



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS



Trabalho de Conclusão de Curso

Curso de Graduação em Física

CONVERSOR DE LUZ COERENTE EM LUZ COMPRIMIDA

Aline Yoshimi Oi

Prof. Dr. Ricardo Paupitz Barbosa Dos Santos

Rio Claro (SP)

2024

O39s

Oi, Aline Yoshimi

Sistema conversor de luz coerente em luz comprimida / Aline Yoshimi Oi.

-- , 2024

46 p. : il.

Trabalho de conclusão de curso (-) - Universidade Estadual Paulista
(UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro,

Orientador: Ricardo Paupitz Barbosa dos Santos

Coorientador: Daniel Zini Rossatto

1. Óptica Quântica. 2. Cavidades ópticas cruzadas. 3. Hamiltoniano de
Jaynes-Cummings. 4. Hamiltoniano de Jaynes-Cummings de dois fótons. 5.
Estado comprimido. I. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

ALINE YOSHIMI OI

CONVERSOR DE LUZ COERENTE EM LUZ COMPRIMIDA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, para obtenção do grau de Bacharel em Física.

Rio Claro (SP)

2024

ALINE YOSHIMI OI

CONVERSOR DE LUZ COERENTE EM LUZ COMPRIMIDA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, para obtenção do grau de Bacharel em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Ricardo Paupitz Barbosa dos Santos

Primeiro Examinador: Daniel Zini Rossatto

Segundo Examinador: Makoto Yoshida

Rio Claro, 21 de novembro de 2024.

Assinatura da aluna

Assinatura do orientador

Aos meus pais, que correram no sol para que eu pudesse andar na sombra, obrigada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à toda minha família, em especial meus pais Hiroyuki e Hitomi, pelo apoio e incentivo desde sempre; obrigada pela oportunidade de ir atrás dos meus sonhos, eu jamais teria chegado até aqui sem vocês. Também expresso a minha gratidão aos meus irmãos Tomi e Dé que cresceram ao meu lado e contribuíram para criar meu caráter.

Ao meu namorado Breno pela compreensão e incentivo, obrigada por me tranquilizar nos momentos ansiosos e sempre acreditar na minha capacidade.

Aos meus amigos, com quem tive a honra de experienciar a magia de uma amizade leal, que me inspira e traz à tona minha melhor versão. Em especial, Ana Júlia, Ana Luiza, André, Isadora, Pedro, Rafaela e Vitor. Obrigada por todas as aventuras e por fazerem esta jornada valer a pena.

Aos meus orientadores Dr. Ricardo Paupitz Barbosa Santos e Dr. Daniel Zini Rossatto, por me direcionar com sabedoria e humanidade. Processo 2023/09173-7, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP)

RESUMO

As fontes de luz quântica desempenham um papel fundamental em diversas áreas de tecnologias quânticas. Entretanto, a geração eficiente de estados multifotônicos ainda apresenta obstáculos a serem superados; em especial, a produção de estados bifotônicos tais como laser/maser de dois fótons e fontes de luz comprimida têm despertado o interesse devido suas aplicações em protocolos de informação quântica, litografia e metrologia quântica. Este trabalho investiga de maneira teórica a conversão de luz coerente em luz comprimida, bem como a conversão de um pulso de um único fóton em um pulso de dois fótons. Para tais finalidades, implementou-se deterministicamente um processo de conversão paramétrica descendente degenerada em um sistema de cavidades ópticas cruzadas acopladas ressonantemente a um átomo de dois níveis. Neste sistema, uma das cavidades se acopla ao átomo através da interação de Jaynes-Cummings convencional, enquanto a outra, mediante a interação de Jaynes-Cummings de dois fótons. Para analisar a conversão do pulso que incide sobre o sistema, utilizou-se a teoria de *input-output* em conjunto com a equação de Schrödinger (solução exata e numérica) e a equação de Heisenberg-Langevin (solução aproximada e analítica).

Palavras-chave: cavidades ópticas cruzadas; hamiltoniano de Jaynes-Cummings; estado comprimido.

ABSTRACT

Quantum light sources play an essential role in quantum technology field. However, the efficient generation of multi-photonic states still presents obstacles to be overcome; in special, the generation of biphotonic states such as laser/maser of two photons and squeezed light sources have aroused interest due to its application in quantum information protocols, quantum lithography and metrology. This work aims to theoretically investigate the conversion of coherent light into squeezed one as well as the conversion of a single-photon one into a two photon pulse. For such purposes, a degenerate parametric down conversion process was implemented in a cross cavity system coupled resonantly with a two level atom. In this system, one of the cavities is coupled to the atom through a conventional Jaynes-Cummings interaction, while the other through a two-photon Jaynes-Cummings interaction. To analyze the conversion of the pulse that impinges on the system, we used the input-output theory together with the Schrödinger equation (exact and numeric solution) and the Heisenberg-Langevin equation (approximated and analytical solution).

Keywords: crossed optical cavities; Jaynes-Cummings hamiltonian; squeezed states.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

- Figura 1 – Diagrama dos níveis de energia para o modelo de Jaynes-Cummings convencional mostrando os níveis degenerados ou *bare states*, sem interação ($g = 0$), e o aparecimento dos dubletos ou *dressed states*, com interação ($g \neq 0$). Estes dubletos são combinações lineares dos estados originalmente degenerados. 18
- Figura 2 – Diagrama dos níveis de energia dos *dressed states*, um fóton com energia $\omega - g$ promove o sistema para o primeiro nível do dubleto, entretanto, outro fóton de mesma energia não é suficiente para promover o estado novamente. 19
- Figura 3 – Diagrama dos níveis de energia para o modelo de Jaynes-Cummings de dois fótons. Seus níveis são separados por ω , assim como no modelo de Jaynes-Cummings convencional, entretanto, consideramos $\omega = \frac{\omega_0}{2}$. Outra distinção é que os dubletos ocorrem um nível acima em comparação a Jaynes-Cummings convencional, presentes a partir do estado de duas excitações. 20
- Figura 4 – Representação do bloqueio de fótons no modelo de Jaynes-Cummings de dois fótons, onde um fóton com frequência ω , embora acople com o primeiro estado degenerado, não promove o sistema para os dubletos (primeira seta rosa). Já a absorção simultânea de dois fótons com energia $\frac{2\omega - \sqrt{2}g}{2}$ (segunda seta rosa) eleva o estado para o primeiro dubleto. 21
- Figura 5 – a) Valores iguais de incerteza para ambas as quadraturas ΔX_1 e ΔX_2 , formando um círculo; b) A incerteza na quadratura ΔX_2 sofre uma compressão, enquanto em ΔX_1 expande, formando uma elipse, de maneira de que o produto das incertezas se mantém. 24
- Figura 6 – O estado de vácuo (a) é centrado na origem. Entretanto, ao aplicar o operador $D(\alpha)$, (b) obtemos um estado coerente generalizado do espaço de fase deslocado em $|\alpha|$ 25
- Figura 7 – a) O estado de vácuo comprimido é obtido ao aplicar o operador compressão $S(\zeta)$ sem o operador deslocamento $D(\alpha)$, assim, uma de suas quadraturas é comprimida e a área formada ainda está centrada na origem; b) A compressão em ΔX_1 pode ocorrer depois do deslocamento r ; c) O mesmo vale para uma compressão na outra quadratura ΔX_1 e de uma rotação ϕ no eixo. 25

- Figura 8 – Um sistema de cavidades ópticas cruzadas, onde cada cavidade dispõe de um espelho semitransparente. Em seu interior, um átomo de dois níveis é acoplado de maneira ressonante às cavidades a e b por meio da interação de JC de dois fótons e JC convencional, respectivamente. Ao incidir um pulso de um único fóton na cavidade b , um processo de interferência quântica que troca e converte os estados das cavidades, resulta em um pulso de dois fótons emitido por a 27
- Figura 9 – A probabilidade de população das cavidades a , e b decai para valores insignificantes, à medida o sistema se aproxima do regime de alta cooperatividade. Dessa maneira, podemos considerar $a^\dagger a \approx b^\dagger b \approx 0$. . . 30
- Figura 10 – Dinâmica do sistema para $C = \frac{g^2}{\kappa\Gamma}$. O formato do pulso de saída em a é similar ao pulso de entrada em b , salvo a mudança de fase e a consideração do fenômeno de reflexão em b e de excitação do átomo. . . 37
- Figura 11 – Refletância de um fóton (azul) e transmitância de dois fótons (vermelho) em função da cooperatividade para $\eta = 50/\kappa$ e $\Gamma = 0.2\kappa$, considerando o resultado exato via equação de Schrödinger (curvas) e o resultado aproximado via equação de Heisenberg-Langevin (símbolos). 37

SUMÁRIO

1	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	13
	1.1 Modelo de Jaynes-Cummings convencional	13
	1.1.1 Oscilações de Rabi	17
	1.1.2 <i>Bare states</i> e <i>dressed states</i>	18
	1.1.3 Bloqueio de fótons	19
	1.2 Jaynes-Cummings de dois fótons	20
	1.2.1 Bloqueio de fótons	21
	1.3 Luz coerente e luz comprimida	22
	1.3.1 Geração de estados comprimidos	24
2	METODOLOGIA	27
	2.1 Descrição do sistema	27
	2.2 Equação de Heisenberg-Langevin	28
	2.3 Equação de Schrödinger	31
3	RESULTADOS E DISCUSSÕES	35
	3.1 Resultados pela abordagem das equações de Heisenberg-Langevin	35
	3.2 Resultados pela abordagem da equação de Schrödinger	36
	3.3 Conclusões	37
A	APÊNDICE	39
	A.1 Campo de entrada	41
	A.2 Campo de saída	42
	A.3 Relação <i>Input-Output</i>	43
	REFERÊNCIAS	44

INTRODUÇÃO

O avanço da informação quântica nos últimos anos trouxe a compreensão de que existe uma vantagem em processar e transmitir informações codificadas em sistemas quânticos, uma vez que estes possuem propriedades únicas. Por isso, muitos institutos e grupos de pesquisa ao redor do mundo têm dedicado seus esforços para contribuir com o ambicioso objetivo de produzir um computador quântico [1]. Esta máquina não seria como um computador clássico aperfeiçoado mas sim um aparato com funcionamento completamente diferente. [2]

O conhecimento de que um computador quântico é capaz de superar a performance de algoritmos clássicos foi há muito previsto pelo primoroso Richard Feynman [3, 4]. Em 1982, Feynman aponta que sistemas quânticos de múltiplos corpos não parecem ser bem replicados por computadores clássicos. Essa dificuldade dos computadores clássicos reside no fato de que o tamanho do espaço de Hilbert cresce exponencialmente [5], e uma proposta de solução seria naturalmente o computador quântico. Desde então, a pesquisa em processamento de informação quântica floresce em busca da implementação do computador quântico.

Diversos sistemas físicos são cogitados como possíveis candidatos para a implementação da computação quântica em larga escala, dispondo de áreas que variam desde física atômica, até matéria condensada. Um exemplo desses sistemas físicos são as redes quânticas baseadas em poucos átomos aprisionados em cavidades ópticas [6, 7, 8], onde uma miríade de aplicações tem sido propostas, tais como protocolos de criptografia quântica [9], memória quântica [10, 11], transístores quânticos [12] e operações lógicas quânticas [13, 14, 15]. Em especial, uma configuração de cavidades ópticas cruzadas contendo um átomo de dois ou mais níveis em seu interior para controlar a passagem de luz [16]. Um sistema dessa espécie possui aplicações para redes quânticas [16], computação quântica universal [17], geração de estados emaranhados da luz [18] e litografia quântica [19].

É possível expandir ainda mais essas aplicações para áreas da comunicação quântica [20] e metrologia quântica [21] caso este sistema seja empregado como um laser de dois fótons [22], ou um laser de luz comprimida [23, 24]. Esta última pode ser entendida como um estado da luz cujo ruído do campo é menor do que em estados de vácuo. Em outras palavras, a luz comprimida apresenta menos incerteza do que nenhuma luz; esta afirmação que pode soar paradoxal é um resultado direto da natureza quântica da luz [25]. Mais formalmente, consideramos que um estado quântico é comprimido quando a variação da quadratura da amplitude é menor que a variação de um estado de vácuo ou estado coerente, ou seja, $\Delta x < 1$. O custo disso é ter a variação da quadratura conjugada maior do que a variância do vácuo, isto é, $\Delta p > 1$. Dessa maneira, o Princípio da Incerteza

de Heisenberg é respeitado e dois observáveis com ângulos ortogonais, como momento e posição, não podem ser comprimidos ao mesmo tempo [23].

Existem vários métodos para a geração de estados multifotônicos comprimidos, como a interação não linear entre luz e um feixe de átomos de sódio [26] e a injeção de feixes de laser de alta potência em uma longa fibra óptica [27]. Outra alternativa é a conversão paramétrica descendente, estudada neste presente trabalho, que possui uma reputação de longa data se tratando de geração de luz comprimida [28].

Este trabalho visa o estudo de um sistema de cavidades cruzadas baseado na interação de Jaynes Cummings (JC) que acopla um átomo de dois níveis à cavidade b através de uma interação JC de um fóton, e a cavidade a por meio do JC de dois fótons (JC2). Nesta configuração, ao incidir um pulso de fóton único na cavidade b , o sistema transmite um pulso de dois fótons através da cavidade a . É importante ressaltar que a conversão paramétrica descendente degenerada (DPDC do inglês, *degenerate parametric-down conversion*) produzida com o sistema nesta disposição ocorre devido a uma interferência quântica que compreende os estados brilhantes e escuros da luz, referentes aos modos coletivos do sistema de cavidades, e não ocorre devido uma troca coerente entre as populações dos modos intracavitários. Ademais, tal conversão ocorre deterministicamente, ao contrário da conversão paramétrica obtida utilizando cristais não lineares, como utilizado na literatura [29].

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.1 MODELO DE JAYNES-CUMMINGS CONVENCIONAL

O modelo de Jaynes Cummings (JC) é um modelo solúvel cuja formulação completamente quântica descreve a dinâmica de um átomo em um campo eletromagnético, proporcionando uma estrutura teórica fundamental no campo da Óptica Quântica. O modelo compreende um átomo de dois níveis interagindo com um modo do campo eletromagnético quantizado da cavidade óptica.

Introduzido em 1963 por Edwin Jaynes e Fred Cummings, foi primeiramente usado para melhor analisar aspectos clássicos da emissão espontânea atômica e as oscilações de Rabi em probabilidades de excitação atômica para campos com número de fótons bem definidos.

Para campos com uma distribuição estatística do número de fótons, as oscilações sofrem um colapso após atingir um certo valor estável. Entretanto, descobriu-se que para certas condições iniciais (luz coerente, por exemplo) essas oscilações de Rabi eventualmente ressurgem, apenas para colapsar e reaparecer novamente. A existência desses fenômenos, chamados colapso e ressurgimento [30] em soluções analíticas do modelo de JC, é evidência direta da propriedade discreta de excitação do campo, e consequentemente prova da natureza quântica da radiação.

