação forte em contagem e numeração. O que é negligenciado é o uso do conhecimento dos estudantes sobre número e operações com números como base para desenvolver ideias sobre variáveis quando representam quantidades variáveis. Carpenter e Levi (1999, p.3) chamam a atenção para esta "separação artificial de Aritmética e Álgebra", que, argumentam eles, "priva as crianças de esquemas poderosos para pensar sobre Matemática nos primeiros anos e a torna mais difícil para eles aprenderem Álgebra nos anos posteriores."

Carpenter e Levi (1999), em seu estudo, introduziram estudantes de primeiro e segundo ano aos conceitos de sentenças numéricas verdadeiras e falsas. Quando se pediu para algumas crianças de primeiro e segundo anos convidadas a decidir se uma sentença numérica como $78 - 49 + 49 = 78$ era verdadeira, esses autores relataram que alguns estudantes precisaram tratá-las como um cálculo porque os números eram grandes. Em contrapartida, outros estudantes entrevistados no mesmo estudo disseram: “É claro que é verdade. O resultado deve ser 78, porque você tirou o 49 e o devolveu.” Os que responderam foram então perguntados: “É verdade apenas se você tira 49 e depois devolve 49?” Alguns estudantes deram respostas como “Você ainda terá 78 se você tirou outro número e depois adicionou mesmo número de volta.”

Nunca foi intenção de Carpenter e Levi apresentar estudantes de primeiro e segundo ano a uma expressão algébrica formal, $x - y + y = x$. O que eles queriam que os estudantes entendessem que a sentença $78 - 49 + 49 = 78$ pertence a um tipo de sentença numérica que é sempre verdadeira, independentemente do número que é retirado e depois adicionado. Aqui especialmente, os professores podem ajudar os estudantes a identificar os tipos de números que podem variar sem afetar a verdade da expressão. Essas expressões fornecem uma importante ponte entre Aritmética e a ideia de uma variável.

Expressões numéricas, como

$$\blacksquare + 8 = 23 \quad \text{e} \quad 63 - \blacksquare = 49,$$

apresentam aos estudantes a tarefa de encontrar o valor de números desconhecidos. Mais tarde, essas sentenças podem ser expressas usando símbolos literais em formas como

$$x + 8 = 23 \quad \text{e} \quad 63 - y = 49.$$

Aqui, x e y não atuam como variáveis, e sim com incógnitas. Uma ênfase em sentenças de valor único e número "oculto" nos anos do ensino fundamental pode criar dificuldades mais tarde quando os estudantes encontram quantidades variáveis. Como Radford (1996, p.47) ressalta: "Enquanto o desconhecido é um número que não varia, a variável designa uma quantidade cujo valor pode mudar." Mesmo quando os símbolos literais são usados, muitos estudantes ainda contam com métodos computacionais ou adivinham e verificam para resolver esses problemas.

Álgebra e Geometria:

No artigo "Problemas geométricos de contagem", Litwiller e Ducam (1994), apresentam dificuldades que os estudantes têm em compreender as ligações da Álgebra e da Geometria:

> Muitos estudantes da escola secundária têm a impressão de que Álgebra e Geometria são áreas totalmente distintas. Quando se considera a Geometria analítica vê-se que há, obviamente, uma fusão parcial dos conceitos desses dois ramos da Matemática (LITWILLER; DUCAM, 1994, p. 258)

Litwiller e Ducam (1994) propõem cinco problemas, no artigo, em que conceitos de Álgebra e de Geometria se conectam em problemas geométricos de contagem. Dessa forma, dando possiblidade ao professor de apresentar ao aluno as ligações entre esses ramos da Matemática além da disciplina de Geometria Analítica.

Fainguelernt (1999) relata que na *International Comission on Mathematical Instruction* (ICMI), em 1995 na Itália, foi considerado que existe uma necessidade urgente de um estudo internacional cujos objetivos principais são:

> 1. Discutir as metas do ensino da Geometria nos diferentes níveis escolares de acordo com os diferentes ambientes e tradições culturais.
> 2. Identificar os desafios importantes e as tendências emergentes para o futuro, e analisar seu potencial didático;
> 3. Analisar a influência de novas tecnologias no ensino de Geometria;
> 4. Explorar e implementar novos métodos de ensino;
> 5. **Identificar as conexões entre a Geometria e as outras componentes da Matemática.** (FAINGUELERNT, 1999, p.22, grifo nosso).

Destacamos aqui o quinto objetivo de um estudo internacional de "Identificar as conexões entre a Geometria e as outras componentes da Matemática." Pois em sua obra, Fainguelernt (1999), apresenta que uma das causas de dificuldades que os estudantes têm em aprender Matemática é porque o ensino de Aritmética, Geometria e Álgebra aparecem como se fossem totalmente estanques. E, por isso, há a preocupação em promover um ensino de Matemática com conexões e múltiplas representações de um mesmo conceito.

Reforçando a afirmação de Fainguelernt, Thomas Banchoof (2008) em seu artigo *Algebraic thinking and Geometric Thinking* apresenta o seguinte:

> Geometria e Álgebra não são somente dois assuntos que aparecem ao longo do currículo; elas são também dois modos distintos de se pensar sobre ideias Matemática. Em todos os níveis em Educação Matemática, ensinar e aprender funcionam melhor quando esses dois modos de pensar estão envolvidos e quando eles se complementam um ao outro. Durante os últimos quarenta anos, em meus cursos introdutórios e avançados em Cálculo e Álgebra Linear, tenho enfatizado a interação entre Álgebra e Geometria usando diagramas para ilustrar fórmulas e estruturas e usando ideias algébricas para formalizar construções geométricas. [...] Neste artigo, eu examino um dos caminhos em que o pensamento geométrico pode combinar com o pensamento algébrico para oferecer aos estudantes uma aprendizagem mais eficiente e a retenção de ideias. (BANCHOOF, 2008, p. 99, tradução nossa)

Banchoof (2008) em um de seus exemplos relaciona expressões algébricas com representação geométrica. Esse autor apresenta a expansão e a fatoração de expressões algébricas, que mostrarei detalhadamente aqui:

> Como um jovem professor de cálculo, estava bastante feliz com o conhecimento de meus estudantes em equações quadráticas. Eles todos poderiam recitar a fórmula quadrática e, a maioria, poderia fazer o gráfico de uma parábola e até encontrar seus pontos de máximos e mínimos. Para muitos deles isso era o máximo em que seus pensamento algébrico e pensamentos geométrico poderiam chegar. Eles todos sabiam expandir e fatorar $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Isso permitiu-me dois modos de abordar a derivada de $y(x) = x^2$. O quociente da diferença é
>
> $$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$
>
> e há dois bons modos para simplificá-lo. Uma abordagem é expandir o quadrado do binômio para chegar a
>
> $$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{(x^2 + 2xh + h^2 - x^2)}{h} = \frac{(2xh + h^2 + x^2 - \ x^2)}{h}$$
>
> $$= \frac{2xh + h^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h$$
>
> A outra abordagem é fatorar a diferença de dois quadrados:
>
> $$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{[(x+h) - x][(x+h) + x)]}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h$$

Obtendo o mesmo resultado como na primeira simplificação. Em outra situação, temos uma expressão que vai para $y'(x) = 2$ quando h tende a $zero$.

Quais dos dois caminhos, eu me perguntei, seria mais eficiente quando fossemos para o próximo desafio, isto é, a derivada de $y(x) = x^3$? Privadamente eu esperava que eles preferissem o método da diferença de potências, uma vez que funciona tão bem para dar o primeiro bom exemplo da regra da cadeia, da seguinte forma: se $y(x) = [u(x)]^2$, então o quociente da diferença é

$$\frac{[y(x+h) - y(x)]}{h} = \frac{[u(x+h) - u(x)][u(x+h) + u(x)]}{h}$$

Os primeiros dois termos da expressão vão para $u'(x)$ e o terceiro termo vai para $2u(x)$, e assim, a derivada é

$$y'(x) + 2u(x)u'(x)$$

Pedi aos meus estudantes para escreverem as respostas das duas questões e que não pusessem seus nomes em seus trabalhos. Eles também tiveram o tempo que fosse necessário para escrever as respostas. Eram os seguintes exercícios:

1. Desenvolva $(a + b)^3$.
2. Fatore $a^3 - b^3 = (a - b)$.

Fiquei surpreso com os resultados. Para o primeiro exercício, expandir o cubo de um binômio, somente cerca de metade da turma de estudantes deu a resposta correta. Alguns lembraram da solução e simplesmente escreveram embaixo nem sempre corretamente. Outros pelo menos perceberam que eles resolveriam o problema multiplicando o problema $(a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$, muitos tentaram, nem sempre com sucesso. Outros escreveram "eu esqueci da fórmula."

O segundo exercício era mesmo mais desencorajador. Praticamente ninguém conseguiu chegar a resposta certa, embora muitos deles escrevessem variações envolvendo quase que aleatoriamente combinações de a^2, ab e b^2, e com diferentes sinais algébricos e coeficiente de um ou três. Eles incluíam comentários do tipo, "é alguma coisa como isso." Até onde eu poderia dizer, nenhum deles pensou em verificar uma resposta multiplicando para ver se uma resposta proposta estava certa ou obter uma ideia do porquê ela poderia estar errada. A maioria deixou o problema em branco.

"Eu esqueci a fórmula" é a resposta baseada sobre uma concepção errônea do que é a Álgebra realmente. Muitos estudantes aparentemente pensam que "a Álgebra é um estudo de fórmulas." O que você faz com fórmulas? Você as memoriza para testes. O que você faz então? Você as esquece até a próxima vez que você tem que a memorizar. Haveria uma centena destas fórmulas, quase como uma coleção de números de telefone de diferentes códigos de área não relacionadas.

É difícil para os estudantes verem quais dessas fórmulas poderiam ser úteis alguma vez no seu futuro e sendo assim vale a pensa memorizá-las permanentemente.

No núcleo, a Álgebra envolve procedimentos. E pode ser conveniente lembrar da fórmula para cubicar um binômio, mas o que é mesmo melhor para os estudantes é saberem reconstruírem-na quando necessário.

> "É alguma coisa como isso" é uma resposta que indica uma outra visão da Álgebra falsa ou incompleta. Se você se lembra que a fórmula tem uma certa forma, então você deveria ter confiança de que você pode checar para ver se uma fórmula conjecturada faz sentido ao tentá-la com outros exemplos. No problema da diferença de cubos, você pode multiplicar coisas para ver qual poderia ser a resposta correta. Você não tem que memorizar os detalhes se você poder entendê-los.
> Um estudante explicou que ele não sabia como fatorar uma diferença de cubos porque seu professor disse que isso não era importante. Eu repliquei que esse professor estava mal informado.
> Álgebra engloba muitos tópicos de fato, e aqueles descritos aqui são somente dois deles. Basicamente, eu gostaria que meus estudantes se tornassem confiantes com os procedimentos algébricos e soubessem como checar seu trabalho ao longo do processo. Este é o tipo de pensamento algébrico que eu gostaria que meus estudantes trouxessem com eles quando viessem para Matemática na faculdade. Eu estou muito mais interessado nos hábitos da mente que eles trazem do que nas fórmulas e técnicas que eles têm aprendido a usar. (p. 99 – 101, tradução nossa)

Outro exemplo dramático a que o autor se refere é sobre a raciocínio algébrico e decomposições geométricas. Neste exemplo o autor diz que a interação entre Álgebra e Geometria ajuda muito os estudantes a aprenderem mais eficientemente e terem melhor lembranças. Como pode o pensamento geométrico auxiliar no pensamento algébrico requerido para desenvolver potências e fatorar diferenças de potências? Quando isso acontece a maioria dos estudantes terá visto, uma vez ou outra, um diagrama de um quadrado, de lado "x", em um determinado instante, ou em outro tempo, terá visto um diagrama de um quadrado de lado $a + b$ expresso por retângulos a^2, ab e b^2. Uma figura análoga funciona no espaço tridimensional decompondo um cubo de lado x e, um cubo de lado $a + b$.

Como uma verificação dessas fórmulas e como uma ajuda em lembrá-los, um quadro $3\text{x}3$ pode ser expresso como 9 unidades quadradas arranjadas em um quadrado $2\text{x}2$, dois retângulos $2\text{x}1$ e uma unidade quadrada, com

$$9 = 4 + 4 + 1 = 2^2 + 2(2)(1) + 1^2$$

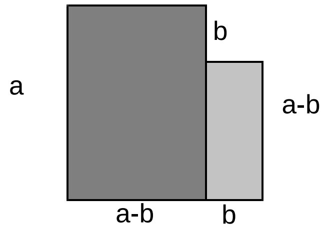
Na instância de um cubo $3\text{x}3\text{x}3$, a decomposição dá um cubo $2\text{x}2\text{x}2$, com três placas $2\text{x}2\text{x}1$, três colunas $2\text{x}1\text{x}1$ e um cubo unitário, com

$$27 = 8 + 12 + 6 + 1 = 2^3 + 3(2^2)1 + 3(2)1^2$$

Os estudantes que têm uma boa memória visual aproveitarão essas ideias recordando de ambos os diagramas, especialmente quando eles são acompanhados por demonstrações interativas.

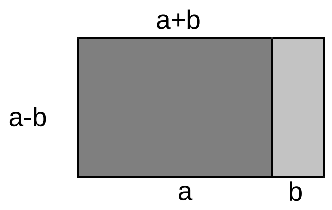
No exemplo de fatorar a diferença de dois quadrados, um quadrado de lado $\boldsymbol{a}$ e um quadrado de lado $\boldsymbol{b}$ removido, pode ser expresso como uma união de dois retângulos, um $(a-b)a$ e outro $(a-b)b$. Esses podem ser combinados em um retângulo $(a-b)(a+b)$ sumarizado como $(a^2-b^2)=(a-b)(a+b)$

Figura 9: Diferença de quadrados: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$



Fonte: Retirado de *Algebraic Thinking and Geometric Thinking* de Banchoff (2008, p. 102)

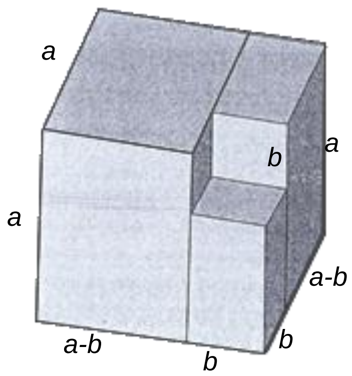
Figura 10: Diferença de quadrados representado de uma outra forma.



Fonte: Retirado de *Algebraic Thinking and Geometric Thinking* de Banchoff (2008, p. 102).

O que falar sobre a diferença de cubo? Essa decomposição é menos familiar, mas ela funciona bem. Nós decompomos um cubo de lado a como um cubo de lado b removido em três primas retangulares, $(a-b).a.a, (a-b).a.b\ e\ (a-b).b.b$ resumindo como $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Figura 11: Diferença de cubos



Fonte: Retirado de *Algebraic Thinking and Geometric Thinking* de Banchoff (2008, p. 102)

Os estudantes que virem esta demonstração lembrarão dela quando eles forem desafiados a construir a fatoração da diferença de cubos? Alguns sim. Há momentos em que a mesma abordagem ajudará na resolução de outros problemas importantes?

2.3.1.3 Matemática para o EF II de acordo com os PCN (1998)

Nesta seção apresentamos os objetivos a serem desenvolvidos na Matemática para o terceiro ciclo:

Do pensamento numérico: por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: ampliar e construir novos significados para os números (naturais, inteiros e racionais) a partir de sua utilização no contexto social e da análise de alguns problemas históricos que motivaram sua construção; resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e a partir delas ampliar e construir novos significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação; identificar interpretar e utilizar diferentes representações dos números naturais, inteiros e racionais, indicadas por diferentes notações, vinculando-as aos contextos matemáticos e não-matemáticos; selecionar e utilizar procedimentos de cálculo (exato ou aproximado, mental ou escrito) em função da situação-problema proposta.

Do pensamento algébrico: por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema e favorecer as possíveis soluções; traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificar os significados das letras; utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico.

Do pensamento geométricos: por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: resolver situações-problema de localização e deslocamento de pontos no espaço, reconhecendo nas noções de direção e sentido, de ângulo, de paralelismo e de perpendicularismo elementos fundamentais para a constituição de sistemas de coordenadas cartesianas; estabelecer relações entre figuras espaciais e suas representações planas, envolvendo a observação das figuras sob diferentes prontos de vista, construindo e interpretando suas representações;

resolver situações-problema que envolvam figuras geométricas planas utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução.

Da competência métrica: por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: ampliar e construir noções de medida, pelo estudo de diferentes grandezas, a partir de sua utilização no contexto social e da análise de alguns dos problemas históricos que motivaram sua construção; resolver problemas que envolvam diferentes grandezas, selecionando unidades de medida e instrumentos adequados à precisão requerida.

Do raciocínio que envolva a proporcionalidade: por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas e construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam a proporcionalidade.

Do raciocínio combinatório, estatístico e probabilístico: por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: coletar, organizar e analisar informações, construir e interpretar tabelas e gráficos, fórmular argumentos convincentes, tendo por base a análise de dados organizados em representações matemática diversas; resolver situações-problema que envolvam o raciocínio combinatório e a determinação da probabilidade de sucesso de um determinado evento por meio de uma razão.

Agora, com estes objetivos postos acima, consideremos que sejam os conhecimentos prévios necessários para trabalharmos os conteúdos intradisciplinares no 8º ano do EF.

Apresentaremos a seguir os objetivos da Matemática para o quarto ciclo de acordo com os PCN:

Do pensamento numérico: por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: ampliar e consolidar os significados dos números racionais a partir dos diferentes usos em contextos sociais e matemáticos e reconhecer que existem números que não são racionais; resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e irracionais, ampliando e consolidando os significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação; selecionar e utilizar diferentes procedimentos de cálculo com números naturais, inteiros, racionais e irracionais.

Do pensamento algébrico: por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: produzir e interpretar diferentes escritas algébricas – expressões, igualdades e desigualdades – , identificando as equações, inequações e sistemas; resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos; observar regularidades e estabelecer leis Matemática que expressem a relação de dependência entre variáveis.

Do pensamento geométrico: por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano; produzir e analisar transformações e ampliações/ reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência e semelhança; ampliar e aprofundar noções geométricas como incidência, paralelismo, perpendicularismo e ângulo para estabelecer relações, inclusive as métricas, em figuras bidimensionais e tridimensionais.

Da competência métrica: por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: ampliar e construir noções de medida, pelo estudo de diferentes grandezas, utilizando dígitos significativos para representar as medidas, efetuar cálculos e aproximar resultados de acordo com o grau de precisão desejável; obter e utilizar fórmulas para cálculo da área de superfícies planas e para cálculo de volumes de sólidos geométricos.

Do raciocínio proporcional: por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: representar em um sistema de coordenadas cartesianas a variação de grandezas, analisando e caracterizando o comportamento dessa variação em diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não-proporcional; resolver situações-problema que envolvam a variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais, utilizando estratégias não-convencionais e convencionais, com as regras de três.

Do raciocínio estatístico e probabilístico: por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: construir tabelas de frequência e representar graficamente dados estatísticos, utilizando diferentes recursos, bem como elaborar conclusões a partir da leitura, análise, intepretação de informações apresentadas em tabelas e gráficos; construir um espaço amostral de eventos ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos.

2.3.1.4 Matemática para o 8º ano de acordo com Currículo de Matemática do Estado de São Paulo

No quadro a seguir apresentamos conteúdos e habilidade de Matemática do 8º ano do EF de acordo com o Currículo de Matemática do Estado de São Paulo.

Quadro 1: Conteúdos de Matemática para o 8º ano do Ensino Fundamental

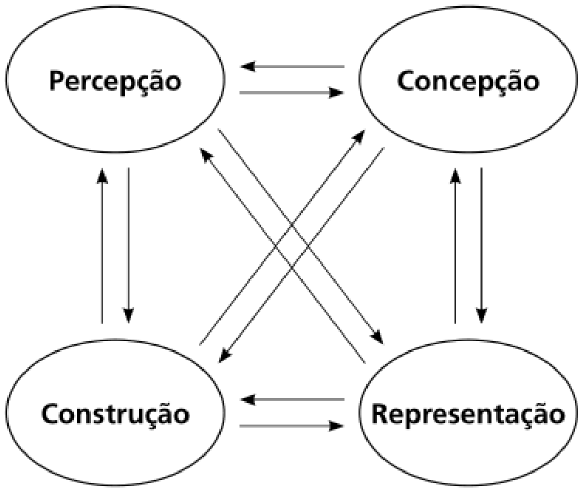
7ªsérie/ 8º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	**Habilidades**
1º bimestre	**Números** Números racionais • Transformação de decimais finitos em fração • Dizimas periódicas e fração geratriz Potenciação • Propriedades para expoentes inteiros • Problemas de contagem	• Compreender a ideia de número racional em sua relação com as frações e as razões • Conhecer as condições que fazem com que uma razão entre inteiros possa se expressar por meio de dízimas periódicas; saber calcular a geratriz de uma dízima • Compreender a utilidade do uso da linguagem das potências para representar números muito grandes e muito pequenos; • Conhecer as propriedades das potências e saber realizar de modo significativo as operações com potências (expoentes inteiros)
2º bimestre	**Números/Relações** Expressões algébricas • Equivalências e transformações • Produtos notáveis • Fatoração algébrica	• Realizar operações simples com monômios e polinômios • Relacionar as linguagens algébrica e geométrica, sabendo traduzir uma delas na outra, particularmente no caso dos produtos notáveis • Saber atribuir significado à fatoração algébrica e como utilizá-la na resolução de equações e em outros contextos • Compreender o significado de expressões envolvendo números naturais por meio de sua representação simbólica e de seu significado geométrico ($2n$ é um número par, $2n + 1$ é um número ímpar, a soma dos n primeiros números naturais é $\frac{n(n+1)}{2}$, etc.)

3º bimestre	**Números/Relações** Equações • Resolução de equações de 1º - grau • Sistemas de equações e resolução de problemas • Inequações de 1º – grau Gráficos • Coordenadas: localização de pontos no plano cartesiano	• Compreender situações-problema que envolvem proporcionalidade, sabendo representá-las por meio de equações ou inequações • Saber expressar de modo significativo a solução de equações e inequações de 1º - grau • Saber explorar problemas simples de Matemática discreta, buscando soluções inteiras de equações lineares com duas incógnitas • Saber resolver sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas pelos métodos da adição e da substituição, sabendo escolher de forma criteriosa o caminho mais adequado em cada situação • Compreender e usar o plano cartesiano para a representação de pares ordenados, bem como para a representação das soluções de um sistema de equações lineares
4º bimestre	**Geometria** Geometria • Teorema de Tales • Teorema de Pitágoras • Área de polígonos • Volume do prisma	• Reconhecer e aplicar o teorema de Tales como uma forma de ocorrência da ideia de proporcionalidade, na solução de problemas em diferentes contextos • Compreender o significado do teorema de Pitágoras, utilizando-o na solução de problemas em diferentes contextos • Calcular áreas de polígonos de diferentes tipos, com destaque para os polígonos regulares • Saber identificar prismas em diferentes contextos, bem como saber construí-los e calcular seus volumes

Fonte: Retirado do Currículo de Matemática do estado de São Paulo. Disponível em: www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/238.pdf

Um aspecto importante a ser destacado na apresentação da Geometria, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, é o fato de que o conhecimento geométrico apresenta quatro faces, que se relacionam permanentemente na caracterização do espaço: a percepção, a concepção, a construção e a representação.

Figura 12: Caracterização do espaço: percepção, concepção, construção e representação.



Fonte: Retirado do Currículo de Matemática do Estado de São Paulo página 42

2.3.1.5 Aritmética e o pensamento aritmético

Aritmética é o ramo da Matemática que trabalha sobre números, relacionando-os, definindo operações sobre eles, estabelecendo propriedades sobre elas e fazendo aplicações em problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2008).

No artigo Pensamento aritmético e sua importância para o Ensino de Matemática, Sant'Ana e Laudares (2014, p 2) apresentam:

> A Aritmética é o ramo mais elementar da Matemática. É a parte da Matemática que lida com cálculos como a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão. Todos os outros ramos da Matemática utilizam os princípios e as regras da Aritmética. Com isso, quando os princípios básicos da Aritmética não estão suficientemente consolidados, aparecem os problemas da Matemática. Isso porque as pessoas usam a Aritmética todos os dias. Ela é usada para comprar algo em um supermercado, dar e receber trocos, medir velocidades, quantificar ou ainda contar algo. O termo "Aritmética" vem da palavra grega *arithmos*, que significa "número." É bastante discutido como o ensino de Matemática apresenta tantas rupturas, evidenciado pela insuficiente fundamentação Aritmética. O grande exemplo disso pode ser verificado pelo baixo desempenho dos estudantes, bem como nas dificuldades que esses vêm enfrentando no cotidiano.

Lins e Gimenez (1997), em seu livro *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI,* chamam a atenção das diferentes Aritméticas que os estudantes encontram durante a aprendizagem de Matemática.

Escrevem eles que existe uma Aritmética da rua e outra da escola, cada uma com seus significados e especificidades. A existência de uma Aritmética da rua e uma Aritmética da escola permite verificar um campo de grande tensão e conflitos nesse espaço aberto. O que se vê é que os algoritmos tratados na escola são da escola e mecanismos que possibilitam fazer as contas nas ruas são da rua.

Segundo, Lins e Gimenez (1997, p. 16),

> A Aritmética escolar, hoje, embora plenamente justificada do ponto de vista dos significados matemáticos, parece não levar em conta as necessidades da rua, embora muitas vezes se diga que sim." (LINS; GIMENEZ, 2006, p 16).

Sant'Ana e Laudares (2014, p 3) afirmam que:

> Do ponto de vista dos autores [Lins e Gimenez], pode-se perceber que a Aritmética hoje ensinada, não deve se resumir a apenas simples tradução de algoritmos. Deve haver uma inclusão de uma Aritmética que seja próxima ao que o aluno se identifica, ora, somente se aprende o que está próximo, faz parte de sua vivência. O ensino da Aritmética deve produzir significados, legitimando assim o processo de aprendizagem.

Ao buscar a produção de significado para o Ensino de Aritmética é necessário pensar na fórmulação do pensamento numérico como apresentam Lins e Gimenez (1997, p. 60):

> A entrada num "sentido numérico" implica diversas ações cognitivas, sistematizadas no seguinte: a) embora se reconheça uma *operatividade* de técnicas, não se trata de executar um pensamento algorítmico; b) não existe sentido numérico sem um *processo de auto-regulação* do pensamento, *incerteza* nos dados e resultados que se tem; c) dá-se numa *multiplicidade* de caminhos e diversidade de soluções, de forma que a produção de juízos correspondentes não pode afirmar que tal ou qual raciocínio seja melhor do que outro; d) inclui *complexidade,* necessita atribuir *significados* e requer um *esforço*.

Por sua vez, Sant'Ana e Laudares (2014, p 5), apoiados em Lins e Gimenez (1997) dizem que:

> Para Lins e Gimenez a entrada de um sentido numérico concorda com ações cognitivas, sistematizadas no reconhecimento de operatividade de técnicas, não se limitando à execução do pensamento algoritmo; processo de auto-regulação do pensamento; multiplicidade de caminhos e diversidades de soluções; inclusão de complexidade, esforço e atribuição de significados. E, para isso, torna-se essencialmente importante destacar as inumeráveis experiências que o estudante pode ter na rua e na escola e buscar a conexão entre elas, oportunizando assim uma aprendizagem completa, com a busca de significados e como consequência com sentido.
>
> Conduzido pelo sentido numérico, verifica-se a necessidade da construção do pensamento aritmético que se constitui como um processo que depende de raciocínio e de pensamentos como: a valorização do raciocínio intuitivo e figurativo; o pensamento relativo e absoluto aplicado às estimativas; o raciocínio estruturado aditivo; e o

> pensamento proporcional. Partindo desses pensamentos, pode-se conseguir o ensino de uma Aritmética baseada na produção de significados. E quando isso é possível partimos da premissa de que o ensino da Matemática se fundamentará e, de fato, será possível mudar o quadro que a mídia mostra a cada dia. O ensino da Matemática será consistente, uma vez que a Aritmética foi ensinada baseada na produção de significados, base de todo o ensino da Matemática. Como a discussão aqui é sobre os pensamentos aritméticos que são de importância impar no desenvolvimento da Matemática, a valorização do pensamento, intuitivo e figurativo, coloca em debate as ações priorizadas pelos professores em sala de aula baseadas em aspectos formais de ensino

É importante, para os estudantes do Ensino Fundamental II, compreender conceitos algébricos fazendo uma ponte com o conhecimento prévio de lidar com as operações aritméticas básicas (adição, subtração, multiplicação, divisão) no conjunto dos números naturais e inteiros. Portanto, se o aluno tiver uma base firme na Aritmética, sabendo trabalhar expressões Aritméticas, simplificar expressões aritméticas, poderá, desta forma contribuir para a aprendizagem de Álgebra.

2.3.1.6 Geometria e o pensamento geométrico

Geometria é o ramo da Matemática que trabalha com espaço e forma. As atividades geométricas centram-se em procedimentos de observação, representação e construção de figuras planas e espaciais (ALLEVATO; ONUCHIC, 2008).

Considerando a Geometria como o estudo das formas e espaço e, assim como todas as outras áreas da matemática, possui seus referenciais, em que se destaca o raciocínio geométrico ou senso espacial e os conteúdos geométricos, em que ambos auxiliam o processo educacional trazendo um entendimento ampliado para um pensamento geométrico mais eficiente, dando uma visão geral de como o aluno e o professor devem desenvolver o seu pensamento geométrico (VAN DE WALLE, 2009, p. 439).

A percepção espacial e raciocínio geométrico são descritos como a intuição do indivíduo e estão relacionados no modo de pensar do aluno sobre formas e espaço. É através do senso espacial que nós, humanos, utilizamos nossa mente para visualizar formas geométricas. E é através da percepção espacial que utilizamos nossas mentes para visualizar formas geométricas de maneira imaginária. Essa prática só é adquirida ao passo que o estudante começa a buscar a compreensão praticando experiências geométricas para despertar o raciocínio geométrico.

Na Geometria, o aluno precisa estar familiarizado com as formas e suas dimensões, buscar o entendimento das figuras, e, para isso, precisa entender o conteúdo geométrico, estudá-lo e compreendê-lo. O conteúdo se subdivide em: formas e propriedades, transformação, localização e visualização. Esses divisores têm suas devidas definições que estão abaixo descritas:

- Nas formas e propriedades trabalha-se o estudo das dimensões onde observa-se as figuras bidimensionais e tridimensionais, onde analisamos as relações estabelecidas sobre suas propriedades. Propriedades essas que possuem uma diversidade como: corpos redondos e poliedros, polígonos e seus estudos (números de lados e eixos de simetria do polígono), paralelismo de lados e medidas de ângulos e de lados (BRASIL, 1997, p. 73).
- A transformação é a parte da Geometria que estuda movimentos, onde se destaca o de translação, reflexão, rotação onde os mesmos estão relacionados a deslizamentos, viradas e giros. Na transformação geométrica uma figura pode originar outra figura igual ou semelhante.
- Na localização estudam-se as coordenadas ou descrevem-se os objetos onde eles estão, pôr se encontram em planos ou no espaço. Também está voltado para a mudança de direção visualizando os ângulos (BRASIL, 1997, p. 73).
- A Visualização está relacionada na figura mental, onde o aluno identifica diferentes formas no meio em que vive, consegue enxergar as diferenças entre o bidimensional e o tridimensional e aprende a reconhecer objetos de diversas formas (VAN DE WALLE, 2009, p. 439).

Uma pesquisa elaborada pelos dois educadores e casal, Pierre van Hiele e Dina van Hiele-Geldof, é um modelo enriquecedor no ambiente educacional matemático, pois tem muito contribuído para o desenvolvimento dos conteúdos geométricos, contribuindo para a aprendizagem dos estudantes. Esse modelo oferece a capacidade de avaliar permitindo ao aluno as habilidades para obtenção de resultados satisfatórios nos estudos geométricos. Os Van Hiele por meio do seu modelo e fases de aprendizagem promovem um estilo de identificação do amadurecimento da Geometria para os estudantes, utilizando propostas, em que cada aluno avança de nível em nível até atingir uma compreensão de ideias espaciais.

O estudo do casal iniciou-se com situações-problema enfrentados por estudantes na Holanda, onde Pierre van Hiele e Dina van Hiele-Geldof criaram níveis de raciocínio, para que os estudantes progredissem a cada nível avançado.

O modelo foi elaborado com cinco níveis de aprendizagem geométrica denominadas por: visualização, análise, dedução informal, dedução e rigor. Segundo van Hiele, cada nível é caracterizado pelo modo de como pensamos e quais os tipos de ideias geométricas sobre as quais pensamos. E o aluno avança de nível dependendo do desempenho adquirido de um após o outro. Este modelo foi criado para identificar o nível de maturidade geométrica do aluno, não esquecendo de valorizar o aprendizado que é o mais importante e sua eficiência está em ajudar na elaboração de materiais e metodologias que foram formados e aprimorados mediante os níveis e fases de aprendizagem, nele existentes. E, com isso, ficou claro que o raciocínio geométrico pode ser acessível a todas as pessoas (LINDQUIST e SHULTE, 1994, p.18)

Como disseram Lindquist e Shulte (1994) a Geometria por muitas razões oferece uma diversidade de oportunidades, é a de "ensinar a resolver problemas" e "ensinar para resolver problemas." Sendo assim, podemos considerar a Geometria como uma excelente fonte de episódios de resolução de problemas. Se houver o desenvolvimento da percepção espacial e do pensamento geométrico do aluno em seu processo educacional tendo a integração com outros subtemas, a visibilidade da Matemática como um todo será ampla e completa no entendimento matemático do aluno.

No livro de Van de Walle (2006), T*eaching Student Centered - Mathematics grades 5 - 8,* são apresentadas as grandes ideias para cada tópico da Matemática. Realçamos as grandes ideias da Geometria:

Grandes ideias da Geometria:

I. O que torna as formas parecidas ou diferentes podem ser determinadas por uma série de propriedades geométricas. Por exemplo as formas que têm lados paralelos, perpendiculares ou nenhum deles; elas têm simetria axial, simetria rotacional ou nenhuma delas; elas são semelhantes, congruentes ou nenhuma das duas.

II. As formas podem se mover em um plano ou no espaço. Essas mudanças podem ser descritas em termos de translação, reflexão e rotação.
III. As figuras podem ser descritas em termos de sua localização em um plano ou no espaço. O sistema de coordenadas pode ser usado para descrever esses locais com precisão. Por sua vez, a visão de coordenadas da forma oferece outra maneira de entender certas propriedades das formas, por exemplo: as mudanças na posição (transformação) e como elas parecem ou alteram o tamanho (visualização).
IV. As figuras podem ser vistas em diferentes perspectivas. A capacidade de perceber formas a partir de pontos de vista diferentes nos ajuda a entender as relações entre as formas de bi e tri dimensionais e mudar mentalmente a posição e o tamanho das formas. (VAN DE WALLE, 2006, p. 179, tradução nossa)

2.3.1.7 Álgebra e o pensamento algébrico

No PCN (1998, 155):

> O estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas. Entretanto, a ênfase que os professores dão a esse ensino não garante o sucesso dos estudantes, a julgar tanto pelas pesquisas em Educação Matemática como pelo desempenho dos estudantes nas avaliações que têm ocorrido em muitas escolas. Nos resultados do SAEB, por exemplo, os itens referentes à Álgebra raramente atingem o índice de 40% de acerto em muitas regiões do país.
>
> O quadro a seguir sintetiza de forma bastante simplificada as diferentes interpretações da Álgebra escolar e as diferentes funções das letras:

Quadro 2: Álgebra no ensino fundamental - PCN (1998).

Dimensões da Álgebra	Aritmética Generalizada	Funcional	Equações	Estrutural
Uso das letras	Letras como generalizações do modelo aritmético	Letras como variáveis para expressar relações e funções	Letras como incógnitas	Letras como símbolo abstrato
Conteúdos (conceitos e procedimentos)	Propriedades das operações generalizações de padrões aritméticos	Variação de grandezas	Resolução de equações	Cálculo algébrico Obtenção de expressões equivalentes

Fonte: Retirado dos PCN (1998, p. 116)

Usiskin (1988) afirma, em *Concepções da Álgebra escolar e usos de variáveis,*[7] que não é fácil definir Álgebra e que a Álgebra ensinada na escola “tem uma conotação muito diferente daquela ensinada nos cursos superiores de Matemática” (USISKIN, 1988, p. 9, tradução nossa). No dizer dele, os matemáticos Mac Lane e Birkhoff (1967) começam sua Álgebra com uma tentativa de ligar Álgebra escolar e Álgebra universitária:

> A Álgebra começa como a arte de manipular somas, produtos e potências de números. As regras para essas manipulações valem para todos os números, de modo que as manipulações podem ser levadas a efeito com letras que representem números. Então, parece que as mesmas regras valem para diferentes espécies de números [...] e que as regras inclusive se aplicam a coisas [...] que de maneira nenhuma são números. Um sistema algébrico, como veremos, consiste em um conjunto de elementos de qualquer tipo sobre os quais operam funções como a adição e a multiplicação, contando apenas que essas operações satisfaçam certas regras básicas. (apud USISKIN, 1988. p.9. MAC LANE, BIRKHOFF, 1967)

Considera-se que a primeira sentença dessa citação é pensada como Aritmética, então a segunda refere-se à Álgebra escolar. Então, a Álgebra escolar tem a ver com a compreensão do significado das “letras” (hoje comumente chamada *variáveis*) e das operações com elas, e consideramos que os estudantes estão estudando Álgebra quando encontram variáveis pela primeira vez. (USISKIN, 1988, p.8, tradução nossa)

---

[7] Conceptions of school algebra and uses of variables.

Essas diferentes concepções da Álgebra refletem-se nos diversos usos à ideia de variável. Vejamos alguns exemplos:

Quadro 3: Diferentes características de variável

	Significado de cada letra
i) $A = b.h$	A: área b: base *h*: altura
ii) $50x = 40$	*x*: incógnita
iii) $sen\,x\ = \cos x\,.\,tg\,x$	*x*: argumento de uma função
iv) $n\,.\frac{1}{n} = 1, para\ todo\ n \neq 0$	Generaliza um modelo aritmético e *n* identifica um exemplo do modelo
v) $y = kx$	*x* é um argumento de uma função, *y* o valor e *k* uma constante (ou parâmetro, dependendo de como é usada)

Fonte: Elaborada pela autora com base o artigo de Usiskin (1988, p.16)

Cada uma delas tem um caráter diferente. Comumente chamamos (i) de fórmula (que é relação entre grandezas), (ii) de equação (ou sentença aberta), (iii) de identidade, (iv) de propriedade e (v) de equação de uma função que traduz uma proporcionalidade direta.

De acordo com Usiskin (1988, p. 17) a Álgebra tem as seguintes diferentes concepções:

Quadro 4: Concepções da Álgebra

Concepção da Álgebra	*Uso das variáveis*
Aritmética generalizada	Generalizadoras de modelos (traduz, generaliza)
Meio de resolver certos problemas	Incógnitas, constantes (resolve, simplifica)
Estudo de relações	Argumentos, parâmetros (relaciona, apresenta gráficos)
Estrutura	Sinais arbitrários no papel, (manipular, justificar)

Fonte: Retirado do artigo Concepções sobre a Álgebra da escola média e utilizações das variáveis de Usiskin 1995, p. 20

May e Van Engen (1959, apud USISKIN, 1988) apresentam uma concepção deferente de variável:

> Uma variável, grosso modo, é um símbolo para qual se substituem os nomes de alguns dos objetos, usualmente um número na Álgebra. Uma variável está sempre associada a um conjunto de objetos cujos nomes podem ser substituídos por ela. Esses objetos chamam-se valores da variável (p. 70, tradução nossa)

Disse Usiskin (1988) que para evitar a distinção “nome-objeto” e pensar em uma variável simplesmente como um símbolo para o qual coisas (mais precisamente, coisas de um determinado conjunto de substituição) podem substituir coisas. (USISKIN, 1988, p. 11)

No artigo Álgebra: A Matemática e a Pedagogia[8] de Saul (2008, p 63) ele inicia fazendo alguns questionamentos:

> Por que a Álgebra é tão difícil de aprender? O que é sobre o assunto o que os estudantes acham desafiador? Estas são questões que enfrentam professores novatos de Matemática quase assim que chegam na sala de aula. À medida que os professores acumulam experiência em sua prática, surgem novas questões. Quais são as manchas ásperas em um curso sobre Álgebra? O que dificulta essas partes específicas do assunto? O que pode ajudar os estudantes sobre esses pontos? As respostas a estas questões podem focar o inquérito do professor em apoio aos seus estudantes.

Saul (2008) observa que, sobre o conteúdo matemático, podemos distinguir três modos de analisar o fenômeno da Álgebra: como uma generalização da Aritmética, como o estudo de operações binárias, e como o estudo do corpo das expressões racionais e corpos relacionados. Os trabalhos de Usiskin e Saul são complementares, cada um considerando diferentes aspectos desses diferentes pontos de vista para a Álgebra. O autor constrói a sua argumentação apoiando-se em um conjunto de exemplos, que levam a observações gerais a respeito da Álgebra e do porquê ela é difícil.

O autor apresenta as dificuldades que os estudantes enfrentam na aprendizagem de Álgebra e analisa algumas delas categorizado dessa maneira:

I. Um primeiro marco: a Álgebra como "a Aritmética geral";
II. Um segundo marco: a Álgebra como estudo de relações binárias em conjuntos;
III. Um terceiro marco: Álgebra pela Álgebra;

[8] Algebra: The Mathematics and the Pedagogy

Van de Walle (2005), em T*eaching Student Centered - Mathematics grades 5 - 8,* ele apresenta as grandes ideias para cada tópico da Matemática. Apresentamos as grandes ideias da Álgebra:

- **Grandes ideias da Álgebra:**

II. Existem padrões lógicos e são uma ocorrência regular em Matemática. Eles podem ser reconhecidos, estendidos e generalizados com palavras e símbolos. O mesmo padrão pode ser encontrado em muitas formas diferentes. Os padrões são encontrados em situações físicas e geométricas, bem como em números.

III. Uma variedade de representações, como diagramas, linhas numéricas, gráficos podem ser usados para ilustrar situações e relacionamentos matemáticos. Essas representações ajudam na conceitualização de ideias e na resolução de problemas.

IV. O simbolismo, especialmente o que envolve equações e variáveis, utiliza generalizações de padrões e relacionamentos.

V. As variáveis são símbolos que substituem números ou intervalos de números. Eles têm significados diferentes, dependendo de elas entrarem sendo usadas como representações de quantidades que variam ou mudam, representações de valores desconhecidos específicos ou espaços reservados em uma expressão ou fórmula generalizada.

VI. Equações e desigualdades são usadas para expressar relações entre duas quantidades. Símbolos de ambos os lados de uma equação ou desigualdade representa uma quantidade. Assim, $3 + 8$ e $5n + 2$ são expressões para números, não é uma expressão para encontrar o valor numérico.

O que a Álgebra não é

Saul (2008, p.64) apresenta alguns exemplos em que não se caracteriza a Álgebra:

> Exemplo 1: Andrei é um estudante mediano começando a sétima série. Ele pode resolver equações lineares simples tais como $2x - 3 = 17$. Ele faz isso por tentativa, substituindo a variável por valores inteiros até encontrar a solução. Ele sabe que 4 é muito pequeno, porque $2 \times 4 - 3 = 5$, e ele precisa 17. Ele sabe que 30 é muito grande porque $2 \times 30 - 3 = 57$, e ele precisa só 17. Dando valores a x maiores ou menores, Andrei pode chegar rapidamente à solução. Ele pode reconhecer quando chegou à solução. Mas Andrei não consegue resolver a equação $2{,}3x - 3{,}2 = 17{,}83$ da mesma forma. Ele não consegue nem mesmo resolver $3x - 3 = 17$ da mesma forma, pois aí ele teria que trabalhar com números racionais e, na infinidade deles, ele não encontraria uma possível solução trabalhando aritmeticamente. No entanto, dado um número, ele consegue dizer se ele é ou não uma solução dessas equações. (tradução nossa).

