

IFT - UNESP
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.002/24

Modelo de Yukawa no formalismo da teoria de perturbação causal em (2+1)-dimensões

Maycol Clister Fernández Chillce

Orientador

Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar

Co-orientador

Dr. Oscar Adán Acevedo Sánchez

Abril de 2024

Dedico esta dissertação a mi papá y mamá.

F363m	Fernández Chillce, Maycol Clister Modelo de Yukawa no formalismo da teoria de perturbação causal em (2+1)-dimensões / Maycol Clister Fernández Chillce. – São Paulo, 2024 89 f. : il. Color. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Física Teórica (IFT), São Paulo Orientador: Bruto Max Pimentel Escobar Coorientador: Oscar Adán Acevedo Sánchez 1. Teoria de campos (Física). 2. Causalidade (Física). 3. Teoria das distribuições (Análise funcional). I. Título
-------	---

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Física Teórica (IFT), São Paulo. Dados fornecidos pelo autor(a).

MODELO DE YUKAWA NO FORMALISMO DA TEORIA DE PERTURBAÇÃO CAUSAL EM (2+1) - DIMENSÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Física Teórica do Câmpus de São Paulo, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título Mestre em Física, Especialidade Física Teórica.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. BRUTO MAX PIMENTEL ESCOBAR (Orientador)
Instituto de Física Teórica/UNESP

Prof. Dr. PEDRO JOSÉ POMPEIA
Instituto Tecnológico de Aeronáutica/ITA

Prof. Dr. GABRIEL BRANDÃO DE GRACIA
Universidade Federal do ABC/UFABC

Conceito: Aprovado

São Paulo, 10 de abril de 2024.

iii

Agradecimentos

- Agradezco profundamente a mis padres, **Justa** y **David**, quienes me apoyaron incondicionalmente en mis estudios desde la graduación en Perú. También agradezco a mi hermano, **Jean Pool**, a quien estimo mucho y confío en que tendrá un buen futuro profesional.
- Agradeço a meu amigo, L. Gabriel, quem foi a primeira pessoa que me recebeu no IFT e me ajudou em muitos assuntos durante o mestrado.
- Agradeço a meu orientador, professor Dr. B.M. Pimentel, pela orientação, tempo e **paciência** ao longo desta dissertação, que representou um grande desafio para mim.
- Agradeço ao professor Dr. O. A. Acevedo pelo tempo dedicado e pelas conversas sobre as diversas dificuldades na dissertação.
- Finalmente, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo financiamento, e ao Instituto de Física Teórica pelo acolhimento.

Resumo

Na presente dissertação estudamos diferentes aspectos do modelo de Yukawa para interações núcleon-méson em $(2+1)$ -dimensões através de uma abordagem axiomática para a matriz S , denominada teoria de perturbação causal (TPC), que se baseia na teoria de distribuições. A TPC é uma teoria de construção da matriz S , que depende de uma função teste que decai rapidamente nos infinitos por meio das condições de unitariedade, invariância translacional, invariância de Lorentz e causalidade. Nosso estudo demonstra que as correções radiativas no modelo de Yukawa são bem definidas e livres de divergências ultravioletas. Adicionalmente, determinamos a seção eficaz no espalhamento núcleon-núcleon.

Palavras Chaves: Teoria de perturbação causal; Matriz S ; Causalidade; Distribuições.

Áreas do conhecimento: Teoria quântica de campo.

Abstract

In this dissertation, we study different aspects of the Yukawa model for nucleon-meson interactions in $(2+1)$ -dimensions through an axiomatic approach to the S-matrix, called Causal Perturbation Theory (CPT), which is based on distribution theory. CPT is a theory for constructing the S-matrix, which depends on a rapidly decaying test function through conditions of unitarity, translational invariance, Lorentz invariance, and causality. Our study demonstrates that radiative corrections in the Yukawa model are well-defined and free from ultraviolet divergences. Additionally, we determine the cross-section for nucleon-nucleon scattering.

Keywords: Causal Perturbation Theory; S-matrix; Causality; Distributions.

Areas of Knowledge: Quantum field theory.

Índice

1	Introdução	1
2	Campos	4
2.1	Campo escalar livre em 2+1	4
2.1.1	Condição de Augustin-Louis Cauchy	5
2.2	Campo de Dirac em 2+1	8
2.2.1	Soluções da equação de Dirac	9
2.3	Espaço de Fock em 2+1	10
2.3.1	Definição do espaço de Fock	11
2.3.2	Operadores de criação, aniquilação e número	12
2.3.3	Quantização do campo escalar	14
2.3.4	Quantização do campo de Dirac	15
3	Teoria de perturbação causal em (2+1)-dimensões	21
3.1	Axiomas da Teoria de Perturbação Causal em 2+ 1	21
3.1.1	Propriedades da inversa do operador espalhamento	23
3.2	Teoria Perturbativa	25
3.2.1	Distribuições retardada e avançada de n pontos	29
3.2.2	Divisão da distribuição causal	32
3.2.3	Teorema do polinômio	44
4	Modelo de Yukawa	45
4.1	Aplicação na interação de Yukawa	46
4.2	Espalhamento em 2+1	49
4.2.1	Espalhamento núcleon-núcleon em 2+1	49
4.3	Auto-energia do méson em 2+1	54
4.3.1	Teorema da função analítica	57
4.4	Auto-energia do núcleon em 2+1	61
4.5	Propagador completo em 2+1	68
4.5.1	Propagador completo do méson	68
4.5.2	Propagador completo do núcleon	69

5	Conclusões e perspectivas	71
A	Campo escalar e de Dirac	74
A.1	Invariância de Lorentz	74
A.2	Dimensão das matrizes	75
A.3	Soluções da equação de Dirac	75
B	Teoria de distribuições	77
B.1	Distribuições	77
B.2	Transformada de Fourier de distribuições	79
C	Solução geral retardada numérica para w não negativa	80
D	Teorema de Gian-Carlo Wick	82
D.1	Generalização do teorema de G. C. Wick	83
E	Méson e Núcleon	84
E.1	Traço para o Méson	84
E.2	Ordem singular da auto-energia do méson	85
E.3	Ordem singular da auto-energia do núcleon	86
	Referências	87

Capítulo 1

Introdução

Em 1925, Born e Jordan [1] deram início às primeiras ideias da teoria quântica de campos. Em 1929, Heisenberg e Pauli [2] desenvolveram o método da quantização canônica. A teoria continuou avançando até que surgiram problemas com os infinitos, ou seja, divergências ultravioletas. Alguns desses problemas estão relacionados com as correções radiativas, focando-se nas auto-energias do méson e do núcleon. Nessa época, surgiu o método de renormalização para resolver o problema dos infinitos que teve sucesso na comparação com os experimentos. No entanto, esse método não foi aceito por muitos físicos da época. Portanto, era necessário construir uma teoria livre de divergências ultravioletas. Assim, se implementam as abordagens axiomáticas.

A abordagem da teoria quântica de campos axiomática, em particular a teoria de perturbação causal (TPC), que se fundamenta na teoria de distribuições, surge da necessidade de desenvolver uma teoria quântica livre de divergências ultravioletas. Ela inicia-se com a análise e construção da matriz S ou operador de espalhamento, que representa o mapeamento de estados assintóticos de partículas de entrada e saída. Até esse momento a TPC ainda tinha problemas de divergências que estão relacionados com o uso dos produtos cronológicos. Em 1951, Stueckelberg [3] demonstrou que a teoria perturbativa da matriz S deve ser construída com a condição de causalidade. Com essa proposta, em 1959, Bogoliubov e Shirkov [4] adicionaram a função interruptora ou teste na construção da matriz S . Essa função deve decair rapidamente nos infinitos e tender ao 1 no final dos processos de interação. Em 1973, Epstein e Glaser [5] resolveram corretamente o problema das divergências ultravioletas construindo a matriz S por meio dos axiomas de unitariedade, invariância translacional, invariância de Lorentz e causalidade. Adicionalmente, nessa construção deve-se dividir corretamente a distribuição causal em suas partes retardada e avançada. Em 1995, G. Scharf [6] expandiu a teoria da TPC e aplicou-a corretamente à eletrodinâmica quântica. Por outro lado, há uma variedade de estudos que utilizam o formalismo da teoria

de perturbação causal: QCD e Gravitação [7], interações eletrofracas [8], Modelo de Thirring com simetria BRST [9, 10], SQED₄ via SDKP [11], elétron-pósitron em SQED₄ [12], prova da super[re]normalizabilidade [13]; equivalência de SDKP e SQED₄ [14]; formulação da TPC no plano nulo [15] com aplicação estudo do modelo de Yukawa [16], QED₄ [17, 18], etc. Observamos que nessa variedade de aplicações foram estudados o modelo de Yukawa, na presente dissertação analisamos esse modelo em dimensões menores e outros objetivos.

O modelo de Yukawa descreve a interação entre núcleon-méson, que são partículas mediadoras responsáveis pela força nuclear forte. Essa interação se manifesta como um potencial atrativo de curto alcance entre nucleões, mediado pelo intercâmbio de mésons.

A dissertação está estruturada da seguinte maneira: No **capítulo 2**, estudamos o problema de Cauchy para o caso campo escalar e a quantização dos campos escalar e de Dirac no espaço de Fock. No **capítulo 3**, estudamos detalhadamente a teoria de perturbação causal, cujos objetivos são: As distribuições de transição, retardada, avançada e causal, junto com algumas teoremas para qualquer ordem de singularidade. No **capítulo 4**, analisamos o modelo de Yukawa na abordagem da TPC. Os objetivos são: calcular o espalhamento núcleon-núcleon, as correções radiativas do méson e do núcleon e seus respectivos propagadores completos em (2+1)-dimensões. No **capítulo 5** apresentamos nossas conclusões e perspectivas. Finalmente, concluímos com os apêndices que são necessários para compreender os capítulos mencionados anteriormente.

Convenção

Métrica de Minkowski

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

em que $\eta^{00} = 1$, $\eta^{ii} = -1$ e $\eta^{ij} = 0 \forall i \neq j$.

Serão usadas as unidades naturais, $\hbar = 1$ e $c = 1$.

O quadri-vetores contravariante e covariante

$$\begin{aligned} x^\mu &= (x^0, x^1, x^2) = (t, x, y), \\ x_\mu &= \eta_{\mu\nu} x^\nu = (x_0, x_1, x_2) = (t, -x, -y). \end{aligned}$$

Produto escalar

$$\begin{aligned} xp &= x^\mu p_\mu = x^0 p_0 + x^1 p_1 + x^2 p_2 \\ &= x^0 \cdot p^0 - \vec{x} \cdot \vec{p}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Produto das derivadas parciais em três dimensões

$$\begin{aligned} \partial^\mu \partial_\mu &= \partial_\mu \partial^\mu = \partial^0 \partial_0 + \partial^1 \partial_1 + \partial^2 \partial_2 \\ &= \partial^t \partial_t + \partial^x \partial_x + \partial^y \partial_y. \end{aligned}$$

Cone de Luz

Definimos o cone de luz para um ponto:

$$V^\pm(x) \equiv \{y \in \mathbb{M} \mid (y - x)^2 > 0; y^0 \gtrless x^0\}, \quad (1.3)$$

e para n conjuntos de pontos:

$$\Gamma_n^\pm(x) \equiv \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{M}^n \mid x_i \in \overline{V^\pm}(x); i = 1, \dots, n\} \quad (1.4)$$

Capítulo 2

Campos

Neste capítulo, é explicado o problema de Cauchy para o caso do campo escalar, o campo de Dirac e a quantização desses campos no espaço de Fock.

2.1 Campo escalar livre em 2+1

O campo escalar real livre é representado por $\phi(x)$, sendo uma função de apenas uma componente. A palavra livre significa que o campo não interage com outros campos. O campo escalar é invariante de Lorentz e está associada com a equação de Klein-Gordon:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0. \quad \mu = 0, 1, 2, \quad (2.1)$$

A equação (2.1) descreve partículas neutras de spin-0 e é facilmente observável que essa equação é de segunda ordem no espaço tempo.

Continuando com a equação de Klein-Gordon, ela é invariante relativística, ou seja, invariante de Lorentz¹. A invariância relativística é útil para os campos, pois diz-nos que as leis físicas são as mesmas em qualquer sistema de referência inercial e permite-nos estudar as partículas a altas velocidades. Um contraexemplo é a equação de Schrödinger, que não é invariante relativística, e portanto não é adequada para descrever partículas relativísticas.

Será mostrada a solução clássica da equação de Klein-Gordon por meio da transformada de Fourier em três dimensões.

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^2p dp_0 e^{-ipx} \hat{\phi}(p), \quad (2.2)$$

¹Segundo o apêndice (A.1)

e aplicando na equação de Klein-Gordon, resulta:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^2 p d p_0 e^{-i p x} \hat{\phi}(p) = 0, \quad (2.3)$$

em (2.3) $\partial_\mu \partial^\mu$ age apenas na exponencial, pois ela depende das coordenadas espaço-temporais:

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^2 p d p_0 e^{-i p x} ((p)^2 - m^2) \tilde{\phi} = 0. \quad (2.4)$$

Uma solução não trivial seria $\tilde{\phi}(p) = \delta(p^2 - m^2) \phi(p)$.

Retornando à transformada de Fourier com essa solução, obtemos:

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^2 p d p_0 e^{i p x} \delta((p_0)^2 - E_{\vec{p}}^2) \phi(p), \quad (2.5)$$

com $E_{\vec{p}} \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = \sqrt{(p_1)^2 + (p_2)^2 + m^2}$.

Para prosseguir com o cálculo, utilizamos a propriedade da delta² em (2.5)

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^2 p d p_0 e^{-i p x} \left(\frac{\delta(p_0 - E_{\vec{p}})}{2E_{\vec{p}}} + \frac{\delta(p_0 + E_{\vec{p}})}{2E_{\vec{p}}} \right) \phi(p) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^2 p e^{i \vec{p} \cdot \vec{x}} \int d p_0 e^{-i p_0 x_0} \left(\frac{\delta(p_0 - E_{\vec{p}})}{2E_{\vec{p}}} + \frac{\delta(p_0 + E_{\vec{p}})}{2E_{\vec{p}}} \right) \phi(p) \quad (2.6) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^2 p}{2E_{\vec{p}}} \left(\phi^+(\vec{p}) e^{-i p x} \Big|_{p_0=E_{\vec{p}}} + \phi^-(\vec{p}) e^{-i p x} \Big|_{p_0=-E_{\vec{p}}} \right), \end{aligned}$$

em que $\hat{\phi}^+(\vec{p}) = \hat{\phi}(p) \Big|_{p_0=E_{\vec{p}}}$.

2.1.1 Condição de Augustin-Louis Cauchy

Os dados de Cauchy impõem duas condições para as equações diferenciais parciais de segunda ordem do tipo hiperbólicas³, assim determinamos a solução.

2

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_0} \frac{\delta(x - x_0)}{|f'(x_0)|}, \quad x_0 = E_0, -E_0.$$

³Dois exemplos de primeira e segunda ordem são a equação de onda e de Klein-Gordon.

Escrevemos os dados de Cauchy:

$$\begin{aligned}\phi(0, \vec{x}) &= f(\vec{x}), \\ \partial_0 \phi(0, \vec{x}) &= g(\vec{x}).\end{aligned}\tag{2.7}$$

Substituindo as condições acima em (2.6)

$$\begin{aligned}f(\vec{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^2 p}{2E_{\vec{p}}} (\phi^+(\vec{p}) + \phi^-(\vec{p})) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}, \\ g(\vec{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^2 p \left(-\frac{i}{2} \right) (\phi^+(\vec{p}) + \phi^-(\vec{p})) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier $(2\pi)^{-1} \int d^2 x e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}$ nas equações acima e utilizando a propriedade de delta de Dirac $(2\pi)^2 \delta(\vec{p}' - \vec{p}) = \int d^2 x e^{-i(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{x}}$, resulta:

$$\begin{aligned}[\phi^+(\vec{p}) + \phi^-(\vec{p})] &= (2\pi)^{-1/2} (2E_{\vec{p}}) \int d^2 x e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} f(\vec{x}), \\ [\phi^+(\vec{p}) - \phi^-(\vec{p})] &= (2\pi)^{-1/2} (2i) \int d^2 x e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} g(\vec{x}),\end{aligned}\tag{2.9}$$

logo

$$\begin{aligned}\phi^+(\vec{p}) &= (2\pi)^{-1/2} \int d^2 x [E_{\vec{p}} f(\vec{x}) + i g(\vec{x})] e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}, \\ \phi^-(\vec{p}) &= (2\pi)^{-1/2} \int d^2 x [E_{\vec{p}} f(\vec{x}) - i g(\vec{x})] e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Agora, substituindo as equações acima em (2.6)

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^2 p}{2E_{\vec{p}}} \left(\phi^+(\vec{p}) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x} - i p_0 x_0} \Big|_{p_0=E_{\vec{p}}} + \phi^-(\vec{p}) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x} - i p_0 x_0} \Big|_{p_0=-E_{\vec{p}}} \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 p}{2E_{\vec{p}}} \left(\int d^2 y [E_{\vec{p}} f(\vec{y}) + i g(\vec{y})] e^{-i\vec{p} \cdot \vec{y}} e^{-i p x} \Big|_{p_0=E_{\vec{p}}} \right. \\ &\quad \left. + \int d^2 y [E_{\vec{p}} f(\vec{y}) - i g(\vec{y})] e^{-i\vec{p} \cdot \vec{y}} e^{-i p x} \Big|_{p_0=-E_{\vec{p}}} \right),\end{aligned}\tag{2.11}$$

utilizando $\delta(p^2 - m^2) = \frac{1}{2E_{\vec{p}}}(\delta(p_0 + E_p) + \delta(p_0 - E_p))$ em (2.11), obtemos:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2p dp_0 \delta(p^2 - m^2) \int d^2y [E_{\vec{p}} f(\vec{y}) + i \text{sgn}(p_0) g(\vec{y})] e^{-\vec{p} \cdot \vec{y} - i p x} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2p dp_0 \delta(p^2 - m^2) \int_{y^0=0} d^2y [E_{\vec{p}} f(\vec{y}) + i \text{sgn}(p_0) g(\vec{y})] e^{-i p(x-y)},\end{aligned}\quad (2.12)$$

reorganizando

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int_{y^0=0} d^3y \left[(2\pi)^{-2} \int d^2p dp_0 \delta(p^2 - m^2) E_{\vec{p}} \text{sgn}(p_0) \text{sgn}(p_0) e^{i p(x-y)} f(\vec{y}) \right. \\ &\quad \left. + i (2\pi)^{-2} \int d^2p dp_0 \delta(p^2 - m^2) \text{sgn}(p_0) e^{i p(x-y)} g(\vec{y}) \right],\end{aligned}\quad (2.13)$$

a equação (2.13) pode ser escrita de forma mais suscinta observando as seguintes relações

$$\begin{aligned}\delta(p^2 - m^2) \text{sgn}(p_0) E_{\vec{p}} &= \delta(p^2 - m^2) p_0, \\ f(\vec{y}) &= \phi(0, \vec{y}) = \phi(y)|_{y^0=0}, \\ g(\vec{y}) &= \partial_0^y \phi(y)|_{y^0=0},\end{aligned}\quad (2.14)$$

obtemos

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int_{y^0=0} d^3y \left[(2\pi)^{-2} \int d^2p dp_0 \delta(p^2 - m^2) p_0 \text{sgn}(p_0) e^{i p(x-y)} \phi(y) \right. \\ &\quad \left. + i (2\pi)^{-2} \int d^2p dp_0 \delta(p^2 - m^2) \text{sgn}(p_0) e^{i p(x-y)} \partial_0^y \phi(y) \right].\end{aligned}\quad (2.15)$$

Finalmente o campo escalar é redefinido como

$$\phi(x) = \int_{y^0=0} d^3y \left[-(\partial_0^y D(x-y)) \phi(y) + D(x-y) \partial_0^y \phi(y) \right], \quad (2.16)$$

em que

$$D(x-y) = i(2\pi)^{-2} \int d^2p dp_0 \delta(p^2 - m^2) \text{sgn} p_0 e^{-i p(x-y)}, \quad (2.17)$$

é a distribuição de Jordan-Pauli do campo escalar.

2.2 Campo de Dirac em 2+1

Em 1928, Dirac [19] e no livro de *The principle of quantum mechanics* [20] propôs uma equação relativística covariante que tivesse a forma da equação de Schrödinger. A ideia foi a seguinte: a equação de Schrödinger é linear na derivada do tempo, portanto, devemos pensar que o Hamiltoniano também deve ser linear nas derivadas espaciais

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\psi}{\partial t} &= H\psi \\ i\frac{\partial\psi}{\partial t} &= \frac{1}{i}\alpha^i\frac{\partial\psi}{\partial x^i} + \beta m\psi. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Para que a equação (2.18) seja cumprida é necessário impor as seguintes condições

- α_i não podem ser números, devem ser matrizes quadradas. Se fossem simples números, a equação não seria invariante sobre rotações espaciais.
- ψ não pode ser um escalar, deve ser uma função coluna de N componentes.
- A relação de energia-momento para uma partícula livre relativística, $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, deve-se cumprir. Essa relação leva-nos à equação de Klein-Gordon " $0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\psi$ ".
- Deve ser covariante de Lorentz.

A equação de Dirac (2.18) em forma compacta é

$$(p_0 - \alpha_i p_i - \beta m)\psi = 0, \quad p_0 = i\partial_t, \quad p_i = -i\partial_i, \quad (2.19)$$

e multiplicando $(p_0 + \alpha_i p_i + \beta m)$ pela esquerda, obtemos

$$\left(p_0^2 - \frac{(\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i)p_i p_j}{2} - m(\alpha_i\beta + \beta\alpha_i)p_i - m^2\beta^2\right)\psi = 0, \quad (2.20)$$

(2.20) deve ser igual à equação de Klein-Gordon $(p_0^2 - p_i^2 - m^2)\psi = 0$. Então, as matrizes α e β devem cumprir as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} \{\alpha_i, \alpha_j\} &= 2\delta_{ij}, & \beta^2 &= \alpha_i^2 = 1, \\ \{\alpha_i, \beta\} &= 0, & \gamma^0 &= \beta, \gamma^i = \beta\alpha_i. \end{aligned} \quad (2.21)$$

As matrizes α e β devem ser quadradas (segundo o Apêndice (A.2)). Além disso o espinor ψ é uma matriz coluna. Substituindo (2.21) em (2.18), resulta:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = (\alpha_i p_i + \beta m)\psi, \quad (2.22)$$

multiplicando β à esquerda em (2.22), obtemos:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0, \quad \mu = 0, 1, 2. \quad (2.23)$$

As matrizes gamma em (2.23) para nosso caso de interesse são:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Essas matrizes gamma não quebram a paridade. Por outro lado, σ^i são as matrizes de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

As matrizes de (2.24) e (2.25) satisfazem as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= \mathbb{I}, \quad \forall i \in 1, 2, 3, \\ \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{I}_{4 \times 4}, \quad \forall \mu, \nu \in 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (2.26)$$

2.2.1 Soluções da equação de Dirac

Partícula em repouso

Neste caso assumimos que a função $\psi(x)$ é independente do espaço

$$\nabla\psi(x) = 0. \quad (2.27)$$

Portanto, a equação de Dirac (2.23) resulta

$$i\gamma^0 \frac{\partial\psi(t)}{\partial t} = m\psi(t), \quad (2.28)$$

em que $\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_A(t) \\ \psi_B(t) \end{pmatrix}$, ψ_A e ψ_B são matrizes coluna. Resolvendo (2.28), obtemos:

$$\begin{aligned} \psi_{A_1}(t) &= e^{-imt} \psi_{A_1}(0), & \psi_{B_1}(t) &= e^{+imt} \psi_{B_1}(0), \\ \psi_{A_2}(t) &= e^{+imt} \psi_{A_2}(0), & \psi_{B_2}(t) &= e^{-imt} \psi_{B_2}(0). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Explicitando as quatro soluções

$$\begin{aligned} \psi_{A_1} &= e^{-imt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \psi_{A_3} &= e^{+imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \psi_{A_2} &= e^{-imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \psi_{A_4} &= e^{+imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Partícula em movimento

Neste caso as soluções estão em função das ondas planas de duas frequências

$$\psi^+(\vec{x}, t) = u(E_{\vec{p}}, \vec{p}) e^{-ipx}, \quad \psi^-(\vec{x}, t) = v(E_{\vec{p}}, \vec{p}) e^{ipx}, \quad (2.31)$$

(Para mais detalhes de (2.31), vide o apêndice (A.3))

A solução geral é uma combinação linear de (2.31)

$$\psi(x) = \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^2p}{(2\pi)^{3/2}} \left(A^s(\vec{p}) u^s(\vec{p}) e^{-ipx} + B^s(\vec{p}) v^s(\vec{p}) e^{ipx} \right), \quad (2.32)$$

em que $A^s(\vec{p})$ e $B^s(\vec{p})$ são amplitudes dos pacotes de onda, $u^s(\vec{p})$ e $v^s(\vec{p})$ são espinores.

