

**PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA**

**Programação linear: Conceitos teóricos e utilização
de ferramentas computacionais**

Angelita Brandi de Oliveira

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

2023



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Programação linear: Conceitos teóricos e utilização de ferramentas computacionais

Angelita Brandi de Oliveira

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de Rio Claro.

Orientadora
Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

**Rio Claro
2023**

O48p

Oliveira, Angelita Brandi De

Programação linear: Conceitos teóricos e utilização de ferramentas computacionais / Angelita Brandi De Oliveira. -- Rio Claro, 2023
99 p. : il., tabs.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro

Orientadora: Marta Cilene Gadotti

1. Programação linear. 2. Ferramenta computacional. 3. Método simplex. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Impacto potencial desta pesquisa

As ferramentas tecnológicas têm um impacto significativo no ensino da PL, tornando-a mais acessível e eficiente para estudantes e professores. Com esta pesquisa buscamos apresentar métodos que facilitam o processo de resolução de problemas lineares com softwares e aplicativos que simplificam o processo de otimização de problemas lineares, permitindo que o processo de ensino aprendizagem seja mais satisfatório.

Potential impact of this research

Technological tools have a significant impact on LP teaching, making it more accessible and efficient for students and teachers. With this research we seek to present methods that facilitate the process of solving linear problems with software and applications that simplify the problem optimization process, allowing the teaching-learning process to be more satisfactory.

ANGELITA BRANDI DE OLIVEIRA

Programação Linear: Conceitos teóricos e utilização de ferramentas computacionais

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em matemática.

Comissão Examinadora

Profa. Dra. MARTA CILENE GADOTTI
IGCE / UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. WLADIMIR SEIXAS
CCET / UFSCar/São Carlos (SP)

Prof. Dr. LUCIANO APARECIDO MAGRINI
IFSP / Votuporanga (SP)

Conceito: Aprovado.

Rio Claro/SP, 18 de abril de 2023

*Dedico este trabalho primeiramente a Deus,
a minha mãe que sempre me apoiou,
meu companheiro Ricardo, e meus filhos Emanuelly
e João Ricardo pelo carinho, incentivo e paciência.*

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por me permitir continuar estudando, me aperfeiçoando cada vez mais.

Agradeço à minha família, meu companheiro de vida Ricardo por nunca me deixar desistir e me apoiar sempre, aos meus filhos, Emanuely e João Ricardo, por compreender os momentos que a mamãe precisava estudar. Agradeço minha mãe Ana Maria por sempre acreditar no meu potencial e me incentivar.

Agradeço a minha professora e orientadora, Marta Cilene Gadotti, pela paciência, companheirismo, auxílio, ensinamento e orientações nesse trabalho.

Agradeço aos professores membros da banca examinadora pelas valiosas contribuições.

Agradeço a todos os meus professores que contribuíram com o meu aprendizado durante programa de mestrado.

Agradeço a todos meus professores, desde a Educação Básica até a graduação que de alguma forma contribuíram para eu ser a pessoa e a profissional que me tornei.

Agradeço aos meus colegas do programa de mestrado, pelo companheirismo, pelas horas de estudo e incentivo durante todo o processo.

Agradeço em especial, minha grande amiga Edilene, por toda a confiança que tem em mim, pelos momentos de estudo, apoio, força e incentivo.

*Se as leis da Matemática referem-se à realidade,
elas não estão corretas; e, se estiverem corretas,
não se referem à realidade.*

Albert Einstein

Resumo

Programação Linear é uma ferramenta da Pesquisa Operacional aplicada à otimização de problemas que buscam a melhor solução possível para o objeto de estudo. Por seu viés prático de aplicação procura resolver os problemas utilizando os recursos disponíveis considerando as limitações impostas. Com esse trabalho buscamos percorrer os caminhos que a programação linear desenvolveu ao longo do tempo, quais seus fundamentos matemáticos via resultados da Álgebra Linear e suas aplicações. Apresentaremos recursos computacionais, gratuitas, que auxiliam no processo de resolução de problemas de otimização, via método gráfico e simplex.

Palavras-chave: Álgebra Linear, Programação linear, Método Gráfico, Método Simplex, Ferramenta computacional.

Abstract

Linear Programming is an Operations Research tool applied to problem optimization that seeks the best possible solution for the object of study. Due to its practical application bias, it seeks to solve problems using the available resources, considering the imposed limitations. With this work we seek to follow the paths that linear programming has developed over time, what are its mathematical foundations via results of linear algebra and its applications. Let's get to know free computational tools that help in the process of solving optimization problems, via the graphical and simplex method.

Keywords: Linear algebra, Linear Programming, Graphical Method, Simplex Method, computational tool.

Lista de Figuras

2.1	Representação gráfica	28
2.2	Solução gráfica	28
3.1	Solução básica	36
6.1	Aplicativo Linear Optimization	58
6.2	Aplicativo Linear Optimization LITE	58
6.3	Aplicativo Linear Optimization LITE	59
6.4	Aplicativo Optimizador Lineal: Simplex	59
6.5	Tela inicial do Aplicativo Optimizador Lineal: Simplex	60
6.6	Aplicativo Linear Program Solver	60
6.7	Ferramenta PHPSimplex	61
6.8	Interface do Solver simplex	62
6.9	Ferramenta PHPSimplex	64
6.10	Interface do PHPSimplex	65
6.11	Tela inicial após introdução dos dados	66
6.12	Tela apresentando forma padrão	67
6.13	Imagem da tabela inicial	67
6.14	Imagem da tabela 2: Após troca de P_{11} por P_1 na base.	68
6.15	Imagem da tabela 3: Após troca de P_{13} por P_3 na base.	68
6.16	Imagem da tabela 4: Após troca de P_{14} por P_4 na base.	69
6.17	Imagem da tabela final fase I	69
6.18	Imagem tabela inicial da fase II	70
6.19	Imagem tabela 2: Obtenção do valor ótimo	70
6.20	Interface do Solver simplex	72
6.21	Interface do Solver simplex	73
6.22	Organização inicial da tabela	74
6.23	Imagem tabela inicial destacando variável que sai da base e o elemento pivô.	74
6.24	Imagem tabela após interação inicial	75
6.25	Imagem segunda tabela destacando variável que sai da base e o elemento pivô.	75
6.26	Imagem segunda tabela após interações.	76
6.27	Imagem da tela com resultado final	76
6.28	Interface do PHP Simplex	77
6.29	Interface com valores a serem analisados.	78
6.30	Imagem da resolução gráfica	79
6.31	Imagem da tabela com as regiões de interesse.	80

6.32	Tela com o método simplex	81
6.33	Imagem primeira tabela simplex	81
6.34	Imagem segunda tabela simplex	82
6.35	Imagem tabela final após todas as interações.	82
6.36	Aplicativo Linear Program Solver	83
6.37	Interface do Linear Program Solver	84
6.38	Imagem da tela inicial para inserção dos dados do problema.	84
6.39	Imagem tela inicial com os dados do problema.	85
6.40	Resolução gráfica	85
6.41	Método simplex	86
6.42	Imagem segunda tela Método Simplex	86
6.43	Imagem terceira tela Método Simplex	87
6.44	Matriz simplex	87
6.45	Primeira interação matriz simplex	88
6.46	Segunda interação matriz simplex	88
6.47	Resultado final da matriz simplex	89
A.1	Hiperplano e Semiespaço	95
A.2	Poliedro	96
A.3	Representação de um politopo	96
A.4	Raio	97
A.5	Conjunto convexo e não convexo	97
A.6	Conjunto convexo	98
A.7	Conjunto não convexo	98
A.8	Combinação convexa	99
A.9	Envoltório convexo	99

Lista de Tabelas

4.1	Correspondência entre o programa primal e o dual.	44
5.1	Como organizar o problema no formato tableau	50
5.2	Tabela inicial para o exemplo 5.2	53
5.3	Primeiro passo para o exemplo 5.2	53
5.4	Segundo passo para o exemplo 5.2	54
5.5	Terceiro passo para o exemplo 5.2	54
5.6	Quarto passo para o exemplo 5.2	55
5.7	Quinto passo para o exemplo 5.2	55
6.1	Tabela: Produtividade em kg/m^2 e lucro por produto	63

Sumário

1	Introdução	19
2	Contextualização histórica e teórica	21
2.1	Introdução à programação linear	22
2.2	Conceitos básicos	23
2.3	Forma padrão da programação linear	24
2.4	Aplicação da modelagem matemática	26
3	Resultados básicos	31
3.1	Região viável e vértices	31
3.2	Soluções básicas da PL	32
3.3	Teorema fundamental da programação linear	37
4	Dualidade	39
4.1	Dualidade na programação linear	40
4.2	Teoremas da dualidade	45
5	Método Simplex	47
5.1	Motivação	47
5.2	Pivoteamento	48
5.3	Metodologia	49
5.4	Variável de saída	50
5.5	Solução factível mínima	51
6	Aplicações	57
6.1	Ferramentas computacionais	57
7	Conclusão	91
	Referências	93
A	Conceitos geométricos utilizados na programação linear	95
A.1	Conceitos básicos	95
A.2	Conjunto convexo	97

1 Introdução

Muitos classificam a programação linear como uma das grandes descobertas do século XX, pois esta ferramenta padrão tem possibilitado que cada vez mais as empresas de países industrializados possam otimizar seus resultados, assim como seu uso em outros setores da sociedade vem crescendo rapidamente. Mas qual a natureza desta ferramenta e que tipo de problemas ela realmente ajuda a resolver?

O objetivo deste trabalho é compreender as múltiplas aplicações dessa ferramenta tão importante e como estas se fazem necessárias em nossos dias atuais. Além disso, apresentar ao leitor ferramentas tecnológicas que facilitam o processo de operacionalizar esses cálculos.

No capítulo 2 iniciaremos com um breve contexto histórico para entendermos suas origens e como se deu o desenvolvimento dessa ferramenta tão utilizada nos dias atuais. Se faz importante destacarmos que apesar de ter o nome de **programação**, que nos remete a algo computacional, não surgiu com essa conotação, apesar de hoje em dia fazer todo sentido, pois está intrinsecamente ligados a algoritmos e programas computacionais, mas surgiu com a conotação de planejamento, e o **linear** se dá ao fato de serem trabalhadas (analisadas) somente com funções lineares.

No terceiro capítulo vamos nos familiarizar com alguns conceitos básicos e fundamentais para que consigamos entender essa importante ferramenta utilizada na matemática. Iremos conhecer o **método gráfico** através de exemplos que facilitarão nossa compreensão, veremos o porquê de apesar de muito intuitivo e prático esse método não se aplica a grandes desafios.

No capítulo quarto vamos aprofundar na metodologia e garantir que nossos resultados são válidos, não deixando de conhecer e definir os resultados fundamentais envolvidos na programação linear.

Quando pensamos em dualidade, nos vem a ideia de ambiguidade, pluralidade, no quarto capítulo vamos entender como esse conceito pode ser trabalhado, vamos perceber que a cada problema de programação linear existe outro associado a ele.

No quinto capítulo do trabalho vamos conhecer o método simplex que, hoje em dia, é um dos métodos mais utilizados e importante dentro da programação linear. Desta maneira, não poderíamos deixar de apresentar suas principais características e funcionalidades, assim como a sua aplicação em exemplos práticos, presentes no Capítulo 6.

O conceito de otimização normalmente está relacionado à tomada de decisão estratégica que melhor relaciona os recursos e limitações para se obter a melhor solução possível. Assim, no último capítulo vamos apresentar aplicações para ilustrar como aplicativos e ferramentas computacionais, de acesso gratuito, podem auxiliar no estudo da programação linear e seus métodos de resolução de problemas diversos.

2 Contextualização histórica e teórica

A contextualização histórica está baseada nas referências [1], [2] e [3].

Para compreendermos a programação linear devemos primeiramente entender qual sua origem, pois a mesma surge da necessidade humana do conhecimento e tem suas raízes na Antiguidade Clássica e até mesmo na Antiguidade Oriental. Euclides, (século III a. C.) no seu livro III, já buscava determinar a maior e a menor distância de um ponto a uma circunferência, e no seu livro IV descreveu uma forma de obter um paralelogramo de área máxima com um dado perímetro, ou seja, buscava uma forma de otimizar seus problemas de origem geométrica. Mas é durante os séculos XVII e XVIII, que foram desenvolvidos métodos de cálculos que possibilitavam resolver problemas de otimização, como por exemplo, problemas de extremos condicionados com restrições de igualdade, com as contribuições de Newton, Fermat, Leibniz, Lagrange e Bernoulli que foram essenciais.

A programação linear é uma importante ferramenta da Pesquisa Operacional (PO) utilizada na solução de problemas que busca a otimização de um sistema em estudo e que considera funções lineares.

A Pesquisa Operacional pode ser definida como um ramo de modelagem matemática, aplicada na resolução de problemas de decisão por meios de métodos matemáticos e estatísticos, buscando encontrar a solução ótima para o que está sendo investigado.

O problema de otimizar uma função linear, sujeita a restrições lineares, teve sua origem com os estudos de Fourier sobre sistemas lineares de inequações, em 1826. Mas só na década de 1940 teve um avanço significativo, tendo como seus principais nomes Kantorovich que em 1939, lançou efetivamente um problema de programação linear no trabalho "Métodos Matemáticos de Organização e Planeamento da Produção", mas não apresentou um algoritmo de resolução. Na época seu trabalho não foi tão reconhecido como merecia, só sendo valorizado anos depois.

O grande avanço e reconhecimento da programação linear se deu na década de 1940 durante a Segunda Guerra Mundial. George Dantzig trabalhava como civil, no Pentágono, onde exercia funções de conselheiro matemático para a administração da Força Aérea Norte Americana, e passou a desenvolver estratégias utilizando aplicações em problemas de transportes, planejamentos de distribuição de pessoal, alimentos e até mesmo armas.

Em 1947, Dantzig propôs o Método Simplex que revolucionou a resolução de problemas de otimização de vários tipos: transportes, produção, alocação de recursos e problemas de escalonamento. Dantzig foi o primeiro a reconhecer que um programa de planejamento

poderia ser expresso por um sistema de inequações lineares, assim como foi o primeiro a apresentar, na forma de uma expressão matemática explícita, um critério para seleção do melhor plano, ao que hoje chamamos função objetivo.

A utilização desse método despertou o interesse de diversas áreas e a partir da década de 1950 foram aplicados por vários cientistas em problemas procedentes do setor público e privado, envolvendo todos os setores industriais e financeiros da época. Desde então, vem sendo aplicados às mais diversas áreas.

Seu grande desenvolvimento ao longo das últimas décadas também se deve ao aumento da grande concorrência empresarial no período pós-guerra, o que resultou na melhoria do planejamento empresarial para sua manutenção e crescimento.

Com o surgimento de computadores na década de 1950 tornou possível desenvolver e utilizar novas metodologias para resolver uma grande variedade de problemas reais. A medida que a capacidade computacional disponível foi crescendo, tornou-se possível resolver problemas cada vez mais complexos.

O Método Simplex é a técnica mais utilizada para a resolução de problemas envolvendo otimização. No entanto, é importante destacar que se trata de um algoritmo não-polinomial, pois é possível encontrar uma classe de problemas lineares para os quais o Método Simplex exibe um esforço de crescimento exponencial, com a dimensão do problema.

Atualmente, existem outros métodos teoricamente mais eficazes para resolução problemas de programação linear, mas o Método Simplex continua sendo o mais usado na prática para a resolução de programas lineares.

Com o desenvolvimento da informática a programação linear se beneficiou das técnicas computacionais e assim continuou a crescer ao longo dos tempos.

Agora que entendemos um pouco a origem da programação linear vamos conhecer suas bases e seus fundamentos.

A programação linear está relacionada com o problema de maximizar ou minimizar uma função objetivo $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ em relação a m desigualdades lineares da forma

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 \dots + a_{ij}x_n \leq b_j,$$

com $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$.

E tem como objetivo obter a melhor solução ótima para esse tipo de problema.

2.1 Introdução à programação linear

Para operacionalizar um problema de programação linear devemos levar em consideração fatores limitadores ou recursos escassos que representam restrições ou limitações existentes no problema.

As referências utilizadas foram [4], [5], [6] e [7].

Antes devemos relembrar algumas definições básicas da Álgebra Linear.

Consideremos V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$, definimos:

Combinação Linear dizemos que o vetor $v \in V$ é combinação linear dos vetores $v_1, \dots, v_n$ também de V , se existem escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tais que $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$. Neste caso, para fazer uma combinação linear usamos as operações de soma de vetores e multiplicação de um vetor por escalar.

Dependência e Independência Linear dizemos que os vetores $v_1, v_2, \dots, v_k$ de um espaço vetorial são linearmente independentes (LI) se nenhum dos vetores pode ser escrito como combinação linear dos demais. Uma forma de escrever isto matematicamente é a seguinte:

$$\text{Se } \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = 0, \quad \text{então } \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0.$$

Caso contrário, ou seja, quando existe pelo menos um $x_i \neq 0$, dizemos que o conjunto de vetores é linearmente dependente, ou que os elementos são Linearmente Dependentes (LD).

Posto de uma matriz. Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. O posto coluna (linha) de A é o número de colunas (linhas) linearmente independentes da matriz A na sua forma escalonada. É possível mostrar que posto linha é igual ao posto coluna e, então, diremos simplesmente posto de A e denotaremos por $\text{posto}(A)$. Dizemos que uma matriz A tem posto completo se $\text{posto}(A) = \min\{m, n\}$.

Combinação Convexa é uma combinação linear em que os coeficientes de ponderação são não-negativos e somam um. Ou seja, sejam os vetores $v_1, \dots, v_k \in V$ e os escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ tais que $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$, assim $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$ é uma combinação convexa.

2.2 Conceitos básicos

Devemos ter em mente alguns termos básicos que utilizaremos ao longo do texto:

Definição 1. Função Objetivo: é a função linear, que vamos otimizar, isto é, maximizar ou minimizar.

Definição 2. Restrições: são limitações de recursos que a situação-problema apresenta, podem ser representadas por inequações ou equações lineares. Podemos ter também as restrições de não negatividade ($x_1 \geq 0$), pois muitas situações não admitem soluções negativas. Cada problema tem suas restrições específicas e todas devem ser listadas no início da resolução.

Definição 3. Variáveis de decisão: são os valores de n decisões a serem executadas, representadas por $x_1, \dots, x_n$, estão sempre relacionadas com a função objetivo.

Definição 4. Variável de folga: utilizamos para transformarmos uma inequação em uma equação.

Exemplo 2.1. Em $2x - 10y + 5 \geq 0$, podemos introduzir a variável de folga $z = 2x - 10y + 5$, obtemos $z - 2x + 10y = 5$.

Temos $z \geq 0$, supomos z como a variável de folga.

Definição 5. Região factível é o conjunto de todas as soluções possíveis. A região factível é a interseção de hiperplanos e semiespaços fechados. (Definições de hiperplano e semiespaços são apresentadas no Apêndice A).

Dentro da programação linear podemos resolver problemas de mais de uma forma, uma delas é a forma gráfica.

As soluções gráficas são restritas a problemas de pouca complexidade, mas nos ajudam a compreender e visualizar as soluções.