A confusão de Andrei nos diz muito sobre o que a Álgebra não é. A Álgebra não é o estudo de variáveis. Andrei sabe avaliar se a afirmação $2x - 3 = 11$ é verdadeira quando $x = 7$ e falsa quando $x = 5$. Ele sabe isso porque ele pode usar Aritmética para gerar as afirmações que resultam da variável x tomando valores específicos.

A Álgebra também não é o estudo de funções. Andrei tem uma boa ideia intuitiva sobre a função f definida por $f(x) = 2x - 3$. Ele sabe que $f(x)$ cresce quando x cresce e que se x toma um valor entre 10 e 20, $f(x)$ assumirá valores entre 17 e 37. Essas são essencialmente propriedades analíticas de uma função e não de uma equação.

Saul (2008) considera importante notar que o conceito de função é pedagogicamente e matematicamente, separado e distinto do aprendizado de Álgebra:

> Nós usamos Álgebra para representar funções. Mas nós também usamos Geometria quando fazemos um gráfico. E, também, usamos a linguagem natural. Temos até funções envolvendo variáveis aleatórias, cujos valores não podem ser facilmente registrados algebricamente. Álgebra nos ajuda a descrever e investigar uma ampla classe de funções [...] Mas a aquisição do conceito de função não é a mesma coisa que uma compreensão da Álgebra. Ao contrário, o estudo algébrico de funções dá ao estudante prática para aplicar habilidades algébricas e tornar essas habilidades mais vívidas. (SAUL, 2008, p.65, tradução nossa).

I. Um Primeiro Marco: A Álgebra como "Aritmética Generalizada"

Saul (2008) apresenta em seu artigo um trecho de "A Aritmética Generalizada", de Isaac Newton, um tratado sobre Álgebra elementar, que diz

> A Aritmética comum e a Álgebra se apoiam nos mesmos fundamentos computacionais e são direcionadas para o mesmo fim. Mas enquanto a Aritmética trata de questões de um modo definido e particular, a Álgebra o faz de uma maneira indefinida e universal, com o resultado de que quase todos os pronunciamentos que são feitos nesse estilo de computação – e suas conclusões em especial, podem ser chamados teoremas.[...]. (WHITSIDE38, 1972, apud SAUL 2008, p. 66).

O autor prossegue observando que, talvez, os professores estejam "empurrando" os estudantes para "exercícios" algébricos, envolvendo transformações em expressões algébricas, sem considerar o que as variáveis representam. Se esta falta de consideração não é sempre ruim e, em certos estágios, e para certos estudantes, é essencial, no estágio em que Bob se encontra, é importante que ele continue a pensar as variáveis da Álgebra como representando números, e as afirmações da Álgebra como generalizações das afirmações de Aritmética. Uma compreensão do nível de sofisticação Matemática de Bob e do que ele precisa para ir adiante pode ajudar na prevenção desse erro pedagógico.

II. Um Segundo Marco: A Álgebra Como o Estudo de Relações Binárias sobre Conjuntos

O aparecimento da incógnita nos dois lados de uma equação é algo que alguns estudantes acham difícil de compreender. Nesse tipo de problema é necessário transformar a equação, colocando as incógnitas todas em um mesmo lado. Ao fazer isso, o estudante estará acrescentando algo à sua compreensão do significado do símbolo de igualdade. Como Carpenter[9], Franke e Levi (2003, apud SAUL (2008)) perceberam, as crianças mais novas vêm no símbolo de igualdade algo como um botão de "retornar" em uma calculadora. Como uma sugestão para executar algum algoritmo implementando a operação indicada.

Analisar a igualdade de expressões algébricas requer que os estudantes voltem sua atenção para as operações indicadas nas expressões. O aluno pode não se concentrar nos números particulares que aparecem nas equações. O que lhe permite

---

[9] Carpenter, Thomas P., Megan Loef Franke, and Linda Levi. Thinking mathematically:integrating arithmetic and algebra in the elementary school. Portsmouth, N.H: Heinemann, 2003.

generalizar através das equações é sua compreensão de que o importante são as operações sendo efetuadas sobre os números e não os números em particular. O aluno, dessa maneira, compreende a Álgebra como o estudo de relações binárias sobre conjuntos.

III. Um Terceiro Marco: A Álgebra pela Álgebra

Segundo Saul (2008), muitos estudantes nunca vão além de uma compreensão da Álgebra como o estudo de operações binárias definidas em conjuntos de objetos e, na verdade, isso já os leva bastante longe. Eles podem atrelar a Álgebra ao estudo da Aritmética e utilizar a Álgebra para pensar afirmações aritméticas de modo mais geral. Eles têm acesso às estruturas da Álgebra, baseadas em propriedades gerais de operações binárias. Os estudantes descritos no próximo exemplo, no entanto, estão começando a dar um terceiro passo, em direção à compreensão das estruturas algébricas.

O autor observa que, em um processo largamente evidente para professores e estudantes, boa parte da Álgebra, após o primeiro ano de estudo, lentamente se transforma no estudo do corpo das expressões racionais. Desse ponto de vista, expressões racionais deixam de representar funções ou mesmo números racionais, e o que importa são as operações (adição e multiplicação) entre expressões racionais, com suas propriedades. Segundo Saul, atenção conscienciosa a esse processo (que estranhamente não tem sido destacado na literatura, ele acrescenta) pode ajudar professores a identificar problemas de compreensão.

No que diz respeito ao conteúdo matemático, podemos distinguir três maneiras de ver o fenômeno da Álgebra: como uma generalização da Aritmética, como estudo de operações binárias e como estudo do campo de expressões racionais e campos relacionados. A análise é do conteúdo, mas a utilidade desta maneira de descrever o conteúdo surge da sala de aula. Examinar o conteúdo dessa maneira pode explicar algumas dificuldades que os estudantes têm com Álgebra e nos ajudar a resolvê-los. A última parte do artigo descreve alguns exemplos dessa possibilidade.

2.3.1.8 O Ensino Intradisciplinar de Matemática

Como forma de colaborar com o ensino e a aprendizagem de Matemática do currículo escolar, Lorenzato (2006) apresenta uma vantagem no ensino integrado com a Aritmética, a Álgebra e a Geometria:

> Considerando que os conceitos não são construídos em sequência linear nem de forma isolada, não é recomendável que sejam apresentadas separadamente aos estudantes as noções de Aritmética, Geometria e Álgebra. Aqueles, que estudaram de modo isolado esses conceitos, ficaram com a impressão de que estes não se inter-relacionam e que aprenderam assuntos distintos. Assim, por exemplo, não percebem a semelhança entre numeral e polinômio. Acertadamente, Vergnaud (1991) fala em campo conceitual como uma área de conceitos conexos; essa conexão elimina a fragmentação, valoriza a semelhança entre os diferentes nomes dos conceitos e amplia a compreensão da ideia fundamental que está em estudo.

Lorenzato (2006) afirma que ensinar Aritmética, Geometria e Álgebra integradamente pode ser útil para atender o currículo em espiral, ou seja, trata-se de uma ideia central com enfoques diferentes. Essas conexões podem ser um apoio para a aprendizagem de Matemática, “pois facilita a percepção do significado de conceitos e símbolos” (LORENZATO, 2006, p. 70).

Lorenzato (2006) ressalta a importância do ensino intradisciplinar e argumenta que o ensino de Matemática sem conexão entre suas ramificações é como conhecer apenas parte de um todo. Esse autor exemplifica afirmando que quem já escutou isoladamente um ou diversos instrumentos musicais, mas que não os escutou juntos, em sintonia, não pode afirmar que conhece uma orquestra. O mesmo ocorre com alguém que estudou uma ou mais ramificações da Matemática separadamente, essa pessoa também não pode dizer que conhece a Matemática. Assim, após estudar dessa forma, os estudantes certamente ficam com a sensação de que aprenderam assuntos distintos, e que a Geometria, a Aritmética e a Álgebra não se interrelacionam. Além disso, como professora de Matemática e pesquisadora em Educação Matemática, me preocupo e considero muito importante levar os estudantes à visualização das conexões de diferentes ramos da Matemática, ou seja, que a Matemática se relaciona com a própria Matemática em uma perspectiva intradisciplinar.

O ensino compartimentalizado que há, sem sua maior parte, nas escolas de Educação Básica já sofreu uma tentativa de ser unificado. Na verdade, até o início do século XX, o ensino de Matemática era ainda mais segregado, pois não havia a disciplina Matemática e sim as disciplinas Aritmética, Geometria e Álgebra.

Atualmente, no Brasil, temos assegurado pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – nº 9.394 de 1996 que os currículos do Ensino Fundamental e Médio devem ter uma base nacional comum. Nessa lei está previsto que os currículos precisam abranger, obrigatoriamente, o estudo da Matemática.

Entretanto, nem sempre foi assim. Segundo Miorim (1998), os padres jesuítas chegaram ao Brasil e fundaram a Companhia de Jesus por volta do ano de 1550. Desde o período em que a Companhia de Jesus foi formada, os padres se tornaram responsáveis pelo ensino brasileiro e essa responsabilidade perdurou por mais de duzentos anos.

Nesse período, no ensino primário, havia o ensino de Matemática que era restrito à contagem e às operações fundamentais (GOMES, 2012). Na parte que correspondia ao Ensino Médio, a educação tinha como base, em humanidades clássicas, mais especificamente na retórica, humanidades e gramática, não havendo lugar para as Ciências e para a Matemática. Nesse período, nas várias gerações de estudantes brasileiros, só houve pessoas que se destacaram como cronistas, historiadores, poetas, dentre outras atividades relativas às humanidades, mas nenhum destaque de algum estudioso de Ciências e Matemática.

Em 1759 os jesuítas foram expulsos do Brasil, e o sistema educacional enfrentou uma crise. O país passou a contar apenas com poucos centros educacionais. Com a reforma Pombalina, em 1772, as aulas passaram a ser lecionadas em disciplinas isoladas, avulsas, que eram realizadas em locais diferentes sem articulação entre elas (MIORIM, 1998). Na década de 1820, mudanças começaram a ser feitas no curso primário. O ensino de Matemática de meninos e meninas, que já era feito de forma diferente, foi regulamentado pela lei geral de 15 de outubro de 1827. Nessa lei foi registrado que os meninos deveriam aprender as quatro operações aritméticas, prática de quebrados (termo relacionado ao uso dos números não inteiros), noções gerais de conceitos geométricos, decimais e proporções. As meninas, por sua vez, deveriam aprender apenas conceitos geométricos e a prática de quebrados, incluindo-se o ensino de práticas importantes para a economia doméstica, e suas escolas deveriam existir apenas nas localidades mais populosas (GOMES, 2012).

Anos depois, no final da década de 1830, Liceus[10] começaram a ser formados, como escolas que reuniriam o ensino de todas as disciplinas. No entanto, foi no Colégio Pedro II que as principais mudanças ocorreram. Fundado no Rio de Janeiro como a primeira escola secundária pública, esse foi o primeiro colégio brasileiro que apresentou um plano gradual, que propunha aprofundar as temáticas de cada disciplina com o passar dos anos, e integral que reunia as diversas disciplinas em uma mesma instituição de ensino seriado. O Colégio Pedro II passou a ser referência nacional e, no que se refere à Matemática, os estudantes tinham acesso às disciplinas Geometria, Aritmética e Álgebra (MIORIM, 1998; SOUZA, 2010; WERNECK, 2003).

No entanto, o ensino dissociado desses ramos da Matemática incomodava Euclides Roxo (que viveu de 1890 a 1950), então Diretor do Externato do Colégio Pedro II. Roxo estava mobilizado com as ideias difundidas, no início do século XX, por Félix Klein na Alemanha. Klein iniciou uma reforma propondo mudanças no ensino da Matemática por meio da interação entre as diferentes áreas da Matemática (Geometria, Aritmética e Álgebra) e entre a Matemática e outras áreas do conhecimento (VALENTE, 2004).

Sobre a unificação de Aritmética, Geometria e Álgebra, Klein alegava:

> Não quero dizer que essas partes devam ser completamente fundidas, mas não devem ser tão separadas como sucede hoje nas escolas, contra o que é natural (MIRANDA, 2003, p. 74).

Para Klein era natural que os ramos da Matemática estivessem relacionados, de modo que a Aritmética, a Geometria e a Álgebra não podiam ser vistas como áreas dissociadas. Com base nessas ideias, Euclides Roxo elaborou uma proposta de integrar as disciplinas Aritmética, Álgebra e Geometria em uma única, a de Matemática. Assim, essas disciplinas que seguiram separadas até 1929 foram unificadas, inicialmente no Colégio Pedro II e, a partir de 1931, com a reforma Francisco Campos (1931), em todos os colégios de nível secundário do país (MIORIM, 1998). A reforma Francisco Campos foi oficializada em 1931 pelo Decreto 19890 que, sobre unificar as vertentes da Matemática, declarava:

[10] Segundo Balassiano (2012), os Liceus no Brasil foram instituições escolares constituídas desde o Império até o início do século XX. Essas instituições foram criadas em formato semelhante aos Liceus franceses, e eram símbolos de prestígio em um momento da história que a escola ainda era para os ricos no nosso país.

> A Matemática será sempre considerada como um conjunto harmônico cujas partes estão em viva e íntima correlação. A acentuação clara dos três pontos de vista – aritmético, algébrico e geométrico – não deve, por isso, estabelecer barreiras intransponíveis, que impeçam o estudante de perceber as conexões entre aquelas disciplinas (INSTRUÇÕES PEDAGÓGICAS, REFORMA FRANCISCO CAMPOS, 1931, apud BRAGA, 2003, p. 15).

Assim, a junção dos ramos da Matemática em uma disciplina única passou a vigorar e perdura até os dias atuais. Contudo, isso não tem acontecido no formato intradisciplinar como sugere Lorenzato (2006). Os PCN do Ensino Fundamental recomendam que sejam ensinadas Geometria, Aritmética e Álgebra e afirmam haver

> [...] consenso a fim de que os currículos de Matemática para o ensino fundamental devam contemplar o estudo dos números e das operações (no campo da Aritmética e da Álgebra), o estudo do espaço e das formas (no campo da Geometria) e o estudo das grandezas e das medidas (que permite interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra, e da Geometria e de outros campos do conhecimento) (BRASIL, 1998, p. 49).

A proposta desta pesquisa está apoiada em Lorenzato (2006) que argumenta que todos os temas matemáticos previstos no currículo da Educação Básica do Brasil deveriam ser ensinados de forma a integrar as perspectivas aritmética, algébrica e geométrica.

De acordo com Pereira, Ribeiro e Cavalcanti (2010) o currículo da disciplina Matemática contempla o ensino da Aritmética, da Álgebra e da Geometria, contudo, de forma segmentado em compartimentos. Estes autores afirmam isso com base em suas próprias experiências, lecionando na Educação Básica e na Formação inicial de Professores de Matemática. Eles apontam que alguns obstáculos, que podem impedir que a **intradisciplinaridade** ocorra: "a organização linear do currículo, a veiculação de livros didáticos nesta perspectiva e a formação do professor continuada e inicial por vezes deficiente" (PEREIRA; RIBEIRO; CAVALCANTI, 2010, p. 5). Segundo eles, esses obstáculos contribuem para a disseminação da ideia de que é mais simples e até mais eficiente ensinar separadamente Álgebra, Aritmética e Geometria. E mais, apontam que o ensino dissociado tem contribuído para que algumas escolas deixem a Geometria à margem das demais áreas da Matemática. Segundo os autores, algumas dessas escolas chegam até criar uma disciplina específica com os conteúdos que classificam como geométricos.

Como possível alternativa para desenvolver de forma integrada o ensino de Aritmética, Álgebra e Geometria, Pereira, Ribeiro e Cavalcanti (2010) apontam a intervenção docente, pois o professor é o responsável pela gestão do currículo.

Diante do exposto, aqui tivemos o objetivo de retomar a memória em uma tentativa de unificar o ensino das ramificações, o que de fato ocorreu e se tornou lei após a reforma Francisco Campos. Contudo, essa reforma não implicou no ensino efetivo da Matemática na perspectiva intradisciplinar.

Por pensar nas questões relatadas nesta seção é que optei por elaborar atividades que promovessem a **Intradisciplinaridade** Matemática, viabilizando assim a percepção conjunta dos aspectos algébricos, aritméticos e geométricos no estudo de operações de polinômios. Para desenvolver e explorar operações polinômios em uma perspectiva intradisciplinar, mediante a interação simultânea de Aritmética, Geometria e Álgebra, por meio do material manipulativo *Algeblocks* foi o caminho encontrado para desenvolver este nosso trabalho.

2.3.2 Variável-chave: Materiais Manipulativos

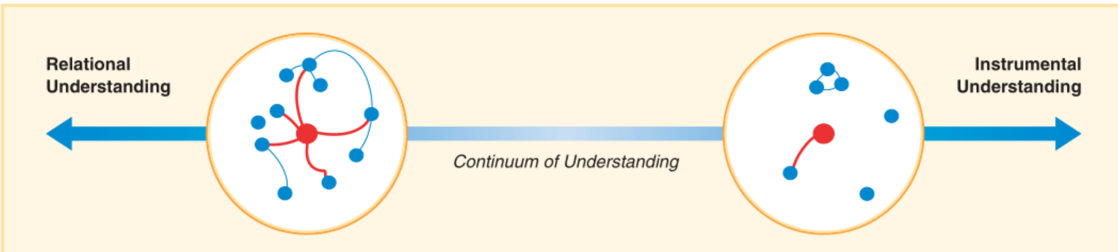
Burns (2007) apresenta em seu artigo, *Improving Student Achievement in Mathematics by Using Manipulatives with Classroom Instruction*[11], um estudo do uso de material manipulativo para o ensino de Matemática. Segundo ele:

> Os materiais manipulativos: ajudam os estudantes a dar sentido às ideias abstratas, fornecem a eles formas de testar e verificar ideias, são ferramentas úteis para resolver problemas e tornam a Matemática a ser aprendida mais atraente e interessante [...]

Ou seja, o material manipulativo pode dar potencialidade para a compreensão do aluno em relação ao conceito novo a ser aprendido.

Um modo no qual pode-se pensar sobre compreensão é que existe um *continuum* a partir de uma compreensão relacional – saber o que fazer e o porquê – para uma compreensão instrumental – fazer alguma coisa sem entender. Compreender é uma medida da qualidade e da quantidade de conexões que uma nova ideia tem com ideias existentes. Quanto maior o número de conexões em uma rede de ideias melhor será a compreensão.

Figura 13: Compreensão é a medida da qualidade e da quantidade de conexões que uma nova ideia tem com ideias existentes



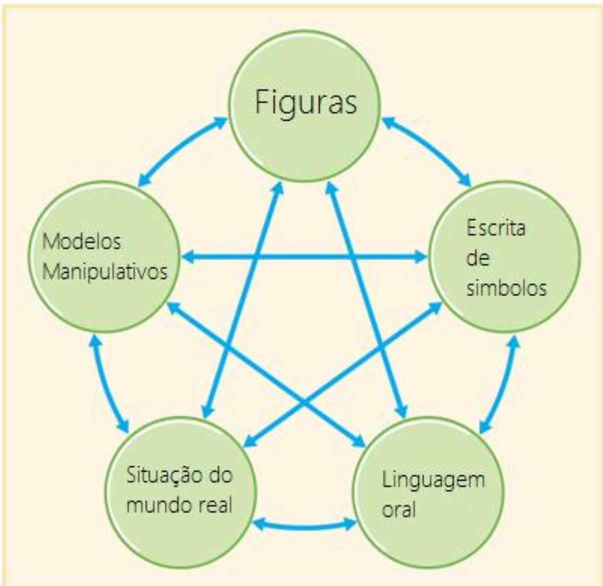
Fonte: Retirado do livro Elementary and Middle School Mathematics - Teaching Developmentally (VAN DE WALLE, KARP, BAY-WILLIAMS, 2013, p. 24)

[11] Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1FHzIQ9Nq3yRDayCI3JIQvh_2VGckSmNG/view?usp=sharing

2.3.2.1 Múltiplas representações

Em *Elementary and Middle School Mathematics – Teaching Developmentally*, de Van de Walle, Karp e Bay-William de 2013 é apresentado na página 24, deste livro, um estudo sobre múltiplas representações. Quanto mais modos são dados às crianças para pensar e testar uma ideia emergente, mais chances elas têm de formar e integrar corretamente uma rede de conceitos e assim desenvolver uma compreensão relacional. Lesh, Cramer, Doerr, Post e Zawojewski[12] (1987) oferecem cinco "representações" para os conceitos. Eles descobriram que as crianças que têm dificuldade em traduzir um conceito de uma representação para outra também têm dificuldade em resolver problemas e entender cálculos. Forçando a habilidade de se mover entre e dentre essas representações melhora a compreensão e a retenção dos estudantes. É importante que se tenha uma boa perspectiva sobre como os manipulativos e os modelos podem ajudar ou deixar de ajudar as crianças a construir ideias.

Figura 14: Cinco diferentes representações de ideias Matemática. Translações entre e dentre cada uma das representações pode ajudar o desenvolvimento do novo conceito



Fonte: Adpitado do livro *Elementary and Middle School Mathematics - Teaching Developmentally* (VAN DE WALLE, KARP, BAY-WILLIAMS, 2013, p. 24, tradução da autora)

---

[12] Model development seguences, publicado em Beyond construtivism: A model and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving.

2.3.2.2 Ferramentas e Manipulativos

No livro *Elementary and Middle School Mathematics – Teaching Developmentally*, de Van de Walle, Karp e Bay-Willians (2013, p. 24), é dito que uma ferramenta para identificar um conceito matemático refere-se a qualquer objeto, figura ou desenho que representa o conceito ou sobre o qual a relação para aquele conceito possa ser imposta.

Manipulativos são objetos físicos que estudantes e professores podem usar para ilustrar e descobrir conceitos matemáticos se feitos especificamente para a Matemática ou para outros propósitos. É incorreto dizer que uma ferramenta ilustra um conceito, pois ilustrar implica mostrar. Tecnicamente, tudo que você realmente vê com seus olhos é o objeto físico e somente sua mente pode impor a relação Matemática sobre o objeto.

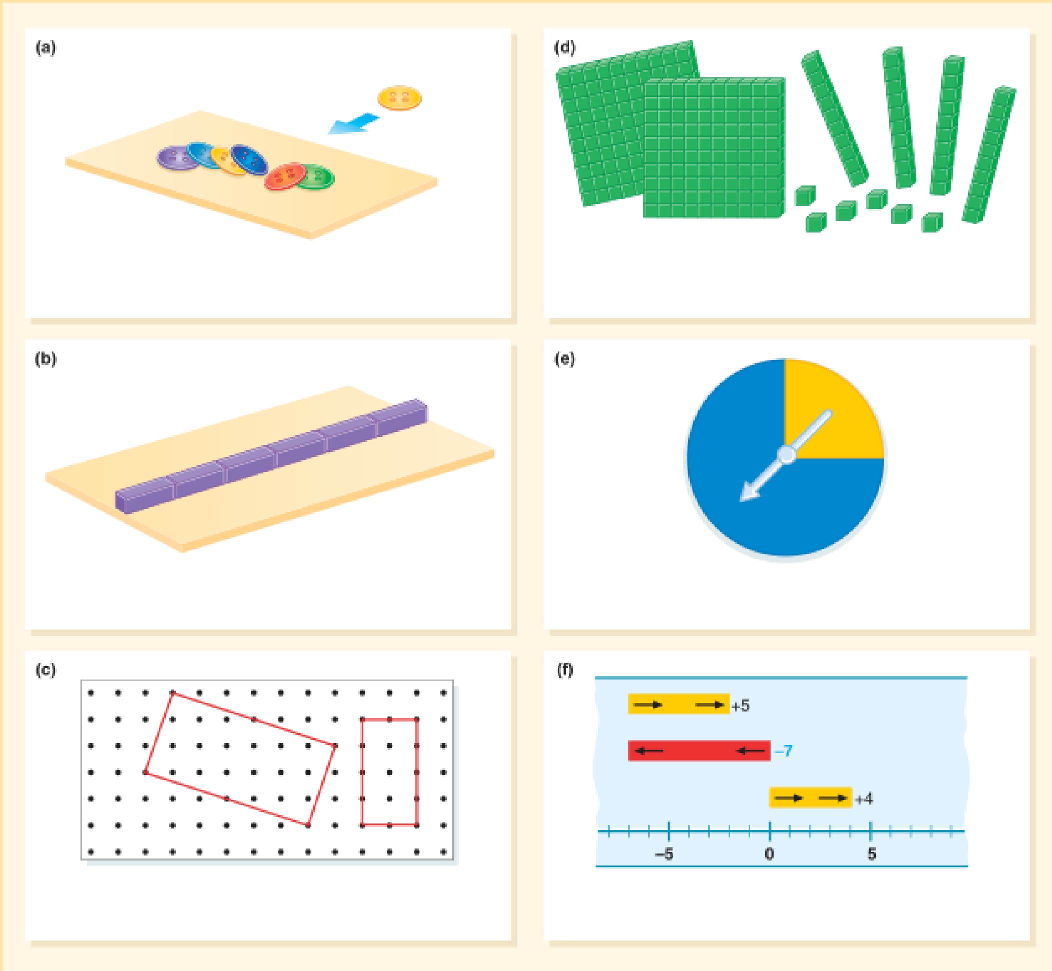
Manipulativos podem ser um solo de testes para ideias emergentes e às vezes é difícil para os estudantes pensar e testar relações abstratas usando somente palavras ou símbolos. Materiais físicos ou manipulativos são abundantes em Matemática – de objetos comuns, tais como feijões e para materiais produzidos comercialmente, tais como barras de madeira (por exemplo, material Cuisenaire) e blocos (por exemplo, Material Dourado).

A seguir é mostrado um quadro com alguns exemplos de ferramenta/manipulativos para o ensino de matemática, ou seja, considera-se que cada conceito corresponde a um tipo de modelo manipulativo e são apresentadas as possibilidades de se usar o material manipulativo. Por exemplo, objeto contáveis podem ser usados como modelo de número e relaciona a ideia de “somar mais um.”

Os seguintes pontos, de **a** a **f**, explicarão a figura 15:

a) O conceito de "6" é uma relação entre conjuntos que podem ser correspondentes às palavras um, dois, três, quatro, cinco ou seis. Alterando um conjunto de contadores adicionando-se um, altera-se o relacionamento. A diferença entre o conjunto de 6 contadores e o conjunto de 7 é a relação “a mais do que.”

Figura 15: Exemplos de modelos para ilustrar conceitos matemáticos.



Fonte: Retirado do livro *Elementary and Middle School Mathematics - Teaching Developmentally* (VAN DE WALLE, KARP, BAY-WILLIAMS, 2013, p. 25, tradução nossa)

b) O conceito de "medida de comprimento" é uma comparação do comprimento de objetos diferentes. A medida de comprimento de um objeto é uma relação de comparação do comprimento do objeto com o comprimento da unidade nesse conjunto.

c) O conceito de "retângulo" inclui relações tanto do espaço quanto do comprimento. Os lados opostos têm a mesma medida e são paralelos e os lados adjacentes vão de encontro aos ângulos retos.

d) O conceito de "centena" não é o quadrado maior, mas é a relação desse quadrado com a barra ("dezena") e com o pequeno quadrado ("unidade").

e) "Chance" é a relação entre a frequência de um evento comparado com todos os possíveis resultados. A roleta pode ser usada para criar frequências relativas. Estes podem ser previstos observando relações de seções da roleta.

f) O conceito de “número inteiro negativo” baseia-se sobre as relações de “grandeza” e “é o oposto de.” As quantidades negativas existem apenas em relação às quantidades positivas. As setas no modelo de linha numérica indicam o oposto da relação em termos de direção e tamanho ou relação de grandeza em termos de comprimento.

Ferramentas para aprendizagem

No livro *Teaching Student-Centered Mathematics - Grades 5-8* de Van de Walle tomamos o tópico Ferramentas para aprendizagem:

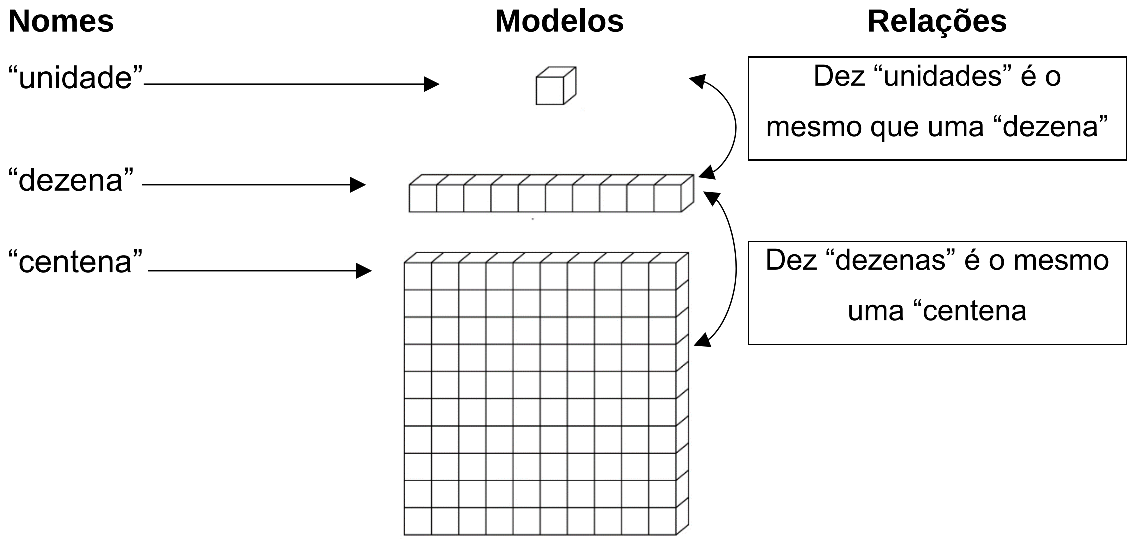
Seria difícil tornar-se um professor e pelo menos não ter ouvido algo sobre o uso de manipulativos, pois esse é um caminho recomendado para se ensinar Matemática. Não há dúvida de que esses materiais poderiam e deveriam desempenhar um papel significativo em sua sala de aula. Usados corretamente, eles podem ser um fator positivo na aprendizagem dos estudantes. Mas eles não são um “cura-tudo” que alguns educadores parecem acreditar que eles sejam. É importante que você tenha uma boa perspectiva sobre como os manipulativos podem ajudar ou falhar na ajuda dos estudantes em sua construção de ideias.

Modelos não são o mesmo que conceitos

O conhecimento conceitual da Matemática consiste em relações lógicas construídas internamente e existentes na mente como parte da rede de ideias. É o tipo de conhecimento a que Piaget se referiu como conhecimento lógico-matemático. Por sua própria natureza, o conhecimento conceitual é o conhecimento que é entendido. Ideias como três quartos, trapézio, décimos, centésimos, milésimos, produto e proporção são exemplos de relações ou conceitos matemáticos.

A Figura 15 mostram os três blocos comumente usados para representar unidades, dezenas e centenas na escola elementar.

Figura 16: Objetos e nomes de objetos não são o mesmo que relações entre objetos



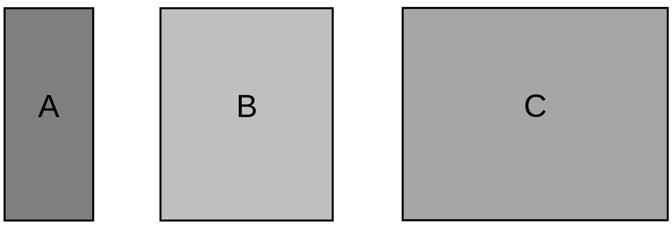
Fonte: Retirado do livro *Teaching Student-Centered Mathematics - Grades 5-8* (VAN DEWALLE, 2006, p. 7)

Nos anos médios, praticamente todos os estudantes viram essas imagens e fizeram uso desses blocos. Para muitos, os nomes desses blocos, unidades, dezenas e centenas, podem ser mais significativos do que as relações entre eles. Os blocos não são a mesma coisa que unidades, dezenas e centenas. Na verdade, nos graus posteriores, esses mesmos blocos são frequentemente usados com a placa ou um grande cubo representando um, e os outros correspondentemente representando os valores decimais.

O conceito matemático de décimo é que dez décimos são o mesmo que uma unidade. Décimo não é uma barra. O conceito de décimo é encontrado na relação da barra e da placa. Essa relação chamada “décimo” precisa ser criada pelos estudantes em suas próprias mentes. Os blocos podem ajudar os estudantes a “ver” e a “falar” sobre a relação, mas o que eles veem são blocos, e não conceitos.

Um outro exemplo, considere os retângulos da figura 16.

Figura 17: Representação de meio, dobro e um quarto



Fonte: Retirado do livro Teaching Student-Centered Mathematics - Grades 5-8 (VAN DE WALLE, 2006, p. 7)

Se nós chamarmos o retângulo **B** de “unidade” ou “um inteiro” então podemos nos referir ao retângulo **A** como “uma metade.” A ideia de metade é a relação entre os retângulos **A** e **B**, uma relação que pode ser construída em nossa mente. Ela não está em qualquer retângulo. Na verdade, se decidimos chamar o retângulo **C** de inteiro, **A** torna-se um quarto. Os retângulos não mudam de forma nenhuma. Os conceitos de “metade” e “um quarto” não estão no retângulo, nós os construímos em nossa mente. Os retângulos podem nos ajudar a “ver” as relações, mas o que nós vemos são retângulos e não conceitos.

Com esse entendimento podemos definir um modelo da seguinte forma: Um modelo para um conceito matemático refere-se a qualquer objeto, figura ou desenho que representa o conceito ou sobre o qual a relação para aquele conceito pode ser imposta. Nesse sentido, quaisquer dois objetos podem ser um modelo para a fração um quarto desde que a relação 4 para 1 pode ser imposta sobre eles.

Com já foi dito, é incorreto dizer que o modelo “ilustra” um conceito. Pois ilustrar implica mostrar. Isso significaria que quando você olhasse para o modelo, você poderia ver um exemplo do conceito. Tecnicamente, tudo que você realmente vê com seus olhos é o objeto físico; somente sua mente pode impor a relação matemática sobre o objeto. Para uma pessoa que ainda não tem essa relação, o modelo não ilustra o conceito. Conceitos matemáticos são relações construídas na mente.

Introduzindo modelos e tornando-os disponíveis

Quando um novo modelo ou novo uso de um modelo familiar é introduzido na sala de aula, isso geralmente é uma boa ocasião para explicar como o modelo é usado e talvez realizar uma simples atividade que ilustre esse uso.

Embora uma escolha livre de modelos pudesse geralmente ser norma em sua sala de aula, você poderia frequentemente pedir aos estudantes para usarem um modelo para mostrar seu pensamento e isso ajudaria. E a seguir estão as seguintes regras para usar esses modelos:

- Introduzir novos modelos mostrando como eles podem representar as ideias para as quais elas são sendo pretendidas.
- Permitir aos estudantes selecionar livremente modelos disponíveis para usá-los em resolução de problemas.
- Encorajar o uso de um modelo quando você acredita que ele poderia ser útil a um estudante em dificuldade.

2.3.2.3 Um manipulativo: ***Algeblocks***

Os *Algeblocks,* um conjunto de blocos manipulativos para os estudantes desenvolverem conceitos matemáticos, foram desenvolvidos e testados pela autora Anita Johnston. Os *Algeblocks* dão exemplos para os estudantes visualizarem a apresentação concreta de conceitos abstratos.

Falando aos professores Anita Johnston diz:

> Os *Algeblocks* ajudarão seus estudantes a aprender conceitos algébricos abstratos através de modelação concreta com blocos manipulativos.Esses blocos plásticos representam modelos algébricos e numéricos. Seus estudantes usarão esses blocos para modelar uma ampla gama de conceitos algébricos de representação de números inteiros não negativos para resolver equações.

Anita Johnston construiu um manual projetado para guiar o professor através de uma abordagem manual para ensinar conceitos algébricos. Diz que os estudantes usarão os blocos algébricos para resolver problemas de Álgebra registrados em folhas de atividade entregues a eles. Ao registrar suas soluções tanto com figuras quanto com notação algébrica, os estudantes ligarão seu trabalho manipulativo à Álgebra formal. Passo a passo as instruções de ensino irão tornar cada aula mais fácil de ser apresentada.

O material *Algeblocks* oferece um número suficiente de blocos para grupos de quatro estudantes trabalharem em grupos de aprendizagem cooperativos. Os blocos representam constante unitária e variáveis $1, x, y, xy, x^2, y^2, x^2y, xy^2, x^3$ e y^3.

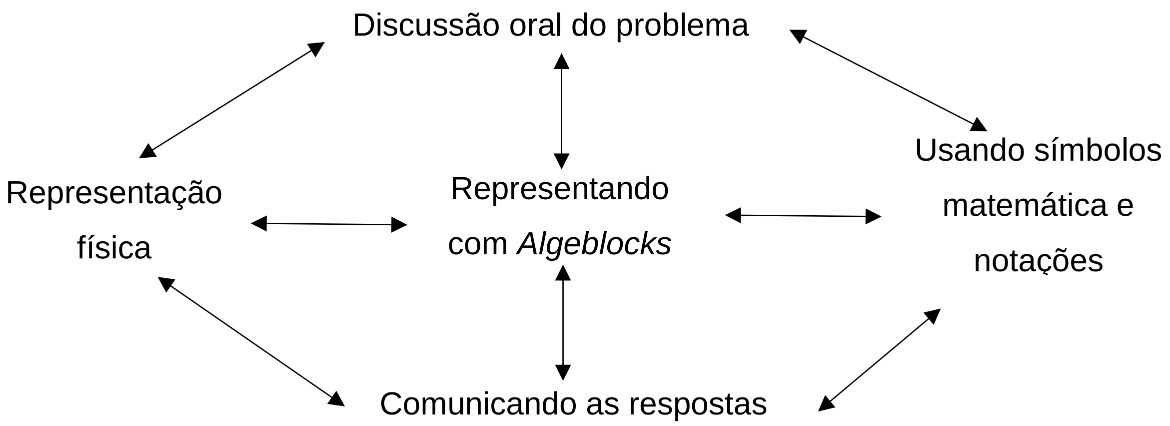
Enquanto estão usando os *Algeblocks* os estudantes interagem um com o outro e com o professor. Os estudantes buscam padrões e constroem suas próprias definições e os significados de conceitos matemáticos. O professor, como facilitador, ajudar a manter os estudantes na tarefa, dá o ritmo e a estrutura do currículo, e ativamente verificar-se cada estudante construiu o “método correto” ou não. Este “método correto” não é uma regra aprendida, mas que deveria ser verbalizada pelo estudante e então aplicada a problemas para chegar a resultados corretos.

Os estudantes em geral gostam mais de trabalhar quando se sentem ativamente envolvidos no trabalho. Nos *Algeblocks*, em alguns casos as respostas são os próprios blocos dispostos à sua frente e, outros casos, requerem respostas escritas.

Durante nossa pesquisa apenas encontramos a pesquisa de Cardona (2013), intitulada *Transición del pensamiento numérico al pensamiento algebraico a través de la estrategia didáctica Algeblocks*, dizendo que a utilização de operações algébricas e as representações com blocos generaliza e formaliza padrões e regularidades em situações problemáticas de Matemática por meio de estratégias que podem ser exploradas pelos *Algeblocks*. O material de Cardona (2013) utiliza uma reprodução dos *Algeblocks* de Anita Johnston e nele se pode observar que esse material manipulativo ajudou os estudantes a enxergarem no concreto conceitos abstratos de Álgebra.

Dando início a introdução dos *Algeblocks* em sala de aula deve-se pedir aos estudantes que determinem modos de comunicação matemática (oral, escrita, desenho, esboço e representação física). Na busca de técnica para a resolução de problemas usando os *Algeblocks* nos deparamos com o seguinte quadro:

Quadro 5: Técnicas para a Resolução de Problemas usando *Algeblocks*



Fonte: Retirado de *Algeblocks* de Anita Jonston (1996, p. 6)

Esse manual apresenta 12 unidades e para cada unidade são apresentadas suas intenções de trabalho.

Na <u>Unidade Um</u> os estudantes se tornarão familiares com os componentes dos *Algeblocks* quando eles:

1. representam expressões numéricas;
2. usam uma forma retangular para representar um número;
3. representam uma variável;
4. modelam e escrevem expressões variáveis;
5. usam uma base geométrica para quadrar e cubar termos;
6. demonstram conhecimento de habilidade de comunicação.

Na Unidade Dois é feita uma introdução aos números inteiros. O conceito básico de grandeza, sinal e oposto são explicados. Nessa unidade os estudantes irão:

1. usar números inteiros para mostrar direção e sentido;
2. modelar fisicamente os números inteiros;
3. investigar o significado de oposto.

Na Unidade Três a adição de inteiros é baseada no conceito em que ***a – a = 0***. Para reconhecer esse princípio e usá-lo para adicionar números inteiros, o aluno irá:

1. modelar situações em que a adição de números opostos é igual a zero;
2. adicionar números inteiros;
3. sumariar regras para adicionar números inteiros.

Na Unidade Quatro os estudantes irão:

1. subtrair números inteiros;
2. comparar subtração com adição de números opostos;
3. mudar a subtração para a adição;
4. praticar a adição e a subtração;
5. usar gráficos de barras para exibir os resultados.

Na Unidade Cinco os estudantes irão

1. observar padrões para reforçar a multiplicação de inteiros;
2. usar um modelo de área no plano cartesiano para multiplicar inteiros;
3. quadrar números inteiros;
4. aplicar e modelar a propriedade distributiva;
5. dividir inteiros.

Na Unidade Seis os estudantes irão

1. modelar as expressões variáveis usando *Algeblocks*;
2. avaliar expressões variáveis com potências.

Na Unidade Sete os estudantes irão usar os *Algeblocks* para executar as seguintes operações com polinômios:

1. juntar termos semelhantes;
2. classificar polinômios por nome e por grau;
3. achar o oposto de uma expressão polinomial;
4. adicionar polinômios;
5. subtrair polinômios;
6. demonstrar conhecimento.

Na Unidade Oito os estudantes irão usar os *Algeblocks* para

1. multiplicar dois monômios de grau 1;
2. multiplicar um monômio por um binômio;
3. multiplicar dois binômios.

Na Unidade Nove os estudantes irão usar os *Algeblocks* para:

1. dividir dois monômios;
2. dividir um binômio por um monômio;
3. dividir um binômio por um binômio;
4. modelar fisicamente o máximo divisor comum de números não negativos;
5. encontrar o máximo divisor comum de monômio;
6. fatorar um binômio;
7. fatorar um trinômio.

Na Unidade Dez os estudantes irão usar os *Algeblocks* para:

1. conectar frases e símbolos matemáticos;
2. conectar equações e símbolos matemáticos;
3. escrever equações;
4. resolver equações adicionado o mesmo número nos dois membros da equação;
5. resolver equações dividindo;
6. resolver equações com dois passos;
7. resolver equações em que a variável é subtraída;
8. resolver equações com variáveis nos dois membros da equação;
9. aplicar essas habilidades para resolver desigualdade.

Na Unidade Onze os alunos irão usar os *Algeblocks* como modelo visual para ajudar em:

1. escrever expressões para perímetro e área quando as dimensões são representadas com varáveis;
2. explorar a relação entre comprimento, largura e área de um retângulo;
3. contar para achar a área da superfície e o volume do sólido;
4. escrever expressões de área da superfície e volume do sólido quando as dimensões são representadas com variáveis;

5. explorar a relação entre o volume e as dimensões de um solido retangular;
6. escrever expressões para área da superfície e volume do cubo quando as dimensões são representadas por variáveis.

