

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Concepções Infinitesimais em um Curso de Cálculo

Raquel Milani

Orientador: Prof. Dr. Roberto Ribeiro Baldino

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao
Programa de Pós-Graduação em Educação
Matemática – Área de Concentração em Ensino e
Aprendizagem da Matemática e seus
Fundamentos Filosófico-Científicos, para
obtenção do Título de Mestre em Educação
Matemática.

Rio Claro - SP
2002

517
M637c

Milani, Raquel
Concepções Infinitesimais em um Curso de Cálculo /
Raquel Milani. -- Rio Claro : [s.n.], 2002
254 f. : il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Roberto Ribeiro Baldino

1. Cálculo Infinitesimal. 2. Infinitésimo. 3. Imagem
Conceitual. 4. Obstáculo Epistemológico. I. Título.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Roberto Ribeiro Baldino

Profa. Dra. Miriam Godoy Penteadó

Profa. Dra. Márcia Maria Fusaro Pinto

Aluna: Raquel Milani

Rio Claro, ____ de _____ de ____.

Resultado: _____

Dedicatória

Dedico este trabalho a minha mãe Maria e
ao meu pai David, pelo apoio e amor de
sempre.

Oferecimento

Ofereço este trabalho ao Daniel, namorado
e companheiro de todos os momentos.

Agradecimentos

A Deus, pela força e proteção, indicando-me os melhores caminhos a serem seguidos.

Aos meus pais, Maria e David, pelo constante apoio e amor dedicados durante todo este tempo de trabalho.

Ao meu namorado Daniel, por seu amor e apoio nas decisões tomadas.

A vocês três, pela pergunta sempre carinhosa e saudosa, inúmeras vezes repetida: “Quel, quando tu vens?”.

Ao Baldino, por me ensinar a pesquisar e indicar o caminho da Educação Matemática.

À Miriam, pela ajuda constante e oportunidade de inserção no curso de Física.

À Márcia, pelas contribuições feitas por ocasião do Exame de Qualificação.

Aos alunos do curso de Física, em especial, Lina, Nanda, Lugo e Mino.

Aos meus grandes colegas e amigos de curso, Patricia, Karina, Amarildo, Deinha, Viviane, Chateau, Jonei, Ana Márcia, Dulcyene, Ana Maria, Elisangela, Ana Flávia, Marcelo, Vanda, Regina, Gilli, Heloisa, Elaine, Zionice, Paula, Michela, Audria, Renata, Rodolfo, pelos momentos tão alegres de festas, encontros e discussões.

À Dona Maria, pela companhia e zelo durante estes três anos.

Aos colegas de orientação e de outros subgrupos do GPA, pelos bons momentos de aprendizado e contribuição a esta pesquisa.

Ao *paitrocínio*, CNPq e CAPES, pelo apoio financeiro.

À Ana, Elisa, Geraldo Lima e meninas da seção de pós-graduação, pelo auxílio técnico e burocrático.

ÍNDICE

Resumo	iii
Abstract	iv
Apresentação	v
Capítulo I- Trajetória da Pesquisa	1
1. Alguns porquês.....	1
2. Pergunta-diretriz e questões de interesse	4
3. Obstáculo infinitesimal.....	5
Capítulo II – Revisão Bibliográfica	9
1. Livros-texto	10
2. Trabalhos sob o ponto de vista da Educação Matemática	12
Capítulo III – Referencial Teórico	19
1. Imagem conceitual e definição conceitual.....	20
2. As concepções dos alunos.....	24
3. As concepções infinitesimais dos alunos.....	27
Capítulo IV – Metodologia de Pesquisa.....	30
1. A pesquisa qualitativa.....	30
2. Os alunos participantes	33
2.1. A escolha dos alunos	33
3. Os Encontros de Cálculo Infinitesimal (ECI)	36
3.1. A estrutura dos ECI	36
3.2. Preparação para os encontros.....	38
3.3. Os quatro encontros de trabalho conjunto	39
3.3.1. O primeiro encontro.....	41
3.3.2. O segundo encontro.....	41
3.3.3. O terceiro encontro	41
3.3.4. O quarto encontro.....	42
3.4. O encontro de preparação	42
3.5. O encontro de apresentação	44

Capítulo V – Dados da Pesquisa.....	46
1. As concepções espontâneas infinitesimais dos alunos	47
2. Algumas definições de infinitésimo	48
3. Imagem conceitual e definição conceitual de derivada.....	50
4. Vocês poderiam dar um exemplo em que se usa esses infinitésimos?.....	53
5. Viajar: pensar no infinito e infinitesimal	55
6. Dificuldades no trabalho com a abordagem infinitesimal	58
7. Comparações entre a abordagem infinitesimal e a do conceito de limite.....	66
8. Divide em pequenas coisinhas e soma tudo.....	72
9. Cálculo Infinitesimal no curso de Física.....	73
Capítulo VI – Análise dos Dados	76
1. A imagem conceitual de infinitésimo	76
2. Desprezar o infinitésimo ou pegar a parte real?: a derivada no contexto infinitesimal.....	83
3. O obstáculo infinitesimal e sua superação	87
4. Viagem ao mundo infinitesimal	96
5. O Cálculo para o curso de Física: algumas reflexões.....	104
Capítulo VII – Considerações Finais	110
Referências Bibliográficas	115
Anexo – Transcrição dos Encontros de Cálculo Infinitesimal	119
1º encontro	119
2º encontro	139
3º encontro	154
4º encontro	176
Material dos 4 encontros.....	197
Encontro de Preparação	204
Encontro de Apresentação	220
Apêndice – Estudo sobre Análise infinitesimal.....	241

RESUMO

O presente estudo trata de uma pesquisa na área de ensino e aprendizagem de Cálculo. Foi realizado um experimento de ensino com um grupo de alunos da graduação em Física, da UNESP de Rio Claro, que estavam cursando a disciplina de Cálculo pela abordagem tradicional do conceito de limite. Durante seis encontros, tópicos de Cálculo foram trabalhados segundo a abordagem infinitesimal, com o auxílio da ferramenta *zoom* do software Corel Draw. As concepções espontâneas infinitesimais dos alunos foram legitimadas e, a partir delas, o estudo nessa nova abordagem foi desenvolvido. As relações entre as concepções evocadas pelos alunos e suas impressões sobre o trabalho realizado são analisadas aqui. Os alunos apresentaram um novo conhecimento que consiste em um amálgama entre os conceitos de limite e infinitésimo, indicando a superação do obstáculo infinitesimal presente nos cursos de Cálculo para alunos de Física, cujo objetivo é trabalhar com as concepções espontâneas dos alunos e com os conceitos, de modo a aplicá-los em diversas áreas do conhecimento, sem formalizá-los.

Palavras-chave: Cálculo Infinitesimal, infinitésimo, imagem conceitual, obstáculo epistemológico.

ABSTRACT

This study is a research on learning and teaching of Calculus. A teaching experiment was realized with a group of physics students who were attending a Calculus course according to the traditional approach of limits at UNESP, Rio Claro. During six meetings, topics of Calculus were worked according to the infinitesimal approach, with the support of the Corel Draw zoom. First the students' spontaneous conceptions on infinitesimals were legitimized and then the study in this new approach was developed. The relations between students' evoked conceptions and their impressions about the work done in the meetings are analyzed. The students presented a new knowledge consisting in an amalgam of limit and infinitesimal number concepts, indicating the overcoming of the infinitesimal obstacle that emerges in Calculus courses for physics students, where students' spontaneous conceptions are taken up and mathematical concepts are developed informally, aiming at their application to various areas of knowledge.

Key words: Infinitesimal Calculus, infinitesimal number, concept image, epistemological obstacle.

APRESENTAÇÃO

O presente trabalho é um estudo sobre as concepções apresentadas por um grupo de quatro estudantes de Cálculo da graduação em Física, da UNESP, Rio Claro, sobre conceitos de Cálculo Infinitesimal. A linearidade que o leitor encontrará neste trabalho não teve origem no início da pesquisa. Antes de obter esta forma final, ocorreram diversas visitas ao referencial teórico, às questões de interesse e às transcrições dos encontros com os alunos, buscando uma melhor nitidez a respeito dos objetivos e da contribuição que este trabalho poderia dar à Educação Matemática. A dissertação que o leitor tem em mãos ficou, portanto, estruturada da seguinte maneira:

No primeiro capítulo, o leitor encontra a trajetória desta pesquisa, desde as justificações da escolha do tema de investigação, passando por minha formação acadêmica, até os objetivos e contexto no qual está inserida.

O segundo capítulo traz uma revisão bibliográfica a respeito do tema *Cálculo Infinitesimal e Análise Não-Standard*, e uma comparação entre as obras e a presente dissertação. Num primeiro momento, é feita uma revisão de alguns *livros-texto* que tratam do tema. Posteriormente, esse tema é discutido por *trabalhos sob o ponto de vista da Educação Matemática*.

No terceiro capítulo apresento o referencial teórico que sustenta esta pesquisa, dando condições de analisar os dados coletados nos encontros de Cálculo Infinitesimal. As teorias que apóiam a análise e a discussão dos dados foram elaboradas por David Tall e Shlomo Vinner, no que tange à construção de uma imagem conceitual e sua relação com a definição conceitual; e por Bernard Cornu, no que diz respeito às concepções espontâneas e próprias sobre um conceito.

No capítulo seguinte, apresento a escolha metodológica que sustenta este trabalho e os procedimentos utilizados para conseguir os dados que servem para ajudar a refletir sobre a pergunta-diretriz e questões de interesse.

O quinto capítulo trata desses dados. São trechos agrupados e recortados dos encontros de Cálculo Infinitesimal, que formam os episódios desta pesquisa. Esses episódios são apresentados segundo um tema comum aos trechos que o constituem.

No sexto capítulo desta dissertação, olho para os dados a partir do quadro teórico discutido no capítulo III. As análises são apresentadas em cinco categorias, que tentam refletir a respeito da pergunta que guia esta pesquisa.

No último capítulo, retomo algumas idéias defendidas durante a dissertação, apresento uma reflexão a respeito de uma opinião sobre o trabalho desenvolvido com os alunos e indico um possível caminho a ser percorrido futuramente.

No anexo, os seis encontros de Cálculo Infinitesimal encontram-se transcritos.

No apêndice, apresento a fundamentação das concepções infinitesimais dos alunos. Trata-se de um estudo sobre Análise Infinitesimal, sendo abordada segundo dois métodos: método construtivo e método axiomático.

CAPÍTULO I

TRAJETÓRIA DA PESQUISA

A presente pesquisa está inserida na área de ensino e aprendizagem de Cálculo. Trata-se de um experimento de ensino realizado em alguns encontros com um grupo de alunos da disciplina de Cálculo do curso de graduação em Física, da UNESP de Rio Claro, cuja abordagem é a tradicional, baseada no conceito de limite. O trabalho desenvolvido foi um estudo a respeito de alguns conceitos de Cálculo, tratados segundo a abordagem infinitesimal. O objetivo é saber como esses alunos lidam com as concepções infinitesimais e interpretar as relações entre as idéias apresentadas por esses estudantes. Acredito que, com a legitimação e valorização dessas concepções, o obstáculo infinitesimal à aprendizagem do conceito de limite seja mais facilmente superado.

1. Alguns porquês

Neste momento, apresento justificações para a escolha do tema e de outros aspectos da pesquisa. O leitor poderá notar uma grande influência de minha trajetória acadêmica nessa escolha e perceber ainda que muitas possibilidades surgiram a partir de meu contato com a UNESP de Rio Claro.

Por que ...

... o Cálculo?

Durante toda minha graduação, no curso de Licenciatura em Matemática, pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), estive em contato com o Cálculo Diferencial e Integral (CDI), seja como aluna de CDI 1 e 2, como monitora de CDI 1 ou como bolsista de Iniciação Científica pela FAPERGS¹.

Diferentemente do curso de Bacharelado em Matemática, cujos alunos ingressavam na universidade e cursavam CDI 1 sem nenhuma cadeira como pré-requisito, faziam parte do currículo obrigatório de Licenciatura as disciplinas Matemática Elementar 1 e 2, como pré-

¹ Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul.

requisitos para o CDI 1. Na realidade, o primeiro contato que tive com noções de Cálculo aconteceu cursando tais cadeiras.

Por quase dois semestres, trabalhei como monitora de CDI 1. Os trabalhos foram interrompidos devido à oportunidade de receber uma bolsa de Iniciação Científica. Do horário de monitoria, a maioria dos alunos que participavam era dos diversos cursos de Engenharia oferecidos pela UFRGS. Muitos deles viam essa atividade como tempo para tratar de assuntos como o andamento da disciplina de Cálculo e de outras cadeiras, aulas especiais de exercícios, maneira pela qual certos professores trabalhavam os conteúdos, provas e suas correções, organização do currículo dos cursos e vestibular. O objetivo principal, porém, era solucionar dúvidas e resolver exercícios de Cálculo. Algumas dessas dúvidas me chamaram a atenção, principalmente as que tratavam de assuntos como a definição e notação da derivada, diferencial e integral. O que significa $\frac{dy}{dx}$? É apenas um símbolo? Tem sentido se analisarmos separadamente dy e dx ? Qual a semelhança com Δy e Δx ? O que significa o dx que aparece no símbolo de integral? Muitas dessas questões passaram a ser minhas dúvidas também. Certamente, a experiência como monitora foi importante para minha formação e para despertar o interesse por aspectos ligados ao ensino e aprendizagem do Cálculo.

O trabalho desenvolvido como bolsista de Iniciação Científica foi na área de Análise, num primeiro momento, e Álgebra, no último ano da graduação. O último estudo teve como tema a teoria de polinômios e métodos de contagem e determinação de suas raízes, como por exemplo, o método de Newton, de Budan-Fourier e de Descartes. Para esse trabalho, foi estudada a derivada de polinômios e a relação com suas raízes. Essa fase proporcionou um amadurecimento no conhecimento matemático, bem como na prática de pesquisa nessa área.

A empatia pelo Cálculo, iniciada já durante a graduação, e decisiva na opção pela atividade de monitoria, levou-me a esta direção. Pensando nas indagações desencadeadas a partir de dúvidas dos alunos que participavam da atividade e, levando em conta meu gosto pelo assunto, surgiu a vontade de realizar uma pesquisa na área de ensino e aprendizagem de Cálculo.

... os infinitésimos?

O estudo das indagações citadas na seção anterior se aprofundou quando foi exigido um trabalho na disciplina de História da Matemática, cujo tema escolhido por mim foi *Leibniz e o Cálculo*. Dentro da bibliografia estudada para a elaboração deste trabalho, estava o artigo “Cálculo Infinitesimal: Passado ou Futuro?” (BALDINO, 1995). Ao ler esse artigo, entrei em contato com os números hiper-reais² e Análise Não-Standard. Uma atenção maior foi dada aos infinitésimos. Isso era uma novidade tanto para mim quanto para a grande maioria de meus colegas e para muitos de meus professores, inclusive os que ministravam aulas de CDI e Análise. A leitura desse artigo e essa situação de novidade foram os fatores que fizeram com que eu me interessasse pelo assunto.

Ao ingressar no programa de pós-graduação em Educação Matemática, da UNESP, campus de Rio Claro, como aluna especial, em março de 2000, comecei a frequentar o subgrupo do GPA³ denominado Problemas Especiais em Educação Matemática, que era uma disciplina optativa do curso de Licenciatura em Matemática dessa instituição. Além de serem discutidas questões sobre o curso e a prática dos professores de Cálculo, fichas de trabalho sobre tópicos de Cálculo Infinitesimal eram trabalhadas pelos alunos. Nesse grupo, vi que era possível desenvolver o Cálculo via abordagem infinitesimal, e que, nesse contexto, conseguia responder às perguntas que fazia desde a época da atividade de monitoria na UFRGS. Iniciou-se, então, a elaboração de um projeto de pesquisa na área de Cálculo Infinitesimal.

... o curso de Física?

No momento de prestar a prova de seleção, pela primeira vez, em setembro de 1999, para ingresso nesse programa de pós-graduação, entrei em contato com a Profa. Dra. Miriam Godoy Penteado⁴, que estaria ministrando, no semestre seguinte, a disciplina de Cálculo I para os cursos de graduação em Geologia e Física. Na época, levantamos a possibilidade de eu

² O conjunto dos números hiper-reais é um corpo ordenado que contém os números infinitos, elementos infinitesimais, números reais e os números pertencentes às mônadas dos reais. Esse ramo da matemática é conhecido como Análise Não-Standard.

³ O Grupo de Pesquisa-Ação (GPA) da Unesp de Rio Claro, desde o início desta pesquisa (2000) até o julho de 2002, foi coordenado por Dr. Roberto Ribeiro Baldino, orientador desta pesquisa, e por Tânia Cristina Baptista Cabral, e teve como colaboradora a Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic. O foco de estudo do grupo é o fracasso no ensino da Matemática.

⁴ Professora do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP/Rio Claro.

estar auxiliando-a na disciplina, devido ao meu interesse pela pesquisa na área de ensino de Cálculo.

A Física e, em especial, a Mecânica do Contínuo estão baseadas em conceitos infinitesimais (BALDINO, 1995). No subgrupo do GPA, referido na seção anterior, havia a possibilidade de se trabalhar com esses conceitos aplicados a problemas da Física. Tendo em vista a relação entre as concepções infinitesimais e essa área de conhecimento, e que a Profa. Dra. Miriam Godoy Penteado havia acenado positivamente para minha participação na disciplina de CDI 1 para a graduação em Física, escolhi esse curso.

2. Pergunta-diretriz e questões de interesse

Com base no que foi explicitado anteriormente, apresento a pergunta-diretriz desta pesquisa:

Como alunos de Cálculo I do curso de Física, da UNESP de Rio Claro, lidam com as concepções infinitesimais, no trabalho com tópicos dessa disciplina, estudados segundo a abordagem infinitesimal?

Detalhando essa pergunta, aponto questões de interesse que auxiliaram na interpretação dos dados:

- Que concepções espontâneas infinitesimais foram trazidas pelos alunos?
- Que concepções formaram a imagem conceitual de infinitésimo e de derivada?
- Qual a relação entre a imagem conceitual e a definição formal no contexto infinitesimal?
- Que dificuldades e conflitos foram encontrados no trabalho de alguns conceitos de Cálculo, segundo a abordagem infinitesimal?
- Que comparações os alunos fizeram entre a abordagem infinitesimal e a do conceito de limite?

Estou considerando o *contexto infinitesimal* como o campo de conhecimento onde atuam as concepções infinitesimais. As *concepções infinitesimais* aqui são entendidas como idéias que tratam do conceito de infinitésimo, considerando esse conceito desde o tempo em que começou a ser utilizado até os dias de hoje, passando por Leibniz, Cauchy e Robinson, apenas

para citar alguns nomes. Esse sentido é o mesmo que o dado no trabalho de Baldino e Cabral (2000), que será comentado no próximo capítulo. O termo *infinitesimais* não é, portanto, para ser pensado como adjetivo para *concepções*, como o senso comum poderia supor. Do contrário, as concepções quase nem existiriam de tão pequenas! Ou tenderiam a zero!

Os demais termos, como *imagem e definição conceitual*, serão definidos no capítulo III, que trata do referencial teórico da pesquisa.

3. O obstáculo infinitesimal

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral encontra-se, geralmente, no currículo de diversos cursos das Ciências Exatas e em alguns das Ciências Biológicas. Tradicionalmente, os tópicos que fazem parte do programa dessa disciplina são trabalhados segundo a abordagem via conceito de limite. Dificuldades e obstáculos epistemológicos relacionados a esse conceito, no sentido de Bachelard (1983), são temas de pesquisas realizadas na área de aprendizagem do Cálculo (CORNU, 1983; SIERPINSKA, 1985, 1987, e.g.). De acordo com Bachelard (1983, p.147, grifos do autor),

*[...] é em termos de obstáculos que se torna preciso apresentar o problema do conhecimento científico. E não se trata de considerar obstáculos externos, como a complexidade e fugacidade dos fenômenos, nem de incriminar a fragilidade dos sentidos e do espírito humano: é no próprio ato de conhecer, intimamente, que aparecem, por uma espécie de imperiosidade funcional, as lentidões e as dificuldades [...] conhecemos *contra* um conhecimento anterior [...].*

Os obstáculos epistemológicos, nesse sentido, são conhecimentos, crenças que funcionam num determinado contexto, por algum tempo. Quando evocadas em outro contexto, podem não responder à nova demanda. Quando isso ocorre, esse conhecimento torna-se um obstáculo à aprendizagem. No sentido de Bachelard, essas crenças são positivas à aprendizagem. É por causa de sua existência que se conhece algo novo, pois conhece-se *contra* um conhecimento anterior. O conhecimento antigo é usado para se conhecer algo novo, que o incorpora. O novo só é assim, por causa do velho. Conhece-se ao se trabalhar, através de situações conflitantes, com o conhecimento que constituiu o obstáculo. Quando o aluno supera o obstáculo, ele abre mão de uma crença que tinha e que funcionava bem, e passa a preferir algo novo. “Com o uso, as idéias se *valorizam* indevidamente” (BACHELARD, 1996, p. 19,

grifo do autor). A superação do obstáculo tarda a acontecer, porque a idéia que o constituía funcionava bem, era fecunda no seu campo de validade. É através do enfrentamento e superação desse obstáculo que o sujeito se fortalece e aprende. Segundo Bachelard, o obstáculo é componente essencial do novo conhecimento a ser adquirido. Assim, ele não é entendido como empecilho ao processo de aprendizagem.