Dados vetores c e $b \in \mathbb{R}^n$ e A uma matriz $n \times n$. Consideremos o seguinte problema de programação linear com $x \geq 0$, e $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Observamos que a região factível consiste em todos os vetores x que satisfazem $Ax = b$ e $x \geq 0$. Buscamos encontrar a solução mínima para $c^T x$. Nota-se também que os pontos tem o mesmo valor da função objetivo z que satisfaz a equação $c^T x = z$, ou seja, $\sum_{j=1}^n c_j x_j = z$. Se z é uma função a ser minimizada, então $\sum_{j=1}^n c_j x_j = z$ é uma reta e deve ser movida paralelamente a si mesma na direção que minimiza a função objetivo até encontrar um ponto ótimo. Esta direção é $-c$ e, portanto, a reta é movida na direção de $-c$ tanto quanto possível, até alcançar o(s) ponto(s) da região factível.

Definição 6. Solução aceitável: é toda solução que satisfaz todas as restrições do problema, mas não necessariamente é a solução ótima. Em geral, existem infinitas soluções aceitáveis.

Definição 7. Solução impossível: é aquela que não atende pelo menos uma das restrições estabelecidas pelo problema.

Definição 8. Múltiplas soluções ótimas: é a solução que atende todas as restrições, mas não é única, pode haver infinitas soluções ótimas.

Definição 9. Solução ótima: é a solução que atende todas as restrições e melhor satisfaz a função objetivo. Pode haver uma ou infinitas soluções ótimas.

2.3 Forma padrão da programação linear

Vamos descrever com maior rigor o *Problema de Programação Linear*, o qual consiste em determinar o valor de n variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, que otimiza o valor de uma função linear:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

num conjunto definido por m restrições lineares:

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

- os termos independentes de cada uma das restrições são constantes não negativas;
- todas as variáveis são não negativas;
- as restrições de não negatividade são desigualdades lineares;
- consideramos a maximização ou minimização da função objetivo.

$$\begin{array}{lcl}
\text{Minimizar} & f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n & \\
\text{Sujeito a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 & \\
& \vdots & \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m & \\
& x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0. &
\end{array} \tag{2.1}$$

- f é chamada de *Função Objetivo*;
- m define as *restrições do problema*;
- as desigualdades $x_j \geq 0$ constituem as *condições de não negatividade* das variáveis;
- c_j é o coeficiente (constante) da variável x_j na função objetivo;
- i é o índice de i -ésima restrição;
- a_{ij} é o coeficiente (constante) da variável x_j na i -ésima restrição;
- b_i são chamados de *termos independentes* das restrições e são coeficientes (do lado direito) da i -ésima restrição e representam as limitações dos recursos associados às restrições.

$$\text{Máximo } \sum_{j=1}^n c_j x_j,$$
$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Qualquer problema de otimização linear pode ser escrito na forma padrão, envolvendo algumas manipulações algébricas. Assim, um problema de minimização pode ser convertido num problema de maximização, pois:

$$\text{Máximo} \sum_{j=1}^n c_j x_j = -\text{Mínimo} \sum_{j=1}^n (-c_j) x_j.$$

Além disso, toda desigualdade $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$ pode ser transformada numa igualdade, por introdução de uma variável adicional com restrição de não negatividade. A desigualdade é equivalente a:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i,$$

com

$$x_{n+i} \geq 0.$$

Do mesmo modo, a desigualdade $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$ pode ser escrita na forma:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i,$$

com

$$x_{n+i} \geq 0.$$

As novas variáveis x_{n+i} denominam-se por *Variáveis de Desvio* ou *Variáveis de Folga*.

Este problema pode ainda ser escrito de forma equivalente em notação matricial. Considerando os vetores $c, x \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$ e a matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, definidos a seguir,

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ e } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

então o problema de otimização linear consiste na determinação do vetor $x \in \mathbb{R}^n$ que deve:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) = c^T x \\ &\text{Sujeito a} && Ax = b \\ &&& x \geq 0. \end{aligned}$$

Utilizaremos e aprofundaremos esses conceitos ao longo do texto. Mas antes vamos apresentar um problema prático.

2.4 Aplicação da modelagem matemática

Para resolvermos um problema inicialmente devemos modelar e depois resolvê-lo. O exemplo a seguir ilustra uma forma de utilização da programação linear através da resolução de solução geométrica. Mais adiante, vamos verificar resultados que garantem a existência e a forma de determinar estes pontos.

Vejamos um exemplo para compreendermos as aplicações das definições mencionadas acima.

Exemplo 2.2. Uma empresa produz cadeiras e mesas. Cada cadeira necessita para sua produção de 5 tábuas de madeira e cada mesa utiliza 20 tábuas. Ao todo, a empresa dispõe de 400 tábuas. A produção de cada cadeira consome 10 horas de trabalho e cada

mesa consome 15 horas de trabalho. Há 450 horas disponíveis. O lucro por cadeira é de R\$ 180,00 e por mesa é de R\$ 320,00. Qual o número de cadeiras e mesas que torna o lucro máximo? Qual é esse valor?

Devemos iniciar definindo a função objetivo e identificar as variáveis de decisão.

Consideremos:

x_1 = quantidade de cadeiras

x_2 = quantidade de mesas

- Devemos estabelecer as variáveis de restrições

Quantidade de tábuas: $5x_1 + 20x_2 \leq 400$

Quantidade de horas: $10x_1 + 15x_2 \leq 450$

- Devemos identificar qual a função objetivo do problema:

$$Lucro = 180x_1 + 320x_2 \implies Max \ 180x_1 + 320x_2$$

Resolução gráfica: Consideremos as desigualdades

- (I) $5x_1 + 20x_2 \leq 400$
- (II) $10x_1 + 15x_2 \leq 450$

Observemos que, para

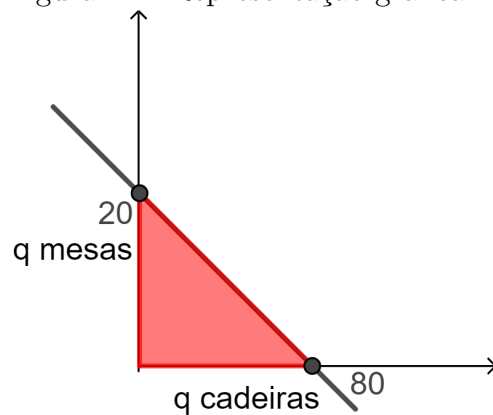
(I) $5x_1 + 20x_2 = 400$,

Segue

Se $x_1 = 0 \longrightarrow 5.0 + 20x_2 = 400 \longrightarrow x_2 = \frac{400}{20} = 20$.

Se $x_2 = 0 \longrightarrow 5x_1 + 20.0 = 400 \longrightarrow x_1 = \frac{400}{5} = 80$.

Figura 2.1: Representação gráfica



Fonte: Elaborada pela autora.

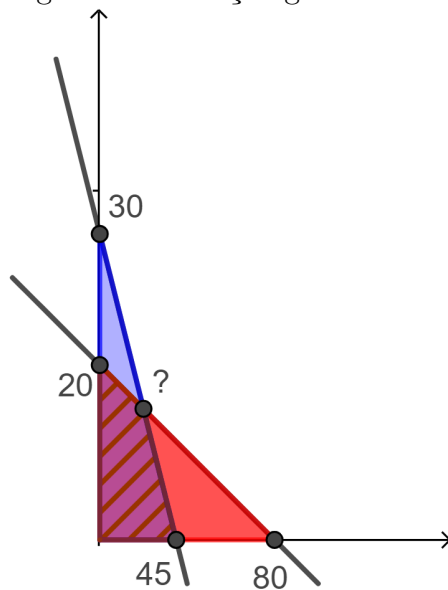
Para a segunda equação:

$$(II) 10x_1 + 15x_2 = 450$$

$$\text{Se } x_1 = 0 \longrightarrow 10.0 + 15x_2 = 450 \longrightarrow x_2 = \frac{450}{15} = 30$$

$$\text{Se } x_2 = 0 \longrightarrow 10x_1 + 15.0 = 450 \longrightarrow x_1 = \frac{450}{10} = 45$$

Figura 2.2: Solução gráfica



Fonte: Elaborada pela autora.

Já conhecemos os vértices $(0, 20)$ e $(45, 0)$ vamos determinar o vértice do ponto de intersecção entre as retas. Para isto, considere o sistema:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 5x_1 + 20x_2 = 400(-2) \\ 10x_1 + 15x_2 = 450 \end{cases} \\ \begin{cases} -10x_1 - 40x_2 = -800 \\ 10x_1 + 15x_2 = 450 \end{cases} \\ -25x_2 = -350 \\ x_2 = \frac{-350}{-25} \\ x_2 = 14 \end{aligned}$$

Substituindo na primeira equação temos:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 20x_2 &= 400 \\ 5x_1 + 20.14 &= 400 \\ 5x_1 + 280 &= 400 \\ 5x_1 &= 120 \\ x_1 &= \frac{120}{5} \\ x_1 &= 24 \end{aligned}$$

Vamos aplicar os pontos encontrados na função lucro para obtermos a solução ótima

$$Lucro = 180x_1 + 320x_2$$

- $(0, 20) \implies L = 180.0 + 320.20 = 6400$
- $(24, 14) \implies L = 180.24 + 320.14 = 4320 + 4480 = 8800$
- $(45, 0) \implies L = 180.45 + 320.0 = 8100$

Logo, a solução ótima para o problema analisado é $(24, 14)$. Ou seja, a melhor opção para essa empresa será a produção de 24 cadeiras e 14 mesas.

A solução gráfica para os problemas de programação linear é possível quando temos somente duas variáveis de controle. Porém, a maioria dos problemas práticos envolve mais variáveis o que exige a utilização de outros métodos de solução.

Observamos que o método gráfico não é tão eficiente para resolvermos quaisquer tipo de problemas lineares, pois tem uma capacidade limitada. Uma solução conhecida que será tratada mais adiante neste texto é o método simplex. A partir do método simplex é possível encontrar a solução do PL para qualquer número de variáveis de decisão. Sabemos que situações reais apresentam um número grande de variáveis e restrições então a resolução manual não é viável, neste caso utilizam-se softwares específicos para resolução de PL.

3 Resultados básicos

O objetivo deste capítulo é apresentar os resultados envolvendo a programação linear, como seus critérios de basicidades e um exemplo prático. Conheceremos o teorema fundamental da programação linear. As referências utilizadas ao longo deste capítulo foram [1], [4] e [7].

3.1 Região viável e vértices

Provemos agora que se a região é viável então existe pelo menos uma solução básica viável. Iremos provar que toda solução básica viável é um extremo do conjunto convexo e que se a solução ótima existir esta é uma solução básica. A definição de conjunto convexo se encontra no Apêndice A.

Teorema 3.1. *(Região factível é convexa)*

Em um problema de programação linear, a região viável é um conjunto convexo.

Demonstração. Seja S o conjunto formado pelos pontos x tais que $Ax = b$, $x \geq 0$, onde A é uma matriz constante. Vamos demonstrar que o conjunto S é convexo.

Sejam $x_1, x_2 \in S$. Precisamos mostrar que $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in S$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Como $x_1, x_2 \in S$, temos $Ax_1 = b$ e $Ax_2 = b$ e $x_1, x_2 \geq 0$.

Logo, $Ax = A[\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2] = \alpha Ax_1 + (1 - \alpha)Ax_2 = \alpha b + (1 - \alpha)b = b$. Uma vez que $x_1, x_2 \geq 0$ e $\alpha \leq 1$, então $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \geq 0$. Portanto, $x \in S$. □

Teorema 3.2. *Se a função objetivo possui um máximo (mínimo) finito, então pelo menos uma solução ótima é um ponto extremo do conjunto convexo S .*

Demonstração. Seja Z a função objetivo que assume o valor máximo M no ponto x_0 . Então, pode-se afirmar que $M = Z(x_0) \geq Z(x)$, para todo $x \in S$. Sejam $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p$ os pontos extremos do conjunto S . Precisamos provar que x_0 é um desses pontos extremos.

Suponha que x_0 não seja um ponto extremo de S .

Então, x_0 pode ser obtido pela combinação convexa de seus pontos extremos, isto é,

$$x_0 = \sum_{i=1}^p \alpha_i \bar{x}_i \tag{3.1}$$

sendo $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, p$ e $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$.

Assim,

$$\begin{aligned}
Z(x_0) &= Z\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i \bar{x}_i\right) = Z(\alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \dots + \alpha_p \bar{x}_p) \\
&= Z(\alpha_1 \bar{x}_1) + Z(\alpha_2 \bar{x}_2) + \dots + Z(\alpha_p \bar{x}_p) \\
&= \alpha_1 Z(\bar{x}_1) + \alpha_2 Z(\bar{x}_2) + \dots + \alpha_p Z(\bar{x}_M) = M.
\end{aligned}$$

Considerando o ponto extremo $\bar{x}_M$ definido pela relação

$$Z(\bar{x}_M) = \max Z(\bar{x}_i), i = 1, 2, \dots, p. \quad (3.2)$$

Devido às relações (3.1) e (3.3) a relação de (3.2) pode sofrer as seguintes modificações:

$$Z(x_0) \leq \alpha_1 Z(\bar{x}_M) + \alpha_2 Z(\bar{x}_M) + \dots + \alpha_p Z(\bar{x}_M)$$

ou seja,

$$Z(x_0) \leq Z(\bar{x}_M) \sum_{i=1}^p \alpha_i = Z(\bar{x}_M),$$

pois, $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$.

Como $M = Z(x_0) \geq Z(x)$, para todo $x \in S$, então $Z(x_0) = M = Z(\bar{x}_M)$ e fica provado que a solução ótima de x_0 é um ponto extremo do conjunto convexo S . □

3.2 Soluções básicas da PL

Definição 3.3. Considerando simultaneamente um conjunto de m equações lineares em n incógnitas na forma $Ax = b$. Seja B uma submatriz não singular $m \times m$ formada pelas colunas de A . Então, se para todos $n - m$ componentes de x não associados com as colunas de B são fixadas como iguais a zero, a solução do conjunto restante são chamadas de *soluções básicas* de $Ax = b$ com relação a matriz básica B (ou simplesmente base). As componentes de x associadas com as colunas de B são chamadas de *variáveis básicas*.

Na definição acima, refere-se a B como base, uma vez que B é formada por m colunas linearmente independentes que podem ser consideradas como base. As soluções básicas representam uma expressão para o vetor b como uma combinação linear destes vetores da base.

A obtenção de uma solução básica envolve:

- identificar uma base A_B ;
- Calcular sua inversa A_B^{-1} ;
- multiplicá-la por b , obtendo o valor $A_B^{-1}b$ das variáveis básicas.

Vamos adotar a nomenclatura

- A_B e A_N : Matriz básica e matriz não básica, respectivamente.
- x_B e x_N : Variáveis básicas e variáveis não básicas, respectivamente.

Se o sistema $Ax = b$ tem uma solução e se alguma linha de A é uma combinação linear de outras linhas, então a equação correspondente é redundante. Assim, podemos supor que as linhas de A são linearmente independentes; ou seja, podemos supor que A tem classificação m , então $m \leq n$. Se A é uma matriz $m \times n$, para qualquer subconjunto K de $\{1, \dots, n\}$ escolhemos A_K a submatriz de A consistindo das colunas de A cujos índices pertencem a K . Denotamos a coluna j da matriz A por A_j .

Com respeito ao sistema $Ax = b, x \geq 0$, com posto $A = m$.

Na sequência do texto, dado $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ a notação $x \geq 0$ indica que $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$. De forma similar define-se a desigualdade anterior para matrizes.

Podemos também utilizar a notação matricial para definir as soluções básicas e não básicas.

Por exemplo, considerando o sistema $Ax = b$ e $x \geq 0$, onde A é uma matriz $m \times n$ e b é um vetor $m \times 1$ e supondo que o posto $(A, b) = \text{posto}(A) = m$. Depois de reorganizar as colunas de A , tem-se que $A = [B, N]$ onde B é uma matriz invertível $m \times m$ e N uma matriz $m \times (n - m)$. A solução $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$ para a equação $Ax = b$, onde:

$$x_B = B^{-1}b,$$

e

$$x_N = 0,$$

é chamado de *solução básica* do sistema. Se $x_B \geq 0$, então x é chamada de *solução básica factível*. Neste momento a matriz B é chamada de *matriz básica* (ou simplesmente *base*) e N é chamada de *matriz não básica*. As componentes x_B são chamadas de *variáveis básicas* (ou *variáveis dependentes*) e as componentes de x_N são chamadas de *variáveis não básicas* (ou *variáveis independentes*). Se $x_B > 0$, então x é chamado de *variável básica factível não degenerada*.

Teorema 3.4. (*Múltiplas soluções*) *Se um valor ótimo da função objetivo é atingido em mais de um ponto extremo, cada combinação convexa desses pontos extremos também fornece o valor ótimo da função objetivo.*

Demonstração. Seja a função objetivo $Z(x) = c^T x$ que assume o valor ótimo Z^* nos pontos extremos y_1 e y_2 , ou seja, $Z^* = c^T y_1 = c^T y_2$. Seja $x_0 = (1 - \alpha)y_1 + \alpha y_2$, com $\alpha \in [0, 1]$. Então, $x_0 \in S$, pois S é um conjunto convexo, e $c^T x_0 = \alpha c^T y_1 + (1 - \alpha)c^T y_2 = Z^*$. Portanto, x_0 também é uma solução ótima do problema linear. $\square$

As variáveis básicas de uma solução básica não são necessariamente todas nulas. Isto pode ser notado pela Definição 3.5 a seguir.

Definição 3.5. Se uma ou mais variáveis básicas de uma solução básica tem valor igual a zero, dizemos que a solução básica é degenerada.

Em uma solução básica não-degenerada as variáveis básicas, e consequentemente a base B , são as componentes positivas da solução. Há uma ambiguidade com a solução básica degenerada, contudo as variáveis nulas básicas e não básicas podem ser trocadas.

Considerando o sistema de restrições

$$Ax = b$$

$$x \geq 0,$$

que representam as restrições de um sistema linear na forma padrão. Temos as restrições de positividade, definições similares aplicam-se quando estas restrições devem ser consideradas.

Definição 3.6. Soluções básicas factíveis Um vetor x é chamado de *factível* se satisfaz todas as restrições do sistema anterior. Uma solução factível do sistema e também básica, é chamada de *solução básica factível*. Se esta solução também for uma solução básica degenerada, então é chamada de *solução factível básica degenerada*.

Exemplo 3.7. Soluções básicas

Vamos identificar todas as soluções básicas do problema de programação linear abaixo:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & x_1 - x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

Obtendo a forma padrão, temos:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & x_1 - x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{array}$$

Escrevendo na forma matricial temos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Que satisfaz o posto completo, pois $\text{posto}(A) = 2$.

Combinando os vetores das colunas da matriz A de 2 em 2 temos $\binom{4}{2} = 6$ possíveis bases.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- **1ª possível solução**

$$B_1 = \{1, 2\} \text{ e } N_1 = \{3, 4\}$$

$$A_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ é base, pois } A_{B_1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Temos

$$x_{N_1} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0 \text{ e } x_{B_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Então $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 3, 0, 0)$ é solução básica viável.