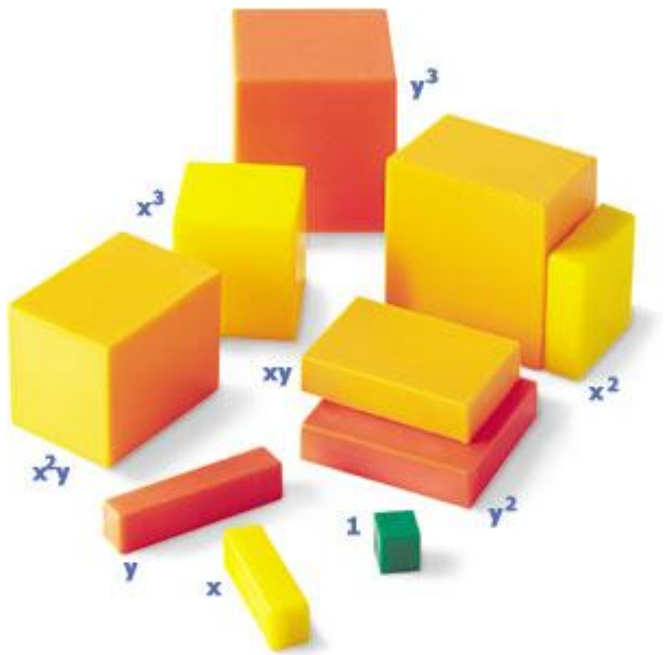
Na Unidade Doze os estudantes irão:

1. encontrar soluções para equações com duas incógnitas;
2. fazer gráficos de soluções para equações com duas incógnitas;
3. explorar a declividade;
4. usar substituição para resolver um sistema de equações lineares;
5. escrever e resolver um sistema de equações.

Os *Algeblocks* são formados por um conjunto de blocos plásticos de vários tamanhos, com dimensões específicas, e cores, cada cor correspondendo a um padrão de tamanho.

Na Figura 18 apresenta-se o material que foi usado, nas atividades para a produção de dados de desta pesquisa.

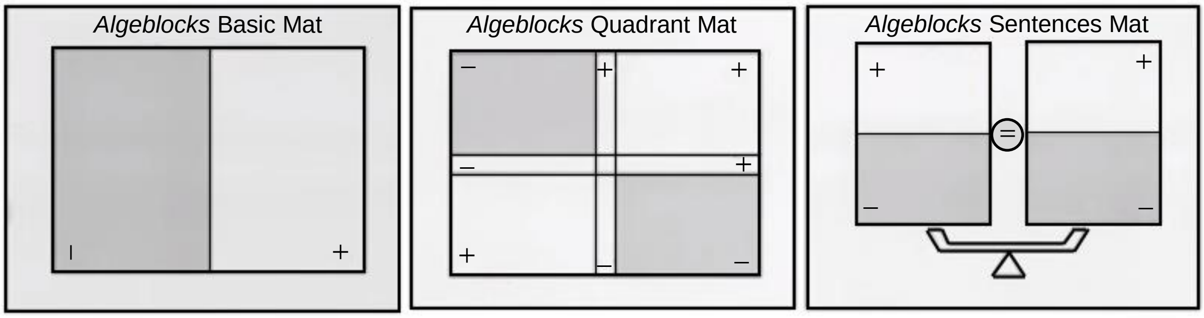
Figura 18: Blocos dos *Algeblocks*



Fonte: https://cdn.hand2mind.com/productimages/77516_A-web.jpg

Apresentam-se a seguir as folhas de apoio para realizar as atividades do Manual *Algeblocks*

Figura 19: Folhas de Apoio *Algeblocks*



Fonte: Adaptado do livro dos *Algeblocks*

Na tabela a seguir é mostrado o que é abordado em cada unidade do livro dos *Algeblocks.*

Quadro 6: Unidades do livro dos *Algeblocks*

Unidade Um	Introdução aos *Algeblocks*	Representação de: números, números retangulares, variáveis e expressões com variáveis.
Unidade Dois	Representação de números inteiros	Representando inteiros; Encontrando o oposto.
Unidade Três	Adicionando números inteiros	Somas zero; adicionando inteiros.
Unidade Quatro	Subtraindo números inteiros	Encontrando a diferença; Subtraindo inteiros por adição de opostos.
Unidade Cinco	Multiplicando e dividindo números inteiros	Multiplicando inteiros; Propriedade da distributiva; dividindo inteiros.
Unidade Seis	Pensando sobre variáveis	Representando Expressões com variáveis.
Unidade Sete	Adicionando e subtraindo com variáveis	Polinômios; o valor oposto de uma expressão com variável.
Unidade Oito	Multiplicando variáveis	Multiplicando monômio, multiplicando binômios.
Unidade Nove	Dividindo com variáveis	Dividindo monômio; dividindo polinômio por monômio.
Unidade Dez	Resolvendo sentenças	Oração↔ $Algeblocks$ ↔Simbolo
Unidade Onze	Usando Geometria e variáveis	Perímetro; área; volume; área de superfície.
Unidade Doze	Resolvendo equação	Encontrando o valor de x; *Algeblocks*↔Equação↔Tabela;

Fonte: Elaborado pela autora

2.3.3 Variável-chave: <u>Resolução de Problemas</u>

Harold Schoen e Randall Charles começam, no prefácio do livro *Teaching Mathematics though Problem Solving*, grades 6 – 12 (2003), referindo-se à resolução de problemas descrita em Principles and Standards for School Mathematics

> Resolução de Problemas... pode servir como um veículo para a aprendizagem de novas ideias e habilidades Matemática... Uma abordagem centrada em problemas para ensinar Matemática usa problemas interessantes e bem selecionados para dar início às aulas de Matemática e engajar estudantes. Nesse modo, novas ideias, técnicas e relações matemáticas emergem e tornam-se o foco de discussão. Bons problemas podem inspirar a exploração de ideias matemáticas importantes, nortear a persistência e reforçar a necessidade para compreender e usar várias estratégias, propriedades e relações matemáticas.

Nesta seção apresenta-se como a Resolução de Problemas surgiu na Educação Matemática e, também, será apresentada a concepção que o GTERP tem sobre a Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

2.3.3.1 Perspectivas históricas da Resolução de Problemas no currículo de Matemática

Polya passou a ser a mais importante referência em Resolução de Problemas e em seu livro, *How to solve it*[13] (1944), estabeleceu quatro passos necessários para um bom *resolvedor* de problemas.

1) Compreender o problema;
2) Estabelecer um plano;
3) Executar o plano;
4) Examinar a solução obtida.

Para esse autor, “uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema” (POLYA, 1944, p. v).

---

[13]A arte de resolver problemas.

De acordo com Onuchic (1999)

> Problemas de Matemática têm ocupado um lugar central no currículo de Matemática escolar desde a Antiguidade. Registros de problemas matemáticos são encontrados na história antiga egípcia, chinesa e grega e são, ainda, encontrados do mesmo modo problemas em livros-texto de Matemática dos séculos XIX e XX. Segundo Stanic & Kilpatrick[14], o principal ponto a ser considerado, nos exemplos por eles colocados, é que neles é assumida uma visão muito limitada da aprendizagem de resolução de problemas. (ONUCHIC, 1990, p.4).

Essa autora, ao comentar sobre as reformas do ensino de Matemática de resolução de problemas durante o século XX, escreveu que

> Ao passar de uma sociedade rural, onde "poucos precisavam conhecer Matemática", para uma sociedade industrial onde mais gente "precisava aprender Matemática" em razão da necessidade de técnicos especializados, daí para um sociedade de informação onde a maioria das pessoas "precisava saber Matemática" e agora, caminhando para um sociedade do conhecimento que exige de todos "saber muita Matemática", é natural que o homem se tenha interessado em promover mudanças na forma de como se ensina e como se aprende Matemática.

Segundo os PCN (1998, p. 19)

> os movimentos de reorientação curricular ocorridos no Brasil, a partir dos anos 20, não tiveram força suficiente para mudar a prática docente dos professores para eliminar o caráter elitista desse ensino, bem como melhorar sua qualidade. Em nosso país o ensino de Matemática ainda é marcado pelos altos índices de retenção, pela formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanizações de processos sem compreensão.

Onuchic (1999) ao analisar os movimentos de reforma do ensino de Matemática do século XX, identificou os seguintes tipos: o ensino de Matemática por repetição, o ensino de Matemática com compreensão e o ensino de Matemática influenciado pelo Movimento da Matemática Moderna (MMM).

Apoiado em Thorndike, o ensino de Matemática por repetição foi caracterizado por um ensino repetitivo, no qual era muito importante o recurso à memorização. Media-se o conhecimento do aluno, recebido através de repetição, com a aplicação de testes em que, se ele repetisse bem o que o professor havia feito, concluía-se que sabia. (ONUCHIC, 1999, 201)

---

[14] Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum, publicado em The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving (1989)

O ensino de Matemática com compreensão, apoiado nos estudos de Brownell, buscava fazer com que o aluno compreendesse o que fazia e que Matemática estava ele produzindo. O aluno treinava técnicas operatórias que eram utilizadas na resolução de problemas ou para aprender algum conteúdo novo e, assim, "nesta época, começou-se a falar de resolução de problemas como um meio de se aprender Matemática" (ONUCHIC, 1999, p. 201).

Por volta de 1948, no cenário dos Estados Unidos, começou a surgir um currículo de Matemática que contemplava o ensino com compreensão a partir de situações-problema.

Durante as décadas de 1960 a 1970, em que ocorreu o MMM, a Matemática era apoiada em estruturas lógica, algébrica, topológica e de ordem, enfatizando a teoria dos conjuntos. Assim, o ensino de símbolos e da linguagem matemática era forte, porém com pouca compreensão por parte dos alunos. Eles não entendiam muito bem o que os professores falavam, e não viam relação alguma entre a Matemática que viam na escola e aquela usada fora da escola. Repetiam os exercícios e propriedades vistos em aula sem lhes dar significado (ONUCHIC, 1999, p. 202).

No entanto, segundo Onuchic e Allevato (2005), todas essas reformas não tiveram o sucesso esperado. No fim dos anos 70, a Resolução de Problemas ganha espaço, sendo um dos temas do III Congresso Internacional de Educação Matemática, realizado em Karlsruhe, Alemanha, em 1976.

> A importância dada à Resolução de Problemas é recente e somente nas últimas décadas, do século XX, é que os educadores matemáticos passaram a aceitar a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de se resolver problemas merecia mais atenção. A caracterização de Educação Matemática, em termos de Resolução de Problemas, reflete uma tendência de reação a caracterizações passadas como um conjunto de fatos, domínio de procedimentos algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental.

Já, em 1999, Onuchic dizia que:

> Hoje, a tendência é caracterizar esse trabalho considerando os estudantes como participantes ativos, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos e a atividade na resolução de problemas como uma coordenação complexa simultânea de vários níveis de atividade. O ensino de Resolução de Problemas, enquanto campo de pesquisa em Educação Matemática, começou a ser investigado de forma sistemática sob a influência de Polya, nos Estados Unidos, nos anos 60 (ONUCHIC, 1999, p. 203).

No documento *An Agenda For Action: Recommendations For School Mathematics of the 1980s,* o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1980, p.1) recomenda que “a Resolução de Problemas deve ser o foco da Matemática escolar nos anos 1980.” A partir daí começaram a surgir discussões de como desenvolver currículos que abrangessem a resolução de problemas, de como preparar os professores para trabalhar com seus alunos e sobre como o professor poderia elaborar problemas e produzir materiais para seu trabalho em sala de aula. Porém, algumas faltas de concordância, na forma de compreender a Resolução de Problemas como foco da Matemática escolar nos anos 80, surgiram entre os educadores matemáticos.

Schroeder e Lester (1989) apresentaram três modos diferentes de abordar Resolução de Problemas que podem ajudar a refletir sobre essas diferenças “sobre”, “para” e “via”.

O ensino <u>sobre</u> resolução de problemas cuida de se trabalhar com o método empregado por Polya, atendendo as quatro fases elencadas por ele, ou formas de se ensinar a Matemática com problemas, dando ênfase à orientação dos alunos na resolução de problemas. É uma forma de teorizar a Resolução de Problemas.

O ensino <u>para</u> resolução de problemas coloca a Matemática como utilitária, ou seja, ensinar Matemática para resolver problemas. Dessa forma, o conteúdo de Matemática é ensinado pelo professor para que, depois, se possa aplicar seu conhecimento na resolução de problemas.

O ensino <u>via</u> resolução de problemas trata de um ensino em que os problemas são válidos para se aprender Matemática e fazer Matemática, de forma que os alunos aprendam conceitos, procedimentos e conteúdos onde técnicas e propriedades dos conteúdos matemáticos são construídas ao resolver problemas.

2.3.3.2 Alguns benefícios para ensinar Matemática através da Resolução de Problemas

Kahan e Wyberg (2003), em *Mathematics as sense making*[15]*,* apresentam pelo menos três razões podem ser citadas para ensinar Matemática através da resolução de problemas:

1. Ajudar os estudantes a compreender que a Matemática se desenvolve através de um processo de dar sentido
2. Ele ajuda profundamente a compreensão dos alunos nas ideias e métodos matemáticos subjacentes.
3. Ela engaja o interesse dos alunos.

2.3.3.3 Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Ensinar através da resolução de problemas requer uma mudança não apenas na maneira de se ensinar. O professor precisa mudar a filosofia de como ele pensa a aprendizagem e como melhor pode ajudar os estudantes a aprender. Os professores devem selecionar tarefas de qualidade que permitam aos estudantes, através de sua resolução, a se apoiar na Matemática que conhecem para aprender um conteúdo novo e, utilizando suas próprias estratégias, chegar às soluções. Os professores devem desenvolver questões, adequadas e de alta qualidade, que possam levar os estudantes a verificar e relatar suas estratégias de resolução. Esse processo permite que os estudantes compreendam a Matemática em um nível mais profundo.

A escolha da Metodologia Pedagógica foi muito importante para colaborar com o desenvolvimento desta pesquisa. A Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, entendendo “através de” como “ao longo de”, permite a realização de conexões durante o ensino de Matemática:

> Na Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas o problema é ponto de partida e, na sala de aula, através da resolução de problemas, os estudantes devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2005)

---

[15] Publicado em Teaching Mathematics through Problem Solving.

Pironel (2002) teve uma contribuição significante para a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas levando-a para Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Em sua pesquisa ele apresenta a avaliação integrada ao ensino promovendo aprendizagem na sala de aula de Matemática.

De acordo com Allevato e Onuchic (2009) o processo Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas tem sido colocado em prática em diversos trabalhos. No entanto, não há uma forma rígida ou única para isso. Para auxiliar o professor de Matemática, Onuchic, durante o projeto “Ensinando Matemática através da Resolução de Problemas”, em 1998, propôs algumas questões que devem ser feitas pelo professor durante a escolha de um problema:

- Isso é um problema? Por quê?
- Que tópicos de Matemática podem ser iniciados com esse problema?
- Haverá necessidade de se considerar problemas menores (secundários) associados a ele?
- Para quais séries acredita ser este problema adequado?
- Que caminhos poderiam ser percorridos para se chegar à sua solução?
- Como observar a razoabilidade das respostas obtidas?
- Como professor, você teria dificuldade em trabalhar esse problema?
- Que grau de dificuldade acredita que seu aluno possa ter diante desse problema?
- Como relacionar o problema dado com aspectos sociais e culturais?

Onuchic (1999, p. 215) estabelece que “problema é tudo aquilo que não se sabe fazer mas que se está interessado em resolver e que problema passa a ser um ponto de partida.”

A partir da escolha de um problema gerador, Allevato e Onuchic (2009), nos apresentam dez etapas de desenvolvimento da Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas para orientar o trabalho do professor. Essas etapas deverão ser observadas e praticadas durante o processo da resolução do problema gerador.

1. **Proposição do problema:** Selecionar um problema, que denominamos problema gerador, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. É preciso ressaltar que a temática a ser formalizada pelo problema não tenha sido trabalhada ainda pelo professor, mas os estudantes precisam ter condições técnicas de resolver o problema;
2. **Leitura individual**: Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura;
3. **Leitura em grupo**: Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos. Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os estudantes, lendo-lhes o problema. Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os estudantes, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os estudantes, consultar um dicionário;
4. **Resolução do problema**: De posse do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os estudantes, em seus grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os estudantes como coconstrutores da “Matemática nova” que se quer abordar. O problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os estudantes para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula;
5. **Observar e incentivar**: Nessa etapa o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os estudantes, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos estudantes e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor como mediador leva os estudantes a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles. O professor incentiva os estudantes a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os estudantes em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem Matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho;

6. **Registro das resoluções na lousa**: Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os estudantes as analisem e discutam;
7. **Plenária**: Para esta etapa são convidados todos os estudantes para discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os estudantes. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem;
8. **Busca do consenso**: Após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto;
9. **Formalização do conteúdo construído**: Nesse momento, denominado “formalização”, o professor registra na lousa uma apresentação “formal” – organizada e estruturada em linguagem Matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto;
10. **Proposição e resolução de novos problemas**: O professor pode propor novos problemas e/ou exercícios com a finalidade de fortalecer, no aluno, os conceitos formalizados e ampliar seu repertório de estratégias de resolução de problemas.

Sobre a Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas Justulin (2008, p.71) afirma que

> [...] ocorre em um processo “em espiral”, possibilitando que o professor resgate conhecimentos prévios dos estudantes, com participação ativa dos mesmos, e que possa aprofundar e ampliar suas compreensões sobre um conceito, procedimento ou conteúdo matemático.

2.3.3.4 A influência da sala de aula na aprendizagem

O que significa fazer Matemática?

No livro *Elementary and Middle School Mathematics – Teaching Developmentally*, de Van de Walle, Karp e Bay-Willians (2013. p. 13), está escrito que fazer Matemática é mais do que resolver conjuntos completos de exercícios ou processos limitados de explicações do professor. Fazer Matemática significa gerar estratégias para resolver problemas, aplicar abordagens para ver se elas levam a soluções e checá-las para ver se suas respostas fazem sentido. Fazer Matemática na sala de aula deveria modelar plenamente o ato de fazer Matemática no mundo real.

Como deve ser o ambiente de sala de aula para se fazer Matemática?

Nesse mesmo livro encontra-se o seguinte: o ato de fazer Matemática começa com a proposição de boas tarefas e, depois, criar um ambiente em que os estudantes possam correr o risco de errar ou acertar e compartilhem e defendam suas ideias matemáticas. Os estudantes devem estar ativamente engajados na resolução de problemas e o professor propondo questões que encorajem os estudantes a fazer conexões e a compreender a Matemática que estão explorando.

As crianças, em salas de aula de Matemática tradicionais, frequentemente descrevem o fazer Matemática como a imitação daquilo que o professor lhes mostrou, pois os ensinamentos para os estudantes, dados por professores ou em livros-texto, pedem aos estudantes para ouvir, copiar, memorizar, treinar e calcular. Essas são atividades de pensamento de baixo-nível e não preparam adequadamente os estudantes para o verdadeiro ato de fazer Matemática. São os seguintes verbos que engajam os estudantes a fazer Matemática:

comparar	explicar	predizer
conjecturar	explorar	representar
construir	fórmular	resolver
descrever	investigar	usar
desenvolver	justificar	verificar

Esses verbos dão oportunidade a pensamentos de alto-nível e envolvem “dar sentido” e descobrir. Os estudantes engajados nessas ações em sala de aula de Matemática estarão pensando ativamente nas ideias Matemática que estão nelas envolvidas.

Como deve ser o ambiente da sala de aula para se fazer Matemática?

As salas de aula em que os estudantes estão buscando dar sentido à Matemática apresentada não acontecem por acidente – elas acontecem por que o professor estabelece práticas e expectativas que encorajam a correr risco, raciocinar, compartilhar, etc.

A lista abaixo mostra expectativas que são frequentemente esperadas como aquelas que apoiam os estudantes no fazer Matemática:

1) Persistência, esforço e concentração são importantes na aprendizagem de Matemática;
2) Os estudantes devem compartilhar suas ideias;
3) Os estudantes devem ouvir uns aos outros;
4) Erros ou estratégias que não funcionam devem ser oportunidades para a aprendizagem;
5) Os estudantes devem buscar e discutir conexões.

A teoria do Construtivismo sugere que não se pode ensinar aos estudantes apenas falando. Antes, precisa-se ajudá-los a construir suas próprias ideias usando as ideias que eles já têm. Isso não significa simplesmente deixar que os estudantes se sentem e esperem que magicamente descubram novas ideias matemáticas. O Construtivismo fornece percepções sobre como as crianças aprendem Matemática e guias para se usar estratégias instrucionais que comecem com as crianças e não com os professores. O Construtivismo não concorda com a noção de que as crianças são lousa em branco e que absorvem ideias apenas enquanto os professores as apresentam. Pelo contrário, as crianças devem ser criadoras de seu próprio conhecimento. O princípio básico do Construtivismo é simplesmente o seguinte: as crianças constroem seu próprio conhecimento! Na verdade, não apenas as crianças, mas todas as pessoas, o tempo todo constroem ou dão significado às coisas que percebem ou pensam.

Construir ou edificar algo no mundo físico requer ferramentas, materiais e esforço. Como se constroem ideias pode ser visto de uma maneira análoga. As ferramentas que são usadas para construir a compreensão são ideias existentes, o conhecimento que já se tem. Os materiais com que se age para construir o conhecimento podem ser coisas que se vê, ouve ou toca – elementos de próprios pensamentos e ideias. O esforço que se deve fornecer é um pensamento ativo e reflexivo. Se as mentes não estão pensando ativamente, nada acontece. O pensamento reflexivo e a aprendizagem aumentam quando o aprendiz se engaja com outros ao trabalhar as mesmas ideias.

Como o fazer Matemática se relaciona com aprendizagem do aluno?

Teorias de aprendizagem têm sido desenvolvidas através da análise de estudantes enquanto eles desenvolvem novas compreensões. Há duas teorias, o Construtivismo e o Sociocultural, usadas pelos pesquisadores na Educação Matemática para compreender como os estudantes aprendem Matemática. As teorias da aprendizagem deveriam ser pensadas como ferramentas ou lentes para interpretar como uma pessoa aprende. O Construtivismo deveria ser a melhor ferramenta ou lente para pensar como um estudante internaliza uma ideia e a teoria Sociocultural deveria ser uma melhor ferramenta para analisar a influência dos aspectos social/cultural da sala de aula.

O Construtivismo está arraigado no trabalho de Jean Piaget que foi desenvolvido nos anos 1930 e traduzido para o inglês nos anos 1950. No núcleo do Construtivismo está a noção de que os aprendizes não são tábuas rasas, mas que eles são criadores de sua própria aprendizagem.

Do mesmo modo que o trabalho de Piaget se relaciona ao Construtivismo, o trabalho de Lev Vygotsky tem grandemente influenciado a Teoria Sociocultural. O trabalho de Vygotsky emergiu nos anos 1920 e 1930, mas foi somente traduzido para o inglês nos anos 1970.

Há muitos conceitos que essas teorias compartilham (por exemplo, o processo de aprendizagem como uma busca ativa de significado por parte do aprendiz), mas, a teoria Sociocultural tem várias características próprias. Uma delas é que processos mentais existem entre e dentre as pessoas em cenários de aprendizagem sociais e que desses cenários sociais o aprendiz move ideias em seu próprio domínio psicológico. Segundo o modo no qual a informação é internalizada (ou aprendida) depende de saber se ela ocorreu dentro da Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) do aprendiz. Isso é, a ZDP refere-se a uma gama de conhecimento que pode estar fora do alcance para uma pessoa aprender por si mesma, mas é acessível se o aprendiz tiver apoio de seus pares ou de outros bem mais preparados. “O ZDP não é um espaço físico mas um espaço simbólico criado por meio de interações de aprendizes com outros mais bem preparados e a cultura que lhes precedem[16]” (GOOS, 2004, p. 262, tradução nossa)

---

[16] Learning mathematics in a classroom community of inquiry. Journal for Research in Mathematics Education.

2.4 Atividade 4: O Modelo Modificado

2.4.1 A influência de nossos "outros" e o modelo modificado

Ao assumir a Metodologia de Romberg–Onuchic como Metodologia de Pesquisa, tínhamos consciência de que nossa fundamentação teórica, expressa pela compilação de ideias de outros pesquisadores que, conscientemente, buscamos para amparar nossa pesquisa e fortalecer nossas próprias concepções teóricas, poderia transformar nosso Modelo Preliminar e, por consequência, toda a nossa pesquisa.

É preciso ouvir o que outros pesquisadores disseram ou que ainda dizem, para utilizar suas ideias como contributos à nossa própria pesquisa. Essas ideias acabam, invariavelmente, influenciando os caminhos que percorremos durante a realização de nossa própria pesquisa.

Segundo Onuchic e Noguti (2014, p. 61), o pesquisador:

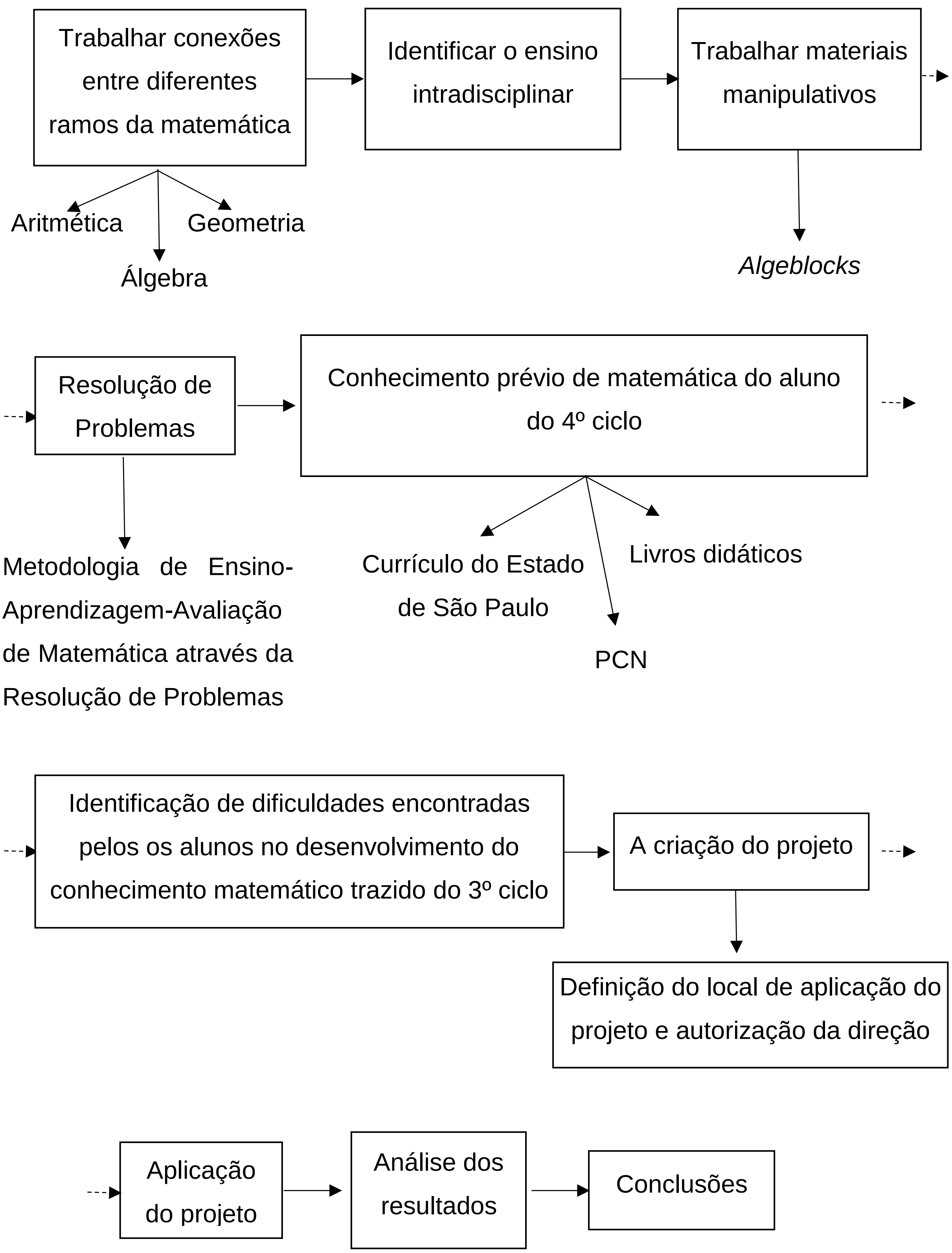
> [...]"ouve" os outros sem se manifestar. Utiliza "recortes" de outros autores ou suas obras para que, num segundo momento, possa se apoiar nas ideias desses autores para a construção de seu *Modelo Modificado* e da *Pergunta de Pesquisa*.

Sabendo o que outros pesquisadores pensam, considerando suas ideias e concepções teóricas, o pesquisador poderá preencher lacunas que porventura possam existir em sua pesquisa e terá condições de ampliar suas próprias ideias e concepções para modificar o seu Modelo Preliminar, ampliando-o, explicando-o ou, mais do que isso, modificando-o e o levando a um Modelo Modificado. (ONUCHIC; NOGUTI, 2014, p. 62).

Foi assim que, após relacionar nosso fenômeno de interesse com ideias de outros, tivemos a transformação de nosso Modelo Preliminar de Pesquisa no seguinte Modelo Modificado:

2.4.2 Modelo Modificado

Figura 20: Modelo Modificado



Fonte: Elaborada pelas autora e orientadora

2.5 Atividade 5: Pergunta da pesquisa

A escolha de uma pergunta para pesquisa, ou de uma conjectura a ser defendida, é uma tarefa delicada porque as perguntas realizadas influenciam diretamente os resultados que serão obtidos, qual seja a relevância da investigação. Segundo Romberg (2007, p. 100-101), "Se questões *críticas* são feitas, então, *fortes* inferências podem ser feitas; caso contrário, um estudo particular pode contribuir pouco para uma cadeia de indagações."

Onuchic e Noguti (2014, p. 63) ainda reforçam que "A *Pergunta de Pesquisa* surge após o pesquisador relacionar seu *Fenômeno de Interesse* e o *Modelo Modificado* com *ideias de outros*.

A partir de tais considerações, pudemos observar criteriosamente nosso Fenômeno de Interesse e nosso Modelo Modificado e, pela relação destes com as ideias de outros pesquisadores, concluímos que para resolver nosso problema de pesquisa, precisávamos encontrar respostas a duas perguntas distintas, que acreditamos sejam complementares. Assim, definimos como *Perguntas da Pesquisa*, os seguintes questionamentos:

1. Como promover o ensino intradisciplinar de Matemática, apoiado na Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas com o uso do material manipulativo *Algeblocks*?
2. O uso do material manipulativo *Algeblocks* e da Metodologia de Ensino - Aprendizagem- Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas permitem motivar os estudantes a aprender Álgebra e perceber as conexões com procedimentos aritméticos e geométricos?

Capítulo 3: 2º Bloco de Romberg- Onuchic: Planejamento para a Resolução do Problema da Pesquisa

3.1 Estratégias e Procedimentos da Pesquisa

3.2 Procedimentos Auxiliares em Ação

3.3 Procedimento Geral em Ação

CAPÍTULO 3: 2º BLOCO DE ROMBERG–ONUCHIC: Planejamento para a Resolução do Problema da Pesquisa

Neste capítulo iniciamos o segundo bloco de Romberg–Onuchic em que as atividades cinco e seis serão desenvolvidas para responder à pergunta da pesquisa. Para o Modelo Modificado, construído no capítulo anterior, devemos definir uma Estratégia Geral (o que fazer) e um respectivo Procedimento Geral (como fazer?), para colocá-los em ação.

> A decisão sobre que métodos utilizar segue diretamente das questões que se selecionam, da visão de mundo na qual essas questões estão situadas, da tentativa de modelo que se tenha construído para explicar o "fenômeno de interesse", e da conjectura que se tenha feito sobre a evidência necessária (ROMBERG, 1992, p.52).

O fluxograma de Romberg–Onuchic (2014) nos apresenta, no segundo bloco, as atividades cinco e seis, que nos dizem "o quê fazer" e "como fazer", respectivamente. Nesse bloco constrói-se uma Estratégia Geral e um Procedimento Geral, que se apoiam nas variáveis do Modelo Modificado para podermos explicar o Fenômeno de Interesse e buscar pela solução do problema, que neste caso é responder a seguinte pergunta:

Como promover o ensino intradisciplinar de Matemática, apoiado na Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas com o uso do material manipulativo *Algeblocks*?

3.1 Estratégias e Procedimentos de Pesquisa

Assim, nossa Estratégia Geral e suas respectivas Estratégias Auxiliares, de acordo com o Modelo de Romberg–Onuchic proposto pelo GTERP (ver página 31 desta dissertação), ficaram definidas da seguinte maneira:

3.1.1 <u>Estratégia Geral (EG)</u>:

Criar e aplicar um projeto de ensino para trabalhar Matemática intradisciplinar fazendo uso de material manipulativo *Algeblocks*

Estratégias Auxiliares (EA)

- **E_{A1}**: Criar um Projeto de Ensino apoiado na Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.
  - ✓ Adotar a Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino;
  - ✓ Escolher problemas geradores para 12 encontros;
  - ✓ Escolher os problemas geradores;
  - ✓ Identificar os objetivos de cada atividade.
- **E_{A2}**: Definir a escola onde se pretende trabalhar.
  - ✓ Conseguir autorização da Direção da Escola;
  - ✓ Pedir autorização para a escola para que eu, enquanto professora pesquisadora, possa desenvolver o Projeto;
  - ✓ Escolher uma sala de aula para aplicar o Projeto.

• **E_{A3}**: Conversar com os estudantes sobre o Termo de Compromisso a ser estabelecido na sala de aula.

Para as estratégias, geral e auxiliares, temos os respectivos procedimentos geral e auxiliares, descritos a seguir:

3.1.2 <u>Procedimento Geral (PG):</u>

A criação e aplicação de um Projeto para trabalhar Matemática intradisciplinar com material manipulativo *Algeblocks* fazendo uso da Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

A fim de estabelecer esse procedimento, houve a necessidade de criar procedimentos auxiliares correspondentes às estratégias auxiliares:

- P_{A1}: A criação do projeto
- P_{A2}: A definição da escola onde esse Projeto será aplicado.
- P_{A3}: Obtenção do consentimento dos estudantes e de seus pais para o desenvolvimento desse Projeto e para a criação de um Termo de Compromisso para conduzi-lo.

3.2 Procedimento Geral em ação

Pondo o Procedimento Geral em ação e, consequentemente, pondo primeiro cada procedimento auxiliar em ação. O Procedimento Geral, neste trabalho, como já foi dito, foi o de identificar a criação e a aplicação de um Projeto para trabalhar Matemática intradisciplinar com o material manipulativo *Algeblocks*, fazendo uso da Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Os Procedimentos Auxiliares: P_{A1}, P_{A2} e P_{A3} foram definidos e, depois, postos em ação. Assim, o Procedimento Geral terá sido posto em ação.

3.2.1 P_{A1}: Criação do Projeto.

O livro *Algeblocks*, de Anita Johnston, da Editora South-Western Publishing Co., de 1994, contém 12 unidades e é destinado a ajudar os estudantes a aprender conceitos algébricos abstratos usando modelos concretos, com blocos manipulativos.

Cada unidade tem seus próprios objetivos e o livro pretende que os alunos, visualmente, tenham uma apresentação concreta de conceitos abstratos.

O tempo destinado para a realização deste Projeto é insuficiente para realizar todas as atividades que o livro oferece. Assim, para nosso Projeto ao trabalhar com alunos de 7ª série/ 8º ano, em cada unidade serão selecionadas algumas atividades em que conexões entre diferentes ramos da Matemática (Aritmética, Álgebra e Geometria) sejam feitas e conceitos sejam construídos pelos próprios alunos, apoiados em nossa metodologia pedagógica, fazendo uso desse material manipulativo.

Enquanto estão usando os *Algeblocks,* os estudantes devem interagir uns com os outros e com o professor. Eles deverão buscar padrões e construir suas próprias definições e significados de conceitos matemáticos. O professor, como facilitador, deverá manter os estudantes trabalhando em suas tarefas, dando-lhes ritmo e estrutura curricular e verificando ativamente se cada estudante construiu “um método novo.” Esse método novo correto não é uma regra aprendida, mas deveria ser verbalizada pelos estudantes e depois aplicado a problemas para levá-los a resultados concretos.

O professor, ao aplicar as atividades dos *Algeblocks* deverá avaliar continuamente o avanço na aprendizagem dos alunos, fruto de um trabalho simultâneo de ensino e aprendizagem e de uma avaliação integrada ao ensino promovendo a aprendizagem do aluno.

Como problemas geradores de novos conceitos e novos conteúdos serão consideradas atividades das 12 unidades do livro *Algeblocks* apropriadas para o 8º ano do Ensino Fundamental.

Unidade 1: Introduzindo os *Algeblocks*

Nessa Unidade os estudantes deverão se tornar familiares com os componentes dos *Algeblocks* quando eles:

1. representam expressões numéricas;
2. usam uma forma retangular para representar um número;
3. representam uma variável;
4. modelam e escrevem expressões variáveis;
5. usam uma base geométrica para modelar termos quadrados e termos cúbicos;
6. demonstram conhecimento em habilidade de comunicação.

Para nosso Projeto decidimos trabalhar todos os itens acima.

Unidade 2: Representando inteiros

Na Unidade 2 é feita uma introdução aos números inteiros. O conceito básico de grandeza, sinal e oposto são explicados. Nessa unidade os estudantes deverão:

1. usar números inteiros para indicar direção e sentido;
2. modelar fisicamente os números inteiros;
3. investigar o significado de oposto.

Em nosso Projeto serão trabalhados os três tópicos descritos acima.

Unidade 3: Adição de Inteiros

Nessa Unidade 3 a adição de inteiros é baseada no conceito de que qualquer que seja a, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$. Para reconhecer esse princípio e usá-lo para adicionar números inteiros, o aluno deverá:

1) modelar situações em que a adição de dois números é zero;
2) adicionar números inteiros;
3) sumariar regras para adicionar números inteiros.

Em nosso Projeto serão trabalhados os três tópicos descritos acima.

Unidade 4: Subtração de Inteiros

Nessa Unidade 4, os estudantes deverão:

1) subtrair números inteiros;
2) comparar subtração com adição do oposto;
3) mudar a subtração para a adição;
4) praticar a adição e a subtração;
5) usar gráficos de barras para exibir os resultados.

Em nosso Projeto serão trabalhados os itens 1, 2, 3 e 4.

Unidade 5: Multiplicação e Divisão de Inteiros

Na Unidade 5 os estudantes deverão:

1) observar padrões para reforçar a multiplicação de inteiros;
2) usar um modelo de área no plano coordenado para multiplicar inteiros;
3) quadrar números inteiros;
4) aplicar e modelar a propriedade distributiva;
5) dividir inteiros.

Em nosso Projeto serão trabalhados os itens 1, 2, 3, 4 e 5.

Unidade 6: Pensando em Variáveis

Na Unidade 6 os estudantes irão:

1) modelar as expressões variáveis usando os *Algeblocks*;
2) avaliar expressões variáveis com potências.

Em nosso Projeto serão trabalhados esses dois itens.

Unidade 7: Adição e Subtração de polinômios

Nessa Unidade 7 os estudantes usarão os *Algeblocks* para executar as seguintes operações com polinômios:

1) reduzir termos semelhantes;
2) classificar polinômios por nome e por grau;
3) achar a oposta de uma expressão polinomial;
4) adicionar polinômios;
5) subtrair polinômios;
6) demonstrar conhecimento nesse tópico.

Em nosso Projeto serão trabalhados todos esses itens.

Unidade 8: Multiplicação com variáveis

Na Unidade 8 os estudantes deverão usar os *Algeblocks* para:

1) multiplicar dois monômios de grau 1;
2) multiplicar um monômio por um binômio;
3) multiplicar dois binômios.

Em nosso Projeto serão trabalhados todos esses itens.

Unidade 9: Divisão com variáveis

Na Unidade Nove os estudantes deverão usar os *Algeblocks* para:

1) dividir dois monômios;
2) dividir um binômio por um monômio;
3) dividir um binômio por um binômio;
4) modelar fisicamente o máximo divisor comum de números naturais;
5) encontrar o máximo divisor comum de monômios;
6) fatorar um binômio;
7) fatorar um trinômio.

Em nosso Projeto serão trabalhados todos esses itens.

Unidade 10: Resolvendo equações

Na Unidade Dez os estudantes deverão usar os *Algeblocks* para:

1) conectar sentenças e símbolos matemáticos;
2) conectar equações e símbolos matemáticos;
3) escrever equações;
4) resolver equações adicionando o mesmo número aos dois membros da equação;

5) resolver equações dividindo pelo mesmo número os dois membros da equação;
6) resolver equações;
7) resolver equações que contem a oposta de uma variável;
8) resolver equações com variáveis nos dois membros da equação;
9) aplicar essas habilidades em resolução de equações para resolver desigualdades.

Esses objetivos não serão desenvolvidos neste trabalho por falta de tempo.

Unidade 11: Uso de variáveis na Geometria.

Na Unidade 11 os alunos deverão usar os *Algeblocks* como modelo visual ajudando em:

1) escrever expressões para perímetro e área quando as dimensões são representadas com varáveis;
2) explorar a relação entre comprimento, largura e área de um retângulo;
3) calcular para achar a área da superfície e do volume do sólido;
4) escrever expressões para a área de uma superfície e o volume do sólido quando as dimensões são representadas com variáveis;
5) explorar a relação entre o volume e as dimensões de um sólido retangular;
6) escrever expressões para área de superfície e volume de cubos quando as dimensões são representadas por variáveis.

Em nosso Projeto serão trabalhados os itens 1 e 2.

Unidade 12: Equação do primeiro grau

Na Unidade 12 os estudantes deverão:

1) encontrar soluções para equações com duas incógnitas;
2) fazer gráficos das soluções de equações com duas incógnitas;
3) resolver uma equação para y;
4) explorar a declividade;
5) usar substituição para resolver um sistema de equações lineares;
6) escrever e resolver um sistema de equações.

Esses tópicos não fazem parte do currículo do 8º ano.

3.2.2 P$_{A2}$: A definição da escola onde esse Projeto será aplicado.

- Escolha da escola;
- Conversa com a Direção da Escola e a apresentação do projeto criado;
- Conversa com o professor responsável pela turma na qual o Projeto será aplicado;

Encontramos um professor nessa escola que se mostrou disposto a disponibilizar 12 aulas do 8º ano do Ensino Fundamental II para a aplicação do projeto proposto por esta pesquisa.

Tendo sido definidos o professor e a sala de aula, foi pedida autorização, à Diretora dessa escola, para a aplicação do Projeto nos moldes propostos. A carta de pedido de autorização enviada à escola segue nos anexos. Esse pedido foi aceito.

Escolha da Escola

A escola em que o projeto foi aplicado é Escola Estadual Carolina Augusta Seraphim. Essa escola está localizada na cidade de Rio Claro – SP, cidade onde se realiza este Trabalho de Mestrado. A pesquisadora soube que a Coordenação da escola e o professor colaborador estavam dispostos a trabalhar a Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Por esses motivos definimos essa escola para realizar a aplicação do projeto. A aulas seriam desenvolvidas no período contrário, ou seja, fora do horário regular oferecido pela escola.

Conversa com a direção da escola

A direção da escola nos deu permissão para trabalhar com os anos do Ensino Fundamental, e escolhemos trabalhar com alunos do 8ºano pois o Projeto Pedagógico do professor das turmas dessa faixa propõe o trabalho do conteúdo de operação de polinômios.

Conversa com o professor

Os professores de Matemática conheciam Resolução de Problemas, porém sem terem amplo conhecimento da Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas adotada pelo GTERP. Entretanto foi interessante que a direção e professores se mostraram dispostos a contribuir com esta pesquisa.

O professor responsável pelas turmas dos oitavos anos nos informou que esses alunos já haviam estudado nas aulas de Matemática: cálculo de perímetro, cálculo de área, encontrar solução para equações do primeiro grau e encontrar soluções para equações incompletas do segundo grau, mas, ele disse que avaliou os alunos em relação a esses conteúdos e a maioria não mostrou domínio.