Estudos subsequentes revelaram mais propriedades não clássicas do campo no modelo de JC, tal como a tendência dos fótons para o antiagrupamento e estados de superposição macroscópica nos intervalos de colapso da oscilação de Rabi, que proporciona a oportunidade de usar o modelo de JC para elucidar mais propriedades de correlação quântica, tais como emaranhamento [31]. Além disso, este modelo proporcionou um avanço significativo para a eletrodinâmica quântica de cavidades [32], além de possuir um papel fundamental em áreas como física atômica, óptica quântica, física do estado sólido e circuitos de informação quântica [33].

A seguir, introduziremos as contribuições que o hamiltoniano atômico, do campo e de interação possuem na construção do hamiltoniano de Jaynes Cummings (HJC)[34, 35], como sua dinâmica funciona, bem como alguns fenômenos interessantes que o modelo prevê.

Hamiltoniano atômico

Neste modelo, o átomo de dois níveis é descrito por um espaço de estado com duas dimensões estendido por dois autoestados: o estado fundamental $|g\rangle$ e o estado

excitado $|e\rangle$, com autovalores E_g e E_e , respectivamente. O hamiltoniano do átomo de dois níveis é

$$\begin{aligned} H_{\text{átomo}} &= E_g |g\rangle\langle g| + E_e |e\rangle\langle e| \\ &= \frac{1}{2}(E_e + E_g)\mathbb{I} + \frac{1}{2}(E_e - E_g)\sigma_z \end{aligned} \quad (1.1)$$

onde $\mathbb{I}$ é a matriz identidade e $\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$ é um operador de Pauli. A frequência de transição do átomo é determinada por sua estrutura interna e é dada por

$$\omega_0 = \frac{(E_e - E_g)}{\hbar}. \quad (1.2)$$

Consideramos a energia em $E_e + E_g$ como zero, pois somente as diferenças de energia nos interessam, e assim obtemos a contribuição do hamiltoniano do átomo:

$$H_{\text{átomo}} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z \quad (1.3)$$

Hamiltoniano do campo eletromagnético

A energia total do campo dentro de uma caixa com volume V também pode ser entendida como a soma de energia de cada modo de radiação descrito por (k, α)

$$H_k = \sum_{k,\alpha} E_{k,\alpha} = \sum_{k,\alpha} \epsilon_0 V \omega_k, \quad (1.4)$$

onde k e α denotam o vetor de onda e a polarização do vetor k , ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo, ω_k é a frequência do modo k e $A_{k,\alpha}$ ($A_{k,\alpha}^*$) é a amplitude complexa (conjugada).

A quantização do campo [36, 34, 37] consiste em associar um oscilador harmônico quântico à cada modo de radiação e definir o fóton como uma excitação elementar. Por isso, usamos a seguinte relação de correspondência entre a amplitude complexa (clássica) com os operadores criação e aniquilação:

$$\begin{aligned} A_k &\rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} a_k, \\ A_k^* &\rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} a_k^\dagger, \end{aligned} \quad (1.5)$$

para reescrever o hamiltoniano. Substituindo as Eqs. 1.5 em Eq. 1.4, e usando a relação de comutação $[a_k, a_k^\dagger] = 1$, o hamiltoniano fica

$$H_{\text{campo}} = \sum_k \hbar\omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right) \quad (1.6)$$

Hamiltoniano de interação

Embora o átomo tenha momentos de multipolos, principalmente quando exposto à radiação, a influência desta se dá de maneira mais proeminente somente no momento de dipolo. A interação luz-matéria que ocorre com o momento de dipolo no átomo é dada por

$$H_{int} = -\vec{d} \cdot \vec{E}, \quad (1.7)$$

onde $\vec{E}$ é o operador campo elétrico e $\vec{d}$ é o operador momento de dipolo, que pode ser representado em termos dos operadores atômicos:

$$d = \mathbb{I}d\mathbb{I} = \sum_{ij} |i\rangle\langle i| d |j\rangle\langle j| = d_{eg}(\sigma_+ + \sigma_-), \quad (1.8)$$

no qual $d_{eg} = \langle e|d|g\rangle$, e os operadores σ_+ e σ_- são conhecidos como levantamento e abaixamento atômico, respectivamente, e podem ser definidos como

$$\sigma_+ = |e\rangle\langle g|, \quad \sigma_- = |g\rangle\langle e|. \quad (1.9)$$

Usando o operador do campo elétrico

$$\vec{E} = \sum_k \vec{\epsilon}_k \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} (a_k^\dagger e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + a_k e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}),$$

temos que H_{int} é

$$H_{int} = \sum_k g\hbar(a_k + a_k^\dagger)(\sigma_+ + \sigma_-), \quad g = \sqrt{\frac{\omega}{2\epsilon_0 \hbar V}} d_{eg}, \quad (1.10)$$

onde g é a constante de acoplamento do átomo com o campo, e depende da frequência, volume modal e momento de dipolo.

Mudamos do referencial de Schrödinger para o referencial de interação, onde H_{int} se torna

$$H_{int}(t) = \sum_k g\hbar(a_k\sigma_- e^{-i(\omega-\omega_0)t} + a_k^\dagger\sigma_+ e^{i(\omega-\omega_0)t})(a_k\sigma_+ e^{i(-\omega+\omega_0)t} + a_k^\dagger\sigma_- e^{-i(-\omega+\omega_0)t}). \quad (1.11)$$

Quando a frequência natural do átomo e do campo é muito maior que o acoplamento, os termos contragirantes cuja exponencial é $(\omega + \omega_0)$ serão altamente oscilantes e contribuem pouco para a dinâmica, por isso serão desconsiderados. Esta aproximação é chamada de aproximação de onda girante (do inglês, *rotating wave approximation* ou RWA). Assim, transformamos o hamiltoniano de interação de volta para a representação de Schrödinger, de modo que

$$H_{int} = \sum_k g\hbar(a_k\sigma_+ + a_k^\dagger\sigma_-). \quad (1.12)$$

Como teremos uma relação quase ressonante entre um único modo da cavidade e o átomo de dois níveis, consideramos a aproximação unimodal já que os outros modos

k estarão muito fora da ressonância e não induzirão uma dinâmica com o átomo. O hamiltoniano de Jaynes-Cummings é a soma dessas contribuições Eq. 1.6, Eq. 1.3 e Eq. 1.12:

$$\begin{aligned} H_{JC} &= H_{\text{campo}} + H_{\text{átomo}} + H_{\text{int}} \\ &= \hbar\omega a^\dagger a + \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \hbar g(a\sigma_+ - a^\dagger\sigma_-). \end{aligned} \quad (1.13)$$

O espaço de Hilbert do hamiltoniano de JC é definido pelo produto tensorial dos espaços de Hilbert da cavidade (modo único) e do átomo

$$\mathcal{H}_{\text{sys}} = \mathcal{H}_c \otimes \mathcal{H}_a,$$

e a base contém estados do tipo $\{|n, g\rangle, |n, e\rangle\}$. O estado $|g\rangle|0\rangle$, correspondente ao átomo no estado fundamental e a cavidade no estado de vácuo, sua energia é mínima e vale $E_0 = -\frac{\omega_0}{2}$. Definimos o operador número $N = a^\dagger a + \sigma_+ \sigma_-$, que conta o número total de excitações no sistema. Este operador comuta com H_{int} :

$$\begin{aligned} [H_{\text{int}}, N] &= [\hbar g(a\sigma_+ - a^\dagger\sigma_-), a^\dagger a + |e\rangle\langle e|] \\ &= \hbar g([a\sigma_+, a^\dagger a + |e\rangle\langle e|] - [a^\dagger\sigma_-, a^\dagger a + |e\rangle\langle e|]) \\ &= \hbar g(a[\sigma_+, |e\rangle\langle e|] + [a, a^\dagger a]\sigma_+ a^\dagger[\sigma_-, |e\rangle\langle e|] + [a^\dagger, a^\dagger a]\sigma_-) \\ &= \hbar g(-a\sigma_+ + a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_- - a^\dagger\sigma_-) \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que implica que o modelo de JC conserva o número de excitações no sistema. Dessa maneira, podemos considerar os pares de estado que estão conectados e assim tratar efetivamente de um problema de duas dimensões, e com o espaço de Hilbert definido, podemos diagonalizar o H_{JC} . Para $n + 1$ citações, sendo $n = 0, 1, 2, \dots$, os autoestados consistem de uma combinação linear de $\{|n + 1, g\rangle, |n, e\rangle\}$, que obtemos ao montar a matriz do H_{JC}

$$H_{JC}^{n+1} = \begin{pmatrix} \omega n + \frac{1}{2\omega_0} & g\sqrt{n+1} \\ g\sqrt{n+1} & \omega(n+1) - \frac{1}{2}\omega_0 \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Como

$$H_{JC} |\pm, n+1\rangle = E_{\pm}^{(n+1)} |\pm, n+1\rangle, \quad (1.15)$$

obtemos as autoenergias

$$E_{\pm}^{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega \pm \Omega_n(\Delta), \quad (1.16)$$

em que $\Omega_n(\Delta) = \sqrt{\Delta^2 + 4g(n+1)}$ é a frequência de Rabi do sistema, sendo $\Delta = (\omega - \omega_0)$ a dessintonia entre átomo e o modo da cavidade. Os autovalores correspondentes são

superposições dos estados no qual o hamiltoniano foi diagonalizado

$$|+, n+1\rangle = \cos\left(\frac{\Phi_n}{2}\right) |e\rangle |n\rangle + \sin\left(\frac{\Phi_n}{2}\right) |g\rangle |n+1\rangle, \quad (1.17)$$

$$|-, n+1\rangle = -\sin\left(\frac{\Phi_n}{2}\right) |e\rangle |n\rangle + \cos\left(\frac{\Phi_n}{2}\right) |g\rangle |n+1\rangle, \quad (1.18)$$

onde o ângulo $\frac{\Phi_n}{2}$ vale

$$\Phi_n = 2 \arctan\left(\frac{\Delta/2 + \Omega_n(\Delta)}{\Omega_n(0)}\right), \quad \exists[0, \pi], \quad (1.19)$$

e determina o peso do estado fundamental e excitado, ou seja, onde as excitações estão mais concentradas.

Após estudar o modelo de JC e considerações relevantes para sua dinâmica, podemos avançar para alguns fenômenos relevantes previstos pelo modelo, entre elas, oscilações de Rabi, *bare/dressed states*, bloqueio de fótons e algumas aplicações.

1.1.1 Oscilações de Rabi

O átomo oscila entre seu estado fundamental e excitado ao trocar fótons com o campo da cavidade. Esta oscilação possui uma frequência característica chamada frequência de Rabi. Podemos obtê-la ao estudar o termo de interação do hamiltoniano na representação de interação

$$H_{int}(t) = \hbar g(a^\dagger \sigma e^{i\Delta t} + \sigma_+ e^{-i\Delta t}), \quad (1.20)$$

onde as exponenciais carregam o termo de dessintonia $\Delta = \omega - \omega_0$.

Para estudarmos sua evolução temporal, propomos um ansatz de função de onda na base de estados $\{|n, g\rangle, |n, e\rangle\}$ (com $n = 0, 1, 2, \dots$)

$$|\psi_{int}(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n,g}(t) |n, g\rangle + c_{n,e}(t) |n, e\rangle). \quad (1.21)$$

Lembrando que H_{int} acopla os estados $|g, n+1\rangle$ e $|e, n\rangle$, que junto do ansatz, chegamos na equação diferencial dos coeficientes complexos de expansão

$$\begin{aligned} \dot{c}_{g,n+1}(t) &= -ig\sqrt{n+1}e^{i\Delta t}c_{e,n}(t), \\ \dot{c}_{e,n}(t) &= -ig\sqrt{n+1}e^{-i\Delta t}c_{g,n+1}(t), \end{aligned} \quad (1.22)$$

onde $-ig\sqrt{n+1}$ representa a intensidade do acoplamento e a exponencial carrega o termo de dessintonia. Suas soluções para o caso de ressonância ($\Delta = 0$), considerando o estado inicial de $n+1$ fótons no sistema e o átomo no estado fundamental ($c_{1,n+1}(t)$)

$$\begin{aligned} c_{g,n+1}(t) &= \cos(g\sqrt{n+1}t), \\ c_{e,n}(t) &= -i\sin(g\sqrt{n+1}t). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Dessa maneira, a probabilidade do sistema ocupar o estado $|g, n+1\rangle$ é

$$\begin{aligned} P_{g,n+1}(t) &= |c_{g,n+1}(t)|^2 = \frac{1}{2}[1 + \cos(2g\sqrt{n+1}t)] \\ &= \frac{1}{2}[1 + \cos(\Omega_n t)], \end{aligned} \quad (1.24)$$

em que Ω_n é a frequência de Rabi quântica, que assume valores discretos devido à quantização do campo e pode ser expressa em função da dessintonia como $\Omega_n(\Delta) = \sqrt{\Delta^2 + 4g^2(n+1)}$ (na ressonância, $\Omega_n(0) = 2g\sqrt{n+1}$), observamos que ela existe até mesmo quando $n = 0$.

Este resultado não é previsto pelas equações clássicas/semiclássicas. Segundo estas, não haveria evolução temporal no sistema e o átomo permaneceria no estado excitado; uma vez que o campo no estado de vácuo implicaria na ausência de interação. Já no formalismo quântico, o estado de vácuo ($\Omega_0 = 2g$) pode engatilhar esta troca de excitação entre o átomo e o campo devido às flutuações do estado de vácuo do campo eletromagnético.

1.1.2 Bare states e dressed states

Nos aproveitamos da estrutura diagonal que ocorre devido à RWA no H_{JC} para definir os chamados “estados vestidos” ou *dressed states* do sistema átomo-campo. Em particular, quando a frequência de transição do átomo entra em ressonância com a frequência da cavidade, os níveis de energia do sistema átomo-cavidade inicialmente degenerados (*bare states*) se dividem em dois novos níveis de energia (*dressed states*) não degenerados, assim como ilustrado na Figura 1.