2.3 Espaço de Fock em 2+1

Defina-se a função $\phi_1(x) \in \mathcal{H}_1$, ou seja, o estado de uma partícula pertencente a um espaço de Hilbert. Para um estado de duas partículas livres que não interagem

entre si, $\phi_2(x_1, x_2) \in \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1$. Então, generalizando para n partículas

$$\phi_n(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{H}_n = \underbrace{\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_1}_{n \text{ vezes}} = \mathcal{H}^{\otimes n}. \quad (2.33)$$

As partículas devem ser idênticas. Portanto, obedecem à estatística de Bose ou Fermi. Expressamos os estados simétrico e antissimétrico:

$$\begin{aligned} S_n^+ \phi_n &= \frac{1}{n!} \sum_{\pi} \phi(x_{\pi_1}, \dots, x_{\pi_n}), \\ S_n^- \phi_n &= \frac{1}{n!} \sum_{\pi} (-)^{\pi} \phi(x_{\pi_1}, \dots, x_{\pi_n}), \end{aligned} \quad (2.34)$$

em que π representa as permutações de n elementos. Os operadores $(S^{\pm})$ são as projeções no espaço de n partículas que satisfazem as seguintes propriedades:

$$S_n^+ S_n^- = 0 = S_n^- S_n^+, \quad (S_n^{\pm})^2 = S_n^{\pm}, \quad (\psi_n, S_n^{\pm} \phi_n) = 0 = (S_n^{\pm} \psi_n, \phi_n), \quad (2.35)$$

em que ϕ_n e $\psi_n \in \mathcal{H}_n$. Agora, definimos o verdadeiro espaço físico de n partículas

$$\mathcal{H}_n^{\pm} = S_n^{\pm} \mathcal{H}^{\otimes n}. \quad (2.36)$$

Um exemplo particular do espaço de Hilbert é para $n = 0$

$$\mathcal{H}_0 = \{\alpha \Omega\}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad (2.37)$$

em que Ω é o vácuo. O vácuo é necessário para estudar o espaço de Fock e os axiomas da teoria de perturbação causal e que será explicado no capítulo 3.

2.3.1 Definição do espaço de Fock

O espaço de Fock dos bósons e férmions descreve o estado de muitas partículas simultaneamente mediante a soma direta infinita de todos os espaços de Hilbert de número finito de partículas

$$\mathcal{F}^{\pm} = \oplus_{n=0}^{+\infty} \mathcal{H}_n^{\pm}. \quad (2.38)$$

Um elemento do espaço de Fock tem infinitos estados, ou seja,

$$\phi \equiv (\phi_0, \phi_1, \dots) \in \mathcal{F}, \quad (2.39)$$

em que

$$\phi_0 = \alpha\Omega, \quad \phi_n \in \mathcal{H}_n^\pm, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \quad (2.40)$$

O vácuo Ω é um estado em que não há partículas. Definimos:

$$\Omega \equiv (1, 0, 0, \dots). \quad (2.41)$$

No espaço de Fock o produto escalar se define como

$$(\phi, \psi) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\phi_n, \psi_n)_n, \quad (2.42)$$

e a norma finita

$$\sum_n \|\phi\|_n^2 \equiv \|\phi\|^2 < +\infty. \quad (2.43)$$

2.3.2 Operadores de criação, aniquilação e número

Operador de Criação

O operador de criação, denotado por $a^*(f)$, cria uma partícula associada a uma determinada função de onda f , em que f pertence ao espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1$. Sua definição é:

$$\begin{aligned} a^*(f)\Omega &\equiv f \\ (a^*(f)\phi)_n &\equiv \sqrt{n} S_n^\pm(f \otimes \phi_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.44)$$

o simbolo de asterisco $*$ só é uma notação, representa a adjunta.

Operador de aniquilação

O operador de aniquilação, denotado por $a(f)$, aniquila uma partícula associada a uma função de onda $f \in \mathcal{H}_1$. Sua definição é:

$$\begin{aligned} a(f)\Omega &\equiv 0, \\ (a(f)\phi)_n(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) &\equiv \sqrt{n+1} \int d^2x f(\vec{x})^* \phi_{n+1}(\vec{x}, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n), \end{aligned} \quad (2.45)$$

Escreve-se a seguinte relação para o adjunto de $a(f)$

$$\begin{aligned}
 (\psi, a(f)\phi) &= \sum_n \sqrt{n+1} \int d^2x_1 \cdots d^2x_n d^2x f^*(x) \\
 &\quad \times \psi_n^*(\vec{x}, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \phi_{n+1}(\vec{x}, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \\
 &= \sum_n \sqrt{n+1} \int d^2x_1 \cdots d^2x_n d^2x [S_{n+1}^\pm f(x) \psi_n]^* \phi_{n+1} \\
 &= (a^*(f)\psi, \phi).
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Percebemos em (2.46) uma relação entre $a(f)$ e $a^*(f)$, logo

$$\begin{aligned}
 a(f) &= a^*(f)^\dagger, \\
 a(f)^* &= a(f)^\dagger = a^\dagger(f).
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Escreve-se o operador $a(f)$ e defina-se a distribuição $a(x)$

$$a(f) = \int d^2x f^*(x) a(x), \quad a(\vec{x}) = \sum_j a_j f_j(\vec{x}), \tag{2.48}$$

em que f_j é uma base que pertence a $\mathcal{H}$.

Operador número

Defina-se o operador número

$$N = \int d^2x a^\dagger(\vec{x}) a(\vec{x}), \tag{2.49}$$

logo

$$N(\phi)_n = n S_n^\pm \phi_n(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n). \tag{2.50}$$

Por outro lado, as relações de (anti-)comutação dos operadores de criação e aniquilação são⁴

$$\begin{aligned}
 [a(f), a^\dagger(g)]_\mp \phi &= (f, g)_1 \phi, \\
 [a(f), a(g)]_\mp \phi &= [a^\dagger(f), a^\dagger(g)]_\mp \phi = 0.
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

⁴Para mais detalhes, vide o livro de G. Scharf "Finite Quantum Electrodynamics", Second Edition [6].

As relações em (2.51) foram obtidas a partir de (2.44) e (2.45). Por outro lado, escrevemos uma base ortonormal

$$\langle f_i, f_j \rangle = \delta_{i,j}, \quad (2.52)$$

em que $f_i \in \mathcal{H}_1$ e $f(x)$ é

$$f(\vec{x}) = \sum_i (f_i, f)_1 f_i(\vec{x}). \quad (2.53)$$

Agora que já temos a base, escrevemos os operadores de criação e aniquilação em função dos elementos dessa base

$$\begin{aligned} a_i^\dagger &\equiv a^\dagger(f_i), \\ a_i &\equiv a(f_i). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Substituindo (2.54) nas relações de (2.51), obtemos

$$\begin{aligned} [a_i, a_j^\dagger]_\mp &= \delta_{ij}, \\ [a_i, a_j]_\mp &= [a_i^\dagger, a_j^\dagger]_\mp = 0. \end{aligned} \quad (2.55)$$

2.3.3 Quantização do campo escalar

Para descrever o campo escalar é necessário um operador de criação $a^\dagger(f)$ e aniquilação $a(f)$

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^1} \int \frac{d^2 p}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a^\dagger(\vec{p}) e^{+ipx} + a(\vec{p}) e^{-ipx} \right), \quad (2.56)$$

em que $p^0 = E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. O operador de campo quantizado em (2.56) pode ser representado como

$$\psi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x), \quad (2.57)$$

em que

$$\begin{aligned} \phi^+(x) &= \frac{1}{(2\pi)^1} \int \frac{d^2 p}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} a^\dagger(\vec{p}) e^{+ipx}, \\ \phi^-(x) &= \frac{1}{(2\pi)^1} \int \frac{d^2 p}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} a(\vec{p}) e^{-ipx} = (\phi^+)^\dagger, \end{aligned} \quad (2.58)$$

Os operadores $\phi^+(x)$ e $\phi^-(x)$ são os operadores de frequência positiva e negativa, respectivamente. Por outro lado, escrevemos a distribuição de Jordan-Pauli $D(x - y)$ com suas partes de frequências positivas e negativas

$$D(x - y) \equiv D^+(x - y) + D^-(x - y), \quad (2.59)$$

e definindo

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &\equiv -iD(x - y), \\ [\phi^+(x), \phi^-(y)] &\equiv -iD^-(x - y), \\ [\phi^-(x), \phi^+(y)] &\equiv -iD^+(x - y). \end{aligned} \quad (2.60)$$

A distribuição de Jordan-Pauli é

$$D(x - y) = (2\pi)^{-2} \int d^2p dp_0 \delta(p^2 - m^2) \text{sgn}(p_0) e^{-ipx}, \quad (2.61)$$

e sua parte de frequência positiva é

$$\begin{aligned} -iD^+(x - y) &= i(2\pi)^{-2} \int \frac{d^2p}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip(x-y)} \\ &= i(2\pi)^{-2} \int d^2p dp_0 \delta(p^2 - m^2) \Theta(p^0) e^{-ip(x-y)}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

a partir de (2.61) e (2.62), escrevemos as distribuições D e D^+ no espaço dos momentos

$$\begin{aligned} \hat{D}(p) &= i(2\pi)^{-1/2} \delta(p^2 - m^2) \text{sgn}(p_0), \\ \hat{D}^+(p) &= i(2\pi)^{-1/2} \delta(p^2 - m^2) \Theta(p_0) = -\hat{D}^+(-p). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Essas relações serão necessárias quando analisemos as auto-energias do méson e núcleon no capítulo 3.

2.3.4 Quantização do campo de Dirac

A quantização de Dirac é para partículas que tem spin-1/2. Defina-se f , uma matriz coluna de 4×1 , pertencente ao espaço de Hilbert de uma partícula $\mathcal{H}_1$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = f \in \mathcal{H}_1. \quad (2.64)$$

O produto escalar de $f, g \in \mathcal{H}_1$ é

$$(f, g) = \int d^2x f^\dagger(x) g(x). \quad (2.65)$$

Os operadores de aniquilação e criação são

$$\begin{aligned} a(f) &= \int d^2x f^\dagger(x) a(x), \\ a^\dagger(f) &= \int d^2x a^\dagger(x) f(x), \end{aligned} \quad (2.66)$$

em que $a(x)$ é uma distribuição e o caráter espinorial encontra-se na função- $f \in \mathcal{H}_1$. Dividimos o campo espinorial da seguinte maneira

$$\begin{aligned} a(f) &= b(P_+f) + d(P_-f), \\ a^\dagger(f) &= b^\dagger(P_+f) + d^\dagger(P_-f), \end{aligned} \quad (2.67)$$

em que $P_\pm$ é o operador de projeção no subespaço espectral (P_+ aplicado a $\mathcal{H}_1$ representa a energia positiva do Hamiltoniano) $P_\pm \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_\pm$. Os operadores $b, d, b^\dagger, d^\dagger$ são os operadores que serão utilizados no caso do campo de Dirac. Eles satisfazem as relações anti-comutação, é análogo à (2.55).

Escrevem-se algumas relações:

$$\begin{aligned} P_+ + P_- &= \mathbb{1}, & \mathcal{H}_1 &= P_+ \mathcal{H}_1 + P_- \mathcal{H}_1, \\ P_+ P_- &= 0, & b(P_-f) &= d(P_+f) = 0. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Por outro lado, a definição do vácuo é

$$\begin{aligned} b(f)\Omega &= 0, \\ d(f)\Omega &= 0. \end{aligned} \quad (2.69)$$

em que b e d são os operadores de aniquilação. Reescrevemos (2.67) e sua adjunta em uma relação mais usual

$$\begin{aligned} \psi(f) &= b(f_+) + d^\dagger(f_-), \\ \psi^\dagger(f) &= b^\dagger(f_+) + d(f_-). \end{aligned} \quad (2.70)$$

em que $f_\pm = P_\pm f$. A equação (2.70) é a quantização do campo de Dirac em função dos operadores de criação e aniquilação. Já foi explicado que os operadores $b^\dagger, d^\dagger, b$ e d são operadores de criação e aniquilação, mais ainda não é uma informação

muita clara. Para ter uma melhor interpretação desses operadores, analisamos a carga do férmion. Portanto:

$$Q = e \int d^2x : \psi^\dagger(x) \psi(x) :, \quad (2.71)$$

em que

$$\psi(x) = \sum_i b(f_i) f_i(\vec{x}) + d^\dagger(g_i) g_i(\vec{x}), \quad (2.72)$$

em que $f_i \in \mathcal{H}_+$ e $g_i \in \mathcal{H}_-$ são bases que pertencem a $\mathcal{H}$.

Substituindo (2.72) em (2.71), resulta:

$$\begin{aligned} Q &= e \sum_i [b^\dagger(f_i) b(f_i) - d^\dagger(g_i) d(g_i)], \\ &= e \int d^2x : \psi^\dagger(x) \psi(x) :. \end{aligned} \quad (2.73)$$

No resultado da carga em (2.73) havia um valor numérico (C: número), porém não foi considerado de tal maneira que o valor esperado do vácuo seja nulo, ou seja, $(\Omega, Q\Omega) = 0$. Percebemos que em (2.73) o operador $d^\dagger$ tem uma sinal menos, isso é devido a que estamos utilizando a anti-comutação desses operadores. O operador $d^\dagger$ e $b^\dagger$ cria uma antipartícula e partícula, respectivamente. Por outro lado, consideramos uma partícula com uma função de onda, ou seja, o campo de Dirac

$$f(\vec{x}) = (2\pi)^{-1} \int d^2p [f_{s+}(\vec{p}) u_s \vec{p} e^{ipx} + f_{s-}(\vec{p}) v_s \vec{p} e^{ipx}], \quad (2.74)$$

e

$$\begin{aligned} f_{s+}(\vec{p}) &= u^+(\vec{p}) \hat{f}(\vec{p}), \\ f_{s-}(\vec{p}) &= v^+(\vec{p}) \hat{f}(-\vec{p}). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Em que o chapéu é a transformada de Fourier. Por outro lado, temos uma base ortonormal $f_j \in \mathcal{H}_+, g_j \in \mathcal{H}_-, \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_+ \otimes \mathcal{H}_-$. Portanto, o campo de Dirac é representado como

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_j [\psi(f_j) f_j(x) + \psi(g_j) g_j(x)] \\ &= \sum_j [b(f_j) f_j(x) + d^\dagger(g_j) g_j(x)]. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Os elementos em (2.76) podem ser reescritos com as relações em (2.75), logo

$$\begin{aligned} d_s^\dagger(\vec{p}) &= \sum_j d^\dagger(g_j) g_{js}(\vec{p}), \\ b_s(\vec{p}) &= \sum_j b(f_j) f_{js}(\vec{p}). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Essas relações acima são importantes porque agora temos os operadores no espaço de momentos que serão necessários para calcular os anti-comutadores dos operadores do campo de Dirac. Sendo assim, escrevemos as relações de anti-comutação de (2.77)

$$\begin{aligned} \{b_s(\vec{p}), b_{s'}^\dagger(\vec{p}')\} &= \delta^2(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{ss'}, \\ \{d_s(\vec{p}), d_{s'}^\dagger(\vec{p}')\} &= \delta^2(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{ss'}, \\ \{b_s(\vec{p}), b_{s'}(\vec{p}')\} &= \{d_s(\vec{p}), d_{s'}(\vec{p}')\} = \{b_s(\vec{p}), d_{s'}(\vec{p}')\} = \dots = 0. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Por outro lado, definimos a evolução temporal do campo de Dirac $\psi_t^\dagger(f) \equiv \psi^\dagger(e^{iHt}f) = e^{iH_0t}\psi^\dagger(f)e^{-iH_0t}$, substituindo em (2.76)

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_j \left[\psi(e^{iH_0}f_j) f_j(\vec{x}) + \psi(e^{iH_0}g_j) g_j(\vec{x}) \right] \\ &= \sum_j \left[\underbrace{b(P_+ e^{iH_0}f_j)}_{\psi_t^-(f_j)} f_j(\vec{x}) + \underbrace{d^\dagger(P_- e^{iH_0}g_j)}_{\psi_t^+(g_j)} g_j(\vec{x}) \right], \end{aligned} \quad (2.79)$$

em (2.79) se definiu um novo operador $\psi_t^\pm$

$$\begin{aligned} \psi_t^-(f_j) &\equiv b(P_+ e^{iH_0}f_j) \\ &= \int d^2p (P_+ e^{iH_0t}f_j)_s^*(\vec{p}) b_s(\vec{p}). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Substituindo (2.75) na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} \psi_t^-(f_j) &= \int d^2p (e^{iEt}u_s^\dagger(\vec{p}) \hat{f}_j(\vec{p}))^* b_s(\vec{p}) \\ &= \int d^2p e^{-iEt} \hat{f}_j^\dagger(\vec{p}) u_s(\vec{p}) b_s(\vec{p}). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Utilizando a transformada de Fourier $f_j(\vec{x}) = (2\pi)^{-1} \int d^2p \hat{f}_j(\vec{p}) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}$ na equação acima, resulta:

$$\psi^-(x) = (2\pi)^{-1} \int d^2p e^{-ipx} u_s(\vec{p}) b_s(\vec{p}), \quad (2.82)$$

analogamente para ψ^+

$$\psi^+(x) = (2\pi)^{-1} \int d^2p e^{+ipx} v_s(\vec{p}) d_s^\dagger(\vec{p}). \quad (2.83)$$

Agora, escrevemos o operador do campo de Dirac em função desses últimos operadores

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi^+(x) + \psi^-(x) \\ &= (2\pi)^{-1} \sum_s \int d^2p [d_s^\dagger(\vec{p}) v_s(\vec{p}) e^{+ipx} + b_s(\vec{p}) u_s(\vec{p}) e^{-ipx}]. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Em (2.84) os espinores $u(\vec{p})$ e $v(\vec{p})$ estão relacionados entre si. Essas relações são:

$$\begin{aligned} u_s^\dagger(\vec{p}) v_r(-\vec{p}) &= 0, \\ v_r^\dagger(-\vec{p}) u_s(\vec{p}) &= 0, \\ (\not{p} - m) u_s(\vec{p}) &= 0, \\ (\not{p} - m) v_s(\vec{p}) &= 0, \end{aligned} \quad \begin{aligned} \sum_s u_s(\vec{p}) \bar{u}_s(\vec{p}) &= \frac{\not{p} + m}{2p_0}, \\ \sum_s v_s(\vec{p}) \bar{v}_s(\vec{p}) &= \frac{\not{p} - m}{2p_0}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Utilizando as relações acima e fazendo a anti-comutação dos operadores de ψ^- e $\bar{\psi}^+$

$$\begin{aligned} \{\psi^-(x), \bar{\psi}^+(y)\} &= \sum_{s,r} (2\pi)^{-2} \int d^2p d^2q \underbrace{\{b_s(\vec{p}), b_r^\dagger(\vec{q})\}}_{\delta^3(\vec{p}-\vec{q})\delta(p-r)} u_s(\vec{p}) \bar{u}_r(\vec{q}) e^{-i(px-qy)} \\ &= (2\pi)^{-2} \int d^2p \sum_s u_s(\vec{p}) \bar{u}_s(\vec{p}) e^{-ip(x-y)} \\ &= (2\pi)^{-2} \int \frac{d^2p}{2E_{\vec{p}}} (\not{p} + m) e^{-ip(x-y)} \\ &= (2\pi)^{-2} \int d^2p dp_0 \Theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) (\not{p} + m) e^{-ip(x-y)}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Analogamente,

$$\{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)\} = -(2\pi)^{-2} \int d^2p dp_0 \Theta(-p_0) \delta(p^2 - m^2) (\not{p} + m) e^{-ip(x-y)}. \quad (2.87)$$

Definimos a distribuição S , suas partes de frequência positiva e negativa, respectivamente

$$\begin{aligned}\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} &= -iS(x-y), \\ \{\psi^-(x), \bar{\psi}^+(y)\} &= -iS^+(x-y), \\ \{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)\} &= -iS^-(x-y).\end{aligned}\tag{2.88}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}-iS(x-y) &= \{\psi^+(x) + \psi^-(x), \bar{\psi}^+(y) + \bar{\psi}^-(y)\} \\ &= \{\psi^-(x), \bar{\psi}^+(y)\} + \{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)\} \\ &= -iS^+(x-y) - iS^-(x-y) \\ &= (2\pi)^{-2} \int d^2p dp_0 \operatorname{sgn}(p_0) \delta(p^2 - m^2) e^{-ipx}.\end{aligned}\tag{2.89}$$

Analisando as distribuições em (2.86) e (2.87), percebemos

$$\hat{S}^\pm(p) = (\not{p} + m) \hat{D}^\pm(p),\tag{2.90}$$

$\hat{S}^\pm(p)$ representa a distribuição S no espaço de momentos, $\hat{D}^\pm(p)$ foi calculada na seção anterior do campo escalar. Agora, começaremos a análise da teoria de perturbação causal e o modelo de Yukawa utilizando os operadores de campos escalar e de Dirac no espaço de Fock.

Capítulo 3

Teoria de perturbação causal em (2+1)-dimensões

Em 1973, Epstein e Glaser [5] propuseram uma teoria perturbativa na teoria quântica de campos, a qual se baseia nos axiomas de Bogoliubov[21] para a matriz- S . Posteriormente, a teoria foi aprimorada e enriquecida com a aplicação em QED por Scharf [6]. Atualmente, é conhecida como teoria de perturbação causal. A teoria de perturbação causal dedica-se à análise da matriz- S , que depende da função de teste g ¹ ($S = S(g)$), a causalidade e as ferramentas da teoria de distribuições [22, 23, 24].

3.1 Axiomas da Teoria de Perturbação Causal em 2+ 1

A matriz- S é a conexão entre o estado inicial assintoticamente livre no passado $\phi(-\infty)$ e o estado final assintoticamente livre no futuro $\phi(+\infty)$. No formalismo da teoria de perturbação causal esses estados assintoticamente livres estão relacionados à matriz $S(g)$ e denotamos $\phi(-\infty) = \phi$. Explicitamente:

$$\phi(g) = \phi(+\infty) = S(g)\phi, \quad (3.1)$$

em que $S(g)$ denota a matriz de espalhamento enquanto g é uma função de teste pertencente ao espaço de Schwartz. Além disso, construímos o operador $S(g)$ ², utilizando a série de Taylor dependente da função de teste g .

$$S(g) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int d^3x_1 \cdots d^3x_n T_n(x_1, \cdots, x_n) g(x_1) \cdots g(x_n). \quad (3.2)$$

¹ g é uma função que pertence ao espaço de Schwartz.

Defina-se a função de Schwartz $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ da seguinte forma $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $x^\alpha \partial^\beta f(x) \rightarrow 0$ para $|x| \rightarrow \infty$, α e $\beta \in \mathbb{N}_0^n$.

²O operador de espalhamento $S(g)$ é a forma quadrática da matriz $\phi^* S(g) \psi$.

A teoria de perturbação causal introduz o termo ' g ', que pertence ao espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3n})$, na matriz S . A função de teste $g \in [0, 1]$ apresenta diferentes comportamentos na interação: ligado, desligado e parcialmente ligado em diferentes regiões. Isto é, quando $g(x) = 1$, a interação está completamente ligada; $g(x) = 0$, desligada; e se $0 < g(x) < 1$, está parcialmente ligada.

Quando $g \rightarrow 1$ a teoria de perturbação causal (TPC) é realizada no limite adiabático. Por outro lado, os termos T_n são distribuições cujo valor é um operador³, caso contrário a teoria não seria livre de divergências ultravioleta. A condição inicial do operador $S(g)$ ocorre na ausência de interação, isto é $g(x) = 0$. Portanto, dizemos que $S(0) = 1$ (condição inicial) e passaremos a mencionar os axiomas da TPC.

(1) Axioma da unitariedade

O operador de espalhamento é unitário, portanto:

$$S(g)^\dagger S(g) = S(g)S(g)^\dagger = 1, \quad \forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3). \quad (3.3)$$

(2) Axioma da invariância sob translações

Considere-se o operador unitário $U(a, 1)$, que realiza a translação $x \rightarrow x + a$, no espaço de Fock. O operador de espalhamento transforma-se segundo

$$U(a, 1)S(g)U(a, 1)^{-1} = S(g_a), \quad \forall a \in \mathbb{R}^3, \text{ em que } g_a = g(x-a). \quad (3.4)$$

(3) Axioma da invariância de Lorentz

Considere-se o operador unitário $U(0, \Lambda)$, que realiza a transformação de Lorentz $x \rightarrow \Lambda x$, $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$, no espaço de Fock. O operador de espalhamento transforma-se segundo:

$$U(0, \Lambda)S(g)U(0, \Lambda)^{-1} = S(g_\Lambda), \quad g_\Lambda(x) = g(\Lambda^{-1}x). \quad (3.5)$$

³Vide o apêndice (B) para mais detalhes sobre a teoria de distribuições.