Quando um obstáculo aparece, acredito que há duas formas de agir perante esse conhecimento. Uma delas é ignorar a existência desse obstáculo, desviando-o. Outra forma de encarar a situação é aceitá-lo e enfrentá-lo. Com essas duas maneiras, vai-se além do obstáculo. Há, porém, uma diferença significativa entre as duas. Com a primeira, desvia-se o obstáculo. Com a segunda alternativa, supera-se o obstáculo. *Superar*, no sentido de Bachelard, é formar um novo conhecimento que incorpora o velho como negação dialética, ou seja, forma-se um novo conhecimento que é sempre novo de um antigo que não se separa dele. Reconhece-se no novo o antigo conhecimento. Vai-se além, conservando o velho. O conhecimento novo só é assim porque foi conhecido contra um velho conhecimento.

Cornu (1983) e Sierpinska (1983, 1985, 1987) apresentam trabalhos sobre os obstáculos epistemológicos à aprendizagem do conceito de limite. Cornu (1983) mostra que as concepções infinitesimais constituem um desses obstáculos: “É o segundo grande obstáculo para o aluno; tudo se passa como se existissem números muito pequenos, menores que os ‘verdadeiros’ números, mas entretanto não nulos”⁵ (Ibid, p.152, grifo do autor, tradução de Luisa R. Baldino). Chamo de **obstáculo infinitesimal** as concepções infinitesimais que tornam-se obstáculo epistemológico à aprendizagem do conceito de limite.

Segundo os trabalhos acima citados, fica declarada a presença de concepções infinitesimais no pensamento dos alunos ao trabalharem com o conceito de limite. Geralmente, nos cursos de Cálculo, os professores não reconhecem essas concepções. Se expressam essas idéias, isso é feito de forma clandestina (BALDINO, 1995). No contexto do conceito de limite, tanto se abordado formalmente, quanto intuitivamente, os professores podem falar em infinitésimos. Mas, geralmente não são reconhecidos como forma legítima de trabalho. Não são válidos se aparecerem, por exemplo, em respostas às questões de uma prova. Podem surgir nas falas de alunos e professores, mas não numa prova. O que é legítimo é o conceito de limite. Esse é o uso clandestino dos infinitésimos. Nessa situação, o obstáculo infinitesimal é

desviado. O que pode ser visto, no quadro geral da disciplina, é a característica do fracasso, como geralmente se entende por isso: altos índices de reprovação e alunos não sendo escutados e impedidos de se expressar da maneira que acreditam, por exemplo. Devem responder de acordo com o contexto do limite, mesmo que as concepções infinitesimais estejam presentes.

Nesta pesquisa, optei pela seguinte postura, que equivale à segunda forma, anteriormente citada, de encarar um obstáculo: “A construção de estratégias pedagógicas de ensino deve então levar em conta tais obstáculos. Não é uma questão de evitá-los, e sim, ao contrário, de levar o aluno a encontrá-los e superá-los”⁶ (CORNU, 1991, p.162, tradução minha). Sabendo, portanto, da existência das idéias infinitesimais, o trabalho que desenvolvi com alguns alunos foi o de enfatizá-las e legitimá-las, permitindo que os alunos se expressassem de forma infinitesimal. A resposta $0,999... < 1$ foi aceita e foi base para o desenvolvimento das idéias posteriores. A construção da imagem conceitual dos alunos a respeito de certos conceitos foi feita tendo como base uma postura de legitimação das concepções infinitesimais. Acredito que esse é um primeiro passo para a superação do obstáculo. A questão não é negar o conhecimento que constitui o obstáculo, e sim trabalhar com tal crença.

Os alunos que participaram da pesquisa estavam envolvidos, nas aulas regulares de Cálculo, com o contexto do conceito de limite. Com base em Cornu (1983) e Sierpinska (1983, 1985, 1987), podemos concluir que as concepções infinitesimais estavam presentes, e, portanto, o obstáculo infinitesimal estava instituído. Essa situação seria diferente se o curso de Cálculo da graduação em Física fosse baseado na abordagem infinitesimal. Nesse caso, o conceito de infinitésimo, bem como as concepções infinitesimais, seriam legítimos. Não haveria, portanto, a existência do obstáculo infinitesimal. Talvez, assim, esta pesquisa pudesse ser sobre outro assunto, quem sabe: obstáculo do limite à aprendizagem de Cálculo Infinitesimal!

Não estou defendendo a primazia dos infinitésimos sobre o conceito de limite. Se assim fosse, estaria querendo o fim de cursos de Cálculo via limite e a instituição do Cálculo

⁵ “[...] tout se passe comme s’il existait des nombres très petits, plus petits que les ‘vrais’ nombres, mais cependant non nuls”.

⁶ “The construction of pedagogical strategies for teaching students must then take such obstacles into account. It is not a question of avoiding them but, on the contrary, to lead the student to meet them and to overcome them”.

Infinitesimal. Isso acarretaria, provavelmente, a rejeição total dos infinitésimos, tal como em certa medida é rejeitado o conceito de limite, pelo fato dessa abordagem não estar livre de dificuldades inerentes a sua natureza, como pode ser visto no capítulo de análise dos dados desta pesquisa. O que defendo, portanto, é que os dois contextos, o infinitesimal e o do conceito de limite, devem ser legitimados, deixando ao aluno a possibilidade de escolher, segundo sua preferência, como vai querer trabalhar com os conceitos de Cálculo.

Mas como misturar limite e infinitésimos? Como fica isso perante à Matemática? O objetivo de um curso de Cálculo, ao meu ver, não é a formalização dos conceitos. Esse é o objetivo das disciplinas de Análise, seja ela Standard ou Não-Standard. Em um curso de Cálculo, o objetivo é trabalhar com as concepções dos alunos, podendo ser tanto infinitesimais, relacionadas ao conceito de limite, ou que envolvam os dois conceitos, e tratar intuitivamente os conceitos, aplicando-os às diversas áreas em que podem ser úteis para a resolução de problemas. Principalmente pensando em curso de Cálculo para graduação em Física, que no caso da UNESP de Rio Claro não tem em seu currículo a disciplina de Análise.

Uma contribuição desta dissertação é repensar o curso de Cálculo e apresentar o fato de que as concepções infinitesimais estão presentes no pensamento dos alunos, indicando, de certa forma, o caminho de tentativa da superação do obstáculo infinitesimal. O objetivo da pesquisa não foi tentar fazer com que os alunos superassem tal obstáculo; a superação ou não foi uma consequência do trabalho desenvolvido nos encontros de Cálculo Infinitesimal. Como o obstáculo infinitesimal estava envolvido, sabia que um primeiro passo a ser dado era legitimar as concepções infinitesimais dos alunos, aceitá-las como educadores e trabalhar com tais concepções. Isso foi feito. Contribuo com esta dissertação fazendo com que o professor de Cálculo indague-se sobre o que fazer perante essas concepções: ignorá-las ou legitimá-las?

A relevância da presente pesquisa não está apenas no âmbito acadêmico. Durante seu desenvolvimento, a pesquisa fez com que eu levantasse inquietações sobre a Educação Matemática, agisse num curso de Cálculo, aprendesse a ouvir o aluno e questionasse minha prática como educadora.

Neste capítulo, apresentei a trajetória da pesquisa, que inclui a justificativa do tema escolhido, o contexto da pesquisa e as questões de interesse. A seguir, no capítulo II, discutirei sobre algumas obras relacionadas ao tema desta dissertação, comparando-as com a proposta aqui apresentada.

CAPÍTULO II

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

As obras, a seguir comentadas, inserem-se no tema *Cálculo Infinitesimal e Análise Não-Standard*. Foram selecionadas com o objetivo de mostrar ao leitor os trabalhos realizados sobre o tema e comparar com a proposta aqui apresentada por mim.

A área em questão é recente. Dentro do contexto matemático, a Análise Não-Standard foi divulgada por Abraham Robinson, por volta de 1960. Dessa forma, o número de publicações sobre o tema não é muito amplo, principalmente, no âmbito da Educação Matemática. Após a descrição de cada trabalho, apresento sua relação com esta dissertação. Essa seção é identificada pelo título *E a presente dissertação?*.

Os trabalhos aqui apresentados foram distribuídos em dois grupos: *livros-textos* e *trabalhos sob o ponto de vista da Educação Matemática*. Na primeira categoria, encontram-se livros-textos sobre Cálculo Infinitesimal e Análise Não-Standard. O segundo grupo consta de obras, como artigos e teses, que abordam o trabalho com o tema em sala de aula. Dizem respeito a concepções infinitesimais e ensino de Cálculo utilizando os infinitésimos. Tendo em vista essa classificação, o material bibliográfico sobre o tema da pesquisa ficou assim distribuído:

- Livros-textos:
 - Keisler (1986) – Elementary Calculus: an infinitesimal approach
 - Lindstrom (1988) - Nonstandard Analysis and its Applications
 - Pinto (2000) – Métodos infinitesimais de análise matemática
- Trabalhos sob o ponto de vista da Educação Matemática:
 - Baldino e Cabral (2000) - Concepções infinitesimais na matemática
 - Harnick (1986) - Infinitesimals from Leibniz to Robinson: time to bring them back to school.
 - Rêgo (2000) – Uma abordagem de ensino de Cálculo utilizando infinitésimos

1. Livros-textos

Keisler (1986) – Elementary Calculus: an infinitesimal approach

Essa obra é considerada o primeiro livro-texto que aborda as idéias de Abraham Robinson adaptadas para um curso inicial de Cálculo (Sullivan, 1976). O autor apresenta os conceitos tanto na versão tradicional, a do conceito de limite, quanto na infinitesimal. Por um momento, trata intuitivamente de certos conceitos, como por exemplo, a localização de números infinitesimais e infinitos numa reta numérica, através de um microscópio infinitesimal e um telescópio infinito. Em outro momento, o autor sente a necessidade de dar mais rigor a esses conceitos, apresentando axiomas, teoremas e demonstrações.

E a presente dissertação?

Acredito que o objetivo dos cursos de Cálculo e Análise são diferentes. Num curso de Cálculo Infinitesimal, os conceitos devem ser trabalhados intuitivamente e aplicados em situações práticas. Um curso de Análise Infinitesimal tem como objetivo formalizar esses conceitos. Nesse momento, os teoremas e demonstrações da teoria matemática são bem vindos. Nessa direção, Baldino (1995, p.16) afirma,

O objetivo de qualquer curso de cálculo não é ensinar, nem a teoria de limites, nem a dos infinitésimos. O cálculo poderá ter como objetivo aplicá-las, investi-las em situações didáticas. Ensinar análise real ou análise não-standard são objetivos de disciplinas posteriores, de análise matemática.

A obra de Keisler é categorizada, pelo próprio autor, como sendo um livro para o nível de um curso de Cálculo. Com base na distinção entre os cursos de Cálculo e Análise, defendida anteriormente, acredito que esse livro de Keisler não é uma obra para ser utilizada no nível que o autor acredita, devido ao rigor matemático apresentado.. No entanto, a mistura desses objetivos, ou seja, a tentativa de antecipar a formalização de certos conceitos no curso de Cálculo, não é apenas encontrada nessa obra, e sim, em diversos livros escritos para esse nível.

Apesar dessa dissonância encontrada na obra, a idéia do *microscópio infinitesimal*, apresentada por Kiesler, faz sentido em um curso de Cálculo. Semelhante à essa idéia, nesta dissertação, será utilizada a estratégia do *zoom infinito*. A estratégia foi adotada para a visualização dos infinitésimos e dos elementos infinitamente próximos aos números reais.

Lindstrom (1988) - Nonstandard Analysis and its Applications

Esse livro contém capítulos que desenvolvem a teoria da Análise Não-Standard e sua aplicação em diversas áreas como probabilidade, física e computação. O primeiro capítulo, intitulado *A Set of hyperreals*, apresenta a construção do conjunto dos hiper-reais, simbolizado por ${}^*\mathcal{R}$, que é um corpo ordenado não-arquimediano que contém os reais, além de mônadas (conjunto de números infinitamente próximos dos números reais) e elementos infinitos e infinitesimais. A construção apresentada se baseia na dos reais por classes de equivalência de seqüências fundamentais de racionais. Dessa forma, um número hiper-real é uma classe de equivalência de seqüências reais. O capítulo ainda aborda as operações, bem como suas propriedades, definidas no corpo dos hiper-reais, e encerra com a abordagem de alguns conceitos de Cálculo segundo a abordagem infinitesimal. Alguns capítulos seguintes estendem o estudo sobre Análise Não-Standard e outros abordam as aplicações desse tema em algumas áreas do conhecimento.

E a presente dissertação?

Foi nessa obra que encontrei pela primeira vez a definição de número hiper-real. O conteúdo do primeiro capítulo foi base para meu estudo sobre Análise Infinitesimal, que deu rigor aos conceitos que estava trabalhando com os alunos da graduação em Física, nos encontros de Cálculo Infinitesimal. Essa teoria foi tema de um subgrupo do GPA, que esteve em atividade durante o 1º semestre de 2001. Ali agi como expositora do tema, pois meu objetivo era aprender Análise Infinitesimal. O estudo foi assim chamado, ao invés de Análise Não-Standard, para ficar claro que a teoria dos modelos da lógica formal, usada na apresentação de Stroyan e Luxemburg (1976), por exemplo, não seria utilizada. No apêndice desta dissertação, tópicos desse estudo são apresentados.

Pinto (2000) – Métodos infinitesimais de análise matemática

Trata-se de um livro de Análise Não-Standard. O primeiro capítulo mostra uma breve abordagem histórica dos infinitésimos, desde o tempo de Arquimedes, passando por Euler, até Robinson, com o formalismo dos infinitésimos. Alguns capítulos procedentes a esse são dedicados ao que o autor chamou de *Análise Não-Standard Elementar*. Essa parte equivale aos primeiros capítulos de Lindstrom (1988), abrangendo a construção dos números hiper-reais.

Os demais capítulos tratam da Análise Não-Standard, baseada na teoria dos modelos, que “[...] é a parte da lógica matemática que trata da relação existente entre uma dada *linguagem formal* e suas interpretações, isto é, os seus *modelos*” (CHANG e KEISLER apud PINTO, 2000, p.198).

E a presente dissertação?

Pinto (2000) chama a atenção, no início da obra, para o nome dado a esse estudo: “Análise Não-Standard deveria talvez chamar-se Análise Infinitesimal; este nome, porém, adquiriu já uma conotação clássica que dificulta o seu uso no contexto actual de uma forma sugestiva” (Ibid., p.9). Entendo que o autor se refere à conotação dada ao termo *infinitesimal*, segundo a noção de infinitésimo definida através da idéia intuitiva de limite. Como exemplo, tem-se a definição criada por Cauchy: “Uma quantidade variável torna-se infinitamente pequena quando seu valor numérico decresce indefinidamente de modo a convergir para o limite zero”¹ (CAUCHY, 1821, p.26, tradução minha). Essa concepção é discutida em detalhes em Sad, Teixeira e Baldino (2002).

Nesta dissertação, utilizo o termo *Análise Infinitesimal* me referindo ao tratamento dos números hiper-reais pela via da teoria dos conjuntos de Zermelo Frankel, que pode ser encontrada em Halmos (1960). Pinto chama esse estudo de *Análise Não-Standard Elementar*.

Certamente, existam outras obras que tratam da Análise Não-Standard, tanto livros-textos quanto artigos. Acredito, porém, que as obras, anteriormente comentadas, foram suficientes para dar uma idéia do tipo de produção que está se fazendo sobre o assunto em questão, e para dar suporte ao meu estudo sobre Análise Não-Standard.

2. Trabalhos sob o ponto de vista da Educação Matemática

Baldino e Cabral (2000) – Concepções infinitesimais na matemática

Esse trabalho mostra uma abordagem para o ensino de Cálculo utilizando os infinitésimos, fundamentado pelos estudos de Robinson. Os autores fazem uma introdução histórica sobre a utilização dos infinitésimos por Leibniz, a formalização do conceito de limite

por Cauchy e Weierstrass, e a formalização de infinitésimo por Robinson. Depois disso, os autores propõem fichas de trabalho que exemplificam o desenvolvimento de um curso de Cálculo Infinitesimal. Essas fichas exploram algumas regras de derivação e o teorema fundamental do Cálculo. A estratégia utilizada para justificar os resultados é o zoom de 4 mil vezes do software Corel Draw. Para fundamentar as concepções infinitesimais trabalhadas, Baldino e Cabral fornecem indicações para um curso de Análise Infinitesimal, onde as concepções dos alunos são ajustadas paulatinamente em direção às concepções matemáticas.

E a presente dissertação?

As idéias que suportam esse artigo são as mesmas desta dissertação. As concepções espontâneas infinitesimais dos alunos podem ser legitimadas, pois existe uma teoria matematicamente rigorosa que fundamenta tais idéias. As fichas de trabalho apresentadas nesse artigo foram tomadas como base para o desenvolvimento das atividades dos encontros de Cálculo Infinitesimal. Os termos *concepções infinitesimais* e *Análise Infinitesimal* têm o mesmo sentido que os utilizados nesta dissertação. As idéias do artigo serão retomadas durante este trabalho, inclusive as que indicam diretrizes de um curso de Análise Infinitesimal.

Harnick (1986) – Infinitesimals from Leibniz to Robinson: time to bring them back to school

Trata-se de um artigo em que o autor baseia-se no trabalho de Keisler (1986) para falar sobre a utilização dos infinitésimos no curso de Cálculo. Faz menção às mesmas figuras e termos, como *microscópio infinitesimal* e *telescópio infinito*, utilizados por Keisler. Valoriza a diferença entre os símbolos $=$ e \approx , e o uso de noções como *standard part*² na abordagem dos infinitésimos. O autor conclui dizendo que “No nível de sala de aula, a principal importância da contribuição de Robinson é que ela nos acalma, enquanto professores, quando dizemos ‘infinitesimal’, nós podemos finalmente sustentar que sabemos sobre o que estamos falando”³ (HARNICK, 1986, p.63, tradução minha).

¹ “On dit qu’une quantité variable devient *infiniment petite* lorsque sa valeur numérique décroît indéfiniment de manière à converger vers la limite zéro”.

² A tradução para o termo *standard part* é *parte standard* ou, como utilizado nesta dissertação, *parte real*.

³ “At the classroom level, the main importance of Robinson’s contribution is that it reassures us, the teachers, that when we say ‘infinitesimal’, we can finally claim that we know what we are talking about ...”

E a presente dissertação?

O professor de Cálculo geralmente utiliza as expressões *muito pequeno*, *infinitamente pequeno* e até *infinitesimal*, quando trabalha com diversos assuntos dessa disciplina, como por exemplo, as aplicações da integral definida e a própria definição de limite. Essa é a concepção clandestina de infinitésimos (BALDINO, 1995). Utilizam-se termos e pensamentos infinitesimais, ou seja, as concepções infinitesimais estão presentes na fala de professores e alunos, porém a existência desses elementos e seu possível uso na definição dos conceitos de Cálculo não são assumidos e legitimados. O que os professores e alunos pensam sobre infinitésimos, atualmente, está rigorosamente fundamentado. Esse rigor deve-se ao trabalho de Robinson. Creio que Harnick se refere a isto como sendo a principal importância da contribuição do trabalho de Robinson para o Cálculo. Dessa forma, concordo com o autor. Resta saber a atitude que o professor, esclarecido por esta dissertação, tomará diante do aparecimento das concepções infinitesimais, na fala de seus alunos e na sua própria fala.

Rêgo (2000) – Uma abordagem de ensino de Cálculo utilizando infinitésimos

É sugestivo que um trabalho com esse título venha contribuir com a Educação Matemática no que tange o ensino de Cálculo via infinitésimos. Trata-se de uma tese de doutorado, na qual Rêgo elabora um módulo de ensino sobre os conceitos de aproximação infinitesimal de um ponto, continuidade e derivada, baseado nos infinitésimos. Esse módulo foi teoricamente estruturado seguindo uma teoria de aprendizagem construtivista, tendo em vista as diretrizes curriculares dos cursos de Engenharia, evidenciando as habilidades e atitudes sugeridas. A abordagem foi aplicada em uma turma de Engenharia Civil, onde os alunos trabalharam em pequenos grupos. Após essa aplicação, a abordagem e o módulo foram avaliados. Foi comparado também com o trabalho realizado em uma turma de Cálculo tradicional, onde os conceitos são definidos segundo a noção de limite.