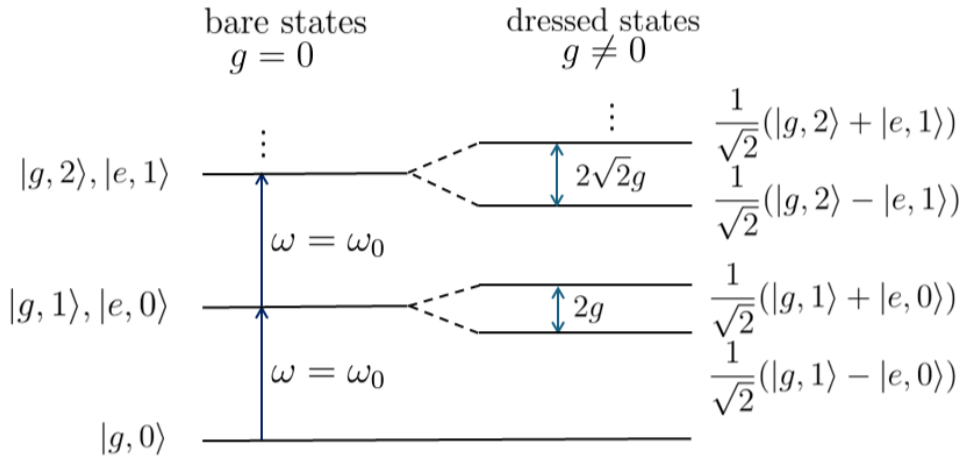


Figura 1 – Diagrama dos níveis de energia para o modelo de Jaynes-Cummings convencional mostrando os níveis degenerados ou *bare states*, sem interação ($g = 0$), e o aparecimento dos dubletos ou *dressed states*, com interação ($g \neq 0$). Estes dubletos são combinações lineares dos estados originalmente degenerados.

Os *bare states* $|e, n\rangle$ e $|g, n+1\rangle$ se acoplam por uma frequência de Rabi de $2g\sqrt{n+1}$, e se dividem em $|+_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g, n+1\rangle + |e, n\rangle)$ e $|-_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g, n+1\rangle - |e, n\rangle)$.

Este fenômeno ocorre devido ao termo de interação do hamiltoniano (Eq. 1.12), em que o primeiro termo acopla $|g, n\rangle \rightarrow |e, n-1\rangle$, e o segundo acopla $|e, n-1\rangle \rightarrow |g, n\rangle$. Portanto, temos um sistema fechado, cuja excitação inicial é trocada coerentemente entre o átomo e a cavidade, oscilando na frequência de Rabi.

1.1.3 Bloqueio de fótons

Devido à dependência do fator $\sqrt{n+1}$ na divisão dos níveis de energia, o sistema pode atuar como um meio óptico altamente não linear. Um exemplo disso é o fenômeno de bloqueio de fótons, no qual, sob certas condições, somente um fóton pode ocupar a cavidade por vez. Se outro fóton incidir na cavidade, este será prontamente refletido.

Suponha, por exemplo, que o campo incidente é ressonante com um dos dubletos de JC. Este campo deve ter um frequência de sonda de $\omega_s = \omega - g$. Assim, o fóton entra na cavidade, e o estado do sistema faz a transição $|g, 0\rangle \rightarrow |-, 1\rangle$, como ilustrado abaixo na Figura 2. Quando outro fóton incide na cavidade, o átomo deveria fazer a transição para o estado $|-, 2\rangle$, contudo, como a divisão para os dubletos com dois fótons é maior que a divisão de dubletos para 1 fóton por um fator $\sqrt{2}$, a frequência de ressonância para o estado $|-, 2\rangle$ é $(2\omega - \sqrt{2}g) - (\omega - g)$ e portanto a frequência de sonda está defasada em $(\sqrt{2} - 2)g$ em relação à segunda transição. Se a constante de acoplamento g é muito maior que a largura dessas transições, a segunda transição é suprimida e temos no máximo um fóton ocupando a cavidade por vez.

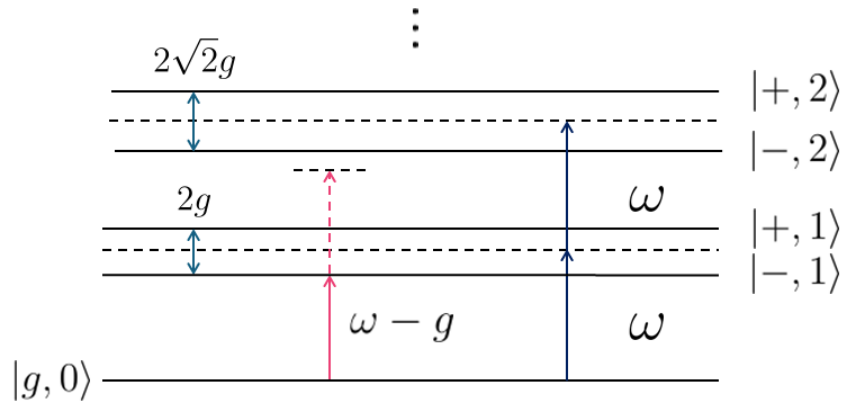


Figura 2 – Diagrama dos níveis de energia dos *dressed states*, um fóton com energia $\omega - g$ promove o sistema para o primeiro nível do dublete, entretanto, outro fóton de mesma energia não é suficiente para promover o estado novamente.

1.2 JAYNES-CUMMINGS DE DOIS FÓTONS

Temos considerações semelhantes às do JC convencional. Entretanto, neste modelo, o átomo é excitado através da absorção simultânea de dois fótons do modo da cavidade, e é de-excitado ao criar dois fótons na cavidade [38]. Este modelo é descrito pelo seguinte hamiltoniano:

$$H_{JC2} = \omega a^\dagger a + \frac{1}{2}\omega_0 \sigma_z + g(a^{\dagger 2} \sigma_- + a^2 \sigma_+). \quad (1.25)$$

Seu espectro de energia também é parecido com o de JC convencional, com a diferença de que os dubletos ocorrerem a partir do espaço de duas excitações ($n+2$, com $n+0, 1, 2, \dots$). Além disso, para JC2, a condição de ressonância é de $\omega_0 = 2\omega$, como ilustrado na Figura 3.

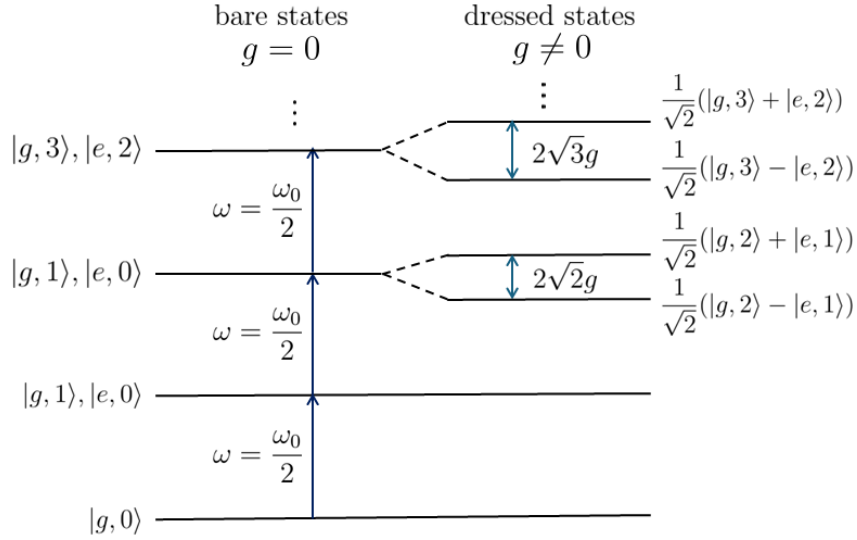


Figura 3 – Diagrama dos níveis de energia para o modelo de Jaynes-Cummings de dois fótons. Seus níveis são separados por ω , assim como no modelo de Jaynes-Cummings convencional, entretanto, consideramos $\omega = \frac{\omega_0}{2}$. Outra distinção é que os dubletos ocorrem um nível acima em comparação a Jaynes-Cummings convencional, presentes a partir do estado de duas excitações.

Assim como feito para o H_{JC} , diagonalizamos H_{JC2} :

$$H_{JC2} = \begin{pmatrix} \omega n + \frac{1}{2}\omega_0 & g\sqrt{n+1}\sqrt{n+2} \\ g\sqrt{n+1}\sqrt{n+2} & \omega n - \frac{1}{2}\omega_0 \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

em que $H_{JC2} |\pm, n+2\rangle = E_{\pm}^{(n+2)} |\pm, n+2\rangle$, onde as autoenergias são

$$E_{\pm}^{n+2} = (n+1)\omega \pm \Omega'_n(\Delta'). \quad (1.27)$$

O estado fundamental $|g, 0\rangle$ possui autoenergia $E_0 = -\frac{\omega_0}{2}$, o primeiro estado excitado

$|g, 1\rangle$ possui energia $E_1 = \omega - \frac{\omega_0}{2}$, e os dubletos (considerando $n = 0, 1, 2, \dots$)

$$|+, n+2\rangle = \cos\left(\frac{\Phi'_n}{2}\right) |e\rangle |n\rangle + \sin\left(\frac{\Phi'_n}{2}\right) |g\rangle |n+2\rangle, \quad (1.28)$$

$$|-, n+2\rangle = -\sin\left(\frac{\Phi'_n}{2}\right) |e\rangle |n\rangle + \cos\left(\frac{\Phi'_n}{2}\right) |g\rangle |n+2\rangle, \quad (1.29)$$

em que a frequência de Rabi vale $\Omega'_n(\Delta') = \sqrt{(\Delta')^2 + g(n+1)(n+2)}$, em função da dessintonia $\Delta' = (\omega - \omega_0/2)$. O ângulo Φ'_n é dado por

$$\Phi'_n = 2 \arctan\left(\frac{\Delta' + \Omega_n(\Delta')}{\Omega_n^{(0)}}\right). \quad (1.30)$$

1.2.1 Bloqueio de fótons

Assim como JC convencional, o modelo de JC2 também descreve o bloqueio de fótons [39]. Considere um campo incidente ressonante com o primeiro dubleto de Rabi (que aparece a partir de duas excitações), este campo possui uma frequência de sonda de $\omega'_s = \frac{2\omega - \sqrt{2}g}{2}$. Quando dois fótons são simultâneamente absorvidos pela cavidade, o sistema realiza a transição de $|g, 0\rangle \rightarrow |-, 2\rangle$, como ilustrado na Figura 4. Contudo, quando outro fóton incide na cavidade, o sistema não faz a transição para $|-, 3\rangle$. Para chegar neste estado, seria necessário uma frequência de ressonância de $\omega + (\sqrt{2} - \sqrt{3})$, entretanto, a frequência de sonda está defasada em $g(2\sqrt{2} - \sqrt{3})$.

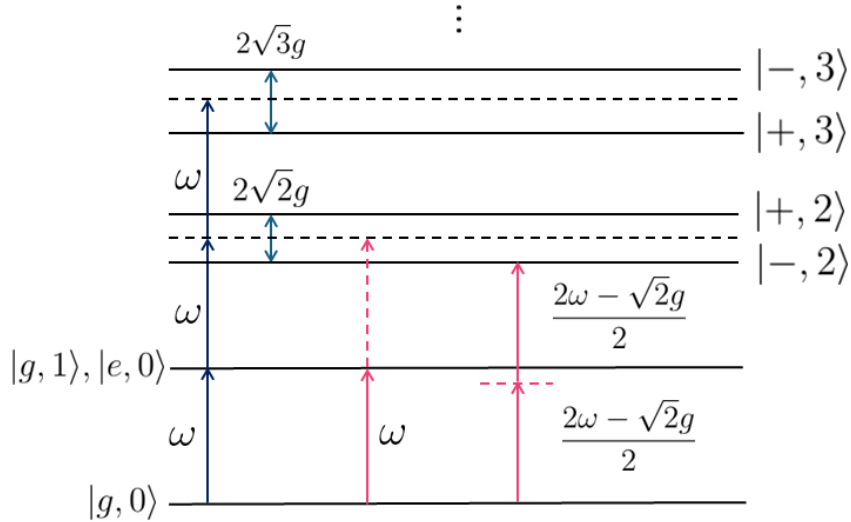


Figura 4 – Representação do bloqueio de fótons no modelo de Jaynes-Cummings de dois fótons, onde um fóton com frequência ω , embora acople com o primeiro estado degenerado, não promove o sistema para os dubletos (primeira seta rosa). Já a absorção simultânea de dois fótons com energia $\frac{2\omega - \sqrt{2}g}{2}$ (segunda seta rosa) eleva o estado para o primeiro dubleto.

1.3 LUZ COERENTE E LUZ COMPRIMIDA

Avanços significativos tem sido conquistados para a produção de luz comprimida nas últimas décadas, desde seu primeiro experimento em 1985. No começo da década de 80 já existia um grande acervo teórico tratando de luz comprimida [23]. Não obstante, até aquele momento, os esforços para a produção experimental de luz comprimida não vinham sendo frutíferos.

As dificuldades para a produção experimental de luz comprimida variam desde a medição de uma quadratura de amplitude, flutuações do laser, material suficientemente não linear e não absorvente até ruído térmico [40]. Foi somente em 1985 que os primeiros sinais de luz comprimida foram constatados no inovador experimento de Slusher, Hollberg, Yurke e Valley [41], no qual usaram o processo de mistura não degenerada de quatro ondas produzidas por átomos de Na em uma cavidade óptica.

Os referidos estados comprimidos da luz são aqueles cujas flutuações de uma das quadraturas são menores que as flutuações no vácuo, logo, possuem um aumento nas flutuações da outra quadratura. Dessa maneira, o princípio de Incerteza de Heisenberg é satisfeito, uma vez que o produto da incerteza de ambas quadraturas se mantém constante. Outra maneira de compreender estados comprimidos da luz é observar que por uma de suas incertezas ser menor do que no vácuo, uma fonte de luz comprimida possui uma das suas incertezas menor do que luz nenhuma.