(4) Axioma da causalidade

A causalidade refere-se à relação temporal entre dois pontos mencionando duas funções de teste disjuntas ⁴ no tempo. Imaginemos que g_1 e g_2 são disjuntas no tempo,

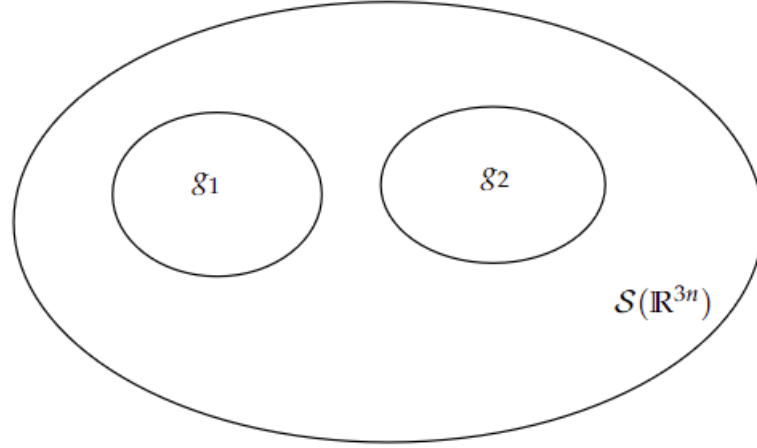


Figura 3.1: Dois conjuntos disjuntos no tempo.

e em que $\text{supp}(g_1) = \{x \in \mathbb{M} | x^0 \in (-\infty, r)\}$, $\text{supp}(g_2) = \{x \in \mathbb{M} | x^0 \in (r, +\infty)\}$ e $\text{supp}(g_1) < \text{supp}(g_2)$.

Dado que g_1 e $g_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ e seus suportes satisfazem a relação $\text{supp}(g_1) < \text{supp}(g_2)$, portanto:

$$S(g_1 + g_2) = S(g_2)S(g_1). \quad (3.6)$$

A linha do tempo em (3.6) vai da esquerda para a direita; esse axioma explica-nos a ordem dos eventos no espaço-tempo de Minkowski.

(5) Axioma da estabilidade do vácuo e do setor de uma partícula

$\forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, o operador S deixa invariante os estados de vácuo e de uma partícula:

$$\Phi = \Omega \quad e \quad \Phi = (0, \phi, 0, \dots) \quad \rightarrow S(g)\Phi = \Phi. \quad (3.7)$$

3.1.1 Propriedades da inversa do operador espalhamento

Calcular a inversa de S é importante na análise das propriedades da teoria perturbativa. Primeiramente, utilizaremos uma notação mais compacta para o

⁴ X e Y são disjuntos se $X \cap Y = \emptyset$.

operador de espalhamento.

Seja $X \equiv \{x_i \in \mathbb{M} \mid i=1, \dots, n\}$ com $\mathbb{M}$ o espaço-tempo de Minkowski, então:

$$\begin{aligned} T_n(X) &\equiv T_n(x_1, \dots, x_n), \\ g(X) &\equiv g(x_1) \cdots g(x_n), \\ dX &\equiv d^3x_1 \cdots d^3x_n, \end{aligned} \quad (3.8)$$

com essa notação o operador de espalhamento (3.2) resulta:

$$S(g) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int dX T_n(X) g(X). \quad (3.9)$$

A inversa de S também é expressa como uma série perturbativa:

$$S(g)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int dX \bar{T}_n(X) g(X). \quad (3.10)$$

em que $\bar{T}_n$ é uma distribuição de transição. A inversa de S também pode ser obtida utilizando a expansão de Taylor, portanto:

$$S(g)^{-1} = 1 + \sum_{r=1}^n (-)^r \sum_{P_r} \int dX T_{n_1}(X_1) \cdots T_{n_r}(X_r) g(X), \quad (3.11)$$

em que $n_1 + \dots + n_r = n$ e P_r representa a soma de todas as partições de X em r subconjuntos disjuntos

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_r, \quad X_1, \dots, X_r \neq \emptyset. \quad (3.12)$$

Se compararmos as séries perturbativas de (3.10) e (3.11), obtemos $\bar{T}$ em função de P_r . Por outro lado, a distribuição $\bar{T}_n(X)$ é expressa da seguinte maneira:

$$\bar{T}_n(X) = \sum_{r=1}^n (-)^r \sum_{\substack{X_1, \dots, X_r \neq \emptyset \\ \cup_{i=1}^r X_i = X \\ X_i \cap X_j = \emptyset, \forall i \neq j}} T_{n_1}(X_1) \cdots T_{n_r}(X_r). \quad (3.13)$$

Notar que, essa nova soma representa a soma de todas as partições de X em r subconjuntos disjuntos. Mostramos dois exemplos para $n=1$ e $n=2$, a fim de compreender (3.13):

Primeiro exemplo, n=1:

$$\bar{T}_1(x_1) = -T_1(x_1), \quad X_1 = \{x_1\}. \quad (3.14)$$

Segundo exemplo, n=2:

$$\bar{T}_2(x_1, x_2) = - \underbrace{T_2(x_1, x_2)}_{\substack{\text{em que} \\ X_1=\{x_1, x_2\}}} + \underbrace{T_1(x_1)T_1(x_2)}_{\substack{\text{em que} \\ X_1=\{x_1\}, X_2=\{x_2\}}} + \underbrace{T_1(x_2)T_1(x_1)}_{\substack{\text{em que} \\ X_1=\{x_2\}, X_2=\{x_1\}}}. \quad (3.15)$$

Por outro lado, se quisermos calcular propriedades entre T_n e $\bar{T}_m$, deve-se considerar que o seguinte produto $S(g)^{-1}S(g) = 1$, definindo $T_0(\emptyset) = 1 = \bar{T}_0(\emptyset)$. Então

$$1 = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{X \cup Y = Z \\ X \cap Y = \emptyset}} \int dZ T_{n_1}(X) \bar{T}_{n-n_1}(Y) g(Z), \quad (3.16)$$

em que $dZ = dXdY$, $g(Z) = g(X)g(Y)$ e $|X|=n_1$. A equação (3.16) é satisfeita para qualquer g se

$$\sum_{\substack{X \cup Y = Z \\ X \cap Y = \emptyset}} T_{n_1}(X) \bar{T}_{n-n_1}(Z \setminus X) = 0, \quad (3.17)$$

$\forall Z$ com⁵ $|Z|=n \geq 1$.

Fazendo a mesma análise no caso de $S(g)S(g)^{-1} = 1$, obtemos:

$$\sum_{\substack{X \cup Y = Z \\ X \cap Y = \emptyset}} \bar{T}_{n-n_1}(X) T_{n_1}(Z \setminus X) = 0. \quad (3.18)$$

Esses resultados serão usados nas propriedades da teoria perturbativa do operador espalhamento.

3.2 Teoria Perturbativa

Os axiomas da teoria de perturbação causal possuem propriedades intrínsecas que serão descritas mediante seus axiomas da seção anterior.

⁵ $|Z|$ representa o número de elementos de Z

(1) Propriedade da Unitariedade

Seja para um g real

$$S(g)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int dX \bar{T}_n(X) g(X), \quad S(g)^\dagger = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int dX \bar{T}_n^\dagger(X) g(X),$$

e a partir do primeiro axioma

$$S^\dagger(g) = S^{-1}(g), \quad (3.19)$$

obtemos a seguinte relação:

$$T_n^\dagger(X) = \bar{T}_n(X), \quad (3.20)$$

é claro que a inversa do operador de espalhamento tem o mesmo significado que o seu adjunto ("dagger"); o mesmo vale para o operador T_n .

(2) Propriedade da invariância translacional

Substituindo a série (3.9) no segundo axioma

$$U(a, 1) \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int d^3x_1 \cdots d^3x_n T_n(x_1 \cdots x_n) g(x_1) \cdots g(x_n) \right) U(a, 1)^{-1} = \\ 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int d^3x_1 \cdots d^3x_n T_n(x_1 \cdots x_n) g(x_1 - a) \cdots g(x_n - a), \quad (3.21)$$

fazendo $x'_k = x_k - a$, logo: $d^3x'_k = d^3x_k$ resulta:

$$U(a, 1) T_n(x_1, \cdots, x_n) U(a, 1)^{-1} = T_n(x_1 + a, \cdots, x_n + a). \quad (3.22)$$

Portanto, T_n transforma-se segundo (3.22) na invariância translacional

(3) Propriedade da invariância de Lorentz

Substituindo a série (3.9) no terceiro axioma, obtemos a relação

$$U(0, \Lambda) T_n(x_1, \cdots, x_n) U(0, \Lambda)^{-1} = T_n(\Lambda x_1, \cdots, \Lambda x_n). \quad (3.23)$$

(4) Propriedade da Causalidade

Considera-se dois conjuntos arbitrários $X, Y \subset \mathbb{M}$ e $X < Y$, isto é: $x^0 < y^0, \forall x \in X, y \in Y$, isto é equivalente a $\text{supp}(g_1) < \text{supp}(g_2)$ em qualquer referencial de Lorentz, de modo que o quarto axioma seja satisfeito. Então:

$$S(g_1 + g_2) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} \int dX T_n(X) (g_1 + g_2)(X), \quad (3.24)$$

em que

$$(g_1 + g_2)(X) = \sum_{m=1}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} g_2(X_2) g_1(X_1), \quad \begin{matrix} |X_2|=m, & X=X_2 \cup X_1, \\ X_1 \cap X_2 = \emptyset, \\ X_1, X_2 \neq \emptyset. \end{matrix} \quad (3.25)$$

Por outro lado, temos $S(g_1)$ e $S(g_2)$

$$\begin{aligned} S(g_1) &= 1 + \sum_{n_1=1}^{+\infty} \frac{1}{n_1!} \int dX_1 T_{n_1}(X_1) g_1(X_1), \\ S(g_2) &= 1 + \sum_{n_2=1}^{+\infty} \frac{1}{n_2!} \int dX_2 T_{n_2}(X_2) g_2(X_2), \end{aligned} \quad (3.26)$$

e o produto é

$$S(g_2)S(g_1) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!(n-m)!} \int dX T_m(X_2) T_{n-m}(X_1) g_2(X_2) g_1(X_1), \quad (3.27)$$

em que $n_2 = m$ e $n_1 = n - m$.

Através da aplicação do quarto axioma, realizamos a igualdade entre as equações (3.24) e (3.27) e obtemos a quarta propriedade

$$T_n(X) = T_m(X_2) T_{n-m}(X_1), \quad X_1 < X_2, \quad |X_2| = m, \quad |X_1| = n - m. \quad (3.28)$$

Explicitando a quarta propriedade (3.28)

$$T_n(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = T_m(x_1, \dots, x_m) T_{n-m}(x_{m+1}, \dots, x_n). \quad (3.29)$$

Dessa forma, a quarta propriedade(3.28) estabelece que T_n são produtos ordenados temporalmente para $X_2 > X_1$. Fazendo (3.28) para $x_1^0 > x_2^0 > \dots > x_n^0$

$$T_n(x_1, \dots, x_n) = T_1(x_1) T_1(x_2) \dots T_1(x_n). \quad (3.30)$$

Por outro lado, se aplicarmos a inversa do operador de espalhamento no quarto axioma com a condição de $\text{supp}(g_1) < \text{supp}(g_2)$, obtemos:

$$S(g_1)^{-1}S(g_2)^{-1} = S^{-1}(g_1 + g_2), \quad (3.31)$$

e fazendo a mesma análise anterior, resulta:

$$\bar{T}_n(X) = \bar{T}_m(X_1)\bar{T}_{n-m}(X_2), \quad X_2 > X_1. \quad (3.32)$$

A equação (3.32) estabelece que $\bar{T}_n$ são produtos ordenados temporalmente de forma inversa. É importante ressaltar que os produtos de T_n e $\bar{T}_m$ não ocorrem no mesmo ponto.

Existe um caso adicional, em que X_1 e X_2 estão separados espacialmente e não temporalmente. Então, nesse caso, resulta:

$$T_n(X) = T_m(X_2)T_{n-m}(X_1) = T_{n-m}(X_1)T_m(X_2). \quad (3.33)$$

A distribuição T_n ou $\hat{T}_n$ possui uma relação com a distribuição Heaviside- Θ , que foi mostrada segundo Bogoliubov na seguinte forma:

$$T[T_1(x_1) \cdots T_1(x_n)] = \sum_{\pi} \Theta(x_{\pi(1)}^0 - x_{\pi(2)}^0) \cdots \Theta(x_{\pi(n-1)}^0 - x_{\pi(n)}^0) T_1(x_{\pi_1}) \cdots T_1(x_{\pi_n}). \quad (3.34)$$

No entanto, essa forma está mal definida, pois leva-nos a uma divergência ultravioleta que será demonstrada na próxima seção.

Divergências ultravioletas em teoria quântica de campos perturbativa

A divergência ultravioleta acontece nos casos em que as distribuições Heaviside- Θ - e Dirac- δ são considerados no espaço de momentos. Andreas Aste [25] demonstra a divergência ultravioleta considerando a transformada de Fourier do produto dessas distribuições

$$\widehat{\theta\delta} = F\{\theta\delta\}(k) = (2\pi)^{-1/2} \int dx e^{-ikx} \theta(x) \delta(x), \quad (3.35)$$

em que $\hat{\delta}(k) = (2\pi)^{-1/2}$, $\hat{\theta}(k) = \frac{-i}{k-i0^+} (2\pi)^{-1/2}$. O produto da equação (3.35) pode ser reescrito utilizando a transformada de Fourier inversa das distribuições

escritas anteriormente. Portanto:

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}\hat{\delta} &= (2\pi)^{-3/2} \int dx e^{-ik} \left[\int dk' \hat{\theta}(k') e^{ik'x} \right] \left[\int dk'' \hat{\delta}(k'') e^{ik''x} \right] \\
&= (2\pi)^{-3/2} \underbrace{\int dx e^{i(k'+k''-k)x}}_{(2\pi)\delta(k'+k''-k)} \int dk' \hat{\theta}(k') \int dk'' \hat{\delta}(k'') \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int dk' \hat{\theta}(k') \underbrace{\int dk'' \hat{\delta}(k'') \delta(k''+k'-k)}_{\hat{\delta}(k-k')} \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int dk' \underbrace{\hat{\delta}(k-k')}_{(2\pi)^{-1/2}} \underbrace{\hat{\theta}(k')}_{\frac{-i(2\pi)^{-1/2}}{k-i0^+}} \\
&= -i(2\pi)^{-3/2} \int \frac{dk'}{k' - i0^+},
\end{aligned} \tag{3.36}$$

é divergente quando o momento é infinito. Esse problema foi resolvido na TPC. O próximo passo é construir indutivamente T_n , utilizando as distribuições retardada e avançada

3.2.1 Distribuições retardada e avançada de n pontos

Distribuição avançada:

Define-se:

$$A_n(Y, x_n) \equiv \sum_{\substack{X \cup X' = Y \\ X \cap X' = \emptyset}} \bar{T}_m(X) T_{n-m}(X' \cup \{x_n\}), \tag{3.37}$$

em que $|Y| = n - 1$, $|X| = m$, $|X'| = n - m - 1$, $n \geq 2$ (mínimo para dois pontos) e o $\text{supp}(A_n(Y, x_n)) \subset \Gamma_n^-(x_n)$. A expressão $\Gamma_n^-(x_n)$ foi explicada na convenção desta dissertação.

A fim de compreender a distribuição avançada (3.37), mostramos um exemplo para $n = 2$:

$$A_2(x_1, x_2) = \sum_{\substack{X \cup X' = \{x_1\} \\ X \cap X' = \emptyset}} \bar{T}_m(X) T_{2-m}(X', x_2), \tag{3.38}$$

explicitando a soma para os valores de m

$$\begin{aligned}
 A_2(x_1, x_2) &= \overbrace{\bar{T}_0(\underbrace{\emptyset}_1)}^{m=0} T_{2-0}(\underbrace{x_1}_{X'=\{x_1\}}, x_2) + \overbrace{\bar{T}_1(\underbrace{x_1}_{X=x_1})}^{m=1} T_{2-1}(\underbrace{\emptyset}_{X'=\{\emptyset\}}, x_2) \\
 &= T_2(x_1, x_2) + \bar{T}_1(x_1)T_1(x_2).
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Já explicitado o caso particular em (3.39), retornamos à distribuição avançada (3.37). Ela será dividida em duas somas, sendo que somente a segunda incluirá o conjunto $X = \emptyset$

$$A_n(Y, x_n) = \sum_{\substack{X \cup X' = Y \\ X \cap X' = \emptyset \\ X \neq \emptyset}} \bar{T}_m(X) T_{n-m}(X' \cup \{x_n\}) + T_n(\overbrace{Y}^{X'=Y}, x_n), \tag{3.40}$$

logo, definimos a primeira soma

$$A'_n(Y, x_n) = \sum_{\substack{X \cup X' = Y \\ X \cap X' = \emptyset \\ X \neq \emptyset}} \bar{T}_m(X) T_{n-m}(X' \cup \{x_n\}), \tag{3.41}$$

como a **distribuição avançada subsidiária** (A'_n , em que $|X| = m \geq 1, |X'| \leq n - 2$. A fim de compreender essa nova distribuição, mostramos o caso para $n=2$

$$A'_2(x_1, x_2) = \bar{T}_1(x_1)T_1(x_2) = -T_1(x_1)T_1(x_2). \tag{3.42}$$

Distribuição Retardada:

Define-se

$$R_n(Y, x_n) \equiv \sum_{\substack{X \cup X' = Y \\ X \cap X' = \emptyset}} T_{n-m}(X' \cup \{x_n\}) \bar{T}_m(X), \tag{3.43}$$

em que $|Y| = n - 1, |X| = m, |X'| = n - m - 1, n \geq 2$ e o **supp**($A_n(Y, x_n)$) $\subset \Gamma_n^+(x_n)$. Aplicando a mesma análise que foi feita para o exemplo A_2 , escrevemos a distribuição R_2 :

$$R_2(x_1, x_2) = T_2(x_1, x_2) + T_1(x_2)\bar{T}_1(x_1) \tag{3.44}$$

Além disso, a distribuição (3.43) também pode ser dividida em duas somas. Na primeira soma, estabeleceremos a seguinte condição: $X \neq \emptyset$, então:

$$R_n(Y, x_n) = \sum_{\substack{X \cup X' = Y \\ X \cap X' = \emptyset \\ X \neq \emptyset}} T_{n-m}(X' \cup \{x_n\}) \bar{T}_m(X) + T_n(\widehat{Y}^{X'=Y}, x_n), \quad (3.45)$$

Assim, definimos a primeira soma:

$$R'_n(Y, x_n) = \sum_{\substack{X \cup X' = Y \\ X \cap X' = \emptyset \\ X \neq \emptyset}} T_{n-m}(X' \cup \{x_n\}) \bar{T}_m(X), \quad (3.46)$$

como a **distribuição retardada subsidiária**(R'_n). Em que $|X| = m \geq 1, |X'| \leq n - 2$. Escreve-se o exemplo R'_2 :

$$R'_2(x_1, x_2) = T_1(x_2)T_1(x_1). \quad (3.47)$$

Agora, nosso propósito é comparar as distribuições (3.40) e (3.45) para obter a distribuição T_n :

$$T_n(Y, x_n) = A_n(Y, x_n) - A'_n(Y, x_n) = R_n(Y, x_n) - R'_n(Y, x_n), \quad (3.48)$$

e a partir de aí definimos uma nova distribuição

$$D_n(Y, x_n) \equiv R'_n(Y, x_n) - A'_n(Y, x_n) \equiv R_n(Y, x_n) - A_n(Y, x_n), \quad (3.49)$$

é dita de **distribuição causal**, em que $\text{supp}(D_n(Y, x_n)) \subset \Gamma_n^+(x_n) \cap \Gamma_n^-(x_n)$, a saber, D_n está no cone passado e futuro de x_n .

O próximo passo é demonstrar que o T_n (3.49) satisfaz a propriedade (3.32) para as distribuições avançada e retardada com o seguinte teorema:

Teorema 1

Temos $Y \equiv P \cup Q, P \neq \emptyset, P \cap Q \equiv \emptyset, |Y| = n-1$ e $x_n \notin Y$.

Se $\{Q, x_n\} > P, |Q| = m$, resulta:

$$R'_n(Y, x_n) = -T_{m+1}(Q, x_n)T_{n-1-m}(P). \quad (3.50)$$

Se $\{Q, x_n\} < P$, $|Q|=m$, resulta:

$$A'_n(Y, x_n) = -T_{n-1-m}(P)T_{m+1}(Q, x_n). \quad (3.51)$$

Se $R_n = 0$ em (3.48) e logo substituindo em (3.50), obtemos:

$$\begin{aligned} T_n(Y, x_n) &= -R'_n(Y, x_n) \\ &= -T(Q, x_n)T(P) \quad , \{Q, x_n\} > P. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Fazendo a mesma análise para a distribuição (3.51), resulta:

$$\begin{aligned} T_n(Y, x_n) &= -A'_n(Y, x_n) \\ &= -T(P)T(Q, x_n) \quad , \{Q, x_n\} < P. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Assim, dizemos que T_n satisfaz as propriedades da causalidade.

Teorema 2

Se $n \geq 3$, temos

$$\text{supp} D_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \subseteq \Gamma_n^+(x_n) \cup \Gamma_n^-(x_n), \quad (3.54)$$

O teorema⁶ acima diz-nos que D_n pode ser dividida em duas partes (retardada e avançada).

Em seguida, analisaremos a distribuição causal (3.49), isto é, a divisão da distribuição causal.

3.2.2 Divisão da distribuição causal

A distribuição de n-pontos D_n é um ordenamento normal do produto de campos livres, no meio ou entre eles tem a distribuição numérica.

$$D_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_k : \prod_j \bar{\psi}(x_j) d_n^k(x_1, \dots, x_n) \prod_l \psi(x_l) :: \prod_m A(x_m) : . \quad (3.55)$$

⁶Para obter mais detalhes sobre os teoremas, ver no livro de Scharf[6].

De agora em diante, a análise será focada na distribuição numérica $d_n^k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{3n})$ ⁷, chamada de distribuição temperada⁸, que possui suporte causal. Portanto, é expressa na seguinte bipartição:

$$d_n^k(x_1, \dots, x_n) = r_n^k(x_1, \dots, x_n) - a_n^k(x_1, \dots, x_n), \quad \begin{array}{l} \text{em que} \\ \text{supp}(r_n^k) \subseteq \Gamma_n^+(x_n), \\ \text{supp}(a_n^k) \subseteq \Gamma_n^-(x_n). \end{array} \quad (3.56)$$

Aplicando a invariância translacional na relação acima, definimos em $x_n = 0$

$$d(x) \equiv d_n^k(x_1 - 0, x_2 - 0, \dots, x_{n-1} - 0, 0 - 0) \equiv r(x) - a(x), \quad (3.57)$$

em que $\text{supp}(d) \subseteq \Gamma_{n-1}^+(0) \cup \Gamma_{n-1}^-(0)$ e $d \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{3n-3})$. Um exemplo para $n=2$ seria:

$$d(x_1, x_2) = d_2^k(x_1, 0) = r_2(x_1, 0) - a_2(x_1, 0). \quad (3.58)$$

Por outro lado, $r_n(x)$ é dividido da seguinte maneira:

$$r_n(x) = \chi_n(x) d_n^k(x), \quad \chi_n(x) = \prod_{j=1}^{n-1} \Theta(x_j^0 - x_n^0), \quad (3.59)$$

na relação acima, d_n^k possui singularidade em $x = 0$ e χ é descontínuo. Por esses motivos, analisaremos o comportamento de $d(x)$ nos limites em $x = 0$ e $p = +\infty$. O último passo será a análise de χ .

Definição de Limite 1

Temos a distribuição $d(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ e uma função contínua positiva $\rho(\delta)$, em que $\delta > 0$. Se o limite

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(\delta) \delta^m d(\delta x) = d_0(x) \neq 0, \quad (3.60)$$

existe em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, $d_0(x)$ é dita quase-assintótica em $x = 0$ em relação a ρ .

Por outro lado, escrevemos a transformada de Fourier, sua inversa

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(p) &= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int d^m x \phi(x) e^{+ipx}, \\ \check{\phi}(p) &= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int d^m x \phi(x) e^{-ipx}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

⁷ $\mathcal{S}'$ representa o espaço dual de $\mathcal{S}$.