• **2ª possível solução**

$$B_2 = \{1, 3\} \text{ e } N_2 = \{2, 4\}$$

$$A_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ não é base, pois } A_{B_2} \text{ é singular.}$$

• **3ª possível solução**

$$B_3 = \{1, 4\} \text{ e } N_3 = \{2, 3\}$$

$$A_{B_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ é base, pois } A_{B_3}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Temos

$$x_{N_3} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \text{ e } x_{B_3} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Então $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (6, 0, 0, 3)$ é solução básica viável.

• **4ª possível solução**

$$B_4 = \{2, 3\} \text{ e } N_4 = \{1, 4\}$$

$$A_{B_4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ é base, pois } A_{B_4}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Temos

$$x_{N_4} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0 \text{ e } x_{B_4} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Então $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 3, 3, 0)$ é solução básica viável.

• **5ª possível solução**

$$B_5 = \{2, 4\} \text{ e } N_5 = \{1, 3\}$$

$$A_{B_5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ é base, pois } A_{B_5}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Temos

$$x_{N_5} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \text{ e } x_{B_5} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Então $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 6, 0, -3)$ é solução básica inviável.

• **6ª possível solução**

$$B_6 = \{3, 4\} \text{ e } N_6 = \{1, 2\}$$

$$A_{B_6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ é base, pois } A_{B_6}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

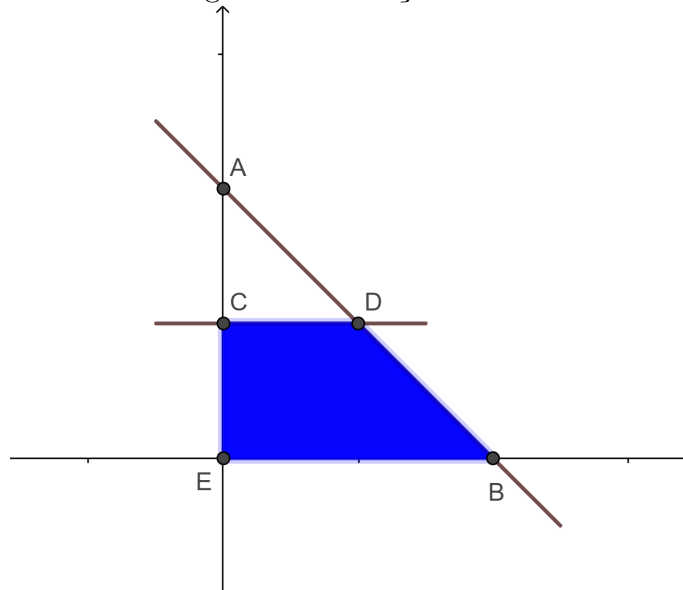
Temos

$$x_{N_6} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \text{ e } x_{B_6} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Então $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 6, 3)$ é solução básica viável.

Vamos identificar as soluções básicas no conjunto das soluções viáveis do nosso problema anterior.

Figura 3.1: Solução básica



Fonte: Elaborada pela autora.

- As quatro soluções básicas viáveis do exemplo acima (1, 3, 4 e 6) correspondem as 4 vértices do conjunto viável (D, B, C, E).
- Vértice é interseção das retas dadas pelas variáveis não básicas.
- A solução básica inviável está fora da região viável (A).
- Soluções viáveis não básicas se associam a retas paralelas.

3.3 Teorema fundamental da programação linear

O teorema mostra a necessidade de considerar as soluções básicas factíveis na busca da solução ótima para o Problema de Programação Linear, isto porque o valor ótimo é encontrado através de uma solução, cuja respectiva forma padrão é dada por:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Uma solução factível que minimize o valor da função objetivo, respeitando as restrições da função é chamada de *solução factível ótima*. Se a solução é uma solução básica, então ela é *solução básica factível ótima*. O próximo resultado foi baseado em [9].

Teorema 3.8. (Teorema Fundamental da Programação Linear) *Dada um problema de programação linear da forma padrão onde A é uma matriz $m \times n$ de posto m , temos:*

1. *se existe uma solução factível, então existe uma solução básica factível;*
2. *se existe uma solução factível ótima, então existe uma solução básica factível ótima.*

Demonstração. Item 1. Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ os vetores da coluna da matriz A . Suponha que $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ seja uma solução factível. Então, em termos da coluna de A , esta solução satisfaz:

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = b. \quad (3.3)$$

Supondo que exatamente p das variáveis x_i são maiores do que zero, e por conveniência elas são as p primeiras variáveis, a equação pode ser reescrita como:

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_p a_p = b. \quad (3.4)$$

Devemos considerar os casos dos vetores $a_1, a_2, \dots, a_p$ serem linearmente independentes e linearmente dependentes.

Caso 1: Supondo que $a_1, a_2, \dots, a_p$ são linearmente independentes. Logo, $p \leq m$. Se $p = m$, a solução é básica e a prova está concluída. Se $p < m$, então selecionando $m - p$ vetores dos $n - p$ vetores restantes tal que restará m vetores linearmente independentes. Atribuindo como sendo zero as $m - p$ variáveis restantes, obtêm-se uma solução básica factível (degenerada neste caso).

Caso 2: Supondo que $a_1, a_2, \dots, a_p$ são linearmente dependentes. Então, existe uma combinação não trivial desses vetores cujo valor é nulo. Isto é, existem constantes $y_1, y_2, \dots, y_p$ onde pelo menos uma delas é positiva. Sendo assim,

$$y_1 a_1 + y_2 a_2 + \dots + y_p a_p = 0.$$

Multiplicando essa equação pelo escalar ε real e subtraindo de (3.3) obtem-se:

$$(x_1 - \varepsilon y_1) a_1 + (x_2 - \varepsilon y_2) a_2 + \dots + (x_p - \varepsilon y_p) a_p = b.$$

A expressão acima é válida para qualquer ε , e para cada ε , as componentes $x_i - \varepsilon y_i$ correspondem a uma solução da equação, embora a restrição $x_i - \varepsilon y_i \geq 0$ possa ser violada. Supondo $y = (y_1, y_2, \dots, y_p, 0, 0, \dots, 0)$, a solução de (3.5) para qualquer valor de ε é:

$$x - \varepsilon y.$$

Para $\varepsilon = 0$, a solução é uma solução básica factível. Quando ε aumenta a partir de zero, as componentes também podem decrescer, crescer, ou permanecer constantes, dependendo se os valores correspondentes de y_i são negativos, positivos ou nulos. Pelo menos um dos valores de y_i é positivo. Logo, pelo menos uma das componentes irá decrescer enquanto ε irá crescer, aumentando o valor de ε até que uma ou mais componentes tornem-se nulas. Isto é, considerando que

$$\varepsilon = \min\{x_i/y_i : y_i > 0\}.$$

Para este valor de ε a solução dada por: $x - \varepsilon y$, é factível e possui no máximo $p - 1$ variáveis positivas. Repetindo o processo, se necessário, podemos eliminar as variáveis positivas até encontrarmos uma solução factível com as colunas correspondentes linearmente independente, situação onde o primeiro caso se aplica.

Para demonstração do item 2: Supondo que $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ seja uma solução factível ótima e, como no caso da demonstração do item 1, supondo que existem exatamente p variáveis positivas $(x_1, x_2, \dots, x_p)$. Novamente temos dois casos: Caso 1, correspondente ao linearmente independente, o procedimento é equivalente ao descrito anteriormente.

No Caso 2 o procedimento também é o mesmo que o anterior, mas deve ser demonstrado que para qualquer ε na solução $(x - \varepsilon y)$ é ótimo. Para isso, sabemos que o valor da solução $x - \varepsilon y$ é:

$$c^T x - \varepsilon c^T y. \quad (3.5)$$

Para ε suficientemente pequeno, $x - \varepsilon y$ é uma solução factível para valores de ε positivos ou negativos. Podemos então concluir que $c^T x = 0$, pois se $c^T y \neq 0$, um valor pequeno de ε com sinal apropriado poderia ser encontrado para fazer (3.5) menor que $c^T x$ mantendo a factibilidade. Isto contraria a hipótese uma vez que x é uma solução ótima. Logo, $c^T y = 0$.

Assim sendo, temos uma menor solução factível com um número menor de variáveis positivas também ótimas. O restante da prova segue exatamente como descrito no item 1. □

4 Dualidade

Este capítulo foi baseado nas referências [1], [2] e [5] e tem o objetivo de introduzir o conceito de dualidade em problemas de programação linear.

Em uma pesquisa rápida pelo dicionário da Língua Portuguesa temos que dualidade, substantivo feminino é:

- Qualidade do que é dual ou duplo em natureza, substância ou princípio.
- Uma das divisões da categoria número, oposta à singularidade e à pluralidade; indica um par de entidades isoláveis e exprime-se pelo dual;

Dualidade é a propriedade ou caráter do que é duplo, do que é dual, ou que contém em si duas naturezas, duas substâncias ou dois princípios.

Dualidade também possui significados na área da física, da filosofia e da matemática.

- **Dualidade na física:** Na física, existe a dualidade onda-partícula, também chamada de dualidade onda-corpusculo ou dualidade matéria-energia. A dualidade onda-partícula é uma propriedade física com dimensões atômicas, que é a propriedade dos entes físicos possuírem tanto partículas como ondas.
- **Dualidade na filosofia:** Dualismo é um sistema religioso ou filosófico que admite a coexistência de dois princípios eternos, necessários e opostos. Doutrina que em qualquer ordem de ideias admite dois princípios irreduzíveis.
- **Dualidade na programação linear:** Em programação linear, dualidade significa a existência de um outro problema de PL , associado a cada problema de PL , que designa-se problema dual (D). Nesta relação com o problema dual o problema original designa-se por problema primal (P).

A dualidade é um conceito que liga intimamente dois problemas da programação linear.

Vamos identificar o primeiro como sendo o primal, e o segundo como seu dual associado, se o problema primário for:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } cx \\ & \text{sujeito a : } Ax = b \\ & \quad x \geq 0, \end{aligned}$$

seu dual será

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & yb \\ \text{sujeito a :} & yA \leq c \\ & y \leq 0. \end{array}$$

É interessante perceber que são maneiras diferentes, mas equivalentes, de olhar para o mesmo problema.

4.1 Dualidade na programação linear

A todo problema da programação linear, está associado um outro, ou seja, em um problema de PL original (Primal) a sua dualidade (Dual) é definida de forma direta e sistêmica. Logo, a solução ótima de um problema oferece automaticamente a solução ótima do outro. Vejamos a seguir a relação entre primal e dual.

Determinação do Dual

1. Se um é o mínimo o outro será o máximo. Se no primal calcula-se o mínimo, no dual busca-se o máximo;
2. O vetor de recurso de um são os vetores de custos do outro;
3. As variáveis de um estão relacionadas com a restrição do outro;
4. As restrições de um estão relacionadas com as variáveis do outro;
5. Uma variável dual é definida para cada equação (restrição) primal;
6. Uma restrição dual é definida para cada variável primal;
7. Os coeficientes da restrição (coluna) de uma variável primal definem os coeficientes do lado esquerdo da restrição dual;
8. Os coeficientes da função objetivo de problema dual são iguais aos coeficientes do lado direito das equações de restrição do problema primal.

Denotaremos por P , o problema primal e D o problema dual. Notação:

$$\begin{array}{ll} (P) \text{minimizar} & c^T x \\ \text{sujeito a :} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Ao escolher o vetor $u \in \mathbb{R}^m$ e realizar uma combinação linear com $Ax = b$, teremos

$$u^T Ax = u^T b,$$

com o objetivo de trocar n restrições por somente uma, o que facilita a resolução.

Logo, substituindo essa restrição agregada na função objetivo, temos

$$P(u) \text{ minimizar } c^T x + u^T (b - Ax) \\ \text{sujeito a : } x \geq 0$$

Agora só temos a restrição de não negatividade o que facilita a resolução.

Reescrevendo a função, e colocando x em evidência, ficamos com o problema

$$P(u) \text{ minimizar } (c^T - u^T A)x + b^T u \\ \text{sujeito a : } x \geq 0$$

Assim, percebe-se que a solução de $P(u)$ é trivial, pois:

- $c^T - u^T A < 0 : P(u)$ é ilimitado;
- $c^T - u^T A \geq 0 : x = 0$ é solução ótima com valor $b^T u$;

Vamos denotar $[V]$ para valor ótimo.

Proposição 4.1. Para todo $u \in \mathbb{R}^m$, o valor ótimo de $P(u)$ será um limitante inferior de P .

Demonstração. Como vimos acima o $V[P(u)]$ é muito simples de ser obtido, pois quando for ilimitado seu valor será $-\infty$, ou valerá $b^T u$.

Vamos supor que

- $V[P] = -\infty$, ou seja é ilimitado

O conjunto viável de $[P(u)]$ é maior que o conjunto viável de P , pois P tem mais restrições

$$P(u) \supseteq (P);$$

As funções objetivos coincidem nos pontos viáveis de (P) .

Com isso concluí-se que

$$V[P] = -\infty \Rightarrow V[P(u)] = -\infty$$

Agora se

- $V[P] = +\infty$, P será um problema inviável, assim sua desigualdade é verdadeira.

$$V[P] = +\infty \Rightarrow V[P(u)] \leq V[P].$$

- $V[P] \in \mathbb{R}$

Se o problema tem um valor real, então tem solução, utilizando o ponto x^* , temos:

$$V[P] = c^T x^* = c^T x^* + u^T (b - Ax^*) \geq V[P(u)].$$

Como x^* é viável para P sabemos que $(b - Ax^*) = 0$, assim a desigualdade se faz verdadeira.

Concluimos que para qualquer u teremos $V[P(u)] \leq V[P]$. □

Encontrar u maximizando $V[P(u)]$

$$V[P(u)] = \begin{cases} -\infty, & c^T - u^T A < 0 \\ b^T u, & c^T - u^T A \geq 0 \end{cases}$$

Reescrevendo a condição de $b^T u$, temos

$$c^T - u^T A \geq 0 \Leftrightarrow u^T A \leq c^T \Leftrightarrow A^T u \leq c$$

Assim, obtemos o dual de (P) , ou seja,

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & b^T u \\ \text{sujeito a} & A^T u \leq c. \end{array}$$

Podemos perceber as relações:

$$\begin{array}{l} \text{Restrição de } (P) \iff \text{Variável de } (D) \\ \text{Variável de } (P) \iff \text{Restrição de } (D) \end{array}$$

Com isso definimos o exemplo padrão para o problema.

Dado o problema linear, chamado de *Primal*:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z = c^T x \\ \text{sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{array}$$

define-se o correspondente *Dual* como o seguinte problema linear:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & w = b^T u \\ \text{sujeito a} & A^T u \leq c. \end{array}$$

onde

- $x_1, \dots, x_n$ = variáveis primais;
- $u_1, \dots, u_m$ = variáveis duais;
- $Ax = b$: restrições primais;
- $A^T u \leq c$: restrições duais;

Exemplo 4.2. Formulação do Dual. Dado o problema primal

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & 2x_1 + x_2 + 4x_3 \\ \text{sujeito a} & -2x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 1 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ e } x_3 \geq 0$$

Primeiramente temos que transformar o problema em sua forma padrão, ou seja, com igualdade:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad 2x_1 + x_2 + 4x_3 \\ & \text{sujeito a} \quad -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ & \quad \quad \quad -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 1 \\ & \quad \quad \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \text{ e } x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Utilizando o que vimos na determinação do dual e definindo a variável dual $u = (u_1, u_2)$, obtemos o problema dual:

$$\begin{aligned} & \text{maximizar} \quad u_1 + u_2 \\ & \text{sujeito a :} \quad -2u_1 - u_2 \leq 2 \\ & \quad \quad \quad u_1 + 2u_2 \leq 1 \\ & \quad \quad \quad u_1 - u_2 \leq 4 \\ & \quad \quad \quad -u_1 \leq 0 \\ & \quad \quad \quad u_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Vamos provar um resultado importante sobre o dual do dual.

Proposição 4.3. *O dual do dual é o primal.*

Demonstração. Tomando o problema

$$\begin{aligned} (D) \max \quad & b^T u \\ \text{s.a :} \quad & A^T u \leq c \end{aligned}$$

Para converter o problema a forma padrão, vamos definir as variáveis de folga u' e u'' . Consideremos $u = u' - u''$

Incluindo a variável de folga, u^f nessa desigualdade, obtemos o problema equivalente:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad -b^T u' + b^T u'' \\ & \text{sujeito a :} \quad A^T u' - A^T u'' + u^f = c \\ & \quad \quad \quad u' \geq 0, u'' \geq 0 \text{ e } u^f \geq 0 \end{aligned}$$

Para facilitar o processo vamos transformar no formato matricial.

Assim,

$$\text{Minimizar} \quad \begin{bmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u' \\ u'' \\ u^f \end{bmatrix}$$

$$\text{sujeito a : } \begin{bmatrix} A^T & -A^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ u'' \\ u^f \end{bmatrix} = c,$$

$$\begin{bmatrix} u' \\ u'' \\ u^f \end{bmatrix} \geq 0.$$

Assim, teremos o dual desse problema

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && c^T y \\ \text{sujeito a : } && \begin{bmatrix} A^T & -A^T & I \end{bmatrix}^T y \leq \begin{bmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ao realizarmos a transposição da matriz, obtêm-se

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && c^T y \\ \text{sujeito a : } && \begin{bmatrix} A \\ -A \\ I \end{bmatrix} y \leq \begin{bmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Assim, ao realizarmos a minimização teremos

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && -c^T y \\ \text{sujeito a} && Ay \leq -b \\ && -Ay \leq b \\ && y \leq 0. \end{aligned}$$

Ao substituírmos $x = -y$, teremos

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && c^T x \\ \text{sujeito a} && Ax = b \\ && x \geq 0. \end{aligned}$$

Logo, obtemos o problema primal. □

Quando não temos um problema em sua forma padrão podemos utilizar a Tabela 4.1 de conversão a seguir.

Tabela 4.1: Correspondência entre o programa primal e o dual.

	PRIMAL	DUAL
Número de Restrições	m	n
Número de Variáveis	n	m
Variáveis e Restrições	variáveis ≥ 0	restrições de $\leq$
	restrições de igualdade	variáveis sem restrições
Matriz	A	A^T
Coeficiente de Custo	c	b
Termos Independentes	b	c

Fonte: [5], p. 28.

Utilizaremos a tabela para mostrar um exemplo de transformação do dual sem utilizar a forma padrão.

$$\begin{aligned}
 &\text{maximizar} \quad 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\
 &\text{sujeito a :} \quad 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 \leq 2 \\
 &\quad \quad \quad -1x_1 - 2x_2 + 2x_3 \geq 4 \\
 &\quad \quad \quad 5x_1 - 3x_2 + 1x_3 \geq -1 \\
 &\quad \quad \quad -1x_1 + 3x_2 - 1x_3 = -5 \\
 &\quad \quad \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ e } x_3 \text{ livre.}
 \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} \quad 2u_1 + 4u_2 - 1u_3 - 5u_4 \\
 &\text{sujeito a :} \quad 3u_1 - 1u_2 + 5u_3 - 1u_4 \geq 2 \\
 &\quad \quad \quad 1u_1 - 2u_2 - 3u_3 + 3u_4 \leq -3 \\
 &\quad \quad \quad 1u_1 + 3u_2 + 2u_3 - 1u_4 = 4 \\
 &\quad \quad \quad u_1 \leq 0, u_2 \leq 0, u_3 \leq 0 \text{ e } u_4 \text{ livre.}
 \end{aligned}$$

4.2 Teoremas da dualidade

Nesta seção vamos apresentar alguns resultados importantes envolvendo dualidade.