O Princípio de Incerteza de Heisenberg diz que dois operadores que não comutam devem obedecer à seguinte relação:

$$\Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1.31)$$

no qual q e p são os operadores posição e momento, respectivamente. Caso os estados satisfaçam a relação de igualdade, são chamados de estados de mínima incerteza. Uma família de estados que minimiza o Princípio de Incerteza é chamada de estados coerentes ou estados de Glauber. É possível demonstrar isso ao expressar os operadores q e p em termos dos operadores criação $a^\dagger$ e destruição a

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(a + a^\dagger), \quad p = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(a - a^\dagger), \quad (1.32)$$

sabendo que a variância de um operador A é $\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$, calcula-se a variância para o momento e posição

$$\Delta q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}, \quad \Delta p = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}. \quad (1.33)$$

Então, é possível observar como o produto das incertezas de q e p satisfazem o mínimo do Princípio de Incerteza

$$\Delta q \Delta p = \frac{\hbar}{2}. \quad (1.34)$$

Depois da definição de um estado de mínima incerteza, para melhor entender sobre suas propriedades, reescrevemos o operador campo elétrico de um campo eletromagnético unimodal em termos dos operadores criação e destruição

$$\begin{aligned}
E(t) &= E_0 \left(\frac{ae^{-i\omega t}}{2} + \frac{a^\dagger e^{i\omega t}}{2} \right) \\
&= E_0 \left[\left(\frac{a(\cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t)}{2} \right) + \left(\frac{a(\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t)}{2} \right) \right] \\
&= E_0 \left[\left(\frac{a + a^\dagger}{2} \right) \cos \omega t + i \left(\frac{a^\dagger - a}{2} \right) \operatorname{sen} \omega t \right] \\
&= E_0 (X_1 \cos \omega t + X_2 \operatorname{sen} \omega t).
\end{aligned} \tag{1.35}$$

onde ω é a frequência de oscilação de campo e E_0 a constante de normalização. Os seguintes operadores hermitianos

$$X_1 = \frac{a + a^\dagger}{2}, \quad X_2 = \frac{a - a^\dagger}{2i} \tag{1.36}$$

são chamados de quadraturas do campo elétrico, onde X_1 está relacionado às flutuações da amplitude (posição) e X_2 às flutuações de fase. Desta maneira, sua relação de comutação é expressa como

$$[X_1, X_2] = \frac{i}{2}, \tag{1.37}$$

e sua relação de incerteza

$$\Delta X_1 \Delta X_2 = \frac{1}{4}. \tag{1.38}$$

É importante observar que os estados coerentes englobam os estados de vácuo, uma vez que estes também minimizam o Princípio de Incerteza. Além disso, também possuem flutuações de igual valor em ambas quadraturas:

$$\langle (\Delta X_1)^2 \rangle = \langle (\Delta X_2)^2 \rangle = \frac{1}{4}. \tag{1.39}$$

Este valor mínimo das flutuações é chamado de flutuações de vácuo, e por muito tempo foi considerado o limite mínimo para flutuação de qualquer medida. Contudo, há uma categoria particular de estados na qual a flutuação de uma das quadraturas possui limite menor que do estado do vácuo, como dito previamente; e por consequência, as flutuações na outra quadratura são maiores. Estes estados são chamados de estados comprimidos, ou *squeezed states* [37].

Na Figura 5, observa-se a representação da quadraturas no espaço de fase, tanto para estados coerentes quanto para estados comprimidos. No primeiro caso, as flutuações são iguais para ambas as quadraturas e sua figura forma um círculo; já para o segundo caso, a região de incerteza é comprimida para uma das quadraturas, e consequentemente, distendida na outra.

Mesmo com formatos diferentes, as áreas dessas figuras se mantêm, assim como o produto das respectivas incertezas, que vale $\frac{1}{4}$, satisfazendo o Princípio da Incerteza.

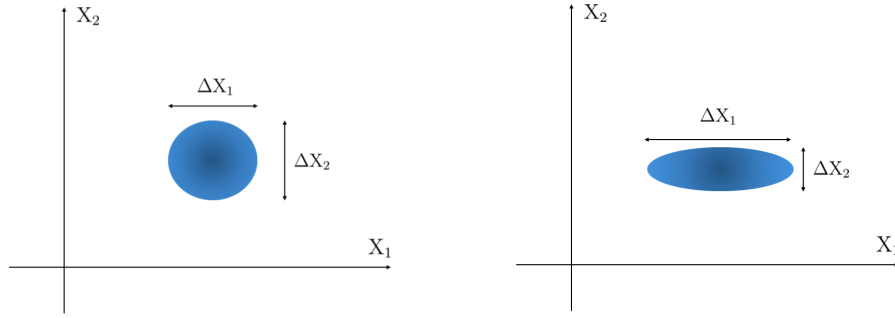


Figura 5 – a) Valores iguais de incerteza para ambas as quadraturas ΔX_1 e ΔX_2 , formando um círculo; b) A incerteza na quadratura ΔX_2 sofre uma compressão, enquanto em ΔX_1 expande, formando uma elipse, de maneira de que o produto das incertezas se mantém.

1.3.1 Geração de estados comprimidos

Partiremos da formulação do estado de vácuo, um caso particular, para em seguida generalizar os demais estados coerentes. Com este propósito, utilizaremos os operadores deslocamento $D(\alpha)$ e depois o operador compressão $S(\zeta)$.

Considere um estado coerente $|\alpha\rangle$ gerado ao aplicar o operador deslocamento sobre um estado de vácuo

$$|\alpha\rangle = D(\alpha) |0\rangle. \quad (1.40)$$

Este operador age de modo a deslocar o estado de vácuo localizado na origem dos eixos do espaço de fase para um estado coerente, como mostrado na Figura 6; pode ser expresso em função dos operadores criação e aniquilação

$$D(\alpha) = e^{(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)}, \quad \text{com} \quad \alpha = |\alpha| e^{i\theta}. \quad (1.41)$$

Já um estado coerente comprimido $|\alpha, \zeta\rangle$ pode ser gerado ao aplicar o operador compressão $S(\zeta)$ sobre o vácuo, seguido do operador deslocamento $D(\alpha)$

$$|\alpha, \zeta\rangle = D(\alpha) S(\zeta) |0\rangle, \quad (1.42)$$

onde o operador compressão atua de modo a comprimir uma das quadraturas,

$$S(\zeta) = \exp \left[\frac{1}{2} (\zeta^* a^2 - \zeta a^{\dagger 2}) \right], \quad (1.43)$$

o termo $\zeta = r e^{i\theta}$ é chamado de parâmetro de compressão, onde r é o fator de compressão e θ é o ângulo entre o eixo da elipse e da quadratura na abscissa, como mostrado na Figura 7.

Para obter a variância de X_1 e X_2 dos estados comprimidos, é necessário utilizar as seguintes relações:

$$\begin{aligned} S^\dagger(\zeta) a S(\zeta) &= a \cosh r - a^\dagger e^{i\theta} \sinh r, \\ S^\dagger(\zeta) a^\dagger S(\zeta) &= a^\dagger \cosh r - a e^{i\theta} \sinh r, \end{aligned} \quad (1.44)$$

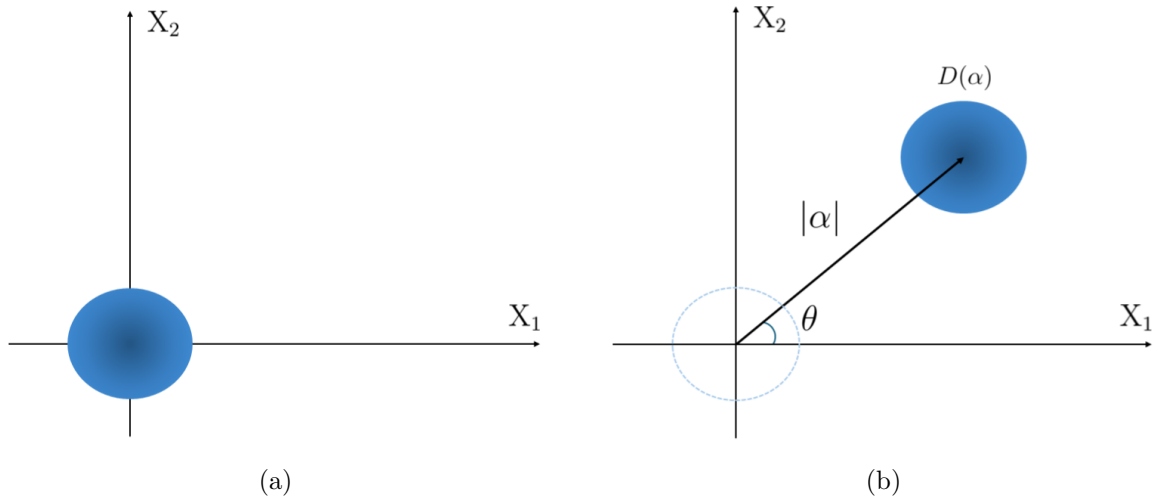


Figura 6 – O estado de vácuo (a) é centrado na origem. Entretanto, ao aplicar o operador $D(\alpha)$, (b) obtemos um estado coerente generalizado do espaço de fase deslocado em $|\alpha|$.

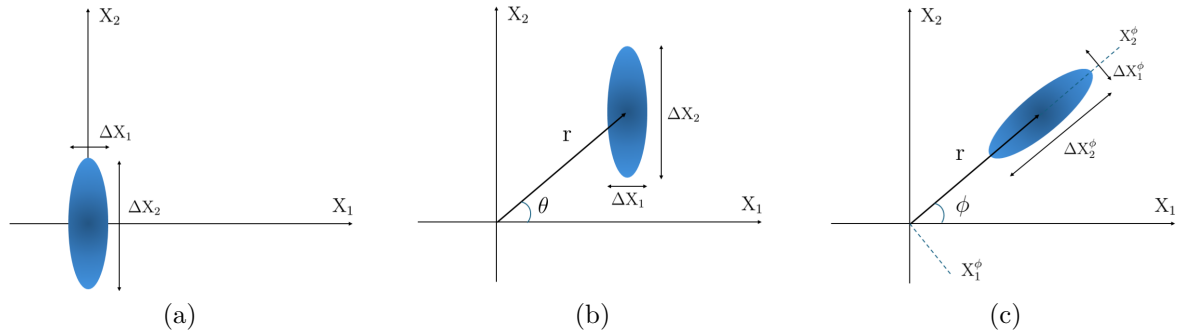


Figura 7 – a) O estado de vácuo comprimido é obtido ao aplicar o operador compressão $S(\zeta)$ sem o operador deslocamento $D(\alpha)$, assim, uma de suas quadraturas é comprimida e a área formada ainda está centrada na origem; b) A compressão em ΔX_1 pode ocorrer depois do deslocamento r ; c) O mesmo vale para uma compressão na outra quadratura ΔX_1 e de uma rotação ϕ no eixo.

onde o operador compressão possui as seguintes propriedades $S^\dagger(\zeta) = S^{-1}(\zeta) = S^\dagger(-\zeta)$. Também definimos um estado $|\psi\rangle$ sobre o qual o operador compressão age

$$|\psi_s\rangle = S(\zeta) |\psi\rangle. \quad (1.45)$$

Por não aplicar o operador deslocamento antes, obteremos o caso particular de vácuo comprimido, em vez de um estado generalizado. Com esta definição, encontramos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \langle \psi_s | a | \psi_s \rangle &= \langle \psi | S^\dagger(\zeta) a S^\dagger | \psi \rangle; \\ \langle \psi_s | a^2 | \psi_s \rangle &= \langle \psi | S^\dagger(\zeta) a S^\dagger S^\dagger(\zeta) a S^\dagger | \psi \rangle; \\ \langle \psi_s | a^\dagger | \psi_s \rangle &= \langle \psi | S^\dagger(\zeta) a^\dagger S^\dagger | \psi \rangle; \\ \langle \psi_s | (a^\dagger)^2 | \psi_s \rangle &= \langle \psi | S^\dagger(\zeta) a^\dagger S^\dagger S^\dagger(\zeta) a^\dagger S^\dagger | \psi \rangle; \end{aligned} \quad (1.46)$$

para facilitar a substituição da Eq. (1.44) e obter o valor esperado das quadraturas no estado de vácuo comprimido,

$$\begin{aligned}\langle \Delta X_1^2 \rangle &= \frac{1}{4}(\cosh^2 r + \sinh^2 r - 2\operatorname{sen} r \cosh r \cos \theta), \\ \langle \Delta X_2^2 \rangle &= \frac{1}{4}(\cosh^2 r + \sinh^2 r + 2\operatorname{sen} r \cosh r \cos \theta),\end{aligned}\tag{1.47}$$

chegamos em

$$\begin{aligned}\langle \Delta X_1^2 \rangle &= \frac{1}{4}(\cos ix + i\operatorname{sen} ix)^2 = \frac{1}{4}e^{-2r}, \\ \langle \Delta X_2^2 \rangle &= \frac{1}{4}(\cos ix - i\operatorname{sen} ix)^2 = \frac{1}{4}e^{2r}.\end{aligned}\tag{1.48}$$

Neste caso, a quadratura X_1 é comprimida para todo $r > 0$, enquanto a quadratura X_2 aumenta. Entretanto, quando consideramos $\theta = \pi$, X_1 é aumentada enquanto X_2 é comprimida. Em ambos os casos, o produto das flutuações da quadratura respeita o princípio de incerteza.

É possível descrever um caso mais geral de estados comprimidos ao usar o operador deslocamento em conjunto do operador compressão, que resulta em um estado comprimido e deslocado da origem por um raio α . A aplicação do operador compressão em um estado coerente gera uma compressão em uma das quadraturas que depende de ζ , e conseqüentemente um aumento na outra quadratura. Nos casos limites em que $\alpha \rightarrow 0$, obtemos o vácuo comprimido; e quando $\zeta \rightarrow 0$, voltamos ao estado coerente.

2 METODOLOGIA

2.1 DESCRIÇÃO DO SISTEMA

O sistema é constituído de duas cavidades ópticas cruzadas, onde cada uma possui um único espelho semitransparente acoplado aos modos contínuos do espaço livre, que por sua vez atuam como um reservatório bosônico. Estes são utilizados não só para incidir pulsos sobre o sistema, mas também para medir o campo de saída. Um átomo de dois níveis é acoplado de maneira ressonante às cavidades com a mesma constante de acoplamento ($g \equiv g_a = g_b$). Contudo, a cavidade b é acoplada ao átomo por meio da interação de JC convencional, enquanto a cavidade a se acopla ao átomo mediante a interação de JC de dois fótons

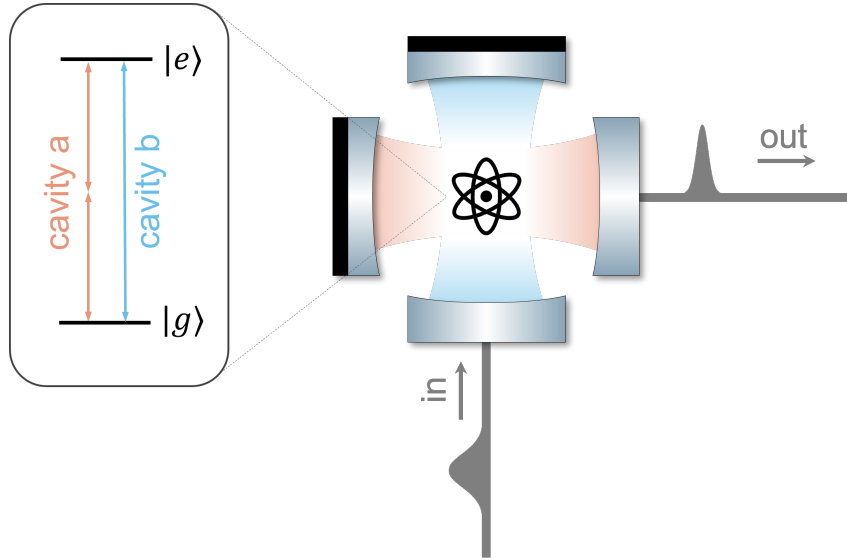


Figura 8 – Um sistema de cavidades ópticas cruzadas, onde cada cavidade dispõe de um espelho semitransparente. Em seu interior, um átomo de dois níveis é acoplado de maneira ressonante às cavidades a e b por meio da interação de JC de dois fótons e JC convencional, respectivamente. Ao incidir um pulso de um único fóton na cavidade b , um processo de interferência quântica que troca e converte os estados das cavidades, resulta em um pulso de dois fótons emitido por a .