⁸ $\forall T \in \mathcal{S}'$ é dita de distribuição temperada.

e do teorema de Parseval-Plancherel

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \check{g} \rangle. \quad (3.62)$$

Considerando o espaço de momentos e a Transformada de Fourier para d

$$\begin{aligned} \langle d(x), \phi(\frac{x}{\delta}) \rangle &= \langle \hat{d}(p), \underbrace{[\check{\phi}(\frac{x}{\delta})](p)}_{\delta^m \check{\phi}(\delta p)} \rangle \\ &= \delta^m \langle \hat{d}(p), \check{\phi}(\delta p) \rangle \quad \text{fazendo } \delta p = p', \\ &= \langle \hat{d}(\frac{p}{\delta}), \check{\phi}(p) \rangle, \end{aligned} \quad (3.63)$$

com a relação acima, obtemos o seguinte limite:

Definição de limite 2

Temos a distribuição $\hat{d}(p) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Se o limite

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(\delta) \langle \hat{d}(\frac{p}{\delta}), \check{\phi}(p) \rangle = \langle \hat{d}_0, \check{\phi} \rangle, \quad (3.64)$$

existe $\forall \check{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, $\hat{d}_0(p)$ é dita quase-assintótica em $p = +\infty$.

Nesse ponto é necessário calcular $\rho(ab)$, utilizando uma transformação de escala, $\phi(p) \rightarrow \phi(ap)$, portanto o limite 2 é:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(\delta) \langle \hat{d}(\frac{p}{\delta}), \check{\phi}(ap) \rangle = \langle \hat{d}_0(p), \check{\phi}(ap) \rangle. \quad (3.65)$$

No lado esquerdo renomeamos $ap = p' \rightarrow d^m p = a^{-m} d^m p'$, portanto:

$$a^{-m} \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(\delta) \langle \hat{d}(\frac{p}{a\delta}), \check{\phi}(p) \rangle = \langle \hat{d}_0(p), \check{\phi}(ap) \rangle, \quad (3.66)$$

à esquerda acima adiciona-se o termo $\rho(a\delta)$

$$\underbrace{\left\langle a^{-m} \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(a\delta) \hat{d}(\frac{p}{a\delta}), \check{\phi}(p) \right\rangle}_{< \hat{d}_0(p), \check{\phi}(p) >} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\rho(\delta)}{\rho(a\delta)} = \langle \hat{d}_0(p), \check{\phi}(ap) \rangle, \quad (3.67)$$

logo, definindo um novo termo $\rho_0(a)$

$$\rho_0(a) \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\rho(a\delta)}{\rho(\delta)} = a^{-m} \frac{\langle \hat{d}_0(p), \check{\phi}(p) \rangle}{\langle \hat{d}_0(p), \check{\phi}(ap) \rangle}, \quad (3.68)$$

no qual o denominador tem que ser diferente de 0 e $a > 0$ para que exista $\rho_0(a)$. Utilizando (3.68), resulta:

$$\rho_0(ab) = \rho_0(a)\rho_0(b), \quad (3.69)$$

em que $\rho_0 = a^w$ ou em geral $\rho(\delta) = \delta^w$, $w \in \mathbb{R}$. Segundo Scharf, $\rho(\delta)$ é chamada de função de contagem de potências; enquanto que Vladimirov *et al* [26], refere-se como função de auto-modelo.

A relação (3.68) diz-nos que $\hat{d}_0$ é homogênea de grau w :

$$\hat{d}_0\left(\frac{p}{a}\right) = a^{-w} \hat{d}_0(p), \quad d_0(ax) = a^{-(m+w)} d_0(x), \quad (3.70)$$

e leva-nos ao seguinte limite

Definição de limite 3

Se os limites 1 e 2 são satisfeitos, a distribuição $d(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ é dita de ordem singular w .

Multi-índices de Schwartz

Os multi-índices de Schwartz são necessários aos nossos cálculos, para mais detalhes, vide [27]. Temos $x \in \mathbb{R}^n$, logo

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \dots, x_n), x_n \geq 0, \\ y &= (y_1, y_2, \dots, y_n), y_n \geq 0, \end{aligned} \quad (3.71)$$

Soma e diferença

$$x \pm y = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \dots, x_n \pm y_n). \quad (3.72)$$

Potência

$$X^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} = \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j}. \quad (3.73)$$

Fatorial

$$x! = x_1!x_2!\cdots x_n! = \prod_{j=1}^n x_j!. \quad (3.74)$$

Derivada parcial de ordem superior

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad (3.75)$$

em que $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

Por outro lado, escrevemos um vetor $v = (v_1, \dots, v_{n-1}) \in \Gamma^+$, e definimos o seguinte plano

$$\begin{aligned} v \cdot x &= (v_1, \dots, v_{n-1}) \cdot (x_1, \dots, x_{n-1}) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.76)$$

em que $x \in \mathbb{M}^{n-1}$. A equação (3.76) é um hiperplano tipo espaço

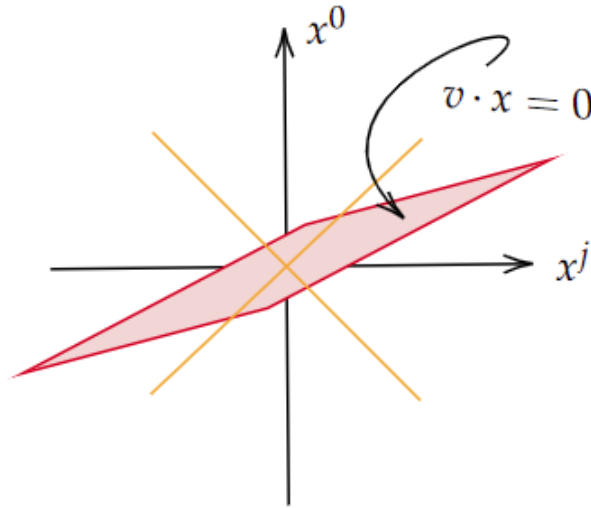


Figura 3.2: Hiperplano Causal.

e os produtos $v \cdot x > 0$ para $x \in \Gamma^+$ e $v \cdot x < 0$ para $x \in \Gamma^-$. A função $\chi \in C^\infty$ define-se

$$\chi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 0, \\ \chi(t) < 1, & \text{se } 0 < t < 1, \\ 1, & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

Com essas definições escrevemos a distribuição numérica retardada restrita

$$\bar{r}(x) \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \chi \left(\frac{v \cdot x}{\delta} \right) d(x), \quad (3.77)$$

e **avançada** restrita

$$a(x) = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \chi \left(\frac{-v \cdot x}{\delta} \right) d(x). \quad (3.78)$$

Ambas equações acima devem ser analisadas, isto é, verificar se os limites existem. Para realizar essa análise é necessário utilizar a condição de Cauchy:

$$\forall \epsilon \in \mathcal{S}, \quad \forall k \geq 1, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : -\delta < \lambda < +\delta \Rightarrow | < \chi_{\frac{\lambda}{k}} - \chi_{\lambda} >, \phi > | < \epsilon.$$

Logo, dizemos

$$\forall k \geq 1 : \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\chi_{\frac{\lambda}{k}} - \chi_{\lambda} \right) = 0. \quad (3.79)$$

Utilizando a definição acima, afirmamos que, para comprovar a existência das distribuições numéricas, é necessário cumprir.

$$\forall a > 1 : \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\chi_0 \left(a \frac{v \cdot x}{\delta} \right) - \chi_0 \left(\frac{v \cdot x}{\delta} \right) \right] \equiv \psi_0 \left(\frac{x}{\delta} \right) d(x) = 0. \quad (3.80)$$

Além disso, a função de contagem de potências tende ao infinito à medida que δ se aproxima de zero para uma ordem singular negativa. Logo, para

$$\text{se } \delta \rightarrow 0, \quad \rho(\delta) \rightarrow \infty, \quad (3.81)$$

logo, utilizando o **limite 1**

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\langle d(x), \phi \left(\frac{x}{\delta} \right) \right\rangle &= \left\langle \underbrace{\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^m d(\delta x)}_{\frac{d_0}{\rho}}, \phi(x) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{d_0(x)}{\rho(\delta)}, \phi(x) \right\rangle \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.82)$$

A equação (3.80) deve ser cumprida. Adicionamos uma função real

$$\psi_1(x) \in \mathbb{R}^m = \begin{cases} 1, & \Gamma^+ \cup \Gamma^-, \\ 0, & \text{fora do cone.} \end{cases}$$

Graficamente

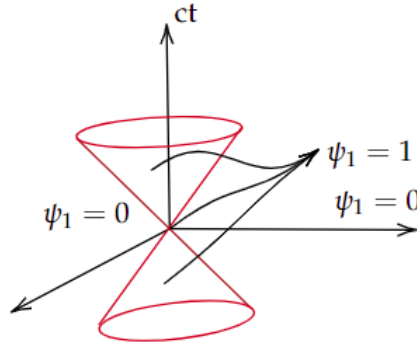


Figura 3.3: Cone de luz

Então:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\langle \psi_0 \left(\frac{x}{\delta} \right) d(x), \phi(x) \right\rangle &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\langle \psi_0 \left(\frac{x}{\delta} \right) d(x), \psi_1 \left(\frac{x}{\delta} \right) \phi(x) \right\rangle \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\langle \phi(x) d(x), \psi_0 \left(\frac{x}{\delta} \right) \psi_1 \left(\frac{x}{\delta} \right) \right\rangle \text{ fazendo } \frac{x}{\delta} = x' \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\langle \phi(\delta x') \delta^m d(\delta x'), \psi_0(x') \psi_1(x') \right\rangle \text{ utilizando o limite 1} \\
 &= \left\langle \lim_{\delta \rightarrow 0} \phi(\delta x) \underbrace{\frac{d_0(x)}{\rho(\delta)} \rightarrow 0}_0, \underbrace{\psi_0(x) \psi_1(x)}_{\text{função de teste}} \right\rangle \text{ utilizando (3.80)} \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.83}$$

em que $\psi_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

Existem dois tipos de distribuições com diferentes singularidades:

- 1) Distribuição causal numérica com ordem singular **não negativa**: quando $w \geq 0$.
- 2) Distribuição causal numérica com ordem singular **negativa**: quando $w < 0$.

Distribuição causal numérica com ordem singular negativa $w < 0$

A distribuição regular aparece quando a ordem singular é negativa. Portanto, dizemos: os **limites 1 e 2** existem e são finitos para uma distribuição regular.

Defina-se a distribuição causal retardada numérica

$$r(x) \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \chi \left(\frac{v \cdot x}{\delta} \right) d(x) \equiv \Theta(v \cdot x) d(x), \tag{3.84}$$

e a avançada

$$a(x) \equiv -\lim_{\delta \rightarrow 0} \chi\left(-\frac{v \cdot x}{\delta}\right) d(x) \equiv -\Theta(-v \cdot x) d(x) \equiv (\Theta(v \cdot x) - 1) d(x). \quad (3.85)$$

Essas distribuições podem ser aplicadas a uma função de teste.

$$\begin{aligned} \langle r(x), \phi \rangle &= \langle r(x), \Theta(v \cdot x) \phi(x) \rangle \rightarrow \langle r, (1 - \Theta) \phi \rangle = 0, \\ \langle a(x), \phi \rangle &= \langle a(x), (1 - \Theta(v \cdot x)) \phi(x) \rangle \rightarrow \langle r, \Theta \phi \rangle = 0. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Continuando com nosso objetivo, a equação (3.84) é expressa com o teorema de convolução

$$\hat{r}(p) = (2\pi)^{\frac{m}{2}} \int d^m q \Theta_v(q) \hat{d}(p - q), \quad (3.87)$$

em que

$$\Theta_v(p, q, \dots, r) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int dx \dots dz e^{ipx + \dots + irz} \Theta(v_1 x + v_2 y + \dots + v_m z). \quad (3.88)$$

Essa integral se resolve utilizando uma mudança de variável para x , explicitando

$$x = \frac{w}{v_1} - \frac{v_2}{v_1} y - \dots - \frac{v_m}{v_1} z, \quad (3.89)$$

substituindo em (3.88) e fazendo a integral para obter a delta de Dirac

$$\Theta_v(p, q, \dots, r) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} (2\pi)^{-\frac{m}{2}-1} \delta\left(q - p \frac{v_2}{v_1}\right) \dots \delta\left(r - p \frac{v_m}{v_1}\right) \underbrace{\int dw e^{ip \frac{w}{v_1}} \Theta(w)}_{\frac{i(2\pi)^{-1/2}}{p + i0^+}}. \quad (3.90)$$

Portanto, a distribuição numérica retardada (3.87) é:

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_{10}) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\hat{d}(tp)}{1 - t + i \text{sgn}(p_{10}) 0^+}. \quad (3.91)$$

Distribuição causal numérica com ordem singular não negativa ($w \geq 0$)

O objetivo é construir a distribuição numérica retardada no espaço dos momentos. Portanto, consideraremos algumas condições e definições: A função de

teste ϕ deve cumprir o seguinte:

$$D^a \phi(0) = 0, \text{ para } |a| < w, \quad (3.92)$$

com

$$w(0) = 1, D^a \phi(0) = 0 \text{ para } 1 \leq |a| \leq w, \quad (3.93)$$

e definimos $W \in \mathcal{S}$

$$(W\phi)(x) \equiv \phi(x) - w(x) \sum_{|a|=0}^w \frac{x^a}{a!} (D^a \phi)(0). \quad (3.94)$$

em que $w(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Com a definição acima, definimos a distribuição numérica retardada na teoria de distribuições:

$$\langle r(x), \phi(x) \rangle \equiv \langle d(x), \theta(v \cdot x) W\phi(x) \rangle, \quad (3.95)$$

logo

$$r(x) = \theta(v \cdot x) d(x) - \sum_{|a|}^w \int d^m z \theta(v \cdot z) d(z) w(z) \frac{(-z)^a}{a!} D^a \delta(x). \quad (3.96)$$

E no espaço de momentos

$$\hat{r}_q(p) \equiv \hat{r}(p) - \sum_{|b|=0}^w \frac{(p-q)^b}{b!} D^b \hat{r}(q), \quad (3.97)$$

em que $q \in \mathbb{R}^m, |b| \leq w$.

Retornando a relação (3.95), será escrita no espaço dos momentos e aplicada em uma função de teste ($\phi \in \mathcal{S}$)

$$\langle \hat{r}, \check{\phi} \rangle = \langle (\hat{\theta} \hat{d}), (\check{W}\phi) \rangle, \quad (3.98)$$

observamos que $(\hat{\theta} \hat{d})$ deve ser resolvida com o teorema de convolução e definimos $\hat{\theta}(v \cdot x) \equiv \hat{\chi}(k)$, portanto:

$$(\hat{\chi} \hat{d})(p) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int d^m k \hat{\chi}(p') \hat{d}(p-k), \quad (3.99)$$

e

$$(W\check{\phi})(p) = \check{\phi}(p) - \sum_{|a|=0}^w \frac{i^a (D_p^a \hat{w}(p))}{a!} (2\pi)^{-m} \langle (ip)^a, \check{\phi} \rangle. \quad (3.100)$$

As duas equações acima serão substituídas em (3.98)

$$\langle \hat{r}, \check{\phi} \rangle = \int d^m p \left[\frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int d^m k \hat{\chi}(k) \hat{d}(p-k) \check{\phi}(p) - \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int d^m k \hat{\chi}(k) \hat{d}(p-k) \cdot \sum_{|a|=0}^w \frac{(-)^a (D_p^a \check{w}(p))}{a! (2\pi)^{m/2}} \langle (p')^a, \check{\phi}(p') \rangle \right], \quad (3.101)$$

isolando a $\int d^m k$ e trocando pela $\int d^m p$

$$\begin{aligned} \langle \hat{r}, \check{\phi} \rangle &= \int \frac{d^m k \hat{\chi}(k)}{(2\pi)^{m/2}} \left[\int d^m p \left(\underbrace{\hat{d}(p-k) \check{\phi}(p)}_{\langle \hat{d}, \check{\phi} \rangle} - \underbrace{\hat{d}(p-k) \cdot \sum_{|a|=0}^w \frac{(-)^a (D_p^a \check{w}(p))}{a! (2\pi)^{m/2}} \langle (p')^a, \check{\phi}(p') \rangle}_{\left\langle \hat{d}, \sum_{|a|=0}^w \frac{(-)^a (D_p^a \check{w}(p))}{a! (2\pi)^{m/2}} \langle (p')^a, \check{\phi}(p') \rangle \right\rangle} \right) \right] \\ &= \int \frac{d^m p \hat{\chi}(p)}{(2\pi)^{m/2}} \left[\langle \hat{d}(p-k), \check{\phi}(p) \rangle - \underbrace{\left\langle \hat{d}(p'-k), \sum_{|a|=0}^w \frac{(-)^a (D_{p'}^a \check{w}(p'))}{a! (2\pi)^{m/2}} \langle (p')^a, \check{\phi}(p') \rangle \right\rangle}_{\left\langle \int d^m p' \hat{d}(p'-k) \sum_{|a|=0}^w \frac{(-)^a (D_{p'}^a \check{w}(p')) (p')^a}{a! (2\pi)^{m/2}}, \check{\phi}(p) \right\rangle} \right] \\ &= \int \frac{d^m p \hat{\chi}(p)}{(2\pi)^{m/2}} \left[\langle \hat{d}(p-k), \check{\phi}(p) \rangle - \left\langle \int d^m p' \hat{d}(p'-k) \sum_{|a|=0}^w \frac{(-)^a (D_{p'}^a \check{w}(p')) (p')^a}{a! (2\pi)^{m/2}}, \check{\phi}(p) \right\rangle \right] \\ &= \int \frac{d^m p \hat{\chi}(p)}{(2\pi)^{m/2}} \left\langle \hat{d}(p-k) - \int d^m p' \hat{d}(p'-k) \sum_{|a|=0}^w \frac{(-)^a (D_{p'}^a \check{w}(p')) (p')^a}{a! (2\pi)^{m/2}}, \check{\phi}(p) \right\rangle. \quad (3.102) \end{aligned}$$

Logo, isolando a distribuição numérica

$$\hat{r}(p) = \int \frac{d^m k}{(2\pi)^{m/2}} \hat{\chi}(k) \left[\hat{d}(p - k') - \int d^m p' \hat{d}(p' - k) \sum_{|a|=0}^w \frac{p^a (-)^a (D_{p'}^a \check{w}(p'))}{a! (2\pi)^{m/2}} \right],$$

em que $\langle \hat{d}(p' - k), D_{p'}^a \check{w}(p') \rangle = (-)^a \langle D_{p'}^a \hat{d}(p' - k), \check{w}(p') \rangle$ é utilizado no segundo termo. Portanto,

$$\hat{r}(p) = (2\pi)^{-m/2} \int d^m k \hat{\chi}(k) \left[\hat{d}(p - k) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{|a|=0}^{[w]} \frac{p^a}{a!} \int d^m p' D_{p'}^a \hat{d}(p - k) \check{w}(p') \right]. \quad (3.103)$$

O resultado (3.103) deve ser substituído em (3.97) e, segundo o apêndice (C), resulta:

$$\hat{r}_q(p) = (2\pi)^{-m/2} \int d^m k \hat{\chi}(k) \left[\hat{d}(p - k) - \sum_{|b|=0}^{[w]} \frac{(p - q)^b}{b!} D^b \hat{d}(p - k) \right]. \quad (3.104)$$

Isto é, a divisão da solução com normalização no ponto q , e para que seja única devemos escrever: $D^b \hat{r}_q(q) = 0, \quad |b| \leq w$.

Analisaremos a distribuição numérica retardada (3.104) nas seguintes condições:

$$\begin{aligned} q &= 0, \quad q \in \mathbb{R}^m, \\ p &= ((p_1^0, \vec{0}), 0, \dots, 0), \quad \text{Tipo tempo } p \in \Gamma^+, \\ v &= ((1, \vec{0}), 0, \dots, 0), \\ v \cdot x &= x_1^0, \\ \Theta(v \cdot x) &= \Theta(x_1^0), \\ \hat{\chi}(k) &= (2\pi)^{m/2-1} \delta((0, \vec{k}_1), k_2, \dots, k_m) \frac{i}{k_1^0 + i0^+}, \end{aligned} \quad (3.105)$$

logo

$$\begin{aligned} \hat{r}_0(p) = \frac{i}{2\pi} \int dk_1^0 d\vec{k} dk_2 \cdots dk_m \frac{\delta(\vec{k}_1, k_2, \dots, k_m)}{k_1^0 + i0^+} \left[\hat{d}(((p_1^0, \vec{0}), 0, \dots, 0)) \right. \\ \left. - (((k_1^0, \vec{k}), k_2, \dots, k_m)) - \sum_{|b|=0}^{[w]} \frac{(((p_1^0, \vec{0}), 0, \dots, 0) - (0, 0, \dots, 0))^b}{b!} \right. \\ \left. \times \left((D^b \hat{d})((0, 0, \dots, 0) - ((k_1^0, \vec{k}), k_2, \dots, k_m)) \right) \right], \end{aligned} \quad (3.106)$$

portanto,

$$\hat{r}_0(p) = \frac{i}{2\pi} \int dk_1^0 \left[\frac{\hat{d}(p_1^0 - k_1^0, 0, \dots, 0)}{k_1^0 + i0^+} - \sum_{|b|=0}^{[w]} \frac{(p_1^0)^b (-)^b}{b!} \frac{1}{k_1^0 + i0^+} D_{k_1^0}^b \hat{d}(-k_1^0) \right], \quad (3.107)$$

em que utilizamos a definição da derivada de uma distribuição no livro de Schwartz [22]

$$\left\langle D^b \hat{d}(-k_1^0), \frac{1}{k_1^0 + i0^+} \right\rangle = (-)^b \left\langle D^b \left(\frac{1}{k_1^0 + i0^+} \right), \hat{d}(-k_1^0) \right\rangle, \text{ no segundo termo.}$$

Portanto:

$$\hat{r}_0(p) = \frac{i}{2\pi} \int dk_1^0 \left[\frac{\hat{d}(p_1^0 - k_1^0)}{k_1^0 + i0^+} - \sum_{|b|=0}^{[w]} \frac{(p_1^0)^b}{b!} D_{k_1^0}^b \left(\frac{1}{k_1^0 + i0^+} \right) \hat{d}(-k_1^0) \right], \quad (3.108)$$

fazemos uma mudança de variável $k'_0 = k_1^0 - p_1^0$,

$$\hat{r}_0(p) = \frac{i}{2\pi} \int dk'_1 \hat{d}(-k'_0) \left[\frac{1}{p_1^0 + k'_0 + i0^+} - \frac{(p_1^0)^b}{b!} D_{k'_0}^b \frac{1}{k'_0 + i0^+} \right], \quad (3.109)$$

os termos entre parênteses são simplificados, utilizando $\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{x} \right) = (-)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$, em que $x = k'_0$ e $n = b$, resulta

$$[\dots] = \frac{1}{p_1^0 + k'_0 + i0^+} - \frac{1}{k'_0 + i0^+} \sum_{|b|=0}^{[w]} \left(\frac{-p_1^0}{k'_0 + i0^+} \right)^b, \quad (3.110)$$

$$e \sum_{n=0}^N y^n = \frac{y^{N+1}}{y-1}, \text{ em que } y = \left(\frac{-p_1^0}{k_1' + i0^+} \right)$$

$$[\dots] = \frac{1}{p_1^0 + k_0' + i0^+} \left(\frac{-p_1^0}{k_1' + i0^+} \right)^{[w]+1}, \quad (3.111)$$

e com $k_0' = -k_0$ em (3.109), obtemos

$$\hat{r}_0(p) = \frac{i}{2\pi} (p_1^0)^{[w]+1} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \frac{\hat{d}(k_0)}{(k_0 - i0^+)^{[w]+1} (p_1^0 - k_0 + i0^+)}. \quad (3.112)$$

Fazendo uma mudança de variável $k_0 = tp_1^0$, obtemos a solução central de divisão em $q = 0$

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\hat{d}(tp_1^0)}{(t - i0^+)^{[w]+1} (1 - t + i0^+)}. \quad (3.113)$$

Por outro lado, se $p \in \Gamma^+ \cup \Gamma^-$, o resultado seria:

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_1^0) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\hat{d}(tp_1^0)}{(t - i \text{sgn}(p_1^0)0^+)^{[w]+1} (1 - t + i \text{sgn}(p_1^0)0^+)}. \quad (3.114)$$

Além disso, o último teorema que escreveremos está relacionado ao polinômio das distribuições.

3.2.3 Teorema do polinômio

Seja uma distribuição causal de ordem qualquer. Se $\hat{d}(p)$ está relacionado a um polinômio da seguinte maneira: $\hat{d}(p) = p^a \hat{d}_1(p)$ para qualquer multi-índice de Schwartz, então podemos afirmar que $\hat{r}(p) = p^a \hat{r}_1(p)$, sendo $\hat{r}_1(p)$ a parte retardada de $\hat{d}$ e o polinômio p^a é o mesmo em ambos casos.

Esse teorema⁹ nos é útil para nosso estudo porque a distribuição causal será da ordem negativa e estará relacionada com um polinômio.

⁹Vide [28] para compreender o teorema.