Teorema 4.4. *Dualidade Fraca*

Se $\bar{x}$ e $\bar{u}$ são factíveis para primal (*min*) e o dual (*max*) respectivamente, então $b^T \bar{u} \leq c^T \bar{x}$ e o inverso também é verdadeiro.

Demonstração. $b^T \bar{u} = (A\bar{x})^T \bar{u} = \bar{x}^T A^T \bar{u} \leq \bar{x}^T c = c^T \bar{x}$, pois $\bar{x} \geq 0$ e $A^T \bar{u} \leq c$. $\square$

Corolário 4.5. *Se um problema de programação linear é limitado, então o seu dual é factível.*

Demonstração. Suponha por contradição que o problema primal seja ilimitado e que o seu dual tenha uma solução factível. Pelo teorema da dualidade fraca temos $b^T \bar{u} \leq c^T \bar{x}$, para todo x factível. Assim $b^T \bar{u} < -\infty$ o que é um absurdo, pois supomos que $\bar{u}$ é factível e deveríamos ter $b^T \bar{u} \in \mathbb{R}$. $\square$

Corolário 4.6. *Se um problema de programação linear e seu dual tem solução factível de mesmo valor $b^T \bar{u} = c^T \bar{x}$ para as respectivas funções objetivas, então essas soluções são ótimas.*

Demonstração. Existem $\bar{u}$ e $\bar{x}$ tais que $b^T \bar{u} = c^T \bar{x}$. Por outro lado, pelo Teorema da Dualidade Fraca, sabemos que $b^T \bar{u} \leq c^T y$, para todo y factível. Logo, $b^T \bar{u} \leq c^T y$ para todo y primal factível e, portanto, $\bar{x}$ é ótimo primal. De forma análoga, sabemos que $b^T \bar{q} \leq c^T \bar{x}$ para todo q dual factível. Logo $b^T \bar{q} \leq b^T \bar{u}$, para todo q dual factível e, portanto, $\bar{u}$ é ótima. $\square$

Teorema 4.7. *Dualidade Forte*

Se um problema de programação linear tem solução ótima, seu dual também o tem e os valores ótimos são iguais.

Demonstração. Supondo que o primal tem solução ótima (básica) x^* , temos as condições:

$$\text{Existe } A_B \text{ tal que } x_B^* = A_B^{-1}b,$$

$$x_N^* = 0 \text{ e}$$

$$c^T - c_B^T A_B^{-1} A \geq 0, \text{ ou seja, os custos reduzidos.}$$

Queremos construir uma solução (u) que seja factível e ótima para o dual.

Definindo $(u^*)^T = c_B^T A_B^{-1}$, vamos provar que é factível e ótimo. Substituindo nos custos reduzidos temos

$$c^T - (u^*)^T A = c^T - c_B^T A_B^{-1} A \geq 0, \text{ ou seja, } A^T u^* \leq c.$$

Demonstrando que u^* é viável para (D) dual, pois satisfaz suas condições.

Analisando o valor da função objetivo em (u^*) , temos

$$b^T u^* = (u^*)^T b = c_B^T A_B^{-1} b = c_B^T x_B^* = c^T x^*.$$

Logo, x^* é ótimo para (D).

Assim, o valor da solução factível (u^*) do dual é igual ao valor da solução ótima de (x^*) no primal. □

Uma pergunta natural que surge é como resolver um PL de forma mais rápida e eficaz?

O Método Simplex é o algoritmo primal mais conhecido para a resolução de problemas lineares. Conheceremos um pouco esse método no próximo capítulo.

5 Método Simplex

As referências que baseiam este capítulo são [1], [2], [4], [7] e [9]. Ao tratarmos de programação linear não podemos deixar de mencionar sobre um dos métodos mais utilizado e tão importante na busca de soluções de problemas através PL.

O método simplex, que é uma das abordagens mais bem sucedidas para encontrar a melhor solução para problemas de programação linear na forma

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & cx \\ \text{Sujeito a} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Não há restrição em supor que o sistema linear $Ax = b$ é solúvel, caso contrário, não haveria vetores viáveis. Além disso, se A não é uma matriz de posto completo, podemos selecionar uma submatriz A' eliminando várias linhas de A , e as componentes correspondentes de b , de modo que a nova matriz A' tenha posto completo. Nesse caso obtemos um novo, mas equivalente problema de programação linear.

5.1 Motivação

O problema é dado abaixo

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & cx \\ \text{Sujeito a} & A'x = b', \\ & x \geq 0. \end{array}$$

onde b' é o subvetor de b obtido pela eliminação das componentes correspondentes às linhas de A que descartamos anteriormente. Este novo PPL é equivalente ao inicial no sentido de que ambos têm a mesma solução ótima, mas a matriz A' para o problema reduzido é uma matriz de posto completo.

Devemos, portanto, supor, sem perda de generalidade, que o posto da matriz A $m \times n$ é m (lembramos de $m \leq n$) e que o sistema linear $Ax = b$ é solúvel.

Existem vetores viáveis especiais que desempenham um papel central no método simplex. Estas são as soluções do sistema linear $Ax = b$ com não negatividade e pelo menos $n - m$ componentes nulos. Na verdade, todos esses pontos extremos ou pontos básicos das soluções, como são normalmente chamadas, podem, em princípio, ser obtidas resolvendo-se todos os sistemas lineares quadrados $m \times m$, $Ax = b$ onde $n - m$ componentes de x são definidos para zero, e descartando as soluções com pelo menos um componente negativo.

A estrutura linear muito especial de um problema de programação linear nos permite concentrar nessas soluções básicas ao procurarmos soluções ótimas.

Relembrando que se o problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & cx \\ \text{Sujeito a} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

admite uma solução ótima, então existe também uma solução ótima que é solução básica. Isso fica bastante evidente se percebermos que o conjunto viável de um problema de programação linear é algum tipo de “poliedro” e, portanto, valores mínimos (ou máximos) de funções devem ser tomados em um vértice, como provado no teorema fundamental da programação linear, teorema 3.8 na p. 37.

5.2 Pivoteamento

É preciso, para entender o método simplex, abordar o pivoteamento e para isso consideramos o sistema de equações lineares abaixo:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array} \quad (5.1)$$

onde $m \leq n$. Escrevendo na forma de matriz temos:

$$Ax = b.$$

Denotando por a^i as linhas i da matriz A , podemos expressar (5.1) como:

$$\begin{array}{l} a^1x = b_1 \\ a^2x = b_2 \\ \vdots \\ a^mx = b_m. \end{array} \quad (5.2)$$

Esta é uma interpretação natural de (5.1) como um conjunto de m equações.

Se as equações (5.2) são linearmente independentes, podemos substituir uma equação dada por qualquer múltiplo dela, com qualquer combinação linear de outras equações no sistema. Isto leva ao conhecido método de eliminação de Gauss, onde equações de um sistema linear são adequadamente substituídas por outras para compor uma forma triangular superior ou canônica. Assim, se as primeiras m colunas de A são linearmente independentes, então o sistema (5.1) pode, após uma sequência de multiplicações e subtrações, ser convertido na *forma canônica* seguinte:

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & & +y_{1,m+1}x_{m+1} & +y_{1,m+2}x_{m+2} & +\dots & +y_{1,n}x_n & = & y_{10} \\
x_2 & & +y_{2,m+1}x_{m+1} & +y_{2,m+2}x_{m+2} & +\dots & +y_{2,n}x_n & = & y_{20} \\
& & \vdots & & & & & \vdots \\
x_m & +y_{m,m+1}x_{m+1} & & +\dots & & +y_{m,n}x_n & = & y_{m0}
\end{array} \quad (5.3)$$

Na representação canônica desse sistema, as variáveis $x_1, x_2, \dots, x_m$ são chamadas de *básicas* e as outras são as *não básicas*. Uma solução básica desse sistema é da forma:

$$x_1 = y_{10}, x_2 = y_{20}, \dots, x_m = y_{m0} \quad x_{m+1} = 0, \dots, x_n = 0,$$

ou na forma vetorial $x = (y_0, 0)$ onde y_0 é da forma $(m \times 1)$ e o vetor 0 é da forma $(n - m, \times 1)$.

Também é comum representarmos o sistema (5.3) na forma de matriz ou *tableau*:

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 0 & y_{1,m+1} & \dots & y_{1n} & y_{10} \\
0 & 1 & 0 & y_{2,m+1} & \dots & y_{2n} & y_{20} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 1 & y_{m,m+1} & \dots & y_{mn} & y_{m0}
\end{array} \quad (5.4)$$

5.3 Metodologia

Para iniciarmos o Método Simplex precisamos de uma solução básica viável inicial, a qual é um dos pontos extremos do nosso problema de programação linear. Este método verifica se a presente solução é ótima. Se esta não for é porque um dos demais pontos extremos adjacentes (vértices) fornecem valor menor para a função objetivo que a atual, quando o problema considerado é de minimização.

Então faz uma mudança de vértice na direção que mais diminui a função objetivo e verifica se este novo vértice é ótimo. O processo termina quando, estando num ponto extremo, todos os outros pontos extremos adjacentes fornecem valores maiores para a função objetivo.

Portanto, a troca de vértice, faz uma variável não básica crescer (assumir valor positivo) ao mesmo tempo em que zera uma variável básica (para possibilitar a troca) conservando a viabilidade do problema de programação linear.

Para isso, escolhemos uma variável cujo custo relativo é mais negativo (não é regra geral) para entrar na base e as trocas de vértices são feitas até que não exista mais nenhum custo relativo negativo.

A variável que sairá da base é aquela que, ao se anular, garante que as demais continuem maiores ou iguais a zero quando aumentamos o valor da variável que entra na base (respeitando a factibilidade).

O Método Simplex compreenderá, portanto, os seguintes passos:

1. Achar uma solução factível básica inicial.

2. Verificar se a solução atual é ótima. Se for, pare. Caso contrário, siga para o próximo passo.
3. Determinar a variável não básica que deve entrar na base;
4. Determinar a variável básica que deve sair da base;
5. Atualizar o sistema a fim de determinar a nova solução factível básica, e voltar ao passo 2.

5.4 Variável de saída

Considere $x = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0)$ como solução básica factível, ou como representação equivalente:

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_m a_m = b. \quad (5.5)$$

Com base na Definição 5.1, $x_i > 0$, para $i = 1, 2, \dots, m$. Considere também a representação da variável $a_q, q > m$. Representando a variável na forma de base tem-se:

$$a_q = y_{1q} a_1 + y_{2q} a_2 + \dots + y_{mq} a_m.$$

Multiplicando a expressão acima por $\varepsilon > 0$ e subtraindo da equação acima obtêm-se:

$$(x_1 - \varepsilon y_{1q}) a_1 + (x_2 - \varepsilon y_{2q}) a_2 + \dots + (x_m - \varepsilon y_{mq}) a_m + \varepsilon a_q = b. \quad (5.6)$$

Assim, para qualquer $\varepsilon > 0$ a expressão acima resulta em b como uma combinação linear de no máximo $m + 1$ variáveis. Para $\varepsilon = 0$ tem-se uma solução básica factível. A medida que ε aumenta, os coeficientes de a_q também aumentam, e para valores suficientemente pequenos de ε , a expressão tem uma solução factível, porém não básica. Os coeficientes das outras variáveis irão aumentar ou diminuir linearmente a medida que ε aumenta. Se nenhuma variável diminuir, pode-se igualar os valores correspondentes ao primeiro lugar onde um (ou mais) coeficientes desaparecem. Isto é:

$$\varepsilon = \min_{(i)} \left\{ \frac{x_i}{y_{iq}} : y_{iq} > 0 \right\}. \quad (5.7)$$

Neste caso, tem-se uma nova solução básica factível com o vetor a_q substituindo o vetor a_p onde p corresponde ao índice mínimo em (5.7). Se o mínimo na (5.7) é obtido por mais que índice i então a nova solução é degenerada e qualquer uma das variáveis com componente zero pode ser considerada como sendo a que deixou a base.

A tabela abaixo é utilizada para problemas de minimização, para os casos de maximização, este quadro pode ser usado, desde que os elementos da linha inferior sejam colocados com sinal invertido.

Tabela 5.1: Como organizar o problema no formato tableau

	z	x_B	x_N	
x_B	0	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
z	1	0	$c_B^T B^{-1}N - c_N$	$c_B^T B^{-1}b$

linhas de 1 a m
linha 0

Fonte: [4], p.126

O tableau no qual z e x_B será resolvido em termos de x_N é chamado de *forma canônica*. Este tableau não fornece somente o valor da função objetivo $c_B^T B^{-1}b$ e das variáveis básicas $B^{-1}b$ na coluna da direita, como também fornece todas as informações necessárias para proceder com o Método Simplex. A linha de custos apresenta $c_B^T B^{-1}N - c_N^T$, que consiste nos valores de $(z_j - c_j)$ das variáveis não básicas. A linha zero informa se há uma solução ótima (se cada $z_j - c_j \leq 0$), e qual variável não básica irá aumentar caso contrário. Se x_k é crescente, então o vetor $y_k = B^{-1}a_k$ que aparece no tableu na linha de 1 a m abaixo da variável x_k , ajudará a determinar por quanto x_k pode aumentar. Se $y_k \leq 0$, então x_k pode aumentar indefinidamente, e o valor ótimo da função objetivo é ilimitado. Por outro lado, se y_k tem pelo menos um componente positivo, o crescimento em x_k será interrompido por alguma variável básica atual, que torna-se zero. O teste da razão mínima determina o valor da variável de bloqueio. Deseja-se um esquema que:

1. Atualize as variáveis básicas e seus valores;
2. Atualize os valores de $(z_j - c_j)$ das novas variáveis não básicas;
3. Atualize a coluna y_j .

Existem condições especiais que devem ser consideradas a fim de que a operação de pivoteamento seja factível. A seguir, veremos como é possível selecionar os elementos pivôs, para transformar uma solução básica factível em outra.

Ao mostrarmos que, embora não seja possível especificarmos qual par de variáveis serão trocadas a fim de manter a não negatividade, é possível especificarmos qual variável não básica deverá se tornar a básica, e conseqüentemente, qual variável básica irá se tornar não básica.

Um argumento significativo, que pode simplificar vários pressupostos da Programação Linear é descrito abaixo:

Definição 5.1. (*Solução não degenerada*) Cada solução básica factível de $Ax = b$, com $x_B > 0$ é denominada solução básica factível não degenerada.

Essa definição é utilizada durante todo o desenvolvimento do Método Simplex, desde que as soluções sejam substituídas adequadamente. A seguir, será visto como determinarmos quais variáveis serão trocadas, a fim de determinarmos melhores soluções para o sistema.

5.5 Solução factível mínima

A ideia do Método Simplex é selecionar uma coluna da sua tabela de estudo de modo que a nova solução básica factível para a função objetivo seja menor que a anterior. Através de cálculos elementares, que serão descritos abaixo, é possível determinarmos qual variável entrará na base para que o valor da função objetivo diminua, e depois de alguns cálculos, é possível determinarmos qual variável irá sair a fim de mantermos a factibilidade.

A expressão *entrar na base* significa fazer uma variável não básica deixar o valor nulo e crescer até o máximo valor que lhe seja possível e, portanto, positiva ou eventualmente nula.

Supomos que temos a seguinte solução básica factível:

$$(x_b, 0) = (y_{10}, y_{20}, \dots, y_{m0}, 0, 0, \dots, 0),$$

junto com o tableau temos uma matriz identidade nas primeiras m colunas como mostrado a seguir:

$$\begin{array}{cccccccc} a_1 & a_2 & \dots & a_m & a_{m+1} & \dots & a_n & b \\ 1 & 0 & & 0 & y_{1,m+1} & \dots & y_{1n} & y_{10} \\ 0 & 1 & & 0 & y_{2,m+1} & \dots & y_{2n} & y_{20} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & y_{m,m+1} & \dots & y_{mn} & y_{m0}. \end{array} \quad (5.8)$$

O valor da função objetivo para qualquer valor de x é:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots c_nx_n, \quad (5.9)$$

e consequentemente para a solução básica, o valor correspondente é:

$$z_0 = c_B^T x_B, \quad (5.10)$$

onde $c_B^T = [c_1, c_2, \dots, c_m]$.

Embora seja natural usar a solução básica $(x_B, 0)$ quando se tem um tableau (5.8), se valores arbitrários são atribuídos para $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$, as variáveis restantes podem ser resolvidas como:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_{10} - \sum_{j=m+1}^n y_{1j}x_j \\ x_2 &= y_{20} - \sum_{j=m+1}^n y_{2j}x_j \\ &\vdots \\ x_m &= y_{m0} - \sum_{j=m+1}^n y_{mj}x_j. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Usando (5.9) podemos subtrair $x_1, x_2, \dots, x_m$ da forma geral (5.11), obtendo:

$$z = c^T x = z_0 + (c_{m+1} - z_{m+1})x_{m+1} + (c_{m+2} - z_{m+2})x_{m+2} + \dots + (c_n - z_n)x_n, \quad (5.12)$$

onde

$$z_j = y_{1j}c_1 + y_{2j}c_2 + \dots + y_{mj}c_m, \quad m+1 \leq j \leq n, \quad (5.13)$$

que é a relação fundamental para determinar a coluna pivô. Um ponto importante é que, esta equação oferece o valor da função objetivo z para qualquer solução de $Ax = b$ em termos das variáveis $x_{m+1}, \dots, x_n$. A partir disso, podemos determinar se existe vantagem em trocar a solução básica por uma outra variável não básica.

Por exemplo, se $c_j - z_j$ é negativo para qualquer $j, m+1 \leq j \leq n$, então ao aumentar x_j de zero para algum valor positivo que diminua o custo total, temos uma solução melhor. As fórmulas (5.12) e (5.13) proporcionam as mudanças que seriam necessárias nos valores das variáveis básicas $x_1, x_2, \dots, x_m$ para satisfazer as mudanças em x_j .

Olhando para essa relação de uma outra maneira: considerando y_i como sendo a i -ésima coluna do tableau. Assim, qualquer solução satisfaz

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_m e_m = y_0 - x_{m+1} y_{m+1} - x_{m+2} y_{m+2} - \dots - x_n y_n.$$

Utilizando o produto interno canônico do $\mathbb{R}^n$ desta equação com o vetor c_B^T , temos:

$$\sum_{i=1}^m c_i x_i = c_B^T y_0 - \sum_{j=m+1}^n z_j x_j,$$

onde $z_j = c_B^T y_j$. Então adicionando $\sum_{j=m+1}^n c_j x_j$ em ambos os membros, segue que:

$$c^T x = z_0 + \sum_{j=m+1}^n (c_j - z_j) x_j, \quad (5.14)$$

como anteriormente.

Para melhor entendimento desses passos, iremos examinar um exemplo concreto extraído de [1].