Em uma representação de interação, girando com frequência ω da cavidade b , assumindo o limite de ruído branco [42], a dinâmica do sistema é governada pelo

hamiltoniano ($\hbar = 1$)

$$\begin{aligned}
H = & \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega A^\dagger(\Omega) A(\Omega) d\Omega + \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega B^\dagger(\Omega) B(\Omega) d\Omega \\
& + i\sqrt{\frac{\kappa_a}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [a^\dagger A(\Omega) - a A^\dagger(\Omega)] d\Omega + i\sqrt{\frac{\kappa_b}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [b^\dagger B(\Omega) - b B^\dagger(\Omega)] d\Omega \\
& + \underbrace{g(a^2 + b)\sigma_+ + g(a^2 + b)^\dagger \sigma_- - i\Gamma \sigma_+ \sigma_-}_{H_{\text{sys}}},
\end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$ e $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$ representam os operadores levantamento e abaixamento atômicos, respectivamente, a e b ($a^\dagger$ e $b^\dagger$) são os operadores aniquilação (criação) dos modos intracavitários, enquanto $A(\Omega)$ e $B(\Omega)$ [$A^\dagger(\Omega)$ e $B^\dagger(\Omega)$] são os operadores aniquilação [criação] do modo de frequência Ω dos reservatórios bosônicos das cavidade a e b [37], respectivamente. As taxas de decaimento das amplitudes dos campos das cavidades a e b são representadas por κ_a e κ_b , respectivamente. Como o sistema dispõe de cavidades idênticas, uma vez que κ_a e κ_b estabelecem o acoplamento entre os modos internos e externos à cavidade, podemos considerar $\kappa \equiv \kappa_a = \kappa_b$. Por último, temos o termo dissipativo que torna o hamiltoniano não hermitiano $-i\Gamma \sigma_+ \sigma_-$, pois exclui as perdas de fótons por emissão espontânea atômica na dinâmica. A não hermiticidade do hamiltoniano faz com que a função de onda total deixe de ser normalizada, de modo que sua norma representará a eficiência do processo de conversão, ou seja, a probabilidade do pulso incidente não ser espalhado (dissipado) por emissão espontânea atômica. Outros tipos de perda de fótons como absorção pelos espelhos e desalinhamento dos mesmos não serão levadas em conta no projeto.

Neste trabalho, investigamos a resposta do sistema usando a teoria de *input-output* em duas abordagens. A primeira fornece um resultado aproximado, porém analítico, e utiliza as equações de Heisenberg-Langevin na aproximação de Holstein-Primakoff, onde o átomo é raramente excitado. Consideramos duas opções de exemplo como entrada neste sistema: um pulso de luz coerente e um pulso de fóton único. A outra abordagem proporciona um resultado exato, porém numérico, ao resolver a equação de Schrodinger para Eq. 2.1. Neste método, analisa-se a condição inicial de um pulso de um único fóton incidindo sobre a cavidade b .

2.2 EQUAÇÃO DE HEISENBERG-LANGEVIN

A partir do hamiltoniano da Eq. 2.1, obtemos a equação de Heisenberg-Langevin para um operador arbitrário do sistema [42]

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{O}} = & -i[\mathcal{O}, H_{\text{sys}}] - [\mathcal{O}, a^\dagger](\kappa a - \sqrt{2\kappa}a_{\text{in}}) + (\kappa a^\dagger - \sqrt{2\kappa}a_{\text{in}}^\dagger)[\mathcal{O}, a] \\
& - [\mathcal{O}, b^\dagger](\kappa b - \sqrt{2\kappa}b_{\text{in}}) + (\kappa b^\dagger - \sqrt{2\kappa}b_{\text{in}}^\dagger)[\mathcal{O}, b],
\end{aligned} \tag{2.2}$$

com os seguintes operadores de entrada e saída

$$a_{\text{in}}(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega e^{-i\Omega(t-t_{\text{in}})} \underbrace{A(\Omega, t_{\text{in}})}_{-a_{\text{in}}(\Omega)}, \quad (2.3)$$

$$a_{\text{out}}(t) = +\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega e^{-i\Omega(t-t_{\text{out}})} \underbrace{A(\Omega, t_{\text{out}})}_{a_{\text{out}}(\Omega)}, \quad (2.4)$$

$$b_{\text{in}}(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega e^{-i\Omega(t-t_{\text{in}})} \underbrace{B(\Omega, t_{\text{in}})}_{-b_{\text{in}}(\Omega)}, \quad (2.5)$$

$$b_{\text{out}}(t) = +\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega e^{-i\Omega(t-t_{\text{out}})} \underbrace{B(\Omega, t_{\text{out}})}_{b_{\text{out}}(\Omega)}, \quad (2.6)$$

onde utilizamos uma convenção de fase para os sinais das amplitudes, que incorporam a direção de propagação.

Tomamos os tempos $t_{\text{in}} \rightarrow -\infty$ e $t_{\text{out}} \rightarrow +\infty$, que representam o pulso de entrada bem anterior à cavidade e o pulso de saída bem depois, as condições de contorno que relacionam as amplitudes dos campos intracavitários e as amplitudes dos campos de entrada e saída são expressas pelas relações de *input-output* [43], calculadas em maior detalhe no apêndice A,

$$a_{\text{out}}(t) = \sqrt{2\kappa} a(t), \quad (2.7)$$

$$b_{\text{out}}(t) = \sqrt{2\kappa} b(t) - b_{\text{in}}(t), \quad (2.8)$$

onde, sem perda de generalidade, assumimos $a_{\text{in}}(t) = \mathbf{0}$ já que o reservatório da cavidade a sempre está no estado de vácuo inicialmente, e o pulso incidente sempre vem pelo reservatório de b .

A partir da Eq. 2.2, consideramos quando:

i $\mathcal{O} = \sigma_-$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_- &= -i[\sigma_-, H_{\text{sys}}] - \Gamma[\sigma_-, \sigma_+] \sigma_- \\ &= -i[\sigma_-, (ga^2 + gb)\sigma_+ + (g^*(a^\dagger)^2 + g^*b^\dagger)\sigma_-] + \Gamma\sigma_z\sigma_- \\ &= +ig(a^2 + b)\sigma_z - \Gamma\sigma_-; \end{aligned}$$

ii $\mathcal{O} = a^2$

$$\begin{aligned} \dot{a}^2 &= -i[a^2, H_{\text{sys}}] - 2\kappa a^2 \\ &= -i[a^2, (ga^2 + gb)\sigma_+ + (g^*(a^\dagger)^2 + g^*b^\dagger)\sigma_-] - 2\kappa a^2 \\ &= -i2g(a^\dagger a - 1)\sigma_- - 2\kappa a^2; \end{aligned}$$

iii $\mathcal{O} = b$

$$\begin{aligned} \dot{b} &= -i[b, H_{\text{sys}}] - \kappa b + \sqrt{2\kappa} b_{\text{in}} \\ &= -i[b, (ga^2 + gb)\sigma_+ + (g^*(a^\dagger)^2 + g^*b^\dagger)\sigma_-] - \kappa b + \sqrt{2\kappa} b_{\text{in}} \\ &= -ig\sigma_- - \kappa b + \sqrt{2\kappa} b_{\text{in}}; \end{aligned}$$

Assim, chegamos nas equações

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_-(t) = ig(a(t)^2 + b(t))\sigma_z(t) - \Gamma\sigma_-(t), \\ \dot{b}(t) = -ig\sigma_-(t) - \kappa b(t) + \sqrt{2\kappa}b_{in}(t), \\ \dot{a}^2(t) = -i2g(2a^\dagger(t)a(t) + 1)\sigma_-(t) - 2\kappa a^2(t). \end{cases} \quad (2.9)$$

Estas equações podem ser resolvidas através da Transformada de Fourier e da aproximação de Holstein-Primakoff [44], onde o átomo é raramente excitado

$$\sigma_z = \sigma_+\sigma_- - \sigma_-\sigma_+ \approx -\mathbf{1},$$

além disso, assumimos o regime de baixas excitações da cavidade a ($a^\dagger a \approx 0$), aproximação cuja validade pode ser verificada pela Fig. 9

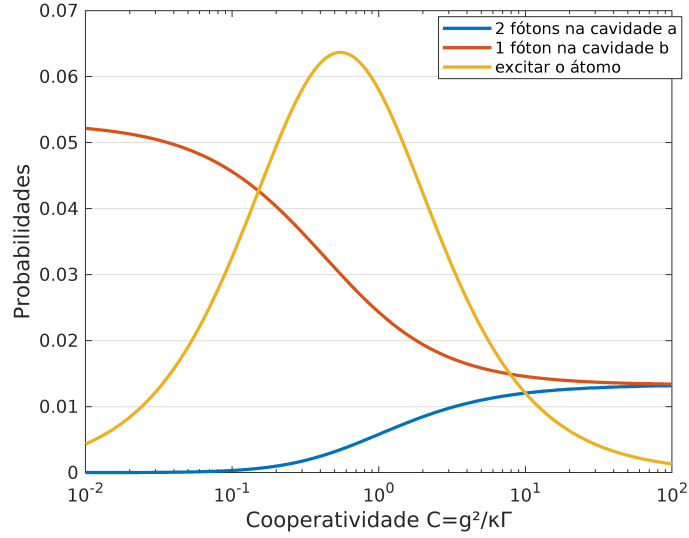


Figura 9 – A probabilidade de população das cavidades a , e b decai para valores insignificantes, à medida o sistema se aproxima do regime de alta cooperatividade. Dessa maneira, podemos considerar $a^\dagger a \approx b^\dagger b \approx 0$

Visando a simplificação dos cálculos, consideramos um operador $A(t) = a^2(t)$.

A Eq. 2.9 fica

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_- = -ig[a(t)^2 + b(t)] - \Gamma\sigma_-(t), \\ \dot{b}(t) = -ig\sigma_-(t) - \kappa b(t) + \sqrt{2\kappa}b_{in}(t), \\ \dot{A}(t) = -i2g[2a^\dagger(t)a(t) + 1]\sigma_-(t) - 2\kappa A(t). \end{cases} \quad (2.10)$$

Resolvendo individualmente,

$$\begin{aligned} \overbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_-(t) e^{-i\Omega t} dt}^{\mathcal{F}\{\sigma_-(t)\} = \tilde{\sigma}_-} &= \mathcal{F}\{-ig[a(t)^2 + b(t)] - \Gamma\sigma_-(t)\} \\ \underbrace{-i\Omega \tilde{\sigma}_-(\Omega)}_0 &= -ig\tilde{A} - ig\tilde{b} - \Gamma\tilde{\sigma}_- = 0 \end{aligned}$$

considerando $\Omega = 0$, visto que tomamos o referencial da cavidade, e isolando $\tilde{\sigma}_-$,

$$\tilde{\sigma}_- = \frac{-ig\tilde{A} - ig\tilde{b}}{\Gamma}. \quad (2.11)$$

Depois, para $b(t)$

$$\begin{aligned} \overbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(t) e^{-i\Omega t} dt}^{\mathcal{F}\{b(t)\}=\tilde{b}} &= \mathcal{F}\{-ig\sigma_-(t) - \kappa b(t) + \sqrt{2\kappa}b_{in}(t)\} \\ \underbrace{-i\Omega b(\Omega)}_0 &= -ig\tilde{\sigma}_- - \kappa\tilde{b} + \sqrt{2\kappa}\tilde{b}_{in} = 0 \end{aligned}$$

isolando $\tilde{b}$ e substituindo $\tilde{\sigma}_-$ (2.11)

$$\tilde{b} = \frac{-ig\tilde{\sigma}_- + \sqrt{2\kappa}\tilde{b}_{in}}{\kappa} = \frac{-g^2\tilde{A} + \Gamma\sqrt{2\kappa}b_{in}}{(\Gamma\kappa + g^2)}. \quad (2.12)$$

Por último, $A(t)$, temos

$$\begin{aligned} \overbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(t) e^{-i\Omega t} dt}^{\mathcal{F}\{A(t)\}=\tilde{A}} &= \mathcal{F}\{-i2g[2a^\dagger(t)a(t) + 1]\sigma_-(t) - 2\kappa A(t)\} \\ \underbrace{-i\Omega A(\Omega)}_0 &= -2ig\tilde{\sigma}_- - 2\kappa\tilde{A} = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

isolando $\tilde{A}(t)$ e substituindo $\tilde{\sigma}_-$ (2.11) e $\tilde{b}(t)$ (2.14)

$$\tilde{A} = \frac{-ig\tilde{\sigma}_-}{\kappa} = \frac{-g^2\tilde{A} + \Gamma\sqrt{2\kappa}b_{in}}{(\Gamma\kappa + g^2)} \quad (2.14)$$

Definimos o parâmetro de cooperatividade do sistema como $C = \frac{g^2}{\kappa\Gamma}$ para reescrever $\tilde{b}(t)$ e $\tilde{A}(t)$ em função de $\tilde{b}_{in}$ e C:

$$\tilde{b}(t) = \frac{-C\tilde{A} + \sqrt{\frac{2}{\kappa}}\tilde{b}_{in}}{(1 + C)}, \quad \tilde{A}(t) = -\frac{C\sqrt{\frac{2}{\kappa}}\tilde{b}_{in}}{(1 + 2C)}, \quad (2.15)$$

em seguida, substituímos nas relações de *input-output* Eqs. 2.7 e 2.8:

$$\begin{cases} b_{out} = \left(\frac{1}{1 + 2C}\right) b_{in} \\ \frac{a_{out}^2}{\sqrt{2}} = -\left(\frac{2C}{1 + 2C}\right) b_{in}. \end{cases} \quad (2.16)$$

2.3 EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER

Consideramos como estado inicial um pulso de um fóton incidindo na cavidade

b

$$|\Psi(t_0)\rangle = \underbrace{|g\rangle}_{\text{átomo}} \underbrace{|0\rangle_a |0\rangle_b}_{\text{cavidades}} \underbrace{|0\rangle_\alpha |1\rangle_\beta}_{\text{reservatórios}}, \quad (2.17)$$

o estado com uma excitação no reservatório β , $|1\rangle_\beta = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \zeta_{\text{in}}(\Omega) B^\dagger(\Omega) |0\rangle_\beta$ [37], com a transformada de Fourier da função densidade espectral $\zeta_{\text{in}}(\Omega)$ representando a forma temporal do pulso (quadraticamente normalizada) $\beta_{\text{in}}(t)$, que assumiremos como gaussiana $\beta_{\text{in}}(t) = (\eta\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(t - \tau_0)^2}{\eta^2}\right]$, onde τ_0 é o instante em que o máximo do pulso atinge o espelho da cavidade b e $\tau_p = 2\eta\sqrt{2\ln(2)}$ caracteriza a duração do pulso.