Frente a essas informações e reconhecendo que esses tópicos seriam pré-requisitos para este trabalho deveríamos preparar as atividades, adequadas ao uso do material *Algeblocks*.

3.2.3 P$_{A3}$: Obtenção do consentimento dos estudantes e de seus pais para o desenvolvimento desse Projeto.

No primeiro encontro com os alunos discutiu-se criar um Termo de Compromisso para conduzir atividades que levassem à produção de dados para a pesquisa, num trabalho visando ao ensino, e à aprendizagem e à avaliação do conhecimento de Matemática a partir dos *Algeblocks*. Dessa forma foi elaborado o seguinte Termo de Compromisso:

TERMO DE COMPROMISSO

Escola: Escola Estadual Carolina Augusta Seraphim
Conteúdo: Números Racionais
Série (Ano): 7ª série (8º ano)
Quantidade de Estudantes: ___ estudantes
Quantidade de Aulas Previstas: ____ horas/aula
Período: ___/___/___ até ___/___/___

Introdução

Este termo de compromisso tem por objetivo estabelecer parâmetros para nortear o desenvolvimento e a organização de um trabalho diferenciado em Matemática, apontando as responsabilidades e os direitos dos estudantes e da professora. O trabalho será realizado na disciplina de Matemática na 7ª série (8º ano) do Ensino Fundamental, em uma escola estadual, localizada na cidade de Rio Claro – SP. Será desenvolvida parte do conteúdo matemático pertinente à 7ª série (8º ano) do Ensino Fundamental, proposto pela instituição, cujo trabalho será aplicado pela pesquisadora e pelo professor da turma, utilizando a Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, sob a observação participante da pesquisadora Lilian Esquinelato da Silva. O trabalho será desenvolvido com o uso do material manipulativo *Algeblocks* (blocos plásticos que representam operações algébricas).

Normas:

- As regras da escola deverão ser obedecidas;
- O trabalho será desenvolvido de forma cooperativa e colaborativa. Os estudantes trabalharão em pequenos grupos, com o objetivo de resolver problemas visando à construção de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos;
- Os grupos serão formados por quatro estudantes, aceitando-se três na impossibilidade de um quarto elemento juntar-se ao grupo, devido à insuficiência do número de estudantes na sala de aula;
- Todos deverão engajar-se na discussão dos problemas apresentados;
- O trabalho individual de cada membro terá um efeito direto sobre o sucesso do grupo;
- Cada grupo deverá entregar as atividades em uma folha separada ao final de cada aula. A pesquisadora tirará xerox das atividades entregues pelos grupos e na aula seguinte as devolverá. Assim, os estudantes poderão ter o registro das atividades em seu caderno.

3.3 Aplicação do Projeto em sala de aula

Uma vez que P_{A1}, P_{A2} e P_{A3} tenham sido postos em ação então o Procedimento Geral poderá ser posto em ação, isto é, o Projeto será aplicado em sala de aula.

O desenvolvimento das atividades selecionadas no livro *Algeblocks* utilizou a Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas conforme o seguinte roteiro:

1. Proposição do problema;
2. Leitura individual;
3. Leitura em grupo;
4. Resolução do problema;
5. Observar e incentivar;

6. Registro das resoluções na lousa;
7. Plenária;
8. Busca do consenso;
9. Formalização do conteúdo construído;
10. Proposição e resolução de novos problemas.

Não foi nossa intenção para essa pesquisa desenvolver todas as atividades do material *Algeblocks.* Isso demoraria muito tempo. Como nossa intenção era fazer conexões entre Aritmética, Álgebra e Geometria, então selecionamos atividades em que pudéssemos realizar e pesquisar o ensino intradisciplinar.

O Projeto foi desenvolvido na escola Carolina Augusta Seraphim em uma turma de 8ºano com o professor responsável Elias, professor efetivo dessa escola. O professor havia consultado os alunos dessa turma falando sobre o Projeto que lá seria desenvolvido em contraturno e no qual seriam trabalhados vários tópicos matemáticos pertencentes ao currículo de matemática do 8º ano usando o material manipulativo. Nove alunos se mostraram interessados.

Tendo 3 conjuntos do material dos *Algeblocks*, a Professora Pesquisadora (PP) acreditou que seria possível trabalhar com esses nove alunos. Ela, que já havia estudado o material, deixou que os alunos percebessem o jogo das cores com as formas dos blocos, por exemplo o verde é a unidade, o x é amarelo e, da mesma cor, são o x^2 e x^3; o y é laranja e ,da mesma cor, o são y^2e y^3. Já combinando x e y, a cor bege está nos blocos xy, xy^2e x^2y.

Cada conjunto do material *Algeblocks* tem:

- 36 blocos verdes que representam a unidade;
- 12 blocos amarelos que representam o x;
- 8 blocos laranjas que representam o y,
- 4 blocos beges que representam o xy;
- 6 blocos amarelos que representam o x^2;
- 4 blocos laranjas que representam o y^2;
- 3 blocos beges que representam o xy^2;
- 3 blocos beges que representam x^2y;
- 4 blocos amarelos que representam x^3;
- 2 blocos beges que representam y^3.

É interessante notar que x, x^2e x^3 têm a mesma cor amarela, que y, y^2e y^3 têm a mesma cor laranja e que xy, xy^2e x^2y tem a mesma cor bege.

Para trabalhar com esse material em sala de aula tem-se que estar atento que um conjunto desse material dá para trabalhar com um grupo de 3 a 5 alunos.

Na descrição dos encontros serão utilizadas as seguintes siglas:

PP para professora-pesquisadora;

G1 para grupo 1;

A1, A2 e A3 para alunos do G1;

G2 para grupo 2;

B1, B2 e B3 para alunos do G2;

G3 para grupo 3;

C1, C2 e C3 para alunos do G3.

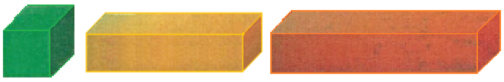
3.3.1 Primeiro encontro

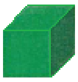
O primeiro encontro foi desenvolvido em duas horas/aula com a presença do professor, Elias, responsável pela turma desses alunos e a PP, que se apresentava para falar de seu Projeto. Foi apresentado aos alunos o material manipulativo *Algeblocks* com o objetivo de ensino-aprendizagem de Matemática. Os alunos puderam conhecer o material, manuseando com curiosidade os blocos que eram apresentados sem saber o que seria feito com eles. Levando os alunos a identificar blocos no espaço, blocos no plano, blocos na reta e o ponto como referência. Identificando ponto, reta, plano e espaço. Assim é possível trabalhar com ponto, comprimento, com comprimento e largura, ou também com comprimento, largura e altura.

E um dos estudantes perguntou se os blocos eram a representação do material dourado. Então, a PP pôde lhes dizer que é um pouco mais que o material dourado, que o material *Algeblocks* trabalha com ponto, reta e plano e espaço. E os conceitos matemáticos serão desenvolvidos conforme as atividades sejam resolvidas e discutidas em grupo.

A PP entregou a seguinte atividade:

ATIVIDADE 1

Atividade utilizando Algeblocks 

Um bloco verde,  *,representa uma unidade ou o número natural ou o número 1.*

- Desta forma, como você representaria o número 12 utilizando os blocos verdes?
- De quantas maneiras você pode dispor estes 12 blocos formando um retângulo?
- Quais as medidas dos lados formados pelos retângulos?
- O que podemos concluir dessas medidas?
- Que números podem ser escritos de mais de uma de forma retangular?
- Que números podem só podem ser escritos por apenas uma forma retangular?

Essa atividade visava conectar Número e Geometria, pretendendo ver em sua representação com números naturais, divisores, operação retangularização, medida da unidade e classificar os números naturais como primos e compostos. Esse problema visa à recuperação de conceitos já trabalhados com esses alunos usando o material de maneira concreta, de maneira a visualizar o conceito.

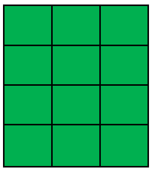
Esta atividade foi realizada com 8 alunos. A turma foi dividida em dois grupos de quatro alunos. Primeiro foi recomentado aos alunos que lessem a atividade individualmente e caso tivessem alguma dúvida que deveriam primeiro consultar os colegas do grupo. Caso continuassem com a dúvida poderiam conversar com a PP.

Após um tempo, a PP observou que os grupos já haviam apresentado algumas respostas então ela iniciou a apresentação das resoluções dos grupos com a seguinte pergunta:

- *Como você representaria o número 12 utilizando os blocos verdes?*

Alguns alunos apresentaram os 12 blocos verdes agrupados em uma forma retangular, com o retângulo todo preenchido com área 12. Como por exemplo é mostrado na Figura 21

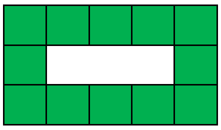
Figura 21: Representação de 12 blocos verdes em um retângulo de área igual a 12



Fonte: Dados da pesquisa

Houve um aluno que fez um retângulo com 12 blocos, dessa forma:

Figura 22: Representação de um retângulo vasado com 12 blocos verdes



Fonte: Dados da pesquisa

A PP perguntou a esse aluno:

-O seu retângulo tem área igual a 12?

- Eu fiz um retângulo com 12 blocos, mas a área total é 15, né professora?

- Por que você está me dizendo que a área é igual a 15?

- Porque para fechar todo retângulo tenho que acrescentar mais 3 blocos...

- Isso, então para esse retângulo de área total igual a 15, quais são as medidas do lado dele?

- São três e cinco.

- Para um retângulo de área 12, quais devem ser as medidas do lado do retângulo?

- Três e quatro?

O estudante mostra usando os blocos verdes a PP confirma positivamente a resposta do aluno.

Depois a PP perguntou aos alunos:

- De quantas maneiras vocês podem dispor esses 12 blocos formando um retângulo?

Os alunos que colocaram os 12 cubos distribuídos formando um retângulo de área 12 logo perceberam que deveriam mostrar outras possiblidades de apresentar o 12 pensando nos resultados da tabuada. E o aluno que apresentou o retângulo vasado com 12 blocos observou que agora nessa pergunta o número 12 referia-se a área do retângulo. Os alunos representaram os retângulos com medidas de $3x4$, $2x6$ e $1x12$.

Na pergunta:

Quais as medidas dos lados formados pelos retângulos?

Alguns alunos colocaram medidas em centímetros, sinalizando que poderiam formar retângulos de $3\ cm$ na vertical e $4\ cm$ na horizontal; $6\ cm$ na vertical e $2\ cm$ na horizontal; ou $1\ cm$ na vertical e $12\ cm$ na horizontal. Eles também apontaram que os retângulos $3\text{x}4$ e $4\text{x}3$ têm a mesma área mas estão representados em posições diferentes.

Na pergunta:

O que podemos concluir dessas medidas?

Houve uma aluna que percebeu e nos disse que o número 1 é o divisor comum de todos os números. Ela notou quando percebeu que os blocos verdes têm medida 1 unidade por 1 unidade por 1 unidade. Ela disse que quando se forma qualquer número inteiro sempre vai depender de quantas unidades há, que nesse caso é representado pelo bloco verde, e assim, pôde-se observar que o número 1 divide todos os números naturais. Um grupo de alunos observou que para formar o retângulo tem que analisar em qual tabuada aparece o valor da área do retângulo que é pedido no problema.

Na pergunta:

Quais são os tipos de números que só podem ser escritos por apenas uma forma retangular?

Nesta pergunta os alunos recorreram aos blocos verdes e foram observando que quando a área do retângulo pode ser apresentada por mais uma forma retangular eles puderam ver que o valor da área é um número "não-primo". Foi dessa forma que os alunos disseram, porque não lembraram da definição de número composto Observaram que quando se apresenta a área do retângulo em mais de uma forma retangular esses números são os divisores do número que mede a área desse retângulo.

Na pergunta:

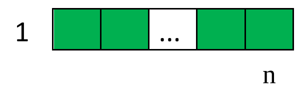
Quais são os tipos de números que só podem ser escritos por apenas uma forma retangular?

Os alunos observaram que são os números primos. E puderam mostrar no concreto que, por exemplo o número 7, só pode ser representado por uma fileira de blocos verde, ou seja um retângulo $7\text{x}1$ ou $1\text{x}7$.

Caso um aluno perguntasse porque esse número se chama primo e ele sabe que "primo é o filho do meu tio e de minha tia" e perguntassem o que isso tem a ver com a Matemática, que resposta lhe daria? Ao se referir aos fatores (divisores) de um número sabe-se que 1 é divisor de todos os números e os números primos além do 1 tem ele mesmo como seu divisor. É o primeiro passo (primo=primeiro). Se tiver mais do que dois divisores, além do 1, ele já não é primo, ele é composto.

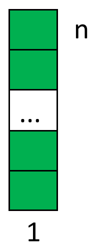
E é possível analisar isso, quando se representam os números com os blocos verdes, pois quando se representa um retângulo cuja área é um número primo só é possível desenhar apenas de uma forma. Ou seja, se o número primo é n, teremos as dimensões do retângulo $nx1$ (n por 1) (no caso 1 por n consideramos o mesmo desenho em uma outra posição).

Figura 23: Retângulo nx1



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 24: Retângulo 1xn



Fonte: Elaborada pela autora

Notamos, nessa primeira atividade, os conceitos de área, de número primo e de número composto, de como podem estar relacionados e as formas de os conectar nos ramos da Matemática: a Aritmética e a Geometria. Os blocos *Algeblocks* ajudaram os alunos a visualizar o significado do divisor de um número e até de que o número 1 é divisor comum a todos números naturais.

Fez parte da nossa metodologia deixar uma tarefa envolvendo as ideias trabalhadas durante a aula para ser realizada como trabalho de casa. Espera-se que o aluno pense no que foi trabalhado na aula e aplique nessa tarefa nova e traga para ser discutida, em classe, no início da aula seguinte.

A professora pesquisadora entregou a cada aluno uma folha com a descrição a atividade extra 1.

ATIVIDADE EXTRA 1---

- Ana comprou quatro lápis idênticos. Quanto ela gastou?

- Vitor pratica tocar guitarra a mesma quantidade de tempo a cada dia. Quanto ele pratica em cada semana?

- Fernanda pedala com sua bicicleta duas vezes mais rápido do que Diego corre. Diego corre duas vezes mais rápido do que Marcos anda. Quão rápido Fernanda pedala de bicicleta em relação a Marcos?

Como você representaria essas situações usando os blocos *Algeblocks*?

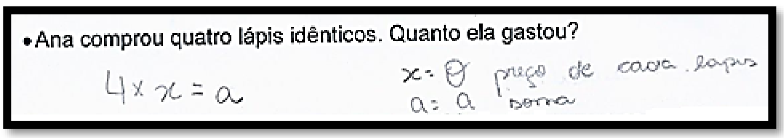
3.3.2 Segundo encontro

O segundo encontro, com 9 alunos uma vez que um aluno da turma se interessou em participar dessa pesquisa, teve início com a discussão da atividade extra 1, deixada como tarefa no primeiro encontro. Um dos alunos afirmou que não daria para resolver o problema porque não tinha o valor dos lápis que Ana havia comprado. Perguntei se realmente precisava apresentar o valor do lápis para saber quanto Ana havia gastado. Eles pensaram. E um aluno perguntou se poderia representar o valor do lápis usando uma letra já que o valor não estava informado. Então PP perguntou se a turma concordava e porquê de se usar uma letra. E um dos estudantes argumentou que a letra iria representar um valor qualquer referente ao lápis, já que no problema não é colocado o valor em reais do lápis.

Percebendo que como o valor gasto não havia sido dado e nem o valor do lápis viram que se necessitava de algo que variava. Lembrando-se do que já havia aprendido em Álgebra puseram uma letra que quase sempre é usada como variável, puseram o x.

Um aluno colocou x para o preço de cada lápis e a para quanto Ana gastou. Assim ficou a representação dele sobre o valor que Ana gastou com os lápis:

Figura 25: Resposta do problema 1 da Atividade Extra 1


- Ana comprou quatro lápis idênticos. Quanto ela gastou?

$4 \times x = a$

x: o preço de cada lápis
a: a soma

Fonte: Dados da pesquisa

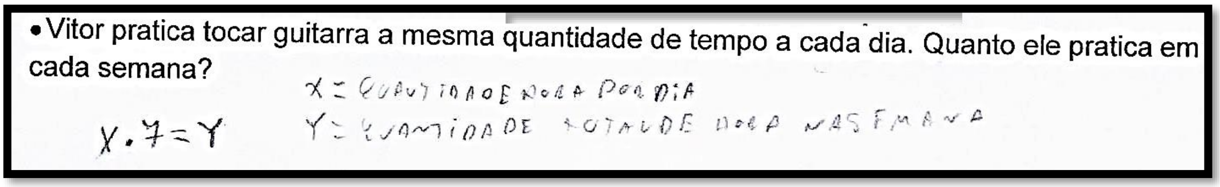
A PP perguntou a esse aluno:

- Por que você representou o gasto que Ana teve dessa forma?

- Porque eu não sei o valor de cada lápis e também não sei quanto Ana gastou ao total. Por isso coloquei x para o valor de cada lápis e a para o valor total que Ana gastou com a compra dos lápis.

Na segunda questão dessa atividade os alunos não tiveram dúvida de representar a quantidade de tempo que Vitor pratica ao tocar guitarra, pois já haviam tirados suas dúvidas no primeiro problema. A seguir um exemplo da resposta:

Figura 26: Resposta do problema 2 da Atividade Extra 1


• Vitor pratica tocar guitarra a mesma quantidade de tempo a cada dia. Quanto ele pratica em cada semana?

X = QUANTIDADE HORA POR DIA

Y = QUANTIDADE TOTAL DE HORA NA SEMANA

X.7 = Y

Fonte: Dados da pesquisa

Observa-se que eles também apresentaram x para o número de horas que Vitor pratica tocar guitarra e y para o número total que Vitor pratica guitarra em uma semana.

Nesse momento o professor poderia aproveitar para falar sobre a operação multiplicação: multiplicador faz a ação, diz quantas vezes se toma o multiplicando como parcela e multiplicando sofre a ação. Por exemplo $3 \times 5 = 5 + 5 + 5$ e $5{\times}3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$. O resultado é o mesmo mas os problemas são diferentes. Logo, x.7 seria $\underbrace{7 + 7 + 7 + 7 + \cdots 7}_{\text{x}}$ e $7.x = x + x + x + x + x + x + x$

A terceira pergunta era: Fernanda pedala com sua bicicleta duas vezes mais rápido do que Diego corre. Diego corre duas vezes mais rápido do que Marcos anda. Quão rápido Fernanda pedala de bicicleta em relação a Marcos?

Após um tempo de resolução a PP pergunta aos grupos:

- Quão rápido Fernanda pedala de bicicleta em relação a Marcos?

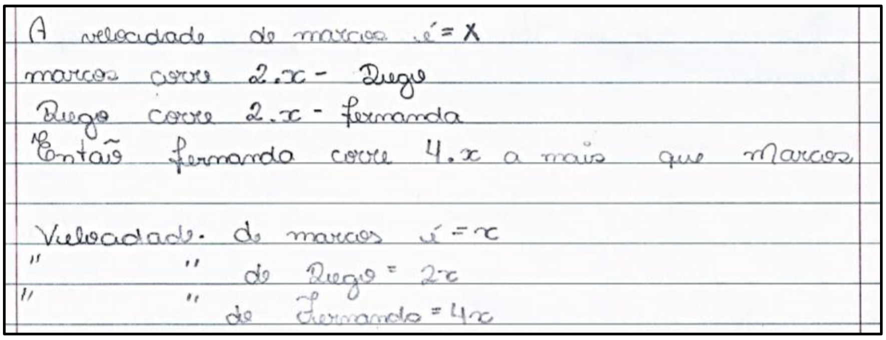
- Quatro vezes a mais que Marcos. – Responde um dos alunos do G2.

- Como vocês chegaram a essa conclusão?

- Porque colocamos que a velocidade de Marcos é igual a x. Como Diego corre duas vezes a mais que Marcos, então Diego corre 2 vezes x, ou seja, $2x$. E Fernanda corre duas vezes a mais que Diego, então Fernanda corre 2 vezes a velocidade de Diego. Como a velocidade de Diego é $2x$, então Fernanda corre 4 vezes a mais que Marcos, ou seja, $4x$.

Seguem as resoluções da atividade 3 dos grupos:

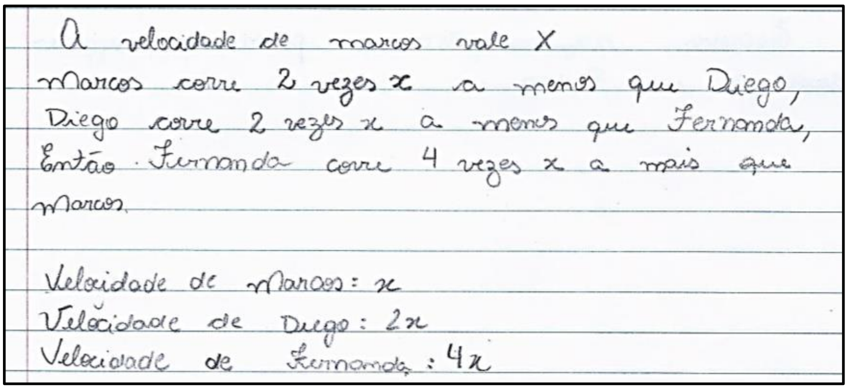
Figura 27: Resposta da Atividade extra 1 do G1


A velocidade de marcos é = X
marcos corre 2.x - Diego
Diego corre 2.x - fernanda
Então fernanda corre 4.x a mais que Marcos

Velocidade de marcos é = x
" " de Diego = 2x
" " de Fernanda = 4x

Fonte: Dados da pesquisa

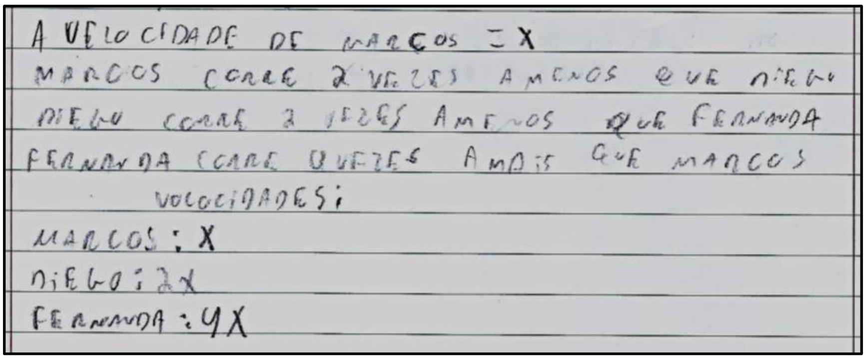
Figura 28: Resposta da Atividade extra 1 do G2


A velocidade de marcos vale X
Marcos corre 2 vezes x a menos que Diego,
Diego corre 2 vezes x a menos que Fernanda,
Então Fernanda corre 4 vezes x a mais que
Marcos.

Velocidade de Marcos: x
Velocidade de Diego: 2x
Velocidade de Fernanda: 4x

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 29: Resposta da Atividade extra 1 do G3


A VELOCIDADE DE MARCOS = X
MARCOS CORRE 2 VEZES AMENOS QUE DIEGO
DIEGO CORRE 2 VEZES AMENOS QUE FERNANDA
FERNANDA CORRE 4 VEZES AMAIS QUE MARCOS
VELOCIDADES:
MARCOS: X
DIEGO: 2X
FERNANDA: 4X

Fonte: Dados da pesquisa

Essas atividades serviram para que os alunos representassem um valor desconhecido do problema utilizando uma letra e resolvendo-os apenas algebricamente seguindo um modelo que possivelmente teria sido ensinado pelo professor. Todos usaram a mesma forma de resolução. Aproveitamos para resolver esse problema usando os *Algeblocks* de modo a ver, concreta e visualmente, a forma de resolução que os alunos usaram quando resolveram o problema com o conhecimento algébrico que traziam.

Como parte da questão a PP perguntou:

-Como você representaria essas situações usando os blocos dos Algeblocks?

Os alunos perguntaram se tinha diferença em usar o bloco laranja ou o bloco amarelo. A PP disse que depende da interpretação que eles forem dar.

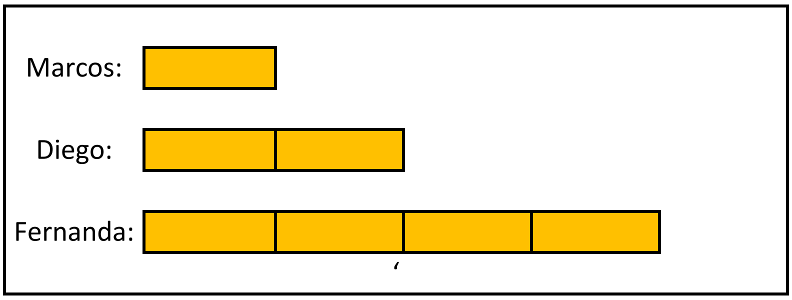
- O que representa o bloco laranja ou o bloco amarelo nesse problema?

- Estará representando a velocidade de Marcos.

- Certo, então como vocês representariam a velocidade de Diego usando os Algeblocks?

Após essa conversa os alunos representaram as velocidades dos personagens do problema como é mostrado na figura 28.

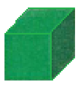
Figura 30: Problema de tempo percorrido usando os *Algeblocks*

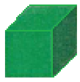
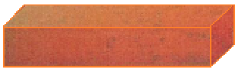


Fonte: Elaborada pela autora

A aula continuou e passou-se a trabalhar a Atividade 2

ATIVIDADE 2

- É preciso quantos blocos verdes  para representar o bloco amarelo  ?
- O bloco amarelo está entre quais números inteiros?

- É preciso quantos blocos verdes  para representar o bloco laranja  ?
- O bloco laranja está entre quais números inteiros?
- O que podemos concluir dos blocos amarelo e laranja?
- Como você representaria 3x e 8y utilizando os blocos dos *Algeblocks*?

Os alunos fizeram comparações com os blocos amarelos e verdes. E um estudante já respondeu a primeira pergunta:

- O bloco amarelo é representado por 3 blocos verdes.

Um outro estudante discorda:

- Não é exatamente 3 e nem 4. O bloco amarelo está entre 3 e 4. Pode ser 3 e meio professora?

- É possível medir esse pedacinho que falta se a única medida que temos é o bloco verde? – Perguntou a PP.

- Posso usar a régua? – Perguntou o aluno.

- Pode usar, mas se você não tivesse a régua, seria possível dar um valor exato para esse pedacinho que falta?

Um outro estudante responde:

- Posso chamar então de x?

- Por que você quer chamar o bloco amarelo de x? – Pergunta a PP.

- Porque eu não sei o valor exato desse bloco amarelo.

A PP pergunta para a classe se alguém concorda. E os alunos concordam com esse pensamento. Há um grupo que pergunta a PP:

- Posso chamar só o pedacinho que falta de x? Porque eu sei que o bloco amarelo tem 3 blocos verde... só não sei esse pedacinho.

- Faz sentido o que você diz, podemos ver que o bloco amarelo contém 3 blocos verdes mais um espacinho... mas mesmo assim o valor total do bloco amarelo eu desconheço, por isso vamos chamá-lo de x.

Um outro aluno pergunta:

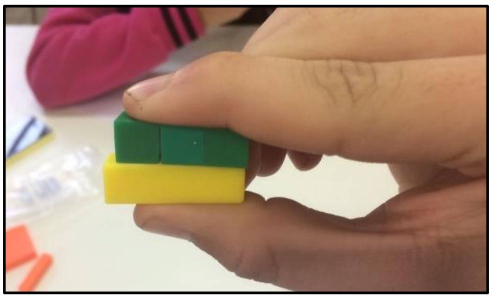
- Isso vale para o bloco laranja, professora?

- O que vocês acham? – Pergunta a PP para a turma.

Da mesma maneira os alunos observaram que o bloco laranja ficava entre os a quantidade de 4 blocos verdes e 5 blocos verdes, e que não era possível determinar um número inteiro para o bloco laranja. Então depois das discussões foi denominado para o bloco laranja o valor ***y***.

Alguns alunos disseram que o bloco amarelo era 3 blocos verdes mais uma “quirelinha” por isso teria o tamanho ***x***. Da mesma forma o bloco laranja tem o tamanho de 4 blocos verdes mais uma “quirelinha” e por isso teria o tamanho ***y***, outra variável, pois essa “quirelinha” pode variar.

Figura 31: Comparação do bloco amarelo com os blocos verdes (variável x)



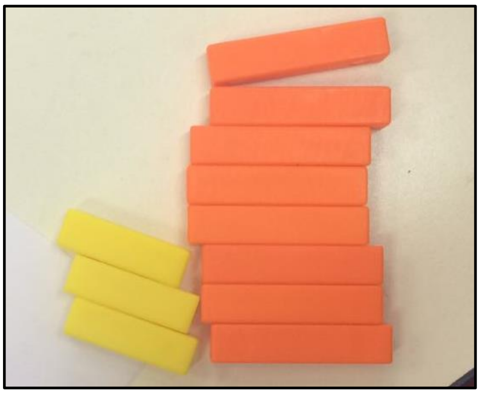
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 32: Comparação do bloco laranja com os blocos verdes (variável y)

Fonte: Dados da pesquisa

Para representar $3x$ eles usaram 3 blocos amarelos e para representar o $8y$ foi representado por 8 blocos laranjas.

Figura 33: Representação de 3x e 8y usando os *Algeblocks*



Fonte: Dados da pesquisa

3.3.3 Terceiro encontro

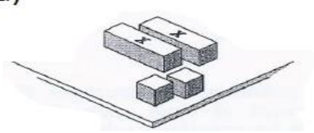
No terceiro encontro foi apresentada a atividade 3 para representar expressões algébricas usando os *Algeblocks.*

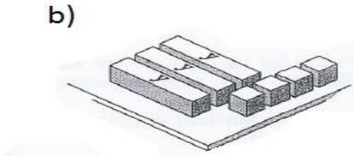
Então a PP entregou aos estudantes a seguinte atividade.

ATIVIDADE 3

- Como você representaria as seguintes expressões utilizando os blocos dos *Algeblocks*?
    - $x+3$
    - $2x+1$
    - $3y$

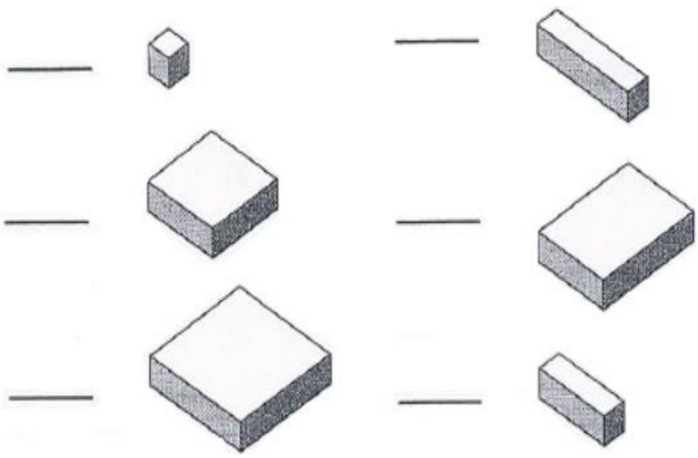
- Escreva as expressões algébricas pertinentes a cada representação:

a)


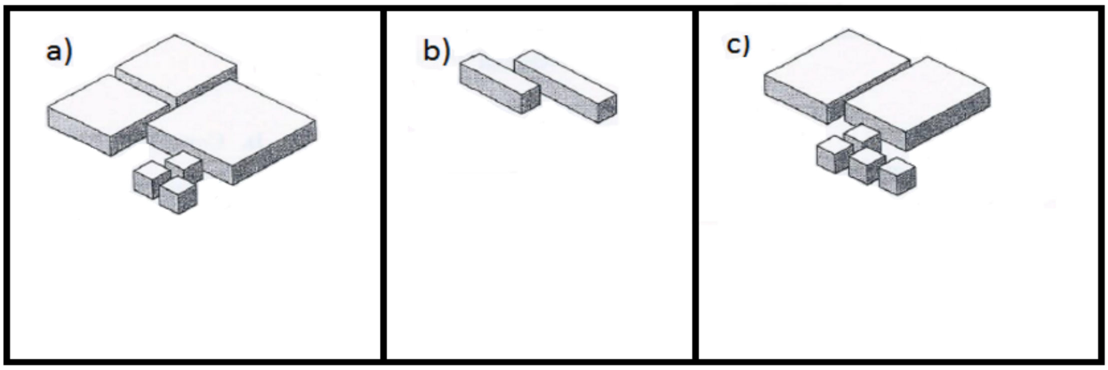
b)


- Complete as lacunas com as correspondentes opções:

x **x²** **1** **y** **y²** **xy**



• Escreva as expressões algébricas de cada item:



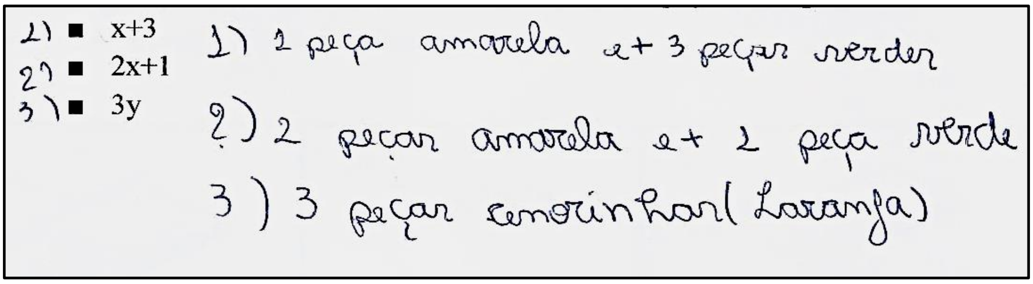
• Represente utilizando os blocos verdes, amarelos e laranjas as seguintes expressões algébricas:

- $3x^2 + 1$
- $x^2 + xy$
- $y^2 + 4$
- $3xy + x$

Essa atividade deu espaço aos alunos para manipularem os blocos *Algeblocks* e fazerem as representações de expressões algébricas.

A seguir apresenta-se as resoluções das questões da atividade 3 feitas pelos alunos. Ao representar as expressões ***x+3***; ***2x+1*** e ***3y*** alguns alunos resolveram representar desta forma:

Figura 34: Resposta da Atividade 3

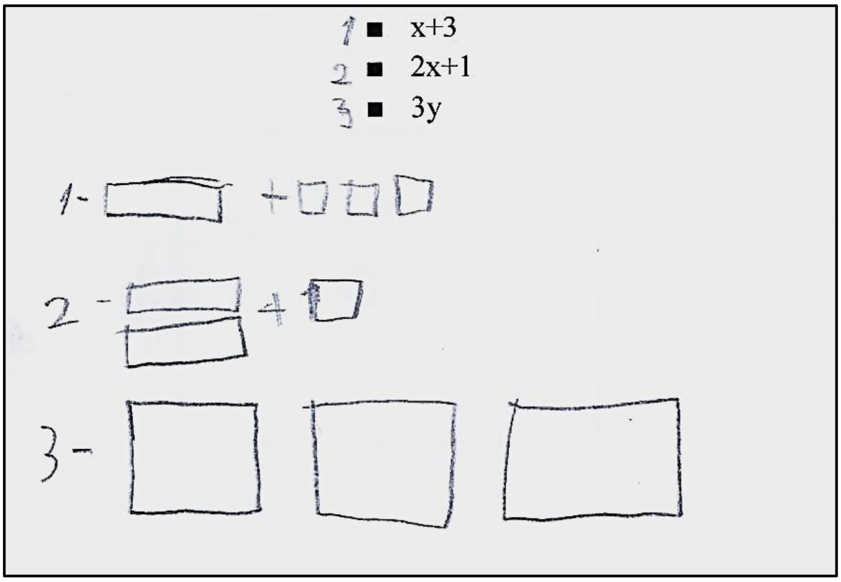


Fonte: Dados da pesquisa

Aqui podemos notar que houve um grupo que quis dar outra nomenclatura aos blocos. Por exemplo, chamou-se o bloco laranja que representa a variável y de “cenourinha.”

Outro aluno preferiu desenhar os blocos:

Figura 35: Resposta da Atividade 3



Fonte: Dados da pesquisa

Nota-se que o estudante representou as expressões algébricas por meio de desenho. Para $x + 3$ o estudante faz uma representação do bloco amarelo mais 3 blocos verdes. Para $2x + 1$ ele faz uma representação de dois blocos amarelos e mais um bloco verde. Mas para $3y$ essse estudante acabou comentendo um erro ao representar o $3y$ usando a representação do y^2. Então a PP pergunta ao estudante:

- Porque você representou o 3y dessa forma?

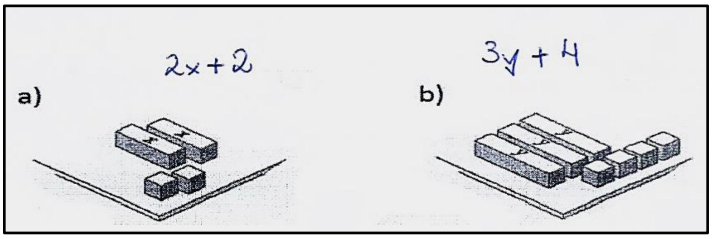
Imediatamente o estudante respondeu:

- Professora, me confundi. Havia pensando que era x^2.

E realizou a correção realizando um desenho representando o bloco laranja.

Na seguinte questão, a maioria dos alunos não teve dificuldade e a representação algébrica ficou dessa maneira:

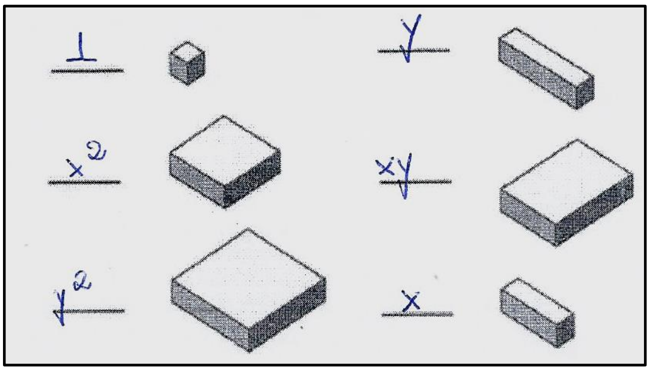
Figura 36: Resposta da Atividade 3



Fonte: Dados da pesquisa

E também na nomenclatura de cada bloco no geral os alunos entenderam o que cada bloco representava. Houve algumas dúvidas em relação ao desenho qual representava x e qual representava y, acredito que se tivesse colorida a folha facilitaria as respostas. A seguir a resposta dessa atividade dada por um aluno:

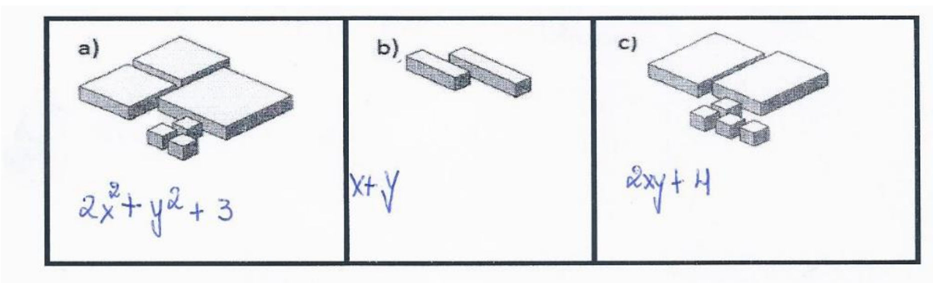
Figura 37: Resposta da Atividade 3



Fonte: Dados da pesquisa

Após terem tirado dúvidas a respeito das representações em desenho de cada bloco, na seguinte questão em que pedira para representar algebricamente os desenhos os alunos não tiveram dificuldade em responder. A seguir a resposta do grupo G3:

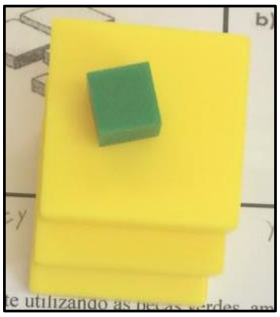
Figura 38: Resposta da Atividade 3



Fonte: Dados da pesquisa

A última questão pedia para representar as expressões algébricas usando os *Algeblocks.* Os G1 e G3 apresentaram seus resultados da última questão assim:

Figura 39: Representação de $3x^2 + 1$ usando os *Algeblocks*

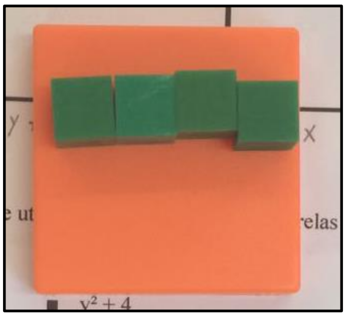


Fonte: Dados da pesquisa

Figura 40: Representação de $x^2 + xy$ usando os *Algeblocks*

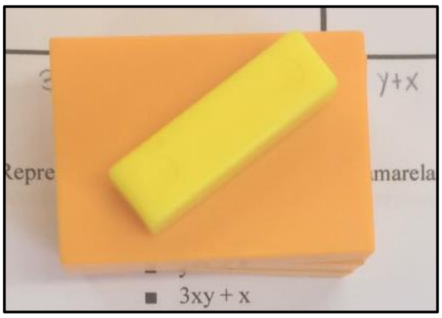
Fonte: Dado da pesquisa

Figura 41: Representação de $y^2 + 4$ usando os *Algeblocks*



Fonte: Dados da pesquisa

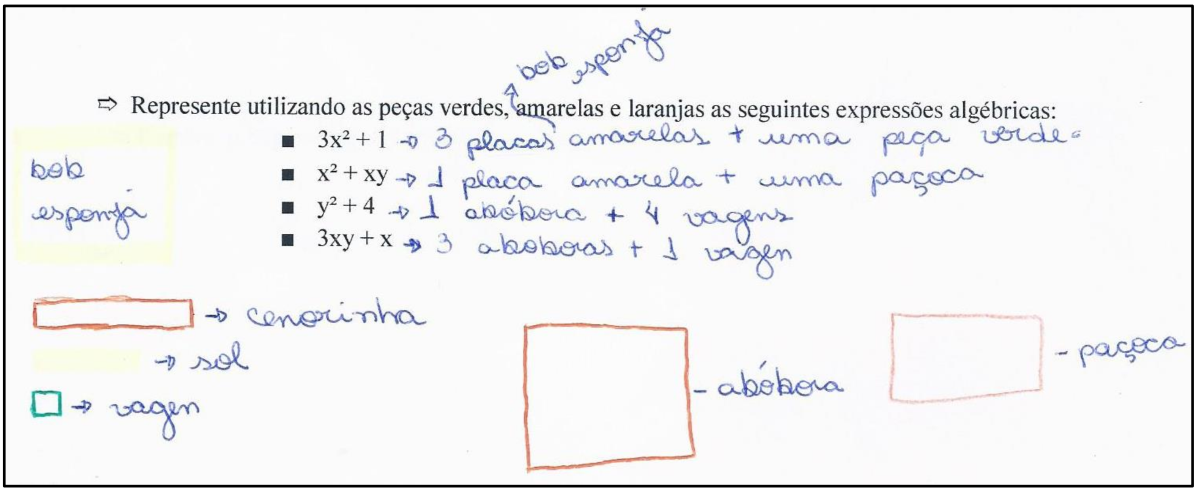
Figura 42: Representação de 3xy+x usando os *Algeblocks*



Fonte: Dados da pesquisa

O grupo G2 decidiu apresentar a resposta de uma outra forma:

Figura 43: Representação da Atividade 3 com nomenclaturas sugeridas pelos estudantes



Fonte: Dados da pesquisa

Esse grupo apresentou em sua resposta outras nomenclaturas para os blocos. A PP achou interessante que esse grupo apresentou outras nomenclaturas aos blocos, mas ela disse aos estudantes que eles deveriam também associar esses blocos aos termos algébricos. Nota-se que acordo com a nomenclatura "nova" adotada pelo grupo eles conseguiram representar os três primeiros itens, e após a análise da atividade a PP observou que no último item, de acordo com a nomenclatura dada ao grupo, deveria ser $3xy + x$ = "3 paçocas + 1 vagem."