Capítulo 4

Modelo de Yukawa

Em 1935, Yukawa [29] propôs um modelo para explicar as interações nucleares que atuam no interior do núcleo atômico, composto por núcleons (prótons e nêutrons). Ele propõe a existência de uma partícula mediadora, agora conhecida como méson, que surge na interação entre os núcleons ($N' \rightarrow N + \pi$). Essa interação é descrita pela função $U(x, y, z, t)$, dita de "campo- U ou partícula- U ", que satisfaz a equação $(\square + m^2)U(t, x, y, z) = 0$, conhecida como a equação de Klein-Gordon. H. Yukawa propõe uma solução estática, esfericamente simétrica e que decai rapidamente em distâncias longas. Portanto, a equação a ser resolvida é $(\nabla^2 - m^2)U(x, y, z) = g\delta^3(\vec{x})$ com a transformada de Fourier $\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \tilde{\phi}(\vec{p})$, $\delta^3(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}$, e o teorema dos resíduos em coordenadas esféricas. Então, a função ou potencial U é expressa na forma

$$U \sim \int d^3p \frac{e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}}{\vec{p}^2 + m^2} \sim \frac{e^{-mr}}{r}.$$

Em dimensões mais baixas, por exemplo, 2+1, a estrutura e o resultado são os mesmos para obter o potencial U .

N. Kemmer [30] demonstrou que a interação ou força nuclear próton-próton, nêutron-próton e nêutron-nêutron ($pp-$, $np-$ e $nn-$) é exatamente a mesma mediante a hipótese de independência de carga, isto é, o potencial de qualquer estado do núcleon é igual. Segundo Yukawa, a transição para ir de um estado de próton para um estado de nêutron deve-se a alguma partícula pesada. Segundo o experimento de C. F. Powell [31], essa partícula pesada é dita de méson, que compreende qualquer partícula com massa média entre o elétron e o próton na época.

Por outro lado, a Lagrangeana de interação de Yukawa entre os núcleons e mésons é $\mathcal{L}_I = ig : \bar{\psi} \Gamma \psi : \phi$. Nosso caso de interesse é para $\Gamma = \mathbb{1}$ e em 2+1 dimensões

espaço temporais no formalismo da teoria de perturbação causal. Portanto,

$$\mathcal{L}_I = ig : \bar{\psi}\psi : \phi.$$

Os espinores $\bar{\psi}$ e ψ são funções de quatro componentes; ϕ , uma componente e g é a constante de acoplamento.

4.1 Aplicação na interação de Yukawa

O objetivo é descrever a distribuição causal de dois pontos (D_2). Nosso interesse de estudo é a interação de Yukawa. No formalismo da TPC a lagrangiana de interação é $\mathcal{L}_I = -T_1$.

Escreve-se o primeiro termo de interação de maneira geral:

$$T_1 = -ig : \bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x) : \phi(x), \quad (4.1)$$

em que Γ poder ser $\mathbb{I}$ (escalar) ou $i\gamma^5$ (pseudo-escalar), e g a constante de acoplamento. Na próxima seção trabalharemos em 2+1 dimensões e com um valor definido para Γ .

Da distribuição (3.49) ($n=2$), resulta:

$$D_2(x_1, x_2) = R'_2(x_1, x_2) - A'_2(x_1, x_2). \quad (4.2)$$

Utilizando (3.41) e (3.46), as distribuições retardadas e avançadas são expressas, respectivamente:

$$\begin{aligned} R'_2(x_1, x_2) &= g^2 : \bar{\psi}(x_2)\Gamma\psi(x_2) :: \bar{\psi}(x_1)\Gamma\psi(x_1) : \phi(x_2)\phi(x_1), \\ A'_2(x_1, x_2) &= g^2 : \bar{\psi}(x_1)\Gamma\psi(x_1) :: \bar{\psi}(x_2)\Gamma\psi(x_2) : \phi(x_1)\phi(x_2). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Nota-se que, ao calcular R'_2 , obtemos A'_2 se trocarmos $x_1 \leftrightarrow x_2$.

Segundo o teorema de G. C. Wick [33] (Apêndice (D)), obtemos a seguinte relação do produto de dois pares de campos ordenado normalmente para o campo fermiônico

$$\begin{aligned} : AB :: CD : &= : ABCD : - \overline{AC} : BD : + \overline{AD} : BC : \\ &+ \overline{BC} : AD : - \overline{BD} : AC : - \overline{ACBD} + \overline{ADBC}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

com as seguintes contrações

$$\begin{aligned} \overline{\psi_\alpha(x_1)}\psi_\beta(x_2) &= \overline{\bar{\psi}_\alpha(x_1)}\bar{\psi}_\beta(x_2) = 0, & \overline{\bar{\psi}_\beta(x_1)}\psi_\alpha(x_2) &= -iS_{\alpha\beta}^-(x_2 - x_1), \\ \overline{\psi_\alpha(x_1)}\bar{\psi}_\beta(x_2) &= -iS_{\alpha\beta}^+(x_1 - x_2), & \overline{\phi(x_1)}\phi(x_2) &= -iD^+(x_1 - x_2), \end{aligned} \quad (4.5)$$

e a propriedade do ordenamento normal no caso fermiônico

$$: A(x_1)B(x_2) : = - : B(x_2)A(x_1) : \quad (4.6)$$

Portanto, substituindo (4.4), (4.5) e (4.6) em (4.3), no produto fermiônico de R'_2 , resulta:

$$\begin{aligned} R'_2(x_1, x_2) &= g^2 \Gamma_{\alpha\beta} \Gamma_{\gamma\sigma} \left[: \bar{\psi}_\gamma(x_1) \psi_\sigma(x_1) \bar{\psi}_\alpha(x_2) \psi_\beta(x_2) : \right. \\ &\quad + i S_{\sigma\alpha}^-(x_1 - x_2) : \bar{\psi}_\gamma(x_1) \psi_\beta(x_2) : - i S_{\beta\gamma}^+ : \bar{\psi}_\alpha(x_2) \psi_\sigma(x_1) : \\ &\quad \left. - \text{Tr} \left(S_{\sigma\alpha}^-(x_1 - x_2) S_{\beta\gamma}^+(x_2 - x_1) \right) \right] \times \left[: \phi(x_2) \phi(x_1) : - i D^+(x_2 - x_1) \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Expressando R'_2 em um produto matricial

$$\begin{aligned} R'_2(x_1, x_2) &= g^2 \left[: \bar{\psi}(x_1) \Gamma \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \Gamma \psi(x_2) : + i : \bar{\psi}(x_1) \Gamma S^-(x_1 - x_2) \Gamma \psi(x_2) \right. \\ &\quad \left. - i : \bar{\psi}(x_2) \Gamma S^+(x_2 - x_1) \Gamma \psi(x_1) : - \text{Tr} \left(S^-(x_1 - x_2) \Gamma S^+(x_2 - x_1) \Gamma \right) \right] \\ &\quad \times \left[: \phi(x_1) \phi(x_2) : - i D^+(x_2 - x_1) \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Nota-se, para o campo escalar $: \phi(x_1) \phi(x_2) : = : \phi(x_2) \phi(x_1) :$.

Da mesma maneira escreve-se A'_2 em um produto matricial

$$\begin{aligned} A'_2(x_1, x_2) &= g^2 \left[: \bar{\psi}(x_1) \Gamma \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \Gamma \psi(x_2) : + i : \bar{\psi}(x_2) \Gamma S^-(x_2 - x_1) \Gamma \psi(x_1) \right. \\ &\quad \left. - i : \bar{\psi}(x_1) \Gamma S^+(x_1 - x_2) \Gamma \psi(x_2) : - \text{Tr} \left(S^-(x_2 - x_1) \Gamma S^+(x_1 - x_2) \Gamma \right) \right] \\ &\quad \times \left[: \phi(x_1) \phi(x_2) : - i D^+(x_1 - x_2) \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Antes de mostrar a distribuição causal de dois pontos, escrevemos algumas relações para as contrações, em que $x_1 - x_2 = y$ (por simplicidade)

$$\begin{aligned} D(y) &= D^+(y) + D^-(y), & S(y) &= S^+(y) + S^-(y), \\ D^+(y) &= -D^-(y), & S^+(y) &= -S^-(y), \end{aligned} \quad (4.10)$$

e as definições

$$D_2^{(1)}(x_1, x_2) \equiv ig^2 : \bar{\psi}(x_1)\Gamma\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\Gamma\psi(x_2) : D(y), \quad (4.11)$$

representa o espalhamento de núcleon-núcleon devido aos operadores fermiônicos na distribuição causal.

$$D_2^{(2)}(x, y) = ig^2 (: \bar{\psi}(x_1)\Gamma S(y)\Gamma\psi(x_2) : - : \bar{\psi}(x_2)\Gamma S(-y)\Gamma\psi(x_1) :) \times : \phi(x_1)\phi(x_2) :, \quad (4.12)$$

representa o espalhamento méson-núcleon devido aos operadores de campos escalares e fermiônicos na distribuição causal.

$$D_2^{(3)}(x_1, x_2) = -g^2 \text{Tr}[S^-(y)\Gamma S^+(-y)\Gamma - S^-(y)\Gamma S^+(y)\Gamma] \times : \phi(x_1)\phi(x_2) :, \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} D_2^{(4)}(x_1, x_2) &= g^2 : \bar{\psi}(x_1)\Gamma[S^+(y)D^+(y) - S^-(y)D^-(y)]\Gamma\psi(y) : \\ &\quad - g^2 : \bar{\psi}(x_2)\Gamma[S^+(-y)D^+(-y) - S^-(-y)D^-(-y)]\Gamma\psi(x_1) :, \end{aligned} \quad (4.14)$$

representam a auto-energia do méson e do núcleon porque observa-se o operador de campo escalar e fermiônico na distribuição causal.

$$D_2^{(5)}(x_1, x_2) = -g^2 \text{Tr}[S^-(y)\Gamma S^+(-y)\Gamma D^-(y) + S^-(y)\Gamma S^+(y)\Gamma D^+(y)], \quad (4.15)$$

a distribuição em (4.15) não representa algum espalhamento ou interação física porque não existe algum operador de campo escalar o fermiônico na distribuição causal. Por fim, utilizando as equações (4.3), (4.4) e (4.5), juntamente com as definições acima e substituindo-as em (4.2), obtemos a distribuição causal de segunda ordem

$$D_2(x_1, x_2) = D_2^{(1)}(x_1, x_2) + D_2^{(2)}(x_1, x_2) + D_2^{(3)}(x_1, x_2) + D_2^{(4)}(x_1, x_2) + D_2^{(5)}(x_1, x_2). \quad (4.16)$$

Foram descritas as distribuições retardada, avançada, subsidiárias e o nosso interesse de estudo: a distribuição causal para dois pontos para uma Γ geral. A

distribuição causal tem suporte em todo o cone de luz.

Os processos em que focaremos nossa atenção são: o espalhamento (dois núcleons), a auto-energia do méson e a auto-energia do núcleon em 2+1 dimensões, para $\Gamma = \mathbb{1}$.

4.2 Espalhamento em 2+1

O espalhamento é estudado em um caso especial. As interações das partículas ocorrem em um plano bidimensional (espacial) e coordenada temporal, isto é, o caso 2+1.

4.2.1 Espalhamento núcleon-núcleon em 2+1

Nesta seção, é analisado o espalhamento de núcleon-núcleon, correspondente à distribuição (4.11) para $\Gamma = \mathbb{1}$. A distribuição de dois pontos ($T_2 = R_2 - R'_2$) é

$$\begin{aligned} R_2(x_1, x_2) &= ig^2 : \bar{\psi}(x_1)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\psi(x_2) : D^{ret}(x_1 - x_2), \\ R'_2(x_1, x_2) &= ig^2 : \bar{\psi}(x_1)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\psi(x_1) : D^-(x_1 - x_2), \\ T_2(x_1, x_2) &= ig^2 : \bar{\psi}(x_1)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\psi(x_1) : D^F(x_1 - x_2), \end{aligned} \quad (4.17)$$

em que $D^F(x_1 - x_2) = D^{ret}(x_1 - x_2) - D^-(x_1 - x_2)$ é o propagador de Feynman do méson com massa m_2 . Em que D^{ret} é obtido mediante a divisão correta de $\hat{D}(p)$ para uma singularidade $w = -2$. Portanto, $\hat{D}^F(p) = -(2\pi)^{-3/2} \frac{1}{p^2 - m_2^2 + i0^+}$. Por outro lado, para calcular a seção de choque, definimos os estados iniciais e finais:

$$\begin{aligned} \psi_i &= \int d^2 p_i d^2 q_i \phi_1(p_i) \phi_2(q_i) b_{s_i}^\dagger(p_i) b_{\sigma_i}^\dagger(q_i) \Omega, \\ \psi_f &= \int d^2 p_f d^2 q_f \psi_f(p_f; q_f) b_{s_f}^\dagger(p_f) b_{\sigma_f}^\dagger(q_f) \Omega, \end{aligned} \quad (4.18)$$

em que Ω é o vácuo no espaço de Fock. As funções de teste $\phi_1(p_i)$ e $\phi_2(q_i)$ descrevem as distribuições dos momentos no estado inicial (os estados iniciais são preparados). A função de teste do estado final é $\psi_f(p_f; q_f)$ e **não** $\psi_f(p_f)\psi_f(q_f)$, porque **não** são estados preparados (não há certeza no final). Esta função obedece à relação de completude no espaço de Hilbert.

Por outro lado, o elemento de matriz é:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= (\psi_f; S_2 \psi_i) \\ &= \int d^2 p_i d^2 q_i d^2 p_f d^2 q_f \psi_f(p_f; q_f)^* S_{fi}(p_i; p_f | s) \phi_1(p_i) \phi_2(q_i), \end{aligned} \quad (4.19)$$

em que S_2 é proporcional a T_2 . Utilizando a equação (4.17), definimos:

$$\begin{aligned} S_{fi}(p_i; p_f | s) &= \left(\Omega; b_{\sigma_f}(q_f) b_{s_f}(p_f) S_2 b_{s_i}^\dagger(q_f) b_{\sigma_i}^\dagger(q_i) \Omega \right) \\ &= \frac{i}{2} g^2 \int d^3 x_1 d^3 x_2 D^F(x_1 - x_2) \\ &\quad \left(\Omega; b_{\sigma_f}(q_f) b_{s_f}(p_f) : \bar{\psi}(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \psi(x_2) : b_{s_i}^\dagger(q_f) b_{\sigma_i}^\dagger(q_i) \Omega \right), \end{aligned} \quad (4.20)$$

em que

$$\psi(x) = (2\pi)^{-1} \sum_s \int d^2 p \left[d_s^\dagger(\vec{p}) v_s(\vec{p}) e^{+ipx} + b_s(\vec{p}) u_s(\vec{p}) e^{-ipx} \right], \quad (4.21)$$

Substituindo a equação (4.21) em (4.20)

$$\begin{aligned} S_{fi}(p_i; p_f | s) &= \frac{i}{2} g^2 \int d^3 x_1 d^3 x_2 \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} \\ &\quad \times \int \frac{d^2 p_1}{2\pi} \int \frac{d^2 p_2}{2\pi} \int \frac{d^2 p_3}{2\pi} \int \frac{d^2 p_4}{2\pi} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{-e^{-ik(x_1 - x_2)}}{k^2 - m_2^2 + i0^+} \\ &\quad \times \bar{u}_{s_1}(p_1) e^{ip_1 x_1} u_{s_2}(p_2) e^{-ip_2 x_2} \bar{u}_{s_3}(p_3) e^{ip_3 x_3} u_{s_4}(p_4) e^{-ip_4 x_4} \\ &\quad \times \left(\Omega; b_{\sigma_f}(q_f) b_{s_f}(p_f) : b_{s_1}^\dagger(p_1) b_{s_2}(p_2) b_{s_3}^\dagger(p_3) b_{s_4}(p_4) : b_{s_i}^\dagger(p_i) b_{\sigma_i}^\dagger(q_i) \Omega \right), \end{aligned} \quad (4.22)$$

aplicando o teorema de Wick em (4.22), resulta:

$$\begin{aligned} S_{fi}(p_i; p_f | s) &= \frac{i}{2} g^2 \int d^3 x_1 d^3 x_2 \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} \\ &\quad \times \int \frac{d^2 p_1}{2\pi} \int \frac{d^2 p_2}{2\pi} \int \frac{d^2 p_3}{2\pi} \int \frac{d^2 p_4}{2\pi} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{-e^{-ik(x_1 - x_2)}}{k^2 - m_2^2 + i0^+} \\ &\quad \times \bar{u}_{s_1}(p_1) e^{ip_1 x_1} u_{s_2}(p_2) e^{-ip_2 x_2} \bar{u}_{s_3}(p_3) e^{ip_3 x_3} u_{s_4}(p_4) e^{-ip_4 x_4} \\ &\quad \times \left[\delta_{s_4, s_i} \delta^2(\vec{p}_4 - \vec{p}_i) \delta_{s_2, \sigma_i} \delta^2(\vec{p}_2 - \vec{q}_i) - \delta_{s_2, s_i} \delta^2(\vec{p}_2 - \vec{p}_i) \delta_{s_4, \sigma_i} \delta^2(\vec{p}_4 - \vec{q}_i) \right] \\ &\quad \times \left[\delta_{s_f, s_3} \delta^2(\vec{p}_f - \vec{p}_3) \delta_{\sigma_f, s_1} \delta^2(\vec{q}_f - \vec{p}_1) - \delta_{s_f, s_3} \delta^2(\vec{p}_f - \vec{p}_3) \delta_{\sigma_f, s_3} \delta^2(\vec{q}_f - \vec{p}_3) \right], \end{aligned} \quad (4.23)$$

empregando a propriedade $\int d^2p \delta^2(p - a) f(p) = f(a)$ e integrando em relação às variáveis x_2 , x_1 e k , resulta:

$$\begin{aligned} S_{fi}(p_i; p_f | s) &= \delta(p_f - q_i + q_f - p_i) M(p_i; p_f | s) \\ &= \delta(p_f - q_i + q_f - p_i) \frac{ig^2}{2\pi} \left[\frac{[\bar{u}_{s_f}(p_f) u_{\sigma_i}(q_i)] [\bar{u}_{\sigma_f}(q_f) u_{s_i}(p_i)]}{(p_f - q_i)^2 - m_2^2 + i0^+} \right. \\ &\quad \left. - \frac{[\bar{u}_{s_f}(p_f) u_{s_i}(p_i)] [\bar{u}_{\sigma_f}(q_f) u_{\sigma_i}(q_i)]}{(p_f - p_i)^2 - m_2^2 + i0^+} \right]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Por outro lado, consideramos que as funções ϕ_1 e ϕ_2 devem ser fortemente concentradas em p_j e q_j , respectivamente e, $p = p_f + q_f = p_i + q_i \approx p_j + q_j$.

Agora escrevemos a seção de choque no laboratório

$$\sigma_{c.m} = (2\pi)^1 \frac{E(p_j)E(q_j)}{\sqrt{(p_j q_j)^2 - m_p^2 m_q^2}} \sum_{s_f, \sigma_f} \int d^2 p_f d^2 q_f \delta(p_f - q_f - p_j - q_j) |M|^2, \quad (4.25)$$

em que $p_j = (E_j, \vec{p}_j)$ e $q_j = (m_2, \vec{0})$.

Por outro lado, nosso caso de interesse é para dois núcleons com a mesma massa $m_{p_j} = m_{q_j} = m_1$ e no centro de massa ($\vec{p}_j = -\vec{q}_j$ e $p_f = -q_f$). Portanto, $p_j = (E_{p_j}, \vec{p}_j)$, $q_j = (E_{q_j}, -\vec{p}_j)$, $E_{q_j} = E_{p_j} = E$ e $E^2 + \vec{p}_j^2 = p_j q_j$. Então, a seção de choque no centro de massa é

$$\begin{aligned} \sigma_{c.m} &= (2\pi)^1 \frac{E}{4\sqrt{E^2 - m_1^2}} \int d^2 p_f \delta(E(p_f) - E) \sum_{s_f, \sigma_f} |M|^2 \\ &= (2\pi)^1 \frac{E^2}{4\sqrt{E^2 - m_1^2}} \sum_{s_f, \sigma_f} |M|^2 \int_0^{2\pi} d\Theta. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Em (4.26) se utilizou as coordenadas polares. Aplicando o diferencial em (4.26), chegamos à seção de choque diferencial no centro de massa em 2+1 dimensões

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Theta} \right)_{c.m} = (2\pi)^1 \frac{E^2}{4\sqrt{E^2 - m_1^2}} \sum_{s_f, \sigma_f} |M|^2. \quad (4.27)$$

Fazendo a média sobre todos os spin das partículas incidentes

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Theta} \right)_{c.m.} = (2\pi)^1 \frac{E^2}{16\sqrt{E^2 - m_1^2}} \sum_{s_i, \sigma_i, s_f, \sigma_f} |M|_{c.m.}^2 \quad (4.28)$$

em que M foi definido em (4.24).

Para calcular $|M|_{c.m.}^2$, precisamos das seguintes relações

$$\sum_s u_s(\vec{p}) \bar{u}_s(\vec{p}) = \frac{\not{p} + m_1}{2E_{\vec{p}}}, \quad [\bar{u}_s(\vec{p}) u_r(\vec{q})]^\dagger = \bar{u}_r(\vec{q}) u_s(\vec{p}). \quad (4.29)$$

É necessário mencionar que o espinor u representa uma matriz coluna.

Portanto:

$$\begin{aligned} \sum_{s_i, \sigma_i, s_f, \sigma_f} |M|_{c.m.}^2 &= MM^\dagger \\ &= \frac{g^4}{16E^4(2\pi)^2} \left[\frac{\text{Tr}\{(\not{p}_f + m_1)(\not{q}_j + m_1)\} \text{Tr}\{(\not{q}_f + m_1)(\not{p}_j + m_1)\}}{[(p_f - q_j)^2 - m_2^2]^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\text{Tr}\{(\not{p}_f + m_1)(\not{q}_j + m_1)(\not{q}_f + m_1)(\not{p}_j + m_1)\}}{[(p_f - q_j) - m_2^2][(p_f - p_j)^2 - m_2^2]} + p_j \leftrightarrow q_j \right], \end{aligned} \quad (4.30)$$

O resultado da equação (4.30) é simplificado através das variáveis de Mandelstam [32]

$$\begin{aligned} s &= (p_j + q_j)^2 = (p_f + q_f)^2, \quad u = (p_f - q_j)^2 = (p_j - q_f)^2, \\ t &= (p_j - p_f)^2 = (q_j - q_f)^2, \quad s + t + u = 4m_1^2, \end{aligned} \quad (4.31)$$

portanto

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{(\not{p}_f + m_1)(\not{q}_j + m_1)\} &= \text{Tr}\{(\not{q}_f + m_1)(\not{p}_j + m_1)\} = 2(4m_1^2 - u), \\ \text{Tr}\{(\not{p}_f + m_1)(\not{p}_j + m_1)\} &= \text{Tr}\{(\not{q}_f + m_1)(\not{q}_j + m_1)\} = 2(4m_1^2 - t), \\ \text{Tr}\{(\not{p}_f + m_1)(\not{q}_j + m_1)(\not{q}_f + m_1)(\not{p}_j + m_1)\} &= u^2 t^2 - s^2 + 16m_1^2 s - 16m_1^4. \end{aligned} \quad (4.32)$$

logo, substituindo (4.32) em (4.30)

$$\begin{aligned} \sum_{s_i, \sigma_i, s_f, \sigma_f} |M|_{c.m}^2 &= \frac{g^4}{8E^4(2\pi)^2} \left[\frac{2(4m_1^2 - u)^2}{(u - m_2^2)^2} - \frac{u^2 + t^2 - s^2 + 16m_1^2s - 16m_1^4}{(u - m_2^2)(t - m_2^2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(4m_1^2 - t)^2}{(t - m_2^2)^2} \right] \\ &= \frac{g^4}{8E^4(2\pi)^2} F(s, t, u). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Finalmente, substituindo (4.33) em (4.28), obtemos a seção de choque diferencial núcleon-núcleon em 2+1 dimensões:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Theta} \right)_{c.m} = \frac{g^4}{256\pi E^2 \sqrt{E^2 - m_1^2}} F(s, t, u), \quad (4.34)$$

em que m_1 e m_2 são as massas do núcleon e méson, respectivamente.