Exemplo 5.2. Queremos minimizar $-3x_1 - 5x_2$ com as restrições $x \geq 0$ e

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 18, \quad x_1 + x_4 = 4, \quad x_2 + x_5 = 6.$$

A tabela inicial para este exemplo é

Tabela 5.2: Tabela inicial para o exemplo 5.2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
3	2	1	0	0	18
1	0	0	1	0	4
0	1	0	0	1	6
-3	-5	0	0	0	0

Fonte: Elaborada pela autora.

Se escolhermos as colunas ou variáveis 3, 4 e 5 para compor a matriz B , descobrimos que o vértice $(0, 0, 18, 4, 6)$ é viável. Se reorganizarmos as três colunas selecionadas como as três primeiras colunas, teremos a tabela

Tabela 5.3: Primeiro passo para o exemplo 5.2

x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	
1	0	0	3	2	18
0	1	0	1	0	4
0	0	1	0	1	6
0	0	0	-3	-5	0

Fonte: Elaborada pela autora.

Como neste caso em particular a matriz B já é a identidade, não será mais necessário cálculos na tabela para este propósito. Por outro lado, os componentes de c não correspondentes às colunas em B são ambos negativos (-3 e -5); portanto, o critério de parada não é válido, e devemos transformar a tabela de acordo com o passo principal do método simplex. A variável de entrada seria x_2 (associado com -5 em c).

Para determinar a variável de saída, examinamos as razões $18/2$ e $6/1$ ($4/0$ é descartado por termos zero no denominador) e selecionamos a terceira razão 6 como a menor. Em conformidade, a terceira coluna de B (correspondente a x_5) será a coluna de saída. Depois que estas duas variáveis forem trocadas, a tabela fica assim:

Tabela 5.4: Segundo passo para o exemplo 5.2

x_3	x_4	x_2	x_1	x_5	
1	0	2	3	0	18
0	1	0	1	0	4
0	0	1	0	1	6
0	0	-5	-3	0	0

Fonte: Elaborada pela autora.

Com esta nova tabela devemos obter, por meio de transformações elementares, a matriz identidade nas três primeiras colunas e o vetor nulo nas três componentes de c . Neste caso particular, esses dois objetivos são obtidos mudando a primeira linha para si mesma, menos duas vezes a terceira linha, e substituindo a quarta linha mais cinco vezes a terceira. Após essas mudanças chegamos no próximo passo.

Tabela 5.5: Terceiro passo para o exemplo 5.2

x_3	x_4	x_2	x_1	x_5	
1	0	0	3	-2	6
0	1	0	1	0	4
0	0	1	0	1	6
0	0	0	-3	5	30

Fonte: Elaborada pela autora.

Mais uma vez, olhamos para os componentes que não desaparecem de c e selecionamos o (-1) como variável de entrada (x_1). Para escolher o que sai, examinamos as proporções $6/3$, $4/1$, e escolhemos a menor entre as positivas, associadas, neste caso, com x_3 . Essas mudanças levam a próxima tabela.

Tabela 5.6: Quarto passo para o exemplo 5.2

x_1	x_4	x_2	x_3	x_5	
3	0	0	1	-2	6
1	1	0	0	0	4
0	0	1	0	1	6
-3	0	0	0	5	30

Fonte: Elaborada pela autora.

Como antes, buscamos a matriz identidade nas três primeiras colunas, e o vetor nulo nas três componentes de c . A nova tabela será:

Tabela 5.7: Quinto passo para o exemplo 5.2

x_1	x_4	x_2	x_3	x_5	
1	0	0	$1/3$	$-2/3$	2
0	1	0	$-1/3$	$2/3$	2
0	0	1	0	1	6
0	0	0	1	3	36

Fonte: Elaborada pela autora.

Como nesta tabela vale o critério de parada (todos os componentes que não desaparecem de c são não negativos), a solução ótima é encontrada na coluna b . O custo ótimo (mudando de sinal) aparece em d , -36 . É importante determinar as componentes associados aos valores em b . Na última tabela a matriz B é formado pelas três colunas x_1, x_4 , e x_2 e os componentes de b serão correspondentes (nesta ordem) a essas variáveis. As variáveis não presentes em B são atribuídos um valor de saída. Assim, a solução ótima é $(2, 6, 0, 2, 0)$ com custo ótimo de -36 . Na prática, os cálculos procedem transformando as tabelas.

Como podemos perceber o método simplex requer muitas etapas e muitas vezes se torna inviável sua realização de forma manual.

Para isso hoje em dia temos diversos programas que realizam o método simplex de forma autônoma.

6 Aplicações

Exemplos de problemas que são modelados pela programação linear podem surgir nas mais diversas áreas, pois a programação linear tem como objetivo auxiliar na resolução de problemas de viés prático, desde gestão de qualidade, otimização de processos, planejamento de produção, projeção de faturamento e gastos, assim como problemas na área de economia, transportes, entre outros.

Neste capítulo, apresentaremos algumas situações, embora simplificadas, que mostram a aplicabilidade da otimização linear, os dados utilizados não correspondem a valores reais.

Também pretendemos apresentar várias ferramentas computacionais como aplicativos, softwares e sites que são disponibilizados gratuitamente e auxiliam muito a operacionalização dos cálculos dentro da programação linear. Como vimos ao longo desse trabalho a programação linear se mostra muito importante para o processo de maximização e minimização de situações do dia a dia. No entanto, seus cálculos, apesar de serem simples, se mostram algumas vezes muito extensos e demandam muito tempo para conclusão. Julgamos que estas ferramentas podem auxiliar de forma significativa professores e alunos no processo de ensino aprendizagem da programação linear. Vamos apresentar algumas ferramentas que estudamos e julgamos interessantes, mas existem muitas outras disponíveis e gratuitas. Realizaremos quatro exemplos utilizando esses aplicativos para melhor demonstrar sua aplicabilidade. As escolhas se deram por conta da facilidade e da eficiência dos aplicativos. Vale lembrar que apesar dos programas realizarem os cálculos e elaborarem as tabelas, cabe ao estudante a capacidade de analisar, modelar e aplicar a teoria.

6.1 Ferramentas computacionais

Ao iniciarmos nossos estudos sobre ferramentas computacionais que auxiliassem tanto professores como alunos na resolução de situações problemas nos deparamos com uma variedade de opções com diferentes características. A seguir vamos conhecer algumas dessas ferramentas e como podemos encontrá-las.

Na Play Store há vários aplicativos de fácil utilização para serem baixados e utilizados de forma gratuita para quem está começando a estudar a programação linear.

Vamos conhecer três desses Apps.

1. O primeiro que estudamos foi o "Linear Optimization LITE" que se mostrou muito eficiente, pois resolve os problemas de otimização linear utilizando o método simplex com qualquer número de variáveis e restrições, mostra todas as tabelas de resolução do problema, mas não apresenta para os usuários os cálculos envolvidos no desenvolvimento. Estas resoluções serão apresentadas na versão PRO do aplicativo. Uma limitação deste aplicativo é que o mesmo não resolve problemas pelo método gráfico.

Vejamos nas figuras a seguir a visualização deste aplicativo na tela do celular. Assim que buscamos o aplicativo na loja de aplicativo da Play Store nos deparamos com a tela de instalação, basta realizar a instalação para ter acesso as ferramentas disponíveis.

Figura 6.1: Aplicativo Linear Optimization

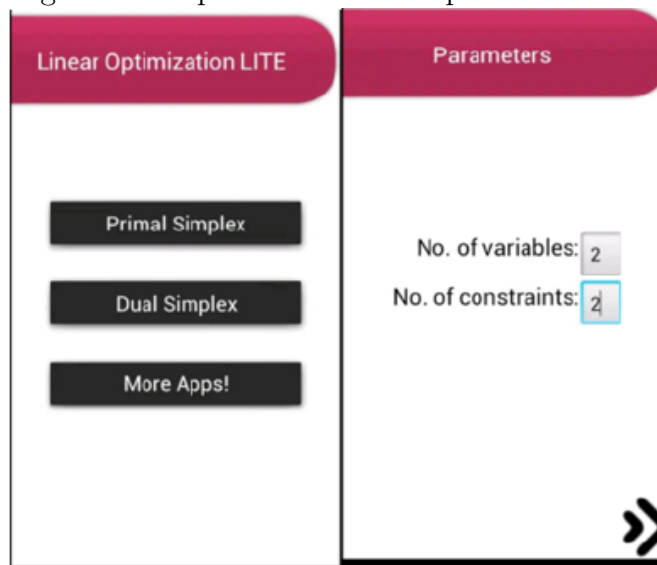


Fonte: Tela do Play Store para baixar o Linear Optimization LITE.

Instalado o aplicativo no celular o usuário se depara com a tela apresentada abaixo, na qual pode escolher se seu método de resolução será o Primal Simplex ou o Dual simplex.

Após realizada a escolha basta inserir a quantidade de variáveis e de restrições presentes no problema que deseja modelar.

Figura 6.2: Aplicativo Linear Optimization LITE



Fonte: Interfaces do aplicativo Linear Optimization LITE

Após ter a quantidade de variáveis e restrições inseridas o aplicativo nos apresenta a tela de inserção dos dados que serão analisados, neste momento o usuário pode escolher se irá maximizar ou minimizar o seu problema. Assim que todos os dados foram inseridos basta clicar em "Solve" para obter a resolução do problema.

Figura 6.3: Aplicativo Linear Optimization LITE

	x_1	x_2	s_1	s_2	val
x_1	0.32	-23	1	0	5
x_1	84	44	0	1	3
Z	-2	-95	0	0	0

Fonte: Interfaces de resolução do aplicativo Linear Optimization LITE

- O aplicativo "Optimizador Linear: Simplex" também disponível na Play Store de forma gratuita, apresenta ao usuário mais possibilidades de resoluções tanto pelo método gráfico, como pelo método simplex.

A resolução pelo método gráfico apresenta o gráfico sem apresentar as etapas do processo. Já no método simplex demonstra as tabelas, mas sua interface não se mostra muito didática. É um excelente aplicativo para auxiliar e conferir as etapas de resolução do problema que está sendo otimizado.

Assim, como no aplicativo analisado anteriormente, basta instalar o App para ter acesso as suas funcionalidades.

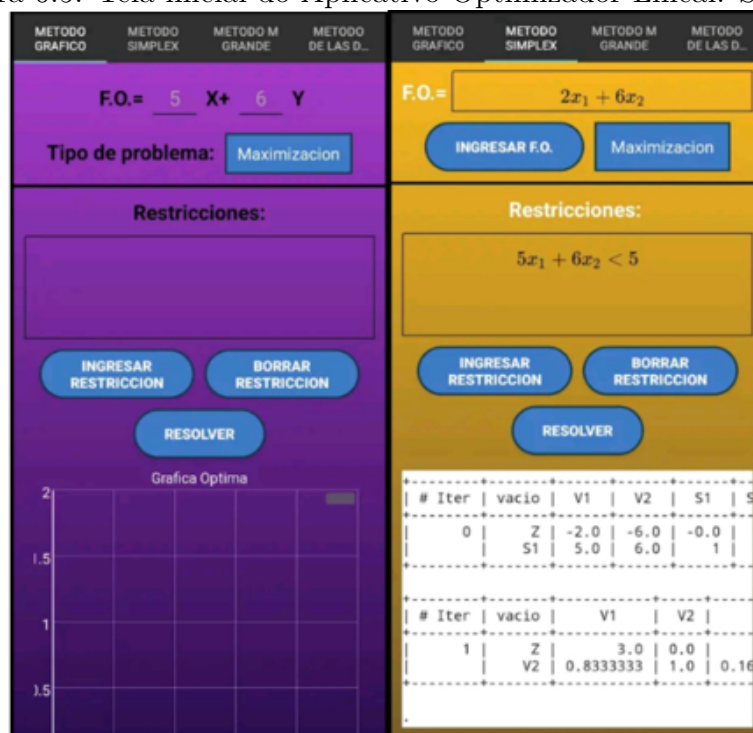
Figura 6.4: Aplicativo Optimizador Lineal: Simplex



Fonte: Tela do Play Store para baixa o aplicativo Optimizador Lineal: Simplex

Após a instalação no celular teremos as interfaces de resoluções onde o usuário poderá escolher o método que utilizará para resolução e em seguida inserir os dados do problema.

Figura 6.5: Tela inicial do Aplicativo Optimizador Lineal: Simplex



Fonte: Interfaces do aplicativo Optimizador Lineal: Simplex

Na figura 6.5 podemos visualizar a tela do método gráfico à esquerda e do método simplex à direita. O app não demonstra as etapas do processo somente a resolução final.

- O último aplicativo da Play Store que iremos analisar será o "Linear Program Solver", que se mostrou muito completo para resolução de problemas de programação linear de diferentes formas. Sua interface é bem didática para ser utilizada por estudantes e professores no processo de aprendizagem de situações simples. Mas o aplicativo tem suas limitações, pois não conseguimos trabalhar com números decimais nas variáveis e nem nas restrições.

Vamos utilizar este aplicativo para resolução de uma das aplicações abaixo e assim veremos detalhadamente sua interface.

Figura 6.6: Aplicativo Linear Program Solver



Fonte: Tela do Play Store para baixa o aplicativo Linear Program Solver

O aplicativo também se encontra de forma gratuita para ser instalado no celular.

Em seguida vamos conhecer páginas da internet que possibilitam a resolução de problemas de otimização de forma online e gratuitas. A primeira que iremos conhecer a ferramenta online "PHPSimplex" que é muito utilizada para a resolução de problemas de programação linear. Seu uso é livre e gratuito e está disponível em [14].

A ferramenta tem a capacidade de solucionar problemas pelo método Simplex/Duas Fases, e o método Gráfico, e não tem limitações quanto ao número de variáveis de decisão ou de restrições dos problemas.

Esta ferramenta foi desenvolvida para ajudar os alunos em suas aprendizagens, pois não só apresenta os resultados finais, mas também as operações intermediárias ajudando a aprender e compreender o método utilizado. Ela também oferece a solução direta para uso profissional.

Outra vantagem é que não exige nenhuma linguagem computacional para introdução do problema e oferece uma interface de fácil entendimento e muito intuitiva, podendo ser utilizada de maneira online, sem a necessidade de instalação.

Figura 6.7: Ferramenta PHPSimplex



Fonte: Interface do PHPSimplex.

A figura 6.7 mostra a tela inicial para inserção dos dados. Ao longo das aplicações utilizaremos esta ferramenta para demonstrar sua versatilidade e facilidade para aplicação e resolução de problemas. Veremos assim sua interface.

A próxima ferramenta é o "Solver Simplex" que também se encontra disponível de forma online e gratuita em [15], para utilização de estudantes e professores, sem a necessidade de realização do download.

Sua interface é de fácil entendimento e apresenta para o usuário todas as tabelas, destacando os elementos pivôs e as variáveis de entrada e saída da base. Um ponto

negativo do site é que não é possível visualizar o passo a passo das operações e não apresenta a resolução gráfica do problema quando trabalhamos em 2 dimensões.

Veremos em um dos exemplos sua utilização de forma prática.

Figura 6.8: Interface do Solver simplex

Problema de Otimização

Escreva seu problema de programação linear abaixo ou carregue-o.

Criar Novo Problema

Carregar Problema

Tipo do Simplex:

Duas Fases

Tipo do Problema:

Maximização

Número de Variáveis:

1

Novo Problema de Otimização

	x1	x2	x3	Relação	Lado Direito
Objetivo					
Restrição1				<=	
Restrição2				<=	
Restrição3				<=	

+ Adicionar Restrição

- Excluir Restrição

	x1	x2	x3
Limite Superior	inf	inf	inf
Limite Inferior	0	0	0

Salvar Problema

Executar Completo

Passo a Passo

Limpar Tudo

Fonte: Tela introdutória do Solver simplex.

A figura 6.8 apresenta a tela inicial da página do Solver simplex para inserção dos dados do problema.

Exemplo 6.1. Produção agrícola

A situação problema foi inspirada em [12] e adaptada pela autora.

A agricultura orgânica se faz cada vez mais necessária no dia a dia com o objetivo de aumentar a produtividade, cultivando produtos mais saudáveis e reduzindo impactos ambientais. Neste contexto, vamos utilizar as ferramentas da programação linear para auxiliar na otimização do lucro da produção, respeitando as limitações do solo e do local

de plantio. Utilizaremos como referência um sítio com uma área total de 20 hectares, onde se produz alimentos orgânicos a fim de serem comercializados em mercados e feiras. A Tabela exibe a produtividade em kg por m^2 dos principais produtos do local e o lucro por kg de produção, representado em reais.

Tabela 6.1: Tabela: Produtividade em kg/m^2 e lucro por produto

	Produção (kg/m^2)	Lucro em reais por kg de produção
Abóbora	0,09	0,013
Batata	0,12	0,02
Cenoura	0,10	0,018
Tomate	0,15	0,025

Fonte: Elaborada pela autora.

Por falta de um local de armazenamento próprio a produção máxima está limitada a 40 toneladas. A área cultivável do sítio é de $100.000m^2$. Para atender as demandas do próprio sítio é imperativo que se plante $500m^2$ de cada uma das hortaliças.

Modelando o problema em estudo, temos:

As variáveis de decisão representam a área em m^2 que deve ser plantada de cada uma das 4 culturas, ou seja:

- x_1 = área em m^2 que se deve plantar abóbora;
- x_2 = área em m^2 que se deve plantar batata;
- x_3 = área em m^2 que se deve plantar cenoura;
- x_4 = área em m^2 que se deve plantar tomate.

$$\text{Maximizar } \text{Lucro} = 0,00117x_1 + 0,0024x_2 + 0,0018x_3 + 0,00375x_4 \quad (6.1)$$

sujeito à: restrições associadas à demanda do sítio m^2 :

$$x_1 \geq 500; x_2 \geq 500; x_3 \geq 500 \text{ e } x_4 \geq 500 \quad (6.2)$$

restrições de armazenagem:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 100000 \quad (6.3)$$

restrições de área cultivável:

$$0,09x_1 + 0,12x_2 + 0,10x_3 + 0,15x_4 \leq 40000 \quad (6.4)$$

restrições de não-negatividade:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \quad (6.5)$$

Em que (6.1) representa a função objetivo (maximizar os lucros), cujos parâmetros são obtidos multiplicando-se os valores das colunas 2 e 3 da Tabela. As restrições do problema são representadas por (6.2) a (6.4) e, por fim, (6.5) são as condições de não-negatividade.

Este tipo de Problema de Programação Linear pode ser resolvido de forma eficaz aplicando-se o Método Simplex para a obtenção de uma solução ótima. Para auxiliar na resolução vamos utilizar o apoio computacional do "PHPSimplex", citado anteriormente, que é uma ferramenta online para a resolução de problemas de programação linear, pois o mesmo tem uma interface que de fácil compreensão e aplicabilidade e não tem restrições quanto ao número de variáveis e restrições.

Figura 6.9: Ferramenta PHPSimplex



Fonte: Interface do PHPSimplex.

Esta ferramenta encontra-se disponível em [14] e tem a interface apresentada na imagem acima, onde é possível selecionar o método de resolução simplex/duas fases ou gráfico. É nesse momento que deve se inserir a quantidade de variáveis de decisões e as restrições do problema.