Pode-se notar que nessa atividade apareceu conexão entre Geometria e Álgebra quando foi apresentado o $\boldsymbol{x^2}$ na forma de um quadrado de lado $\boldsymbol{x}$, o $\boldsymbol{y^2}$ representado por um quadrado de lado $\boldsymbol{y}$ e o $\boldsymbol{xy}$ representado por um retângulo de lados $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.

3.3.4 Quarto encontro

O quarto encontro teve como objetivo trabalhar números inteiros fazendo uso dos blocos dos *Algeblocks*. Segundo nossa Metodologia a aprendizagem deverá ocorrer a partir da resolução de um problema. Com essa ideia espera-se que os alunos se recordem do conjunto dos números inteiros

No início desse encontro a PP entrega a seguinte atividade aos estudantes, que estão em grupo:

ATIVIDADE 4

Qual os significados de número positivo e número negativo? Vamos pensar nesta questão realizando o próximo problema.

Vamos utilizar o oceano como valor posicional do nosso Gráfico do Nível do Mar. Desenhe os seguintes itens utilizando as indicações de distâncias:

- uma nuvem a 80 m acima do nível do mar.
- um peixe em 6 m abaixo do nível do mar.
- um mergulhador em 15 m abaixo do nível do mar.
- um pássaro em 6 m acima do nível do mar.
- um submarino a 30 m abaixo do nível do mar.

Gráfico do Nível do Mar (medida em metros)

80

18

12

6

~~~~~~~~0~~~~~~~

- 6

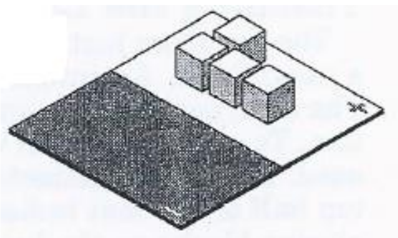
-12

-18

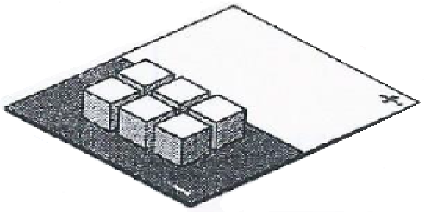
-80

Se o mergulhador estiver localizado a 5 metros abaixo do nível do mar e a nuvem localizada a 80 metros acima do nível do mar, a qual distância o mergulhador viria a nuvem?

- Como você representaria o número oposto que está descrito na figura?


~~~~~~~~

- Use o espaço de mais e menos e os blocos para representar cada um dos itens.

a) 5	b) -4 e 6
c) um ganho de 5 metros	d) perdi 2 pontos
e) Que número inteiro representa o desenho ao lado? 	

- Agora utilizando também os blocos que representam variáveis e o espaço de mais e menos para representar cada um dos itens. Esboce a sua resposta.

a) x	b) 2x+5
c) -7y	d) 3-x

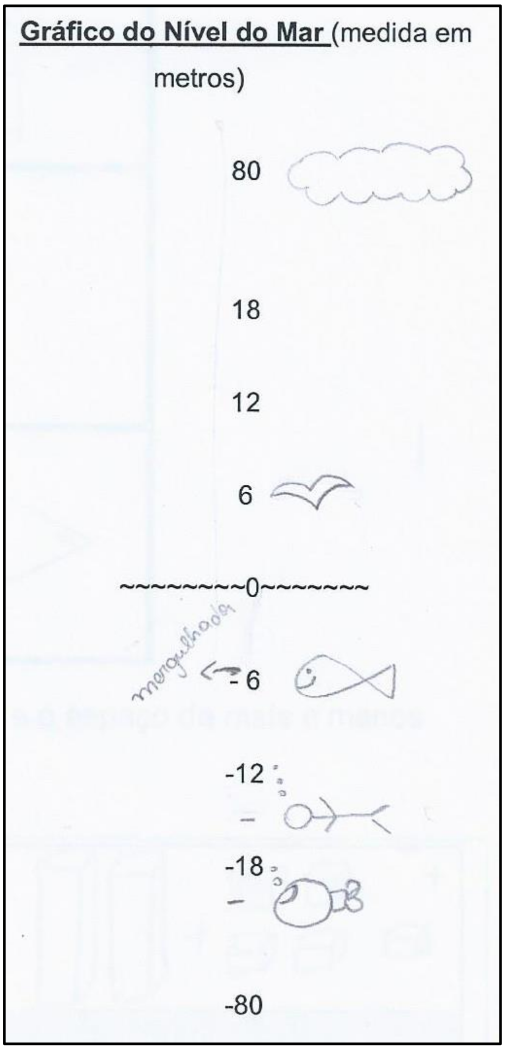
Na questão de localizar os itens no Gráfico do Nível do Mar um dos alunos questionou como ele faria para representar o mergulhador que está a $15m$ mas não há a representação do -15 no gráfico. Então um dos estudantes respondeu:

-Você pode identificar que -15 fica entre -12 e o -18.

Assim, o estudante teve sua dúvida solucionada. E aproveitou para marcar os pontos $-15\ m$ e $-30\ m$ no gráfico.

A PP pede para que alguém apresente os itens pedidos no problema representados no gráfico do Nível do Mar. O G2 apresenta a seguinte resposta:

Figura 44: Representação da Atividade 4 – Gráfico do Nível do Mar



Fonte: Dados da pesquisa

Os outros grupos apresentaram respostas similares. Quando foi feita a pergunta da distância que o mergulhador veria a nuvem quando estivesse a $5\,m$ abaixo do nível do mar e a nuvem a $80\,m$ acima do nível do mar muitos alunos ficaram em dúvida sobre a conta que deveriam fazer. Eles achavam que deveriam calcular a diferença das posições de cada um. Isto é, eles estava apenas pensando nos números 80 e -5. Mas alguns alunos estavam em dúvida de considerar o mergulhador estar na posição 5 ou -5.

A PP perguntou:

- A qual distância a nuvem está do nível do mar?

Alguns dos alunos responderam:

- 80m

- Qual a distância do mergulhador até o nível do mar?

- 5 m.

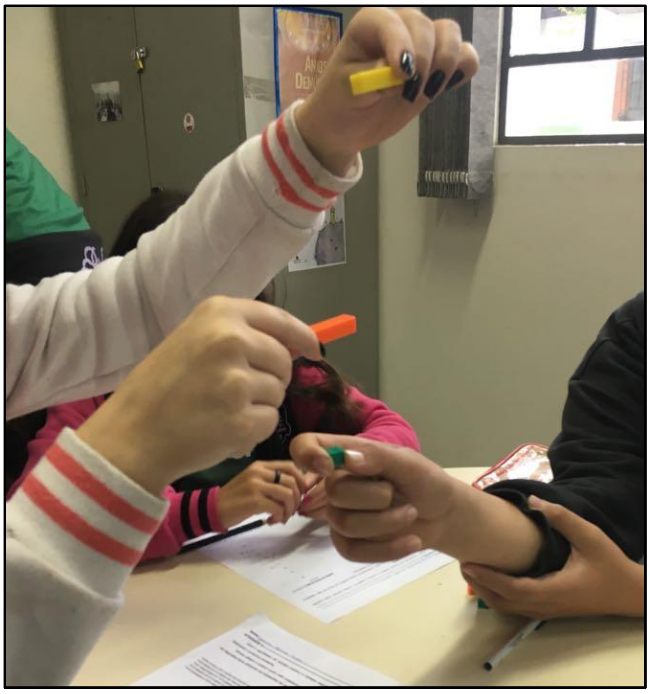
- E agora? Qual é distância que o mergulhador veria a nuvem?

Eles perceberam que seria $85\ m$, mas ainda tinham a dúvida sobre qual conta deveriam fazer, até eles perceberam que deveriam fazer:

$$80m - (-5m) = 80m + 5m = 85m$$

O grupo G2 quis representar essa diferença usando os blocos *Algeblocks* trabalhou assim: considerou o bloco amarelo representando a nuvem, o bloco laranja representando o nível do mar; e o bloco verde representando o mergulhador. E os estudantes explicaram dizendo que a distância do bloco amarelo até o bloco laranja tinha $80\ m$ e a distância do bloco laranja até o bloco verde tinha $5\ metros$. E eles adicionaram as distâncias $80m + 5m$ e resultou em 85m, como pode-se notar na Figura 43.

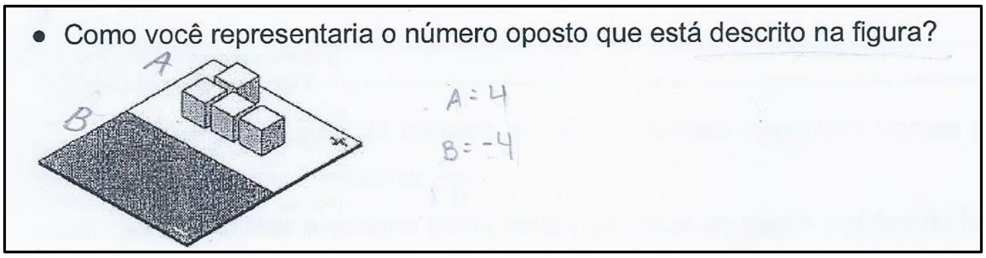
Figura 45: Representação da Atividade 4 – Gráfico do Nível do Mar – estudantes



Fonte: Dados da pesquisa

A questão seguinte pedia para representar o número oposto. Alguns alunos representaram na folha de apoio dos *Algeblocks* e outros fizeram anotações como é mostrado na figura 44:

Figura 46: Representação da Atividade 4 – representar o número oposto

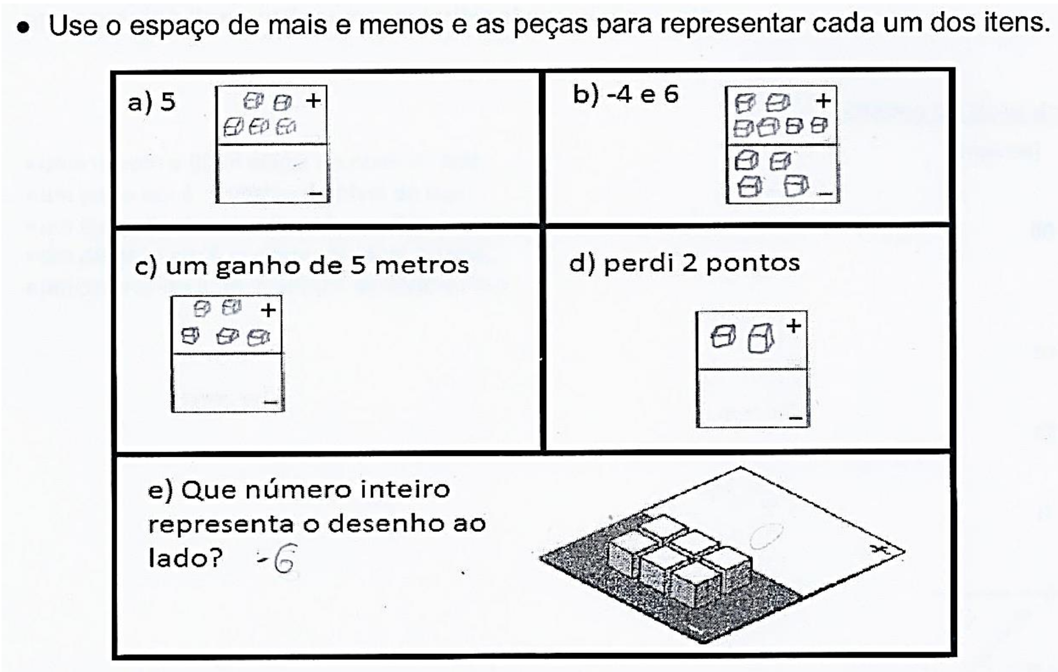


Fonte: Dados da pesquisa

Esse aluno sentiu a necessidade de representar tanto o número na figura e também o seu oposto.

Na questão seguinte pediu-se aos alunos para representar o número positivo e um número negativo, os alunos em não geral não apresentaram dificuldade. Mas o aluno C2 do grupo G3:

Figura 47: Representação da Atividade 4 – representar os números inteiros na folha de apoio



Fonte: Dados da pesquisa

Nota-se que nessa resposta o estudante apresentou um equívoco ao representar “perdi 2 pontos”. A PP questiona o estudante:

*- Quando uma sentença apresenta "um ganho" de algum número, em qual dos lugares (*aponta a PP para a folha de apoio positivo e negativo) *você representa esse ganho?*

- Na parte positiva.

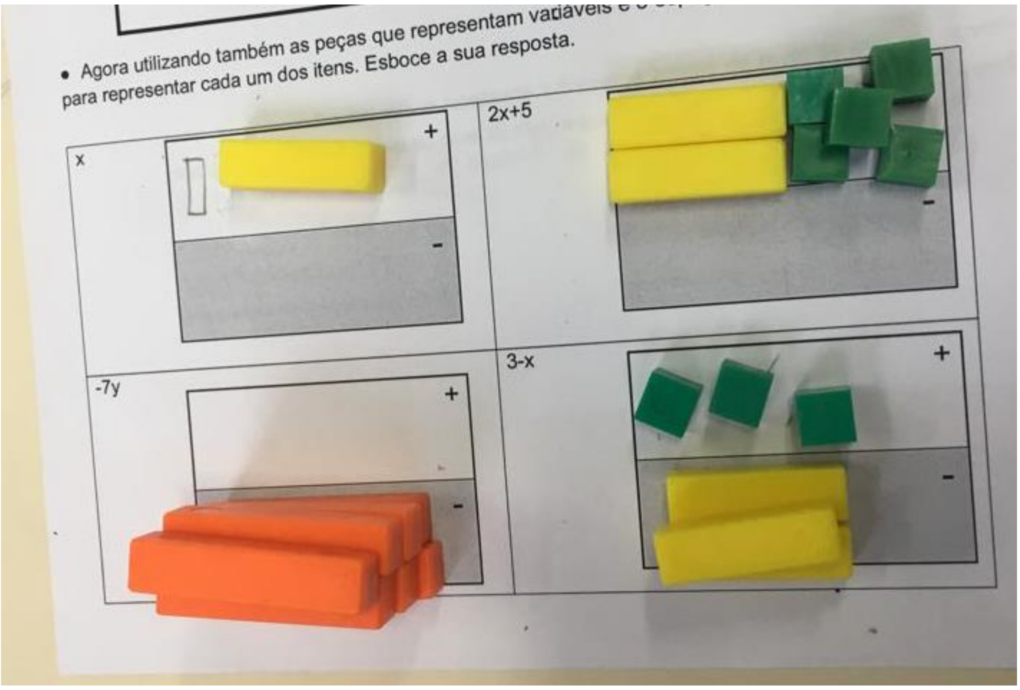
- E como na parte negativa, você poderia me dar um exemplo de número que é representado na parte negativa?

- Ah, então é para representar o "perdi 2 pontos" aqui (o estudante aponta para a parte negativa)

A PP confirma a afirmação do estudante e ele faz a correção na folha de apoio do *Algeblocks.*

A quarta questão dessa atividade 4 pede para representar expressões algébricas fazendo uso dos blocos dos *Algeblocks*. O grupo G1 apresentou assim sua resposta:

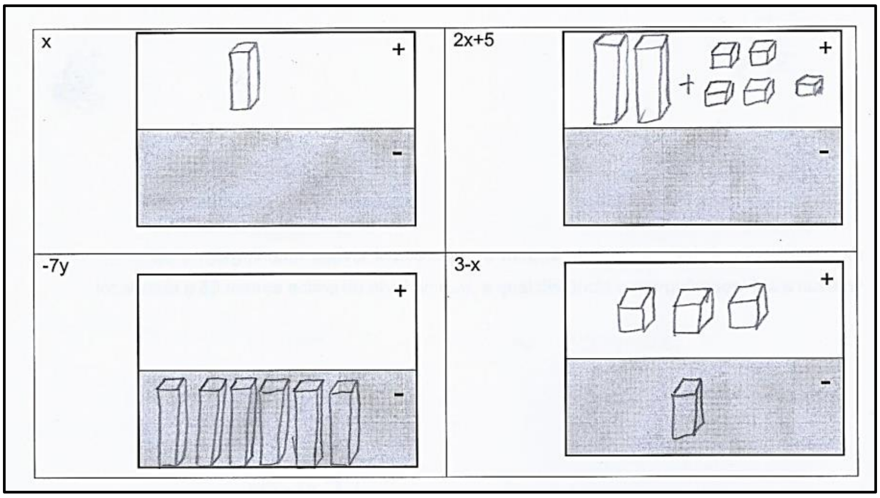
Figura 48: Resposta dos alunos da Atividade 4 – expressões algébricas com os *Algeblocks*



Fonte: Dados da pesquisa

O grupo G2 representou a resposta desenhando os blocos:

Figura 49: Resposta dos alunos da Atividade 4 – representado por desenho



Fonte: Dados da pesquisa

Nota-se que na Figura 47 o estudante representou todos os blocos em desenho. No item que pede para representar $-7y$ o estudante esqueceu de desenhar mais um bloco representando o $-y$. Esse estudante percebeu o equivoco no momento da plenária.

3.3.5 Quinto encontro

O objetivo do quinto encontro foi o trabalhar a adição de números inteiros, resolver expressões numérica e a multiplicação de números inteiros fazendo uso do material manipulativo *Algeblocks.*

ATIVIDADE 5

Adição de números inteiros:

Essa unidade trata de somas que resultam em zero. Depois de praticar a operação de adição com o modelo físico, aos estudantes se pede para generalizar suas observações para regras da adição de inteiros.

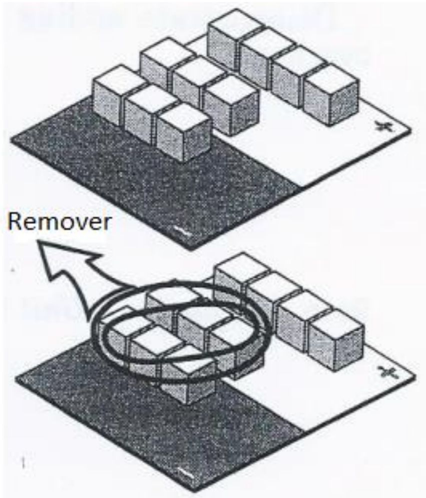
Por exemplo, qual o valor de $-3 + 7 =?$

Na seguinte figura vemos a representação da operação $-3+7$. Essa operação associa uma unidade do lado negativo com uma unidade do lado positivo assim temos o resultado igual a zero, +1-1. Repete-se esse procedimento até que se encontre a maior soma igual a zero, a soma de qualquer número com seu oposto sempre resulta em zero. Portanto, $-3+7=4$ (4 unidades positivas).

Primeiro coloque na folha de apoio os blocos representando a situação-problema.

Depois perceber que 3 blocos unitários de cada lado positivo adicionado com 3 blocos do lado negativo resulta em uma soma zero.

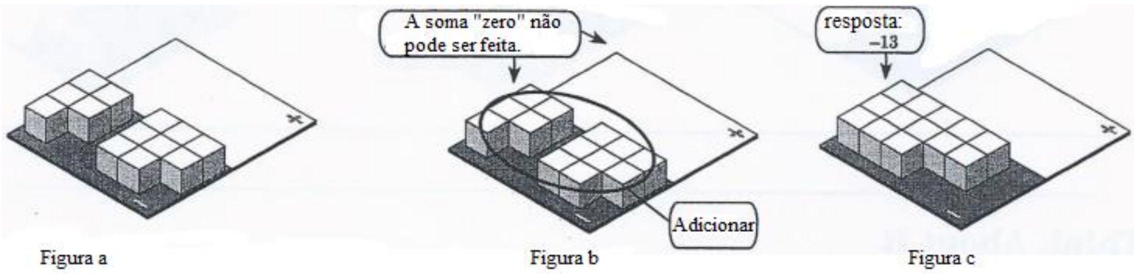
Figura 50: Adição de inteiros



Fonte: Retirado do livro *Algeblocks*

Para encontrar o valor de $(-5) + (-8)$ faremos os seguintes passos:

Figura 51: Adição de inteiros



Fonte: Retirado do livro *Algeblocks*

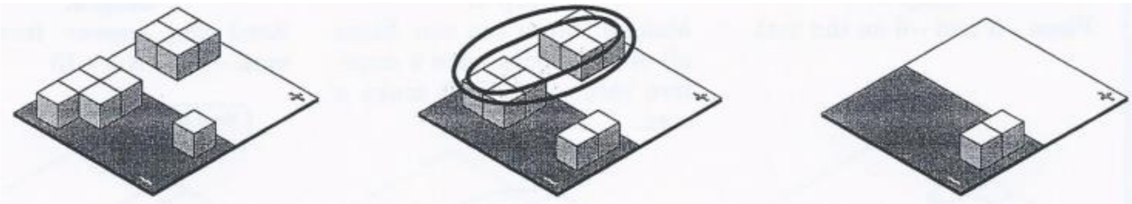
$$(-5) + (-8) = (-13)$$

• Usando a folha de apoio de positivo e de negativo e os blocos verdes responda as seguintes questões e escreva as respostas usando números inteiros:

a) $-2 + 6 + (-4) - 1 =$ __________ b) $5 + -(2 + 1 - 3) - 2 =$ ___________

• **Atividade:** Escreva um problema para situação abaixo:

Figura 52: Atividade para escrever uma situação problema usando as figuras abaixo:

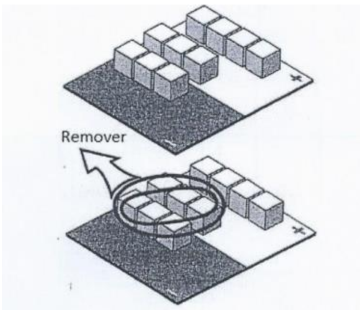


Fonte: Retirado e adaptado do livro dos *Algeblocks* (p.28)

Nessa atividade há uma explicação de como se realiza a adição de números inteiros usando os *Algeblocks.* Quando temos a seguinte operação $-3+7$ devemos realizar a adição dessa forma:

$$-3+7=-3+3+4=(-3+3)+4=0+4=4$$

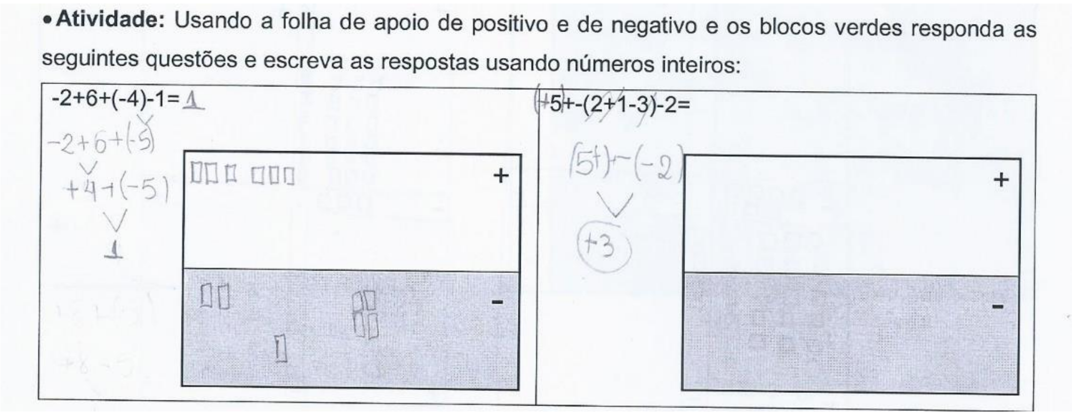
Buscando um resultado de soma igual a zero como é explicado no seguinte desenho:



Nesse momento os alunos realizaram os passos usando os *Algeblocks* e resolveram o $-3+7$.

Depois os estudantes puderam encontrar o valor correspondente as expressões numéricas. O aluno C3 do grupo G3 resolveu a expressão seguindo a ordem da expressão numérica e também representando em desenho os *Algeblocks*.

Figura 53: Resolução da Atividade 5 do grupo G3



• **Atividade:** Usando a folha de apoio de positivo e de negativo e os blocos verdes responda as seguintes questões e escreva as respostas usando números inteiros:

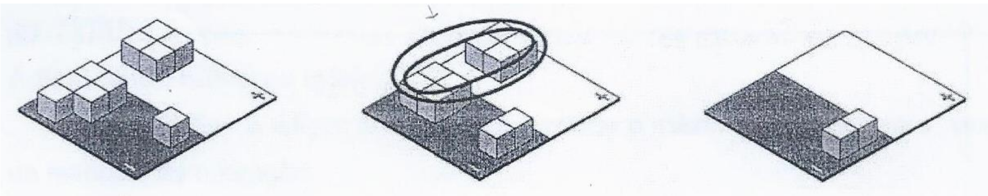
-2+6+(-4)-1= 1 -2+6+(-5) +4+(-5) 1 + -	+5+-(2+1-3)-2= (5+)-(-2) +3 + -

Fonte: Dados da pesquisa

Com a resposta do C3 fizemos a comparação dos passos que o estudante fez para encontrar o valor da expressão com o uso dos blocos dos *Algeblocks.* Esse momento foi muito importante para aproximar os conceitos aritméticos com os blocos concretos.

A seguinte atividade eles deveriam usar a criatividade e criar um problema de acordo com a seguinte imagem:

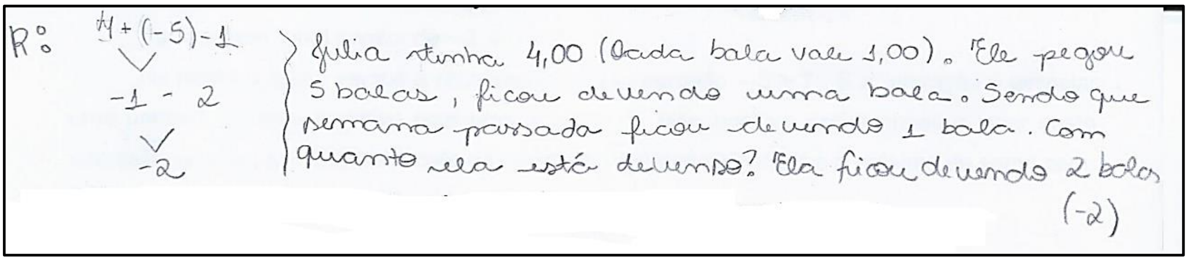
Figura 54: Adição de números inteiros - Atividade 5



Fonte: Retirado do livro *Algeblocks*

Tivemos os seguintes problemas:

Figura 55: Resposta da Atividade 5 – elaboração do problema



R: $4+(-5)-1$
$-1-2$
-2

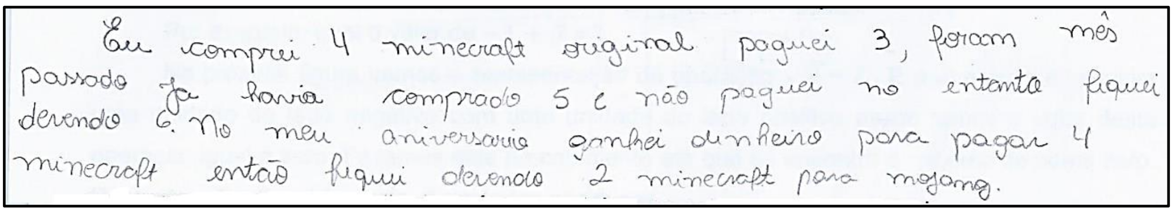
Julia tinha 4,00 (Cada bala vale 1,00). Ele pegou 5 balas, ficou devendo uma bala. Sendo que semana passada ficou devendo 1 bala. Com quanto ela está devenso? Ela ficou devendo 2 balas (-2)

Fonte: Dados da pesquisa

O estudante quis dizer:

Julia tinha R$ 4,00 (cada bala vale R$ 1,00). Ela pegou 5 balas, ficou devendo uma bala. Sendo que na semana passada ela ficou devendo 1 bala, quanto ela está devendo? Ela ficou devendo 2 balas. E, portanto devendo R$ 2,00.

Figura 56: Resposta da Atividade 5 - elaboração do problema



Eu comprei 4 minecraft original paguei 3, foram mês passado já havia comprado 5 e não paguei no entanto fiquei devendo 6. No meu aniversario ganhei dinheiro para pagar 4 minecraft então fiquei devendo 2 minecraft para mojang.

Fonte: Dados da pesquisa

O estudante quis dizer:

Eu comprei 4 Minecraft originais e paguei 3, foram no mês passado. Já havia comprado 5 e não paguei. Portanto fiquei devendo. No meu aniversário ganhei dinheiro para pagar 4 Minecraft então fiquei devendo 2 Minecraft para Mojang.

O professor pesquisador ao ler os problemas para a turma perguntou para os estudantes se eles estavam de acordo com a representação das histórias. E todos os alunos concordaram que a história representava o movimento dos blocos na figura 52.

3.3.6 Sexto encontro

O objetivo desse encontro foi o de observar padrões e reforçar o conceito de multiplicação, como a de parcelas iguais, e de divisão de números inteiros. Também o modelo de área será usado para modelar a multiplicação e a divisão de números inteiros.

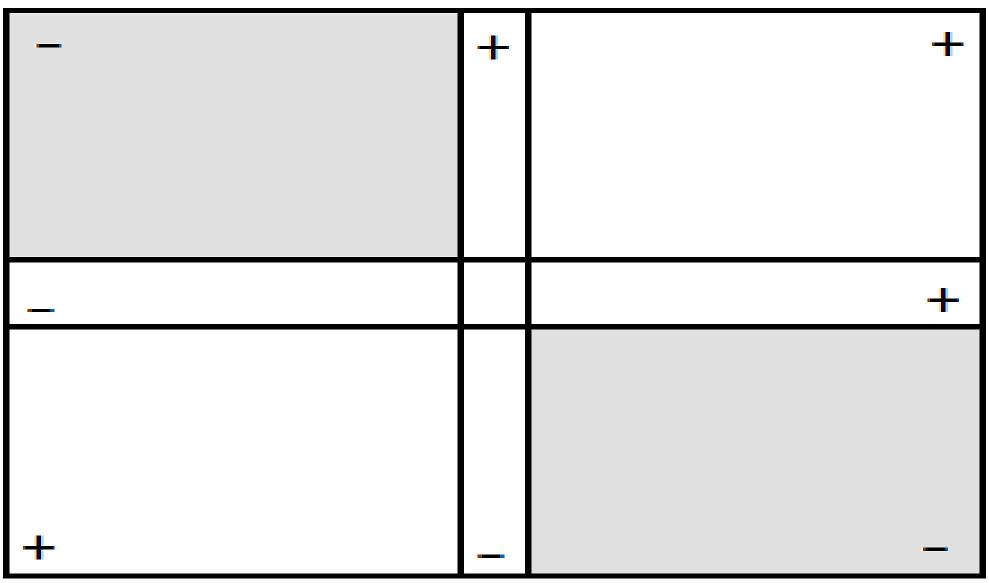
Foi apresentada detalhadamente aos alunos a folha de apoio, usada nos *Algeblocks*, para trabalhar multiplicação e divisão de números inteiros.

A PP entregou a atividade 6 e a folha de apoio em uma estrutura em “forma de cruz.”

ATIVIDADE 6

● Represente a multiplicação dos números inteiros na estrutura em “formato de cruz”:

- 5 x 4
- (-3) x 7
- (-9) x (-3)
- 2 x (-6)



Várias perguntas surgiram a respeito dessa folha de apoio e um dos estudantes levantou uma pergunta:

- Porque a outra folha era dividida em duas partes e esta está dividida em quatro partes?

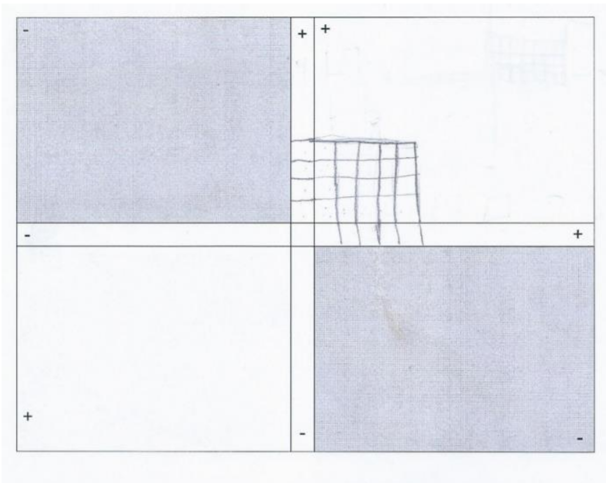
A PP parou um pouco e disse:

- Vocês sabem, da Geometria, que um ponto qualquer tomado sobre a reta a divide em duas semirretas. Agora, tomada a reta numerada, o zero (0) a divide em, à direita, números positivos e, à esquerda, números negativos. A primeira folha de apoio, que eu dei a vocês, se referia à adição e à subtração de números inteiros. Assim, a folha estava dividida em duas partes: uma para colocar quantidades positivas e outra para quantidades negativas e operar. Para esta atividade está programado trabalhar outras duas operações: multiplicação e divisão de números inteiros, uma operação inversa da outra, ou seja, a divisão desfaz a multiplicação e a multiplicação desfaz a divisão. A multiplicação, como vocês já sabem, pode ser trabalhada de duas formas diferentes: como adição de parcelas iguais e como área no plano cartesiano. Assim, essa segunda folha foi dividida em quatro partes considerando a combinação dos sinais de dois números inteiros: o multiplicador e o multiplicando, assim com os sinais combinados: $++, +-, -+$ *e* $--$.

Depois dessa conversa com os alunos, eles tiveram um tempo para resolver o a Atividade 6.

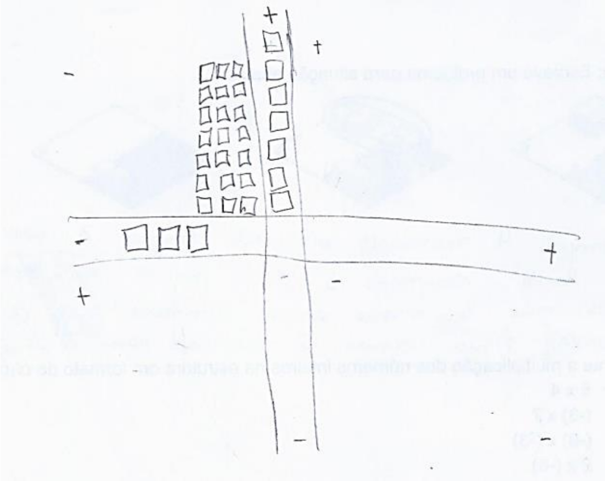
Seguem as respostas dos grupos:

Figura 57: Representação de 5×4 com o uso dos *Algeblocks* (G1)



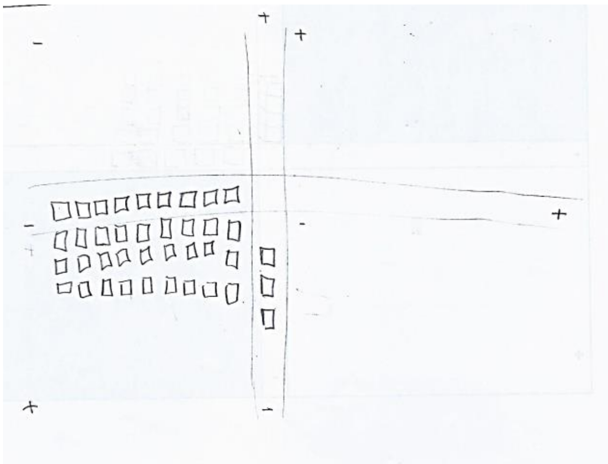
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 58: Representação de $(-3) \times 7$ com o uso dos *Algeblocks* (G2)



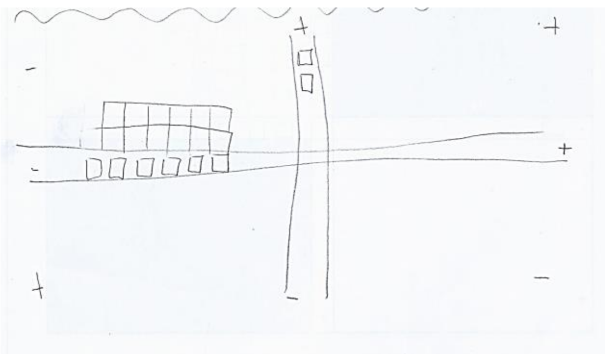
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 59: Representação de $(-9) \times (-3)$ com o uso dos *Algeblocks* (G3)



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 60: Representação de $2 \times (-6)$ com o uso dos *Algeblocks* (G2)



Fonte: Dados da pesquisa

Depois que os estudantes apresentaram suas resoluções a PP apresentou a eles o significado de multiplicador e multiplicando. Pois o multiplicador é o fator que faz a ação e o multiplicando é o fator que sofre a ação.

Por exemplo:

$$5 \times 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$$

Nesse caso, acima, o 5 é o multiplicador e o 4 é o multiplicando.

$$4 \times 5 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20$$

E nesse caso, acima, o 4 é o multiplicador e o 5 é o multiplicando.

Embora o produto, o resultado da multiplicação, seja o mesmo nas duas operações, essas duas operações se apresentam em problemas diferentes.

A PP poderia ter feito a representação de cada operação da multiplicação dada na questão como adição de parcelas iguais. Por exemplo:

- $(+5) \times (+4) = (+4) + (+4) + (+4) + (+4) + (+4) = +20;$
- $(+5) \times (-4) = (-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = -20$
- $(-5) \times (+4) = -(+5) \times (+4) = -(+20) = -20$
- $(-5) \times (-4) = -(+5) \times (-4) = -(-20) = +20$
- $(-3) \times (+7) = -(+3) \times (+7) = -\big((+7) + (+7) + (+7)\big) = -(+21) = -21;$
- $(-9) \times (-3) = -(+9) \times (-3) =$
  $-[(-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3)] =$
  $-(-27) = +27;$
- $(+2) \times (-6) = (-6) + (-6) = -12.$

Na folha de apoio em “formato de cruz” definiu-se que na reta horizontal é colocado o multiplicador e na reta vertical é colocado o multiplicando resultando a área na qual se mede o produto.

Nessa atividade os alunos puderam perceber as regras de sinais, comumente definidas pelos professores quando trabalham multiplicação de números inteiros, e as puderam visualizar no concreto usando os blocos dos *Algeblocks.* Pois o produto de um número positivo por um número positivo é representado no primeiro quadrante, isto é, é positivo; o produto de um número negativo por um número positivo é representado no segundo quadrante, isto é, é negativo; o produto de um número negativo por um número negativo é representado no terceiro quadrante, isto é, é positivo; e o produto de um número positivo por um número negativo é representado no quarto quadrante, isto é, é negativo.

A regra deixada pela maioria dos professores para a multiplicação de números inteiros é simplesmente assim: sinais iguais mais e sinais diferentes menos.

Nesse momento destaco a conexão com a Aritmética e a Geometria para ajudar a representar o produto.

Para a operação divisão a professora pesquisadora aproveitou os exemplos da Questão 1 na qual trabalharam multiplicação e pediu que eles fizessem uso dos blocos *Algeblocks* para resolver as operações da Questão 2:

2) Encontre o valor das seguintes operações

i) $(+20) \div (+4) =$

ii) $(+20) \div (+5) =$

iii) $(-21) \div (-3) =$

iv) $(-21) \div (+7) =$

v) $(+27) \div (-9) =$

vi) $(+27) \div (-3) =$

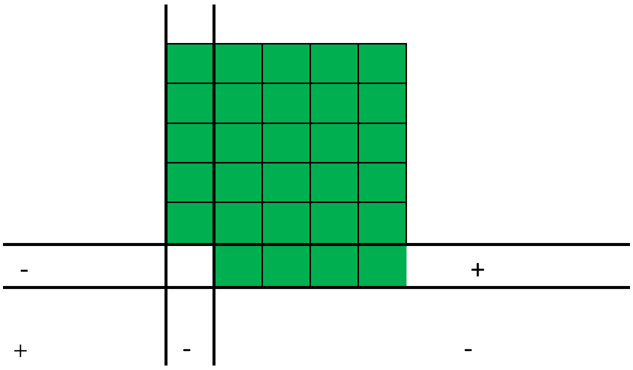
vii) $(-12) \div (+2) =$

viii) $(-12) \div (-6) =$

Comparando com a questão 1, pode-se perceber que a divisão é a operação inversa da multiplicação. E o valor do dividendo corresponde ao valor do produto, dessa forma ao encontrar o valor do quociente o aluno relacionou com um dos lados do retângulo, de área igual ao do valor do dividendo, com um dos lados que se apresenta como divisor.

Por exemplo, $20 \div 4$ ou $20 \div 5$, usando os *Algeblocks* temos:

Figura 61: Representação de $20 \div 4$ ou $20 \div 5$ usando os *Algeblocks*

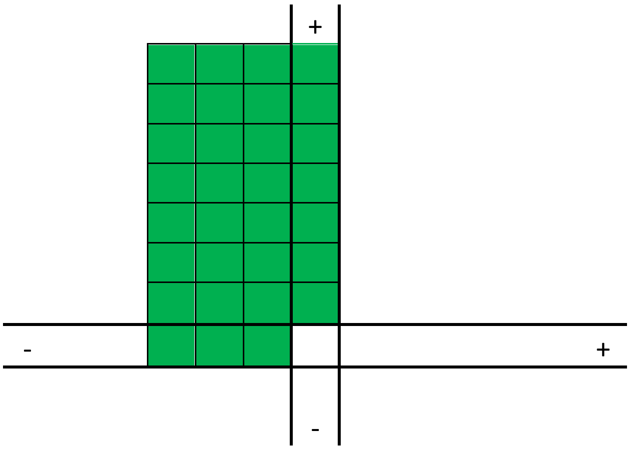


Fonte: Elaborada pela autora

Pode-se verificar que ao dividir $(+20)$ por $(+4)$ encontra-se o valor $(+5)$ que corresponde a um lado do retângulo de área igual a $(+20)$ e de lado igual a $(+4)$. Da mesma forma pode-se observar que ao dividir $(+20)$ por $(+5)$ encontra-se o valor $(+4)$ que corresponde ao outro lado do retângulo de área igual a $(+20)$.

Para $(-21) \div (-3)$ ou $(-21) \div (+7)$,usando os *Algeblocks* temos:

Figura 62: Representação de $(-21) \div (-3)$ ou $(-21) \div (+7)$ usando os *Algeblocks*

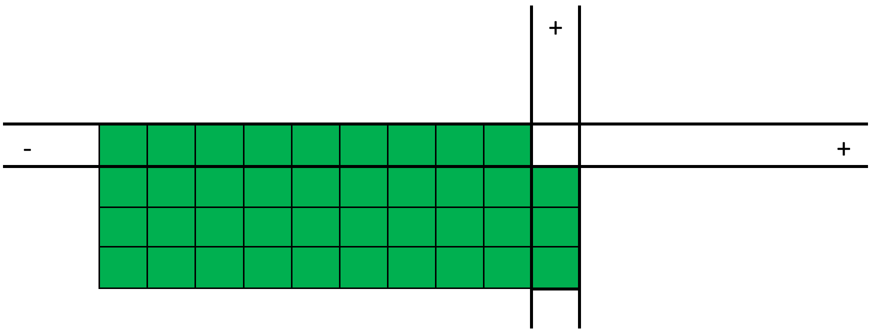


Fonte: Elaborada pela autora

Pode-se verificar que ao dividir (-21) por (-3) encontra-se o valor $(+7)$ que corresponde ao lado do retângulo de área igual a (-21). Da mesma forma pode-se observar que ao dividir (-21) por $(+7)$ encontra-se o valor (-3) que corresponde ao lado do retângulo de área igual a (-21).