Com isso em mente, prosseguimos com os cálculos desta seção, que consistem em resolver a dinâmica do sistema pelo método de Kuhn [45]. Considerando o hamiltoniano 2.1 e o estado $|\psi(t_0)\rangle$ acima, expressamos o estado mais geral possível para a dinâmica do sistema como

$$\begin{aligned}
|\Psi_t\rangle = & C_e(t) |e\rangle |0\rangle_a |0\rangle_b |0\rangle_\alpha |0\rangle_\beta \\
& + C_a(t) |g\rangle |2\rangle_a |0\rangle_b |0\rangle_\alpha |0\rangle_\beta \\
& + C_b(t) |g\rangle |0\rangle_a |1\rangle_b |0\rangle_\alpha |0\rangle_\beta \\
& + \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(\tilde{\Omega}, t) |g\rangle |1\rangle_a |0\rangle_b A^\dagger(\tilde{\Omega}) |0\rangle_\alpha |0\rangle_\beta d\tilde{\Omega} \\
& + \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(\tilde{\Omega}, t) |g\rangle |1\rangle_a |0\rangle_b |0\rangle_\alpha B^\dagger(\tilde{\Omega}) |0\rangle_\beta d\tilde{\Omega} \\
& + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}', t) |g\rangle |0\rangle_a |0\rangle_b \frac{A^\dagger(\tilde{\Omega}) A^\dagger(\tilde{\Omega}')}{\sqrt{2}} |0\rangle_\alpha |0\rangle_\beta d\tilde{\Omega} d\tilde{\Omega}'. \quad (2.18)
\end{aligned}$$

Ao aplicar a equação de Schrödinger,

$$\begin{aligned}
H |\psi_t\rangle = & |e\rangle |0\rangle_a |0\rangle_b |0\rangle_\alpha |0\rangle_\beta \left[\sqrt{2}gC_a(t) + gC_b(t) - i\Gamma C_e(t) \right] \\
& + |g\rangle |2\rangle_a |0\rangle_b |0\rangle_\alpha |0\rangle_\beta \left[\sqrt{2}gC_e(t) + i\sqrt{\frac{2\kappa}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(\tilde{\Omega}, t) d\tilde{\Omega} \right] \\
& + \int_{-\infty}^{+\infty} |g\rangle |1\rangle_a |0\rangle_b \hat{A}^\dagger(\tilde{\Omega}) |0\rangle_\alpha |0\rangle_\beta \\
& \quad \left[-i\sqrt{\frac{2\kappa}{\pi}} C_a(t) + \Omega \xi(\tilde{\Omega}, t) + i\sqrt{\frac{2\kappa}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\Omega, \tilde{\Omega}, t) \right] d\tilde{\Omega} \\
& + |g\rangle |0\rangle_a |0\rangle_b |0\rangle_\alpha |0\rangle_\beta \left[gC_e(t) + i\sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(\tilde{\Omega}, t) d\tilde{\Omega} \right] \\
& + \iint_{-\infty}^{+\infty} |g\rangle |0\rangle_a |0\rangle_b \frac{\hat{A}^\dagger(\Omega) \hat{A}^\dagger(\tilde{\Omega})}{\sqrt{2}} |0\rangle_\alpha |0\rangle_\beta \\
& \quad \left[-i\sqrt{\frac{2\kappa}{\pi}} \xi(\tilde{\Omega}, t) + 2\chi(\Omega, \tilde{\Omega}, t) \right] d\Omega d\tilde{\Omega} \\
& + \int_{-\infty}^{+\infty} |g\rangle |0\rangle_a |0\rangle_b |0\rangle_\alpha \hat{B}^\dagger(\Omega) |0\rangle_\beta \left[-i\sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} C_b(t) + \Omega \zeta(\tilde{\Omega}, t) \right] d\Omega \\
& = i |\dot{\Psi}_t\rangle \quad (2.19)
\end{aligned}$$

Dessa maneira, obtemos as seguintes equações para os coeficientes:

$$\dot{C}_e(t) = -i\sqrt{2}gC_a(t) - igC_b(t) - \Gamma C_e(t), \quad (2.20)$$

$$\dot{C}_a(t) = -i\sqrt{2}gC_e(t) + \sqrt{\frac{2\kappa}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(\Omega, t) d\Omega, \quad (2.21)$$

$$\dot{C}_b(t) = -igC_e(t) + \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(\Omega, t) d\Omega, \quad (2.22)$$

$$\dot{\xi}(\Omega, t) = -\sqrt{\frac{2\kappa}{\pi}} C_a(t) - i\Omega \xi(\Omega, t) + \sqrt{\frac{2\kappa}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\Omega, \tilde{\Omega}, t) d\Omega, \quad (2.23)$$

$$\dot{\zeta}(\Omega, t) = -\sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} C_b(t) - i\Omega \zeta(\Omega, t), \quad (2.24)$$

$$\dot{\chi}(\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}', t) = -\sqrt{\frac{2\kappa}{\pi}} \xi(\tilde{\Omega}, t) - i(\Omega + \Omega') \chi(\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}', t). \quad (2.25)$$

Integrando $\dot{\xi}(\Omega, t)$ e $\dot{\zeta}(\Omega, t)$, $\dot{\chi}(\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}', t)$ no tempo, considerando $\xi(\Omega, t) = \tilde{\xi}(\Omega, t)e^{-i\Omega t}$,

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(\Omega, t) &= \dot{\tilde{\xi}}(\Omega, t)e^{-i\Omega t} - \overbrace{i\Omega \tilde{\xi}(\Omega, t)e^{-i\Omega t}}^{i\Omega \xi(\Omega, t)} \\ &= -\sqrt{\frac{2\kappa_a}{\pi}} C_a(t) - i\Omega \xi(\Omega, t) + \sqrt{\frac{2\kappa_a}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\Omega, \tilde{\Omega}, t) d\Omega \end{aligned}$$

isolando $\dot{\tilde{\xi}}(\Omega, t)$

$$\dot{\tilde{\xi}}(\Omega, t) = \left[-\sqrt{\frac{2\kappa_a}{\pi}} C_a(t) + \sqrt{\frac{2\kappa_a}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\Omega, \tilde{\Omega}, t) d\Omega \right] e^{i\Omega t}$$

tomando os limites de integração t_0 até $t > t_0$ (com $t_0 \rightarrow -\infty$),

$$\xi(\Omega, t)e^{i\Omega t} - \xi(\Omega, t_0)e^{i\Omega t_0} = -\sqrt{\frac{2\kappa}{\pi}} \int_{t_0}^t C_a(\tau)e^{i\Omega\tau} d\tau + \sqrt{\frac{2\kappa}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{t_0}^t \chi(\Omega, \tilde{\Omega}, \tau)e^{i\Omega\tau} d\tau d\Omega$$

onde assumimos $\xi(\Omega, t_0)e^{i\Omega t_0} = \xi_{in}(\Omega) = 0$, bem como os todos os outros pulsos iniciais que não sejam em b , devido ao estado inicial $|\psi(t_0)\rangle$ (2.17). Em seguida, multiplicamos ambos os lados por $e^{-i\Omega t}$,

$$\xi(\Omega, t) = -\sqrt{\frac{2\kappa}{\pi}} \int_{t_0}^t C_a(\tau)e^{-i\Omega(t-\tau)} d\tau + \sqrt{\frac{2\kappa}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{t_0}^t \chi(\Omega, \tilde{\Omega}, \tau)e^{i(\Omega+\tilde{\Omega})\tau} d\tau d\Omega. \quad (2.26)$$

Após obter $\xi(\Omega, t)$, usaremos a função delta de Dirac, a título de facilitar a substituição

de $\xi(\Omega, t)$ na Eq. 2.21,

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{2\kappa}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\Omega, t) d\Omega &= \sqrt{\frac{2\kappa}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\sqrt{\frac{2\kappa}{\pi}} \int_{t_0}^t C_a(\tau) e^{-i\Omega(t-\tau)} d\tau \right] d\Omega \\
&= -\frac{2\kappa}{\pi} \int_{t_0}^t C_a(\tau) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\Omega(t-\tau)} d\Omega}_{2\pi\delta(t-\tau)} d\tau \\
&= -4\kappa \underbrace{\int_{t_0 \rightarrow -\infty}^t C_a(\tau) \delta(t-\tau) d\tau}_{\frac{C_a(t)}{2}} \\
&= -2\kappa C_a(t)
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Calculamos o termo $\dot{\zeta}(\Omega, t)$ analogamente, lembrando que $\beta_{\text{in}}(t)$ é transformada de Fourier de $\zeta_{\text{in}}(\Omega)$, obtendo

$$\sqrt{\frac{2\kappa}{\pi}} \int \dot{\zeta}(\Omega, t) d\Omega = -\kappa C_b(t) + \sqrt{2\kappa} \beta_{\text{out}}(t). \tag{2.28}$$

Ao substituir as Eqs. (2.27) e (2.28) em (2.21) e (2.22), obtemos

$$\begin{cases} \dot{C}_e(t) = -i\sqrt{2}gC_a(t) - igC_b(t) - \Gamma C_e(t), \\ \dot{C}_a(t) = -i\sqrt{2}gC_e(t) - 2\kappa C_a(t), \\ \dot{C}_b(t) = -igC_e(t) - \kappa C_b(t) + \sqrt{2\kappa}\beta_{\text{in}}(t). \end{cases} \tag{2.29}$$

O último termo, $\dot{\chi}(\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}', t)$ é usado para investigar o pulso de saída pela cavidade a e pode ser calculado analogamente, chegando no seguinte resultado

$$\alpha_{\text{out}} = \frac{1}{2\pi} \iint \chi(\Omega, \Omega', t_1) e^{(\Omega+\Omega')(t-t_1)} d\Omega d\Omega' \tag{2.30}$$

Novamente, integramos no tempo $\dot{\xi}(\Omega, t)$ e $\dot{\zeta}(\Omega, t)$, mas agora de t a $t_1 > t$ (com $t_1 \rightarrow \infty$). Depois, comparamos os resultados com aqueles obtidos pelas integrais de t_0 a $t > t_0$, e assim obtemos as relações de input-output:

$$\begin{cases} \beta_{\text{out}}(t) = \sqrt{2\kappa_b} C_b(t) - \beta_{\text{in}}(t), \\ \alpha_{\text{out}}(t) = 2\kappa_a C_a(t). \end{cases} \tag{2.31}$$

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Analisaremos a resposta do sistema para um pulso incidente em b de um único fóton (por Schrodinger e Heisenberg-Langevin), e para um pulso coerente incidente em b (somente Heisenberg-Langevin).

3.1 RESULTADOS PELA ABORDAGEM DAS EQUAÇÕES DE HEISENBERG-LANGEVIN

As relações de *input-output* para o método de Heisenberg-Langevin foram dadas pela Eq. 2.16

$$\begin{cases} b_{out} = \left(\frac{1}{1+2C} \right) b_{in} \\ \frac{a_{out}^2}{\sqrt{2}} = - \left(\frac{2C}{1+2C} \right) b_{in}, \end{cases}$$

dessa maneira, obtêm-se a refletância de um fóton pelo espelho da cavidade b , $R = \left(\frac{1}{1+2C} \right)^2$, e a transmitância de dois fótons pela cavidade a , $T = \left(\frac{2C}{1+2C} \right)^2$.

No regime de alta cooperatividade ($C \gg 1$), têm-se que $R \rightarrow 0$ e $T \rightarrow 1$, ou seja, $b_{in} = -\frac{a_{out}^2}{\sqrt{2}}$. Nessas circunstâncias, o pulso incidente sobre a cavidade b é totalmente transmitido através da cavidade a .

A partir deste resultado, podemos analisar o campo de saída dado um pulso inicial qualquer sobre a cavidade b . Para tal, no regime de alta cooperatividade, basta escrever o pulso inicial $|\phi\rangle_{in}$ em função de b_{in} , com o pulso de saída $|\phi\rangle_{out}$ sendo obtido aplicando a transformação $b_{in} = -\frac{a_{out}^2}{\sqrt{2}}$.

Como primeiro exemplo, consideremos um pulso de único fóton que incide sobre a cavidade b ,

$$|\phi\rangle_{in} = |0\rangle_a |1\rangle_b = b_{in}^\dagger |0\rangle_a |0\rangle_b \quad (3.1)$$

$$\downarrow \quad (3.2)$$

$$|\phi\rangle_{out} = -\frac{(a_{out}^\dagger)^2}{\sqrt{2}} |0\rangle_a |0\rangle_b = -|2\rangle_a |0\rangle_b, \quad (3.3)$$

demonstrando a conversão de um pulso de um único fóton em um pulso de dois fótons que sai pela cavidade a . Desse modo, o sistema age como um cristal não linear ao transformar o pulso pelo processo de conversão paramétrica descendente degenerada, entretanto, diferente do cristal, o sistema realiza esta conversão de maneira determinística em vez de probabilística.

Para o segundo exemplo, consideremos um pulso coerente que incide na cavidade b ,

$$|\phi\rangle_{\text{in}} = |0\rangle_a |\alpha\rangle_b = D_b(\alpha) |0\rangle_a |0\rangle_b = e^{(\alpha b_{\text{in}}^\dagger - \alpha^* b_{\text{in}})} |0\rangle_a |0\rangle_b \quad (3.4)$$

$\downarrow$

$$|\phi\rangle_{\text{out}} = e^{\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{2}} a_{\text{out}}^{\dagger 2} + \frac{\alpha^*}{\sqrt{2}} a_{\text{out}}^2\right)} |0\rangle_a |0\rangle_b = S_a(\zeta) |0\rangle_a |0\rangle_b = |\zeta\rangle_a |0\rangle_b. \quad (3.5)$$

Neste caso, obtemos um pulso de estado comprimido como saída em a , onde o parâmetro de compressão vale $\zeta = \sqrt{2}\alpha$.

Como este processo constitui de uma conversão direta de luz coerente em luz comprimida, e não depende de um tempo de compressão, este resultado representa um grande avanço na produção de luz comprimida, mesmo com a implementação de um acoplamento não linear (JC2). Ainda, esta conversão é realizada mediante interferências quânticas, uma vez que não verifica-se troca de energia entre o átomo e o campo, visto que nenhum destes é praticamente populado.