No caso no limite não-relativístico, em que $|\vec{p}_j| \approx m_1 |\vec{v}_j|$, $E \approx m$. Consideramos que os numeradores de $F(s, t, u)$ (4.33) se aproximam de $s \approx 4m_1^2$, $t, u \approx 0$. Além disso, a condição "on-shell" $p^2 = m^2$. Também consideramos o ângulo α entre p_j e p_f no centro de massa e as seguintes relações

$$\begin{aligned} s &= 4m^2 + 4\vec{p}_j^2, \\ t &= -4\vec{p}_j^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \\ u &= -4\vec{p}_j^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Considerando o caso não-relativístico e as relações de (4.35) na seção de choque diferencial (4.34), resulta:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Theta} \right)_{c.m} &= \frac{g^4 m_1}{8\pi |\vec{v}_j|} \left[\frac{1}{(4\vec{p}_i^2 \sin(\alpha/2) + m_2^2)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(4\vec{p}_i^2 \sin(\alpha/2) + m_2^2)(4\vec{p}_i^2 \cos(\alpha/2) + m_2^2)} + \frac{1}{(4\vec{p}_i^2 \cos(\alpha/2) + m_2^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.36)$$

A seção eficaz diferencial foi resolvida em 2+1-dimensões. Considerando apenas a parte espacial, entendemos que as partículas estão interagindo em um plano bidimensional nos casos relativísticos e não-relativísticos.

4.3 Auto-energia do méson em 2+1

O objetivo nosso consiste em calcular a auto-energia do méson $\hat{\Pi}(p)$. Para obtenção dessa expressão, é necessário o uso das distribuições retardadas numéricas $\hat{r}(p)$ e $\hat{r}'(p)$, as quais dependem da distribuição causal numérica $\hat{d}(p)$ no espaço de momento. Então, a partir de (4.13)

$$D_2^{(3)}(x_1, x_2) = d(y) : \phi(x_1)\phi(x_2) :, \quad (4.37)$$

em que $d(y)$ representa a distribuição casual numérica de $D_2^3(x_1, x_2)$.

Definimos:

$$d(y) = P(y) - P(-y), \quad P(y) \equiv g^2 \text{Tr}\{S^+(y)S^-(-y)\}. \quad (4.38)$$

Escrevemos o $P(y)$ com o teorema de convolução no espaço de momentos:

$$\hat{P}(p) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} g^2 \int d^2q dq_0 \text{Tr}\{\hat{S}^+(q)\hat{S}^-(q-p)\}. \quad (4.39)$$

Percebemos que $\hat{S}^+(q)$ e $\hat{S}^-(q-p)$ são as contrações dos campos no espaço de momentos. Nosso caso é em 2+1. Portanto:

$$\begin{aligned} \hat{S}^\pm(q) &= (\not{p} + m_1)\hat{D}^\pm(q), \\ \hat{D}^\pm(q) &= \pm i(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\theta(\pm q_0)\delta(q^2 - m_1^2). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Substituindo (4.40) em (4.39)

$$\hat{P}(p) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} g^2 \int d^2q dq_0 \text{Tr}\{(\not{q} + m)(\not{q} - \not{p} + m_1)\}\hat{D}^+(q)\hat{D}^-(q-p). \quad (4.41)$$

Segundo o Apêndice (E.1)

$$\text{Tr}\{(\not{q} + m)(\not{q} - \not{p} + m_1)\} = 4((q^2 - qp) + m_1^2). \quad (4.42)$$

Então, o traço acima substituído em (4.41), resulta:

$$\begin{aligned} \hat{P}(p) &= (2\pi)^{-\frac{5}{2}} g^2 \times 4((q^2 - qp) + m_1^2) \int d^2q dq_0 \Theta(q_0)\Theta(p_0 - q_0) \\ &\quad \times \delta(q^2 - m_1^2)\delta((q-p)^2 - m_1^2). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Analisando o suporte das deltas e as funções de Heaviside, obtemos:

$$q^2 = m_1^2, \quad \text{e} \quad p^2 = 2qp. \quad (4.44)$$

Com as relações acima (4.44), resulta:

$$\begin{aligned} \hat{P}(p) &= 2(2\pi)^{-\frac{5}{2}} g^2 [4m^2 - p^2] I(p), \\ I(p) &= \int d^2q dq_0 \Theta(q_0) \Theta(p_0 - q_0) \delta(q^2 - m_1^2) \delta(p^2 - 2qp). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Essa integral será resolvida em um sistema referencial inercial $p_\mu = (p_0, \vec{0})$, depois será realizada uma transformação de Lorentz para retornar a p_μ . Portanto:

$$I(p_0) = \int d^2q dq_0 \Theta(p_0 - q_0) \Theta(q_0) \delta(q^2 - m_1^2) \delta(p_0^2 - 2q_0 p_0), \quad (4.46)$$

analisando os suportes das função de Heaviside e a propriedade da delta Dirac, $q_0 > 0$ e $p_0 > q_0$, resulta:

$$I(p_0) = \Theta(p_0) \int d^2q dq_0 \Theta(p_0 - q_0) \frac{\delta(q_0 - E_{\vec{q}})}{2E_{\vec{q}}} \frac{\delta(q_0 - p_0/2)}{2|p_0|}, \quad (4.47)$$

em que $E_{\vec{q}} = \sqrt{|\vec{q}|^2 + m_1^2} = \sqrt{(q_1)^2 + (q_2)^2 + m_1^2}$. Por outro lado, integrando na primeira delta de Dirac, obtemos:

$$I(p_0) = \frac{1}{4|p_0|} \Theta(p_0) \int d^2q \Theta(p_0 - E_{\vec{q}}) \frac{\delta(E_{\vec{q}} - p_0/2)}{E_{\vec{q}}}. \quad (4.48)$$

Analisando o suporte da delta de Dirac, temos $p_0^2 > 4m_1^2$. Portanto, incluímos $\Theta(p_0^2 - 4m_1^2)$ na integral. Além disso, a integral acima é resolvida em coordenadas polares. Em que $q_1 = q \cos \theta$, $q^2 = q \sin \theta$ e $|\vec{q}| = q$

$$I(p_0) = \frac{1}{4|p_0|} \Theta(p_0) \Theta(p_0^2 - 4m_1^2) \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \Theta(p_0 - E_{\vec{q}}) \frac{\delta(E_{\vec{q}} - p_0/2)}{E_{\vec{q}}} q dq d\theta, \quad (4.49)$$

e fazendo uma troca de variável com: $E^2 = q^2 + m_1^2 \rightarrow E_{\vec{q}} dE_{\vec{q}} = q dq$, obtemos:

$$\begin{aligned} I(p_0) &= \Theta(p_0) \Theta(p_0^2 - 4m_1^2) \frac{\pi}{2|p_0|} \\ &= \Theta(p_0) \Theta(p_0^2 - 4m_1^2) \frac{\pi}{2\sqrt{(p_0)^2}}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

As funções de Heaviside estão incluídas porque, nesse intervalo, a integral não é nula. A integral (4.50) foi resolvida em um sistema referencial inercial $p_\mu = (p_0, 0)$. Fazendo uma transformação de Lorentz, obtemos (4.50) como

$$I(p) = \Theta(p_0)\Theta(p^2 - 4m_1^2)\frac{\pi}{2\sqrt{p^2}}. \quad (4.51)$$

Substituindo (4.51) em (4.38) no espaço de momentos, resulta:

$$\begin{aligned} \hat{P}(p) &= \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{2\sqrt{p^2}} g^2 [4m_1^2 - p^2] \Theta(p_0) \Theta(p^2 - m_1^2), \\ \hat{P}(-p) &= \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{2\sqrt{p^2}} g^2 [4m_1^2 - p^2] \Theta(-p_0) \Theta(p^2 - m_1^2). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Substituindo (4.52) em (4.38)

$$\hat{d}(p) = \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{2} g^2 [4m_1^2 - p^2] \underbrace{\frac{\text{sgn}(p_0) \Theta(p^2 - 4m_1^2)}{\sqrt{p^2}}}_{\hat{d}_1(p)}. \quad (4.53)$$

Segundo o apêndice (E.2) a ordem singular de $\hat{d}$ é $w(\hat{d}(p)) = 1$ e $w(\hat{d}_1(p)) = -1$. O próximo passo é continuar com a distribuição retardada numérica. Para isso, usaremos o teorema do polinômio para a ordem singular negativa

$$\hat{r}_1(p) = \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_0) \int dt \frac{\hat{d}_1(pt)}{1 - t + i \text{sgn}(p_0) 0^+}. \quad (4.54)$$

Substituindo a distribuição $\hat{d}_1(p)$ de (4.53) em (4.54), obtemos:

$$\hat{r}_1(p) = \frac{i}{2\pi\sqrt{p^2}} \underbrace{\text{sgn}^2(p_0)}_1 \int dt \frac{\text{sgn}(t) \Theta(p^2 t^2 - 4m_1^2)}{|t|(1 - t + i \text{sgn}(p_0) 0^+)}. \quad (4.55)$$

Utilizando a propriedade $|t| = t \text{sgn}(t)$ e separando a integral acima em duas somas

$$\hat{r}_1(p) = \frac{i}{2\pi\sqrt{p^2}} \left[\int_{-\infty}^0 dt \frac{\Theta(p^2 t^2 - 4m_1^2)}{t(1 - t + i \text{sgn}(p_0) 0^+)} + \int_0^{+\infty} dt \frac{\Theta(p^2 t^2 - 4m_1^2)}{t(1 - t + i \text{sgn}(p_0) 0^+)} \right], \quad (4.56)$$

trocando $t \rightarrow -t$ na primeira integral

$$\hat{r}_1(p) = \frac{i}{2\pi\sqrt{p^2}} \left[\int_0^{+\infty} dt \frac{-\Theta(p^2 t^2 - 4m_1^2)}{t(1+t + i\text{sgn}(p_0)0^+)} + \int_0^{+\infty} dt \frac{\Theta(p^2 t^2 - 4m_1^2)}{t(1-t + i\text{sgn}(p_0)0^+)} \right], \quad (4.57)$$

fazendo a soma das duas integrais

$$\hat{r}_1(p) = \frac{i}{2\pi\sqrt{p^2}} \int_0^{+\infty} dt \frac{2\Theta(p^2 t^2 - 4m_1^2)}{(1-t^2 + i\text{sgn}(p_0)0^+)}. \quad (4.58)$$

Fazendo uma troca de variável para $t^2 = s$, $dt = \frac{ds}{2\sqrt{s}}$, resulta:

$$\begin{aligned} \hat{r}_1(p) &= \frac{i}{2\pi\sqrt{p^2}} \int_0^{+\infty} ds \frac{\Theta(p^2 s - 4m_1^2)}{\sqrt{s}(1-s + i\text{sgn}(p_0)0^+)} \\ &= \frac{i}{2\pi\sqrt{p^2}} \int_{4m_1^2/p^2}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{s}(1-s + i\text{sgn}(p_0)0^+)}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

A integral acima pode ser resolvida com o Teorema de Sokhotskiy [34] calculando o valor principal [35] em diferentes regiões, mas há problemas quando analisamos para o caso $p^2 < 0$. Portanto, utilizamos o teorema da função analítica para uma distribuição retardada.

4.3.1 Teorema da função analítica

A distribuição retardada $\hat{r}(p)$ é o valor de fronteira de uma função analítica, regular em $\mathbb{R}^m + i\Gamma^+$. A causalidade restringe a função analítica: $\text{supp}(p) \subseteq \Gamma^+$

$$\hat{r}(p) = (2\pi)^{-m/2} \int e^{ipx} r(x) dx, \quad (4.60)$$

defina-se: $\tilde{p} = p + i\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$. Portanto,

$$\hat{r}(p) = (2\pi)^{-m/2} \int e^{ipx} r(x) e^{-\lambda x} dx, \quad (4.61)$$

para que a integral não seja divergente, devemos exigir que $\lambda \in \Gamma^+$. Então, λ está no cone futuro. Logo

$$\hat{r}(p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \hat{r}(p + i\epsilon\lambda). \quad (4.62)$$

- A primeira região é para $0 < p^2 < 4m_1^2 \rightarrow 1 < 4m_1^2/p^2$. Nesse caso não há polo porque o limite inferior da integração é maior que 1. Portanto, a distribuição retardada (4.59) é

$$\hat{r}_1(p) = \frac{i}{2\pi\sqrt{p^2}} \int_{4m_1^2/p^2}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{s}(1-s)}, \quad p \in \mathbb{R}^3. \quad (4.63)$$

Fazendo uma troca de variável em (4.63) $a = \sqrt{s}$, $2\sqrt{s}da = ds$, resulta:

$$\begin{aligned} \hat{r}_1(p) &= \frac{-i}{2\pi\sqrt{p^2}} \int_{\sqrt{4m_1^2/p^2}}^{+\infty} \left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1} \right) da \\ &= \frac{-i}{2\pi\sqrt{p^2}} \left[\lim_{a \rightarrow +\infty} \log \left(\frac{1-1/a}{1+1/a} \right) - \log \left(\frac{\sqrt{4m_1^2/p^2}-1}{\sqrt{4m_1^2/p^2}+1} \right) \right] \\ &= \frac{i}{2\pi\sqrt{p^2}} \log \left(\frac{2m_1 - \sqrt{p^2}}{2m_1 + \sqrt{p^2}} \right). \end{aligned} \quad (4.64)$$

- A segunda região é para $4m_1^2 < p^2 \rightarrow 4m_1^2/p^2 < 1$ na qual existe um polo. Aqui utilizamos o **teorema da função analítica**. A distribuição retardada $\hat{r}_1(p)$ (4.59) é o valor limite da função analítica

$$\hat{r}_1(p) = \frac{i}{2\pi\sqrt{p^2}} \log \left(\frac{2m_1 - \sqrt{p^2}}{2m_1 + \sqrt{p^2}} \right), \quad (4.65)$$

em que

$$\tilde{p} = p + i\lambda, \quad \lambda = \epsilon e_0, \quad e_0 = (1, 0, 0), \quad \lambda \in V^+, p \in \mathbb{R}^3, \quad (4.66)$$

o momento $\tilde{p}$ tem polo imaginário. A distribuição retardada (4.65) com a

condição (4.66)

$$\hat{r}_1(p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{2\pi\sqrt{p^2}} \log \left(\frac{2m_1 - \sqrt{p^2 + i\epsilon p_0}}{2m_1 + \sqrt{p^2 + i\epsilon p_0}} \right). \quad (4.67)$$

Fazendo uma expansão de Taylor para $(p^2 + i\epsilon p_0)^{1/2} \approx \sqrt{p^2} \left(1 + \frac{i\epsilon p_0}{2p^2} \right) \approx \sqrt{p^2} + i\epsilon p_0$ e utilizando a propriedade $\frac{A - i\alpha}{B - i\alpha} = \frac{A}{B} - i\alpha$ para um α pequeno, resulta:

$$\begin{aligned} \hat{r}_1(p) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{2\pi\sqrt{p^2}} \log \left(\frac{2m_1 - \sqrt{p^2}}{2m_1 + \sqrt{p^2}} - i\epsilon p_0 \right) \\ &= \frac{i}{2\pi\sqrt{p^2}} \left[\log \left(\frac{-2m_1 + \sqrt{p^2}}{2m_1 + \sqrt{p^2}} \right) - i\pi \operatorname{sgn}(p_0) \right], \end{aligned} \quad (4.68)$$

- A terceira região é para $p^2 < 0$, é resolvida por extensão analítica. Portanto, (4.59):

$$\hat{r}_1(p) = \frac{i}{2\pi i \sqrt{-p^2}} \log \left(\frac{2m_1 - i\sqrt{-p^2}}{2m_1 + i\sqrt{-p^2}} \right), \quad (4.69)$$

escreve-se a fórmula de Euler

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad (4.70)$$

em que $2m_1 = \cos z$ e $\sqrt{-p^2} = \sin z$. Logo

$$a = \tan(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} = -i \times \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}, \quad (4.71)$$

a partir da equação (4.71)

$$\log \left(\frac{i - a}{i + a} \right) = 2i \tan^{-1}(a), \quad (4.72)$$

percebemos que $a = \sqrt{-p^2/4m_1^2}$ em (4.72). Portanto;

$$\hat{r}_1(p) = \frac{-i}{\pi\sqrt{-p^2}} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{-p^2}}{2m_1} \right). \quad (4.73)$$

- A primeira e terceira região são as mesmas no limite de $p^2 = 0$, sendo esse valor $\frac{-i}{2\pi m}$.

Utilizando o polinômio de (4.53), escrevemos as distribuições retardadas e subsidiárias numéricas

$$\begin{aligned}\hat{r}(p) &= \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{2} g^2 [4m_1^2 - p^2] \hat{r}_1(p), \\ \hat{r}'(p) &= -\hat{P}(-p) = -\frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{2} g^2 [4m_1^2 - p^2] \frac{1}{\sqrt{p^2}} \theta(-p_0) \Theta(p^2 - 4m_1^2).\end{aligned}\tag{4.74}$$

Definimos a auto-energia do méson

$$\hat{\Pi}(p) = i\hat{t}(p) = i(\hat{r}(p) - \hat{r}'(p)).\tag{4.75}$$

Agora, escrevemos a auto-energia para todas as regiões:

1. Substituindo a distribuição (4.64) em (4.75),

$$\hat{\Pi}(p) = \frac{g^2 [4m_1^2 - p^2]}{2(2\pi)^{5/2} \sqrt{p^2}} \log \left(\frac{2m_1 + \sqrt{p^2}}{2m_1 - \sqrt{p^2}} \right),\tag{4.76}$$

para $0 < p^2 < 4m_1^2$.

2. Substituindo a distribuição (4.68) em (4.75)

$$\hat{\Pi}(p) = \frac{g^2 [4m_1^2 - p^2]}{2(2\pi)^{5/2} \sqrt{p^2}} \left[\log \left(\frac{2m_1 + \sqrt{p^2}}{-2m_1 + \sqrt{p^2}} \right) + i\pi \right],\tag{4.77}$$

para $p^2 > 4m_1^2$.

3. Substituindo a distribuição (4.73) em (4.75)

$$\hat{\Pi}(p) = \frac{g^2 [4m_1^2 - p^2]}{4(2\pi)^{5/2} \sqrt{-p^2}} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{-p^2}}{2m_1} \right),\tag{4.78}$$

para $p^2 < 0$.

A explicação da auto-energia do méson será dita na análise do propagador completo.

4.4 Auto-energia do núcleon em 2+1

Nosso primeiro objetivo será calcular $\hat{d}_+(p)$ e, analogamente, $\hat{d}_-(p)$ com o teorema de convolução. Em seguida, obteremos a distribuição casual numérica ($\hat{d}(p)$) e as distribuições retardadas numéricas ($\hat{r}(p)$ e $\hat{r}'(p)$), visando, ao final, a auto-energia do núcleon ($\hat{\Sigma}(p)$).

Portanto, a partir da equação (4.14) com $\Gamma = 1$

$$\begin{aligned} D_2^{(4)}(x_1, x_2) &= R_2'(x_1, x_2) - A_2'(x_1, x_2) \\ &= g^2 : \bar{\psi}(x_1) d(y) \psi(x_2) : . \end{aligned} \quad (4.79)$$

A distribuição numérica é

$$d(y) = \underbrace{r'(x_1, x_2)}_{g^2 d^-(y)} + \underbrace{g^2 d^+(y)}_{-a'(x_1, x_2)}, \quad d^\pm(y) = \pm S^\pm(y) D^\pm(y). \quad (4.80)$$

Logo, com o teorema de convolução para as seguintes distribuições

$$\begin{aligned} \hat{d}^+(p) &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^2q dq_0 \hat{S}^+(q) \hat{D}^+(p - q), \\ \hat{d}^-(p) &= -(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^2q dq_0 \hat{S}^-(q) \hat{D}^-(p - q). \end{aligned} \quad (4.81)$$

Em S e D no espaço de momentos são

$$\begin{aligned} \hat{S}^\pm(q) &= \pm i(2\pi)^{-\frac{1}{2}} (\not{q} + m_1) \hat{D}^\pm(q), \\ \hat{D}^\pm(q) &= \pm i(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \Theta(\pm q_0) \delta(q^2 - m_1^2). \end{aligned} \quad (4.82)$$

Substituindo a relação acima em (4.81)

$$\begin{aligned} \hat{d}^+(p) &= -(2\pi)^{-\frac{5}{2}} [m_1 K(p) + \gamma^\mu K_\mu(p)], \\ \hat{d}^-(p) &= (2\pi)^{-\frac{5}{2}} [m_1 L(p) + \gamma^\mu L_\mu(p)]. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Definem-se as integrais em (4.83)

$$\begin{aligned} K(p) &= \int d^2q dq_0 \Theta(q_0) \Theta(p_0 - q_0) \delta(q^2 - m_1^2) \delta((p - q)^2 - m_2^2), \\ K_\mu(p) &= \int d^2q dq_0 q_\mu \Theta(q_0) \Theta(p_0 - q_0) \delta(q^2 - m_1^2) \delta((p - q)^2 - m_2^2). \end{aligned} \quad (4.84)$$

e

$$\begin{aligned} L(p) &= \int d^2q dq_0 \Theta(-q_0) \Theta(-p_0 + q_0) \delta(q^2 - m_1^2) \delta((p - q)^2 - m_2^2), \\ L_\mu(p) &= \int d^2q dq_0 q_\mu \Theta(-q_0) \Theta(-p_0 + q_0) \delta(q^2 - m_1^2) \delta((p - q)^2 - m_2^2). \end{aligned} \quad (4.85)$$

Como foi dito anteriormente, começaremos com o cálculo de $\hat{d}_+(p)$. Portanto, calculamos a integral em $K(p)$ para um sistema referencial $p = (p_0, 0)$

$$K(p) = \int d^2q dq_0 \Theta(p_0 - q_0) \Theta(q_0) \delta(q^2 - m_1^2) \delta((p_0 - q)^2 - m_2^2), \quad (4.86)$$

Analisando o suporte da função de Heaviside e delta de Dirac, temos: $q_0 > 0$, $p_0 > q_0$ e $q^2 = m_1^2$. Logo

$$(p_0 - q)^2 - m_2^2 = p_0^2 - 2p_0q_0 + (m_1^2 - m_2^2), \quad (4.87)$$

então a integral (4.86) é

$$K(p) = \Theta(p_0) \int d^2q dq_0 \Theta(p_0 - q_0) \underbrace{\Theta(q_0) \delta(q^2 - m_1^2)}_{\frac{\delta(q_0 - E_{\vec{q}})}{2E_{\vec{q}}}} \delta(p_0^2 - 2p_0q_0 + (m_1^2 - m_2^2)), \quad (4.88)$$

em que $E_{\vec{q}} = \sqrt{|\vec{q}|^2 + m_1^2} = \sqrt{(q_1)^2 + (q_2)^2 + m_1^2}$. Por outro lado, integrando (4.88) para a primeira delta de Dirac ($q_0 = E_{\vec{p}}$)

$$K(p) = \int \frac{d^2q dq_0}{2E_{\vec{q}}} \Theta(p_0 - E_{\vec{q}}) \delta(p_0^2 - 2p_0E_{\vec{p}} + (m_1^2 - m_2^2)). \quad (4.89)$$

Analisando o suporte da função de Heaviside e delta de Dirac, obtemos: $p_0 = E_{\vec{p}} + \sqrt{|\vec{q}|^2 + m_2^2}$, p_0 devido ao suporte de Θ , e com um pouco de álgebra mostramos que $m_2 < \sqrt{q^2 + m_2^2} = \frac{(m_1^2 - m_2^2) - p_0^2}{-2p_0}$. As massas m_1 e m_2 representam a massa do nêutron e píon, respectivamente. Assim, $m_1 > m_2$; com essa informação, afirmamos que $p_0^2 > (m_1 + m_2)^2$, é necessário para incluir a função $\Theta(p^2 - 4(m_1 + m_2)^2)$. Por outro lado, na integral em (4.89), usamos a propriedade de delta de Dirac $\delta(af(x)) = |a|^{-1} \delta(f(x))$.