Para $27 \div (-9)$ ou $27 \div (-3)$,usando os *Algeblocks* temos:

Figura 63: Representação de $(-21) \div (-3)$ ou $(-21) \div (+7)$ usando os *Algeblocks*

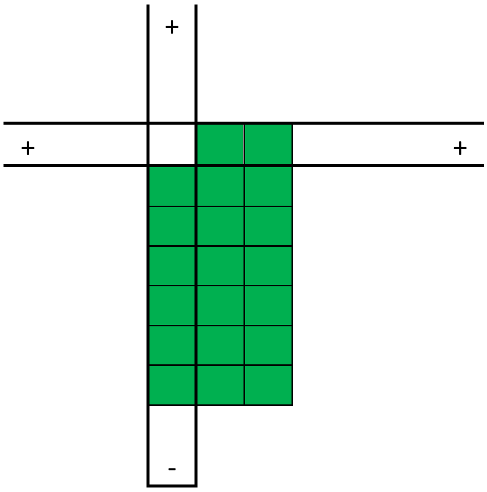


Fonte: Elaborada pela autora

Pode-se verificar que ao dividir 27 por -3 encontra-se o valor -9 que corresponde ao lado do retângulo de área igual a 27. Da mesma forma pode-se observar que ao dividir 27 por -9 encontra-se o valor -3 que corresponde ao lado do retângulo de área igual a 27.

E para $-12 \div 2$ ou $-12 \div (-6)$,usando os *Algeblocks* temos:

Figura 64: Representação de $-12 \div 2$ ou $-12 \div (-6)$ usando os *Algeblocks*



Fonte: Elaborada pela autora

Pode-se verificar, também, que ao dividir (-12) por 2 encontra-se o valor (-6) que corresponde ao lado do retângulo de área igual a -12. Da mesma forma pode-se observar que ao dividir (-12) por (-6) encontra-se o valor $(+2)$ que corresponde ao lado do retângulo de área igual a -12.

E ao finalizar essa questão retoma-se às regras de sinais que foram discutidas na atividade da multiplicação e que valem para a operação de divisão também, ou seja, se os sinais são iguais o resultado é positivo e se os sinais são diferentes o resultado é negativo.

3.3.7 Sétimo encontro

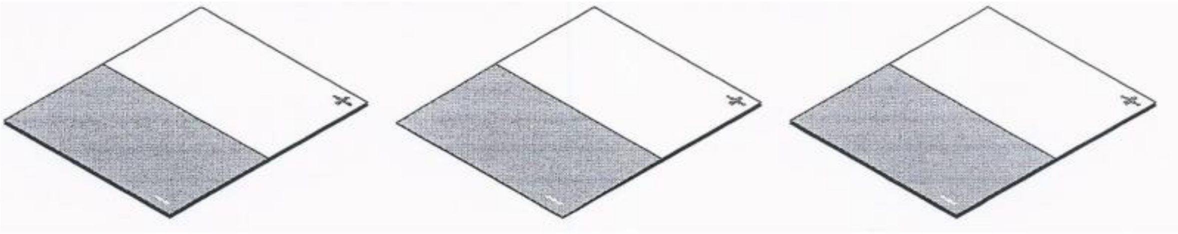
O sétimo encontro teve como objetivo trabalhar a representação das operações de adição, subtração e oposto de uma expressão algébrica usando os *Algeblocks*. A PP entregou a seguinte atividade aos estudantes:

ATIVIDADE 7

Nessa atividade vamos representar com os *Algeblocks* as operações de adição e subtração de expressões algébricas.

1) Represente: $(-1)(-3y+4)$ usando os blocos *Algeblocks*.

2) Usando os *Algeblocks* represente $2x + 3 - 3x + 5 =$



Resposta final

Depois de ter trabalhado a atividade sobre o número oposto os estudantes representaram, sem apresentar dificuldades, : $(-1)(-3y + 4)$ usando os *Algeblocks* como é mostrado na Figura 63:

Figura 65: Adição e Substração de Expressões Algébricas com os *Algeblocks*

Fonte: Retirado e adaptado do livro dos *Algeblocks* (p. 62)

Infelizmente não há um registro fotográfico dos estudantes realizando essa operação. Mas pode-se observar que no passo1 é representado a expressão algébrica: $-3y + 4$. Ao pedir o oposto dessa expressão algébrica devemos multiplicar a expressão toda por (-1), que fica assim: $(-1)(-3y + 4)$. E no passo 3 temos a expressão algébrica que representa o oposto de $-3y + 4$, ou seja $3y + 4$.

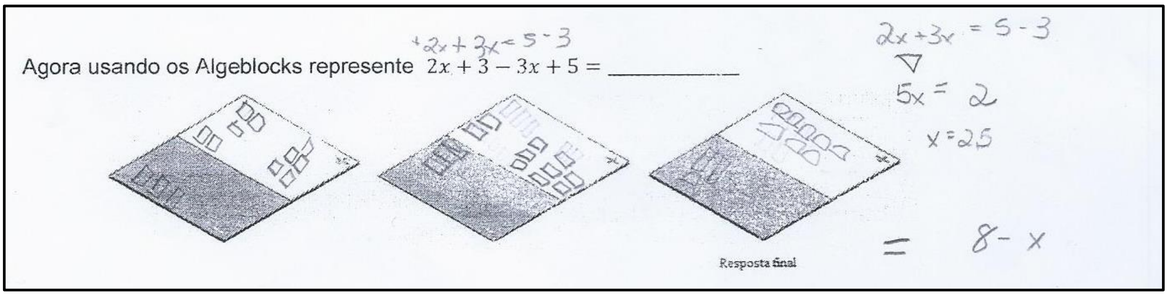
Um dos alunos apresentou o seguinte apontamento:

-Encontrar o negativo da expressão algébrica é achar o oposto, aí muda o sinal de cada termo da expressão.

Na questão 2 foi pedido aos alunos que simplificassem a expressão algébrica reduzindo os termos semelhantes usando os *Algeblocks*.

O grupo G3 representou a operação fazendo desenho dos blocos:

Figura 66: Resposta da Atividade 7



Fonte: Dados da pesquisa

E como tarefa para casa a PP passou a seguinte atividade:

Atividade extra 2

Pense e responda: o que é um polinômio?

3.3.8 Oitavo encontro

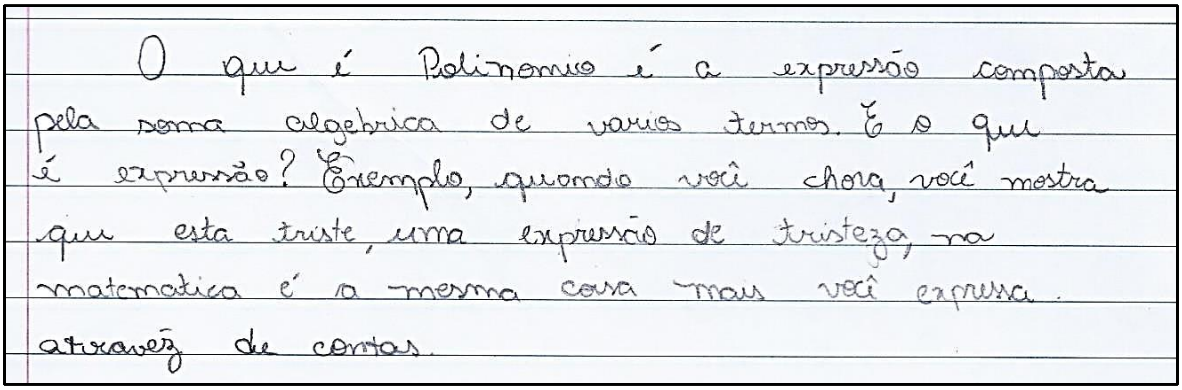
No oitavo encontro a PP pediu para os estudantes apresentarem o que é um polinômio. Um dos alunos arriscou dizendo que era igual uma expressão algébrica. Outros não tinham certeza. Então, por sugestão da professora pesquisadora, eles tomaram o dicionário para buscar o significado de polinômio. Encontram que polinômio é "uma expressão composta pela adição algébrica de vários termos."

- *Mas o que é termo?* – Perguntou a PP.

Procuram o significado da palavra termo e acharam que termo é "uma expressão algébrica que não contém as operações de adição e subtração."

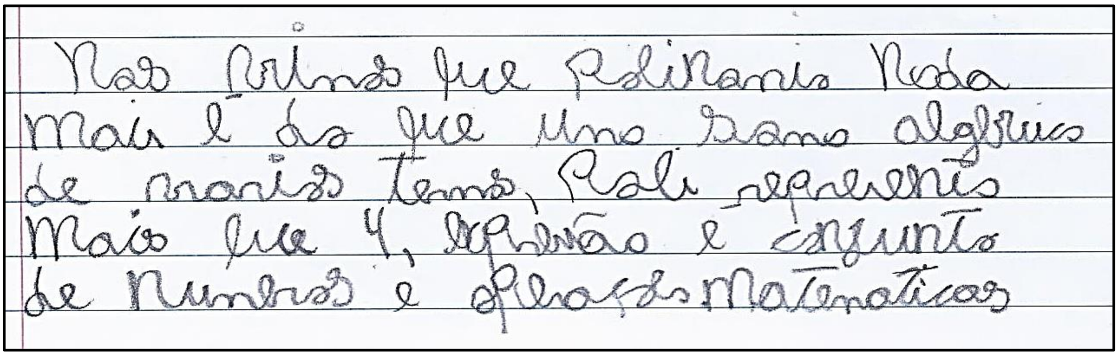
De posse desses significados os grupos apresentaram as seguintes respostas:

Figura 67: Resposta do Grupo 1 - O que é um polinômio?


O que é Polinomio é a expressão composta pela soma algebrica de varios termos. E o que é expressão? Exemplo, quando você chora, você mostra que esta triste, uma expressão de tristeza, na matematica é a mesma coisa mas você expressa atravez de contas.

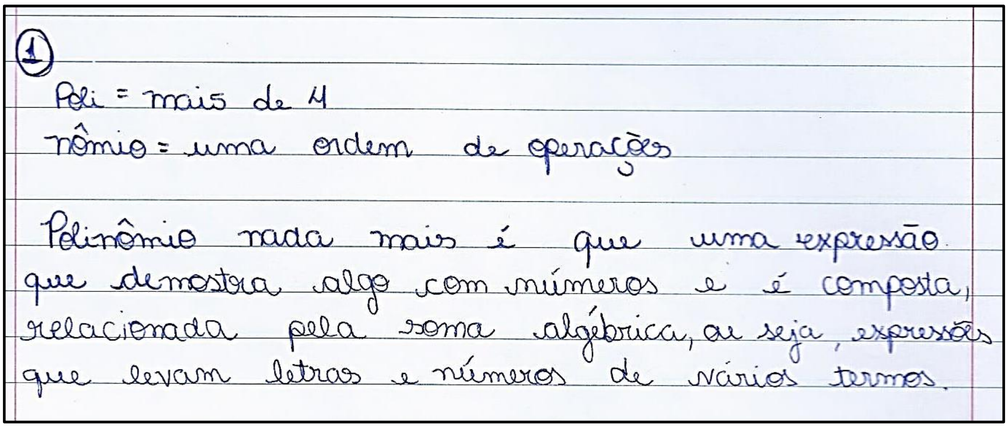
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 68: Resposta do Grupo 2 - O que é um polinômio?


Nós achamos que polinômio nada mais é do que uma soma algébrica de muitos termos, Poli representa mais que 4, expressão e conjunto de números e operações matemáticas

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 69: Resposta do Grupo 2 - O que é um polinômio?


1

Poli = mais de 4
nômio = uma ordem de operações

Polinômio nada mais é que uma expressão que demostra algo com números e é composta, relacionada pela soma algébrica, ou seja, expressões que levam letras e números de vários termos.

Fonte: Dados da pesquisa

Instalou-se uma grande discussão. O que eles queriam dizer com as definições de polinômio? Realmente com o que eles haviam escrito estava difícil de entender o que era um polinômio. A partir das discussões foi aceita a seguinte definição: é uma adição algébrica de termos algébricos onde termo é entendido por: é uma expressão algébrica que não contém as operações de adição e subtração.

Um termo pode ser número, uma variável ou um produto deles. Por exemplo: 7, x, xy ou $4x^3$. O grau de um monômio é o número de vezes que uma variável ocorre como um fator. O grau de um polinômio é o grau do monômio de mais alto grau.

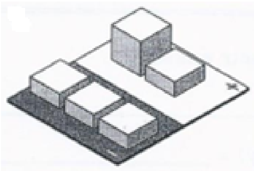
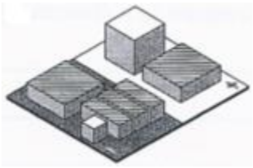
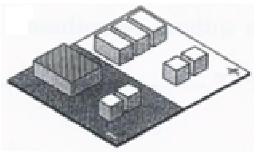
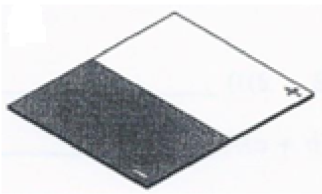
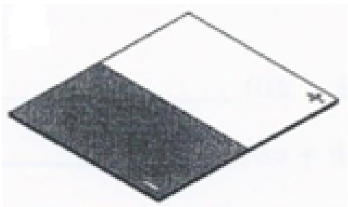
Os *Algeblocks* e a folha de apoio são usadas para reduzir termos semelhantes onde as formas congruentes nos *Algeblocks* são considerados termos semelhantes.

Após compartilhar a definição de polinômio com a turma toda a professora pesquisadora apresentou a seguinte atividade para que os alunos pudessem resolver, com objetivo de reduzir os termos semelhante, nomear o polinômio e colocar grau do polinômio.

Dando continuidade ao oitavo encontro a PP propõe a seguinte atividade:

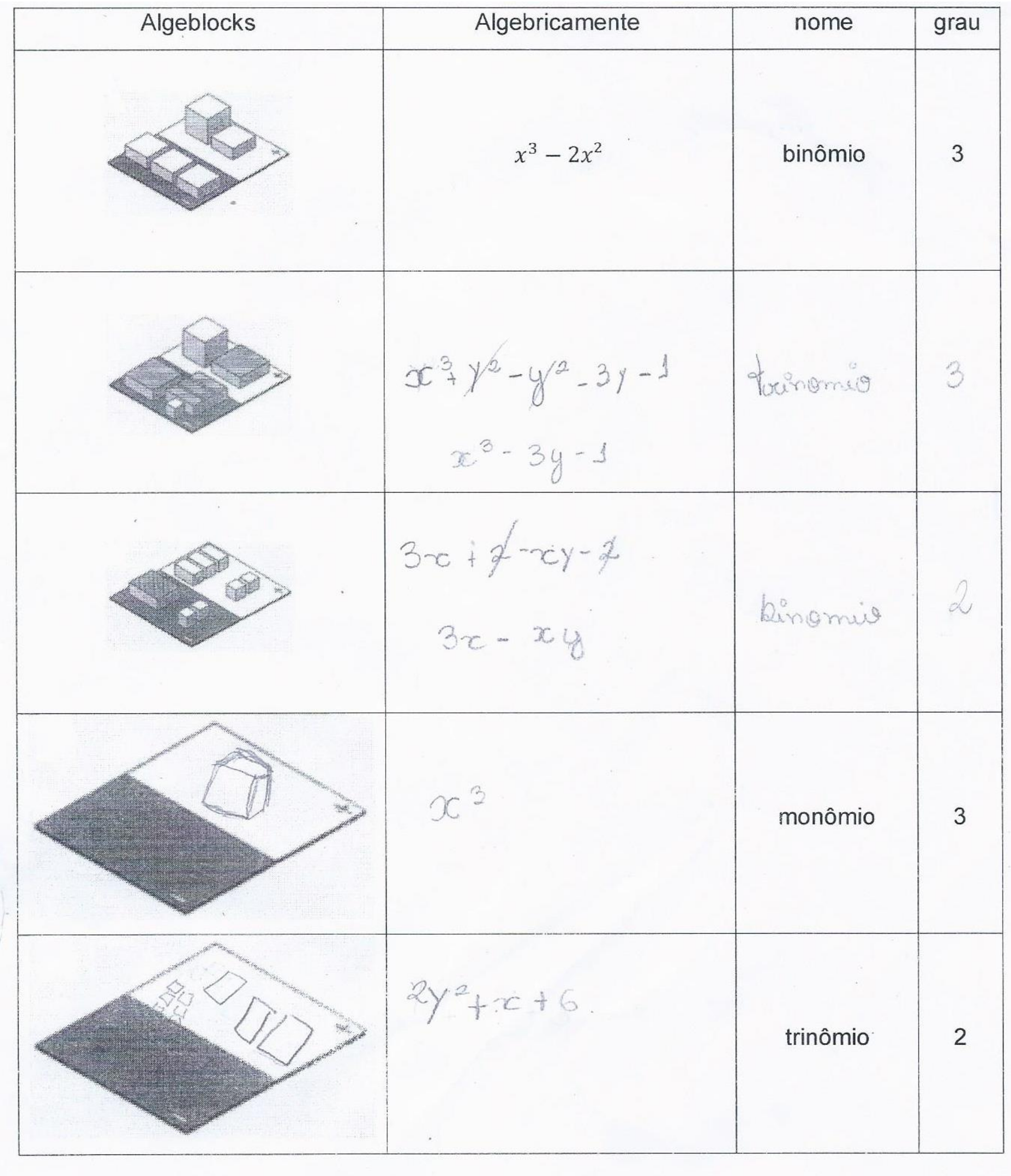
ATIVIDADE 8

Complete o quadro. Primeiro reduza os termos semelhantes e os simplifique. Depois escreva a expressão algébrica, a nomeie e identifique o seu grau.

Algeblocks	Algebricamente	nome	grau
	$x^3 - 2x^2$	binômio	3
			
			
		monômio	3
		trinômio	2

Nessa atividade os alunos ficaram em dúvida quanto à nomenclatura das expressões algébricas e ao modo como se analisava o grau do polinômio. Em uma conversa, a PP os auxiliou na busca do significado de monômio, binômio, trinômio e polinômio, destacando os prefixos na palavra (mono, bi, tri e poli). E também na identificação no grau do polinômio. Os três grupos trabalharam e, o grupo G3 apresentou a seguinte a resposta:

Figura 70: Resposta da atividade 8 (grupos 3)

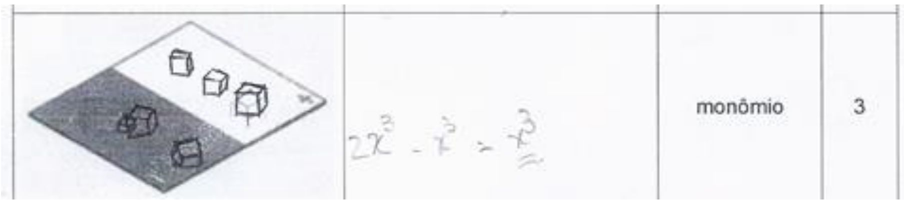


Algeblocks	Algebricamente	nome	grau
	$x^3 - 2x^2$	binômio	3
	$x^3 + \cancel{y^2} - \cancel{y^2} - 3y - 1$ $x^3 - 3y - 1$	trinomio	3
	$3x + \cancel{2} - xy - \cancel{2}$ $3x - xy$	binomio	2
	x^3	monômio	3
	$2y^2 + x + 6$	trinômio	2

Fonte: Dados da pesquisa

Nos dois últimos itens que pede para colocar um polinômio de acordo com a classificação ou com o grau, os alunos tiveram algumas dificuldades. E conforme eles foram manipulando os *Algeblocks* conseguiram encontrar uma expressão algébrica que atendesse a questão. Representando um monômio de grau 3:

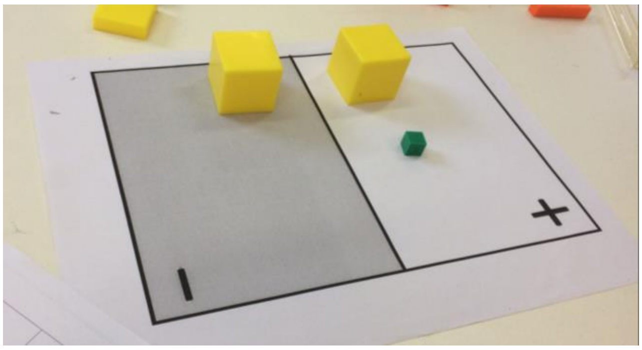
Figura 71: Resposta da Atividade 8



Fonte: Dados da pesquisa

Esse grupo tentou apresentar uma expressão de grau 3 mas quando coloca essa expressão na forma reduzida, $x^3 + 1 - x^3 = 1$ apresenta-se como um monômio de grau zero. Eles puderem ver manipulando os *Algeblocks.*

Figura 72: Resposta da Atividade 8

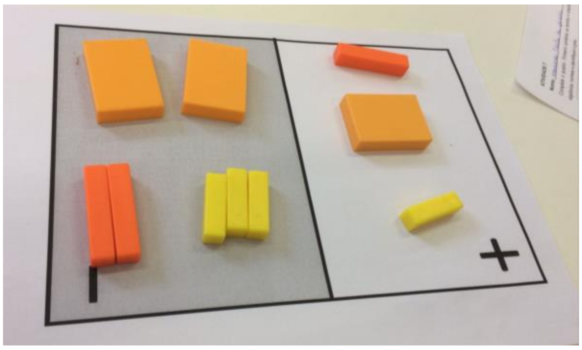


Fonte: Dados da pesquisa

Após mais algumas manipulações o grupo chegou a essa expressão algébrica:

$$x + xy + 1 - 2xy - 2y - 3x = xy - y - 2x$$

Figura 73: Resposta da Atividade 8



Fonte: Dados da pesquisa

Ao final da aula a PP entregou a atividade extra 3 para os alunos realizarem em casa.

ATIVIDADE EXTRA 3 Escreva uma expressão algébrica que quando simplificada dê x^2y

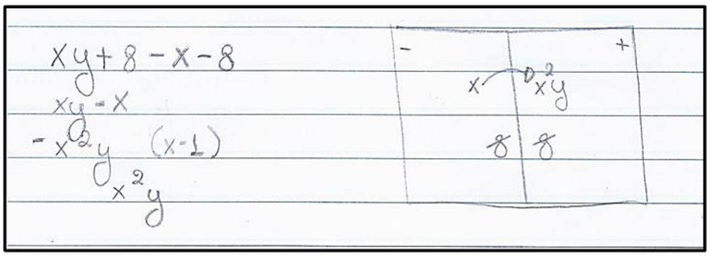
3.3.9 Nono encontro

O objetivo do nono encontro foi o de trabalhar com expressões algébricas aplicada a área e perímetro de uma figura plana. Primeiro a professora pesquisadora pediu para que os alunos apresentassem a resolução da atividade extra 3 que ela havia deixado na aula anterior:

ATIVIDADE EXTRA 3 Escreva uma expressão algébrica que quando simplificada dê x^2y

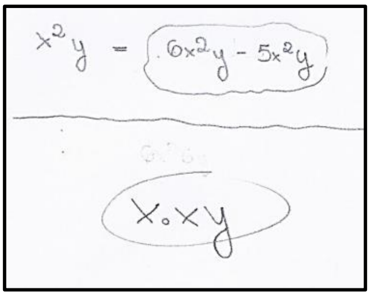
Essa atividade fez com que eles trabalhassem bastante com os *Algeblocks.* Os estudantes testaram várias expressões algébricas a que poderiam chegar no monômio x^2y. Até que depois de muita discussão e muitos testes os estudantes apresentaram as seguintes soluções:

Figura 74: Resolução da atividade extra 3 (aluno 1)



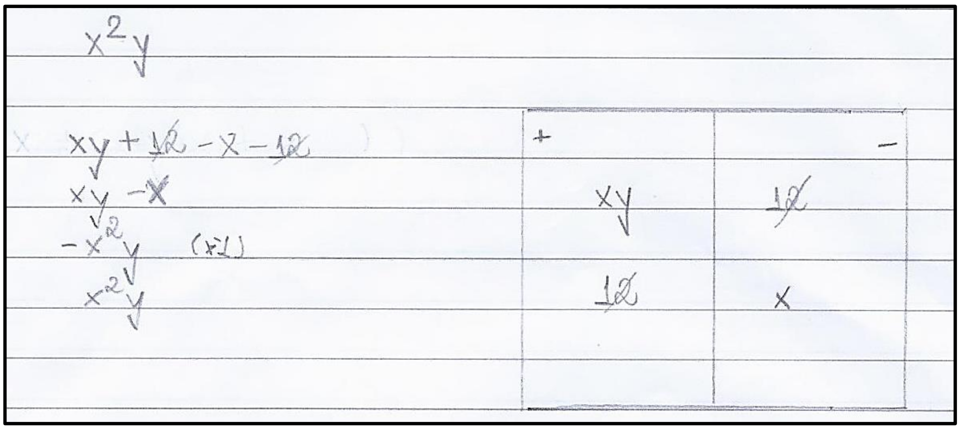
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 75: Resolução da atividade extra 3 (aluno 6)



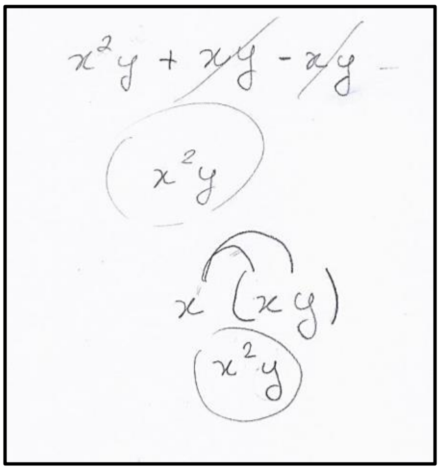
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 76: Resolução da atividade extra 3 (aluno 2)



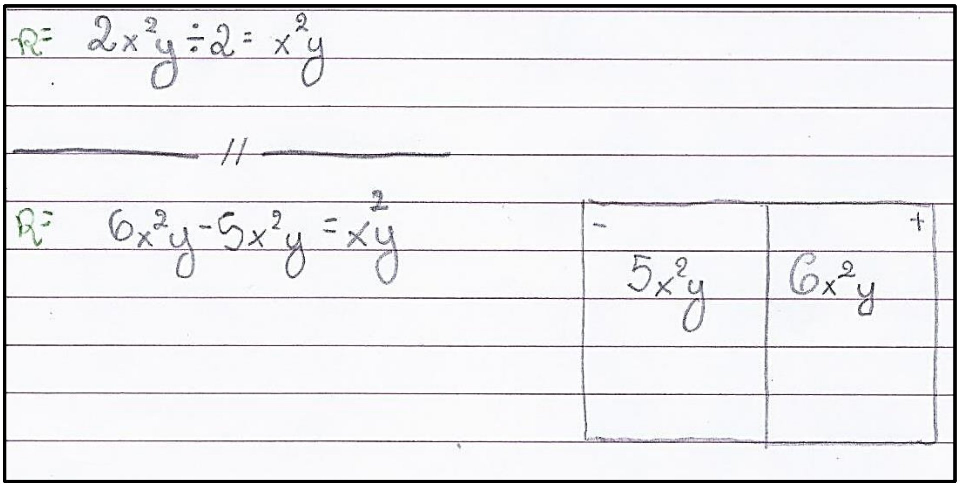
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 77: Resolução da atividade extra 3 (aluno 3)



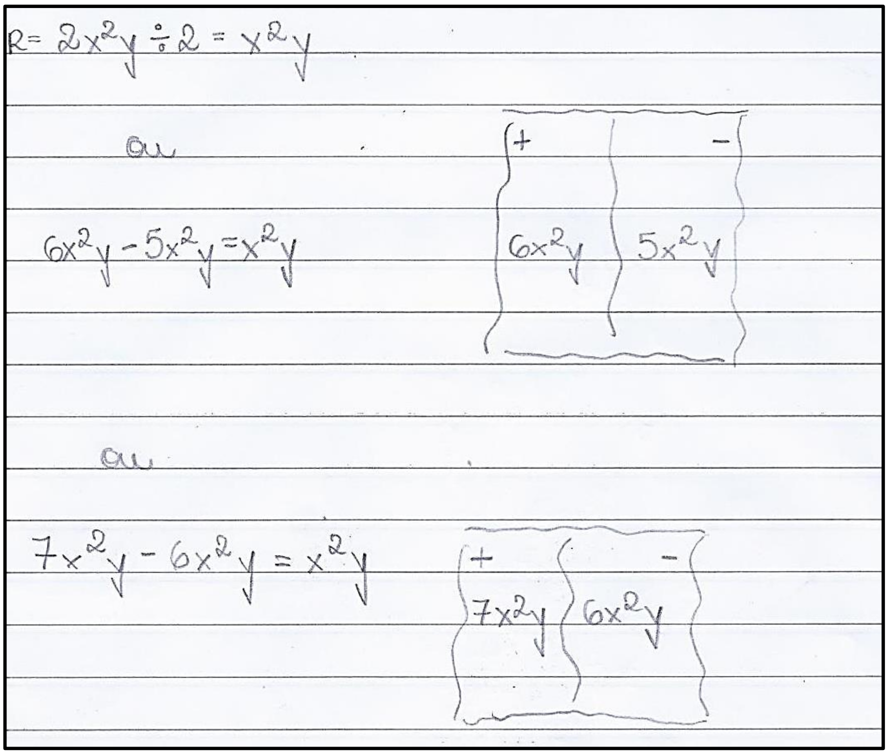
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 78: Resolução da atividade extra 3 (aluno 5)



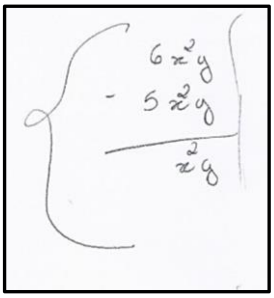
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 79: Resolução da atividade extra 3 (aluno 4)



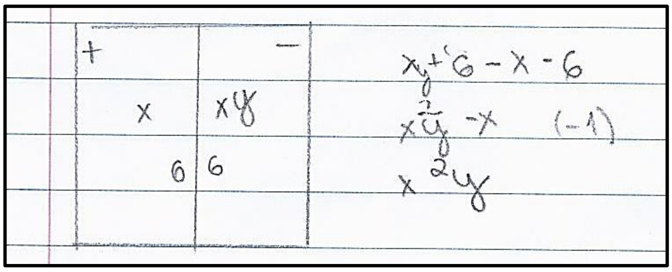
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 80: Resolução da atividade extra 3 (aluno 7)



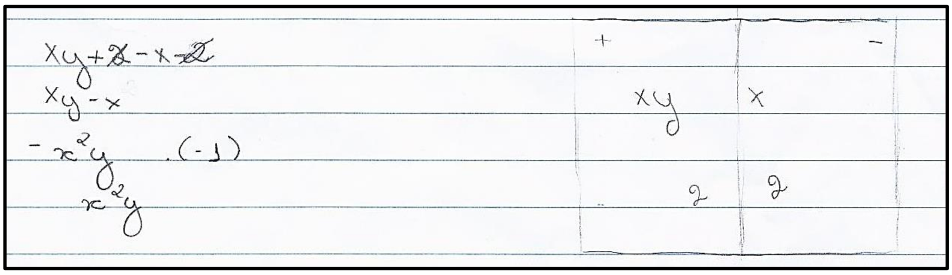
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 81: Resolução da atividade extra 3 (aluno 8)



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 82: Resolução da atividade extra 3 (aluno 9)

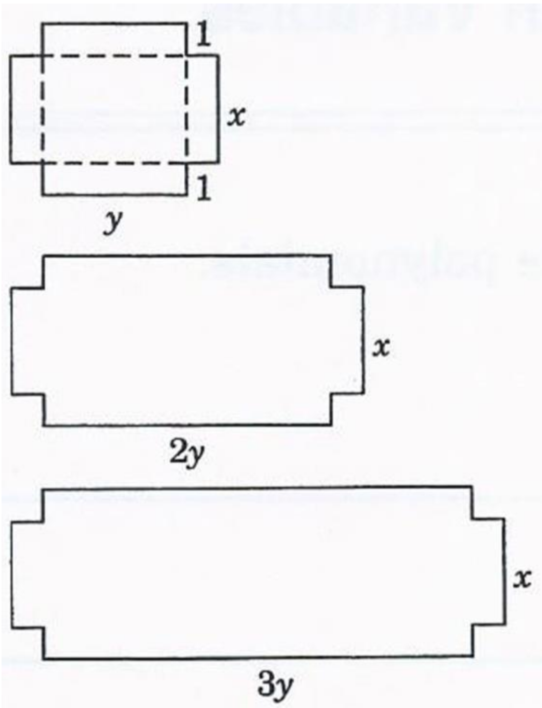


Fonte: Dados da pesquisa

Dando continuidade ao nono encontro a PP entregou a seguinte atividade para os estudantes:

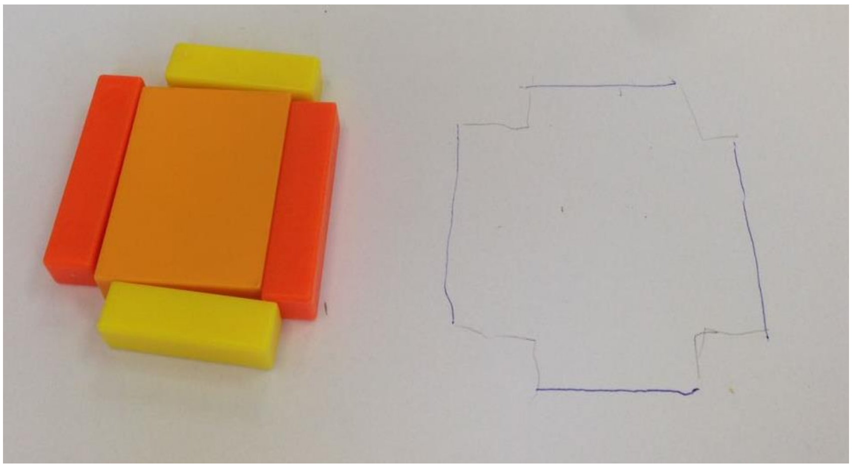
ATIVIDADE 9

Usando os blocos *Algeblocks* reproduza as seguintes figuras e, para cada uma delas mostre seu perímetro e sua área.



Os estudantes usaram os blocos *Algeblocks* para representar as figuras da atividade 9 e puderam identificar o perímetro e a área de cada figura. A seguir serão apresentadas as respostas dos grupos:

Figura 83: Representação de $2x + 2y + xy$ com os *Algeblocks*



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 84: Representação de $2x + 4y + 2xy$ com os *Algeblocks*

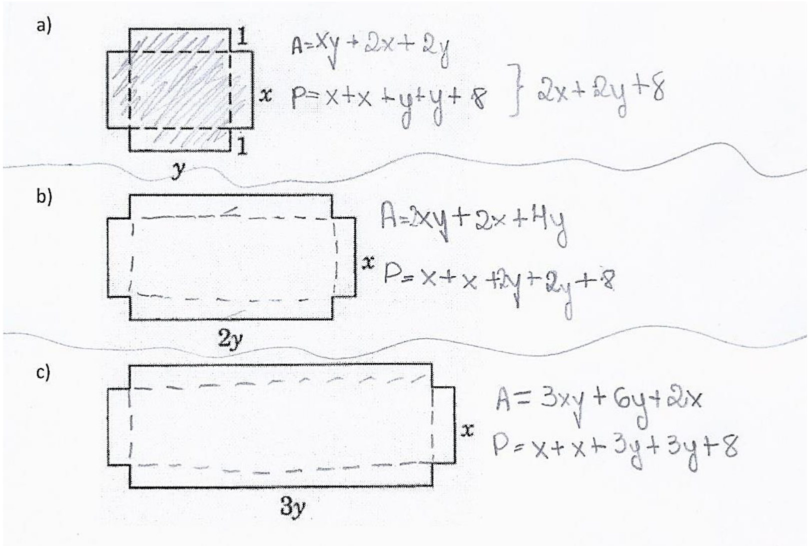
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 85: Representação de $2x + 6y + 3xy$ com os *Algeblocks*

Fonte: Dados da pesquisa

E alguns estudantes representaram suas repostas em desenho na folha de atividade:

Figura 86: Resposta escrita da Atividade 9



Fonte: Dados da pesquisa

Nessa atividade os estudantes puderam notar a diferença de x que é representado linearmente e x² que é representado no plano. Quando eles encontraram o valor do perímetro, eles perceberam que era apenas a soma das medidas do contorno da figura e a área era o que preenchia a figura.

Ao final desse encontro a PP entregou a seguinte atividade extra:

ATIVIDADE EXTRA 4 Represente uma figura com a mesma forma que a atividade anterior com a área igual a 3xy+2x² e o perímetro igual a 10x+2y

3.3.10 Décimo encontro

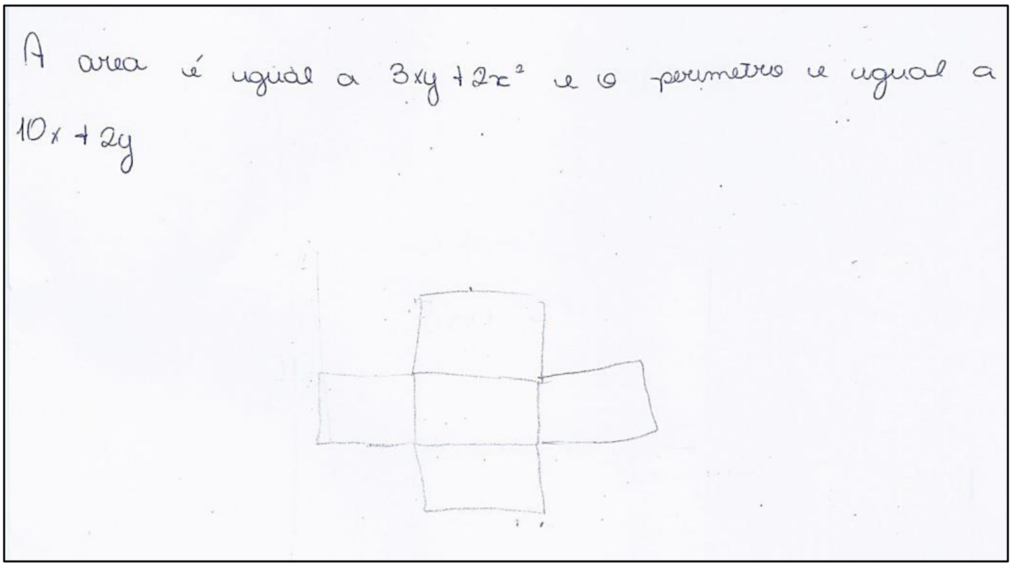
O objetivo do décimo encontro foi o de trabalhar expressões algébricas em problemas de área e perímetro.

A PP começou com discussão da resolução da atividade extra 4:

ATIVIDADE EXTRA 4 Represente uma figura com a mesma forma que a atividade anterior com a área igual a $3xy + 2x^2$ e o perímetro igual a $10x + 2y$

Seguindo a mesma ideia da atividade 9 os alunos deveriam encontrar uma figura de área $3xy + 2x^2$ e com perímetro igual a $10x + 2y$. Como os estudantes não levaram para casa os *Algeblocks* por isso a resposta dessa atividade 4 foi representada em desenho. A figura a seguir é a resolução do grupo G2:

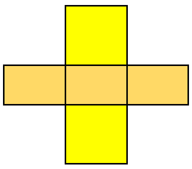
Figura 87: Resposta da Atividade 10



Fonte: Dados da pesquisa

Os outros grupos tentaram fazer, mas não apresentaram nenhuma solução. O G2 apresentou a solução e, também, mostrou usando os blocos *Algeblocks* parecido com a figura 86:

Figura 88: Representação da figura de área $3xy + 2x^2$ usando os *Algeblocks*



Fonte: Elaborada pela autora

O material *Algeblocks* propõe uma atividade de dividir com variáveis, mas como o modelo de divisão de inteiros é estendido nessa unidade e o tempo estava curto para o desenvolvimento do projeto, poderia ser trabalhado seguinte a atividade:

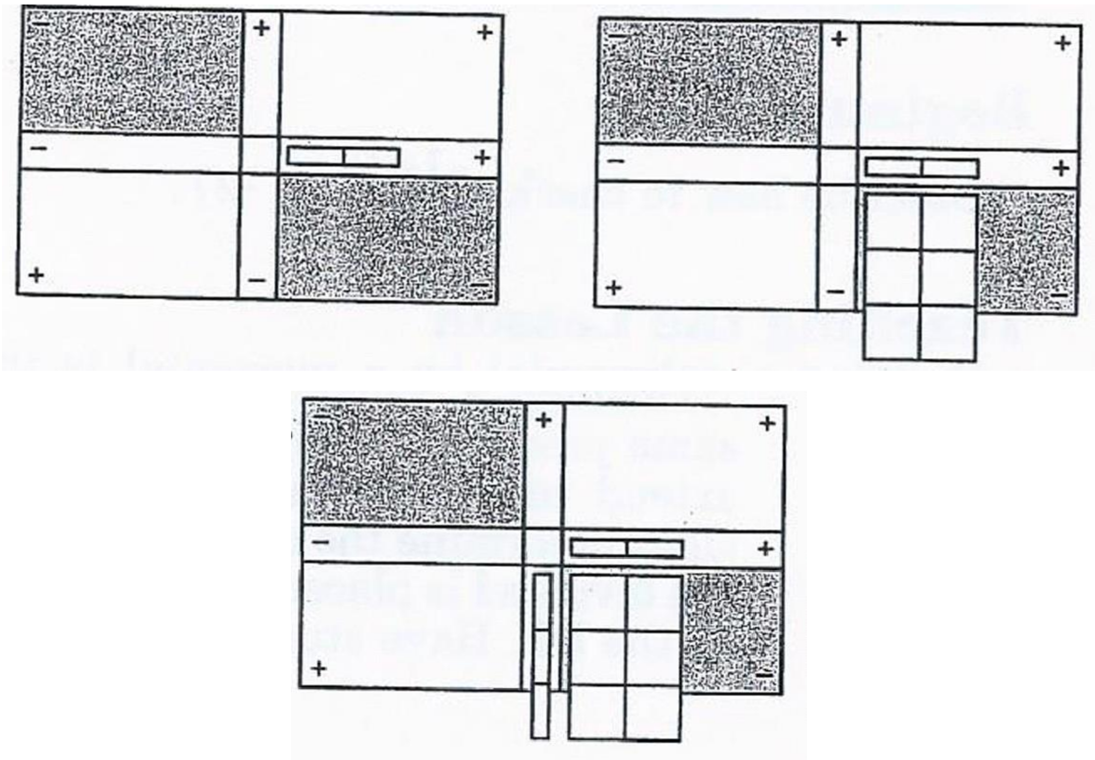
Calcule $-\frac{6x^2}{2x}$

E fazendo "a conta", temos o seguinte:

$$\begin{array}{r|l} -6x^2 & 2x \\ \cline{2-2} +6x^2 & -3x \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

E usando os *Algeblocks*, essa operação seria vista concretamente assim:

Figura 89: Divisão com os *Algeblocks*

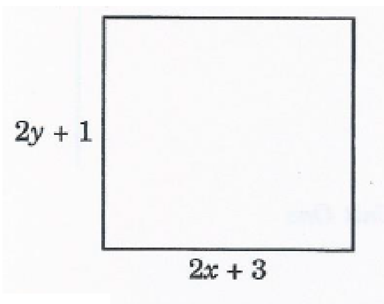


Fonte: Retirado do livro *Algeblocks*

Continuando o décimo encontro, a PP entregou a seguinte atividade aos estudantes:

ATIVIDADE 10

- Mostre os blocos que representam a área do retângulo abaixo:



Foram usados quantos blocos xy?______

Foram usados quantos blocos x?_______

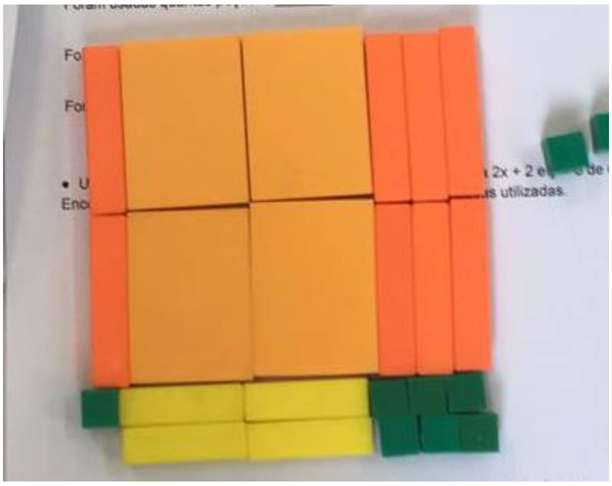
Foram usados quantos blocos y? _______

Foram usados quantos blocos de unidade?____

● Usando os blocos x e y, faça uma área retangular, com altura $2x + 2$ e comprimento $y + 3$. Encontre o perímetro. Esboce a sua resposta mostrando com os *Algeblocks*.