Rêgo apresenta o seguinte procedimento para saber o comportamento de uma função para valores de x próximos de um ponto x_0 : toma-se um infinitésimo Δx , obtendo $x_0 \pm \Delta x$, um número infinitamente próximo de x_0 ; calcula-se $f(x_0 \pm \Delta x)$; toma-se o real mais próximo do número hiper-real obtido, fazendo $\Delta x=0$, já que só valores reais interessam. Como exemplo, podemos verificar o que ocorre com $f(x)=x^2$, para valores próximos de $x=4$:

$f(4+\Delta x)=(4+\Delta x)^2=16+8\Delta x+\Delta x^2$. O real mais próximo desse número, fazendo $\Delta x=0$, é 16. Então, para valores de x próximos a 4, $f(x)$ se aproxima de 16.

Com a intenção de que o aluno pudesse trabalhar indistintamente com a noção de limite abordada tradicionalmente, Rêgo utilizou, no módulo de ensino, a definição de limite apresentada por Frid (1994). Essa autora define limite como sendo o processo de arredondamento do hiper-real para o real mais próximo. Dessa forma, se desejamos calcular

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + 2x}{2}$, onde a é real, fazemos da seguinte maneira:

Tomamos $x=a+\Delta x$, onde Δx é um infinitésimo. Se $x \rightarrow a$ então $\Delta x \rightarrow 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + 2x}{2} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(a+\Delta x)^2 + 2(a+\Delta x)}{2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^2 + 2a\Delta x + \Delta x^2 + 2a + 2\Delta x}{2} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^2 + 2a + (2a + \Delta x + 2)\Delta x}{2} = \frac{a^2 + 2a}{2}. \end{aligned}$$

Ao definir o limite como um arredondamento, Frid (1994) aponta três vantagens intuitivas:

- Estende-se a noção de limite utilizada tradicionalmente e, assim, quando o aluno for trabalhar com o limite real, não encontrará problemas de compatibilidade;
- Atribui-se um significado que não precisa recorrer ao processo infinito de aproximação, como é feito usualmente;
- Fornece-se um algoritmo para calcular o limite usual, o que não ocorre com a definição tradicional, que apenas permite verificar se um número dado como limite é verdadeiro.

Rêgo afirma que mesmo fazendo coincidir a simbologia das duas abordagens, a da proposta alternativa e a tradicional, os esquemas mentais de aproximação infinitesimal de pontos são distintos. Sobre esses esquemas, o autor conclui que:

- os alunos que estudaram via abordagem dos infinitésimos, construíram um esquema mental estático e finito;
- a aproximação na abordagem via limites é diferente da via infinitésimos, sendo a primeira, geralmente, dinâmica e infinita.

Rêgo confirma o argumento de defesa dos partidários da Análise Não-Standard quanto ao uso dos infinitésimos no ensino, ao dizerem que a construção dos conceitos centrais do Cálculo é mais intuitiva do que a obtida utilizando limites. Verifica esse argumento, pois a abordagem dos infinitésimos usa uma simbologia mais simples e não recorre a processos infinitos, evitando, assim, a constituição de obstáculos epistemológicos, já que a definição utilizada para os conceitos centrais é estática e finita.

O autor conclui dizendo que a abordagem de ensino utilizada (pequenos grupos estudando conceitos de Cálculo via infinitésimos) é viável, pois levou os alunos a construírem, a partir de seus conhecimentos prévios, os conceitos de maneira significativa e funcional, desenvolvendo as habilidades e atitudes estabelecidas nas diretrizes curriculares dos cursos de Engenharia.

E a presente dissertação?

Rêgo utiliza o termo *infinitesimal* tanto para representar infinitésimos quanto limites. Isso é geralmente o que ocorre (PINTO, 2000, p.9). Dessa forma, está-se seguindo a definição atribuída falsamente⁴ a Cauchy para infinitésimo, ou seja, uma variável cujo limite é zero. Nesta dissertação o termo infinitesimal será utilizado para referir-se apenas ao que pertence à abordagem infinitesimal, ou seja, a idéia de limite não será evocada, por minha parte, ao utilizar esse termo. O que não impossibilita que as concepções que os alunos apresentem nos encontros de Cálculo Infinitesimal, nesta dissertação, sejam ligadas à idéia intuitiva de limite.

Na abordagem alternativa que Rêgo apresenta, conserva-se a notação de limite utilizada tradicionalmente nos cursos de Cálculo. O autor optou por manter a mesma notação para que o estudante pudesse trabalhar indistintamente com a abordagem usual, permitindo-lhe utilizar qualquer texto tradicional. Afirma que apesar da semelhança da simbologia, os esquemas mentais de aproximação infinitesimal de pontos são distintos na abordagem tradicional de um curso de Cálculo e na que Rêgo apresenta. A notação tradicional, porém, vem acompanhada de um significado distinto do dado pela abordagem alternativa proposta pelo autor. Na abordagem tradicional, o limite é considerado, intuitivamente, como o resultado de um processo de tender a algum ponto. No trabalho proposto por Rêgo, o limite tem o significado de aproximação para o real mais próximo. São, de fato, esquemas diferentes. O primeiro,

⁴ Essa questão é discutida com profundidade em Sad, Teixeira e Baldino (2002).

como diz o autor, é dinâmico e infinito. O segundo, no entanto, é estático e finito. Acredito que devido a essa diferença, não haja uma naturalidade tão imediata ao se trabalhar com uma abordagem e com outra. Quando os dois esquemas forem evocados pode ocorrer um conflito cognitivo explícito ou não. Esse conflito pode auxiliar na superação de um obstáculo epistemológico que não deve ser evitado, como acredita Rêgo. Os obstáculos quando surgem devem ser encarados e trabalhados de forma a superá-lo.

Rêgo apresenta um procedimento para calcular a aproximação infinitesimal de uma função numa vizinhança infinitesimal de um certo ponto. Calcula-se $f(x_0 \pm \Delta x)$, onde Δx é um infinitésimo, e faz-se $\Delta x \rightarrow 0$. Para o exemplo utilizado na descrição do trabalho, feita acima, acredito que o procedimento, a seguir, é mais simples e não perde o caráter infinitesimal: $x \approx 4 \rightarrow f(x) = x^2 \approx 16$. O símbolo \approx significa infinitamente próximo, sendo infinitesimal a diferença entre os valores que estão sendo comparados. Nos encontros de Cálculo Infinitesimal, nesta dissertação, a aproximação infinitesimal não foi especificamente trabalhada. Mas o símbolo \approx é bastante utilizado e tem o mesmo significado que no trabalho de Rêgo.

O procedimento de dar um acréscimo infinitesimal Δx à função e calcular sua vizinhança infinitesimal em um determinado ponto foi utilizado na presente dissertação no cálculo de derivadas. A diferença é que para o acréscimo infinitesimal a notação dx , criada por Leibniz, foi preservada para não misturar com os acréscimos finitos da abordagem tradicional do conceito de limite. Um dos objetivos da abordagem que utilizei era mostrar aos alunos as diferenças entre o contexto infinitesimal e o de limite.

No início desta seção, mencionei as vantagens intuitivas da abordagem alternativa, apresentadas por Frid (1994). A primeira delas é a compatibilidade entre a noção de limite utilizada tradicionalmente e a utilizada na abordagem alternativa que Rêgo propõe. Critico essa posição na mesma direção que escrevi acima sobre a naturalidade de compatibilidade entre tais abordagens. Já que os esquemas mentais de aproximação de um ponto são distintos, é provável que ocorra um conflito cognitivo explícito ou não, que deve ser reconhecido e trabalhado. A segunda vantagem da abordagem apresentada por Rêgo sobre a tradicional é bastante considerável. No trabalho desenvolvido por esse autor, não há a aproximação por um número infinito de passos. O esquema de aproximação de um ponto é estático e finito. O

processo infinito acaba gerando algumas problemáticas, como a caracterizada pela pergunta: *o limite chega ou não chega?* Na terceira vantagem, Frid diz que a definição tradicional possibilita apenas ver se um determinado número é realmente o limite, não permitindo um cálculo para esse limite, como a abordagem alternativa proposta por Rêgo permite. Se a autora está se referindo à definição formal epsilônica de limite, isto é verdadeiro. O modo usual e intuitivo de se trabalhar com limite, porém, também fornece um algoritmo para esse cálculo, que é a simples substituição da variável independente pelo valor do qual ela está se aproximando, quando as funções são contínuas. Sendo assim, discordo com Frid quanto à terceira vantagem.

Nas considerações finais de sua tese, Rêgo recomenda várias questões para estudos posteriores. Entre elas encontra-se a seguinte: “experimentar introduzir, em um mesmo curso, os dois esquemas mentais de aproximação infinitesimal de um ponto [estático - finito e dinâmico – infinito]” (RÊGO, 2000, p. 215, meu comentário entre colchetes). Essa experiência, de certa forma, foi feita na presente dissertação, como será descrito no capítulo metodológico. Os alunos que colaboraram com meu trabalho participaram de encontros de Cálculo Infinitesimal, onde o esquema abordado era o estático – finito, para usar a linguagem de Rêgo, e pertenciam à uma turma de Cálculo cujos conceitos eram fundamentados na noção intuitiva de limite, vigorando o esquema dinâmico e infinito de aproximação de um ponto. As relações e as concepções apresentadas pelos alunos ao se referirem às duas abordagens serão discutidas nesta dissertação.

Neste capítulo, apresentei obras que se inserem no tema *Cálculo Infinitesimal e Análise Não-Standard*, comparando-as com a proposta desta dissertação. No próximo capítulo, apresentarei o referencial teórico que sustenta esta pesquisa, dando condições de analisar os dados coletados dos encontros de Cálculo Infinitesimal.

CAPÍTULO III

REFERENCIAL TEÓRICO

A pergunta-diretriz e, principalmente, as questões de interesse desta pesquisa foram sendo estabelecidas através de várias visitas ao referencial teórico e através da realização de um estudo piloto e dos encontros de Cálculo Infinitesimal. O material que o leitor tem em mãos, portanto, não foi organizado e escrito de forma linear, como se tudo tivesse acontecido ordenadamente. Ao longo da pesquisa, o referencial teórico, as questões de interesse e os encontros com os alunos foram se ajustando, obtendo esta forma final em função da pergunta-diretriz. Ela diz respeito a saber *como alunos de Cálculo I do curso de Física lidam com as concepções infinitesimais, no trabalho com tópicos dessa disciplina, estudados segundo a abordagem infinitesimal*. Para auxiliar na condução da pesquisa, elaborei algumas questões de interesse que têm como temas:

- concepções espontâneas infinitesimais
- imagem conceitual de infinitésimo
- imagem conceitual de derivada
- relação entre imagem conceitual e definição formal no contexto infinitesimal
- dificuldades e conflitos na abordagem infinitesimal
- comparação entre a abordagem infinitesimal e a do conceito de limite

Esses temas auxiliaram na organização e interpretação dos dados, indicando as respostas que os alunos deram ao trabalho no contexto infinitesimal. As teorias que apoiam a análise e a discussão dos dados foram elaboradas por David Tall e Shlomo Vinner, no que tange à construção de uma imagem conceitual e sua relação com a definição conceitual; e por Bernard Cornu, no que diz respeito às concepções espontâneas e próprias sobre um conceito. Esses conceitos teóricos possibilitaram-me interpretar as concepções formadas e apresentadas pelos alunos, bem como suas relações nos contextos: infinitesimal, do conceito de limite e do curso de Física.

1. Imagem conceitual e definição conceitual

Quando o aluno é apresentado a um conceito matemático, idéias e figuras mentais são elaboradas por ele para trabalhar com esse conceito em diversas situações. Cada indivíduo forma sua estrutura conceitual a partir dessa apresentação. Para tentar compreender o papel dessa estrutura (TALL, 1988), os termos *imagem conceitual e definição conceitual* foram introduzidos e descritos por Tall e Vinner (1981), como descrevo a seguir.

A idéia que o aluno pode ter de um conceito, geralmente representado por um símbolo ou nome, não é necessariamente uma definição precisa. A estrutura cognitiva total relacionada a esse conceito não se restringe apenas a essa definição, símbolo ou nome. Durante o processo de manipulação de um conceito, muitos outros processos podem ser evocados afetando seu significado e uso. Dessa forma, Tall e Vinner usam o termo **imagem conceitual** para descrever a estrutura cognitiva total que é associada ao conceito, que inclui todas as figuras mentais, bem como propriedades e processos associados. As figuras mentais são as visualizações evocadas pelo aluno quando está trabalhando com um conceito.

Quando nenhum significado é associado ao símbolo ou nome do conceito, a imagem conceitual pode ser vazia. Ao longo do tempo, com a experiência do aluno em diversas situações em que o conceito é utilizado, essa estrutura cognitiva se desenvolve e cresce. Dependendo do contexto, exemplo e situação, diferentes partes da imagem conceitual podem ser ativadas. Essa porção, ativada num dado momento, é chamada de *imagem conceitual evocada*. É com base nela que o aluno responde a uma certa situação específica.

Um exemplo de imagem é a associada ao conceito de derivada. No contexto do conceito de limite, essa imagem pode ser o processo de retas secantes se aproximando da reta tangente. Já na abordagem infinitesimal, o processo evocado pode ser a construção da reta tangente, a partir de um acréscimo infinitesimal dado a um ponto do gráfico.

Os autores usam o termo **definição conceitual** para a série de palavras utilizadas para especificar o conceito. Ela pode ser uma reconstrução pessoal, feita pelo estudante, de uma definição dada; uma reestruturação de uma definição matemática formal ou frases aprendidas mecanicamente. Assim, é uma série de palavras que o estudante usa para explicar sua imagem conceitual evocada. Essa é a definição conceitual **pessoal**, que pode diferir da definição conceitual **formal**, que é a aceita pela comunidade matemática. Ao falar sobre uma definição que é ou não aceita pela comunidade matemática, temos que considerar o contexto no qual

essa definição está sendo aceita. A definição de função contínua, por exemplo, que temos hoje, não era a aceita pela comunidade matemática do século XIX, e, talvez, não seja a legítima no próximo século.

Para exemplificar os tipos de definições, vamos considerar a notação de limite de uma função: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Dois significados, pelo menos, podem ser atribuídos a essa expressão:

1) *quando x se aproxima de a , $f(x)$ se aproxima de L* e 2) $(\forall \varepsilon)(\exists \delta)(0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$. O primeiro significado pode ser uma definição conceitual pessoal. Geralmente, professores e alunos, nas aulas de Cálculo, utilizam essa definição. O segundo significado é a definição conceitual formal de limite, aceita pela comunidade matemática de hoje como sendo rigorosa. Segundo meu entendimento da teoria de Tall e Vinner (1981), essa definição pode ser, por vezes, considerada como pessoal. Um aluno pode evocá-la ao trabalhar com o conceito de limite. Aliás, isso é o que todo professor de Análise quer: que as definições conceituais dos alunos sejam formais.

Segundo Vinner (1991), quando um conceito é apresentado pela primeira vez ao aluno, através da definição conceitual, não há uma imagem já formada. Ela começa a ser criada a partir da definição apresentada. Uma vez que o conceito já tenha sido apresentado ao aluno, a definição conceitual pode gerar outras idéias e figuras que serão incorporadas à imagem conceitual. Pode acontecer também de o aluno não atribuir nenhum significado à definição. Dessa forma, não há nenhuma imagem relacionada a ela. Quando essa imagem é criada, ela pode não ser coerente com outras partes da estrutura cognitiva sobre o conceito. Essa situação pode gerar a existência de um conflito.

Para mostrar diferentes partes da imagem conceitual, Tall e Vinner (1981) consideram, como exemplo, uma definição de função: relação entre dois conjuntos A e B , em que cada elemento de A está relacionado unicamente a um elemento de B . Os alunos, porém, que tenham estudado funções, podem ou não lembrar dessa definição conceitual. Não lembrando, outros aspectos relacionados ao conceito de função podem fazer parte da imagem conceitual, como a idéia de uma função ser dada por uma regra, ou que fórmulas distintas são dadas para diferentes partes do domínio A . A função pode ser pensada como uma ação que leva a , elemento de A , em $f(a)$, elemento de B , ou como um gráfico, ou uma tabela de valores. Todos esses aspectos, ou nenhum deles, podem fazer parte da estrutura cognitiva do aluno.

A imagem conceitual não precisa ser uma estrutura totalmente coerente com o conceito, ou seja, matematicamente correta. Pode conter idéias e figuras que foram construídas com base em exemplos específicos, que valem num contexto muito restrito, e que acabam não condizendo com a teoria matemática a qual o conceito pertence. Algumas das partes da imagem conceitual podem ser contraditórias entre si, e, mesmo assim, não incomodar o aluno. Essas partes contraditórias da imagem ou definição conceitual são chamadas de *fatores de conflito potencial*. Para aparecer um conflito cognitivo, é necessário que dois fatores de conflito potencial sejam evocados simultaneamente. Quando isso ocorre, os fatores são chamados de *fatores de conflito cognitivo*. O conflito não é, necessariamente, explicitado de forma clara; pode simplesmente causar uma inquietação, fazendo o aluno pensar que existe algo errado na atividade matemática que está realizando. Portanto, para que surja um conflito é necessário que duas partes contraditórias da imagem ou definição conceitual sejam evocadas. Mas isso não é suficiente. O aluno precisa se dar conta de que essas imagens são contraditórias entre si.

Quando o estudante se depara com um conceito conhecido num novo contexto, é a imagem conceitual que é ativada para responder à demanda (TALL, 1988). Quando o novo contexto for a apresentação da definição formal, um conflito pode aparecer, interferindo na aprendizagem da teoria formal. O aluno pode encontrar problemas com um fator da imagem conceitual e outro evocado pela definição formal.

Estou considerando, nesta pesquisa, a imagem conceitual englobando a definição conceitual. Não vejo, portanto, a separação das duas como células disjuntas. Quando nenhuma imagem é construída a partir da apresentação da definição de um conceito, o espaço que seria ocupado por essa imagem estará vazio, dentro da imagem conceitual. Por outro lado, se uma definição pessoal for elaborada, podendo ser formal, haverá um espaço não vazio ocupado por essa definição, dentro da imagem conceitual. Nesta dissertação, estarei fazendo uma distinção a respeito da origem das imagens evocadas, pois dependendo da situação, a resposta dada pelo aluno pode ser baseada tanto na definição formal quanto numa imagem não relacionada ao formalismo matemático. Quando a resposta não for formal, direi que essa veio da imagem conceitual. Afirmarei que a resposta é baseada na definição formal, quando for relacionada à teoria matemática apresentada nos encontros de Cálculo Infinitesimal. Ambas as origens vêm

da imagem conceitual, mas farei essa distinção para facilitar o entendimento sobre as relações entre as concepções apresentadas pelos alunos.

Acredito que a interação entre a imagem conceitual e a definição formal é importante para a aprendizagem do conceito matemático, inclusive quando um conflito é evidenciado e o próprio aluno visualiza os fatores que levaram a esse conflito. Ter em mente figuras e definições que condizem com a teoria matemática facilita o desenvolvimento do trabalho com os conceitos. Isso nem sempre é possível. Os alunos, muitas vezes, elaboram estratégias e esquemas de forma que conseguem prosseguir nos estudos sem se depararem com problemas em sua imagem conceitual. Para o educador, tentar interpretar as imagens evocadas em diferentes contextos, a relação entre as concepções e figuras que fazem parte da imagem conceitual, os possíveis conflitos existentes na estrutura cognitiva do aluno é importante para auxiliá-lo a tentar compreender o processo de aprendizagem. Penso que levantar conflitos, fazer com que eles apareçam, só vem a contribuir com a aprendizagem.