3.2 RESULTADOS PELA ABORDAGEM DA EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER

As relações de *input-output* para o método da equação de Schrödinger são dadas pela Eq. 2.31:

$$\begin{cases} \beta_{\text{out}}(t) = \sqrt{2\kappa_b} C_b(t) - \beta_{\text{in}}(t), \\ \alpha_{\text{out}}(t) = 2\kappa_a C_a(t), \end{cases}$$

onde $\beta_{\text{out}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \zeta(\Omega, t_1) e^{-\Omega(t-t_1)} d\Omega$ e $\alpha_{\text{out}}(t) = \frac{1}{2\pi} \iint \chi(\Omega, \Omega', t_1) e^{-(\Omega+\Omega')(t-t_1)} d\Omega d\Omega'$, os quais representam as amplitudes de probabilidade de haver um pulso de um único fóton saindo da cavidade b e de haver um pulso de dois fótons saindo da cavidade a , respectivamente. Dessa forma, temos a refletância do pulso de único fóton inicial pela cavidade b , $R = \int_{-\infty}^{\infty} |\beta_{\text{out}}(t)|^2 dt$, e a transmitância de um pulso de dois fótons pela cavidade a , $T = \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha_{\text{out}}(t)|^2 dt$.

A Fig. 10 ilustra a dinâmica do sistema considerando $\eta = 50/\kappa$, $\Gamma = 0.2\kappa$ e $g = 5\kappa$, o que equivale a uma cooperatividade $C = 125$. Em relação ao pulso de entrada $[\beta_{\text{in}}(t) - \text{curva azul}]$, nota-se que sua reflexão pela cavidade b é suprimida $[\beta_{\text{out}}(t) - \text{curva amarela}]$, devido a sua conversão em um pulso de dois fótons, transmitido pela cavidade a $[\alpha_{\text{out}}(t) - \text{curva vermelha}]$. Observa-se também que o átomo praticamente permanece em seu estado fundamental durante toda a dinâmica ($|C_e(t)|^2 \approx 0$).

A Figura 11 compara a refletância de um fóton e a transmitância de dois fótons, em função da cooperatividade, quando temos um pulso de único fóton inicial incidindo

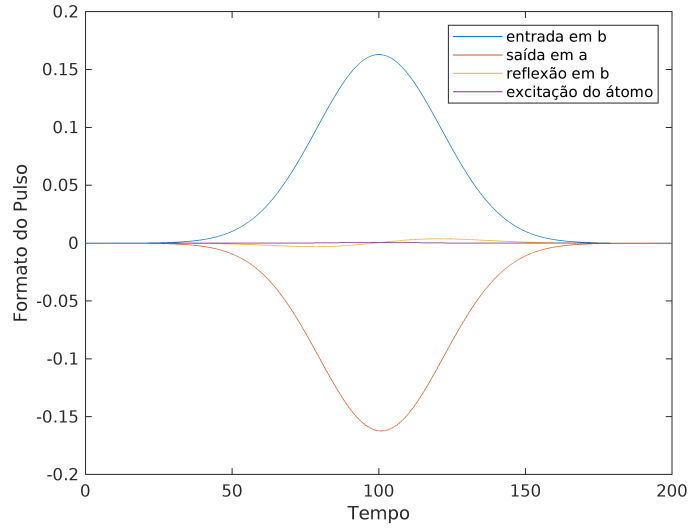


Figura 10 – Dinâmica do sistema para $C = \frac{g^2}{\kappa\Gamma}$. O formato do pulso de saída em a é similar ao pulso de entrada em b , salvo a mudança de fase e a consideração do fenômeno de reflexão em b e de excitação do átomo.

sobre a cavidade b para ambas as abordagens. Devido a resultados extremamente próximos, validam-se as aproximações utilizadas para a obtenção dos resultados analíticos.

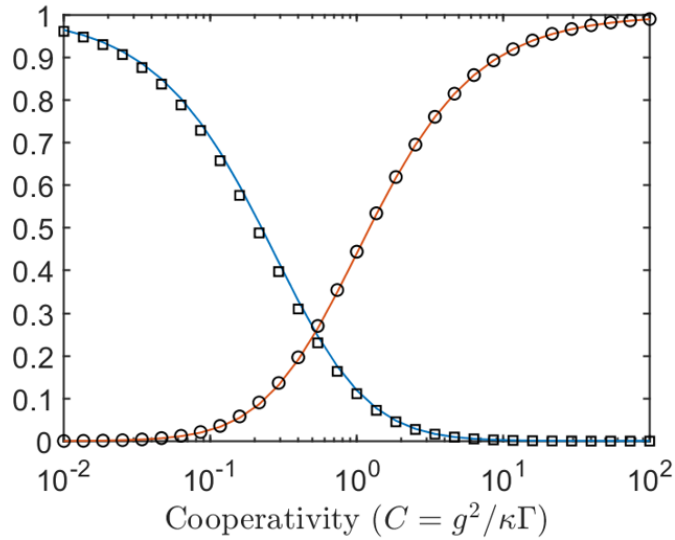


Figura 11 – Refletância de um fóton (azul) e transmitância de dois fótons (vermelho) em função da cooperatividade para $\eta = 50/\kappa$ e $\Gamma = 0.2\kappa$, considerando o resultado exato via equação de Schrödinger (curvas) e o resultado aproximado via equação de Heisenberg-Langevin (símbolos).

3.3 CONCLUSÕES

Neste trabalho, investigou-se a resposta de um sistema constituído de cavidades ópticas cruzadas que integra uma interação Jaynes-Cummings convencional com uma

de Jaynes-Cummings de dois fótons. Cada cavidade está acoplada a um átomo de dois níveis mediante uma das interações de JC. Consideramos o regime de alta cooperatividade para mostrar que este sistema atua como um cristal não linear ao efetuar um processo de conversão paramétrica descendente degenerada, mas determinístico ao invés de estocástico. Em decorrência disso, é possível empregar o sistema como um conversor de pulsos de único fóton em pulsos de dois fótons, além de converter diretamente luz coerente em luz comprimida. Esta conversão, por sua vez, se dá através de um processo de interferência quântica, visto que não há troca de energia entre o átomo e os modos intracavitários, pois estes praticamente nem mesmo são populados.

A APÊNDICE

Neste projeto, o sistema é constituído de um átomo de dois níveis que se acopla ressonantemente a ambas as cavidades, com seus respectivos reservatórios. Entretanto, para fins de simplicidade, consideraremos o exemplo de uma cavidade b e seu reservatório cujo hamiltoniano pode ser escrito como

$$H_i = \frac{i\hbar}{2\pi} \int_0^\infty \sqrt{2\kappa(\omega')} [bB^\dagger(\omega') - b^\dagger B(\omega')] d\omega', \quad (\text{A.1})$$

onde B e $B^\dagger$ são operadores dos modos externos, também chamado de "banho térmico", b e $b^\dagger$ são operadores da cavidade e ω' a frequência dos modos acoplados externamente.

Na aproximação do ruído branco (*white noise limit*) [42], κ varia muito pouco no intervalo de frequência de interesse, podemos considerá-lo constante $\kappa(\omega') \approx \kappa$. O hamiltoniano da cavidade é

$$H_c = \hbar\omega \left(b^\dagger b + \frac{1}{2} \right), \quad (\text{A.2})$$

onde o termo constante $\frac{1}{2}$ não afeta a dinâmica do sistema e por isso será desconsiderado. A contribuição dos modos externos é

$$H_{ext} = \hbar \int_0^\infty \omega' B^\dagger(\omega') B(\omega') d\omega'. \quad (\text{A.3})$$

A extensão deste exemplo para a outra cavidade a é direta, como pode ser verificado ao observar o hamiltoniano total do sistema (2.1)

$$\begin{aligned} H = & \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega A^\dagger(\Omega) A(\Omega) d\Omega + \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega B^\dagger(\Omega) B(\Omega) d\Omega \\ & + i\sqrt{\frac{\kappa_a}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [a^\dagger A(\Omega) - aA^\dagger(\Omega)] d\Omega + i\sqrt{\frac{\kappa_b}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [b^\dagger B(\Omega) - bB^\dagger(\Omega)] d\Omega \\ & + \underbrace{g(a^2 + b)\sigma_+ + g(a^2 + b)^\dagger \sigma_- - i\Gamma\sigma_+\sigma_-}_{H_{\text{sys}}}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Voltando para o exemplo de uma cavidade [34], consideraremos uma substituição de variáveis na representação de interação, onde temos um referencial girando na frequência da cavidade. Considere a equação de Schrödinger

$$H |\psi\rangle = i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt}$$

onde

$$H = \omega b^\dagger b + \frac{\omega}{2} \sigma_z + g(b\sigma_+ + b^\dagger \sigma_-) + \int_0^\infty \omega' B^\dagger(\omega') B(\omega') + i\sqrt{2\kappa} \int_0^\infty [bB^\dagger(\omega') - b^\dagger B(\omega')] d\omega'. \quad (\text{A.5})$$

Realizamos a seguinte transformação unitária $|\psi\rangle = U_t |\phi\rangle$, com $U_t = e^{-iH_0 t}$. Substituindo,

$$\frac{d|\psi\rangle}{dt} = \frac{dU_t}{dt} |\phi\rangle + U_t \frac{d|\phi\rangle}{dt} = -iH_0 U_t |\phi\rangle + U_t \frac{d|\phi\rangle}{dt}, \quad (\text{A.6})$$

multiplicamos ambos os lados por $i\hbar$,

$$\underbrace{i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt}}_{H|\psi\rangle = HU_t|\phi\rangle} = H_0 U_t |\phi\rangle + U_t \frac{d|\phi\rangle}{dt} = U_t^\dagger H_0 U_t + i\hbar U_t \frac{d|\phi\rangle}{dt}. \quad (\text{A.7})$$

Com $U_t^\dagger U_t = \mathbb{I}$, multiplicamos ambos os lados por $U_t^\dagger$

$$U_t^\dagger H_0 U_t |\phi\rangle = U_t^\dagger H_0 \hbar U_t |\phi\rangle + U_t^\dagger i\hbar U_t \frac{d|\phi\rangle}{dt}, \quad (\text{A.8})$$

de maneira de que temos a equação de Schrödinger na nova representação,

$$i\hbar \frac{d|\phi\rangle}{dt} = \underbrace{U_t^\dagger (H - H_0) U_t}_V |\phi\rangle \quad (\text{A.9})$$

na qual $|\phi\rangle$ e V são o vetor estado e o hamiltoniano na representação de interação. Escolhendo H_0 como

$$H_0 = \omega b^\dagger b + \omega_0 \sigma_z + \omega B^\dagger(\omega') B(\omega'), \quad (\text{A.10})$$

temos as relações

$$U_t^\dagger b U_t = b e^{-i\omega t}; \quad (\text{A.11})$$

$$U_t^\dagger b^\dagger U_t = b^\dagger e^{i\omega t}; \quad (\text{A.12})$$

$$U_t^\dagger \sigma_- U_t = \sigma_- e^{-i\omega t}; \quad (\text{A.13})$$

$$U_t^\dagger \sigma_+ U_t = \sigma_+ e^{i\omega t}; \quad (\text{A.14})$$

$$U_t^\dagger B(\omega') U_t = B(\omega') e^{-i\omega t}; \quad (\text{A.15})$$

$$U_t^\dagger B^\dagger(\omega') U_t = B^\dagger(\omega') e^{i\omega t}. \quad (\text{A.16})$$

Substituindo-as em $V = U_t(H - H_0)U_t$, da Eq. A.9,

$$\begin{aligned} H - H_0 &= \omega b^\dagger b - \frac{\omega_0}{2} \sigma_z + g(b\sigma_+ + b^\dagger \sigma_-) + \int_0^\infty \omega' B^\dagger(\omega') B(\omega') d\omega' \\ &+ i\sqrt{2\kappa} \int_0^\infty [bB^\dagger(\omega') - b^\dagger B(\omega')] d\omega' - \omega b^\dagger b - \omega \sigma_z - \int_0^\infty \omega B^\dagger(\omega') B(\omega') d\omega', \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

obtemos

$$V = \int_{-\infty}^\infty (\omega' - \omega) B^\dagger(\omega') B(\omega') d\omega' + i\sqrt{2\kappa} \int_0^\infty [bB^\dagger(\omega') - b^\dagger B(\omega')] d\omega' + g(b\sigma_+ + b^\dagger \sigma_-). \quad (\text{A.18})$$

Considerando a substituição de variáveis onde $\Omega = \omega' - \omega$, $d\Omega = d\omega'$ os limites de integração ficam

$$\begin{cases} \omega' \rightarrow \infty, & \Omega \rightarrow \infty \\ \omega' \rightarrow 0, & \Omega \rightarrow -\omega \end{cases}$$

como $\omega \gg 1$ no regime óptico, podemos aproximar

$$\begin{cases} \omega' \rightarrow \infty, & \Omega \rightarrow \infty \\ \omega' \rightarrow 0, & \Omega \rightarrow -\omega \approx -\infty \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

e ficar com o hamiltoniano

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega B^\dagger(\Omega) B(\Omega) d\Omega' + i\sqrt{2\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} [bB^\dagger(\Omega) - b^\dagger B(\Omega)] d\Omega' + g(b\sigma_+ + b^\dagger\sigma_-) \quad (\text{A.20})$$

É importante observar que nesta representação não dispomos mais do termo $\omega b^\dagger b$ e agora a transformação de Fourier será em relação a Ω , uma dessintonia entre a frequência do campo externo e da cavidade.

Agora, seguiremos com a dedução dos operadores de campo de entrada e de saída, bem como as equações de Langevin. A equação de movimento de Heisenberg para um operador c qualquer do sistema é

$$\partial_t c = -\frac{i}{\hbar} [c, H]. \quad (\text{A.21})$$

Para o operador aniquilação b da cavidade, sabendo que $[b, H_{ext}] = 0$, $[b, b^\dagger] = 1$ e $[b, b^\dagger b] = b$, temos

$$\begin{aligned} \partial_t b &= -\frac{i}{\hbar} [b, H_c] - \frac{i}{\hbar} [b, H_i] \\ &= -i\Omega b(t) - \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B(\Omega) d\Omega. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

De maneira similar, para $B(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \partial_t B(\Omega) &= -\frac{i}{\hbar} [B, H_c] - \frac{i}{\hbar} [B, H_i] \\ &= -i\Omega B(\Omega) - \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} b(t). \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Usaremos estas equações diferenciais [A.22](#) e [A.23](#) para obter a equação de Langevin quântica, além de sua externsão invertida no tempo, e os operadores do campo de entrada e saída.