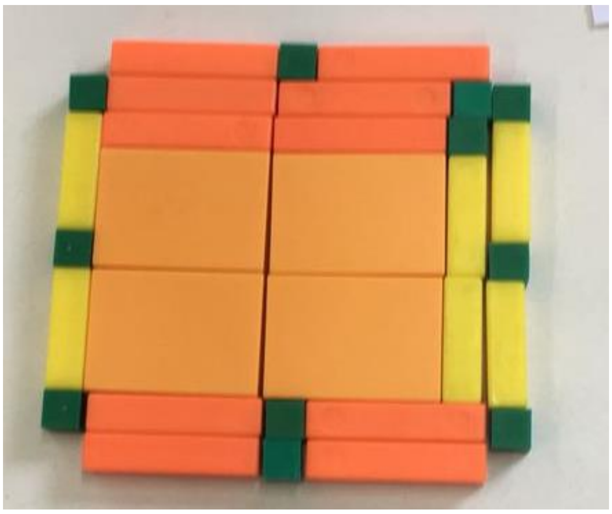
Nessa atividade alguns estudantes tiveram um pouquinho de dúvida em desenhar o retângulo de lado $2y + 1$ por $2x + 3$. Primeiro eles achavam que essas expressões algébricas faziam parte da área do retângulo. Depois que eles entenderam que eram as medidas dos lados do retângulo. Aapresentaram as seguintes representações:

Figura 90: Resposta da Atividade 10



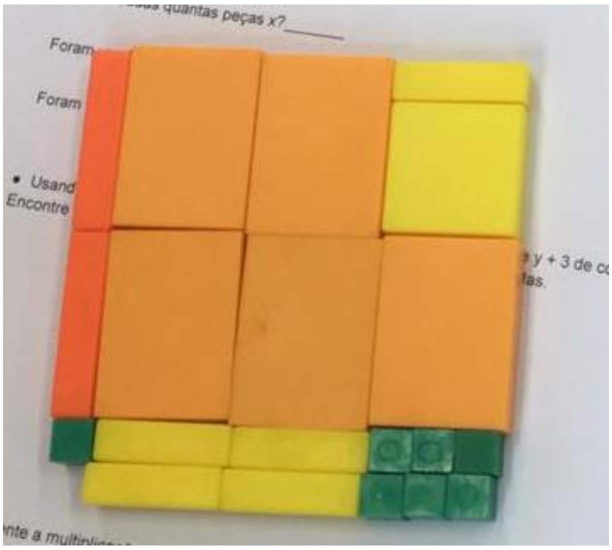
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 91: Resposta da Atividade 10



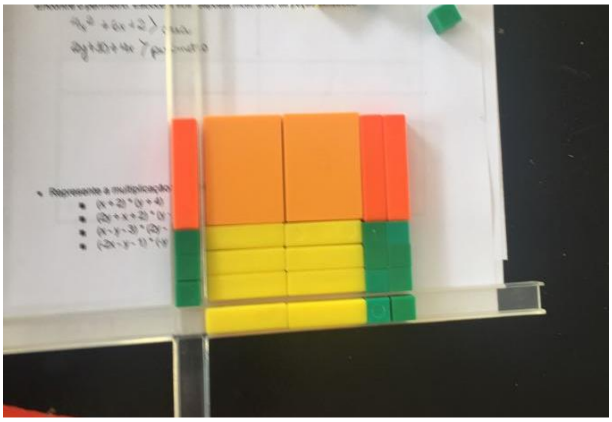
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 92: Resposta da Atividade 10



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 93: Resposta da Atividade 10



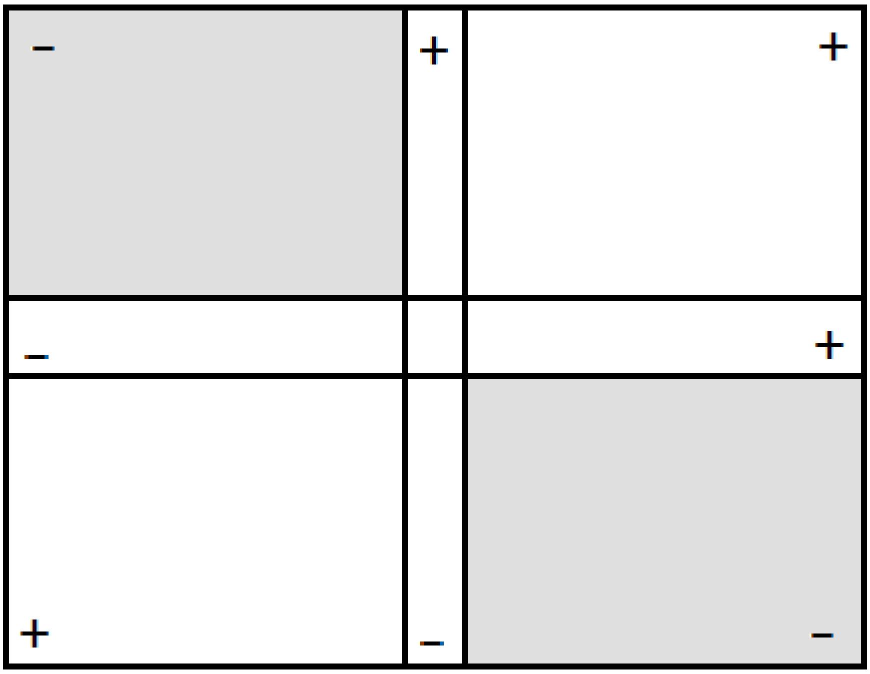
Fonte: Dados da pesquisa

3.3.11 Décimo primeiro encontro

No décimo primeiro encontro trabalhou-se multiplicação de polinômios com os *Algeblocks.* A PP entregou a seguinte atividade aos estudantes:

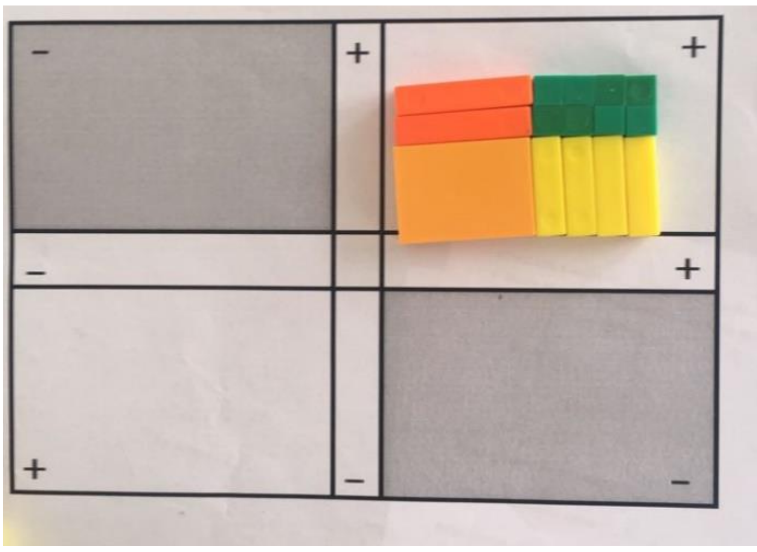
ATIVIDADE 11

- Represente a multiplicação dos polinômios na estrutura em formato de cruz:
  - $(x + 2) \times (y + 4)$
  - $(2y + x + 2) \times (y + 1)$
  - $(x - y - 3) \times (2y - 1)$
  - $(-2x - y - 1) \times (-y + 2)$



E para $(x + 2)\text{x}\,(y + 4)$ os estudantes apresentam uma reposta semelhante a figura 94:

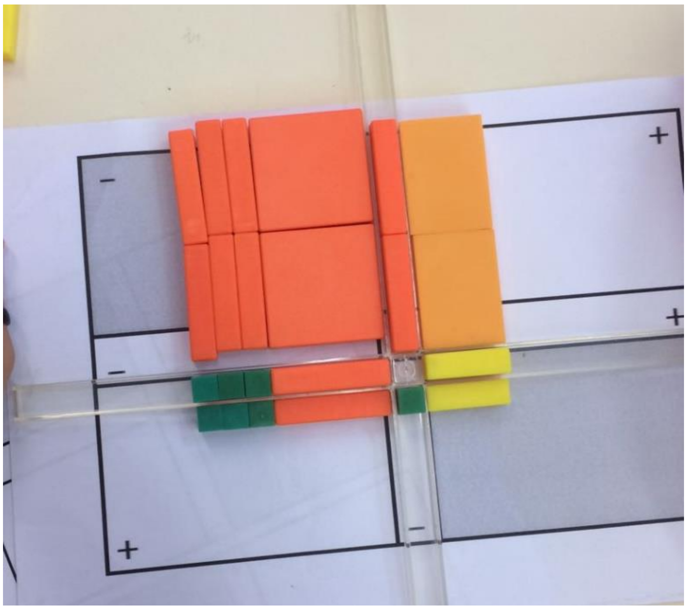
Figura 94: Resposta da Atividade 11: $(x + 2) \times (y + 4)$



Fonte: Dados da pesquisa

Para $(2y + x + 2)\text{x}(y + 1)$ os estudantes apresentam uma reposta semelhante a figura 95:

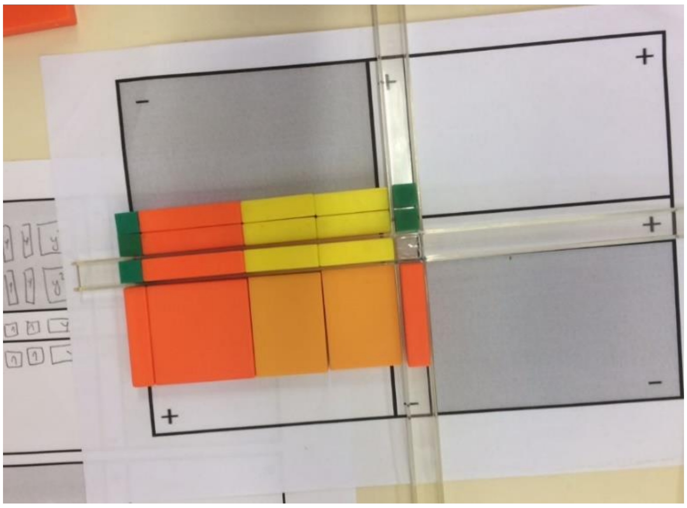
Figura 95: Resposta da Atividade 11: $(2y + x + 2)\times(y + 1)$



Fonte: Dados da pesquisa

Para $(x - y - 3)\text{x}(2y - 1)$ os estudantes apresentam uma reposta semelhante a figura 94

Figura 96: Resposta da Atividade 11: $(x - y - 3)\times(2y - 1)$



Fonte: Dados da pesquisa

Nessa atividade 11 os estudantes fizeram com bastante tranquilidade, não apresentaram dificuldades em representar o produto entre os polinômios. A PP poderia estender essa atividade e pedi a nomenclatura e o grau do dos polinômios.

3.3.12 Décimo segundo encontro

Nesse último encontro teve como objetivo trabalhar produtos notáveis. No início desse encontro a PP entrega a seguinte atividade aos estudantes:

ATIVIDADE 12

a) Represente $(x + y)^2$ usando os *Algeblocks.*

b) Represente $(2x - y)^2$ usando os *Algeblocks.*

c) Represente $(x + y)^3$ usando os *Algeblocks.*

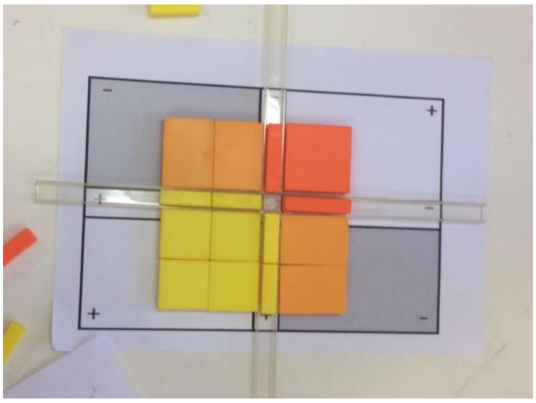
E para $(x + y)^2$ usando os *Algeblocks* no geral os estudantes apresentaram a seguinte resposta:

Figura 97: Representação de $(x + y)^2$ com o uso dos *Algeblocks*

Fonte: Dados da pesquisa

Para $(2x - y)^2$ usando os *Algeblocks* no geral os estudantes apresentaram a seguinte resposta:

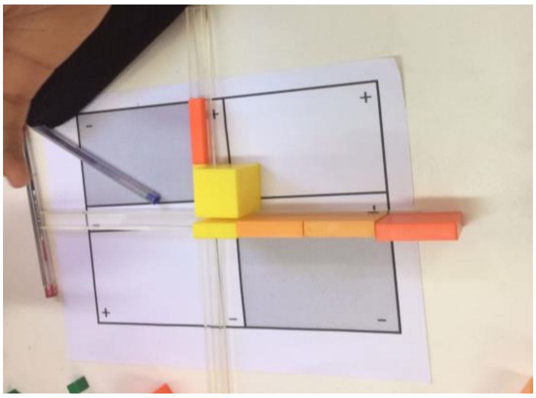
Figura 98: Representação de $(2x - y)^2$ com o uso dos *Algeblocks*



Fonte: Dados da pesquisa

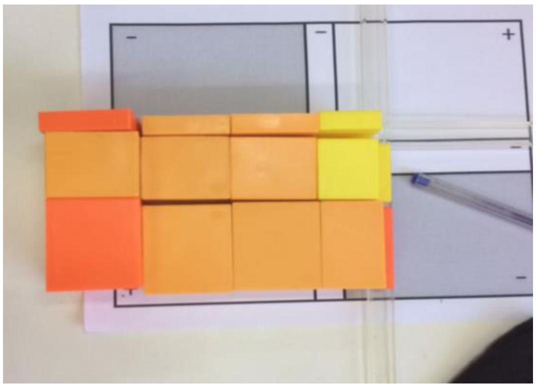
Para $(x + y)^3$ usando os *Algeblocks* os estudantes pegaram o resultado da letra a) e multiplicaram por $(x + y)$, como é representado nas figuras 99, 100 e 101:

Figura 99: Representação de $(x + y)^3$ com o uso dos *Algeblocks*



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 100: Representação de $(x + y)^3$ de uma forma diferente usando os *Algeblocks*



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 101: Representação de $(x + y)^3$ de uma forma diferente usando os *Algeblocks*

Fonte: Dados da pesquisa

Eles me deixaram muito surpresa com essa forma de representar o $(x + y)^3$. Então, aproveitei que eles terminaram de realizar o produto e pedi para que eles usassem as peças do produto notável $(x + y)^3$ e montassem um cubo.

Um dos estudantes perguntou qual seria a medida do lado desse cubo, e um deles respondeu:

- O cubo terá a medida igual a $x + y$, *professora?*

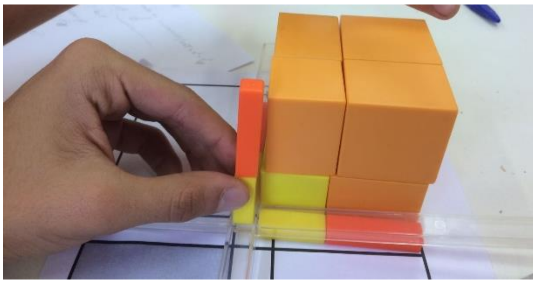
A professora perguntou aos estudantes o que achavam. E a maioria confirmou que sim, que teria a medida $x + y$ por $x + y$ por.

Depois de algum tempo um estudante apresentou o produto notável $(x + y)^3$ representado por um cubo com é mostrado nas figuras 100, 101 e 102:

Figura 102: Representação de $(x + y)^3$ de uma forma diferente usando os *Algeblocks*

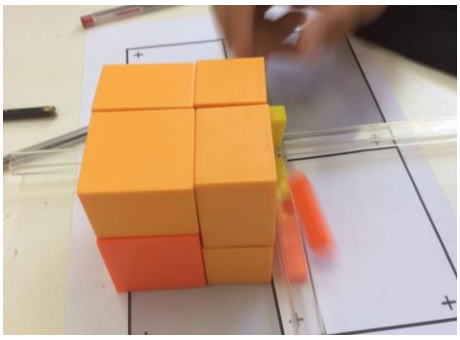
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 103: Representação de $(x + y)^3$ em um cubo com os blocos dos *Algeblocks*



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 104: Representação de $(x + y)^3$ em um cubo com os blocos dos *Algeblocks*



Fonte: Dados da pesquisa

Assim foi finalizado o último encontro do projeto pedagógico.

Capítulo 4: Terceiro Bloco de Romberg-Onuchic: Considerações Finais

4.1 Atividade 8: Coletar evidências

4.2 Atividade 9: Interpretar as evidências

4.3 Atividade 10: Relatar resultados

4.4 Atividade 11: Antecipar ações de outros

CAPÍTULO 4: 3º BLOCO DE ROMBERG–ONUCHIC: Considerações Finais

No terceiro bloco do Modelo de Romberg–Onuchic, o pesquisador deverá coletar evidências e informações, a partir das estratégias e dos procedimentos planejados no bloco anterior, para sua investigação e para obter informações relevantes para responder a pergunta. Com as evidências coletadas o pesquisador deveria interpretá-las e relatá-las de forma a antecipar as ações de outros (ONUCHIC; NOGUTI, 2014, p. 65).

A pesquisa pedagógica, para Onuchic e Noguti (2014, p.67), na sua essência busca melhorar os procedimentos de ensino e aprendizagem em sala de aula. Espera-se que o professor compartilhe "seus conhecimentos e experiências e que possam desenvolver competências e autonomia nele e nos seus estudantes" (ONUCHIC; NOGUTI, 2014, p.67).

> Para realizar uma pesquisa pedagógica, o professor deve ter em mente que a sistematização da pesquisa é bastante importante e, para isso, deve delimitar e justificar um determinado tema de estudo, deve levantar conjecturas ou hipóteses sobre ele, apresentar coleta de dados e, também escrever um relatório de pesquisa. Ou seja, ao realizar uma pesquisa pedagógica, o pesquisador deverá fazer uso de elementos da pesquisa científica que darão validade ao seu trabalho. (ONUCHIC; NOGUTI, 2014, p.67).

Romberg (2007, p.112) diz que deve

Deveria ser observado que os pesquisadores raramente começam uma investigação com uma estratégia fixada para coletar dados ou com um método específico de análise em mente.

Romberg (2007, p 116)

> Se a conjectura de alguém envolve predizer o que acontecerá sob condições que não existem agora – isto é, se ela envolve ganhar evidências sobre os efeitos de um novo e diferente produto ou programa – usa-se uma abordagem experimental. Em tais estudos, criar a nova situação é uma parte crítica do esforço. Através do estudo da nova situação e seus efeitos, o pesquisador tenta construir um argumento "casual." Nesta categoria há muitas distinções possíveis entre a variedade de métodos usados pelos pesquisadores. Entretanto há três abordagens gerais usadas em educação: Experimentos de ensino, experimentos comparativos e experimentos interrompidos.

Nossa pesquisa se encaixa nos experimentos de ensino:

> Este método de investigação está baseado numa prática comum de bons professores. Periodicamente, a maioria dos professores tenta alguma coisa nova em uma sala de aula e depois, julga as consequências daquela ação sobre a aprendizagem do aluno. Contudo, a abordagem usada pelos pesquisadores e muito mais sistemática nessas hipóteses que são inicialmente formadas com relação ao processo de aprendizagem, uma estratégia de ensino que envolve intervenção sistemática e estimulação da aprendizagem do aluno é desenvolvida e tanto a eficácia da estratégia de ensino quanto as razões para sua eficácia são determinadas. (ROMBERG, 2007, p.116)

Se considerado que os "pesquisadores raramente começam uma investigação com uma estratégia fixa para coletar dados ou com um método específico de análise em mente." (ROMBERG, 2007), pensando nisso, Romberg (2007) indica algumas questões que devem ser pensadas ao se escolher o método que será usado para coletar evidências. Dentre essas questões, estão o fato de analisar o tempo em que a pergunta de pesquisa se orienta e as fontes de evidências.

Esta pesquisa tem duas perguntas que são orientadas pelo tempo presente e as fontes das evidências são os registros visuais e de áudio obtidos a partir da execução do procedimento P_5. O método utilizado utiliza uma abordagem experimental.

4.1 Atividade 8: Coletar evidências

A atividade 1, trabalhando com a retangularização (entendendo por retangularizar um número como a procura de dois fatores que quando multiplicados resulta nesse número) busca mostrar que todo número pode ser escrito numa forma retangular. Pensando no número de formas retangulares que cada número pode ser escrito chegou-se facilmente à noção de números primos e números compostos. Com isso foram identificados os divisores dos números pesquisados.

Atividade 2: identificar variáveis nos blocos dos *Algeblocks*. Usando a unidade, bloco verde, para medir essas grandezas, a peça amarela e a peça laranja, não sendo possível dizer quantas vezes a peça verde, como referência única, poderia medir a peça amarela, embora se soubesse que na peça amarela teria uma medida entre 3 unidades e 4 unidades, e que portanto variaria. Assim, a peça amarela x foi definida como uma variável. Analogamente foi tratado o y, que teria um valor entre 4 unidades e 5 unidades, considerando o bloco verde como unidade.

O objetivo da Atividade 3 foi de apresentar as expressões algébricas e pedir aos alunos que representassem, com os blocos dos *Algeblocks: x^2, y^2* e *xy.* Nessa atividade ficou evidente a dificuldade que os alunos tinham de ligar a figura geométrica, com a ideia de quadrado e sua forma geométrica ser representada por um bloco dos *Algeblocks*. A dificuldade de fazer a relação da notação do x^2 e da representação geométrica do x^2, ou o x^3 e a representação do x^3 na forma geométrica, no cubo, soou a alguns alunos como novidade. Assim como as palavras quadrar e cubar.

O que ficou evidente na Atividade 4 foi que, mesmo que esse conteúdo tivesse sido trabalhado no 6º ano, os alunos apresentaram um pouco de dificuldade nessa atividade por ficarem presos às regras impostas sobre as operações de adição e subtração de números inteiros. Essa atividade foi bem ilustrativa para que os alunos percebessem que não é necessário decorar regras quando se compreende o processo das operações entre os números inteiros. Ficou claro que usando os *Algeblocks*, essas operações, vistas no concreto se tonaram, mas claras.

Nessa atividade em que foram trabalhadas a adição e a subtração de número inteiros, a dificuldade de trabalhar com sinais apareceu. Os alunos que sabiam operar com números inteiros o faziam seguindo regras, sem saber justificar o que faziam. Outros nem sabiam. O uso dos blocos *Algeblocks* e o trabalho da folha de apoio os ajudaram a entender as regras.

A proposta da Atividade 5 é muito parecida com a Atividade 4, a diferença é que há uns problemas com sentenças numéricas, fazendo com que os alunos recordassem a utilização dos parênteses. Também há uma outra atividade para representar o produto entre números inteiros usando o plano cartesiano.

O objetivo da Atividade 6 foi o de representar a operação de multiplicação no plano cartesiano. Os alunos estavam realizando as operações, de adição e subtração, apenas na reta numérica e, nessa atividade, a operação de multiplicação foi trabalhada como área. Os alunos visualizaram as regras decoradas “sinais iguais dá mais e sinais diferentes dá menos” representadas no plano cartesiano.

A Atividade 7 teve o objetivo de trabalhar a definição de polinômio. Ficou evidente que nenhum dos alunos soube dizer o que havia entendido por polinômio. Essa atividade proporcionou um momento interessante de discussão, professor e alunos, sem conhecer a palavra, foram consultar no dicionário que falava sobre polinômio e aparecia a palavra termos, que, também, não era conhecida por eles. Ficou bastante evidente que os alunos já haviam trabalhado polinômio sem saber o que era polinômio. Ao consultar o dicionário verificou-se uma lista de significados para "termo." Até que um dos alunos encontrou "um termo é um número ou variável, ou o produto de vários números ou variáveis separadas pelos sinais $+$ e $-$ numa expressão." Isso os ajudou a responder questão "O que é Polinômio?" Compreendendo o que era termo foi fácil definir polinômio por "expressão algébrica formada pela adição algébrica de termos."

A Atividade 8 foi um desafio e tanto para os alunos no momento de nomear cada expressão algébrica. Foi uma atividade que deixou os alunos explorarem bem os blocos *Algeblocks* para representar os termos de um polinômio. Nessa atividade ficou evidente que os blocos *Algeblocks* colaboraram com a "concretização" de conceitos abstratos.

A Atividade 9 e a Atividade 10 tiveram o objetivo de explorar expressões algébricas em problemas de perímetro e de área. Ficou evidente nessas atividades que os alunos, ao usarem os blocos *Algeblocks* puderam visualizar os conceitos de perímetro e área que apenas lhes haviam sido apresentadas algebricamente e fizeram o uso deles a partir de problemas. Nesses problemas os conceitos de perímetro e área que eram conhecidos por meio de definições e alguns desenhos geométricos adquiriram vida exigindo compreensão de como compô-los e como chegar às respostas. Os alunos gostaram de manipular os blocos de modo a visualizar o que o problema pedia.

Na Atividade 11 ficou evidente que os alunos realizaram a atividade representando o produto de polinômios sem dificuldade. Puderam visualizar o resultado da multiplicação formando um retângulo.

A Atividade 12 é uma atividade que faz a conexão entre a Aritmética, a Geometria e a Álgebra. Ela deu oportunidade aos alunos de sozinhos irem em busca de uma possível solução. E acharam. Ficou evidente que nesse encontro, os alunos apresentaram-se desembaraçados em fazer uso dos *Algeblocks*. Então ao representar o produto notável $(x + y)^3$ eles conseguiram realizar a operação com relativa facilidade. E puderam notar que, quando se eleva uma expressão ao cubo, a representação geométrica dessa expressão é um cubo que, no exemplo, tem lado igual a $x + y$. Quando os alunos usaram os *Algeblocks* para representar os produtos notáveis, eles visualizaram a representação de cada termo da expressão algébrica para o produto notável no material manipulativo.

Ficou evidente que deixar tarefas em que, individualmente, o aluno possa refletir sobre o que foi trabalhado em sala de aula é às vezes prepará-lo para a construção de um novo conceito a ser trabalhado.

4.2 Atividade 9: Interpretar as evidências coletadas

As Atividades fazendo uso dos *Algeblocks* proporcionaram aos alunos uma experiência de ensino de Matemática fazendo conexões entre diferentes ramos da Matemática.

Os conceitos de adição de subtração foram explorados na reta numérica, ou seja, linearmente. Os conceitos de multiplicação e divisão puderam ser representados no plano por uma figura retangular, e a operação de potência foi representada no espaço tridimensional. Todos esses conceitos os alunos puderam ver no concreto os conceitos abstratos, que já haviam estudado nos anos anteriores.

A sequência de atividade determinada pelo Projeto colaborou para a aprendizagem dos alunos. Um dos alunos afirmou ter compreendido toda essa lista de atividades usando o material manipulativo para chegar à representação dos produtos notáveis. O uso dos *Algeblocks* proporcionou uma representação concreta de cada termo do produto notável e, também, o porquê de se chamar o quadrado da soma e o cubo da soma. Pois o quadrado da soma foi representado pela união dos termos e formaram um quadrado e o cubo da soma foi representado pela união dos termos e formaram um cubo.

Ficou evidente que a Resolução de Problemas foi importante para o desenvolvimento do projeto. Pois, para nós, problema é tudo aquilo que não se sabe fazer mas que se tem interesse em resolver.

Então mesmo que as atividades desenvolvidas no Projeto os alunos já tivessem o conhecimento do conceito, a abordagem desse conceito feita de um modo diferente fazendo uso dos *Algeblocks*, permitiu concretizá-lo o objetivo desta pesquisa foi o de fazer uso do material manipulativo *Algeblocks* para reforçar, de modo concreto, conceitos numéricos, algébricos e geométricos conhecidos pelos alunos apenas algebricamente, e muitas vezes, mecanicamente.

4.3 Atividade 10: Relatar resultados

De acordo com o Modelo de Romberg–Onuchic após coletar e interpretar as evidências, o pesquisador deve deixar pronto seu relatório de pesquisa, isto é, deve relatar os resultados obtidos, considerando o caminhar de sua pesquisa, suas referências teóricas e aplicações, sempre mantendo vivo o objetivo de responder a pergunta definida para sua pesquisa. (ONUCHIC; NOGUTI; 2014, p. 65)

A pergunta desta pesquisa é:

Como promover o ensino intradisciplinar de Matemática, apoiado na Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, com o uso do material manipulativo *Algeblocks*?

Após todas as reflexões tendo esta pergunta como norte, voltei-me para a análise das evidências coletas e ao referencial teórico que teve como base as seguintes variáveis-chave: Conexões no Ensino de Matemática; Material Manipulativo e Resolução de Problemas. O objetivo agora é sintetizar as compreensões que construí ao longo desta investigação.

O desenvolvimento do Projeto apoiado na Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas foi essencial para trabalhar com o material manipulativo *Algeblocks.* Pois todas as atividades, partindo sempre de problemas, exploraram diferentes conceitos de matemática podendo ver, no concreto, conceitos abstratos construídos, mesmo que, algumas vezes, alguns conteúdos eles já tivessem trabalhados em outras aulas mas, para eles, os conceitos se apresentaram como novos ao se fazer uso dos blocos *Algeblocks*.

O material manipulativo *Algeblocks* contribuiu para ensino intradisciplinar de Matemática fazendo as conexões entre os seus três diferentes ramos (Aritmética, Álgebra e Geometria). Pois os blocos dos *Algeblocks*, mediante as atividades que lhes permitiram adquirir e visualizar no concreto certos conceitos matemáticos, contribuiu para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Com esse material manipulativo foi possível:

1. construir conceitos básicos de Aritmética, Álgebra e Geometria;
2. explorar e conceituar noções básicas de Álgebra;
3. operar com números inteiros e os representá-los com os blocos;
4. operar com expressões algébricas e as representá-las com os blocos;
5. desenvolver produtos notáveis e representá-los com os blocos.

Nesta pesquisa foi mostrado um caminho para se desenvolver o ensino intradisciplinar de Matemática com o uso do material manipulativo *Algeblocks.* Os conceitos como: número inteiro, adição, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros, expressões algébricas, polinômios, adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios e produtos notáveis puderam ser explorados fazendo uso do material manipulativo *Algeblocks* adotando a Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, com alunos trabalhando ativamente na leitura, na comunicação e no uso de materiais. Ao representar as operações no plano cartesiano, fazendo uso do material manipulativo, foi possível realizar conexões entre a Aritmética, a Álgebra e a Geometria, deixando claros os conceitos de perímetro e área que muitas vezes se apresentam confusos aos alunos.

A Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas colaborou positivamente para o andamento dessa Pesquisa. Pode-se notar que muitas vezes o aluno em seus grupos foram coconstrutores de seu próprio conhecimento e que o material manipulativo *Algeblocks* em muitos momentos serviu como ferramenta de representação da resolução apresentadas pelos grupos de alunos.

Há uma outra pergunta que foi elaborada no Capítulo 2:

- O uso do material manipulativo *Algeblocks* e da Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas permitem motivar os estudantes a aprender Álgebra e perceber as conexões com procedimentos aritméticos e geométricos?

Afirmo que as atividades do Projeto proporcionaram aos alunos explorar os conceitos abstratos e visualizar no concreto usando os *Algeblocks*. Notamos que as conexões entre os diferentes ramos da Matemática ocorreram quando os alunos manipularam os blocos concretos dos *Algeblocks* para resolver as atividades propostas.

É de se destacar a Atividade 12 em que, surpreendentemente os alunos, conseguiram passar da operação multiplicação para a operação potenciação com compreensão e significado, manipulando os blocos dos *Algeblocks*. A atividade 12 pedia para desenvolver produtos notáveis, o quadrado da soma de dois termos e o cubo da soma de dois termos. Como os alunos já haviam feito atividades com operação de multiplicação não se esperava mais do que eles desenvolverem os produtos e representarem cada produto notável em sua forma geométrica, um quadrado ou um cubo. Mas quando os alunos desenvolveram o cubo fazendo primeiro o produto do quadrado da soma e multiplicando mais uma vez por esse mesmo fator, dessa maneira:

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y) = (x^2+2xy+y^2)(x+y)$$

Eles colocaram na folha de apoio em "formato de cruz" os fatores

$(x^2+2xy+y^2)$ e $(x+y)$

Foi de admirar o procedimento desse grupo. Não era esperado que com facilidade eles tivessem tomado essa decisão.

Fiquei muito surpresa, pois para o que eles apresentaram eu, enquanto PP, não havia me preparado. Não esperava que poderia colocar o fator

$$(x^2+2xy+y^2)$$

em uma das retas. Mas fez sentido e eles conseguiram terminar o produto de

$$(x^2+2xy+y^2)(x+y).$$

Mas essa forma de realizar o produto não resultou em um cubo. Resultou em dois prismas de base retangular, mas formados pelos termos

$$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

representados pelos blocos (como representado no 12º encontro).

Como já foi dito lá no desenvolvimento do 12º encontro a PP sugeriu que aos alunos que usassem os blocos que representavam os termos

$$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

para representar um cubo, e esse movimento fez com que eles percebessem que o cubo da soma de dois termos tinha a representação geométrica em forma de cubo.

Depois, conversando com os alunos, perguntei se se era possível a eles montar um cubo usando os termos

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

representados pelos blocos. E eles conseguiram montar e perceber, no concreto, que cada face do cubo era formada por um lado de medida $(x + y)$.

Concluo que o Projeto, elaborado no Capítulo 3 desta dissertação, ajudou a responder as perguntas e ainda colaborou para mais ideias de como aproveitar melhor esse material. No livro *Algeblocks* há muitas atividades que podem ser trabalhadas em paralelo com o Currículo de Matemática do Estado de São Paulo, usar as atividades propostas no *Algeblocks* como problemas de ponto de partida para a construção de novos conhecimentos ou servir como problemas de fixação.

4.4 Atividade 11: Antecipando ações de outros

O livro *Algeblocks* pode ser desenvolvido em paralelo com o currículo de Matemática. As atividades desse livro proporcionam o ensino de um conceito novo a ser trabalho conforme a Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas propõe permitindo fazer conexão entre os três importantes ramos da matemática Aritmética Álgebra e Geometria.

Assim sendo pode-se trabalhar os *Algeblocks* em um curso de Formação Continuada para professores como forma de divulgar o material e apresentar uma forma de se trabalhar o ensino intradisciplinar de Matemática, antecipando possíveis trabalhos nessa linha.

Referências

ABRANTES, P., SERRAZINA, L. E OLIVEIRA, I. (1999). A Matemática na educação básica. Lisboa: Ministério da

ARCAVI, A. El desarrolo y el uso del sentido de los símbolos. Em I. Vale, T. Pimental, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Org), Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores (pp. 29-48). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. 2006

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensinando Matemática na sala de aula através da resolução de problemas. Boletim Gepem, Rio de janeiro, n. 55, p. 122-154, jul./ dez. 2009.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. O Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas: Aritmética, Álgebra e Geometria. 2008. (Apresentação de Trabalho/Outra).

BALASSIANO, A. L. G. O Liceu Francês do Rio de Janeiro (1915-1965): Instituições Escolares e difusão da cultura francesa no exterior. 2012. 240 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo – Faculdade de Educação, São Paulo, 2012.

BLANTON, M.; KAPUT, J. Algebrafying the Elementary Mathematics Experience." In Proceeding of the 12th ICMI Study Conference: The Future of the Teaching and Learning of Algebra, edited by Helen Chick, Kaye Stacey, Jill Vincent, and John Vincent, pp. 87 – 95. Melbourne, Victoria, Australia: University of Melbourne, 2001.

BOSSE, M. J. (2003). The beauty of "and" and "or": Connections within mathematics for students with learning differences. Mathematics and Computer Education, 37, 105-114.

BRASIL, L. A. S. Estudo Dirigido de Matemática no Ginásio. São Paulo: Fundo de Cultura, 1964.

BRASIL, S. DE E. F. Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental - Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 5 mar. 2017.

CARPENTER, T. P.; LEVI, L. Developing Conceptions of Algebraic Reasoning in the Primary Grades." Paper presented at the annual meeting of the American Education Research Association, Montreal, Quebec, April, 1999

D'AMBROSIO, U. Educação Matemática: da teoria à prática. Campinas, SP: Papirus, 1996.

DINIZ, D. Carta de uma orientadora: o primeiro projeto de pesquisa. Brasilia: Letras Livres. 2012.

ESPEJEL, N. A. H. Desrrollo del pensamiento algebraico a través del uso de los Algeblcks en alumnos de segundo grado de educación secundaria. Tese de Maestria. Universidad Pedagógica Nacional - UNIDAD UPN 098, D. F Oriente. México. 2010.

FARIA, R. W. S. C. Raciocínio proporcional: integrando Aritmética, Geometria e Álgebra com o GeoGebra / Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro - SP, 2016.

FERREIRA, N. C. Uma proposta de ensino de Álgebra abstrata moderna, com a utilização da metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da resolução de problemas, e suas contribuições para a formação inicial de professores de Matemática. 2017. 281 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro - SP, 2017.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. Investigação em educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos, Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

FUJII, T.; STEPHENS, M. Using number sentences to introduce the idea of variable. Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics, Seventieth Yearbook. NCTM. 2008

GOMES, M. L. M. História do Ensino da Matemática: uma introdução. Belo Horizonte: CAED - UFMG, 2012.

HOUAISS, A; VILLAR, M. S. Dicionário Houaiss da língua portuguesa. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.

JOHNSTON, A. M. *Algeblocks*, South-Western Publishing Co., Cincinnati, Ohio, 1994

KAPUT, J.J. What is Álgebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carreher em. L. Blanton (Eds.), Algebra de early grades (pp. 5-17). New York, NY: Routledge. 2008.

KILPATRICK, J. A History of Research in Mathematics Education. In: D.A. Grows (ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Macmillan: New York, p.3-38., 1992.

KILPATRICK, J. Fincando estacas: uma tentativa de demarcar a Educação Matemática como campo profissional e científico. Tradução: MISKULIN, R.G.S.; PASSOS, C.L.B.; GRANDO, R.C.; ARAÚJO, E.A. In: Zetetiké, v.4, nº5, janeiro/junho, Campinas, SP: UNICAMP, p.99- 120, 1996.

LAMBDIN, D. V.; WALCOTT, C. Changes through the years: Connections between psychological learning theories and the school mathematics curriculum. In: MARTIN, W. G. et al. (Ed.). The Learning of Mathematics. Reston, VA: NCTM, 2007. p. 3 - 25.

LINS, R. C; GIMENEZ, J. Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI. São Paulo: PAPIRUS, 1997.

MACLANE, S.; BIRKHOFF, G. Algebra. Nova Iorque: Macmillan Co., 1967.

MIORIM, M. A. Introdução à história da educação Matemática. São Paulo - SP: Atual, 1998.

MICHAELIS. http://michaelis.uol.com.br/busca?id=wkZd.

MIRANDA. A experiência norte-americana de fusão da Aritmética, Álgebra e Geometria e sua apropriação pela educação Matemática brasileira. 2003. 98 f. Dissertação - Mestrado em Educação Matemática – PUC, São Paulo - SP, 2003.

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics. Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston: NCTM, 1989.

NCTM. National Council of Teachers of Mathematics. Principles and standards for school mathematics. Reston, 2000.

OLIVEIRA, A. T. M. Importância do ensino integrado de Geometria, Aritmética e Álgebra no 7 o ano do Ensino Fundamental. 2014. Monografia (curso superior de licenciatura em Matemática) – Universidade Estadual de Goiás, Morrinho - GO, 2014.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora da UNESP, 1999. p. 199-218. (Seminários e Debates).

ONUCHIC, L. R. et al. (Orgs.). Resolução de Problemas: Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 53-68.

ONUCHIC, L. R.; NOGUTI, F. C. A Pesquisa Científica e a Pesquisa Pedagógica. In: ONUCHIC, L. R. et al. (Orgs.). . Resolução de Problemas: Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 53-68.

PEREIRA, C. S.; RIBEIRO, D. J.; CAVALCANTI, J. L. Matemática ou Matemática? Reflexões Sobre o Ensino Integrado entre Aritmética, Álgebra e Geometria. In: X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2010, Salvador - Bahia. Anais... Salvador - Bahia: [s.n.], 2010.

PIRONEL, M. A Avaliação integrada no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. 2002. 193f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2002.

POLYA, G. A arte de resolver problemas. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Ed. Interciência, 1966. Do original em inglês: How to solve it, 1944.

PONTE, J. P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. Em I. Vale, T. Pimental, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Org), Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores (pp. 5-27). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

RADFORD, L. The Roles of Geometry and Arithmetic in the Development of Elementary Algebra: Historical Remarks from a Didactic Perspective – Perspectives for Research and Teaching. In Approaches to Algebra, edited by Nadine Bednarz, Carolyn Kieran, and Lesley Lee, pp. 39-53. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 1996.

ROMBERG, T. A. Perspectives on Scholarship and Research Methods. In: Grows, D. A. (ed.) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, p.49-64. NCTM, New York: Simon & Schuster, 1992.

ROMBERG, T. A. Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa. Tradução ONUCHIC, L.; BOERO, M. L. In: BOLEMA – Boletim de Educação Matemática. Rio Claro: UNESP, n.27, p. 93-139, 2007.

ROMBERG, T. A. The social Organization of Research Programs in Mathematical Scienses Education. In: KILPATRICK, J.; SIERPINSKA, A. (ed.) Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity, Kluwer Academic Publishers, 1997.

SANTOS, A. R. Metodologia Científica: a construção do conhecimento. 7ª edição. Rio de Janeiro: Lamparina, 2007.

SANT'ANA, N. A. S; LAUDARES, J. B. Pensamento aritmético e sua importância para o Ensino de Matemática. 2014. Disponível em < http://www.ufjf.br/emem/files/2015/10/PENSAMENTO-ARITM%C3%89TICO-E-SUA-IMPORT%C3%82NCIA-PARA-O-ENSINO-DE-MATEM%C3%81TICA.pdf> Acesso em: 16 nov. 2017

SAUL, M. Algebra: The Mathematics and the Pedagogy. In GHAHA, UHSAUHS. **Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics**: Seventieth Yearbook. Reston, VA. 2008.

SOUSA, J. R. Ensinando integradamente Aritmética, Geometria e Álgebra: propostas de atividades para a Matemática do Ensino Fundamental. Trabalho de

Conclusão de Curso. Universidade Federal Da Paraíba Universidade Aberta Do Brasil. 2014.

SOUZA, G. M. Felix Klein e Euclides Roxo: debates sobre o ensino da Matemática no começo do século XX. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) –Universidade Estadual de Campinas, Campinas (SP), 2010.

USISKIN, Z. Concepções sobre a Álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: ARTUR, F COXFORD; ALBERT P. SHULTE. (Orgs.). Tradução: Domingues, H. H. As ideais da Álgebra. Tradução H. D. Hygino. São Paulo: Atual editora, 1995. p. 9-22.