Os termos *imagem conceitual e definição conceitual* foram sugeridos por Tall e Vinner quando preocupados em entender a estrutura cognitiva do aluno ao trabalhar com um conceito. Com a apresentação de um conceito, o aluno resgata antigas idéias, cria novas imagens e incorpora novas concepções. Isso constitui sua imagem conceitual. Nessa imagem, podem estar presentes concepções que o aluno formou antes da apresentação do conceito, através ou não de uma definição. Essas idéias, muitas vezes, são concepções espontâneas que podem mudar o rumo do trabalho planejado. Nesta pesquisa, ouvir o que o aluno traz para a sala de aula, antes de começar a trabalhar com os conceitos de Cálculo, tem implicações políticas determinantes para o andamento do curso e, por isso, merece maior atenção. Se o aluno traz idéias relacionadas com o conceito de infinitésimo, por que não valorizá-las e legitimá-las em sala de aula? Se isso é feito, o rumo de trabalho na disciplina será outro. O aluno poderá se expressar de forma infinitesimal, sem ser obrigado a seguir um único caminho. Tendo em vista essa situação, recorro ao trabalho de Cornu (1983) para estudar as concepções espontâneas e próprias do aluno a respeito de um conceito matemático. Ao recorrer a essa teoria, não estou querendo dizer que Tall e Vinner não pensaram nas idéias que os alunos trazem antes do conceito ser apresentado. Acredito apenas que a ênfase dada pelos autores a essas idéias não é a merecida, considerando-se sua importância para o ensino de Cálculo Infinitesimal.

2. *As concepções dos alunos*

Em sua tese de doutorado, intitulada *Aprendizagem da noção de limite: concepções e obstáculos*, Cornu (1983) teve por objetivo detectar as concepções dos alunos em relação ao conceito de limite e os obstáculos à aprendizagem desse conceito. Para isso, preparou testes e entrevistas a fim de saber as idéias que os alunos tinham a respeito das expressões *limite* e *tende para*, e realizou um estudo histórico para identificar os obstáculos epistemológicos no desenvolvimento da noção de limite. Com base nesse último estudo, preparou uma seqüência didática com o objetivo de discernir os obstáculos encontrados na aprendizagem do conceito de limite.

Cornu afirma que antes de receber um certo ensinamento sobre algum conceito, o aluno pode ter alguma idéia a respeito do assunto. Essas idéias podem ter sido formadas a partir do estudo de outros assuntos da Matemática ou podem vir de situações do cotidiano do estudante. Entendo *cotidiano* do estudante como sendo suas experiências tanto na escola quanto fora dela. A partir de situações como ler um livro ou assistir televisão, o aluno pode formar idéias a respeito de um conceito matemático. As concepções sobre esse conceito podem também ser formadas a partir de experiências em áreas de conhecimento que não sejam a Matemática, como em aulas de Física ou Química, por exemplo. Cornu define **concepções espontâneas** como sendo essas idéias, imagens, processos e palavras a respeito de um conceito que não são fruto do ensino organizado sobre esse conceito. São idéias *à priori*. Refiro-me aqui a *ensino organizado*, entendendo que seja o ensino institucionalizado, realizado na escola, na universidade, sobre o assunto. Assim, quando o aluno formula concepções sobre um conceito a partir de um ensino organizado a respeito desse conceito, não estou considerando essas idéias como espontâneas.

Em relação ao conceito de limite, objeto da pesquisa de Cornu, a noção de *infinito*, o substantivo *limite* e a idéia de *tender a* já existem de uma forma particular antes de serem trabalhados no ensino organizado. Expressões como *algo que não tem fim*, *barreira* ou *linha divisória* e *aproximar-se de* são exemplos, respectivamente, de idéias ligadas às noções acima. São concepções espontâneas dessas noções, vindas da experiência do aluno em seu cotidiano.

Muitas vezes é complicado classificar certa concepção como espontânea ou não. Podemos não conhecer o cotidiano do aluno e o que ele já aprendeu a respeito do conceito. O objetivo desta pesquisa, porém, não é classificar concepções. Os termos que são aqui

apresentados servirão para auxiliar a entender as relações entre a imagem conceitual e a definição formal de um conceito. Por vezes, estarei chamando alguma concepção de espontânea. Nesse caso, procurarei saber de sua procedência, visando o objetivo anteriormente explicitado.

As concepções espontâneas não são eliminadas quando o aluno entra em contato com um ensino organizado, quando passa a estudar o conceito. O estudante pode fazer funcionar essas concepções durante muito tempo após esse ensino, ao invés de utilizar as idéias matemáticas que foram ensinadas. Elas podem funcionar, mesmo não sendo totalmente corretas, segundo a Matemática, dando conta da demanda. Essas concepções podem ser afetadas pelo ensino organizado. O que ocorre com o ensino, ao se trabalhar com exemplos, definições e propriedades, é a mistura das concepções do aluno sobre o conceito: as espontâneas e as oriundas desse ensino. Cornu chama **concepções próprias** “[...] as concepções, próprias ao aluno, que são formadas ao mesmo tempo pelas concepções espontâneas e o ensinamento recebido”¹ (CORNU, 1983, p. 69, tradução de Luisa R. Baldino).

Na tentativa de interpretar o significado dado por Cornu ao termo *concepções próprias* podemos fazer algumas asserções. Uma concepção própria não pode ser pensada exclusivamente como uma concepção matemática, pois Cornu faz essa distinção ao longo de seu texto. Um exemplo é a seguinte citação: “[...] o vocabulário matemático e a noção matemática não tomaram o lugar das concepções espontâneas, mas misturaram-se a elas, para dar lugar às concepções próprias”² (CORNU, 1983, p. 122, tradução de Luisa R. Baldino). Se essa distinção ocorre, vamos tentar interpretar o significado das expressões *misturam-se* e *formadas ao mesmo tempo*, utilizadas por Cornu na citação anterior e na definição de concepções próprias. Com o ensino organizado, o aluno pode ter reestruturado alguma concepção espontânea e gerado uma concepção matemática. Essa concepção gerada é própria e só foi assim construída porque já havia uma concepção espontânea sobre a qual o ensino agiu. Usando uma metáfora: em um bolo, a farinha está presente, apesar de não conseguirmos enxergá-la na sua forma original. Essa é uma interpretação para as expressões utilizadas por Cornu. Outra forma de pensar tais expressões é considerar que, depois do ensino organizado, o

¹ “[...] les conceptions, propres à l’élève, qui sont issues à la fois des conceptions spontanées et de l’enseignement reçu”.

² “[...] le vocabulaire mathématique et la notion mathématique n’ont pas pris la place des conceptions spontanées, mais s’y sont mêlés, pour donner lieu aux conceptions propres”.

aluno pode evocar uma concepção que não é puramente matemática. Nessa concepção identificamos tanto idéias matemáticas quanto espontâneas. Usando a metáfora do bolo, algumas vezes a farinha não se dissolve totalmente e podemos encontrar algumas bolinhas brancas no bolo! Outra situação que emerge a respeito de concepções próprias é que o aluno pode evocar, mesmo depois do ensino, uma concepção espontânea. As idéias matemáticas foram ensinadas, mas o aluno preferiu fazer funcionar uma concepção que tinha antes do ensino organizado. Essa concepção pode ser também chamada de própria, pois não deixa de ser fruto do ensino sobre o conceito.

Quando Cornu estabelece uma relação entre as concepções próprias e a imagem conceitual, a idéia de concepções próprias torna-se mais clara. Segundo Cornu, “[...] as concepções próprias contêm ao mesmo tempo as imagens mentais, as representações, as palavras ligadas à noção, mas também definições, propriedades, ‘teoremas’ (por vezes falsos...), processos, algoritmos, exemplos”³ (CORNU, 1983, p. 69, tradução de Luisa R. Baldino). Considerando tal relação, as concepções próprias adquirem um sentido de conjunto de concepções, aproximando-se da idéia de imagem conceitual. Assim, uma concepção espontânea sobre um conceito, quando evocada pelo aluno após o contato com o ensino organizado sobre esse conceito, pode ser chamada também de concepção própria, como mencionei no parágrafo anterior. Mas, sendo assim, depois do ensino organizado qualquer concepção passa a ser própria, não havendo mais necessidade de se falar em espontânea. Em outras palavras, depois do ensino todas as concepções de um aluno a respeito de um conceito são suas concepções próprias.

As interpretações anteriormente feitas sobre as expressões que Cornu utiliza quando se refere às concepções próprias se ajustam à idéia de imagem conceitual. As três concepções que utilizei como exemplo podem ser consideradas como concepções que fazem parte da imagem conceitual do aluno, evocadas após o ensino organizado sobre um conceito. A relação entre as concepções próprias e a imagem conceitual será considerada nesta pesquisa. Estarei, contudo, referindo-me à imagem conceitual para falar das concepções que o aluno tem sobre um conceito, incluindo as formadas após o ensino organizado. Para falar das idéias formadas antes desse ensino, utilizarei o termo *concepções espontâneas* que, ao meu ver, é a principal

³ “[...] les conceptions propres contiennent à la fois les images mentales, les représentations, les mots liés à la notion, mais aussi des définitions, des propriétés, des ‘théorèmes’ (parfois faux...), des processus, des algorithmes, des exemples”.

colaboração do trabalho de Cornu para esta pesquisa. Para referir às idéias formadas pelo aluno após o ensino sobre o conceito, utilizarei o termo *concepções próprias*. Se essas idéias continuarem espontâneas, permanecerei me referindo a elas como tal. Assim, as concepções próprias e espontâneas são parte da estrutura cognitiva do aluno sobre um conceito, ou seja, sua imagem conceitual.

É importante ressaltar ainda, que uma concepção espontânea sobre um conceito só é assim pois está sendo pensada dentro de um processo. Só é espontânea, pois existe uma concepção matemática sobre esse conceito que agirá sobre ela, com o ensino organizado. Depois desse ensino, concepções próprias podem surgir. Essas poderão vir a ser espontâneas quando outro conceito passar por um ensino organizado. Podemos pensar na prática de um matemático. Provavelmente, todas suas concepções são formais, de acordo com a Matemática. Quando ele passa a estudar um conceito novo, as concepções que ele resgatará para dar suporte a esse estudo serão espontâneas (lembrando que uma concepção ser espontânea não significa não ser matemática e formal, ou ser errada no contexto da Matemática). Mas em uma certa época, tais concepções passaram por um ensino organizado e não eram espontâneas para o matemático. Portanto, não faz sentido pensar em uma idéia espontânea sem atentar para o processo do qual o ensino organizado faz parte.

Deixando explícita a terminologia que estarei usando nesta dissertação, passo agora a contextualizá-la segundo o enfoque desta pesquisa. Os termos antes introduzidos serão ajustados para dar conta das idéias dos alunos quando evocadas no contexto infinitesimal.

3. As concepções infinitesimais dos alunos

Baseada na teoria desenvolvida por Cornu (1983), chamo **concepções espontâneas infinitesimais** as idéias, figuras e processos primeiros que o aluno apresenta a respeito do contexto infinitesimal. Estou considerando o *contexto infinitesimal* como o campo de conhecimento onde atuam as concepções infinitesimais, ou seja, as idéias que tratam do conceito de infinitésimo, considerando esse conceito desde o tempo em que começou a ser utilizado até os dias de hoje, passando por Leibniz, Cauchy e Robinson, apenas para citar alguns nomes. As concepções espontâneas, como mencionado na seção anterior, são formadas antes do ensino organizado sobre um determinado conceito. Assim, como exemplo, nos momentos iniciais do primeiro encontro de Cálculo Infinitesimal, quando os alunos foram

solicitados a falar sobre o que entendiam por *infinitésimo*, as respostas que foram apresentadas são interpretadas como concepções espontâneas a respeito do conceito de infinitésimo. Outros exemplos de situações onde apareceram concepções espontâneas infinitesimais serão mostrados posteriormente, na descrição dos episódios selecionados.

Depois de trabalhar com algum conceito no ensino organizado, o conjunto das concepções espontâneas infinitesimais pode ter sido abalado. Surgem, então, as **concepções próprias infinitesimais**, que são as idéias do contexto infinitesimal formadas após o ensino organizado de um conceito nesse contexto.

Estou considerando, nesta pesquisa, a imagem conceitual como sendo a grande estrutura cognitiva do aluno sobre algum conceito. Tratando-se das concepções infinitesimais, elas estão contidas na imagem conceitual e englobam tanto as espontâneas quanto as próprias. Se depois do ensino organizado sobre um conceito do contexto infinitesimal, alguma concepção espontânea surgir, continuarei chamando-a como tal, apesar de ter sido evocada após o ensino organizado. Quando uma *concepção infinitesimal* do aluno se apresenta em forma de palavras, tentando especificar o conceito ou explicar uma imagem conceitual evocada sobre esse conceito, podemos chamá-la de *definição conceitual*. Nesta pesquisa, utilizarei ambos os termos. Quando uma definição conceitual do aluno for associada ao formalismo, estarei dizendo que a concepção que o aluno apresentou foi uma definição formal, deixando o termo *definição conceitual* para designar uma idéia relacionada à imagem conceitual. Considero importante nesta pesquisa, por causa do objetivo e questões de interesse que tem, a origem das concepções que os alunos apresentam. Como especifiquei na primeira seção deste capítulo, a resposta dada pelo aluno pode ser baseada tanto na definição formal quanto numa imagem não relacionada ao formalismo matemático. Quando a resposta não for formal, direi que essa veio da imagem conceitual. Afirmarei que a resposta veio da definição formal quando for relacionada à teoria matemática. Ambas as origens vêm da imagem conceitual, mas farei essa distinção para facilitar o entendimento sobre as relações entre as concepções apresentadas pelos alunos.

Foi a partir das concepções espontâneas infinitesimais dos alunos que comecei a apresentar a teoria dos infinitésimos. Com base nessas concepções, exemplos e situações foram apresentados, fazendo com que a imagem conceitual de cada aluno fosse se constituindo. As definições, posteriormente, foram sendo apresentadas e incorporadas ou não à

estrutura conceitual. Foi dessa forma que o trabalho se desenvolveu durante os encontros de Cálculo Infinitesimal, cuja descrição o leitor encontra no anexo desta dissertação.

Neste capítulo, apresentei considerações a respeito da teoria, bem como a terminologia que utilizarei para interpretar os dados da pesquisa. O objetivo é tentar refletir sobre a pergunta-diretriz e as questões de interesse anteriormente expostas. No próximo capítulo, apresentarei a escolha metodológica que sustenta esta pesquisa e os procedimentos utilizados para conseguir os dados.

CAPÍTULO IV

METODOLOGIA DE PESQUISA

1. A Pesquisa Qualitativa

A escolha metodológica foi por uma abordagem qualitativa de pesquisa. Para Alves-Mazzotti e Gewandszajder (2001), esse tipo de pesquisa segue uma tradição compreensiva ou interpretativa. Segundo esses autores, as pesquisas qualitativas “partem do pressuposto de que as pessoas agem em função de suas crenças, percepções, sentimentos e valores e que seu comportamento tem sempre um sentido, um significado que não se dá a conhecer de modo imediato, precisando ser desvelado.” (Ibid., p.131). Elas procuram retratar a perspectiva dos sujeitos da pesquisa, ou seja, como reagem às situações que estão sendo focalizadas (LÜDKE; ANDRÉ, 1986).

Os dados da pesquisa qualitativa são, geralmente, de caráter descritivo, e são obtidos no contato direto do pesquisador com a situação e contexto pesquisado (LÜDKE; ANDRÉ, 1986). Assim, os dados são “descrições detalhadas de situações, eventos, pessoas, interações e comportamentos observados; citações literais do que as pessoas falam sobre suas experiências, atitudes, crenças e pensamentos [...]” (ALVES-MAZZOTTI; GEWANDSZNAJDER, 2001, p.132). Na presente pesquisa, estes dados foram representados pelas falas dos alunos nas situações de interesse do trabalho. Quando os dados são refletidos à luz do referencial teórico, constituem em conhecimento a respeito da área de pesquisa. Sua importância diz respeito à representatividade que têm no contexto em que a pesquisa está inserida.

[...] a representatividade dos dados na pesquisa qualitativa em ciências sociais está relacionada à sua capacidade de possibilitar a compreensão do significado e a ‘descrição densa’ dos fenômenos estudados em seus contextos e não à sua expressividade numérica (GOLDENBERG, 1998, p.50).

O objetivo não era procurar por verdades, ou seja, analisar se a idéia que o sujeito apresentava era válida ou não. O interesse desta pesquisa era pela compreensão da fala dos alunos e suas respostas a um novo contexto de estudo. Os dados de caráter qualitativo possibilitaram, portanto, tal compreensão.

Antes da coleta desses dados descritivos, algumas questões éticas devem ser levadas em consideração. Nessa direção, Goldenberg (1998, p.99) afirma que “Não se deve violar confidências ou causar dano às pessoas que se estuda. Para tanto, é importante que as propostas do pesquisador tenham ficado claras desde o início da pesquisa”. As intenções do pesquisador com os sujeitos devem ser explicitadas antes do processo de interação se iniciar. Dessa forma, as pessoas envolvidas ficam a par dos motivos do trabalho a ser desenvolvido e da maneira como ele ocorrerá. Referindo-se a entrevistas, Goldenberg salienta a importância da “[...] apresentação do pesquisador por uma pessoa de confiança do pesquisado [...]” (Ibid., p.87). Essa apresentação dará credibilidade ao trabalho do pesquisador e fará com que os pesquisados saibam que trata-se de uma atividade séria e de importância. Outro aspecto ético relevante é solicitar a permissão dos sujeitos da pesquisa, quando necessária, para filmar e gravar as situações, e, ainda, para não expor suas identidades publicamente, “[...] é preciso garantir o anonimato do entrevistado [...]” (Ibid., p.87). Geralmente, os nomes das pessoas são modificados, usando-se codinomes.

Uma característica da pesquisa qualitativa, considerada importante para Lincoln e Guba (1985), é a escolha da amostra de pessoas para participar da pesquisa. Para esses autores, “Toda amostra é feita com algum propósito em mente”¹ (Ibid., p.199). Para a pesquisa estatística, a intenção é a generalização dos resultados para uma certa população. O propósito da amostra qualitativa é maximizar informações sobre um certo contexto (Ibid., p.202). Para isto, os autores defendem que, na pesquisa qualitativa, os sujeitos a serem pesquisados devam ser escolhidos segundo um propósito, formando, assim, uma amostra intencional². O grupo de pessoas é escolhido de acordo com critérios e objetivos estabelecidos, baseados em características descritivas desses sujeitos. Com os dados coletados dessa amostra, o pesquisador obterá resultados sobre um grupo específico de pessoas, fornecendo informações profundas a respeito desse grupo, não objetivando, portanto, a generalização dos resultados.

Na pesquisa qualitativa, o procedimento metodológico escolhido para ser aplicado à amostra intencional é determinado de acordo com os objetivos e perguntas-diretriz da pesquisa. Assim, considerando o objetivo desta pesquisa, a saber: *conhecer as concepções infinitesimais de certos alunos através de um estudo de Cálculo Infinitesimal*, era necessário um ambiente em que os alunos estivessem trabalhando e discutindo sobre o tema, e que o

¹ “All sampling is done with some purpose in mind.”

pesquisador pudesse estar conjecturando e analisando as idéias e respostas desses alunos. Para tanto, a realização de um experimento de ensino era adequada. Segundo Steffe e Thompson (2000), um experimento de ensino é uma seqüência de episódios de ensino que objetiva a “[...] exploração e explicação da atividade matemática dos estudantes”³ (Ibid., p. 273). A palavra *experimento* é usada pelos autores no sentido científico. Hipóteses de pesquisa são feitas antes do trabalho ser iniciado. Ao longo dos episódios de ensino, outras hipóteses são formuladas e testadas. A palavra *ensino* é utilizada por causa das ações de ensino que ocorrem na interação com os alunos, durante a realização do experimento. Segundo os autores, a interação pode ser intuitiva, responsiva e analítica. Ela é intuitiva e responsiva quando o professor-pesquisador não sabe como e por que age da forma que está agindo. Nesse momento, ele não prevê a reação do aluno e não imagina o que pode ocorrer a partir de uma intervenção. Não há planejamento de ações futuras. A interação ocorre naturalmente e o professor-pesquisador se coloca no lugar do estudante tentando pensar como ele, com o objetivo de explorar suas ações. Quando as respostas dos estudantes evidenciam ao professor-pesquisador informações importantes para futuras ações, a interação ocorre de forma mais analítica do que intuitiva. Nesse momento, é possível ter uma noção da direção a seguir para o encaminhamento da situação. Na interação analítica, com certas evidências do raciocínio dos alunos, o professor-pesquisador pode testar as hipóteses feitas. Por causa dessa dinâmica de interação do experimento de ensino, um programa de conteúdos a ser trabalhado não pode ser fechado, como ocorre no ensino tradicional. O professor-pesquisador vai desenvolvendo as atividades com os alunos, direcionadas pelas suas respostas, à medida que questões de interesse vão surgindo.

A metodologia de experimento de ensino, segundo Steffe e Thompson (2000), é baseada “[...] na necessidade de fornecer uma justificação ontogenética da matemática, ou seja, uma justificação baseada na história de sua geração pelos indivíduos”⁴ (Ibid., p.269). Essa visão está relacionada com a idéia defendida pelos autores de que a Matemática é produto da inteligência humana, que se dá ao longo do tempo. Essa posição difere de uma justificação impessoal, universal e não histórica da Matemática. Assim, no trabalho com experimentos de

² Purposive sampling

³ “[...] exploration and explanation of students’ mathematical activity.”