A.1 CAMPO DE ENTRADA

Para resolver a Eq. [A.23](#), usaremos o método do fator integrante e integramos de um tempo t_0 (anterior a chegada do pulso na cavidade) até t ,

$$B(\Omega)e^{i\Omega t} - B_0(\Omega)e^{i\Omega t_0} = -\sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \int_{t_0}^t b(t')e^{i\Omega t'} dt'. \quad (\text{A.24})$$

Onde $B_0(\Omega) := B(\Omega)|_{t=t_0}$. Isolando $B(\Omega)$,

$$B(\Omega) = B_0(\Omega)e^{-i\Omega(t-t_0)} - \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \int_{t_0}^t b(t')e^{-i\Omega(t-t')} dt' \quad (\text{A.25})$$

para substituir $B(\Omega)$ na Eq. A.22,

$$\partial_t b = -i\Omega b(t) - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\kappa} B_0(\Omega) e^{-i\Omega(t-t_0)} d\Omega}_{\mathcal{F}\{B_0(\Omega)\}=b_{\text{in}}(t)} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\kappa d\Omega \int_{t_0}^t b(t') e^{-i\Omega(t-t')} dt', \quad (\text{A.26})$$

onde o segundo termo é uma Transformada de Fourier de $B_0(\Omega)$, que resulta em uma função de t , que chamamos de $\sqrt{2\kappa}b_{\text{in}}(t)$

$$b_{\text{in}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B_0 e^{-i\Omega(t-t_0)} d\Omega. \quad (\text{A.27})$$

Conhecido como operador de campo de entrada, representa a influência dos modos externos $B(\Omega)$ no tempo t_0 .

Já o último termo da Eq. A.26 conta um uma função Delta de Dirac

$$-\frac{\kappa}{\pi} \int_{t_0}^t b(t') dt' \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\Omega(t-t')} d\Omega}_{=2\pi\delta(t-t')} = -\kappa b(t), \quad (\text{A.28})$$

onde

$$\int_{t_0}^t b(t') \delta(t-t') dt' = \frac{b(t)}{2} \quad (\text{A.29})$$

é uma função Delta dividida no meio, uma vez que integramos de $-\infty$ até t , cobrimos metade da curva.

Portanto, a Eq. A.26 se torna

$$\partial_t b = -i\Omega b(t) - \sqrt{2\kappa}b_{\text{in}}(t) - \kappa b(t), \quad (\text{A.30})$$

conhecida como equação quântica de Langevin.

A.2 CAMPO DE SAÍDA

Assim como feito anteriormente, usaremos a equação de Langevin invertida no tempo para obter o operador do campo de saída. Integrando a Eq. (A.23) de t a um tempo futuro t_1 , obtemos

$$B(\Omega) = B_1(\Omega) e^{-i\Omega(t-t_0)} + \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \int_{t_1}^t b(t') e^{-i\Omega(t-t')} dt, \quad (\text{A.31})$$

onde $B_1(\Omega) := B(\Omega)|_{t=t_1}$. Novamente, substituindo na Eq. A.22, obtemos

$$\partial_t b = -i\Omega b(t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\kappa} B_1(\Omega) e^{-i\Omega(t-t_1)} d\Omega + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \kappa d\Omega \int_t^{t_1} b(t') e^{-i\Omega(t-t')} dt', \quad (\text{A.32})$$

no qual podemos definir o operador do campo de saída como

$$b_{\text{out}}(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B_1(\Omega) e^{-i\Omega(t-t_1)} d\Omega. \quad (\text{A.33})$$

dessa maneira, a Eq. A.32 se torna a recíproca equação de Langevin revertida no tempo

$$\partial_t b = -i\Omega b(t) + \sqrt{2\kappa} b_{\text{out}} + \kappa b(t). \quad (\text{A.34})$$

onde o operador saída $b_{\text{out}}(t)$ representa o acoplamento do sistema à futuros modos externos, em um tempo t_1 , posterior à saída do pulso pela cavidade.

A.3 RELAÇÃO INPUT-OUTPUT

Para relacionar os pulsos de entrada e saída e obter a relação *input-output*, integramos a Eq. A.25 dos modos externos $B(\Omega)$, em t_0 , sobre a frequência, na aproximação de Markov para ruído branco

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} B(\Omega) d\Omega &= \int_{-\infty}^{\infty} B_0(\Omega) e^{-i\Omega(t-t_0)} d\Omega - \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \int_{t_0}^t b(t') \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\Omega(t-t')} d\Omega \\ &= \sqrt{2\pi} b_{\text{in}}(t) - \sqrt{\kappa\pi} b(t) \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Que podemos reescrever como

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B(\Omega) d\Omega = b_{\text{in}}(t) + \sqrt{2\kappa} b(t). \quad (\text{A.36})$$

Da mesma maneira, integramos a Eq. A.31 dos modos externos em t_1 , sobre a frequência

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} B(\Omega) d\Omega &= \int_{-\infty}^{\infty} B_1(\Omega) e^{-i\Omega(t-t_1)} d\Omega + \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \int_{t_0}^t b(t') dt' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\Omega(t-t')} d\Omega \\ &= -\sqrt{2\pi} b_{\text{out}}(t) + \sqrt{\kappa\pi} b(t), \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

que reescrevemos como

$$\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B(\Omega) d\Omega = b_{\text{out}}(t) + \sqrt{2\kappa} b(t). \quad (\text{A.38})$$

Igualando as Eq. A.36 e A.38, encontramos a relação *input-output*

$$b_{\text{out}}(t) + b_{\text{in}}(t) = \sqrt{2\kappa} b(t) \quad (\text{A.39})$$

que associa os campos de entrada e saída com o sistema.

REFERÊNCIAS

- 1 LADD, T. D.; JELEZKO, F.; LAFLAMME, R.; NAKAMURA, Y.; MONROE, C.; O'BRIEN, J. L. Quantum computers. *nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 464, n. 7285, p. 45–53, 2010.
- 2 LADD, T.; JELEZKO, F.; LAFLAMME, R.; NAKAMURA, Y.; MONROE, C.; O'BRIEN, J. Quantum computing. *arXiv preprint arXiv:1009.2267*, 2009.
- 3 FEYNMAN, R. P. Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics*, v. 21, n. 6/7, 1982.
- 4 FEYNMAN, R. P. Quantum mechanical computers. *Found. Phys.*, v. 16, n. 6, p. 507–532, 1986.
- 5 ZHONG, H.-S.; WANG, H.; DENG, Y.-H.; CHEN, M.-C.; PENG, L.-C.; LUO, Y.-H.; QIN, J.; WU, D.; DING, X.; HU, Y. *et al.* Quantum computational advantage using photons. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 370, n. 6523, p. 1460–1463, 2020.
- 6 CIRAC, J. I.; ZOLLER, P.; KIMBLE, H. J.; MABUCHI, H. Quantum state transfer and entanglement distribution among distant nodes in a quantum network. *Physical Review Letters*, APS, v. 78, n. 16, p. 3221, 1997.
- 7 DUAN, L.-M.; KIMBLE, H. Scalable photonic quantum computation through cavity-assisted interactions. *Physical review letters*, APS, v. 92, n. 12, p. 127902, 2004.
- 8 RITTER, S.; NÖLLEKE, C.; HAHN, C.; REISERER, A.; NEUZNER, A.; UPHOFF, M.; MÜCKE, M.; FIGUEROA, E.; BOCHMANN, J.; REMPE, G. An elementary quantum network of single atoms in optical cavities. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 484, n. 7393, p. 195–200, 2012.
- 9 SCARANI, V.; BECHMANN-PASQUINUCCI, H.; CERF, N. J.; DUŠEK, M.; LÜTKENHAUS, N.; PEEV, M. The security of practical quantum key distribution. *Reviews of modern physics*, APS, v. 81, n. 3, p. 1301–1350, 2009.
- 10 KIMBLE, H. Mapping photonic entanglement into and out of a quantum memory. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 452, n. 7183, p. 67–71, 2008.
- 11 LANGENFELD, S.; WELTE, S.; HARTUNG, L.; DAISS, S.; THOMAS, P.; MORIN, O.; DISTANTE, E.; REMPE, G. Quantum teleportation between remote qubit memories with only a single photon as a resource. *Physical Review Letters*, APS, v. 126, n. 13, p. 130502, 2021.
- 12 TIARKS, D.; BAUR, S.; SCHNEIDER, K.; DÜRR, S.; REMPE, G. Single-photon transistor using a förster resonance. *Physical review letters*, APS, v. 113, n. 5, p. 053602, 2014.
- 13 TURCHETTE, Q. A.; HOOD, C. J.; LANGE, W.; MABUCHI, H.; KIMBLE, H. J. Measurement of conditional phase shifts for quantum logic. *Physical review letters*, APS, v. 75, n. 25, p. 4710, 1995.

- 14 DUAN, L.-M.; WANG, B.; KIMBLE, H. Robust quantum gates on neutral atoms with cavity-assisted photon scattering. *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics*, APS, v. 72, n. 3, p. 032333, 2005.
- 15 HACKER, B.; WELTE, S.; REMPE, G.; RITTER, S. A photon–photon quantum gate based on a single atom in an optical resonator. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 536, n. 7615, p. 193–196, 2016.
- 16 BREKENFELD, M.; NIEMIETZ, D.; CHRISTESEN, J. D.; REMPE, G. A quantum network node with crossed optical fibre cavities. *Nature Physics*, Nature Publishing Group UK London, v. 16, n. 6, p. 647–651, 2020.
- 17 SOLAK, L. O.; ROSSATTO, D. Z.; VILLAS-BOAS, C. J. Universal quantum computation using atoms in cross-cavity systems. *Physical Review A*, APS, v. 109, n. 6, p. 062620, 2024.
- 18 VILLAS-BOAS, C. J.; MÁXIMO, C. E.; SOUZA, P. P. de; BACHELARD, R.; REMPE, G. Bright and dark states of light: The quantum origin of classical interference. *arXiv preprint arXiv:2112.05512*, 2021.
- 19 MÁXIMO, C.; BATALHÃO, T.; BACHELARD, R.; NETO, G. de M.; PONTE, M. de; MOUSSA, M. H. Y. Quantum atomic lithography via cross-cavity optical stern–gerlach setup. *JOSA B*, Optica Publishing Group, v. 31, n. 10, p. 2480–2484, 2014.
- 20 BOUWMEESTER, D.; EKERT, A. K.; ZEILINGER, A. *The Physics of Quantum Information: Quantum Cryptography, Quantum Teleportation, Quantum Computation*. [S.l.]: Springer Publishing Company, Incorporated, 2010.
- 21 GIOVANNETTI, V.; LLOYD, S.; MACCONE, L. Quantum metrology. *Physical review letters*, APS, v. 96, n. 1, p. 010401, 2006.
- 22 NIKOLAUS, B.; ZHANG, D.; TOSCHEK, P. Two-photon laser. *Physical Review Letters*, APS, v. 47, n. 3, p. 171, 1981.
- 23 ANDERSEN, U. L.; GEHRING, T.; MARQUARDT, C.; LEUCHS, G. 30 years of squeezed light generation. *Physica Scripta*, IOP Publishing, v. 91, n. 5, p. 053001, 2016.
- 24 CHANG, Y.; GONZÁLEZ-TUDELA, A.; MUNOZ, C. S.; NAVARRETE-BENLLOCH, C.; SHI, T. Deterministic down-converter and continuous photon-pair source within the bad-cavity limit. *Physical review letters*, APS, v. 117, n. 20, p. 203602, 2016.
- 25 LVOVSKY, A. Squeezed light. *Photonics, Volume 1: Fundamentals of Photonics and Physics*, John Wiley & Sons, v. 1, p. 121, 2015.
- 26 VALLET, M.; PINARD, M.; GRYNBERG, G. Generation of twin photon beams in a ring four-wave mixing oscillator. *Europhysics Letters*, IOP Publishing, v. 11, n. 8, p. 739, 1990.
- 27 SHELBY, R. M.; LEVENSON, M. D.; PERLMUTTER, S. H.; DEVOE, R. G.; WALLS, D. F. Broad-band parametric deamplification of quantum noise in an optical fiber. *Physical review letters*, APS, v. 57, n. 6, p. 691, 1986.
- 28 WU, L.-A.; KIMBLE, H.; HALL, J.; WU, H. Generation of squeezed states by parametric down conversion. *Physical review letters*, APS, v. 57, n. 20, p. 2520, 1986.

- 29 SCHNABEL, R.; SCHÖNBECK, A. The “squeeze laser”. *IEEE Transactions on Quantum Engineering*, IEEE, v. 3, p. 1–9, 2022.
- 30 EBERLY, J. H.; NAROZHNY, N.; SANCHEZ-MONDRAGON, J. Periodic spontaneous collapse and revival in a simple quantum model. *Physical Review Letters*, APS, v. 44, n. 20, p. 1323, 1980.
- 31 PHOENIX, S.; KNIGHT, P. Fluctuations and entropy in models of quantum optical resonance. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 186, n. 2, p. 381–407, 1988.
- 32 REISERER, A.; REMPE, G. Cavity-based quantum networks with single atoms and optical photons. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 87, n. 4, p. 1379–1418, 2015.
- 33 KWEK, L. C. *et al. Strong light-matter coupling: from atoms to solid-state systems*. [S.l.]: World Scientific, 2013.
- 34 STECK, D. A. Quantum and atom optics. 2007.
- 35 NAVARRETE-BENLLOCH, C. Introduction to quantum optics. *arXiv preprint arXiv:2203.13206*, 2022.
- 36 GERRY, C. C.; KNIGHT, P. L. *Introductory quantum optics*. [S.l.]: Cambridge university press, 2023.
- 37 LOUDON, R. *The quantum theory of light*. [S.l.]: OUP Oxford, 2000.
- 38 VILLAS-BOAS, C. J.; ROSSATTO, D. Z. Multiphoton jaynes-cummings model: Arbitrary rotations in fock space and quantum filters. *Physical Review Letters*, APS, v. 122, n. 12, p. 123604, 2019.
- 39 FELICETTI, S.; ROSSATTO, D.; RICO, E.; SOLANO, E.; FORN-DÍAZ, P. Two-photon quantum rabi model with superconducting circuits. *Physical review A*, APS, v. 97, n. 1, p. 013851, 2018.
- 40 HÄNSCH, T. W.; SHEN, Y. R. *Laser Spectroscopy VII: Proceedings of the Seventh International Conference, Hawaii, June 24–28, 1985*. [S.l.]: Springer, 2013. v. 49.
- 41 SLUSHER, R.; HOLLBERG, L.; YURKE, B.; MERTZ, J.; VALLEY, J. Observation of squeezed states generated by four-wave mixing in an optical cavity. *Physical review letters*, APS, v. 55, n. 22, p. 2409, 1985.
- 42 GARDINER, C.; ZOLLER, P. *Quantum noise: a handbook of Markovian and non-Markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2004.
- 43 WALLS, D.; MILBURN, G. J. Quantum information. In: *Quantum Optics*. [S.l.]: Springer, 2008. p. 307–346.
- 44 PRIMAKOFF, H.; HOLSTEIN, T. Many-body interactions in atomic and nuclear systems. *Physical Review*, APS, v. 55, n. 12, p. 1218, 1939.
- 45 DILLEY, J.; NISBET-JONES, P.; SHORE, B. W.; KUHN, A. Single-photon absorption in coupled atom-cavity systems. *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics*, APS, v. 85, n. 2, p. 023834, 2012.