Figura 6.10: Interface do PHPSimplex

Qual é o objetivo da função? Maximizar ▼

Função: X₁ + X₂ + X₃ + X₄

Restrições:

X₁ + X₂ + X₃ + X₄ ≤ ▼

X₁ + X₂ + X₃ + X₄ ≤ ▼

X₁ + X₂ + X₃ + X₄ ≤ ▼

X₁ + X₂ + X₃ + X₄ ≤ ▼

X₁, X₂, X₃, X₄ ≥ 0

Continuar

Fonte: Tela introdutória do PHPSimplex.

Após clicarmos em continuar teremos a tela de inclusão dos dados específicos do problema que está sendo modelado. Neste momento, adicionamos a função objetivo e as restrições do problema em estudo.

Temos na figura 6.11 a tela inicial após inclusão dos dados da situação problema.

Figura 6.11: Tela inicial após introdução dos dados

PHPSimplex

Qual é o objetivo da função? Maximizar ▼

Função: X_1 + X_2 + X_3 + X_4

Restrições:

1	X_1 +		X_2 +		X_3 +		X_4 ≥ ▼	500
	X_1 +	1	X_2 +		X_3 +		X_4 ≥ ▼	500
	X_1 +		X_2 +	1	X_3 +		X_4 ≥ ▼	500
	X_1 +		X_2 +		X_3 +	1	X_4 ≥ ▼	500
1	X_1 +	1	X_2 +	1	X_3 +	1	X_4 ≤ ▼	100000
0.09	X_1 +	0.12	X_2 +	0.1	X_3 +	0.15	X_4 ≤ ▼	40000

$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

Continuar

Fonte: Print de tela [14]

O próprio programa nos fornece o problema na sua forma padrão, adicionando variáveis de folga, e artificiais, quando necessário. O programa utiliza o termo *variável artificial* para a variável introduzida em um modelo de programa linear que busca encontrar uma solução básica viável inicial; uma variável artificial é usada para restrições de igualdade e para restrições de desigualdade maior ou igual.

- Como a restrição 1 é do tipo $\geq$ é necessária a variável de excesso x_5 e a variável artificial x_{11} .
- Como a restrição 2 é do tipo $\geq$ é necessária a variável de excesso x_6 e a variável artificial x_{12} .
- Como a restrição 3 é do tipo $\geq$ é necessária a variável de excesso x_7 e a variável artificial x_{13} .
- Como a restrição 4 é do tipo $\geq$ é necessária a variável de excesso x_8 e a variável artificial x_{14} .

- Como a restrição 5 é do tipo $\leq$ é necessária a variável de folga x_9 .
- Como a restrição 6 é do tipo $\leq$ é necessária a variável de folga x_{10} .

Figura 6.12: Tela apresentando forma padrão

MAXIMIZAR: $Z = 0.00117 X_1 + 0.0024 X_2 + 0.0018 X_3 + 0.00375 X_4$

sujeito a

$1 X_1 + 0 X_2 + 0 X_3 + 0 X_4 \geq 500$
 $0 X_1 + 1 X_2 + 0 X_3 + 0 X_4 \geq 500$
 $0 X_1 + 0 X_2 + 1 X_3 + 0 X_4 \geq 500$
 $0 X_1 + 0 X_2 + 0 X_3 + 1 X_4 \geq 500$
 $1 X_1 + 1 X_2 + 1 X_3 + 1 X_4 \leq 100000$
 $0.09 X_1 + 0.12 X_2 + 0.1 X_3 + 0.15 X_4 \leq 40000$
 $X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

MAXIMIZAR: $Z = 0.00117 X_1 + 0.0024 X_2 + 0.0018 X_3 + 0.00375 X_4 + 0 X_5 + 0 X_6 + 0 X_7 + 0 X_8 + 0 X_9 + 0 X_{10} + 0 X_{11} + 0 X_{12} + 0 X_{13} + 0 X_{14}$

sujeito a

$1 X_1 - 1 X_5 + 1 X_{11} = 500$
 $0 X_1 + 1 X_2 - 1 X_6 + 1 X_{12} = 500$
 $0 X_1 + 1 X_3 - 1 X_7 + 1 X_{13} = 500$
 $0 X_1 + 1 X_4 - 1 X_8 + 1 X_{14} = 500$
 $1 X_1 + 1 X_2 + 1 X_3 + 1 X_4 + 1 X_9 = 100000$
 $0.09 X_1 + 0.12 X_2 + 0.1 X_3 + 0.15 X_4 + 1 X_{10} = 40000$
 $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14} \geq 0$

Nós passamos construir a primeira tabela da Fase I do método das Duas Fases.

Fonte: Print de tela [14]

A figura 6.12 apresenta a organização do problema com a inclusão das variáveis de folga e as artificiais, neste momento podemos escolher a solução direta do problema, ou visualizar o passo a passo da resolução.

Após organizar a forma padrão o programa apresenta a primeira tabela.

Figura 6.13: Imagem da tabela inicial

Tabela 1			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1
Base	C_b	P₀	P₁	P₂	P₃	P₄	P₅	P₆	P₇	P₈	P₉	P₁₀	P₁₁	P₁₂	P₁₃	P₁₄
P ₁₁	-1	500	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
P ₁₂	-1	500	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0
P ₁₃	-1	500	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0
P ₁₄	-1	500	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1
P ₉	0	100000	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
P ₁₀	0	40000	0.09	0.12	0.1	0.15	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Z		-2000	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

Fonte: Print de tela [14]

O site apresenta em destaque o elemento pivô. Assim a variável que vai sair da base é P_{11} e a que entra P_1 .

Após operacionalização da tabela o programa nos apresenta a segunda tabela.

Figura 6.14: Imagem da tabela 2: Após troca de P_{11} por P_1 na base.

Tabela 2			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1
Base	Cb	P0	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14
P1	0	500	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
P12	-1	500	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0
P13	-1	500	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0
P14	-1	500	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1
P9	0	99500	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	-1	0	0	0
P10	0	39955	0	0.12	0.1	0.15	0.09	0	0	0	0	1	-0.09	0	0	0
Z		-1500	0	-1	-1	-1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0

Fonte: Print de tela [14]

Seguindo o processo, o site apresenta as tabelas sequenciais. Temos então a terceira tabela, onde a variável que vai sair da base é P_{13} e a que entra P_3 .

Figura 6.15: Imagem da tabela 3: Após troca de P_{13} por P_3 na base.

Tabela 3			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1
Base	Cb	P0	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14
P1	0	500	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
P2	0	500	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0
P13	-1	500	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0
P14	-1	500	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1
P9	0	99000	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	-1	-1	0	0
P10	0	39895	0	0	0.1	0.15	0.09	0.12	0	0	0	1	-0.09	-0.12	0	0
Z		-1000	0	0	-1	-1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0

Fonte: Print de tela [14]

Dando continuidade a resolução do problema linear o site nos apresenta a quarta tabela, na qual a variável que vai sair da base é P_{14} e a que entra P_4 .

Figura 6.16: Imagem da tabela 4: Após troca de P_{14} por P_4 na base.

Tabela 4			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1
Base	Cb	P0	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14
P1	0	500	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
P2	0	500	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0
P3	0	500	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0
P14	-1	500	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1
P9	0	98500	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	-1	-1	-1	0
P10	0	39845	0	0	0	0.15	0.09	0.12	0.1	0	0	1	-0.09	-0.12	-0.1	0
Z		-500	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0

Fonte: Print de tela [14]

Na tela seguinte o site nos apresenta a tabela final, pois atinge o critério de parada, isto é, quando na linha indicadora nenhum dos valores dos custos reduzidos é negativo.

Depois de satisfeito o critério de parada, é preciso determinar se é possível passar para segunda fase para obter a solução ótima do problema original. Isto é feito observando o resultado obtido na primeira fase: se o seu valor for 0, isso significa que o problema original tem solução e é possível calcular, caso contrário, indica que é um problema não factível e sem solução.

Figura 6.17: Imagem da tabela final fase I

Tabela 5			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1
Base	Cb	P0	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14
P1	0	500	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
P2	0	500	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0
P3	0	500	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0
P4	0	500	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1
P9	0	98000	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1
P10	0	39770	0	0	0	0	0.09	0.12	0.1	0.15	0	1	-0.09	-0.12	-0.1	-0.15
Z		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1

Existe alguma solução possível para o problema, assim nós podemos passar para a Fase II para calcular-a.

Fonte: Print de tela [14]

Podemos observar na figura acima que, finalmente, temos uma base inicial para a fase

2, pois Z esta com elemento neutro. Caso esse problema não tivesse solução ótima seria informado nesse momento.

A partir daí, inicia-se a busca por uma base ótima para o modelo original.

Figura 6.18: Imagem tabela inicial da fase II

Tabela 1			0.00117	0.0024	0.0018	0.00375	0	0	0	0	0	0
Base	Cb	P0	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
P1	0.00117	500	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
P2	0.0024	500	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0
P3	0.0018	500	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0
P4	0.00375	500	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0
P9	0	98000	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
P10	0	39770	0	0	0	0	0.09	0.12	0.1	0.15	0	1
Z		4.56	0	0	0	0	-0.00117	-0.0024	-0.0018	-0.00375	0	0

Fonte: Print de tela [14]

A variável que vai sair da base é P_9 e a que entra P_8 . Nesse momento busca-se a solução ótima para nossa função objetivo.

Figura 6.19: Imagem tabela 2: Obtenção do valor ótimo

Tabela 2			0.00117	0.0024	0.0018	0.00375	0	0	0	0	0	0
Base	Cb	P0	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
P1	0.00117	500	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
P2	0.0024	500	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0
P3	0.0018	500	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0
P4	0.00375	98500	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0
P8	0	98000	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
P10	0	25070	0	0	0	0	-0.06	-0.03	-0.05	0	-0.15	1
Z		372.06	0	0	0	0	0.00258	0.00135	0.00195	0	0.00375	0

A solução ótima é $Z = 372.06$

$X_1 = 500$

$X_2 = 500$

$X_3 = 500$

$X_4 = 98500$

Fonte: Print de tela [14]

A solução ótima obtida após todas iterações será $Z = 372.06$ e as variáveis de decisão

(área em m^2 a ser plantada de cada produto) apresentam os seguintes valores: $x_1 = 500m^2$, $x_2 = 500m^2$, $x_3 = 500m^2$ e $x_4 = 98500m^2$.

Exemplo 6.2. Agrotóxicos

O problema a seguir foi inspirado em [11] e adaptado pela autora.

Uma indústria de pesticidas regulamentada pela EMBRAPA produz três tipos de agrotóxicos, inseticidas, herbicidas e fungicidas que atuam fortemente como catalisadores do processo produtivo rural, uma vez que eles possuem uma grande variedade de substâncias químicas ou produtos biológicos e que desenvolvidos de forma a potencializar uma ação biocida que utilizam basicamente três tipos de ingredientes: compostos a base de cobre, acetocloro e solvente.

As informações das concentrações de cada tipo de ingrediente estão informadas na tabela a seguir.

	Compostos de Cobre	Acetocloro	Solvente
Inseticida	15%	15 %	70 %
Herbicida	20 %	30 %	50 %
Fungicida	15 %	25 %	60 %

Fonte: Elaborado pela autora

Sejam

- x_1 = Inseticida
- x_2 = Acetocloro
- x_3 = Fungicida

Existe em estoque 800 toneis de solvente, 350 toneis de acetocloro e 300 toneis de compostos à base de cobre.

Sabendo que os lucros na venda de cada tipo de agrotóxico, por tonel, são:

Inseticida : R\$ 400,00

Herbicida: R\$ 300,00

Fungicida: R\$ 250,00.

Qual a produção necessária para essa empresa atingir o lucro máximo?

Variável de decisão

$$\text{maximizar lucro} = 400x_1 + 300x_2 + 250x_3 \quad (6.6)$$

sujeito à: restrições associadas aos compostos de cobre:

$$0,1x_1 + 0,2x_2 + 0,15x_3 \leq 300,$$

restrições associadas ao acetocloro:

$$0,1x_1 + 0,3x_2 + 0,25x_3 \leq 350, \quad (6.7)$$

restrições associadas ao solvente:

$$0,7x_1 + 0,5x_2 + 0,6x_3 \leq 800, \quad (6.8)$$

restrições de não-negatividade:

$$x_1, x_2, x_3, \geq 0. \quad (6.9)$$

Para resolução desse problema de programação linear vamos utilizar o site "solver simplex", disponível em [15].

Figura 6.20: Interface do Solver simplex

Problema de Otimização

Escreva seu problema de programação linear abaixo ou carregue-o.

Criar Novo Problema

Carregar Problema

Tipo do Simplex:

Duas Fases

Tipo do Problema:

Maximização

Número de Variáveis:

1

Novo Problema de Otimização

	x1	x2	x3	Relação	Lado Direito
Objetivo					
Restrição1				<=	
Restrição2				<=	
Restrição3				<=	

+ Adicionar Restrição

- Excluir Restrição

	x1	x2	x3
Limite Superior	inf	inf	inf
Limite Inferior	0	0	0

Salvar Problema

Executar Completo

Passo a Passo

Limpar Tudo

Fonte: Tela introdutória do Solver simplex.

Em seguida adicionamos a função objetivo e as restrições do problema em estudo.

Figura 6.21: Interface do Solver simplex

Problema de Otimização

Escreva seu problema de programação linear abaixo ou carregue-o.

Criar Novo Problema

Carregar Problema

Tipo do Simplex:

Duas Fases

Tipo do Problema:

Maximização

Número de Variáveis:

3

Novo Problema de Otimização

	x1	x2	x3	Relação	Lado Direito
Objetivo	400	300	250		
Restrição1	0.1	0.2	0.15	<=	300
Restrição2	0.1	0.3	0.25	<=	350
Restrição3	0.7	0.5	0.6	<=	800

+ Adicionar Restrição

- Excluir Restrição

Fonte: Interface do Solver simplex após inclusão dos dados do problema

Assim que inserida a função objetivo e as restrições, o site gera a tabela inicial, na qual o usuário tem a opção de executar de forma completa obtendo o resultado final, ou realizar passo a passo, visualizando cada avanço no desenvolvimento do problema. Essa ferramenta mostra-se muito benéfica no estudo do método simplex, pois o aluno consegue compreender e conferir cada passo do seu progresso.

Figura 6.22: Organização inicial da tabela

Iteração Inicial							
Base	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Resultado
z	-400	-300	-250	0	0	0	0
x4	0,1	0,2	0,15	1	0	0	300
x5	0,1	0,3	0,25	0	1	0	350
x6	0,7	0,5	0,6	0	0	1	800

➡ Próximo Passo

Fonte: Print de tela de [11].

Neste momento da interação inicial o programa nos mostra, em destaque, qual a variável que sai da base, coluna com menor valor(-400), assim como nos mostra o teste da razão para encontrar o elemento pivô, no caso o 0,7.

Figura 6.23: Imagem tabela inicial destacando variável que sai da base e o elemento pivô.

Iteração Inicial								
Base	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Resultado	Razão
z	-400	-300	-250	0	0	0	0	
x4	0,1	0,2	0,15	1	0	0	300	3000
x5	0,1	0,3	0,25	0	1	0	350	3500
x6	0,7	0,5	0,6	0	0	1	800	1142,8571

Fonte: Print de tela de [11].

Após realização dos cálculos necessários, temos a tabela com a primeira interação, que reflete os valores obtidos.

Figura 6.24: Imagem tabela após interação inicial

Iteração 1								
Base	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Resultado	Razão
z	0	-14,2857	92,8571	0	0	571,4286	457142,8571	
x4	0	0,1286	0,0643	1	0	-0,1429	185,7143	
x5	0	0,2286	0,1643	0	1	-0,1429	235,7143	
x1	1	0,7143	0,8571	0	0	1,4286	1142,8571	

Próximo Passo

Fonte: Print de tela de [11].

Dando continuidade na resolução do problema deve-se, novamente, encontrar a variável que sai da base e o elemento pivô, através do teste da razão.

Figura 6.25: Imagem segunda tabela destacando variável que sai da base e o elemento pivô.

Iteração 1								
Base	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Resultado	Razão
z	0	-14,2857	92,8571	0	0	571,4286	457142,8571	
x4	0	0,1286	0,0643	1	0	-0,1429	185,7143	1444,4444
x5	0	0,2286	0,1643	0	1	-0,1429	235,7143	1031,25
x1	1	0,7143	0,8571	0	0	1,4286	1142,8571	1600

Fonte: Print de tela de [11].

Após realização dos cálculos necessários, temos a segunda tabela do problema que reflete os valores obtidos.

Figura 6.26: Imagem segunda tabela após interações.

Iteração 2								
Base	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Resultado	Razão
z	0	0	103,125	0	62,5	562,5	471875	
x4	0	0	-0,0281	1	-0,5625	-0,0625	53,125	
x2	0	1	0,7188	0	4,375	-0,625	1031,25	
x1	1	0	0,3437	0	-3,125	1,875	406,25	

Próximo Passo

Fonte: Print de tela de [11].

Neste momento, após 3 interações, o site nos mostra que obteve o valor ótimo para o problema.

Figura 6.27: Imagem da tela com resultado final

Z = 471875

Solução Ótima.

Quantidade de Iterações: 3

Variáveis Básicas

$x_1 = 406,25$ |
 $x_2 = 1031,25$ |
 $x_4 = 53,125$ |

Variáveis Não Básicas

$x_3 = 0$ |
 $x_5 = 0$ |
 $x_6 = 0$ |

Fonte: Print de tela de [11].

O uso de programa é muito satisfatório pela sua didática, pois mostra com riqueza de detalhes todos os passos e desenvolvimento na resolução do problema de programação linear.

Exemplo 6.3. Ligas metálicas

A situação problema a seguir foi inspirado em [6] e adaptado pela autora.

Fundições são responsáveis pela produção de diversos tipos de aço a partir de metais distintos como chumbo, zinco, estanho entre outros. Esses insumos são adicionados em uma fornalha, no qual ao atingirem seu ponto de liquefação se misturam formando uma nova liga metálica. O preço dos insumos pode variar substancialmente, dependendo do mineral de extração.

Uma empresa produz duas diferentes ligas metálicas, a liga A é composta de 30% de chumbo, 20% de zinco e 50% de estanho, e a liga B é composta de 30% de chumbo, 30%

de zinco e 40% de estanho. A mesma tem a sua disposição 800 kg de chumbo, 600 kg de zinco e 1400 kg de estanho, sabendo que a liga A pode ser comercializada por 1200 reais a tonelada e a liga B por 1500. Qual deve ser a produção dessa empresa para obter a maior receita?

Sejam

- x_1 = Liga A
- x_2 = Liga B

Variável de decisão

$$\text{maximizar receita} = 1200x_1 + 1500x_2$$

sujeito à:

restrições associadas aos compostos de chumbo (Pb) :

$$0,3x_1 + 0,3x_2 \leq 800.$$

restrições associadas ao Zinco (Zn):

$$0,2x_1 + 0,3x_2 \leq 600,$$

restrições associadas ao Estanho (Sn):

$$0,5x_1 + 0,4x_2 \leq 1400,$$

restrições de não-negatividade:

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Para resolução desse problema de programação linear vamos utilizar o software "PHP Simplex", disponível em [14]. Perceba que para este exemplo escolhemos o método gráfico para resolução do problema.