⁴ “[...] on the necessity of providing an ontogenetic justification of mathematics; that is, a justification based on the history of its generation by individuals.”

ensino, são estabelecidos modelos da Matemática dos estudantes. Para o estabelecimento desses modelos, geralmente, os episódios de ensino são realizados durante um longo tempo, como um ou dois anos.

Com a escolha e procedimentos metodológicos já explicitados, passo, agora, à descrição dos participantes da pesquisa e dos encontros de Cálculo Infinitesimal.

2. Os alunos participantes

Os participantes da pesquisa eram do primeiro ano da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, do curso de graduação em Física, no ano de 2001. A disciplina era ministrada pela Profa. Dra. Miriam Godoy Penteadó⁵. As aulas regulares se realizavam em três dias da semana, a saber: segunda-feira (10h-12h), terça-feira (14h-16h) e quarta-feira (14h-16h). Desde o início do ano letivo, acompanhei toda turma, auxiliando com uma atividade de monitoria durante as aulas.

Um grupo de quatro alunos, dois do sexo feminino e dois do masculino, foi selecionado para trabalhar comigo em cinco quartas-feiras no horário de aula. O local desses encontros foi em uma sala diferente daquela onde ocorria a aula regular, pois considerei que nesse ambiente o grupo teria maior concentração. Os critérios de seleção destes alunos foram pensados e discutidos no grupo de pesquisa. É o que será tratado a seguir.

2.1. A escolha dos alunos

De acordo com Lincoln e Guba (1985), optei por uma amostra intencional de alunos para participar da pesquisa. Para essa escolha, alguns critérios foram levados em consideração. Esses critérios foram determinados segundo preocupações relativas à experiência que tive no estudo piloto e objetivos específicos da pesquisa.

Um estudo piloto, no ano de 2000, foi realizado. Os alunos que auxiliaram esse estudo eram da disciplina de Cálculo I do curso de graduação em Física. A professora responsável pela disciplina era também a Profa. Miriam. Visava com esse estudo, organizar os futuros encontros de Cálculo Infinitesimal. Assim, tive a oportunidade de rever atitudes minhas

⁵ Professora do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP/Rio Claro. A partir deste momento, chamarei a professora de Profa. Miriam, pois foi dessa forma que os alunos se referiram a ela nos encontros.

perante às falas dos alunos e reorganizar o material que seria trabalhado durante a coleta de dados. Alguns resultados desse estudo piloto podem ser encontrados em Milani (2001). Pretendia desenvolver o trabalho com um grupo de alunos dessa turma de 2000. Para isso, montei, inicialmente, uma tabela de horários em que eu estaria com disponibilidade para a realização do estudo. Os alunos interessados em participar preencheram essa tabela, indicando os horários viáveis para cada um. Escolhi, juntamente com a Profa. Miriam, um horário para o estudo. Quatorze alunos estavam inscritos. Dessa forma, daria para contar com possíveis desistências. No dia em que fui acertar com esses estudantes o local e alguns detalhes dos encontros, apenas oito dos que estavam inscritos se dispuseram a conversar.

No primeiro encontro, apenas um aluno estava presente. Conversamos um pouco, mas o trabalho preparado não se realizou. Na aula regular seguinte, conversei com os demais que haviam se comprometido. Desculpas diversas surgiram. Foi sugerida, então, a troca de horário, com a expectativa de que outros pudessem participar. Houve reclamações. Os alunos concordaram que o local das atividades poderia mudar, para facilitar o deslocamento de alguns. No encontro seguinte, três alunos apareceram e um deles chegou na metade da atividade. No terceiro encontro, dois alunos estavam presentes. No último, quatro alunos compareceram à sessão de trabalho, sendo que três desses, os que estavam no segundo encontro, participaram ativamente das atividades e discussão.

Temendo que uma situação como essa, de ter um número muito pequeno e variado de alunos nos encontros, ocorresse novamente na coleta de dados, a estratégia de determinação dos alunos foi repensada no grupo de pesquisa, com o auxílio da Profa. Miriam. Primeiramente, a idéia de um grupo pequeno de alunos se manteve. Trabalhar com a turma inteira, aproximadamente quarenta alunos, era impensável, já que queria saber, em profundidade, como os alunos lidavam com as concepções infinitesimais. Para que não houvesse o problema de ser difícil achar um intervalo de tempo comum entre os alunos e eu, os encontros seriam realizados no mesmo horário da aula regular. Pensando em evitar a situação de falta de comprometimento dos alunos e acabar, de repente, realizando encontros com apenas um aluno, analisei com a Profa. Miriam o comportamento da turma durante um mês de aula, até a data prevista para o primeiro encontro. Observamos os alunos que faziam questionamentos a nós duas, durante e após a aula. Os questionamentos eram tanto sobre os conteúdos da disciplina de Cálculo como áreas afins (Física, Filosofia da Matemática e

História da Matemática). Tendo em vista esse interesse demonstrado por alguns alunos durante o primeiro mês de aula, um primeiro grupo de estudantes foi selecionado.

Uma intenção que tinha para os encontros era maximizar o tempo, trabalhando e discutindo com os alunos sobre o assunto *Cálculo Infinitesimal*. Esse era o assunto planejado para os encontros e era o conteúdo base para as concepções infinitesimais emergirem. Por isso mesmo, não me interessava utilizar muito tempo dos encontros auxiliando os alunos em dificuldades relativas a conteúdos do Ensino Fundamental e Médio. Tivemos a idéia, então, de observar os erros cometidos pelos alunos numa prova sobre funções, realizada no final do primeiro mês de aulas. Selecionamos, a partir dessa observação, um segundo grupo de estudantes que não havia demonstrado tantas dificuldades com o assunto da prova. Acreditamos, dessa forma, que selecionando esses alunos, a probabilidade de estar utilizando um tempo dos encontros para tratar de dúvidas seria menor do que se tivéssemos escolhido outros alunos. Estávamos cientes que mesmo depois de ter selecionado os estudantes, se dúvidas aparecessem sobre esses conteúdos, eu trataria de resolvê-las. Cabe salientar que, em alguns momentos, durante os encontros, desviei o assunto de estudo planejado para tratar de dificuldades que estavam impedindo o andamento da sessão.

Finalmente, com a interseção dos dois grupos de alunos, que não demonstraram tantas dificuldades na prova e que participavam das aulas, obtive um novo grupo, de quatro estudantes, dois do sexo feminino – Lina e Nanda - e dois do masculino – Lugo e Mino - , que estiveram presentes em todos os encontros. Vale salientar que esses critérios de escolha, que caracterizam e especificam o grupo de alunos com o qual trabalhei, podem ter influenciado os resultados da pesquisa.

3. Os Encontros de Cálculo Infinitesimal (ECI)

3.1. A estrutura dos ECI

Visando atingir o objetivo da pesquisa, seis encontros com os alunos, de aproximadamente duas horas cada, foram programados. A estrutura foi a seguinte:

- quatro encontros de trabalho conjunto;
- um encontro de preparação e
- um encontro de apresentação.

A organização desses encontros em três categorias foi baseada no estudo de Sierpinska (1987). A autora possui diversas publicações sobre o tema *obstáculos epistemológicos à aprendizagem de limite*, e uma dessas é a que descrevo a seguir.

Com um pequeno grupo de alunos de Ciências Humanas, Sierpinska (1987) organizou quatro sessões de trabalho, de quarenta e cinco minutos de duração cada. Essas sessões fizeram parte de um projeto que envolveu outras sessões com alunos de outros cursos. Esse projeto tinha a finalidade de “[...] elaborar situações didáticas que auxiliariam os estudantes a superar obstáculos epistemológicos relacionados ao limite”⁶ (Ibid., p.371). Sierpinska descreveu e analisou as atitudes dos alunos relacionadas ao desenvolvimento da noção de limite. Para saber essas atitudes, a autora organizou quatro sessões de trabalho, assim ordenadas:

- 1º) primeiras questões sobre o assunto;
- 2º) transmissão do conhecimento;
- 3º) preparação da apresentação;
- 4º) apresentação.

A primeira e segunda sessões de trabalho da pesquisa de Sierpinska equivalem aos quatro encontros de trabalho conjunto da presente dissertação. A terceira e quarta sessões, acima citadas, correspondem aos encontros de mesma nomenclatura na presente dissertação.

Sabendo da existência de diversos obstáculos epistemológicos relativos à noção de limite e da necessidade de um conflito mental para que esses fossem superados, Sierpinska escolheu um tema matemático relativo ao assunto para ser trabalhado nas duas primeiras sessões. O assunto escolhido foi séries infinitas e expansão decimal, e o obstáculo em foco era

⁶ “[...] elaborating didactical situations that would help the students overcome epistemological obstacles related to limits.”

a questão do infinito relacionado aos números reais. Na presente dissertação, o obstáculo era a noção de infinitésimo e foi trabalhado com tópicos de Cálculo Infinitesimal.

O grupo, na pesquisa de Sierpinska, era formado por seis estudantes. Na primeira sessão, Sierpinska lançou aos alunos algumas questões sobre séries infinitas, indagando sobre o resultado das somas. No início da segunda sessão, a pesquisadora falou a eles que estaria “transmitindo um conhecimento”⁷ e que, posteriormente, eles comunicariam aos colegas da turma da maneira que quisessem. O trabalho com as séries infinitas e expansões decimais foi desenvolvido através de exercícios e questionamentos. A terceira sessão foi dedicada à elaboração da apresentação. O grupo havia diminuído. Três alunos haviam adoecido. Primeiramente, ela discutiu alguns pontos com os alunos a respeito de correções que deviam ser feitas no discurso, por causa de alguns erros. Em seguida, ela saiu da sala e deixou-os trabalhando. No final da sessão, ela retornou à sala. Os alunos se preocuparam em procurar argumentos para provar que $0,9\dots=1$ e $0,9\dots<1$. Essa questão foi discutida no primeiro ECI.

A apresentação dos alunos ocorreu na quarta sessão. Eles optaram por um debate, onde expuseram seus argumentos à turma. As opiniões divergiram a respeito da questão discutida na sessão anterior. Primeiramente, os três alunos “travaram uma disputa” entre eles, não engajando o restante da turma. Num segundo momento, após a participação de uma colega, os alunos passaram a se explicar melhor perante os outros. O debate ganhou aos poucos mais participantes. Assim como no encontro de preparação, Sierpinska não interferiu na apresentação.

Com a estrutura de trabalho acima descrita, Sierpinska teve a possibilidade de saber e analisar as concepções dos alunos relacionadas a um certo tema (noção de limite), como ela afirma: “[...] estas sessões trouxeram várias informações a respeito das formas de raciocínio e concepções dos estudantes, e, ao mesmo tempo, favoreceram o desenvolvimento destas concepções e raciocínios”⁸ (Ibid., p.376). Como o objetivo da presente pesquisa era conhecer as concepções infinitesimais dos alunos e compreender suas relações, acreditei que a estrutura de trabalho da pesquisa de Sierpinska serviria para alcançar tal objetivo. De fato, durante os

⁷ O sentido literal da expressão “transmission of knowledge”, como passagem do conhecimento do professor para o aluno, não se encontra no desenvolver do trabalho feito por Sierpinska nessa sessão, apesar do termo ter sido utilizado.

⁸ “[...] these sessions brought a lot of information about the students’ ways of reasoning and conceptions, and, at the same time, favoured the development of these in students.”

seis ECI tive a oportunidade de conhecer tais concepções e observar como elas se relacionavam à medida que as atividades iam se desenvolvendo.

3.2. Preparação para os encontros

De acordo com as questões éticas apontadas por Goldenberg (1998), antes da realização dos encontros tive uma conversa com a professora e os alunos selecionados, para deixá-los a par do motivo pelo qual eles haviam sido escolhidos, objetivos das sessões e seu funcionamento. Solicitamos a eles permissão para filmar e gravar os encontros, salientando que as imagens e as conversas seriam tratadas apenas pelo grupo de pesquisa, e que seus nomes seriam modificados. A participação da Profa. Miriam, nessa conversa, foi fundamental para que os alunos soubessem que as atividades estariam acontecendo com o seu aval, notassem a relevância dos encontros e sentissem credibilidade.

Esclarecemos, ainda, que os alunos deveriam estar presentes e participar de todos os encontros. Dessa forma, receberiam um ponto, a ser acrescido à nota da prova realizada pela professora, durante o tempo em que os encontros estivessem acontecendo. Os quatro alunos e o restante da turma tiveram acesso a uma tabela contendo as notas de provas e de trabalhos extras de todos os alunos. Assim, todos ficaram sabendo da bonificação. O ambiente de trabalho da turma era de negociação e os estudantes estavam acostumados com bonificações extras. Portanto, não houve reclamações por parte dos colegas devido ao ponto recebido pelos quatro alunos. A opção pela bonificação através da nota foi discutida com o grupo de pesquisa e com a Profa. Miriam. Foi mais uma estratégia utilizada para evitar que os encontros não se realizassem pela falta de alunos, como ocorreu no estudo piloto. Todas as atividades de pesquisa ocorreram com o aval da instituição. Os encontros fizeram parte do programa do curso para os quatro alunos. Como exemplo, uma das questões de uma prova possibilitava aos quatro alunos responderem segundo a abordagem infinitesimal, e uma apresentação, a respeito do assunto trabalhado nos encontros, foi feita por esses alunos ao restante da turma e professora. Além dessa nota, os estudantes seriam beneficiados com o conhecimento de uma nova abordagem para desenvolver os conceitos de Cálculo, e com uma atividade de monitoria, se surgisse alguma dúvida relativa ao trabalho feito durante as aulas regulares.

Os quatro alunos aceitaram e concordaram com o que eu e a Profa. Miriam expusemos na conversa. Um detalhamento maior da dinâmica e do trabalho realizado nos encontros será discutido a seguir.

3.3. Os quatro encontros de trabalho conjunto

Os quatro primeiros encontros, realizados durante um mês, tiveram uma dinâmica de trabalho diferente da dos demais. Estas sessões foram caracterizadas como uma adaptação do que Steffe e Thompson (2000) chamam de experimento de ensino. O termo *adaptação* foi utilizado, pois os encontros não tiveram duas características que, segundo os autores, identificam o experimento de ensino. Uma dessas características diz respeito a justificar ontogeneticamente a Matemática, quando se trabalha com experimento de ensino. Os ECI foram pensados com o objetivo de saber como os alunos responderiam às idéias de Cálculo Infinitesimal e, portanto, não tive a preocupação de fornecer à Matemática uma justificação. O segundo ponto é o fato de que o experimento de ensino ocorre durante um longo intervalo de tempo, por causa da necessidade de fornecer tal justificação à Matemática. Diferente disso, na época da realização dos ECI, planejei que quatro encontros, durante um mês, bastariam para saber sobre algumas concepções infinitesimais dos alunos. Portanto, a duração do experimento de ensino e a necessidade de uma justificação da matemática são fatores que fizeram com que os quatro primeiros encontros da presente pesquisa diferissem de um experimento de ensino, segundo Steffe e Thompson (2000). Assim, chamei esses encontros de *adaptação de experimento de ensino*.

As primeiras sessões realizaram-se em quatro quartas-feiras, a saber: 04/04/01, 11/04/01, 18/04/01 e 25/04/01, no horário da aula regular: das 14h às 16h, exceto a terceira que, devido a uma prova de Cálculo, realizou-se das 16h às 18h, por opção dos alunos, ao invés de ocorrer em um outro dia. O local das reuniões era o laboratório didático de computadores do curso de Física. Apenas o segundo encontro foi realizado numa sala de aula comum, por motivo de dedetização do laboratório. O ambiente de trabalho precisou ser um espaço com computador, por causa da utilização do software Corel Draw, que foi instalado em uma das máquinas.

Os assuntos planejados para esses encontros foram: conjunto dos números hiper-reais, cálculo de derivada de funções polinomiais, regra da soma e da cadeia, derivada da função seno e segundo teorema fundamental do Cálculo. O estudo desses tópicos foi baseado em

fichas de trabalho encontradas em Baldino e Cabral (2000). Esse estudo será abordado, posteriormente, na apresentação dos dados e na transcrição dos acontecimentos dos encontros.

Durante os quatro encontros, introduzi alguns conceitos e nomenclaturas iniciais do assunto, pois os alunos nunca haviam deparado com esse tipo de abordagem, e trabalhei com a resolução de demonstrações e exercícios, no quadro, com a participação do grupo. Questões eram lançadas com o objetivo dos alunos discutirem e emitirem sua opinião. Procurava perceber dúvidas e idéias que eles tinham sobre os tópicos trabalhados. Observei o tipo de relação que faziam entre as duas formas de se abordar o curso de Cálculo: limites e infinitésimos. As comparações vinham à tona, pois os alunos estavam em contato com as duas abordagens, uma na aula regular e outra nos encontros. Quando me questionavam, não respondia prontamente. Ao invés disso, procurava encaminhar a situação devolvendo perguntas ao aluno e tentando orientá-lo. Muitas vezes isso não era possível, pois os demais colegas falavam antes, entregando a resposta pronta ao outro aluno.

Enquanto eu falava sobre os conceitos, observava a reação e as perguntas dos alunos. Lançava questões e me interessava por suas opiniões. Persistia com outras perguntas com o objetivo de interpretar o que eles estavam falando. Ao final dos encontros, discussões eram feitas em torno de pontos que os alunos levantavam. Tentava participar o mínimo possível, para não influenciar a opinião deles. A partir dessas conversas e de outras manifestações dos alunos durante os encontros e aulas regulares, obtive indicações de como estavam lidando com as concepções infinitesimais. De um encontro para outro, criava hipóteses a respeito das respostas apresentadas pelos alunos, com a intenção de compreender suas concepções. Pensar nessas hipóteses, fez com que eu direcionasse algumas perguntas a serem realizadas no encontro posterior.

Essa foi a dinâmica de trabalho dos quatro primeiros encontros, caracterizados como *adaptação de experimento de ensino*. Todas as sessões, inclusive a de preparação e apresentação, tiveram as imagens filmadas e o áudio gravado. Uma rápida descrição das atividades de cada encontro será mostrada a seguir. Maiores detalhes sobre o desenvolvimento dessas atividades são encontrados no próximo capítulo e anexo desta dissertação.

3.3.1. O primeiro encontro

As principais atividades ocorridas no primeiro encontro foram:

- Investigação inicial sobre a idéia que os alunos tinham de infinitésimo.
- Questionamento: 0,999... ___ 1. Menor? Igual?
- Interpretação da definição: *Infinitésimo é um número menor que qualquer número real positivo.*
- Apresentação do conjunto dos números hiper-reais e seus elementos.
- Cálculo de algumas derivadas de funções polinomiais. Os alunos foram ao quadro resolvê-las.
- Apresentação da nomenclatura que seria utilizada nos encontros.
- Visualização dos infinitésimos utilizando o zoom do software Corel Draw, na situação de uma reta tangente à curva x^2 .
- Distância entre a curva e a reta tangente.

3.3.2. O segundo encontro

No segundo encontro, as situações principais foram:

- Revisão da regra da cadeia, assunto tratado nas aulas regulares no momento do encontro. Foi uma atividade de monitoria.
- Comparações entre as notações utilizadas na abordagem infinitesimal e no contexto do conceito de limite.
- Demonstração da regra da soma e da cadeia. As provas foram conduzidas por mim, mas com a colaboração dos alunos.
- Início do cálculo da derivada do seno, feito por um aluno.

3.3.3. O terceiro encontro

As principais atividades do terceiro encontro foram:

- Um roteiro para o cálculo de derivada.
- Cálculo da derivada do seno.
- Interrupção do cálculo algébrico para buscar auxílio do zoom infinito. Não foi utilizado o computador. Os alunos fizeram previsões para o resultado do zoom.
- Checagem desses resultados, solicitados no encontro anterior.
- Término do cálculo algébrico da derivada do seno.

- Distância entre a curva e a reta tangente.

3.3.4. O quarto encontro

No quarto encontro, as principais situações foram:

- Checagem, no Corel Draw, do trabalho feito no encontro anterior sobre a derivada do seno. Através de perguntas, tentei fazer com que os alunos retomassem o que havíamos concluído. Depois das respostas, eu mostrava os resultados.
- Aplicação da integral definida como área sob o gráfico de uma função, com o auxílio do computador.
- Demonstração do segundo teorema fundamental do cálculo. Foi comandada por mim, mas, como sempre, com o auxílio dos alunos.
- Auxílio do zoom no computador numa das passagens finais da demonstração algébrica do teorema. As conclusões tiradas a partir da visualização do computador foram feitas muitas vezes pelos alunos, a partir de perguntas minhas do tipo: *o que vocês estão vendo?* e *o que isso quer dizer?*

3.4. O encontro de preparação

Esse encontro ocorreu em 20/06/01, numa quarta-feira, no horário da aula regular. Após, exatamente, um mês e vinte e cinco dias da realização do último encontro, eu estava reunida novamente com os quatro alunos no laboratório didático de computadores da Física. Nesse local, pois o computador estaria à disposição dos alunos, caso eles precisassem. Esse encontro tinha o objetivo de saber o que havia ficado para os alunos do que fora discutido e ensinado durante as quatro sessões de Cálculo Infinitesimal. As concepções infinitesimais haviam mudado? Alguma concepção foi acrescentada à imagem conceitual de um certo conceito? As dificuldades e erros persistiam?