Portanto, a integral em (4.89) toma a forma

$$K(p) = \Theta(p_0^2 - (m_1 + m_2)^2) \frac{\Theta(p_0)}{4|p_0|} \times \int \frac{d^2 dq}{E_{\vec{q}}} \Theta(p_0 - E_{\vec{q}}) \delta\left(-E_{\vec{p}} + \frac{p_0^2 + (m_1^2 - m_2^2)}{2|p_0|}\right). \quad (4.90)$$

Utilizando as coordenadas polares: $|\vec{q}| = q$, $q_1 = q \sin \theta$ e $q_2 = q \cos \theta$

$$K(p) = \Theta(p_0) \Theta(p_0^2 - (m_1 + m_2)^2) \frac{\pi}{2|p_0|} \times \int_0^{+\infty} \frac{\Theta(p_0 - E_{\vec{q}})}{E_{\vec{p}}} \delta\left(-E_{\vec{q}} + \frac{p_0^2 + (m_1^2 - m_2^2)}{2|p_0|}\right) q dq. \quad (4.91)$$

Aqui é necessário fazer outra mudança de variável: $E^2 = q^2 + m_1^2 \rightarrow E dE = q dq$.

$$K(p) = \Theta(p_0) \Theta(p_0^2 - (m_1 + m_2)^2) \frac{\pi}{2|p_0|} \times \int_{m_1^2}^{\infty} \Theta(p_0 - E_{\vec{q}}) \delta\left(-E_{\vec{q}} + \frac{p_0^2 + (m_1^2 - m_2^2)}{2|p_0|}\right) dE_{\vec{q}}, \quad (4.92)$$

logo

$$\begin{aligned} K(p) &= \frac{\pi}{2|p_0|} \Theta(p_0) \Theta(p_0^2 - (m_1 + m_2)^2) \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{(p_0)^2}} \Theta(p_0) \Theta(p_0^2 - (m_1 + m_2)^2). \end{aligned} \quad (4.93)$$

Esse resultado foi calculado para um sistema referencial inercial em que $p_\mu = (p_0, 0)$. Fazendo uma transformação de Lorentz em (4.93)

$$\boxed{K(p) = \frac{\pi}{2\sqrt{p^2}} \Theta(p_0) \Theta(p^2 - (m_1 + m_2)^2).} \quad (4.94)$$

O próximo passo será calcular $K_\mu(p)$

$$K_\mu(p) = \int d^2 q q_0 q_\mu \Theta(p_0 - q_0) \Theta(q_0) \delta(q^2 - m_1^2) \delta((p - q)^2 - m_2^2). \quad (4.95)$$

Percebemos que essa integral é nula para os valores $\mu = 1, 2$, então, $K_{\mu=1,2}(p) = 0$. Não obstante, fazendo a mesma análise de $K(p)$ para $K_0(p)$, mostramos

$$\begin{aligned} K_0(p) &= \frac{\pi \Theta(p_0)}{2|p_0|} \Theta(p_0^2 - (m_1 + m_2)^2) \\ &\times \int_{m_1^2}^{+\infty} E_{\vec{q}} \Theta(p_0 - E_{\vec{q}}) \delta\left(-E_{\vec{q}} + \frac{p_0^2 + (m_1^2 - m_2^2)}{2|p_0|}\right) dE_{\vec{q}} \\ &= \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{p_0^2}\right) \Theta(p_0) \Theta(p_0^2 - (m_1 + m_2)^2) \frac{p_0}{\sqrt{p_0^2}}, \end{aligned} \quad (4.96)$$

logo, fazendo uma transformação de Lorentz

$$K_\mu(p) = \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{p^2}\right) \Theta(p_0) \Theta(p^2 - (m_1 + m_2)^2) \frac{p_\mu}{\sqrt{p^2}}. \quad (4.97)$$

A obtenção de L e L_μ é fazendo a mesma análise de K e K_μ . Portanto:

$$\begin{aligned} L(p) &= \frac{\pi}{2\sqrt{p^2}} \Theta(-p_0) \Theta(p^2 - (m_1 + m_2)^2), \\ L_\mu(p) &= \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{p^2}\right) \Theta(-p_0) \Theta(p^2 - (m_1 + m_2)^2) \frac{p_\mu}{\sqrt{p^2}}. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Substituindo as distribuições (4.94), (4.97) e (4.98) em (4.83) chegamos o nosso primeiro objetivo

$$\begin{aligned} \hat{d}^+(p) &= -g^2(2\pi)^{-\frac{5}{2}} \left[m + \frac{\not{p}}{2} \left(1 + \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{p^2}\right) \right] L(-p_0, \vec{p}), \\ \hat{d}^-(p) &= g^2(2\pi)^{-\frac{5}{2}} \left[m + \frac{\not{p}}{2} \left(1 + \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{p^2}\right) \right] L(p_0, \vec{p}). \end{aligned} \quad (4.99)$$

Fazendo a soma

$$\begin{aligned} \hat{d}(p) &= \hat{d}^-(p) + \hat{d}^+(p) \\ &= -g^2 \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{4} \left[m_1 p^2 + \frac{\not{p}}{2} (p^2 + m_1^2 - m_2^2) \right] \frac{\text{sgn}(p_0)}{p^2 \sqrt{p^2}} \Theta(p^2 - (m_1 + m_2)^2), \end{aligned} \quad (4.100)$$

em que

$$\hat{d}_1(p) = \frac{\text{sgn}(p_0)}{p^2 \sqrt{p^2}} \Theta \left(p^2 - (m_1 + m_2)^2 \right). \quad (4.101)$$

Segundo o apêndice (E.3) a ordem singular é de $w(\hat{d}(p)) = 0$ e $w(\hat{d}_1(p)) = -3$. Continuaremos com o teorema do polinômio para $\hat{d}_1(p)$ para uma singularidade negativa

$$\begin{aligned} \hat{r}_1(p) &= \frac{i}{2\pi} \text{sgn}(p_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{d}_1(tp) dt}{1 - t + i \text{sgn}(p_0) 0^+} \\ &= \frac{i}{2\pi} \overbrace{\text{sgn}^2(p_0)}^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Theta(p^2 t^2 - (m_1 + m_2)^2) dt}{t^3 p^2 \sqrt{p^2} (1 - t + i \text{sgn}(p_0) 0^+)} \\ &= \frac{i}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^0 \frac{\Theta(p^2 t^2 - (m_1 + m_2)^2) dt}{t^3 p^2 \sqrt{p^2} (1 - t + i \text{sgn}(p_0) 0^+)} + \int_0^{+\infty} \frac{\Theta(p^2 t^2 - (m_1 + m_2)^2) dt}{t^3 p^2 \sqrt{p^2} (1 - t + i \text{sgn}(p_0) 0^+)} \right], \end{aligned} \quad (4.102)$$

trocando $t \rightarrow -t$ na primeira integral e fazendo a soma, obtemos

$$\hat{r}_1(p) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{2\Theta(p^2 t^2 - (m_1 + m_2)^2) dt}{t^2 p^2 \sqrt{p^2} (1 - t + i \text{sgn}(p_0) 0^+)}, \quad (4.103)$$

fazendo uma mudança de variável: $s = p^2 t^2 \rightarrow dt = \frac{\sqrt{p^2} ds}{2p^2 \sqrt{s}}$, resulta:

$$\hat{r}_1(p) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\Theta(s - (m_1 + m_2)^2) ds}{s \sqrt{s} (p^2 - s + i \text{sgn} p_0 0^+)}. \quad (4.104)$$

Analisando a função de Heaviside, dizemos que a integral acima tem limite inferior para $s > (m_1 + m_2)^2$. Portanto

$$\hat{r}_1(p) = \frac{i}{2\pi} \int_{(m_1+m_2)^2}^{+\infty} \frac{ds}{s \sqrt{s} (p^2 - s + i \text{sgn} p_0 0^+)}. \quad (4.105)$$

A análise dessa distribuição será com o teorema da função analítica (4.3.1)

- A primeira região é para $p^2 < (m_1 + m_2)^2$, em que não há polo. Portanto:

$$\hat{r}_1(p) = \frac{i}{2\pi} \int_{(m_1+m_2)^2}^{+\infty} \frac{ds}{s\sqrt{s}(p^2-s)} \quad p \in \mathbb{R}^3. \quad (4.106)$$

Fazendo $u = \sqrt{s}$, $2\sqrt{s}du = ds$, resulta:

$$\begin{aligned} \hat{r}_1(p) &= \frac{-i}{2\pi} \int_{m_1+m_2}^{+\infty} du \left(-\frac{1}{p^2\sqrt{p^2}(u+\sqrt{p^2})} + \frac{1}{p^2\sqrt{p^2}(u-\sqrt{p^2})} - \frac{2}{p^2u^2} \right) \\ &= \frac{-i}{2\pi} \left[\frac{1}{p^2\sqrt{p^2}} \ln \left(\frac{u-\sqrt{p^2}}{u+\sqrt{p^2}} \right) + \frac{2}{p^2u} \right] \Big|_{(m_1+m_2)}^{+\infty} \\ &= \frac{i}{2\pi} \left[\frac{1}{p^2\sqrt{p^2}} \log \left(\frac{m_1+m_2-\sqrt{p^2}}{m_1+m_2+\sqrt{p^2}} \right) + \frac{2}{p^2(m_1+m_2)} \right]. \end{aligned} \quad (4.107)$$

- A segunda região é para $p^2 > (m_1 + m_2)^2$ na qual existe um polo

$$\begin{aligned} \hat{r}_1(p) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{2\pi} \left[\frac{1}{(p^2 + i\epsilon p_0)\sqrt{p^2 + i\epsilon p_0}} \log \left(\frac{m_1 + m_2 - \sqrt{p^2 + i\epsilon p_0}}{m_1 + m_2 + \sqrt{p^2 + i\epsilon p_0}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{(p^2 + i\epsilon p_0)(m_1 + m_2)} \right], \end{aligned} \quad (4.108)$$

fazendo a mesma análise do méson (4.67), obtemos

$$\hat{r}_1(p) = \frac{i}{2\pi} \left[\frac{1}{p^2\sqrt{p^2}} \log \left(\frac{-m_1 - m_2 + \sqrt{p^2}}{m_1 + m_2 + \sqrt{p^2}} \right) - \frac{i\pi \text{sgn}(p_0)}{p^2\sqrt{p^2}} + \frac{2}{p^2(m_1 + m_2)} \right], \quad (4.109)$$

em que $|m_1 + m_2 - \sqrt{p^2}| = -m_1 - m_2 + \sqrt{p^2}$.

- A terceira região é para $p^2 < 0$

$$\hat{r}_1(p) = \frac{i}{2\pi} \left[\frac{1}{p^2 i \sqrt{-p^2}} \log \left(\frac{m_1 + m_2 - i\sqrt{-p^2}}{m_1 + m_2 + i\sqrt{-p^2}} \right) + \frac{2}{p^2(m_1 + m_2)} \right], \quad (4.110)$$

fazendo a mesma análise do méson (4.69)

$$\hat{r}_1(p) = \frac{-i}{\pi p^2 \sqrt{-p^2}} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{-p^2}}{m_1 + m_2} \right) + \frac{2i}{\pi p^2(m_1 + m_2)}. \quad (4.111)$$

Logo, utilizando o polinômio de (4.100)

$$\hat{r}(p) = -g^2 \frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{4} \left[m_1 p^2 + \frac{\not{p}}{2} (p^2 + m_1^2 - m_2^2) \right] \hat{r}_1(p), \quad (4.112)$$

e

$$\begin{aligned} \hat{r}'(p) &= \hat{d}^-(p) \\ &= \frac{g^2}{4} (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \left[m_1 p^2 + \frac{\not{p}}{2} (p^2 + m_1^2 - m_2^2) \right] \frac{\Theta(-p_0)}{p^2 \sqrt{p^2}} \Theta(p^2 - (m_1 + m_2)^2). \end{aligned} \quad (4.113)$$

Definimos a auto-energia do núcleon

$$\hat{\Sigma}(p) = i\hat{t}(p) = i(\hat{r}(p) - \hat{r}'(p)). \quad (4.114)$$

Agora, analisamos para as três regiões:

1. Substituindo (4.107) em (4.114)

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}(p) &= \frac{g^2}{4(2\pi)^{5/2}} \left[m_1 p^2 + \frac{\not{p}}{2} (p^2 + m_1^2 - m_2^2) \right] \\ &\quad \times \left[\frac{1}{p^2 \sqrt{p^2}} \log \left(\frac{m_1 + m_2 - \sqrt{p^2}}{m_1 + m_2 + \sqrt{p^2}} \right) + \frac{2}{p^2 (m_1 + m_2)} \right], \end{aligned} \quad (4.115)$$

para $p^2 < (m_1 + m_2)^2$.

2. Substituindo (4.109) em (4.114)

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}(p) &= \frac{g^2}{4(2\pi)^{5/2}} \left[m_1 p^2 + \frac{\not{p}}{2} (p^2 + m_1^2 - m_2^2) \right] \\ &\quad \times \left[\frac{1}{p^2 \sqrt{p^2}} \log \left(\frac{-m_1 - m_2 + \sqrt{p^2}}{m_1 + m_2 + \sqrt{p^2}} \right) + \frac{2}{p^2 (m_1 + m_2)} - \frac{i\pi}{p^2 \sqrt{p^2}} \right], \end{aligned} \quad (4.116)$$

para $p^2 > (m_1 + m_2)^2$.

3. Substituindo (4.111) em (4.114)

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}(p) &= \frac{g^2}{4(2\pi)^{5/2}} \left[m_1 p^2 + \frac{\not{p}}{2} (p^2 + m_1^2 - m_2^2) \right] \\ &\quad \times \left[\frac{-1}{p^2 \sqrt{p^2}} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{-p^2}}{m_1 + m_2} + \frac{2}{p^2 (m_1 + m_2)} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.117)$$

para $p^2 < 0$.

4.5 Propagador completo em 2+1

4.5.1 Propagador completo do méson

A ordem singular da auto-energia do méson é $w = 1$; portanto, considera-se uma solução geral neste caso

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}(p) &= \hat{\Pi}(p) + C_0 + c_\mu p^\mu + C_2 p^2 \\ &= \hat{\Pi}(p) + a + C_2(p^2 - m_2^2).\end{aligned}\tag{4.118}$$

O termo C_0 tem a informação da massa do méson, c_μ é nulo pela transformação de paridade ($\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$). Por outro lado, escrevemos o propagador completo do méson no limite adiabático

$$\begin{aligned}D_T(x_1 - x_2) &= D^F(x_1 - x_2) + \int D^F(x_1 - x'_1) \Pi(x'_1 - x'_2) D^F(x'_2 - x_2) dx'_1 dx'_2 \\ &+ \int D^F(x_1 - x'_1) \Pi(x'_1 - x'_2) D^F(x'_2 - x'_3) \Pi(x'_3 - x'_4) D^F(x'_4 - x_4) dx'_1 dx'_2 dx'_3 dx'_4 + \dots\end{aligned}\tag{4.119}$$

Aplicando a transformada de Fourier em 3 dimensões para o produto de funções $\widehat{A * B} = (2\pi)^{3/2} \hat{A} \hat{B}$, portanto:

$$\begin{aligned}\hat{D}_T &= \hat{D}^F + (2\pi)^3 \hat{D}^F \tilde{\Pi} \hat{D}^F + (2\pi)^6 \hat{D}^F \tilde{\Pi} \hat{D} \tilde{\Pi} \hat{D}^F + \dots \\ &= \hat{D}^F (1 + (2\pi)^3 \tilde{\Pi} \hat{D}_T),\end{aligned}\tag{4.120}$$

é o propagador completo no espaço de momentos e $\hat{D}^F(p) = -(2\pi)^{-3/2} \frac{1}{p^2 - m_2^2 + i0^+}$

é o propagador de Feynman.

A partir de (4.120)

$$\begin{aligned}\hat{D}_T^{-1} &= (\hat{D}^F)^{-1} - (2\pi)^3 \tilde{\Pi} \\ &= -(2\pi)^{3/2} (p^2 - (m_2^2 - (2\pi)^{3/2} \tilde{\Pi}) + i0^+),\end{aligned}\tag{4.121}$$

a inversa de (4.121) é

$$\hat{D}_T(p) = -(2\pi)^{-3/2} \frac{1}{p^2 - (m_2^2 - (2\pi)^{3/2} \hat{\Pi}(p)) + i0^+}.\tag{4.122}$$

Em que (4.122) é o propagador completo em 2+1-dimensões no formalismo da teoria de perturbação causal. Lembremos que m_2 é a massa física do méson na teoria da TPC, para que essa condição seja verdadeira o valor de $\hat{\Pi}(p)$ deve satisfazer alguns condições de normalização. Apresentam-se resenta as condições de normalização para a massa física e a constante de acoplamento.

Normalização da auto-energia do méson

Escreve-se duas condições físicas

- A massa física do méson é representada por m_2 . Isso implica que $\hat{D}_T$ tem um polo em $p^2 = m_2^2$. Portanto:

$$\lim_{p^2 \rightarrow m_2^2} \tilde{\Pi}(p) = 0, \Rightarrow a = - \lim_{p^2 \rightarrow m_2^2} \hat{\Pi}(p). \quad (4.123)$$

- A constante física de acoplamento da interação é g . Isso implica que

$$\lim_{p^2 \rightarrow m_2^2} \frac{d\tilde{\Pi}(p)}{dp^2} = 0, \Rightarrow C_2 = - \lim_{p^2 \rightarrow m_2^2} \frac{d\hat{\Pi}(p)}{dp^2}. \quad (4.124)$$

Os termos de normalização estão fixados. Note-se que no lado esquerdo está sendo utilizada $\tilde{\Pi}$ e no lado direito $\hat{\Pi}$. Os valores das constantes a e C_2 são calculados por meio da avaliação de $\hat{\Pi}$ e sua derivada quando o valor de p^2 é igual a m_2^2

4.5.2 Propagador completo do núcleon

Fazendo a mesma análise do méson para a ordem singular da auto-energia do núcleon é $w = 1$. Considera-se uma solução geral

$$\tilde{\Sigma}(p) = \hat{\Sigma}(p) + a + C_1(\not{p} - m). \quad (4.125)$$

Por outro lado, escrevemos o propagador completo do núcleon no espaço de momento

$$\begin{aligned} \hat{S}_T &= \hat{S}^F + (2\pi)^3 \hat{S}^F \hat{\Sigma} \hat{S}^F + (2\pi)^6 \hat{S}^F \hat{\Sigma} \hat{S}^F \hat{\Sigma} \hat{S}^F + \dots \\ &= \hat{S}^F + (2\pi)^3 \hat{S}^F \hat{\Sigma} \hat{S}_T \end{aligned} \quad (4.126)$$

em que $\hat{S}_T$ é o propagador completo e $\hat{S}^F(p) = (2\pi)^{-3/2} \frac{1}{\not{p} - m_1 + i0^+}$ é o propagador de Feynman do núcleon.

A partir (4.126), deduzimos

$$\hat{S}_T = (2\pi)^{-3/2} \frac{1}{\not{p} - (m_1 + (2\pi)^{3/2} \hat{\Sigma}(p)) + i0^+}, \quad (4.127)$$

que é o propagador completo em 2+1 dimensões, no formalismo da teoria de perturbação causal. Aqui o valor de $\hat{\Sigma}(p)$ aparece como a massa e tem o nome de auto-energia do núcleon. O valor de m_1 é a massa física do núcleon desde o começo da teoria. Para que essa condição seja valida o valor de $\hat{\Sigma}(p)$ deve satisfazer alguns condições de normalização. Apresentam-se as condições de normalização para a massa física e a constante de acoplamento.

Normalização da auto-energia do núcleon

- A massa física do núcleon é representada por m_1 . Isso implica

$$\lim_{\not{p} \rightarrow m_1} \tilde{\Sigma}(p) = 0, \Rightarrow a = - \lim_{\not{p} \rightarrow m_1} \hat{\Sigma}(p). \quad (4.128)$$

- A constante de acoplamento da interação é g . Isso implica

$$\lim_{\not{p} \rightarrow m_1} \frac{d\tilde{\Sigma}(p)}{d\not{p}} = 0, \Rightarrow C_1 = - \lim_{\not{p} \rightarrow m_1} \frac{d\hat{\Sigma}(p)}{d\not{p}}. \quad (4.129)$$

Os termos de normalização estão fixados. Note-se que no lado esquerdo está sendo utilizada $\tilde{\Sigma}$ e no lado direito $\hat{\Sigma}$. Os valores das constantes a e C_1 são calculados por meio da avaliação de $\hat{\Sigma}$ e sua derivada quando o valor de $\not{p}$ é igual a m_1 .

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas

Nesta dissertação, investigamos em detalhes as interações entre núcleon-méson através do modelo de Yukawa no formalismo da teoria de perturbação causal em $2+1$ dimensões. Realizaremos uma síntese dos capítulos anteriores e comentaremos os resultados.

No capítulo dois, começamos estudando o campo escalar, utilizamos os dados de Cauchy e após vários cálculos obtivemos a distribuição de Jordan-Pauli. Continuamos com o estudo da equação de Dirac, cujo objetivo principal foi mostrar as três matrizes γ de ordem 4×4 , escolhidas para ter uma teoria invariante frente a transformações de paridade. Adicionalmente, realizamos a quantização dos campos escalar e de Dirac no espaço de Fock, na qual o objetivo foi calcular a relação de (anti-) comutação (no caso de Dirac e escalar) dos operadores de campo com frequência positiva e negativa e relacioná-la com as partes de frequência positiva e negativa da distribuição de Jordan-Pauli.

No capítulo três, estudamos detalhadamente a teoria de perturbação causal (TPC) em $2+1$ dimensões, que se fundamenta na teoria de distribuições. Começamos com a construção da matriz S ou operador de espalhamento, que representa o mapeamento entre os estados assintóticos das partículas entrantes e saíntes. Na construção da matriz S , introduzimos a função de teste que atua como uma função reguladora das interações, decaindo rapidamente nos infinitos. Analisamos o operador de espalhamento por meio dos axiomas de unitariedade, invariância translacional, invariância de Lorentz e causalidade. Devido a essa análise, mostramos que surgem divergências ultravioletas no uso dos produtos cronológicos quando definidos por multiplicação pela função de Heaviside. Em seu lugar, seguindo a Epstein e Glaser, fazemos uso da distribuição causal, que é uma distribuição temperada e pode ser corretamente dividida em sua parte retardada e avançada e pertence ao espaço de Schwartz. Adicionalmente, apresentamos o teorema do polinômio que é necessário para obter a distribuição retardada numérica

a partir da distribuição causal numérica de qualquer ordem.

No capítulo quatro, é apresentado o modelo de Yukawa para a interação núcleon-méson. Começamos com o estudo do espalhamento núcleon-núcleon por meio da distribuição de transição de dois pontos $T_2(x_1, x_2)$. Calculamos a seção de choque no centro de massa no caso relativista e não relativista em (2+1)-dimensões.

A segunda seção de estudo foram as correções radiativas do méson e núcleon; aqui utilizamos a distribuição causal de dois pontos $D_2(x_1, x_2)$. Começamos com a auto-energia do méson, a qual é finita devida à TPC. Essa auto-energia é analisada para três regiões por meio do teorema da função analítica. Na primeira região ($0 < p^2 < m_1^2$), observamos que não existe polo; na segunda região ($p^2 > 4m_1^2$), sim. A terceira região é para o momento tipo espaço ($p^2 < 0$). A auto-energia do núcleon também é analisada para três regiões: $p^2 < (m_1 + m_2)^2$, $p^2 > (m_1 + m_2)^2$ e $p^2 < 0$, em que m_1 e m_2 são as massas do núcleon e méson, respectivamente. Na primeira região não há polo; na segunda região, sim. A terceira região foi analisada por meio da extensão analítica, pois o o quadrado do momento é menor que zero.

Na última seção de estudo foram os propagadores completos do méson e núcleon; em ambos se substituem as auto-energias no cálculo do propagador completo. Finalmente, é necessário mencionar que a massa e a constante de acoplamento da interação física desde o início, o que impõe mais duas condições de normalização. Essas condições fixam por completo as auto-energias do méson e do núcleon, as quais foram descritas no final do capítulo quatro.

Perspectivas. O modelo de Yukawa em relação à TPC ainda requer muitas seções para analisar. Mencionamos as futuras perspectivas sobre o modelo:

- Estudar o espalhamento núcleon-méson em 2+1 dimensões. Fazemos ênfase em calcular a seção de choque no centro de massa e no limite não relativista.
- Estudar a estabilidade do vácuo e setor de uma partícula; aqui devemos utilizar o quinto axioma e suas propriedades da TPC.
- Normalizabilidade do modelo de Yukawa, ou seja, a análise dos termos de normalização que podem surgir nas distribuições de transição em qualquer ordem e a possibilidade de fixá-los por um número finito de condições físicas.

- Considerar as matrizes gamma de ordem 2×2 para a interação de Yukawa em $2+1$ dimensões. Analisar os problemas envolvidos com essa nova representação de gamma e realizar todos os processos de interação nos capítulos anteriores.

Apêndice A

Campo escalar e de Dirac

A.1 Invariância de Lorentz

A transformação de Lorentz é definida:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (\text{A.1})$$

A letra grega Λ representa a transformação de Lorentz (rotações + boost).

Escrevem-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \phi'(x') &= \phi(x), \\ \partial'^{\mu} &= \Lambda^{\mu}_{\nu} \partial^{\nu}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

logo

$$\begin{aligned} \partial'^2 &= \eta_{\mu\nu} \partial'^{\nu} \partial'^{\mu} \\ &= \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} \partial^{\rho} \partial^{\sigma} \\ &= \eta_{\rho\sigma} \partial^{\rho} \partial^{\sigma} \\ &= \partial^2, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

com (A.2) e (A.3), escrevemos:

$$(\partial'^2 + m^2)\phi'(x') = (\partial^2 + m^2)\phi(x). \quad (\text{A.4})$$

Então, a equação de Klein- Gordon é invariante de Lorentz.