Figura 6.28: Interface do PHP Simplex

PHPSimplex

Anúncios Google

Enviar comentários Anúncio? Por quê? ⓘ

Método: Gráfico

Quantas variáveis de decisão tem o problema? 2

Quantas restrições? 3

Continuar

Fonte: Print de tela de [14].

Após inserirmos a função objetivo e as restrições do problema, temos a interface abaixo.

Figura 6.29: Interface com valores a serem analisados.

Qual é o objetivo da função? Maximizar ▼

Função: X_1 + X_2

Restrições:

X_1 + X_2 ≤ ▼

X_1 + X_2 ≤ ▼

X_1 + X_2 ≤ ▼

$X_1, X_2 \geq 0$

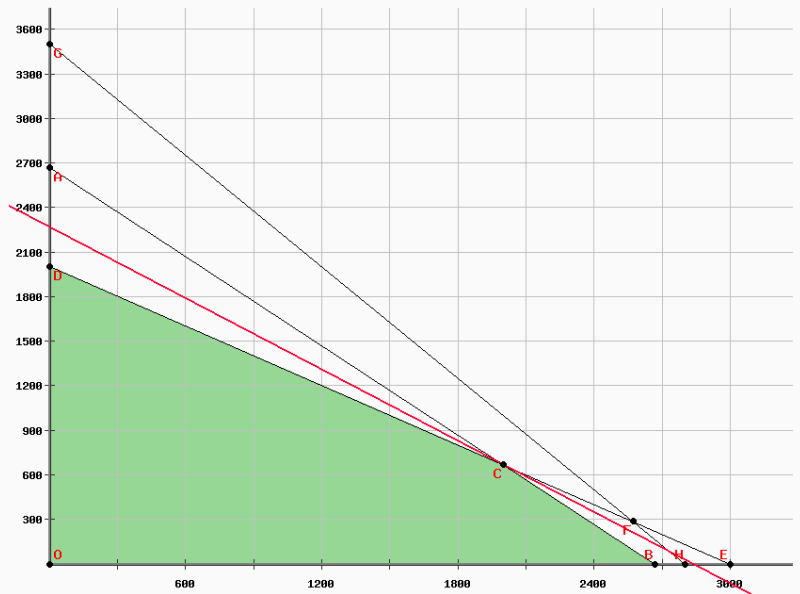
Continuar

Fonte: Print de tela de [14].

Ao clicarmos em "**Continuar**" o programa nos apresenta a representação gráfica com as restrições e a função objetivo com destaque para região viável.

Figura 6.30: Imagem da resolução gráfica

MAXIMIZAR: $Z = 1200 X_1 + 1500 X_2$
 $0.3 X_1 + 0.3 X_2 \leq 800$
 $0.2 X_1 + 0.3 X_2 \leq 600$
 $0.5 X_1 + 0.4 X_2 \leq 1400$
 $X_1, X_2 \geq 0$



Fonte: Print de tela de [14].

Além do gráfico, o programa nos fornece as coordenadas encontradas. Neste momento os resultados estão apresentados na forma decimal, mas podemos escolher visualizar os resultados na forma fracionada.

O próprio programa apresenta a legenda para a leitura correta do gráfico. As regiões representadas pelas coordenadas na cor branca, estão dentro da região viável mais não são os pontos ótimos. Já as regiões das coordenadas em vermelho estão fora da região viável. As coordenadas em verde são a região de melhor solução para o problema.

Figura 6.31: Imagem da tabela com as regiões de interesse.

Ponto	Coordenada X (X_1)	Coordenada Y (X_2)	Valor da função (Z)
O	0	0	0
A	0	2666.6666666667	4000000
B	2666.6666666667	0	3200000
C	2000	666.6666666667	3400000
D	0	2000	3000000
E	3000	0	3600000
F	2571.4285714286	285.71428571429	3514285.7142857
G	0	3500	5250000
H	2800	0	3360000

☐ Mostrar os resultados como frações.

NOTA:

Verde são os pontos em que a solução seja encontrada.
Vermelho são os pontos fora da região viável.

Solucionar pelo método Simplex

Salvar o exercício

Fonte: Print de tela de [14].

Percebe-se pela interface que o próprio programa fornece a opção de solucionar o mesmo problema pelo método simplex.

O software fornece o problema na sua forma padrão, adicionando variáveis de folga quando necessário.

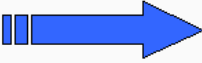
- Como a restrição 1 é do tipo $\geq$ é necessária a variável de folga x_3 .
- Como a restrição 2 é do tipo $\geq$ é necessária a variável de folga x_4 .
- Como a restrição 3 é do tipo $\geq$ é necessária a variável de folga x_5 .

Figura 6.32: Tela com o método simplex

MAXIMIZAR: $Z = 1200 X_1 + 1500 X_2$

sujeito a

$0,3 X_1 + 0,3 X_2 \leq 800$
 $0,2 X_1 + 0,3 X_2 \leq 600$
 $0,5 X_1 + 0,4 X_2 \leq 1400$
 $X_1, X_2 \geq 0$



MAXIMIZAR: $Z = 1200 X_1 + 1500 X_2 + 0 X_3 + 0 X_4 + 0 X_5$

sujeito a

$0,3 X_1 + 0,3 X_2 + 1 X_3 = 800$
 $0,2 X_1 + 0,3 X_2 + 1 X_4 = 600$
 $0,5 X_1 + 0,4 X_2 + 1 X_5 = 1400$
 $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$

Fonte: Print de tela de [14].

Após organizar a forma padrão o programa apresenta a primeira tabela, onde a variável que vai sair da base é P_4 e a que entra P_2 .

Figura 6.33: Imagem primeira tabela simplex

Tabela 1			1200	1500	0	0	0
Base	C_b	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_3	0	800	0.3	0.3	1	0	0
P_4	0	600	0.2	0.3	0	1	0
P_5	0	1400	0.5	0.4	0	0	1
Z		0	-1200	-1500	0	0	0

Fonte: Print de tela de [14].

A variável que sairá da base será P_4 e a que entrará será a P_2 .

Dando continuidade ao processo de resolução, teremos a segunda tabela, na qual a variável que sairá da base é P_3 e a que entrará será a P_1 . Neste momento da resolução, os resultados foram dados na forma fracionária este é um recurso disponível do programa.

Figura 6.34: Imagem segunda tabela simplex

Tabela 2			1200	1500	0	0	0
Base	C_b	P₀	P₁	P₂	P₃	P₄	P₅
P ₃	0	200	1 / 10	0	1	-1	0
P ₂	1500	2000	2 / 3	1	0	10 / 3	0
P ₅	0	600	7 / 30	0	0	-4 / 3	1
Z		3000000	-200	0	0	5000	0

Continuar

Fonte: Print de tela de [14].

A variável que sairá da base será P_3 e a que entrará será a P_1 .

A terceira tabela apresenta o resultado ótimo após todas as interações, podemos perceber que os valores obtidos são os mesmos, independente do método de resolução escolhido.

Figura 6.35: Imagem tabela final após todas as interações.

Tabela 3			1200	1500	0	0	0
Base	C_b	P₀	P₁	P₂	P₃	P₄	P₅
P ₁	1200	2000	1	0	10	-10	0
P ₂	1500	666.666666666667	0	1	-6.66666666666667	10	0
P ₅	0	133.333333333333	0	0	-2.33333333333333	1	1
Z		3400000	0	0	2000	3000	0

Solucionar pelo método Gráfico

☐ Mostrar os resultados como frações.

A solução ótima é $Z = 3400000$

$X_1 = 2000$

$X_2 = 666.666666666667$

Fonte: Print de tela de [14].

Exemplo 6.4. Produção de tortas

Um ateliê de tortas está lançando dois novos tamanhos de tortas de frango, a torta média que requer 200 g de queijo e 400g de frango, já a torta grande requer 300g de queijo e 800 g de frango. Sabendo que há uma limitação semanal de 30 kg de queijo e 70 kg de frango e que não há limitação dos outros ingredientes necessários para produção das tortas qual deve ser a produção semanal para que essa empresa obtenha o maior lucro possível, já que a torta média será vendida com um lucro de R\$30,00 e a grande obtendo um lucro de R\$ 50,00.

Modelando o problema temos

- x_1 = Torta média
- x_2 = Torta grande

Variável de decisão

$$\text{maximizar } \text{lucro} = 30x_1 + 50x_2 \quad (6.10)$$

sujeito à: restrições associadas a quantidade de queijo disponível:

$$200x_1 + 300x_2 \leq 30000,$$

restrições associadas a quantidade de frango disponível:

$$400x_1 + 800x_2 \leq 70000,$$

restrições de não-negatividade:

$$x_1, x_2 \geq 0. \quad (6.11)$$

Para resolução desse problema escolhemos o aplicativo *Linear Program Solver* disponível para ser baixado gratuitamente na Play Store.

O exemplo foi escolhido por se tratar de um caso muito simples e podermos utilizar essa ferramenta que é direcionada para alunos que estão aprendendo a resolver problemas de programação linear.

Figura 6.36: Aplicativo Linear Program Solver

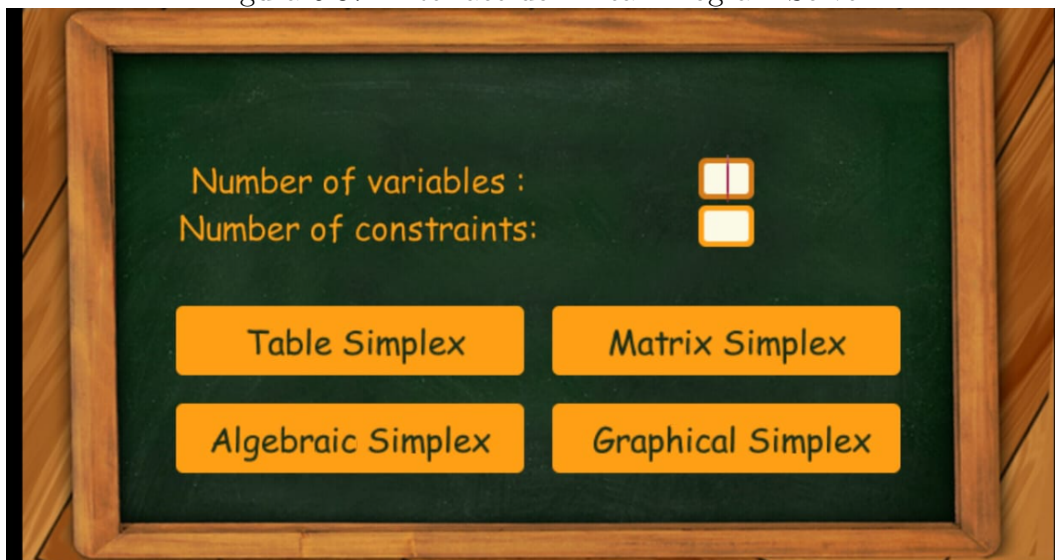


Fonte: Play Store.

O aplicativo é muito intuitivo, em sua tela inicial deve-se escolher qual o método a ser utilizado para resolução o problema linear e a quantidade de variáveis e restrições que

estarão presentes na situação analisada. A seguir temos a tela inicial para escolha do método de resolução.

Figura 6.37: Interface do Linear Program Solver

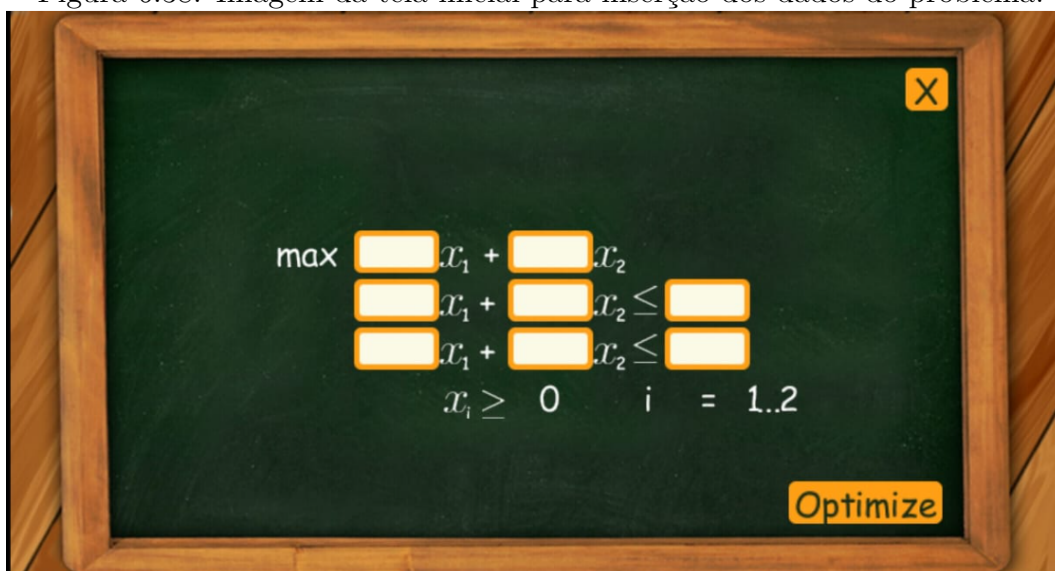


Fonte: Print aplicativo Linear Program Solver

Independente do método escolhido a tela de inclusão das variáveis será a mesma.

Como no exemplo que estamos analisando, com duas variáveis e duas restrições, obtemos a tela a seguir.

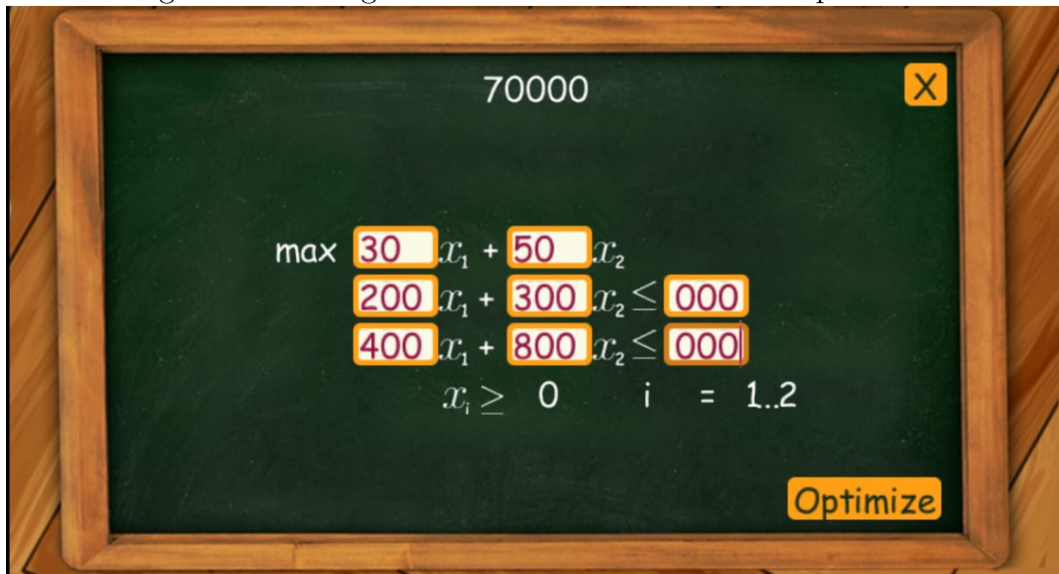
Figura 6.38: Imagem da tela inicial para inserção dos dados do problema.



Fonte: Print aplicativo Linear Program Solver

A próxima imagem mostra os dados inseridos, é neste momento que o aplicativo demonstra sua limitação, pois só é possível inserir números naturais.

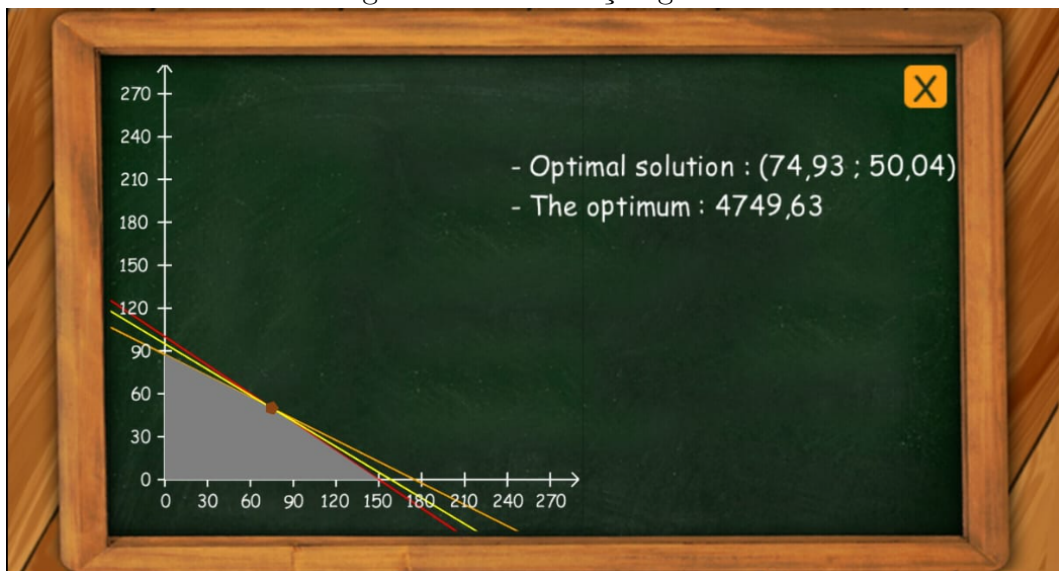
Figura 6.39: Imagem tela inicial com os dados do problema.



Fonte: Print aplicativo Linear Program Solver

Ao escolhermos o método gráfico para resolução obtemos uma única tela que apresenta o gráfico e a solução ótima, o aplicativo não demonstra as etapas de resolução como mostra a figura a seguir.

Figura 6.40: Resolução gráfica



Fonte: Print aplicativo Linear Program Solver

Utilizaremos o mesmo problema para visualizar a versatilidade do aplicativo. Agora vamos resolver pelo método simplex.

Figura 6.41: Método simplex

Iteration : 1 >

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	
z	1	-30	-50	0	0	0
x_3	0	200	300	1	0	30000
x_4	0	400	800	0	1	70000

The most negative is : -50.0 so get in the base x_2
 $\min\{100/1; 175/2\}=87,5$ so get out the base x_4
 pivot around of 800

Fonte: Print aplicativo Linear Program Solver

Percebemos que o menor número é o -50 então, após o teste da razão, quem entra na base é x_2 e quem sai da base é o x_4 . Obtendo assim a próxima da tabela.

Figura 6.42: Imagem segunda tela Método Simplex

< Iteration : 2 >

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	
z	1	-5	0	0	1/16	4375
x_3	0	50	0	1	-3/8	3750
x_2	0	1/2	1	0	1/800	175/2

The most negative is : -5.0 so get in the base x_1
 $\min\{75/1; 175/1\}=75$ so get out the base x_3
 pivot around of 50

Fonte: Print aplicativo Linear Program Solver

Agora o elemento que sai da base é o x_1 e o elemento de entrada é o x_3 . O aplicativo nos mostra todas essas operações através das cores em destaque.