O objetivo que propus aos alunos era de eles prepararem uma apresentação para os demais colegas e Profa. Miriam, numa aula regular de Cálculo. Sierpínska (1987) relata nesse artigo que, na sessão de preparação, saiu da sala para que os alunos discutissem a respeito do assunto que haviam escolhido. Na presente pesquisa, decidi estar presente em todo encontro, pois assim conseguiria marcar momentos importantes do trabalho, que poderiam passar despercebidos apenas assistindo a filmagem e ouvindo a gravação. No início dessa sessão de

preparação, Sierpinska (1987) fez algumas ressalvas a respeito de erros que os alunos haviam cometido nas sessões anteriores. Na presente pesquisa, as respostas incorretas que apareceram nos quatro primeiros encontros foram corrigidas durante os próprios encontros. Se alguma questão de dúvida por parte deles ou minha não havia sido esclarecida, isto seria feito após a apresentação. Não poderia interferir no desenvolvimento da preparação e apresentação. Do contrário, a possibilidade de influenciar suas respostas e idéias seria grande.

Participei desse encontro, interferindo no seu andamento apenas no início, quando fiz algumas observações a respeito de seu desenvolvimento: *“É importante que vocês saibam do objetivo deste encontro. Desde o início, esclareci que estava realizando minha pesquisa. Depois dos quatro encontros que tivemos, onde trabalhamos com alguns conceitos de Cálculo Infinitesimal, chegou o momento de vocês mostrarem o que ficou de tudo isso. O que aparecer neste encontro e na apresentação é fundamental para minha pesquisa. As respostas devem vir apenas de vocês. Dessa forma, não adiantará me perguntar se algo está certo ou errado. Eu não vou responder. Do contrário, estaria interferindo no pensamento de vocês, em suas respostas. Isso não serve para o trabalho que estou desenvolvendo. Os erros e as divergências entre vocês podem aparecer. Isso será importante para mim. Não tenham medo de errar e de não saber responder a possíveis perguntas dos colegas. Se vocês tiverem dúvida sobre algum assunto, podemos conversar depois da apresentação.”* Falei ainda sobre a importância dos alunos mostrarem aos colegas o que haviam estudado, já que se ausentavam da sala de aula uma vez por semana e que uma questão de uma prova possibilitava o uso dos infinitésimos. A única exigência que fiz foi que escolhessem pelo menos um tópico do que havíamos trabalhado, e apresentassem a resolução da seguinte questão: *A equação que descreve a distância percorrida por um objeto é dada por $S(t) = -4,9t^2 + 50$, justifique pela via dos limites ou pela via dos infinitesimais por que a função velocidade é $v(t) = -9,8t$ m/s.* Tal questão era de uma prova realizada pela turma dos quatro alunos, que possibilitava-lhes escolher entre a abordagem infinitesimal e a do conceito de limite para resolvê-la.

Os principais momentos desse encontro foram:

- Resolução da questão da prova, pelo aluno que optou por infinitésimos.
- Revisão de alguns tópicos vistos.
- Tentativa de demonstrar a regra do produto.

3.5. O encontro de apresentação

O encontro de apresentação foi realizado na segunda-feira, 25/06/01, após o encontro de preparação, na sala de aula regular, no horário de aula. O objetivo e as questões de interesse desse encontro são as mesmas do encontro de preparação. Esse momento também era a chance de saber o que persistia e o que havia mudado em termos das concepções infinitesimais dos alunos. Um interesse difere dos apresentados para o encontro de preparação. Na apresentação dos quatro alunos, os colegas e professora poderiam fazer questionamentos a eles. Esses questionamentos seriam importantes para saber a reação e o tipo de respostas dos quatro alunos, e o contexto em que as perguntas estariam inseridas.

Interferi nesse encontro apenas ao dizer à turma, em termos gerais, o que os alunos iriam fazer. Depois desse momento, apenas observei os estudantes. Abaixo, faço uma descrição rápida do encontro:

- Apresentação dos infinitésimos e do conjunto dos hiper-reais.
- Realização da questão da prova.
- Regra da cadeia e da soma.
- Cálculo da derivada do seno. Para ajudar nas justificações, os alunos desenharam o resultado dos zooms em folhas grandes, para que os colegas e professora pudessem enxergar.

Houve participação dos colegas e da professora através de comentários e perguntas. A professora incentivava, quando possível, a comparação do trabalho que estava sendo apresentado e o que estava sendo visto nas aulas regulares, ou seja, houve uma tentativa de comparação entre as duas abordagens: infinitesimal e via conceito de limite. Os alunos conseguiram apresentar muitas idéias a respeito do que havíamos estudado. Eles tinham o objetivo de fazer com que os colegas e professora entendessem o que estavam falando. Notava-se o esforço.

Após a apresentação, reuni-me com os alunos e eles resolveram algumas dúvidas ainda pendentes, e comentaram sobre sua satisfação em apresentar aos colegas o trabalho feito sobre Cálculo Infinitesimal. Analisando os comentários finais de todos os alunos da turma e da Profa. Miriam, a apresentação foi considerada muito boa e interessante, agradando aos presentes.

Neste capítulo apresentei a abordagem de pesquisa e os procedimentos metodológicos utilizados para desenvolver os encontros de Cálculo Infinitesimal. De maneira concisa, explicitarei ao leitor as principais atividades que ocorreram em cada encontro. O próximo capítulo trata dos dados da pesquisa. São episódios dos ECI – trechos recortados dos encontros - que auxiliaram na tentativa de refletir a respeito da pergunta-diretriz e das questões de interesse da pesquisa.

CAPÍTULO V

DADOS DA PESQUISA

Os dados da pesquisa são episódios selecionados das transcrições dos encontros de Cálculo Infinitesimal, tendo como base a pergunta-diretriz e as questões de interesse. Recordando, a pergunta que guia esta pesquisa é a seguinte:

Como alunos de Cálculo I do curso de Física, da UNESP de Rio Claro, lidam com as concepções infinitesimais, no trabalho com tópicos dessa disciplina, estudados segundo a abordagem infinitesimal?

Para refletir sobre a pergunta acima e auxiliar na interpretação dos dados, aponto algumas questões de interesse, elaboradas a partir da própria pergunta-diretriz e do referencial teórico:

- Que concepções espontâneas infinitesimais foram trazidas pelos alunos?
- Que concepções formaram a imagem conceitual de infinitésimo e de derivada?
- Qual a relação entre a imagem conceitual e a definição formal no contexto infinitesimal?
- Que dificuldades e conflitos foram encontrados no trabalho de alguns conceitos de Cálculo segundo a abordagem infinitesimal?
- Que comparações os alunos fizeram entre a abordagem infinitesimal e a do conceito de limite?

Os episódios dos seis ECI constituem-se, basicamente, em falas e idéias dos alunos. Cada episódio é um agrupamento de trechos que contêm uma unidade, um tema em comum. Eles foram selecionados tendo como base as questões de interesse e a pergunta-diretriz. Muitas vezes, um trecho diz respeito a mais de um assunto. Por isso, no próximo capítulo não apresentarei a análise dos dados segundo os mesmos temas utilizados para organizá-los. Esses temas dos episódios são, então, os seguintes:

- As concepções espontâneas infinitesimais dos alunos;
- Algumas definições de infinitésimo;

- Imagem conceitual e definição conceitual de derivada;
- Vocês poderiam dar um exemplo em que se usa esses infinitésimos?;
- Viajar: pensar no infinito e infinitesimal;
- Dificuldades no trabalho com o contexto infinitesimal;
- Comparações entre a abordagem infinitesimal e a do conceito de limite;
- Divide em pequenas coisinhas e soma tudo ...;
- Cálculo Infinitesimal no curso de Física.

A transcrição dos ECI, onde encontram-se os trechos que formam os episódios, constitui o anexo desta dissertação. Ali, as atividades desenvolvidas nos encontros estão mais detalhadas do que no quarto e presente capítulos. Os dados da pesquisa são apresentados a seguir.

1. As concepções espontâneas infinitesimais dos alunos

Para conhecer as primeiras idéias dos alunos sobre infinitésimos, no início do primeiro encontro de Cálculo Infinitesimal fiz o seguinte questionamento: *Vocês já ouviram falar em infinitésimo? Vocês lembram de alguma palavra, frase ou figura que esteja relacionada com infinitésimo?* Perante isto, os alunos apresentaram as seguintes idéias:

Lina – Ouvi relacionado à infinitesimal. Pontos muito pequenos, que seriam quase desprezíveis.

Lugo - Pontos infinitamente pequenos.

Mino - Fractal, no sentido de pontos muito pequenos, que podem ser desprezíveis em alguns cálculos. Infinitésimo é uma coisa que tende ao unidimensional. Ele vai diminuindo tanto que perde a dimensão. Você pode desprezar dependendo do seu ponto de vista, dependendo de onde você está olhando.

Nanda – Ouvi relacionado a dízimas. Na dízima, tem sempre números se repetindo ou não. Você sempre vai colocar um número. Até o infinito. Nunca acaba. Infinito, infinitésimo.

Após essa conversa, perguntei aos alunos: *0,999... em relação ao 1. É menor? Igual?*

Mino e Lina - São bem próximos.

Lugo - Mas 0,9... é um pouquinho menor que 1. Por menor que seja [a diferença entre eles], o 1 é maior que ele.

Nanda - Se você for arredondar, nos cálculos, se for olhar só para as reticências, você diz que é 1.

Raquel - Mas e se você não for arredondar? Na sua frente está o 0,999... e o 1, você os liga com um sinal de maior, menor ou igual?

Nanda - Se for assim, eu diria que o 1 é maior que 0,9...

Raquel, para Mino e Lina - O que vocês acham?

Mino - Eu também. 0,9... é menor que 1.

Lina - Aproximadamente igual a 1.

Raquel - Mas se é aproximado, então ...

Nanda - É, então não é igual.

Lina - É, não é igual.

Lugo - Se não precisar de precisão, você escreve que é igual a 1, para facilitar o entendimento, o cálculo, para arredondar.

2. Algumas definições de infinitésimo

Após conhecer as concepções espontâneas infinitesimais dos alunos, introduzi a seguinte idéia: *Infinitésimo é um número, um número infinitamente próximo de zero*. Falei brevemente sobre o conjunto dos números hiper-reais, bem como seus elementos. Logo após, apresentei a seguinte definição de infinitésimo: *Infinitésimo é um número menor que qualquer número real positivo*. Solicitei para que tentassem entender essa frase e pedi por possíveis exemplos.

Mino - É difícil definir um padrão para infinitésimo, pelo o que eu entendi. É difícil de imaginar.

Lugo - Se a gente imagina um número bem pequeno, 0,0000...1, sempre dá para colocar um número, com uma casa decimal a mais [um zero a mais antes do 1] que ele vai ser menor ainda.

Nanda - Que ele vai ser um infinitésimo.

Mino - Sempre dá para diminuir.

Raquel - Por menor que eu pegue um número real, sempre posso pegar outro menor, a metade, por exemplo.

Lugo - É. Ele pode chegar bem mais perto de zero, mas não é o zero. Então ainda dá para se dizer que tem números menores.

Raquel – Mas e o zero? Ele poderia ser um infinitésimo?

Os alunos discutiram um pouco sobre a questão. Li a definição novamente e um dos alunos não concordou que o zero seria um infinitésimo.

Mino - Se ele [infinitésimo] é positivo, então ele é maior que zero, não é igual a zero. Então eu acho que ele [zero] não entraria nessa classificação.

Raquel - Vamos ver. Vamos substituir no lugar de infinitésimo o zero para ver se fecha? Zero é um número que é menor que qualquer número real positivo.

Todos concordaram, balançando a cabeça positivamente.

Mais adiante, nesse mesmo encontro, surge o diálogo abaixo sobre a mônada de um número. No encontro, já tínhamos conversado sobre isso, através do exemplo da mônada do número 2. Para detalhes sobre essa conversa, ver p. 124 e 125, no anexo da dissertação.

Raquel - Qual a diferença entre um elemento da mônada do x e o x ?

Lina – dx .

Raquel - Isso. Um infinitésimo. Quem faz parte da mônada do zero?

Lugo – Infinitésimos.

Raquel - Por quê?

Os alunos - São números bem próximos do zero.

Raquel – Muito bom.

Lugo – Do lado positivo, né? Porque do lado esquerdo não tem números na mônada do zero, só se eles forem negativos.

Raquel – Sim, são os infinitésimos negativos.

No encontro de apresentação, Lugo comentou sobre uma definição de infinitésimo que havia encontrado.

Lugo – (...) Eu vi num livro. Porque a gente se interessou e começou a correr atrás de um monte de livro. Num dos livros, eu achei uma definição de infinitésimo por limite. Era essa aqui. Você tem uma função qualquer $f(x)$. Quando limite de $f(x)$ quando x tende para a é zero, ela é chamada infinitésimo. É uma outra definição. Mas a definição que a gente ouviu com a Raquel foi que um infinitésimo é um número menor que qualquer número real positivo.

Profa. Miriam – Menor número...

Lugo – Menor que qualquer real positivo.

Profa. Miriam – Você pensa em um. Infinitésimo é menor que ele.

Nanda – Você pensa em um, ele é menor ainda. Então você sempre vai ter um número menor.

3. *Imagem conceitual e definição conceitual de derivada*

No primeiro encontro, os alunos calcularam a derivada de algumas funções polinomiais.

Por exemplo, a resolução feita para a derivada de $f(x)=x^2$ foi a seguinte:

$$\begin{aligned}y &= x^2 \\ dy &= (x+dx)^2 - x^2 \\ dy &= x^2 + 2x dx + dx^2 - x^2 \\ dy &= 2x dx + dx^2 \\ dy &= dx(2x+dx) \\ \frac{dy}{dx} &= 2x+dx \\ y' &= re\left[\frac{dy}{dx}\right] = re[2x+dx] = 2x\end{aligned}$$

Antes de estabelecer a parte real de $\frac{dy}{dx}$, ocorreu o seguinte diálogo:

Raquel - Quem é a parte real? O que significa parte real? É um x , o 2, o x^2 , um número real. Falamos em parte real e infinitesimal.

Lugo – A parte real é o $2x$.

Os outros concordam.

Raquel – Isso. Porque x é real, 2 vezes um real ...

Os alunos – ... é real.

Raquel – dx é infinitésimo. Então a parte real é ...

Os alunos - ... $2x$.

Lugo – Isso é por causa que dx é um número tão pequeno que dá para aproximar para zero, é isso?

Raquel – Veja que eu não falei em aproximar para zero...

Mino, interrompendo-me – Na reta dos reais ele é zero.

Raquel - Isso, se eu pular para os reais ...

Lina, interrompendo-me – Seria como número imaginário [complexo]? Você tem a parte real e a imaginária.

Raquel – Isso. Exatamente. Mas vejam que eu não falei em fazer dx igual a zero, mandar ele para sei lá onde [risos]. Ele está aí, eu só disse que a minha derivada é $2x$.

No primeiro encontro, no final do cálculo da derivada da função $f(x)=x^3$, tínhamos

$$\frac{dy}{dx}=3x^2+3xdx+dx^2.$$

Lugo - Agora é só pegar a parte real.

Raquel – Isso. Então a derivada $f'(x)$...

Lina – É onde não tem dx .

No terceiro encontro, montamos um roteiro para o cálculo da derivada:

1) $dy=f(x+dx)-f(x)$

2) $\div dx$

3) $f'(x)=re\left[\frac{dy}{dx}\right]$

Sobre o terceiro passo, tivemos a seguinte conversa.

Raquel – Por que retiro a parte infinitesimal?

Lina – Porque ela é tão pequena, que posso desprezá-la.

Lugo – Porque no conjunto dos reais ela não é nada. No conjunto dos reais, os infinitésimos não significam nada.

Raquel – Como eu defini a derivada? Como a parte real. Por que tenho que tirar a parte infinitesimal? O que eu quero?

Nanda – Porque quero a parte real só.

Os alunos concordaram com Nanda.

No encontro de preparação, os alunos estavam decidindo como iriam começar a apresentação.

Lina – Tem que explicar por que a gente pega a parte real.

Outros, rindo – Ah, porque é!

Lina – “A gente pega a parte real”. Aí pode ter alguém que pode perguntar [ironizando]:
Por quê?

Risos.

Lugo – Porque o resultado que a gente vai usar não vai ...

Nanda – Alterar.

Lugo – Não, não é que vai alterar é que não vai ter utilidade a gente pegar o infinitésimo.

Lina – A gente tem que falar que é tão pequeno que não altera o... Eu tenho certeza que vai ter um pentelho que vai perguntar: Por quê?

Lugo – Eu até já sei quem.

Mino – O Lugo vai apresentar, então não vai ter ninguém para perguntar.

Risos.

Lugo - Eu sou perguntador mesmo.

No encontro de apresentação, Mino estava no quadro resolvendo a seguinte questão de uma prova que possibilitava aos alunos responderem via infinitésimos ou limite: *A equação que descreve a distância percorrida por um objeto é dada por $S(t) = -4,9t^2 + 50$, justifique pela via dos limites ou pela via dos infinitesimais por que a função velocidade é $v(t) = -9,8t$ m/s. Já tendo desenvolvido boa parte dos cálculos, Mino escreveu $\frac{dS}{dt} = -9,8t - 4,9dt$. Os outros apresentadores começaram, então, a dar explicações sobre o passo restante do cálculo de uma derivada, na abordagem infinitesimal.*

Lugo – Esse quociente entre esses dois infinitesimais é o que a gente chama de quase-derivada. Por que quase-derivada? Porque ainda tem esse pedaço infinitesimal aqui, que a gente vai desconsiderar.

Lina – Quando a gente faz a derivada a gente só pega a parte real.

Lugo – Só a parte real.

Nanda – Porque os infinitésimos, neste caso, não vão fazer tanta diferença.

Lina - Porque eles são infinitamente pequenos.

Nanda - Porque eles são infinitamente pequenos não vão influenciar tanto o resultado. Então eles podem ser, não desprezados, mas não contados, não incluídos nesta conta.

Lina - Só vai pegar os reais, a parte real.

Colega 1 - Existe algum exemplo que vocês têm que considerar esses infinitésimos?

Nanda – Depende do cálculo que você estiver fazendo.

Lugo – Este caso da derivada não.

Lina – Aqui a gente só vai pegar a parte real.

Lugo – Por exemplo, na derivada você só vai trabalhar no conjunto dos números reais. Então, esse número aqui, é um infinitesimal que nos números reais, não existe.

Em um outro momento da apresentação, o diálogo foi sobre a diferença entre dy e Δy na abordagem infinitesimal e na tradicional do conceito de limite.

Lugo – Se a gente dividir $dy=f'(x)dx+\varepsilon$ por dx , teremos o quociente igual à derivada mais o infinitésimo. Esse infinitésimo é o que o Mino desconsiderou ali. Pegou só a parte real.

Mino – Na verdade, você não está desconsiderando. Você está pegando a parte real.

Profa. Miriam – É. É definido assim.

Mino – É definido assim. Você pega a parte real. Você não desconsidera [o infinitésimo], porque os números reais também estão nos hiper-reais. Você só está pegando a parte real.

Na finalização do cálculo da derivada da função seno, no encontro de apresentação,

Lugo escreveu no quadro: $\frac{dy}{dx}=\cos x+\varepsilon$.

Lugo – Agora a gente vai fazer o de sempre. Vai pegar a parte real e desconsiderar o infinitésimo. Ele existe, mas a gente vai desconsiderar.

Escreveu, então, a resposta $f'(x)=\cos x$.

4. Vocês poderiam dar um exemplo em que se usam esses infinitésimos?

No encontro de apresentação, Mino resolveu a derivada da equação $S(t)=-4,9t^2+50$. Dentre várias justificações dadas para o último passo desse cálculo, estavam as seguintes: “(...) os infinitésimos, neste caso, não vão fazer tanta diferença” e “(...) eles são infinitamente

pequenos não vão influenciar tanto o resultado (...)”. Isso incentivou os colegas a fazerem algumas perguntas.

Colega 1 – Mas existe algum exemplo em que se usa esse infinitésimo?