VALE, I.; PIMENTEL, T. (2005). Padrões: um tema transversal do currículo. Educação e Matemática, 85, 14-22.

VALENTE, W. R. (Org.). Euclides Roxo e a modernização do ensino de Matemática no Brasil. Brasília-DF: Editora da UnB, 2004.

VAN DE WALLE, J. A. LOVIN, L. H. Teaching student centered mathematics Grades 5-8. Volume 3 of Van de Walle professional mathematics series. 2006.

VAN DE WALLE, J. A. Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VAN DE VALLE, J. A; KARP, K. S.; BAY-WILLIAMS, J. M. Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally. 2009.

WERNECK, A. P. T. Euclides Roxo e a reforma Francisco Campos: A gênese do primeiro programa de ensino de Matemática brasileiro. 2003. 122 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo - SP, 2003.

APÊNDICE A: Carta de autorização enviada à escola

CARTA DE AUTORIZAÇÃO ENVIADA À ESCOLA

Rio Claro, 05 de junho de 2017.

Prezada Senhora,

Eu, Lilian Esquinelato da Silva, portadora da carteira de identidade número 0, venho por meio deste solicitar à Vossa Senhoria permissão para aplicação de meu projeto para coleta de dados de minha pesquisa de Mestrado, do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, da UNESP de Rio Claro – SP, sob orientação da Profª. Drª. Lourdes de la Rosa Onuchic. O objetivo do projeto é produzir os dados para analisar a aprendizagem dos estudantes durante o processo de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Acreditamos que, com essa metodologia de ensino, possamos favorecer o processo de ensino-aprendizagem dos mesmos. O período para a realização do referido projeto será iniciado em junho e terminado agosto de 2017.

Atenciosamente,

Lilian Esquinelato da Silva

Ilma Srª
Diretora da Escola

APÊNDICE B: Carta de autorização enviada aos pais

CARTA DE AUTORIZAÇÃO ENVIADA AOS PAIS

Rio Claro, ____ de _________de 2017.

Eu, ____, portador da carteira de identidade número _________________________, declaro para os devidos fins que autorizo **Lilian Esquinelato da Silva** a utilizar toda a informação captada – filmagem e áudio – durante a participação de meu filho (a), ______________________________________, na sala de aula, para fins de sua pesquisa de mestrado no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro – SP.

____________________________ ___________________________

Aluno Responsável

APÊNDICE C: Termo de Compromisso

TERMO DE COMPROMISSO

Escola: Escola Estadual Carolina Augusta Seraphim
Conteúdo: Números Racionais
Série (Ano): 7ª série (8º ano)
Quantidade de Estudantes: ___ estudantes
Quantidade de Aulas Previstas: ____ horas/aula
Período: ___/___/___ até ___/___/___

Introdução

Este termo de compromisso tem por objetivo estabelecer parâmetros para nortear o desenvolvimento e a organização de um trabalho diferenciado em Matemática, apontando as responsabilidades e os direitos dos estudantes e da professora. O trabalho será realizado na disciplina de Matemática na 7ª série (8º ano) do Ensino Fundamental, em uma escola estadual, localizada na cidade de Rio Claro – SP. Será desenvolvida parte do conteúdo matemático pertinente à 7ª série (8º ano) do Ensino Fundamental, proposto pela instituição, cujo trabalho será aplicado pela pesquisadora e pelo professor da turma, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, sob a observação participante da pesquisadora Lilian Esquinelato da Silva. O trabalho será desenvolvido com o uso do material manipulativo *Algeblcks* (blocos plásticos que representam operações algébricas).

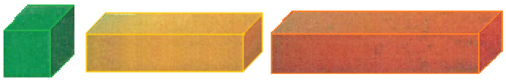
Normas:

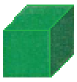
- As regras da escola deverão ser obedecidas;
- O trabalho será desenvolvido de forma cooperativa e colaborativa. Os estudantes trabalharão em pequenos grupos, com o objetivo de resolver problemas visando à construção de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos;
- Os grupos serão formados por quatro estudantes, aceitando-se três na impossibilidade de um quarto elemento juntar-se ao grupo, devido à insuficiência do número de estudantes na sala de aula;
- Todos deverão engajar-se na discussão dos problemas apresentados;

- O trabalho individual de cada membro terá um efeito direto sobre o sucesso do grupo;
- Cada grupo deverá entregar as atividades em uma folha separada ao final de cada aula. A pesquisadora tirará xerox das atividades entregues pelos grupos e na aula seguinte as devolverá. Assim, os estudantes poderão ter o registro das atividades em seu caderno.

APÊNDICE D: Folhas de atividades

ATIVIDADE 1

Atividade utilizando Algeblocks 

Um bloco verde,  *,representa uma unidade ou o número natural ou o número 1.*

- Desta forma, como você representaria o número 12 utilizando os blocos verdes?

- De quantas maneiras você pode dispor estes 12 blocos formando um retângulo?

- Quais as medidas dos lados formados pelos retângulos?

- O que podemos concluir dessas medidas?

- Que números podem só podem ser escritos de mais uma de forma retangular?

- Que números podem só podem ser escritos por apenas uma de forma retangular?

ATIVIDADE EXTRA 1

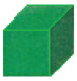
- Ana comprou quatro lápis idênticos. Quanto ela gastou?

- Vitor pratica tocar guitarra a mesma quantidade de tempo a cada dia. Quanto ele pratica em cada semana?

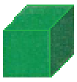
- Fernanda pedala com sua bicicleta duas vezes mais rápido do que Diego corre. Diego corre duas vezes mais rápido do que Marcos anda. Quão rápido Fernanda pedala de bicicleta em relação a Marcos?

Como você representaria essas situações usando os blocos dos *Algebloks*?

ATIVIDADE 2

- É preciso quantos blocos verdes  para representar o bloco amarelo  ?

- O bloco amarelo está entre quais números inteiros?

- É preciso quantos blocos verdes  para representar o bloco laranja  ?

- O bloco laranja está entre quais números inteiros?

- O que podemos concluir dos blocos amarelo e laranja?

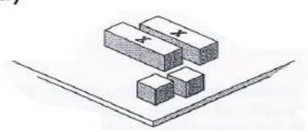
- Como você representaria 3x e 8y utilizando os blocos dos *Algeblocks*?

ATIVIDADE 3

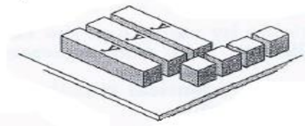
- Como você representaria as seguintes expressões utilizando os blocos dos *Algeblocks*?
  - x+3
  - 2x+1
  - 3y

- Escreva as expressões algébricas pertinente de cada representação:

a)

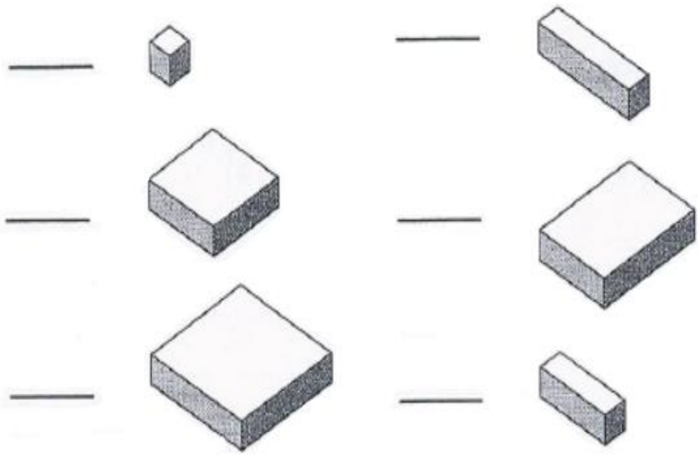


b)

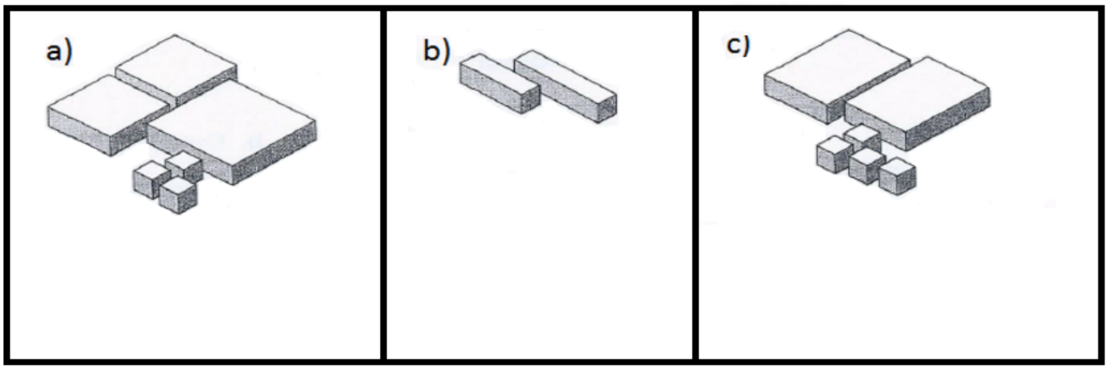


- Complete as lacunas com as correspondentes opções:

x **x^2** **1** **y** **y^2** **xy**



- Escreva as expressões algébricas de cada item:



- Represente utilizando os blocos verdes, amarelos e laranjas as seguintes expressões algébricas:

  - $3x^2 + 1$
  - $x^2 + xy$
  - $y^2 + 4$
  - $3xy + x$

ATIVIDADE 4

Qual o significado de número positivo e número negativo? Vamos pensar nesta questão realizando o próximo problema.

Vamos utilizar o oceano como valor posicional do nosso Gráfico do Nível do Mar. Desenhe os seguintes itens utilizando as indicações de distâncias:

- uma nuvem a 80 m acima do nível do mar.
- um peixe em 6 m abaixo do nível do mar.
- um mergulhador em 15 m abaixo do nível do mar.
- um pássaro em 6 m acima do nível do mar.
- um submarino a 30 m abaixo do nível do mar.

Gráfico do Nível do Mar (medida em metros)

80

18

12

6

~~~~~~~~0~~~~~~~

- 6

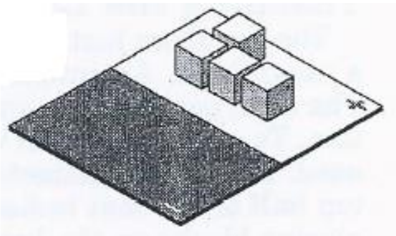
-12

-18

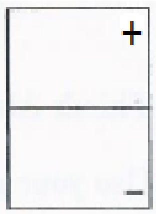
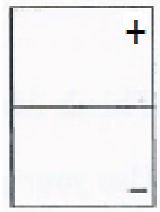
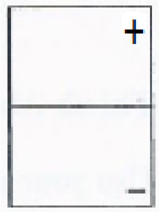
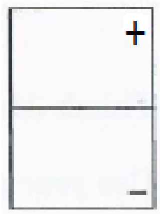
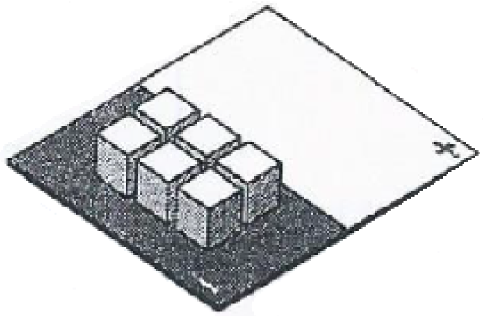
-80

Se o mergulhador estiver localizado a 5 metros abaixo do nível do mar e a nuvem localizada a 80 metros acima do nível do mar, a qual distância o mergulhador viria a nuvem?

- Como você representaria o número oposto que está descrito na figura?

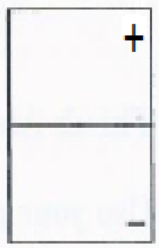
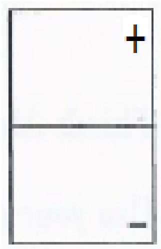
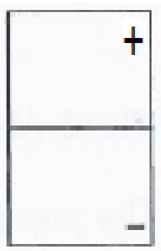
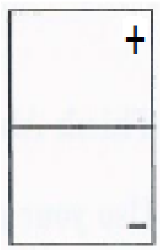

~~~~~~~~

- Use o espaço de mais e menos e os blocos para representar cada um dos itens.

a) 5 	b) -4 e 6 
c) um ganho de 5 metros 	d) perdi 2 pontos 
e) Que número inteiro representa o desenho ao lado?	

-

● Agora utilizando também os blocos que representam variáveis e o espaço de mais e menos para representar cada um dos itens. Esboce a sua resposta.

a) x 	b) 2x+5 
c) -7y 	d) 3-x 

ATIVIDADE 5

Adição de números inteiros:

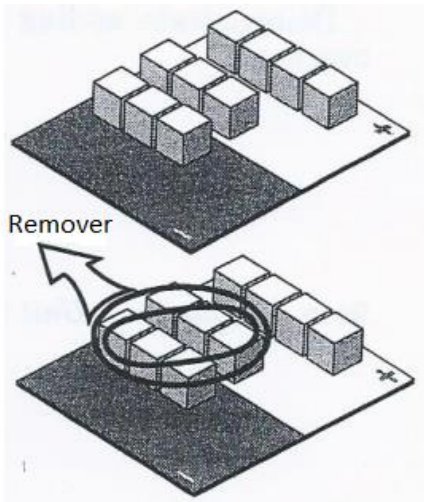
Essa discussão do zero é para dizer que o zero representa a ausência. Além disso essa unidade trata de somas que resultam em zero. Depois de praticar a operação de adição com o modelo físico, aos estudantes se pede para generalizar suas observações para regras da adição de inteiros.

Por exemplo, qual o valor de $-3 + 7 = ?$

Na seguinte figura vemos a representação da operação -3+7. Essa operação associa uma unidade do lado negativo com uma unidade do lado positivo assim temos o resultado igual a zero, +1-1. Repete-se esse procedimento até que se encontre a maior soma igual a zero, a soma de qualquer número com seu oposto sempre resulta em zero. Por tanto $-3 + 7 = 4$ Digite a equação aqui.(4 unidades positivas).

Primeiro coloque na folha de apoio os blocos representando

Depois de perceber que 3 blocos de cada lado positivo adicionado com 3 blocos do lado negativo resulta em uma soma zero.



Para encontrar o valor de (-5) + (- 8) faremos os seguintes passos:

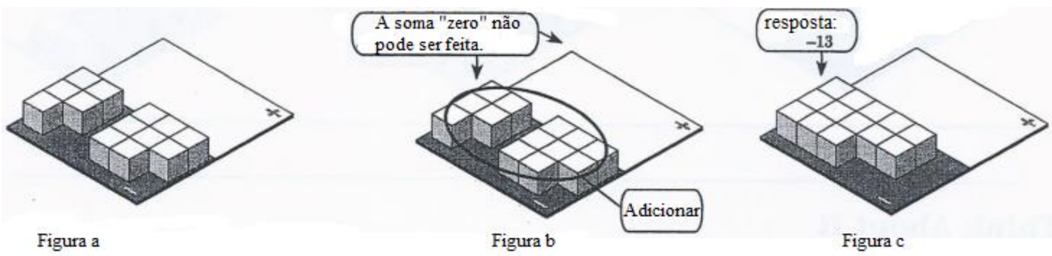
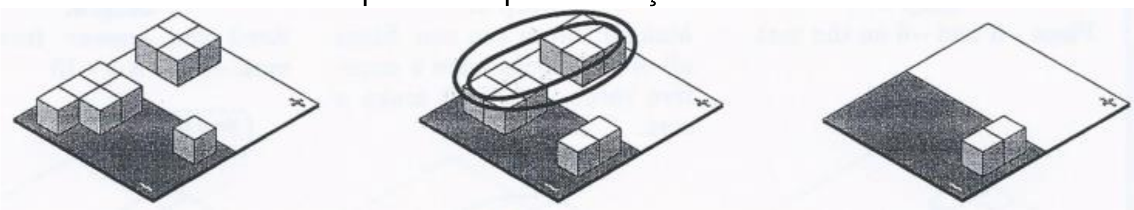


Figura a Figura b Figura c

- Usando a folha de apoio de positivo e de negativo e os blocos verdes responda as seguintes questões e escreva as respostas usando números inteiros:

   b) -2+6+(-4)-1= ______________   b)5+-(2+1-3)-2=____________

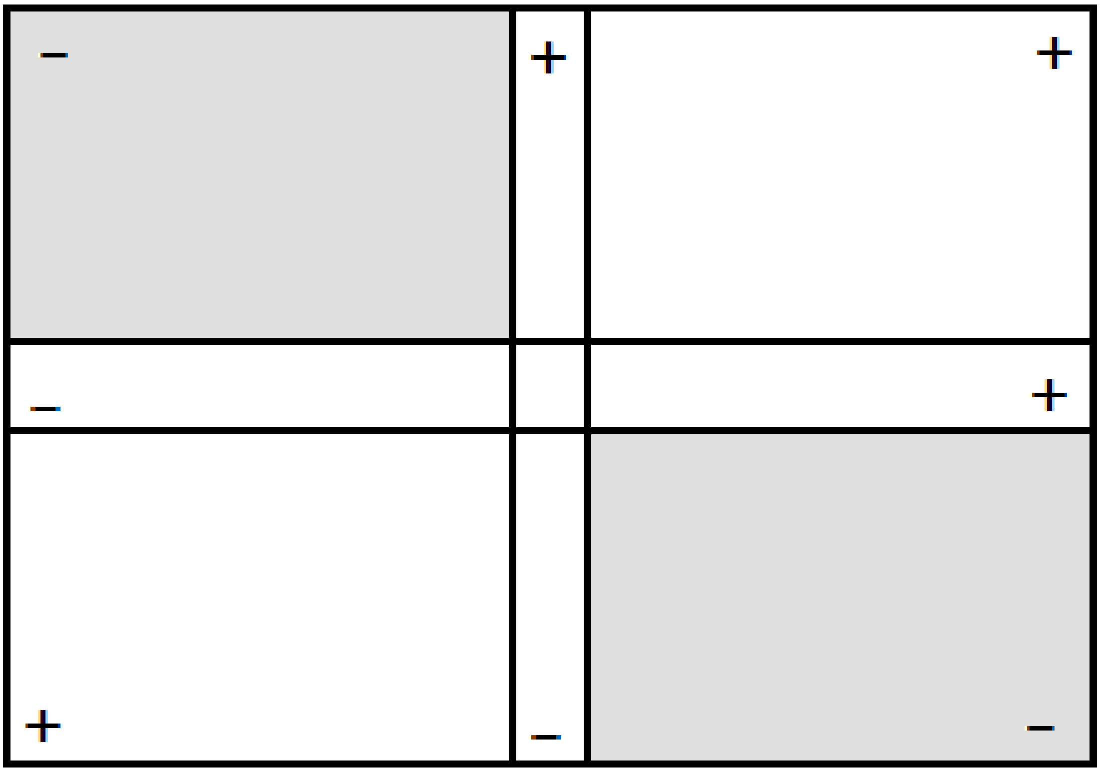
- **Atividade:** Escreva um problema para situação abaixo:



ATIVIDADE 6

● Represente a multiplicação dos números inteiros na estrutura em “formato de cruz”:

- 5 x 4
- (-3) x 7
- (-9) x (-3)
- 2 x (-6)



ATIVIDADE 7

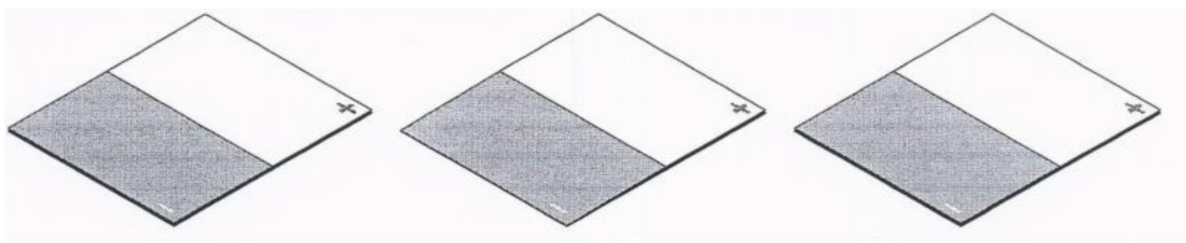
Nessa atividade vamos representar com os *Algeblocks* as operações de adição e subtração de expressões algébricas.

Represente: $(-1)(-3y+4)$ usando as peças dos *Algeblocks*.

Todos haviam pensando como deveriam trabalhar a questão 1 e no inicio nesse encontro, na sala de aula, com o material a mão fizeram isso:

Encontrar o negativo da expressão algébrica é achar o oposto muda o sinal de cada termo da expressão.

Usando os *Algeblocks* represente $2x+3-3x+5=$



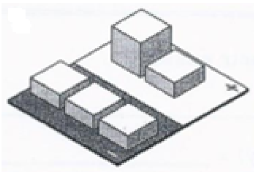
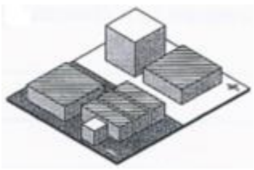
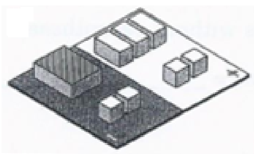
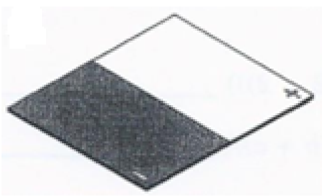
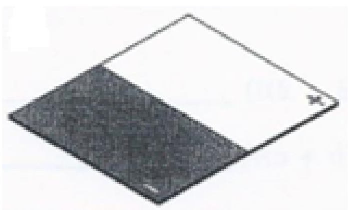
Resposta final

Atividade extra 2

Pense e responda: o que é um polinômio?

ATIVIDADE 8

Complete o quadro. Primeiro reduza os termos semelhantes e os simplifique. Depois escreva a expressão algébrica, a nomeie e identifique o seu grau.

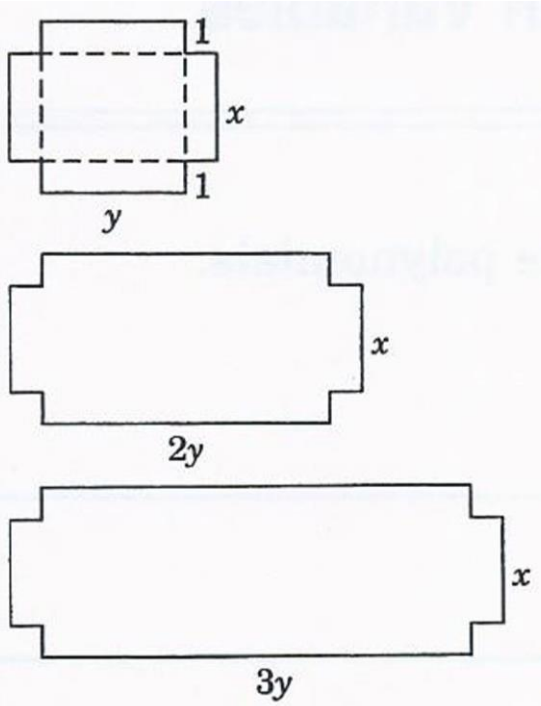
Algeblocks	Algebricamente	nome	grau
	$x^3 - 2x^2$	binômio	3
			
			
		monômio	3
		trinômio	2

ATIVIDADE EXTRA 3

Escreva uma expressão algébrica que quando simplificada dê x^2y

ATIVIDADE 9

Usando as peças dos *Algeblocks* reproduza as seguintes figuras e, para cada uma delas mostre seu o perímetro e sua a área.

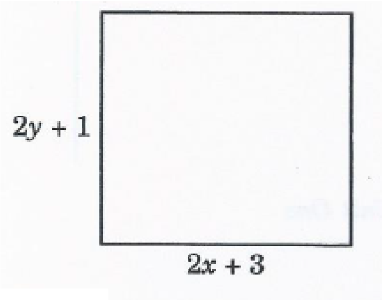


ATIVIDADE EXTRA 4

Represente uma figura com a mesma forma que a atividade anterior com a área igual a $3xy+2x^2$ e o perímetro igual a $10x+2y$

ATIVIDADE 10

- Mostre os blocos que representam a área do retângulo abaixo:



Foram usados quantos blocos xy?______

Foram usados quantos blocos x?_______

Foram usados quantos blocos y? _______

Foram usados quantos blocos de unidade?____

Usando os blocos x e y, faça uma área retangular, com altura 2x + 2 e comprimento y + 3. Encontre o perímetro. Esboce a sua resposta mostrando com os Algeblocks

ATIVIDADE 11

- Represente a multiplicação dos polinômios na estrutura em formato de cruz:
  - $(x + 2) \times (y + 4)$
  - $(2y + x + 2) \times (y + 1)$
  - $(x - y - 3) \times (2y - 1)$
  - $(-2x - y - 1) \times (-y + 2)$

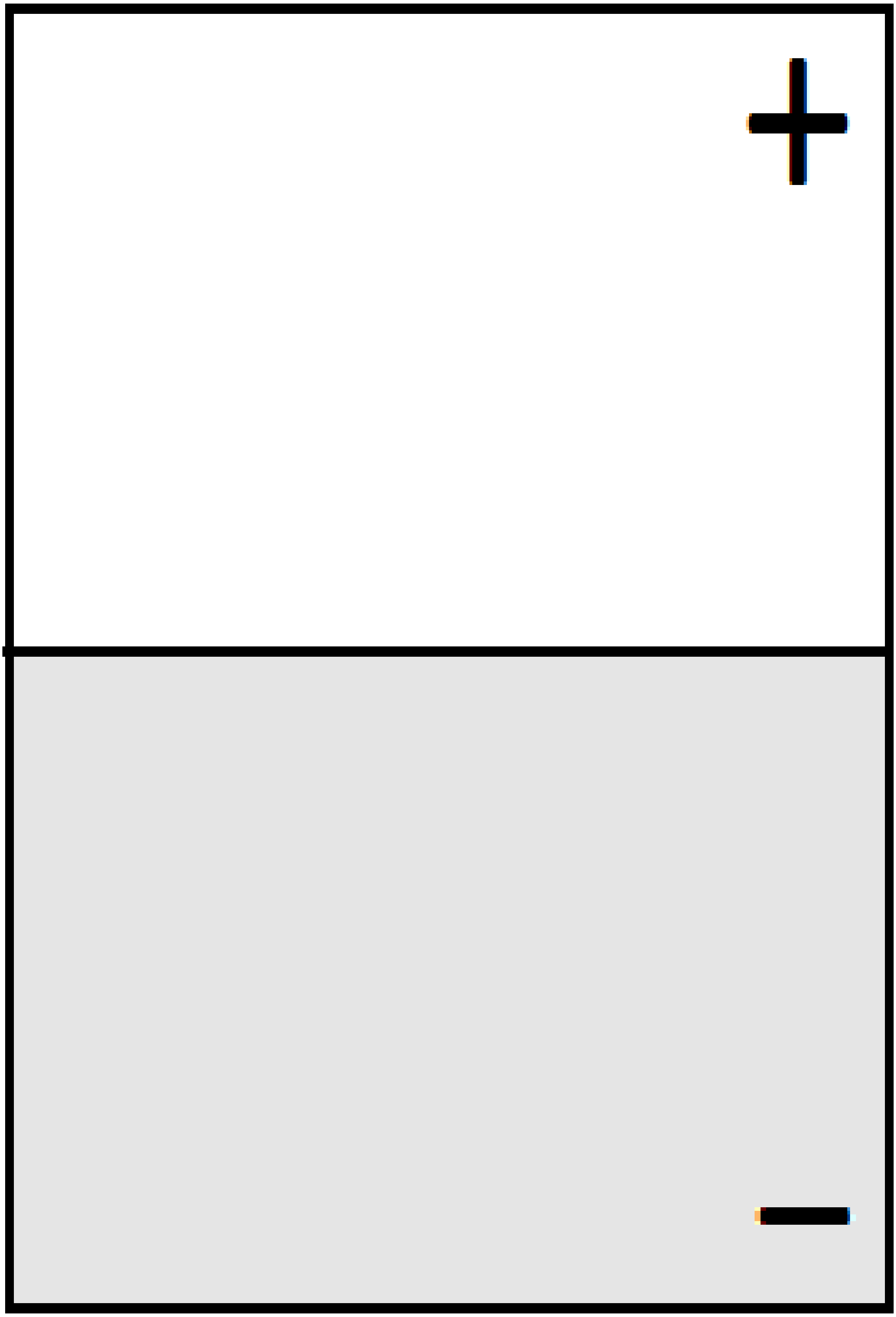
ATIVIDADE 12

a) Represente $(x+y)^2$ usando os *Algeblocks.*

b) Represente $(2x-y)^2$ usando os *Algeblocks.*

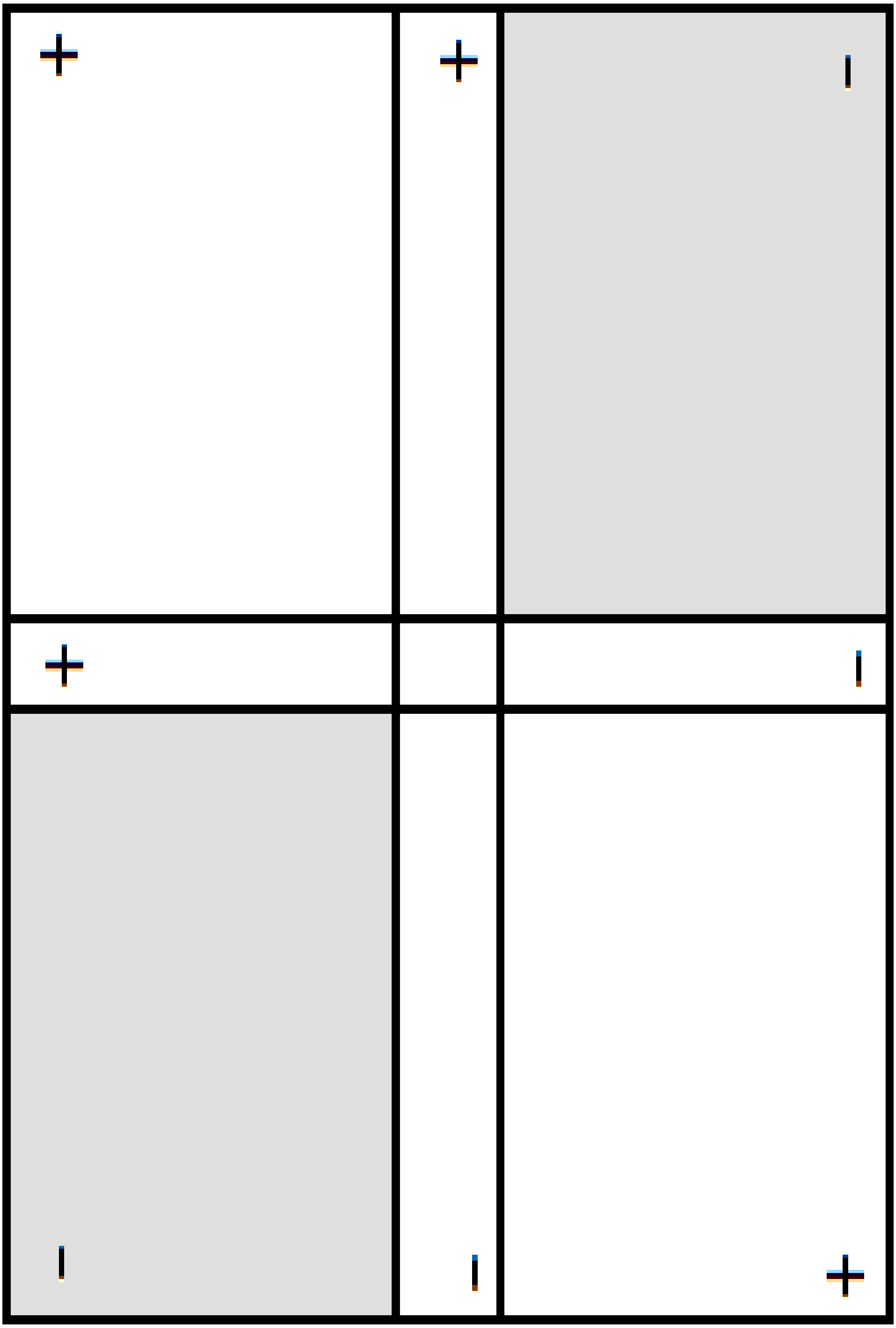
c) Represente $(x+y)^3$ usando os *Algeblocks.*

Figura 105: Folha de apoio de Algeblocks para adição e subtração



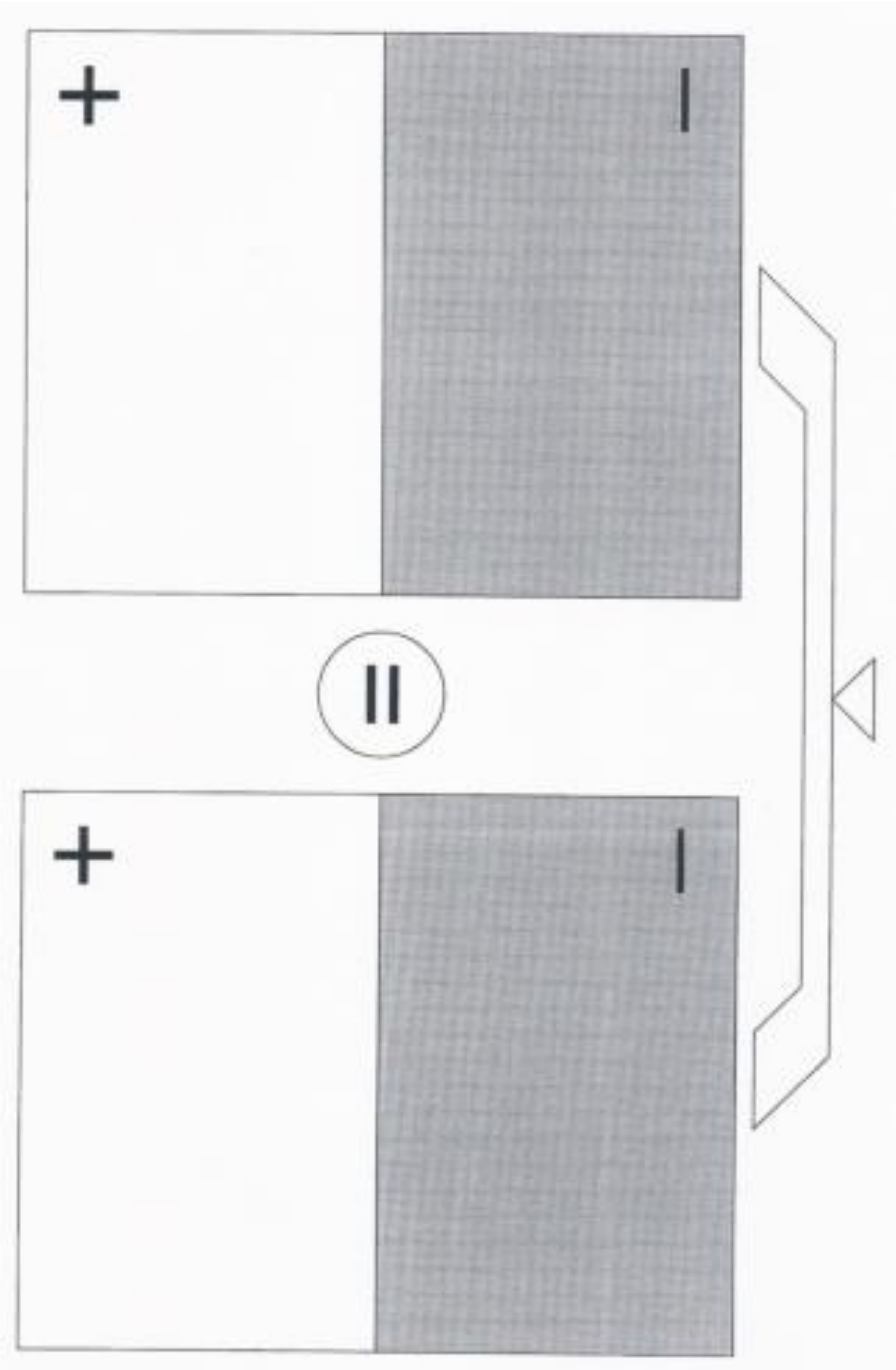
Fonte: Livro Algeblocks

Figura 106: Folha de apoio de Algeblocks para multiplicação e divisão



Fonte: Livro Algeblocks

Figura 107: Folha de apoio de Algeblocks para encontrar solução de equação



Fonte: Livro Algeblocks

ANEXO A: Relato de Linda Gojak.

Disponível em http://www.nctm.org/News-and-Calendar/Messages-from-the-President/Archive/Linda-M_-Gojak/Making-Mathematical-Connections/

By NCTM President Linda M. Gojak

NCTM *Summing Up*, October 3, 2013

One of the most memorable moments I had in teaching mathematics occurred in a fifth-grade class. We began the year using rectangular arrays as a model to develop the concept of prime and composite numbers. We hung student-made posters of the numbers from 1 to 100 with representations of arrays and lists of factors for each number around the room. By the end of that unit all my students had mastered multiplication facts and could factor with facility as we began our work with fractions. The connections among concepts and the use of concrete representations certainly led to deeper understanding. Later that year, students worked with a variety of models to find area and perimeter of rectangles and extended that experience to find the areas of triangles, parallelograms, and trapezoids. Most students were able to generalize a formula, albeit not always the most efficient, for each polygon. One day, a student commented that this was just like what they had studied at the beginning of the year. When I gave a puzzled look, the class pointed to the posters still on the wall from our first unit of study and said, “You know, that factor and multiple stuff.” I had a new appreciation for the power of providing experiences that enable students to make connections among mathematical ideas. My students remembered and understood the mathematics that we had studied months earlier!

Since that experience I have given much thought to the Process Standards in *Principles and Standards for School Mathematics*, and their impact on teaching. With the current focus on progressions and trajectories of content standards, the potential of the Connection Standard (NCTM, 2000) continues to pique my interest. It’s a powerful standard:

Instructional programs from prekindergarten through grade 12 should enable all students to—

- recognize and use connections among mathematical ideas;
- understand how mathematical ideas interconnect and build on one another to produce a coherent whole;
- recognize and apply mathematics in contexts outside of mathematics.

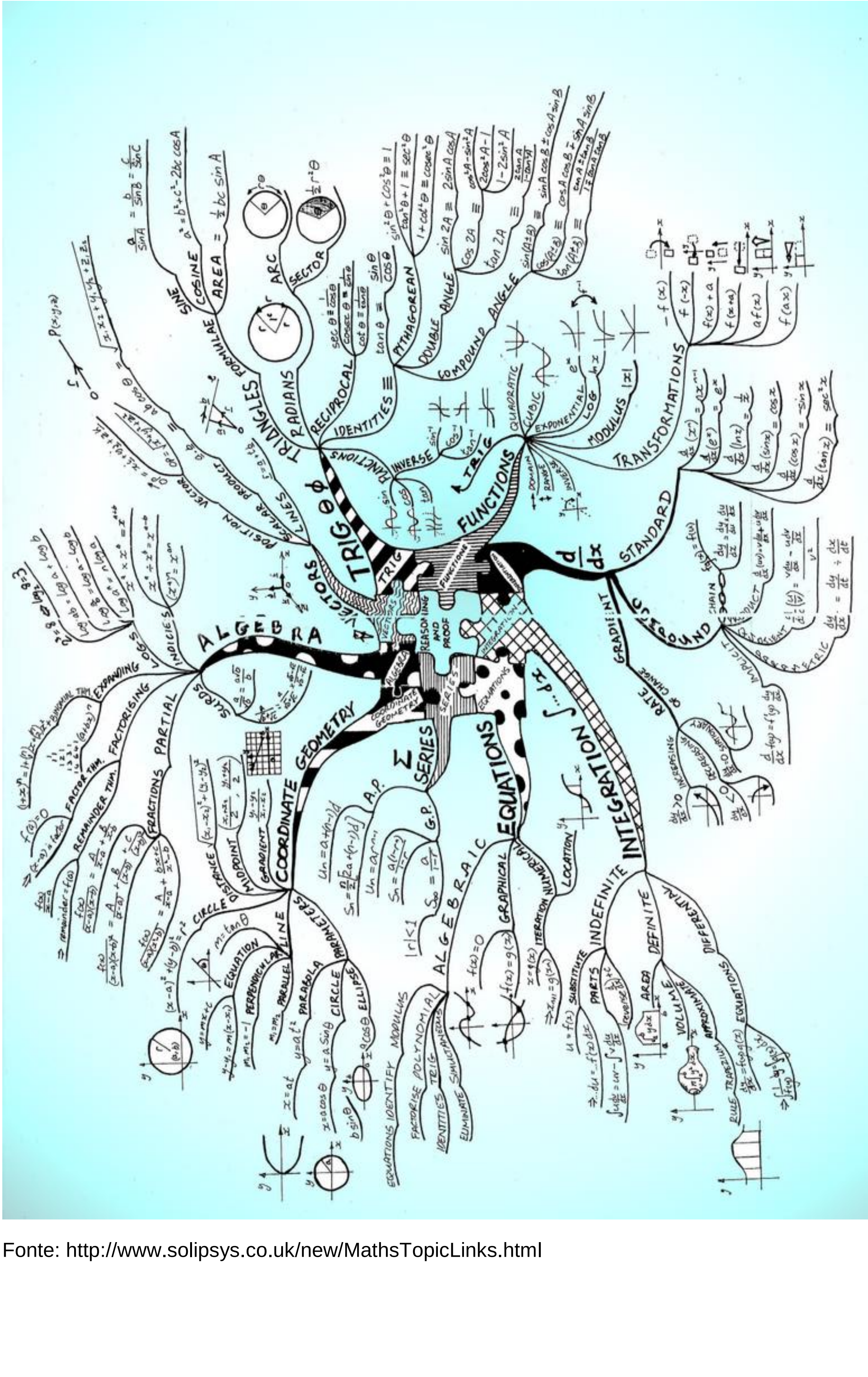
Too often, rather than making sense of mathematical ideas, students focus on remembering procedures or tricks. For example, how many students learn “flip and multiply” to divide fractions but have no idea why it works? Often those who understand why the procedure works struggle to apply it in problem situations. The procedure alone often leads to misconceptions. Students who work from rote memory often invert the wrong fraction, forget to change operations, or even apply the rule when multiplying two fractions. The meaning of operations doesn't change from whole numbers to fractions. For example, in the early grades, the understanding that students develop of division of whole numbers often rests on the idea that "9 ÷ 3," for example, asks how many groups of 3 are in 9. As students move to fractions, it is important to provide them with experiences that connect this whole-number understanding to similar examples with fractions: "9/16 ÷ 3/16," for example, asks how many groups of 3/16 are in 9/16. In this way, students gain a deeper understanding rather than depending on a memorized procedure and can apply division of fractions to a variety of problem-solving situations and real-world applications.

Many teachers use manipulative materials to introduce a new concept. Manipulatives themselves, however, do not ensure understanding. We must provide experiences that support students' efforts to make connections between what they are doing with the materials and the mathematical ideas that they represent. This takes time and teacher expertise. Algebra tiles are not an end to teaching basic algebra concepts—when used appropriately, they provide students with opportunities to connect their work to the concepts. And it is these connections that enable students to make sense of the abstract representations.

Although it is important to think about the connections among concepts within the grade level or courses that we teach, it is also important to reflect on the connections across grade levels. This work involves thoughtful discussions with other colleagues about the way that concepts are taught and the potential linkages among those ideas. Many of us learned mathematics as isolated pieces of information. Taking a mathematical concept and considering how it originates, extends, and connects with other concepts across the grades will help teachers to develop a deeper understanding. It is then that we can plan instruction that ensures that our students regularly make connections to help them make sense of the mathematics they are learning.

ANEXO B: Conexões entre os Tópicos de Matemática

Figura 108: Maths Topic Links



Fonte: http://www.solipsys.co.uk/new/MathsTopicLinks.html