Figura 6.43: Imagem terceira tela Método Simplex

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	
z	1	0	0	1/10	1/40	4750
x_1	0	1	0	1/50	-3/400	75
x_2	0	0	1	-1/100	1/200	50

Optimal solution : $X=(75 ; 50)$
 Value of the optimum : 4750

Fonte: Print aplicativo Linear Program Solver

Após três interação o aplicativo apresenta a solução ótima para o problema.

O aplicativo também fornece a opção de resolução pelo método de matriz simplex. A título de curiosidade, vamos apresentar essa resolução.

Figura 6.44: Matriz simplex

$$A = \begin{pmatrix} 200 & 300 & 1 & 0 \\ 400 & 800 & 0 & 1 \end{pmatrix}, c^T = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 30000 \\ 70000 \end{pmatrix}$$

Fonte: Print aplicativo Linear Program Solver

Na imagem anterior temos a organização da matriz.

Figura 6.45: Primeira interação matriz simplex

Iteration : 1

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

reduced costs : $\bar{c} = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N = (30 \ 50)$

We choose the incoming variable : x_2

$$\bar{a} = A_B^{-1} A_N = \begin{pmatrix} 200 & 300 \\ 400 & 800 \end{pmatrix}, \bar{b} = A_B^{-1} b = \begin{pmatrix} 30000 \\ 70000 \end{pmatrix}$$

Fonte: Print aplicativo Linear Program Solver

Após as operações envolvendo os custos reduzidos do problema temos a segunda tela de interação. Escolhendo x_2 como a variável de entrada temos:

Figura 6.46: Segunda interação matriz simplex

Iteration : 2

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3/8 \\ 0 & 1/800 \end{pmatrix}$$

reduced costs : $\bar{c} = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N = (5 \ -1/16)$

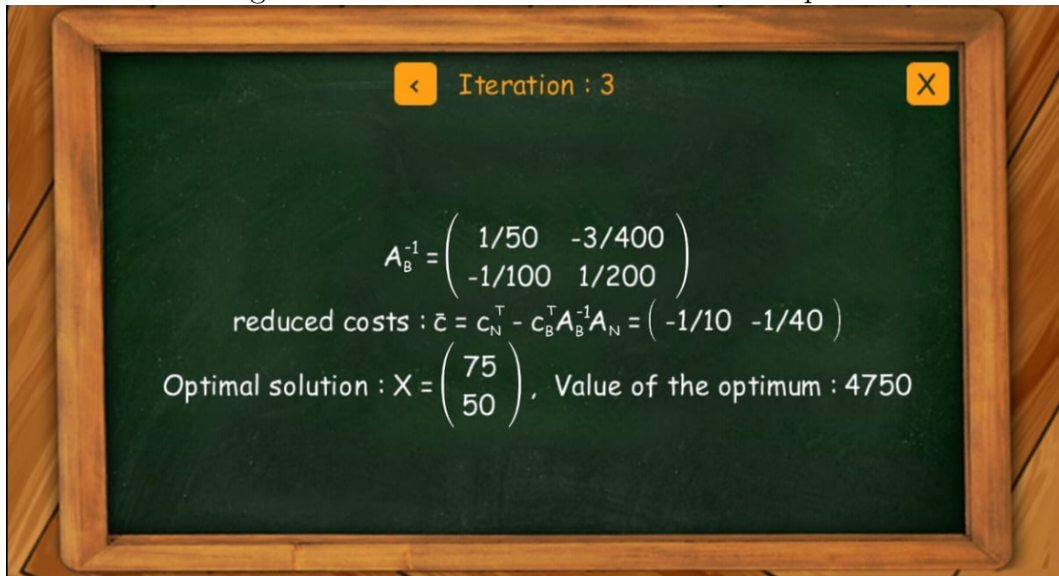
We choose the incoming variable : x_1

$$\bar{a} = A_B^{-1} A_N = \begin{pmatrix} 50 & -3/8 \\ 1/2 & 1/800 \end{pmatrix}, \bar{b} = A_B^{-1} b = \begin{pmatrix} 3750 \\ 175/2 \end{pmatrix}$$

Fonte: Print aplicativo Linear Program Solver

Escolhendo x_1 como a variável de entrada temos a próxima interação e assim obtemos a solução ótima para o problema.

Figura 6.47: Resultado final da matriz simplex



Iteration : 3

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/50 & -3/400 \\ -1/100 & 1/200 \end{pmatrix}$$
$$\text{reduced costs : } \bar{c} = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N = \begin{pmatrix} -1/10 & -1/40 \end{pmatrix}$$
$$\text{Optimal solution : } X = \begin{pmatrix} 75 \\ 50 \end{pmatrix}, \text{ Value of the optimum : } 4750$$

Fonte: Print aplicativo Linear Program Solver

Este aplicativo se mostrou muito eficiente para resolução de situações simples de programação linear, pois sua versatilidade facilita muito na aprendizagem e entendimento dos métodos de otimização. Mas sua utilização é restrita a situações de baixa complexidade.

Para situações mais complexas existem programas mais sofisticados que são utilizados por grandes empresas para analisar suas demandas.

7 Conclusão

Este trabalho teve o objetivo de apresentar os principais conceitos sobre Programação Linear, seus teoremas fundamentais, a dualidade e ferramentas computacionais para resolução de problemas de programação linear. Conhecemos o método gráfico e sua importância para resoluções de problemas lineares no $\mathbb{R}^2$, assim como o método simplex pode ser utilizado para otimização de situações com n variáveis e m restrições.

Buscamos apresentar as principais ferramentas computacionais, gratuitas, que podem ser encontradas nas principais plataformas e que podem ser utilizadas por professores e alunos durante as aulas afim de facilitar o processo de ensino aprendizagem da Pesquisa Operacional.

Utilizamos exemplos simples para demonstrarmos passo a passo o processo e escolha dessas ferramentas computacionais.

Esperamos com estas propostas auxiliar no estudo e aprendizagem das aplicações de otimização, que muitas vezes se tornam massantes pelo excesso de cálculos, que embora simples necessitam de demasiado tempo. Podemos perceber que os apoios tecnológicos utilizados tem características distintas, mas muito eficazes. Basta o usuário analisar a qual lhe dará um melhor resultado para o problema de programação linear que está sendo analisado.

Referências

- [1] PEDREGAL, P. Introduction to optimization. New York: Springer, 2004.
- [2] GALLIER, J. Fundamentals of linear algebra and optimization. 2014.
- [3] CELESTE, M. PROGRPMPCÃO LINEPR.
- [4] BAZARAA, M. S.; JARVIS, J. J.; SHERALI, H. D. Linear programming and network flows. 2005.
- [5] JÚDICE, J. et al. Programação Linear. Coimbra, Portugal: Departamento de Matemática-Universidade de Coimbra, 2006.
- [6] ARENALES, M., ARMENTANO V. and MORABITO R. Pesquisa operacional. Elsevier Brasil, 2006.
- [7] SALVADOR, T. R.. Um estudo do método simplex e sua aplicação na radioterapia. 2016.
- [8] PELLEGRINI, J. C. Programação Linear (e rudimentos de otimização não linear). Notas de aula, 2014.
- [9] LUENBERGER, D. G.; SIM, Yinyu. Programação Linear e Não Linear . Springer, 2008.
- [10] DOS SANTOS, M. P. Programação Linear. Rio de Janeiro: UERJ, 2000.
- [11] RODRIGUES, Luis Henrique et al. Pesquisa operacional: programação linear passo a passo: do entendimento do problema à interpretação da solução. São Leopoldo: Unisinos, 2014.
- [12] BRESSAN, Glaucia Maria; REGHIM, Daniely Cristiny Lucas; STIEGELMEIER, Elenice Weber. Modelagem matemática de problemas agrícolas utilizando programação linear. CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática, 2019.
- [13] PEIXOTO, TCLC. Reuso de água: comparação entre os métodos DFA, programação linear e programação não linear. 2011. Tese de Doutorado. Dissertação (Mestrado em Engenharia Química), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- [14] Disponível em: <http://www.phpsimplex.com/pt/>, acesso em (10/01/2023)
- [15] Disponível em: <https://otimizacao.js.org/simplex.html>, acesso em (16/01/2023)

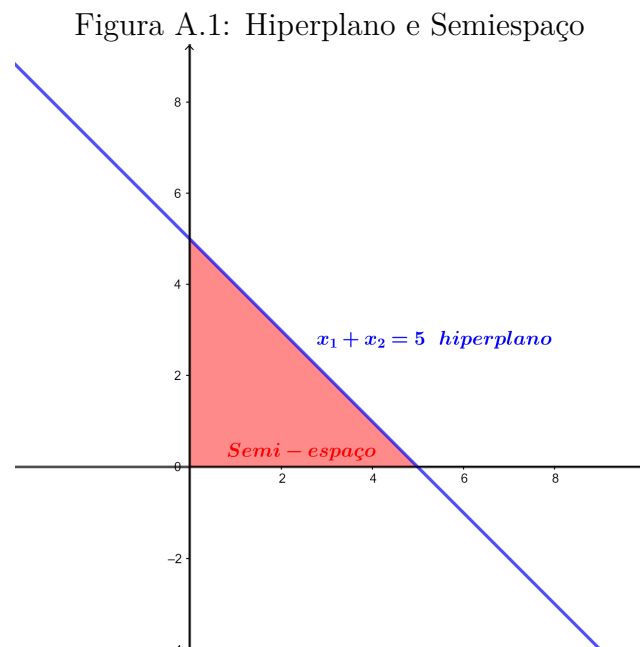
A Conceitos geométricos utilizados na programação linear

Neste apêndice introduzimos algumas definições básicas da geometria presente na programação linear. Foram utilizadas as referências [1], [2].

A.1 Conceitos básicos

Definição A.1. Seja $a \in \mathbb{R}^n$ um vetor não-nulo e $b \in \mathbb{R}$, um escalar. O conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n / a^T x = b\}$ é chamado de Hiperplano.

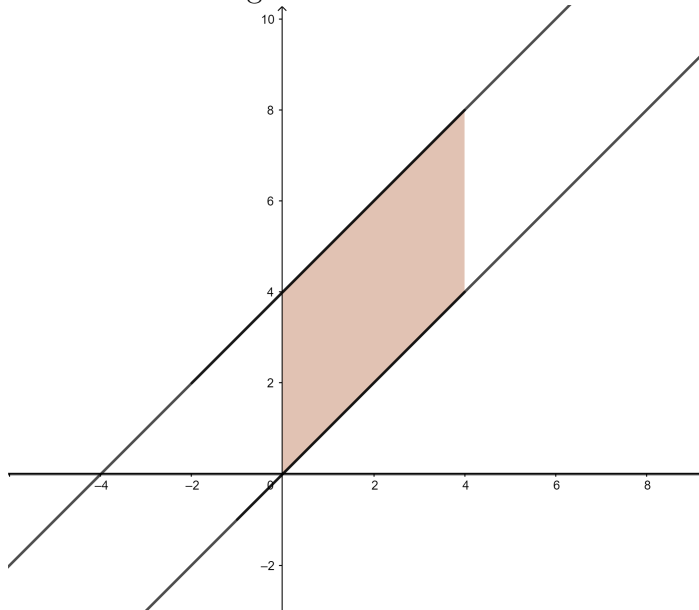
Definição A.2. Seja $a \in \mathbb{R}^n$ um vetor não-nulo e $b \in \mathbb{R}$, um escalar. Os conjuntos $\{x \in \mathbb{R}^n / a^T x \geq b\}$ e $\{x \in \mathbb{R}^n / a^T x \leq b\}$ são chamados de Semiespaço.



FONTE: Da autora.

Definição A.3. Poliedro é um conjunto que pode ser descrito como uma interseção de Hiperplanos e/ou Semiespaços. Logo, um poliedro pode ser escrito na forma: $\{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$, sendo A uma matriz $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$.

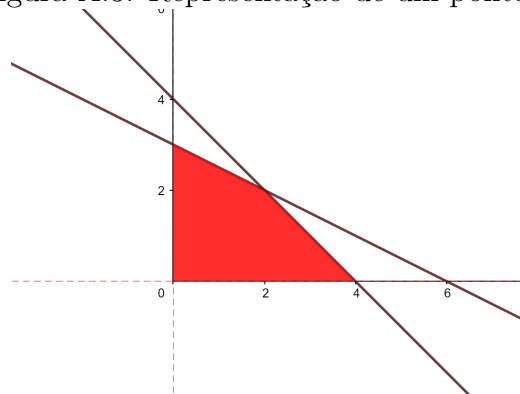
Figura A.2: Poliedro



FONTE: Da autora.

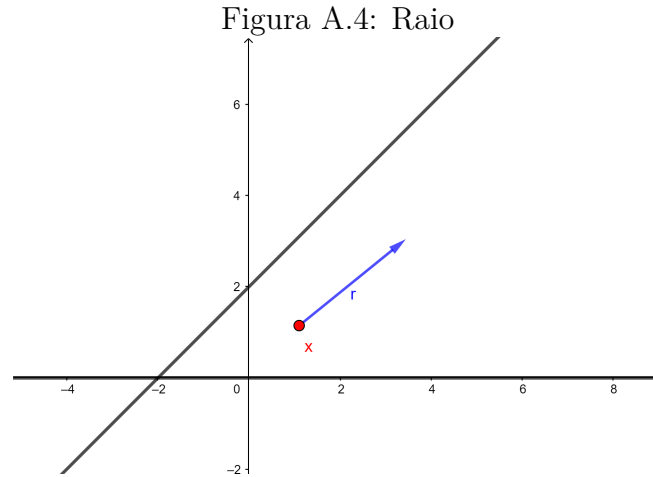
Definição A.4. Polítopo é um poliedro limitado, tem sempre um limite superior, isto é, existe uma constante $k > 0$ tal que $|x_i| \leq k$, $i = 1, \dots, n$ por todo x possível.

Figura A.3: Representação de um polítopo



FONTE: Da autora.

Definição A.5. Considere o poliedro $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$. O vetor $r \in S$ é chamado de **raio** quando satisfaz $x + \alpha r \in S$, para todo $x \in S$ e escalar $\alpha \geq 0$.



FONTE: Da autora.

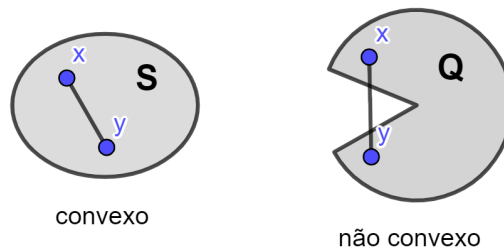
Definição A.6. Considere o poliedro $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$, contendo um raio $r \in S$. Seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional arbitrário. Quando $f(x + \alpha r) > f(x)$ para todo $x \in S$ e escalar $\alpha \geq 0$ chamaremos r de **raio de subida**.

A.2 Conjunto convexo

Um conjunto convexo é um conjunto de soluções viáveis para a programação linear. Veremos alguns aspectos da convexidade.

Definição A.7. Seja um conjunto $C \subset \mathbb{R}^m$. Dados dois pontos quaisquer x_1 e $x_2 \in C$ e $\alpha \in [0, 1]$. Quando $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in C$, então, x_1 e x_2 são chamados *pontos extremos* e C é um conjunto convexo. Não obedecendo a relação, então C é dito não convexo.

Figura A.5: Conjunto convexo e não convexo

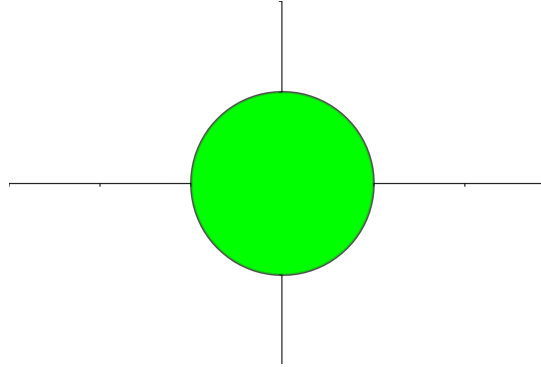


FONTE: Da autora.

Exemplo A.8. Conjunto convexo

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 + x_2^2 \leq r\}$$

Figura A.6: Conjunto convexo



FONTE: Da autora.

Note que $A = (x_1, x_2) \in S$, significa que:

$$x_1^2 + x_2^2 \leq r \Rightarrow \|(x_1, x_2)\| \leq r^2.$$

Logo, se $A = (x_1, x_2) \in S$ e $B = (y_1, y_2) \in S$, mostremos que $C_s = \lambda A + (1-\lambda)B$, $\lambda \in [0, 1]$, pertence a S . De fato,

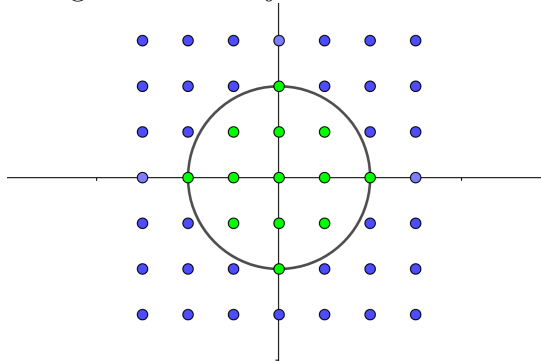
$$\|C_s - 0\| = \|\lambda A + (1-\lambda)B\| \leq \lambda\|A\| + (1-\lambda)\|B\| < \lambda r^2 + (1-\lambda)r^2 = \lambda r^2 + r^2 - \lambda r^2 = r^2$$

Portanto, $C_s \in S$.

Exemplo A.9. Conjunto não convexo

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 / x_1^2 + x_2^2 \leq r\}$$

Figura A.7: Conjunto não convexo



FONTE: Da autora.

Note que nem todos os pontos do segmento estão em $\mathbb{Z}^2$.

Definição A.10. Combinação convexa e envoltório convexo. Sejam os vetores $x^1, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$ e os escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ tais que $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$.

Dado um conjunto $x \subset \mathbb{R}^n$, a envoltória convexa de x , representada por $\text{conv}(x)$, é definida como a interseção de todos os conjuntos convexos que contêm x , isto é, o menor conjunto convexo que contém x .

Então:

- O vetor $y = \lambda_1 x^1 + \dots + \lambda_k x^k$ é chamado de combinação convexa de vetores $x^1, \dots, x^k$.

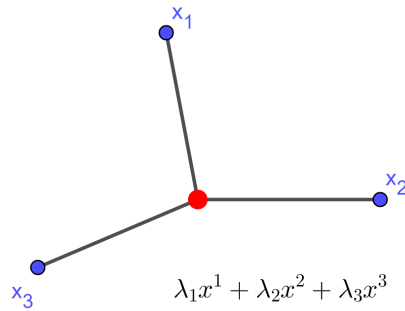


Figura A.8: Combinação convexa

- O envoltório convexo de vetores envolve todos os pontos e a combinação convexa desses vetores $x^1, \dots, x^k$.

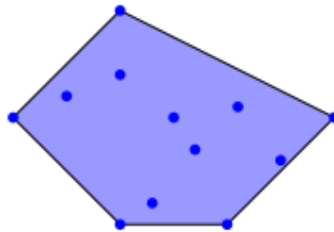


Figura A.9: Envoltório convexo