Lina – Acho que você teria que estar trabalhando com os $\ast\aleph$.

Nanda - Ou então com partículas extremamente pequenas que qualquer alteração possa afetar o resultado que você quer. Se você estiver trabalhando com, por exemplo, raios ou partículas subatômicas, pode ser que esse infinitésimo seja incluído na conta. Agora, esse cálculo é só nesse universo muito pequeno, como o dos números infinitesimais. Aí pode ser que esse número seja contado.

(...)

Um colega 2 pede sobre mais uma aplicação da Física. Por causa do barulho, não consegui entender o que ele havia dito. Era algo relacionado à temperatura.

Nanda – Então. Nesse caso, esse infinitesimal, que aqui foi desprezado, vai ser incluído nesse. Depende da expressão que você estiver usando.

Lina - Depende do cálculo.

Nanda – Se você estiver usando na termodinâmica ou se for na dilatação, que tem aquelas fórmulas de dilatação, esse infinitésimo vai fazer muita diferença.

Lina – Depende da influência do infinitésimo no cálculo. Aqui o infinitésimo não vai influenciar tanto, em outros vai.

Nanda - Se você estiver calculando o coeficiente de dilatação de uma barra de ferro numa ferrovia, no acoplamento de uma barra a outra para permanecer unidas, para juntar os trilhos, esse infinitésimo vai fazer muita diferença naquela dilatação do ferro. O infinitésimo não pode ser desprezado, só que neste caso a gente só quer a parte real, para poder encontrar a inclinação da reta, que é o $v(t)$ que a gente quer.

Lina - O infinitésimo existe, ele está aí, mas neste cálculo só interessou a parte real.

Nanda – Depende do cálculo. Ele é muito importante, tanto que tem até um conjunto especial para ele, que são os hiper-reais.

5. *Viajar: pensar no infinito e infinitesimal*

No primeiro encontro, termos como *mônada* e *hiper-reais* foram introduzidos e chamaram a atenção dos alunos. Conversamos também sobre a existência de números infinitos.

Raquel – Então, um número infinito positivo é maior que qualquer real positivo.

Lugo - Isso é teórico, porque na prática você sempre vai conseguir um número maior.

Raquel – Tem vários números infinitos.

Após um silêncio, eles começam a rir.

Lina - Vários?

Raquel – Sim.

Lina – Se tiver dois, eu sempre posso dizer que um é maior que outro.

Raquel - Sim, por isso que eu posso comparar números infinitos. Tem um número infinito que é maior que outro. Mas os dois são maiores que quaisquer números reais positivos.

Eles começam a rir.

Nanda - Tem que viajar um pouco!

Raquel - É algo novo para vocês, mas tudo é provado de forma rigorosa. É aceito pela Matemática.

O verbo *viajar* foi bastante utilizado, no último encontro, para caracterizar algumas situações apresentadas pelos alunos à turma. Uma dessas situações surgiu no final do primeiro encontro, a partir de uma opinião de Lina.

Lina – Acho que é mais fácil entender a idéia de infinitésimo do que de infinito.

Mino – Para mim, é o contrário. Por exemplo, se for aplicar no cotidiano, você pega um cronômetro. Ele não tem limite de casas para começar a marcar o tempo. Então ele nunca marcaria nada, ele sempre marcaria zero quando você ligasse ele. Ele nunca ia chegar ao próximo número.

Nanda - Ao próximo número real.

Mino - Isso sempre me incomodou. Sempre penso assim. Ligo meu cronômetro. Ele nunca marca nada. Sempre marca zero, porque ele nunca chega ao próximo. Se você não impuser limites às casas decimais ele nunca vai chegar ao próximo número.

Lembro do paradoxo da dicotomia de Zenão e digo a eles.

Mino – É exatamente isso. Se a gente for pensar assim, a matemática não admitiria espaço nem tempo.

Lina – Eu falei que é mais fácil o infinitésimo, pois ele está ali. Estou vendo o zero. Mas infinito, parece que eu nunca vou chegar.

Mino - Você tem uma referência.

Com a situação do cronômetro, Nanda iniciou o encontro de apresentação.

Nanda – Não sei se vocês observaram que a gente não ficou algumas vezes na aula com vocês, justamente porque a gente ficou no laboratório com a Raquel. Ela nos mostrou coisas muito interessantes para nós da parte de Cálculo, que são os infinitésimos, que é um universo, pelo menos na minha opinião, um universo bem diferente, uma visão muito diferente do que aquela que a gente vê todo dia. Porque são números tão pequenos, tão pequenos, e não são o infinito, não chega a ser o infinito, são números muito pequenos, infinitamente pequenos, (...) às vezes você pode fazer umas viagens e você não consegue chegar em lugar nenhum, por exemplo: se você pegar um cronômetro e começar a cronometrar o tempo que você leva para chegar na sua casa, você pode perceber que ele nunca vai sair do zero, ou seja, você nunca vai chegar na sua casa! Pelo tempo, se você for marcando o tempo.

Isso provocou risos na turma inteira, inclusive, nos apresentadores. Alguns colegas falaram “*Zenão, Zenão*”, “*Isto é Zenão*”. Nanda continuou.

Nanda - Você fica marcando e ele nunca vai sair do zero. Então você começa a perceber que os números são infinitos e pelo fato de serem infinitos isso altera bastante, então você começa a pensar neles, nesse universo que os infinitésimos fazem parte, tem até um conjunto especial, que são os hiper-reais, que os infinitésimos fazem parte.

No final da apresentação, os alunos retomaram o resultado dos zooms aplicados ao cálculo da derivada do seno, para falar sobre o infinitésimo de segunda ordem. Para detalhes sobre essa atividade, ver p. 232-236, no anexo da dissertação. As figuras mencionadas nesse trecho são mostradas nas páginas 64 e 65, quando utilizadas para explicitar melhor a atividade do seno.

Lina – A gente não falou em infinitésimo de segunda ordem.

Lugo – É. Aqui [Figura A.5] a gente deu um zoom para ver o infinitésimo. Aqui [Figura A.6] a gente deu outro zoom para ver outro infinitésimo. Esse $[dx]$ é de primeira ordem e esse $[1-\cos dx]$ é de segunda ordem. É um infinitésimo menor que o outro infinitésimo. Se você tiver um infinitésimo menor que todos infinitésimos, é um infinitésimo de ordem infinita.

Risos da turma inteira.

Nanda – É viagem.

Colega 4 – Você vai ter infinitésimo de infinitésimo de infinitésimo.

Nanda – Alguém tem pergunta? Deu para entender essa idéia de infinitésimo, zoom? Esse zoom aí é muito legal. A demonstração da fórmula da derivada do produto e do quociente é a mesma coisa.

Lina – Parte do mesmo princípio.

Nanda – É só você pegar a definição ...

Lugo – Demora um pouquinho, mas com esforço sai!

Nanda – A gente fica enrolado um pouco com essas demonstrações, porque a gente não está acostumado. A gente pega mais a parte prática da Matemática. Tanto que quando o professor demonstra as fórmulas, a gente fica “ah ...” [risos]. Mas é legal, bem interessante isso aí. Principalmente essa visão geométrica que a gente teve do zoom.

Profa. Miriam – Eu gostei das viagens.

Nanda - Toda a vez que a gente saía dos encontros a gente ficava viajando.

Lugo – Essa história do cronômetro, de que você nunca vai chegar na sua casa. Por exemplo, se você pegar uma distância. Daqui até ali. Primeiro você vai percorrer a distância até o meio, depois percorrer a metade. Depois a outra metade, a outra metade ... Você nunca vai chegar no lugar. Aí a gente ficou acabados ...

Profa. Miriam – Arrasados!

Risos.

Nanda – Tem os fractais também. Que é um exemplo bem interessante dessa parte infinitesimal. Você vai dividindo, dividindo ... A teoria do caos também. A idéia de que uma coisa muito pequena que pode afetar. Como nos exemplos que a gente deu. Dependendo do cálculo que você tiver fazendo esse infinitésimo vai ter que ser contado. Vai fazer diferença. Como o bater das asas de uma borboleta pode provocar um ciclone. Então tem que ver.

Colega 5 – Para calcular o decaimento de um elemento radioativo, esse infinitésimo entra?

Nanda – Olha sinceramente eu não sei. Mas pelo problema que isso pode causar, ou até mesmo dependendo da parte que você quer observar deste cálculo, esse infinitésimo possa fazer muita diferença. Eu acredito que sim.

Colega 5 – É que nunca chega no lugar, né? Então o elemento nunca vai decair

Nanda – Mas esse negócio de que nunca chega no lugar, já é mais uma visão. A parte algébrica do infinitésimo é que vai influenciar mesmo neste cálculo. As viagens que você vai fazer aí é outra coisa.

6. Dificuldades no trabalho com a abordagem infinitesimal

No primeiro encontro, trabalhamos com a ferramenta zoom do software Corel Draw. O monitor mostrava a curva x^2 e a reta tangente a ela num ponto P . Quando demos um zoom infinito no ponto P , enxergamos a curva e a reta coincidentes, como na figura abaixo.

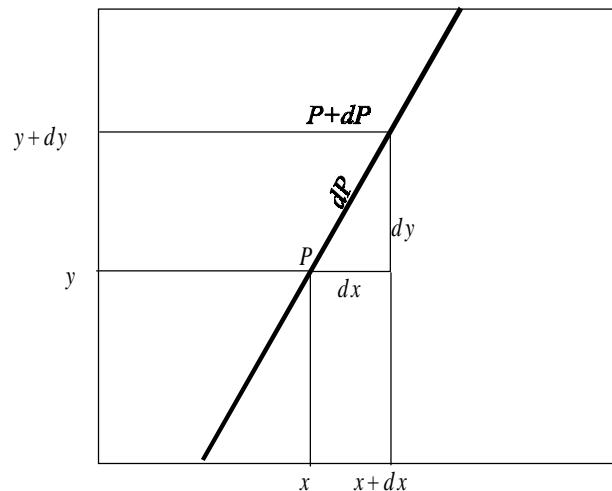


Figura 1.4

Para ver a diferença, demos outro zoom infinito, agora no ponto $P+dP$, ponto da curva, originado pelo acréscimo infinitesimal dx dado a x . O resultado desse zoom foi a figura abaixo.

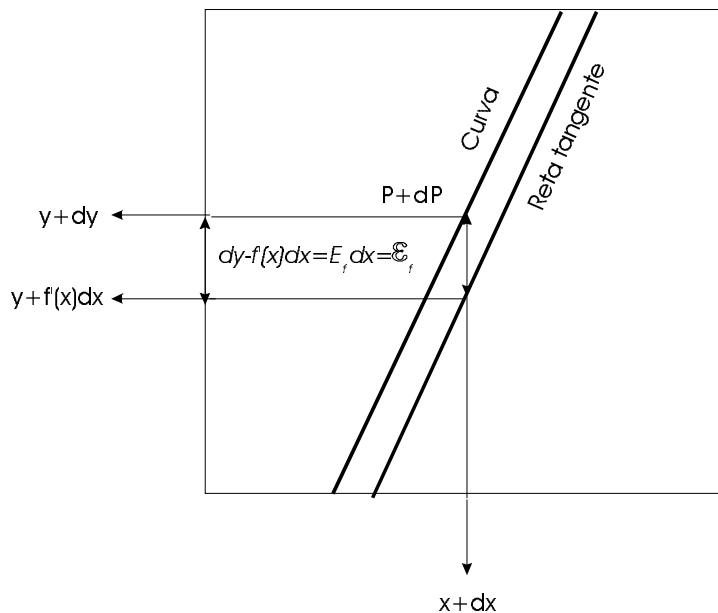


Figura 1.5

Descobrir a justificativa para a diferença entre a curva e a reta ser dada por $dy - f'(x)dx$, gerou discussão e ocupou boa parte do tempo do encontro. Para descobrir tal diferença, os alunos tinham que saber a ordenada da projeção do ponto $P+dP$ na reta tangente. Depois de fazerem algumas tentativas, sugeri que os alunos se baseassem na definição geométrica de derivada: a derivada de uma função f em um ponto P é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto P . Nanda tenta aplicar essa definição, localizando no desenho um cateto oposto sobre um adjacente.

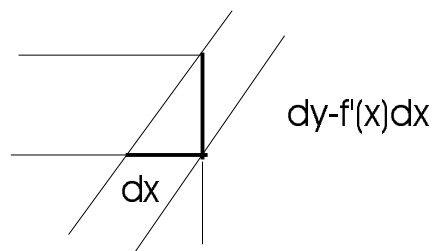


Figura 1.6

Perguntei aos alunos como era formado o ângulo que determinava os catetos do triângulo, no cálculo do coeficiente de uma reta. Responderam que era formado pela própria reta e uma paralela ao eixo x .

Raquel – O ângulo deste triângulo é formado por quem?

Perceberam que estavam olhando para a “reta” de cima (a curva) e não para a de baixo (a tangente). Foi difícil visualizar o triângulo correto no desenho do segundo zoom. Portanto, na figura do primeiro zoom infinito, forcei o aparecimento da reta tangente.

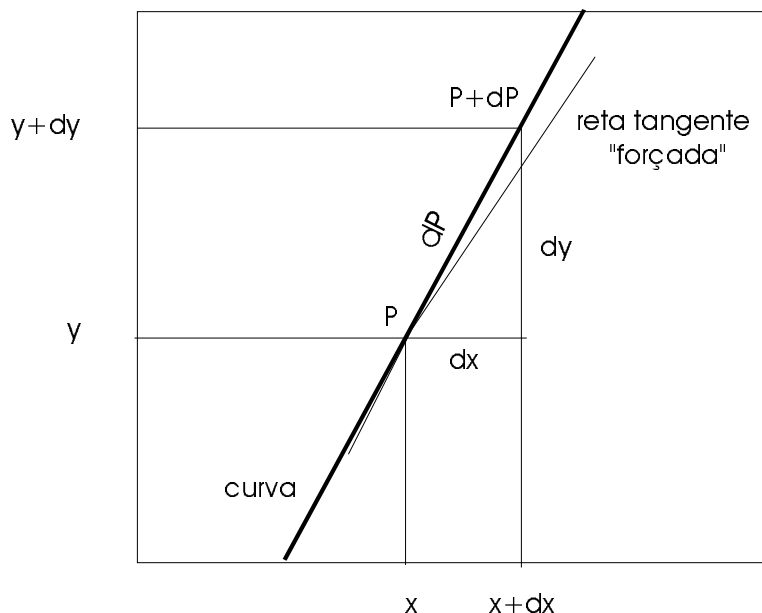


Figura 1.7

Os alunos localizaram a diferença procurada nesse desenho. Mas mesmo assim, a resposta não veio. Passei, então, para o caso finito, onde os acréscimos eram números reais e não infinitésimos, desenhando para eles a figura a seguir.

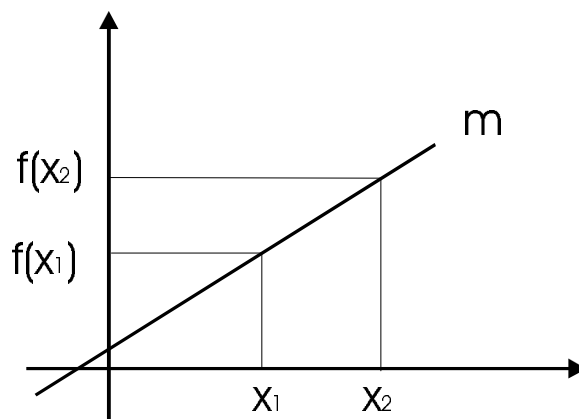


Figura 1.8

Facilmente, eles escreveram $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = m = f'(x)$. Chamei a atenção para o fato de que os acréscimos, nesse caso, eram reais e que não poderíamos escrever com a notação de

infinitésimo. Escreveram, então, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. Pedi para que determinassem o cateto oposto:

$\Delta y = f'(x)\Delta x$. Eles notaram a semelhança com $f'(x)dx$, e reconheceram essa medida na figura “forçada” do primeiro zoom, lembrando que os acréscimos eram infinitesimais.

Raquel – Então quanto vale desde a origem?

Nanda - Vale a medida até o ponto P e mais o que foi calculado.

Raquel - Ou seja...

Lugo – $y + f'(x)dx$.

Raquel - Ficou difícil de enxergar aqui [2º zoom]?

Lugo - Confunde qual que é a curva e qual que é a reta.

Nanda – Como a gente está tão próximo, percebe-se que a curva e a reta estão paralelas. Num plano maior, dá para ver que é a curva e a reta tangente. Aí, dá para deduzir que tem um triângulo retângulo. Não estamos acostumados com esta perspectiva. Mas saiu!

No terceiro encontro, trabalhamos com a curva $y = \sin x$. Voltei a perguntar sobre a distância entre a curva e a reta tangente num certo ponto. Nesse caso, a tangente estava em cima da curva e a diferença é dada por $f'(x)dx - dy$, ao contrário do caso anterior. Nanda lembrou que tinha algo a ver com $f'(x)$, coeficiente angular. Desenhei a seguinte figura:

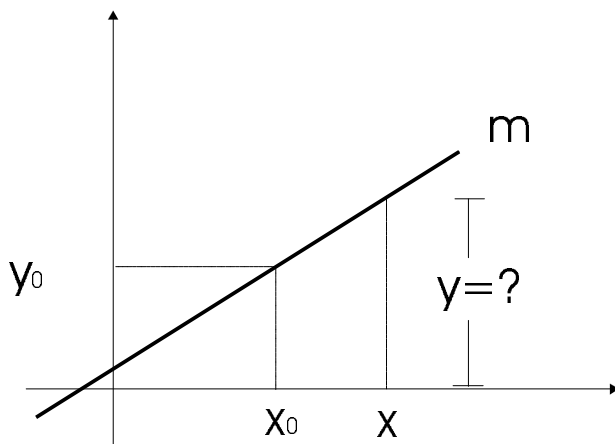


Figura 3.14

Concluíram, depois de algumas tentativas, que a medida que estávamos procurando era $y = y_0 + m(x - x_0)$. Da mesma forma que o caso anterior, os alunos localizaram um triângulo retângulo no segundo zoom infinito. Essa atividade não pôde ser concluída, pois estávamos ultrapassando o horário de funcionamento do laboratório.

No final do quarto encontro, tivemos uma conversa geral sobre todos os encontros. Mino falou sobre o zoom.

Mino – Ah, eu extrapolo um pouco. Eu penso em outras possibilidades para o zoom. E isso dificulta um pouco.

Raquel – Possibilidades de quê?

Mino - Tem vezes que eu penso no zoom numa maneira que eu acabo não concordando com isto. E eu gostaria de saber em que ponto eu estou errando para poder chegar.

Raquel – Eu pensei que com o computador tivesse ficado mais claro.

Mino – Não, pensando neste raciocínio, está ok, perfeito. Mas sempre dá para extrapolar ainda mais. Não tem limite para isso.

Lina – O livro que eu estou lendo, diz que muitas vezes, trabalhar com o infinito contraria a sua lógica. O exemplo que ele dá é que você pega o conjunto dos naturais e o conjunto dos pares e pergunta qual é o maior. A lógica é que o de todos os números, porque o dos pares é só uma parte. Mas a resposta é que eles são iguais, porque ele faz uma relação entre os conjuntos.

Mino – Deu pra se guiar por essa lógica, mas sempre dá para pensar outra coisa. Pode até ser errado, mas você sempre está pensando em outra coisa. Como eu pensei numa possibilidade da esfera começar a diminuir junto com o zoom. Foi uma série de processos que eu fui pensando e cheguei a esta conclusão que a esfera diminuía junto. Eu queria saber onde eu estou errando para pensar certo.

Nanda – Acho que não é pensar errado. Depende do argumento que você está usando. Se você encontrar um argumento bem convincente, mesmo que o que você está pensando não seja certo...

Raquel – É possível inventar novas teorias, basta fixar certas verdades, axiomas e a partir deles desenvolver uma cadeia.

Lina - Um vai levando no outro.

No final do quarto encontro e nos encontros de preparação e apresentação, os alunos falaram que o seno havia sido um problema e que haviam demorado muito para entender o que se passava. O diálogo abaixo refere-se ao final do quarto encontro.

Nanda – O seno foi um problema.

Raquel – Por quê?

Nanda – Na hora, para conceber... Hoje [com o computador] já foi mais normal, visualizar.

Lugo – Parecia coisa de louco. Na hora a gente não entendia nada. Mas agora melhorou.

Nanda - Naquele dia, estava difícil visualizar que $\sin dx$ estava paralelo a dx e que dx era uma reta e não o “círculo”!

Raquel – Na verdade, sempre foi o “círculo”.

Nanda - Mas depois ficou claro. A gente não estava chegando tão próximo quanto era preciso.