A.2 Dimensão das matrizes

Dimensionalidade de α e β . Temos

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij},$$

logo

$$\alpha_1 \alpha_2 = -\mathbf{I} \alpha_2 \alpha_1,$$

aplicando a determinante

$$\begin{aligned} \det(\alpha_1 \alpha_2) &= \det(-\mathbf{I}) \det(\alpha_2 \alpha_1) \\ \det(\alpha_1) \det(\alpha_2) &= \det(-\mathbf{I}) \det(\alpha_2) \det(\alpha_1), \end{aligned}$$

logo

$$\det(-\mathbf{I}_{n \times n}) = 1. \quad (\text{A.5})$$

A matriz é ordem $n \times n$. Portanto, $(-1)^n = 1$, com n par.
 $n=2$: São matrizes de Pauli, $n=4$: São as matrizes gamma.

A.3 Soluções da equação de Dirac

Escrevemos a solução em ondas planas para energia positiva

$$\psi(\vec{x}, t) = u(E, \vec{p}) e^{-ipx}, \quad (\text{A.6})$$

Em que $u(E, \vec{p})$ é uma função de 4×1 componentes. A equação (A.6) é substituída na equação de Dirac, portanto resulta:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p^\mu) = 0, \quad (\text{A.7})$$

(A.7) é a equação de Dirac no espaço de momentos.

Será analisado a equação (A.7) com a seguinte representação $u \equiv \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$.

Notar que u_A e u_B são funções de 2x1 componentes. Portanto:

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu p_\mu - m)u(p^\mu) &= (\gamma^0 p_0 - \gamma^i p^i - m)u(p^\mu) \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_3 p^0 - i\sigma_1 p^1 - i\sigma_2 p^2 - m & 0 \\ 0 & -\sigma_3 p^0 + i\sigma_1 p^1 + i\sigma_2 p^2 - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Substituindo as matrizes de Pauli acima e tendo em conta que $u_{(A,B)} = \begin{pmatrix} u_{(A,B)_1} \\ u_{(A,B)_2} \end{pmatrix}$, resulta:

$$\begin{aligned} u_1(\vec{p}) &= \begin{pmatrix} 1 \\ (p^2 - ip^1)/(E_{\vec{p}} + m) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2(\vec{p}) = \begin{pmatrix} (p^2 + ip^1)/(E_{\vec{p}} - m) \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ u_3(\vec{p}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ (p^2 - ip^1)/(E_{\vec{p}} - m) \end{pmatrix}, \quad u_4(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (p^2 + ip^1)/(E_{\vec{p}} + m) \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

O segundo caso é para uma solução em ondas planas para energia negativa $\psi(\vec{x}, t) = u(E, \vec{p})e^{+ipx}$. A análise e resultado serão similares para obter as soluções. Portanto:

$$u(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} 1 \\ (p^2 - ip^1)/(E_{\vec{p}} + m) \\ (p^2 + ip^1)/(E_{\vec{p}} + m) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v(\vec{p}) = M \begin{pmatrix} (p^2 + ip^1)/(E_{\vec{p}} - m) \\ 1 \\ 1 \\ (p^2 - ip^1)/(E_{\vec{p}} - m) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Os coeficientes N e M são fatores que devem ser normalizados. O espinor $u(\vec{p})$ é para energias positivas e $v(\vec{p})$ para energias negativas.

Menciona-se a seguinte propriedade por completitude

$$u^\dagger(\vec{p})v(-\vec{p}) = v^\dagger(-\vec{p})u(\vec{p}) = 0. \quad (\text{A.11})$$

Apêndice B

Teoria de distribuições

O espaço das funções complexas

Definição: O espaço $\mathcal{D}$ é o espaço das funções complexas em $\mathbb{R}^n$ que são infinitamente diferenciáveis e tem suportes limitados.

As funções $\phi(x)$ ¹ $\in \mathcal{D}$ são auxiliares no cálculo de distribuições.

B.1 Distribuições

Definição: Uma função contínua linear no espaço $\mathcal{D}$ é dita de distribuição T . A saber, para cada $\phi(x) \in \mathcal{D}$ vai corresponder um $T(\phi)$ (número complexo). Portanto, como $T(\phi)$ é linear

$$T(\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2) = \lambda_1T(\phi_1) + \lambda_2T(\phi_2), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (\text{B.1})$$

ou

$$\begin{aligned} \langle T_1 + T_2, \phi \rangle &= \langle T_1, \phi \rangle + \langle T_2, \phi \rangle, \\ \langle \lambda T, \phi \rangle &= \lambda \langle T, \phi \rangle, \end{aligned} \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (\text{B.2})$$

A fim de compreender, escrevemos alguns exemplos:

1. Exemplo 1: O delta de Dirac no ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é uma função linear e para cada $\phi \in \mathcal{D}$:

$$\langle \delta_{(a)}, \phi \rangle = \phi(a). \quad (\text{B.3})$$

2. Exemplo 2: Para um caso particular de delta de Dirac, que em $a = 0$

$$\langle \delta_{(0)}, \phi \rangle = \phi(0). \quad (\text{B.4})$$

¹ ϕ é uma função em $\mathbb{R}^n$ dita de função de teste.

Definição: Para toda função localmente integrável, isto é, $\int_I |\phi(x)| dx$ existe em uma região limitada, chamada I. Então, definimos:

$$\langle T, \phi \rangle = \int T(x) \phi(x) d^n x. \quad (\text{B.5})$$

A integral acima deve ser convergente devido ao fato de que a função de teste $\phi(x)$ tem suporte limitado em I. Fora desta região I é nula.

Diferenciação da distribuição

Seja uma distribuição T tipo C^∞ e escolhendo a ordem n da derivada. Temos

$$\langle D^n T, \phi \rangle = (-1)^{|n|} \langle T, D^n \phi \rangle \quad (\text{B.6})$$

Utilizando os multi-índices de Schwartz

$$D^n = \prod_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{n_i}, \quad |n| = \sum_i n_i. \quad (\text{B.7})$$

Multiplicação de distribuições

O produto de duas distribuições quaisquer não estão definida porque o produto dessas distribuições não é localmente integrável. No entanto, define-se o produto com uma função α tipo C^∞ e uma função de teste.

$$\begin{aligned} \langle \alpha T, \phi \rangle &= \langle T, \alpha \phi \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x) T(x) \phi(x) d^n x, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

em que $\phi \in \mathcal{D}$ e $\alpha \phi \in \mathcal{D}$.

B.2 Transformada de Fourier de distribuições

Espaço de Schwartz $\mathcal{S}$

Para todo $\phi \in \mathcal{S}$ tipo C^∞ . Essa função decai rapidamente no infinito positivo e negativo. Portanto:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^l \partial_n \phi(x)| = 0, \quad (\text{B.9})$$

em que $l \geq 0$ e $n \geq 0$. Alguns exemplos são as funções e^{-x^6} e $e^{-x^8} \in \mathcal{S}$.

Distribuições temperadas: Espaço dual de Schwartz $\mathcal{S}'$

Uma distribuição T é considerada temperada se, para qualquer sequência de funções ϕ_j em $\mathcal{D}$ converge a zero e suas derivadas de qualquer ordem.

Seja T uma distribuição temperada, logo a transformada de Fourier de T ($\hat{T}$) é uma distribuição temperada.

Por outro lado, seja uma função complexa ϕ , defina-se a transformada de Fourier e sua inversa

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(p) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n x \phi(x) e^{ipx}, \\ \check{\phi}(p) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n x \phi(x) e^{-ipx}, \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

e

$$\langle \hat{T}, \phi \rangle = \langle T, \hat{\phi} \rangle, \quad (\text{B.11})$$

o teorema de **Plancherel-Parseval**

$$\langle T, \phi \rangle = \langle \hat{T}, \hat{\phi} \rangle = \langle \check{T}, \check{\phi} \rangle, \quad (\text{B.12})$$

e o teorema da convolução para a transformada de Fourier

$$\widehat{S * T} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n p' S(p) T(p - p'). \quad (\text{B.13})$$

Apêndice C

Solução geral retardada numérica para w não negativa

Temos a solução retardada numérica (3.103)

$$\hat{r}(p) = (2\pi)^{-m/2} \int d^m k \hat{\chi}(k) \left[\hat{d}(p-k) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{|a|=0}^{[w]} \frac{p^a}{a!} \int d^m p' D_{p'}^a \hat{d}(p-k) \check{w}(p') \right], \quad (C.1)$$

e aplicando D^b

$$\begin{aligned} D^b \hat{r}(q) &= (2\pi)^{-m/2} \int d^m k \hat{\chi}(k) \left[D^b \hat{d}(q-k) - (2\pi)^{m/2} \sum_{b \leq a} \underbrace{\frac{D^b q^a}{a!}}_{\frac{a! q^{a-b}}{(a-b)! a!}} \int d^m p' D^a(p'-k) \check{w}(p) \right] \\ &= (2\pi)^{-m/2} \int d^m k \hat{\chi}(k) \left[D^b \hat{d}(q-k) - (2\pi)^{m/2} \sum_{b \leq a} \frac{q^{a-b}}{(a-b)!} \int d^m p' D^a(p'-k) \check{w}(p) \right]. \end{aligned} \quad (C.2)$$

Substituindo (C.1) e (C.2) em (3.97)

$$\begin{aligned} \hat{r}_q(p) &= \hat{r}(p) - (2\pi)^{-m/2} \int d^m k \hat{\chi}(k) \left[\sum_{|b|=0}^{[w]} \frac{(p-q)^b}{b!} D^b \hat{d}(q-k) - \right. \\ &\quad \left. (2\pi)^{-m/2} \sum_{|b|=0}^{[w]} \underbrace{\sum_{b \leq a} \frac{(p-q)^b}{b!} \frac{q^{a-b}}{(a-b)!}}_{\frac{p^a}{a!}} \int d^m p' D^a(p'-k) \check{w}(p) \right]. \end{aligned} \quad (C.3)$$

Finalmente, obtemos:

$$\hat{r}_q(p) = (2\pi)^{-m/2} \int dk \hat{\chi}(k) \left[\hat{d}(p-k) - \sum_{|b|=0}^{[w]} \frac{(p-q)^b}{b!} D^b \hat{d}(p-k) \right]. \quad (\text{C.4})$$

Apêndice D

Teorema de Gian-Carlo Wick

O teorema de G. C. Wick (ordenamento normal) atua sobre o produto de campos com spin arbitrário (escalar, fermiônicos), sua função principal é reorganizar os operadores de aniquilação no lado direito dos operadores de criação. Nosso objetivo é calcular $:AB::CD:$, antes de realizar-lo, devemos estabelecer algumas propriedades.

Escrevemos dois campos com o spin arbitrário (A, B) em suas componentes de aniquilação (A^+, B^+) e criação (A^-, B^-).

$$\begin{aligned} A(x) &= A^+(x) + A^-(x), \\ B(x) &= B^+(x) + B^-(x), \end{aligned} \tag{D.1}$$

logo, o ordenamento normal do produto de dois campos é:

$$:A(x)B(y): = A(x)B(y) - \overline{A(x)B(y)}, \tag{D.2}$$

em que a contração é definida:

$$\begin{aligned} \overline{A(x)B(y)} &\equiv [A^-(x), B^+(y)]_{\mp}; \\ \mp : - &\text{ é para o campo escalar; } +, \text{ campo fermiônico.} \end{aligned} \tag{D.3}$$

Utilizando (D.2) concluímos:

$$:AB::CD: = ABCD - \overline{CD}:AB: - \overline{AB}:CD: - \overline{AB}\overline{CD}. \tag{D.4}$$

Esse resultado será usado mais adiante para o campo fermiônico. Agora, escreve-se a generalização do teorema de G. C. Wick para um produto de n operadores de campo.

D.1 Generalização do teorema de G. C. Wick

O produto de n operadores de campo em relação ao ordenamento normal e as contrações é:

$$ABC \cdots LMN = : ABC \cdots LMN : + : \text{todas as contrações possíveis} : . \quad (D.5)$$

Define-se o ordenamento normal de um produto de n campos

$$: ABC \cdots LMN : = (\pm)^q : ALC \cdots NBM : . \quad (D.6)$$

Em que $+$ é para o campo escalar; $-$, campo fermiônico. A potência q representa o número de permutações que leva-nos de $ABC \cdots LMN$ até $: ALC \cdots NBM :$.

Define-se o ordenamento normal de um produto de n campos em que há contrações

$$: A \cdots \overline{CD \cdots IJ} \cdots N : = (\mp)^q \overline{DJ} : A \cdots CI \cdots N : . \quad (D.7)$$

Aqui, q é o número de permutações que deve-se realizar para levar os campos DJ até à frente de todos os campos.

Com todas essas propriedades, chegamos o nosso objetivo. Substituindo (D.5), (D.6), (D.7) em (D.4), mas apenas para quatro o **campos fermiônicos**, obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} : AB : : CD : &= : ABCD : + \overline{AB} : \overline{CD} : - \overline{AC} : BD : + \overline{AD} : BC : \\ &+ \overline{BC} : AD : - \overline{BD} : AC : + \overline{CD} : AB : + \overline{ABCD} \\ &+ \overline{ACBD} + \overline{ADBC} - \overline{CD} : \overline{AB} : - \overline{AB} : \overline{CD} : - \overline{ABCD} \quad (D.8) \\ &= : ABCD : - \overline{AC} : BD : + \overline{AD} : BC : \\ &+ \overline{BC} : AD : - \overline{BD} : AC : - \overline{ACBD} + \overline{ADBC}. \end{aligned}$$

Essa relação é usada no cálculo da distribuição da segunda ordem.

Nota-se que, em (D.8) não temos uma contração no mesmo ponto.

Apêndice E

Méson e Núcleon

E.1 Traço para o Méson

Definem-se as matrizes gamma em 2+1

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}, \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{pmatrix}, \gamma^2 = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{E.1})$$

em que as matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.2})$$

O objetivo a calcular é:

$$Q = \text{Tr}\{(\not{p} + m_1)(\not{p} - \not{q} + m_1)\}. \quad (\text{E.3})$$

Começamos fazendo o produto dentro do traço

$$Q = \text{Tr}\{\not{p}\not{p} - \not{p}\not{q} + 2m_1\not{p} - m_1\not{q} + m_1^2\}. \quad (\text{E.4})$$

em que $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{I}_{4 \times 4}$.

Sabemos que

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\not{p}\} &= \text{Tr}\{\gamma^\mu p_\mu\} \\ &= p_\mu \underbrace{\text{Tr}\{\gamma^\mu\}}_0 \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}\{\not{p}\not{p}\} &= p_\mu p_\nu \text{Tr}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \\
 &= p_\mu p_\nu \text{Tr}\left\{\frac{[\gamma^\mu, \gamma^\nu] + \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}}{2}\right\} \\
 &= p_\mu p_\nu \eta^{\mu\nu} \text{Tr}\{\mathbb{I}_{4 \times 4}\} \\
 &= 4p^2,
 \end{aligned} \tag{E.6}$$

então, com a mesma análise

$$\text{Tr}\{\not{p}\not{q}\} = 4pq. \tag{E.7}$$

Substituindo (E.5), (E.6) e (E.7) em (E.4)

$$Q = 4[p^2 - pq + m^2]. \tag{E.8}$$

E.2 Ordem singular da auto-energia do méson

$$\hat{d}(p) = \frac{g^2}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}}} [4m_1^2 - p^2] \underbrace{\frac{\text{sgn}(p_0)\Theta(p^2 - 4m^2)}{\sqrt{p^2}}}_{\hat{d}_1(p)}. \tag{E.9}$$

Começaremos calculando a ordem singular de $\hat{d}(p)$, utilizando a definição de limite 2 (3.64)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \rho(\alpha) \hat{d}\left(\frac{\rho}{\delta}\right) \equiv \hat{d}_0 \neq 0. \tag{E.10}$$

A partir de (E.9)

$$\begin{aligned}
 \hat{d}\left(\frac{p}{\delta}\right) &= \frac{g^2}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{[4m^2 - \frac{p^2}{\delta^2}]}{\sqrt{p^2/\alpha}} \text{sgn}(p_0/\delta) \Theta(p^2/\delta^2 - 4m^2) \\
 &= \alpha^{-1} \frac{g^2}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{[4m^2\delta^2 - p^2]}{\sqrt{p^2}} \text{sgn}(p_0) \Theta(p^2 - 4m^2),
 \end{aligned} \tag{E.11}$$

O $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \rho(\delta) \hat{d}\left(\frac{p}{\delta}\right)$ existe, não nulo e finito para $\rho(\delta) = \delta^1$. Portanto

$$\begin{aligned}
 \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \rho(\delta) \hat{d}\left(\frac{p}{\delta}\right) &= - \underbrace{\frac{g^2}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{p^2}{\sqrt{p^2}} \text{sgn}(p_0) \Theta(p^2 - 4m^2)}_{\hat{d}_0} \\
 &= \hat{d}_0.
 \end{aligned} \tag{E.12}$$

Concluimos que a $w(\hat{d}(p)) = 1$.

Agora, a análise para a ordem singular de $\hat{d}_1(p)$ é similar

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \rho(\alpha) \hat{d}_1\left(\frac{p}{\alpha}\right) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \underbrace{\rho(\alpha)}_{\alpha^{-1}} \frac{\alpha}{\sqrt{p^2}} \text{sgn}(p_0) \Theta\left(p^2 - 4m^2\right). \quad (\text{E.13})$$

Concluimos que a $w(\hat{d}_1(p)) = -1$.

E.3 Ordem singular da auto-energia do núcleon

$$\hat{d}(p) = -\frac{g^2}{4(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left[m_1 p^2 + \frac{p}{2} (p^2 + m_1^2 - m_2^2) \right] \underbrace{\frac{\text{sgn}(p_0)}{p^2 \sqrt{p^2}} \Theta\left(p^2 - (m_1 + m_2)^2\right)}_{\hat{d}_1(p)}. \quad (\text{E.14})$$

A partir (E.14)

$$\hat{d}\left(\frac{p}{\delta}\right) = -\frac{g^2}{4(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left[m_1 p^2 \delta + \frac{p}{2} (p^2 + m_1^2 \delta^2 - m_2^2 \delta^2) \right] \frac{\text{sgn}(p_0)}{p^2 \sqrt{p^2}} \Theta\left(p^2 - (m_1 + m_2)^2\right), \quad (\text{E.15})$$

O $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \rho(\delta) \hat{d}\left(\frac{p}{\delta}\right)$ existe, não nulo e finito para $\rho(\delta) = \delta^0$. Portanto:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \rho(\delta) \hat{d}\left(\frac{p}{\delta}\right) &= -\frac{g^2}{4(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \underbrace{\left[\frac{p}{2} (p^2) \right] \frac{\text{sgn}(p_0)}{p^2 \sqrt{p^2}} \Theta\left(p^2 - (m_1 + m_2)^2\right)}_{\hat{d}_0} \\ &= \hat{d}_0. \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

Concluimos que a ordem singular de $\hat{d}(p)$ é 0.

Fazendo a mesma análise para $\hat{d}_1(p)$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \rho(\delta) \hat{d}_1\left(\frac{p}{\delta}\right) = \rho(\delta) \delta^{+3} \frac{\text{sgn}(p_0)}{p^2 \sqrt{p^2}} \Theta\left(p^2 - (m_1 + m_2)^2\right). \quad (\text{E.17})$$

Concluimos que a ordem singular de $\hat{d}_1(p)$ é -3.

Referências

- [1] M. Born y P. Jordan. *Zur Quantenmechanik*. *Z. Phys.* 34: 858-888 (1925).
- [2] P. Jordan and W. Pauli. *Zur Quantenelektrodynamik ladungsfreier Felder*. *Z. Phys.* 47: 151-173 (1928).
- [3] J. Lacki, H. Ruegg y G.Wanders (Eds.). E.C.G. Stueckelberg, *An Unconventional Figure of Twentieth Century Physics. Selected Scientific Papers with Commentaries*. Birkhauser (2009).
- [4] Bogoliubov, N. N., Shirkov, D. V., and Chomet, S. (1959). *Introduction to the theory of quantized fields* (Vol. 59). New York: Interscience.
- [5] Epstein, H., and Glaser, V. (1973). *The role of locality in perturbation theory*. In *Annales de l'institut Henri Poincaré. Section A, Physique Théorique* (Vol. 19, No. 3, pp. 211-295).
- [6] Scharf, G. (1995). *Finite Quantum Electrodynamics: The Causal Approach* (2nd ed.). Springer-Verlag.
- [7] Scharf, G. (2001). *Quantum gauge theories: A true ghost story* (p. 264).
- [8] Dütsch, M., and Schaf, G. (1999). *Perturbative gauge invariance: the electroweak theory*. *Annalen der Physik*, 511(5), 359-387.
- [9] Manzoni, L. A., Pimentel, B. M., and Tomazelli, J. L. (1999). *Causal theory for the gauged Thirring model*. *The European Physical Journal C-Particles and Fields*, 8, 353-361.
- [10] Manzoni, L. A., Pimentel, B. M., and Tomazelli, J. L. (2000). *Radiative corrections for the gauged Thirring model in causal perturbation theory*. *The European Physical Journal C-Particles and Fields*, 12(4), 701-705.
- [11] Lunardi, J. T., Pimentel, B. M., Valverde, J. S., and Manzoni, L. A. (2002). *Duffin–Kemmer–Petiau theory in the causal approach*. *International Journal of Modern Physics A*, 17(02), 205-227.

- [12] Bufalo, R., Pimentel, B. M., and Soto, D. E. (2014). *Causal approach for the electron-positron scattering in generalized quantum electrodynamics*. Physical Review D, 90(8), 085012.
- [13] Bufalo, R., Pimentel, B. M., and Soto, D. E. (2017). *Normalizability analysis of the generalized quantum electrodynamics from the causal point of view*. International Journal of Modern Physics A, 32(27), 1750165.
- [14] Beltrán, J., Pimentel, B. M., and Soto, D. E. (2020). *The causal approach proof for the equivalence of $SDKP_4$ and $SQED_4$ at tree-level*. International Journal of Modern Physics A, 35(09), 2050042.
- [15] Acevedo, O. A., and Pimentel, B. M. (2022). *Null-plane causal perturbation theory*. The European Physical Journal Plus, 137(2), 1-44.
- [16] Acevedo, O. A., and Pimentel, B. M. (2021). *Radiative corrections in the Yukawa model within the null-plane causal perturbation theory framework*. Physical Review D, 103(7), 076022.
- [17] Acevedo, O. A., and Pimentel, B. M. (2022). *Quantum electrodynamics in the null-plane causal perturbation theory*. Physical Review D, 106(1), 016014.
- [18] Acevedo, O. A., and Pimentel, B. M. (2022). *Quantum electrodynamics in the null-plane causal perturbation theory. II*. Physical Review D, 106(9), 096024.
- [19] Dirac, P. A. M. (1928). *The quantum theory of the electron*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 117(778), 610-624.
- [20] Dirac, P. A. M. (1981). *The principles of quantum mechanics* (No. 27). Oxford University press.
- [21] N.N. Bogoliubov and D. Shirkov. *Introduction to the theory of Quantized Fields*. 3 ed., John Wiley and Sons - Interscience Publishers (1979).
- [22] Schwartz, L. (2008). *Mathematics for the physical sciences*. Dover Publications.
- [23] Messiah, A. (2014). *Quantum mechanics*. Dover Corporation.
- [24] Braga, C. L. R. (2006). *Notas de Física Matemática: Equações diferenciais, funções de Green e Distribuições*. Instituto da Física da USP, Departamento de Física Matemática.

- [25] Aste, A. (2008). *Finite field theories and causality*. PoS, LC2008(1), 001.
- [26] V.S. Vladimirov, Y.N. Drozzinov y B.I. Zavialov. *Tauberian Theorems for Generalized Functions*. Kluwer Acad. Publ. (1988)
- [27] Franco, D. H. T. (2022). *Métodos Matemáticos Avançados em Física: Elementos de Análise Funcional and Aplicações na Teoria Quântica*. Departamento de Física , Universidade Federal de Viçosa.
- [28] Acevedo, O. A., Beltrán, J., Pimentel, B. M., and Soto, D. E. (2021). *Causal perturbation theory approach to Yukawa's model*. The European Physical Journal Plus, 136 (9), 1-66.
- [29] Yukawa, H. (1935). *On the interaction of elementary particles*. I. Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series, 17, 48-57.
- [30] Kemmer, N. (1938, July). *The charge-dependence of nuclear forces*. In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society (Vol. 34, No. 3, pp. 354-364). Cambridge University Press.
- [31] Lattes, C. M., Muirhead, H., Occhialini, G. P., and Powell, C. F. (1947). *Processes involving charged mesons*. Nature, 159(4047), 694-697.
- [32] Chew, G. F., and Mandelstam, S. (1960). *Theory of the low-energy pion-pion interaction*. Physical Review, 119(1), 467.
- [33] Wick, G. C. (1950). *The evaluation of the collision matrix*. Physical Review, 80(2), 268.
- [34] V.S. Vladimirov. *Methods of the Theory of Functions of Many Complex Variables*. Dover (2007).
- [35] Byron, F. W., and Fuller, R. W. (2012). *Mathematics of Classical and Quantum Physics*. Courier Dover Corporation.