No encontro de preparação, os alunos estavam decidindo o que iriam apresentar.

Lugo – Quem vai pegar aquela parte do seno e cosseno?

Lina – Nossa! A gente ficou meia hora para descobrir aquilo.

Lugo – Mais. A gente começou num dia e acabou no outro [2º e 3º encontro].

Nanda – Seria interessante falar das retas, curva paralela à tangente. É legal.

Lina – Zoom. A Miriam até comentou, né?

Nanda – Tem que escolher uma coisa menos complicada de entender para passar para todo mundo.

(...)

Nanda – A minha dúvida era aqui. Eu não me conformava que o seno era igual ao dx . Eu fiquei muito chateada, mas depois eu entendi [risos]. Essa parte gráfica a Miriam não deu.

Lina - Foi bem geral.

Ainda sobre o assunto *seno*, no encontro de preparação.

Lugo – Se vocês quiserem que eu me arrisque a fazer a derivada do seno eu faço. O problema é o gráfico. Porque aqui é paralelo e não é paralelo, é curvo, mas é paralelo.

(...)

Lina – Você lembra por que que o $\cos dx$ é bem próximo de 1?

Lugo - Ah, é só fazer o círculo. Se você tiver bem pertinho [arco perto do zero], se você for chegando cada vez mais perto, esta linha [linha do cosseno] vai correr para cá [origem do círculo]. Quando estiver bem pequenininho vai estar bem próximo de 1. Essa é a explicação.

Lina - Como é essa história de correr?

Lugo - O coseno não é a projeção do arco? Então você vai diminuindo o arco, a projeção vai aumentando. Vai chegando cada vez mais perto de 1, pertinho de 1. É 0.000...

Mino - Essa diferença é o $1 - \cos dx$.

Lugo - Vai ser infinitesimal. Aqui é a mesma coisa, $\sin dx$ é aproximadamente igual a dx . São números bem pequenos. Dividindo um pelo outro vai dar próximo de 1.

Nanda - E o último [zoom] foi o que deu problema.

Lugo - É. A dúvida que a gente teve é ver que dx era aproximadamente reto e que era aproximadamente igual ao seno também. O arco é praticamente igual ao seno do ângulo.

Na apresentação, antes de finalizar os cálculos algébricos da derivada do seno, os alunos fizeram a interpretação geométrica, fazendo uso do zoom infinito.

Lugo - Quando a gente tem um círculo trigonométrico da forma que a gente conhece, se esse for o arco teta, o coseno vai ser a projeção no eixo horizontal e o seno a projeção no eixo vertical. Agora a gente vai trabalhar com um arco infinitesimal, dx . Então a gente dá um zoom. Quando a gente chegar perto do ponto A, a gente tem a impressão de que esse pedacinho, o arco aqui é mais ou menos, tem a impressão de uma reta. Dá a impressão, se a gente chegar muito próximo.

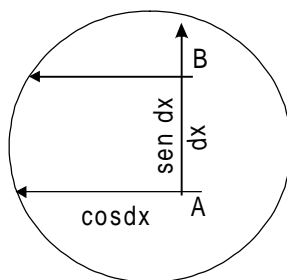


Figura A.5

Nanda - Você tem que viajar um pouco.

Lugo - Tem que imaginar um pouco.

Colega 3 – É como o horizonte. O horizonte é curvo e você tende a imaginar que é uma reta.

Nanda – Exatamente. Você tem que viajar muito. Para você sair do que você conhece e ir para lá.

Lina – Quando a Raquel propôs para gente foi bem ...

Mais tarde, na apresentação, os alunos retomam algumas explicações.

Nanda – Quando você chegar bem perto do ponto A [na figura A.4], você não vai ver isso [arco dx] virando. Você vai ver paralelo, que é o que tá aqui [figura A.6].

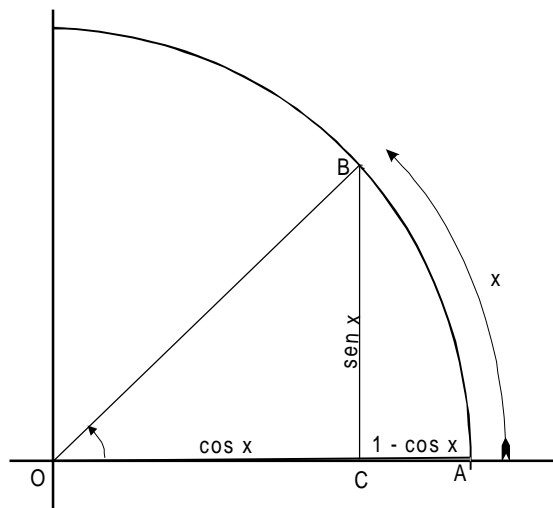


Figura A.4

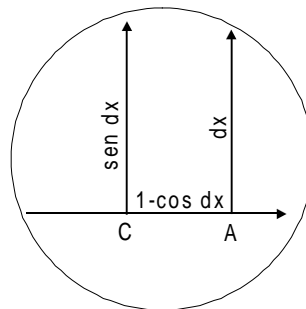


Figura A.6

Lugo – Você vai continuar vendo reto, só que ele [arco dx] vai virando...

(...)

Lugo – Esse dx aqui [figura A.6], na verdade, é esse pedacinho aqui [dx em figura A.4] do círculo trigonométrico. Só que é tão pequeno, ou melhor, a gente tá tão perto que a gente

enxerga ele como uma reta. E o $\text{sen } dx$ é paralelo a ele. São aproximadamente iguais: $\text{sen } dx \approx dx$.

(...)

Lugo desenha um círculo trigonométrico e marca um arco muito pequeno.

Colega 3 – É paralelo ao seno dele.

Lugo pára sem resposta.

Profa. Miriam – Não são paralelos. Um arco e uma reta.

Colega 3 – Mas no infinitesimal eles são paralelos.

Profa. Miriam – Dá a idéia de que são paralelos.

Nanda – Depende do zoom que você dá. Num zoom, você vê os dois juntos. Se você der outro zoom, você vê os dois paralelos.

7. Comparações entre a abordagem infinitesimal e a do conceito de limite

No segundo encontro, algumas comparações foram estabelecidas entre as notações utilizadas nos encontros e nas aulas regulares de Cálculo.

Raquel – Vocês notaram diferença entre o que a Miriam usou de notação e o que nós usamos no encontro passado?

Lina – É mesma coisa. Também usamos $\frac{dy}{dx}$ e $f'(x)$.

Raquel – Mas é mesma coisa?

Lugo e Mino – A Miriam desprezou o infinitesimal.

Lina – A gente fez considerando todo o infinitésimo. A gente pegou a parte real e o infinitésimo. A Miriam já pegou a parte real.

Raquel – A Miriam considerou as notações como iguais. Para nós também era a mesma coisa?

Eles respondem que não.

Lugo – O $\frac{dy}{dx}$ não era a quase-derivada?

Raquel – Sim, que é igual a ...

Lugo - A parte real mais a infinitesimal.

Raquel – Onde entra $f'(x)$ nessa história?

Todos - Era só a parte real.

Raquel – Então, com a Miriam estas notações são ...

Todos – Iguais.

Raquel - Ela não está enxergando $\frac{dy}{dx}$ como quociente de infinitesimais. E nós estamos

considerando essas notações como ...

Todos – Diferentes.

Lugo – Isso não está em termos de limite, e este número [infinitésimo] está tão pequeno que a gente pode desconsiderar?

Raquel - Sim, usa-se o limite e se acaba com os infinitésimos.

Lugo – Dá para considerar que $\frac{dy}{dx}$ é aproximadamente, bem aproximadamente igual a derivada.

Raquel - É isso que a gente está fazendo aqui, com o símbolo \approx .

Lugo – Eu sei, mas como ela pegou a notação de quase-derivada e disse que era igual a de derivada, a parte infinitesimal é tão pequena que considerou que tende a zero, então tira esta parte e esses dois são iguais.

Raquel - Vocês acham que é igual?

Todos dizem que não.

Mino - Nos hiper-reais não.

Lina – Os infinitésimos existem.

No encontro de preparação, os alunos fizeram mais comparações.

Nanda – A gente tem que usar as palavras certas.

Mino – $\frac{dS}{dt}$ não é igual a $-9,8t$. Ele é aproximadamente. Para ser igual você ...

Lina – Tem que acrescentar um infinitésimo.

Mino – É.

Lugo - A gente pode até mostrar uma comparação entre o método por limite e por infinitésimo. Para poder dizer que existe uma ...

Lina – Semelhança.

Mino e Lugo - Isso.

Lugo – Aliás, essa parte é muito parecida.

Nanda – A gente podia fazer essas contas através do limite, porque o pessoal fez pelo limite.

Lina – Porque o limite quando x tende a a , você está pegando os infinitésimos próximos de a .

Lugo – x tende a a . Esta diferença entre os dois é um infinitésimo.

Lina- Essa parte dá para falar. É legal.

(...)

Mino – A gente provou a regra da soma, do produto.

Nanda - Mas isso tem no livro.

Mino - Mas a gente provaria pelos infinitésimos.

Lugo - A gente pode fazer isso sim. Eu vi a demonstração da regra da cadeia no livro. Nossa! Duas páginas!

Lina – É aqui é mais fácil esse jeito, né?

No encontro de preparação, os alunos estavam discutindo sobre o que apresentar aos colegas. Nessa conversa, surgiram algumas comparações entre as abordagens.

Lugo – Eu li que no $\frac{dS}{dt}$, o d foi Leibniz quem introduziu para representar os passos bem pequeninhos, esses infinitesimais.

Mino – Bom, acho melhor fazer por infinitésimo e depois comparar com o limite.

Lugo – Olha gente, o desenvolvimento dos cálculos é igual. O que muda é o dt que vai ter um Δt ou um h . Só quando chegar neste ponto [parte real] é que a gente explica. Vai ficar diferente.

Lina – É o que eu disse. O limite é quando você está pegando os infinitésimos mesmo.

Lugo – Eu li num livro uma definição assim. O infinitésimo de uma função é quando ela tende a zero num dado ponto. Quando ela tem por limite zero num dado ponto.

Mino – Mas acho que aí é a definição de limite.

(...)

Lugo – E ainda, a gente pode dizer que a gente usa lá que $\frac{dy}{dx}$ é uma notação. A gente pode comentar que é uma notação, mas tem um sentido de divisão. Que é o que a gente vai falar. Um acréscimo no x e um no y , e dividindo um pelo outro você acha a derivada. Mas o livro do Swokowski [adotado como livro-texto na disciplina de Cálculo do curso de Física] também fala que é uma divisão, quando trabalha com os diferenciais.

Durante a organização dos itens da apresentação, os alunos olharam para a folha das definições e notações e lembraram que para calcular a diferença entre a reta tangente e a curva x^2 foi difícil. Falando sobre isso, salientaram mais diferenças entre as abordagens.

Nanda – $\frac{dy}{dx}$ é a quase-derivada.

Lina – É porque você tem ainda, nesse quociente, a parte infinitesimal. Depois, é na derivada que você pega parte real.

Mino – Você não pode falar que $\frac{dS}{dt}$ é igual a $v(t)$.

Lina – É aproximadamente igual.

Lugo – É que quando é por limite, $\frac{dS}{dt}$ é um número que tende a outro. E esse tende desconta. Esse tender a gente diz que é. E aí no caso dos infinitésimos, dizer que tende, diz que a diferença é um número muito pequeno, que a gente desconsidera. É praticamente igual.

Na mesma folha, alguns infinitésimos estavam representados por ε . Mino lembrou, então, da definição de limite.

Mino – A Miriam passou por cima disso.

Lugo - Tem no Swokowski. É um ε , um δ , para cima, para baixo.

Mino - Isso é muito complicado!

No encontro de apresentação, os alunos fizeram comparações entre as abordagens, a partir da pergunta da Profa. Miriam.

Nanda – (...) Se você pegar o 1, por exemplo. Esses números que estão próximos dele é a mônada do 1. Mônada é uma notação. Esses números que estão aqui [faz um círculo ao redor do 1, marcado numa reta] estão na mônada do 1.

Profa. Miriam – Seria o mesmo que a idéia de vizinhança?

Nanda – É.

Lina – É, também quando a gente trabalhou com limite, você falava quando tende a. Esse tende é quando você pega os números que estão próximos, você está pegando os infinitésimos. Então são os próximos, quando tende a, esse tende são os infinitésimos.

Lina e Lugo - A diferença é um infinitésimo.

Nanda - É um número muito pequeno, não chega a ser o número, mas é um número bem próximo dele. Se a gente assimilar a idéia de limite, essa idéia fica mais clara porque a gente já viu a idéia de limite. E a idéia de limite vinculada à idéia de infinitésimo fica muito mais clara. Quando diz “ah, um número próximo, x tende a esse número”, ele tende a este número, mas não chega no número.

Lina - É na mônada do número.

Na apresentação, Lugo justificou a igualdade, no contexto de limite, entre as notações.

Lugo – No limite, a gente trabalha com os reais. E nos reais os infinitésimos não existem. Então a derivada da função e esse quociente $\frac{dS}{dt}$ são iguais. Mas quando a gente vai para os hiper-reais, onde os infinitésimos existem, não são iguais, são aproximadamente iguais.

Depois do cálculo da derivada de $S(t)=-4,9t^2+50$, no encontro de apresentação, os alunos e colegas fizeram mais comparações.

Colega 3 – É muito parecido com limite. A única diferença é a mônada que é o nome diferente para a região onde você está chegando. Ao invés de estar chegando no limite está chegando na mônada.

Nanda – É que limite você chama de vizinhança e nos infinitésimos é mônada. É a notação que você usa para cada situação que você está abordando. A questão da prova mostrou isso. Dava para você desenvolver tanto por limites quanto por infinitésimos. A maioria das pessoas fez pelo limite, porque não tinha visto isso aqui, mas dava para fazer por infinitésimos.

Lina – É que quando a gente faz por limite, a gente não se dá conta que existem esses números infinitamente pequenos. A gente faz os cálculos, o t tende a zero, mas, na verdade, não fica bem claro que são esses números infinitamente pequenos que você está usando. Você está pegando a parte real só.

Lugo – Inclusive se você pensar que uma função tem um limite que vai tendendo a zero, quando ela vai tendendo a zero ela vai se tornando um infinitésimo. Ela vai ficando cada vez menorzinha.

Nanda - Mas ela vai tendendo. Ela não é o zero. Ela vai tendendo ao zero. Fica na mônada do zero. Na vizinhança do número zero.

Em um outro momento da apresentação, surgiram mais comparações.

Profa. Miriam – O que é legal aí é que você não usa limite, aquelas coisas todas de limite. Você opera como se fossem números. O dx ali ...

Nanda – Cancela ..

Profa. Miriam – Isso. Quando a gente trabalha da outra forma, é uma notação apenas. Você não pode já ir cancelando assim.

Nanda - Tanto é que quando a senhora explicou a função composta mesmo, você disse “eu não posso passar o dx para cá multiplicando”. Neste caso a gente pode fazer isso, pode cortar normalmente.

Profa. Miriam – É um número.

Nanda – É. É um número.

Profa. Miriam – Muito pequeno, mas é um número.

Nanda – É. Não como a notação usada no limite. Não pode passar para lá dividindo, passa para lá multiplicando. Como é um número muito pequeno, a gente trata como se fosse 2 e qualquer outro número.

No final do encontro de apresentação, outras comparações foram determinadas entre as abordagens.

Profa. Miriam – Agora me diz uma coisa. Por que que vocês viram tudo isto?

Nanda – Para ter uma visão diferente do Cálculo. Porque antes, aqui na faculdade, o Cálculo era dado através dos infinitésimos¹. Você tinha esta visão dos infinitésimos no Cálculo. Por causa da pesquisa da Raquel, ela nos chamou a gente para ir lá, se a gente concordasse, para ver esta visão diferente. E talvez, desta maneira, fica até mais fácil da gente conceber a idéia de limite, de derivada. A integral, dá para ter uma idéia através dos infinitésimos muito maior de por que a área embaixo de uma curva...

Lina – Você calcula a área de quadradinhos muito pequenos, infinitésimos. E se você juntar todos você tem a área.

Nanda desenha uma curva qualquer e se refere à área da região entre a curva e o eixo horizontal.

Nanda - Você pode calcular essa área aqui e é muito legal. Porque você pode dividir esta área em trapézios muito pequenos e calcular a área.

Lina – Cada vez que você pegar pedacinhos mais pequenos você vai chegar mais próximo do que seria a área embaixo da curva.

Nanda – Então é bem mais fácil de você visualizar.

8. *Divide em pequenas coisinhas e soma tudo ...*

No quarto encontro, a aplicação da integral definida como área sob o gráfico de uma função foi trabalhada. Escrevi no quadro o símbolo de somatório e integral que os alunos tinham evocado. Ocorreu o seguinte diálogo.

Lugo - A integral é uma soma?

Raquel - O que vocês acham?

Mino - É uma soma.

Lugo - É, é uma soma de várias arezinhas pequeninhas.

Nanda - Se você calcular a área deste gráfico aí, teria que ter essa idéia [a de Lugo]. Subdividiria em pontinhos pequenos, pequenas coisinhas depois somaria tudo e acharia a área desse gráfico.

Lugo - A largura de cada retângulo desses seria um infinitésimo e a altura seria um número real comum.

¹ No quarto encontro, os alunos perguntaram se alguém já havia trabalhado com infinitésimos no Cálculo. Comentei sobre a experiência do Prof. Baldino (orientador desta pesquisa) que, durante alguns anos, foi o professor responsável por essa disciplina na graduação em Física, e trabalhava com a abordagem infinitesimal.

Fiquei surpresa com essas respostas e perguntei se o professor de Física ou a Profa. Miriam haviam falado em infinitésimo. Eles disseram que não.

Raquel, para Lugo – Infinitésimo, você tirou daqui, então?

Lugo – Sim.

Comentei sobre a notação que a gente usa hoje vem de Leibniz.

Raquel – Como seria dividir esta área em coisas pequenas?

Lina - Quando a gente tinha uma curva [como em $\sin x$, em x^2], a gente dava zoom, e ela parecia uma reta. Então se a gente desse zooms sucessivos você ia achar retas e ia somando estas áreas que seriam regulares.

Lugo – Você poderia pegar vários retangulinhos que iam até a curva e como esses retangulinhos tinham largura extremamente pequena, a diferença entre a área de todos os retangulinhos somados e a área da figura ia ser muito pequena.

9. Cálculo Infinitesimal no curso de Física

No final do quarto encontro, tivemos uma grande conversa, após ter acabado de trabalhar com eles o que havia planejado. Os alunos mostraram algumas impressões sobre um curso de Cálculo Infinitesimal na graduação em Física.

Mino – Se vai aplicar isto no nosso curso de Cálculo, por exemplo, eu acho que seria mais coerente aplicar isso.

Lina – É mais interessante.

Mino – É, mais interessante.

Nanda – Na Física, eu acho que seria mais interessante.

Mino - Tanto na Física quanto na Matemática.

Lugo – Eu acho que em qualquer área.

Lina – Mas no colegial não.

Lugo – No colegial você não vai dar nem limite.

Raquel – Mas tem escolas que trabalham com limite.

Nanda – Eu tive, mas era só continha.

Lugo – Ah, não. Eu estou falando de limite, limite. Bem dado.

Raquel – E aqui, num curso de Cálculo da faculdade, vocês acham que ...

Mino – Eu acho que no nosso curso tem que mostrar a parte histórica. Quando surgiu tudo isto. Os dois lados [infinitésimos e limite]. Mostrar o desenvolvimento da pessoa que pensou isso, para mostrar para gente. Acho que assim a gente entende.

Raquel – Você acha que estudando a história...

Mino – Acho que estudando a história você consegue relatar todos os fatos.

Lugo – Inclusive eu estava pensando que na Física ou em outra ciência, você tem que imaginar uma situação. Tem vezes que você não enxerga direito, porque é uma coisa que acontece num espaço muito pequeno, uma coisa com dimensões muito pequenas, como um átomo. Então, se a gente tem essa idéia de imaginar o que é pequeno, como se fosse aumentar, como a idéia do zoom, isso é legal.

Lina - Acho que a gente foi privilegiado mesmo. Vendo agora a aula da Miriam, a gente tem esta visão crítica, né?

Mino – É, a gente aprendeu os dois lados.

Nanda – A explicação hoje do Dimas [professor de Física], deu uma clareada ...

Lina – A gente lembrou do que viu aqui.

Mino – É, mas acho que não foi para todo mundo aquilo.

Nanda – Não foi não.

Lugo – A menos que alguém esteja correndo num livro para ver o que acontece.

Raquel – Que matéria?

Mino – Infinitesimais.

Nanda – O professor falou da idéia de zoom, que você pode chegar infinitamente próximo de um ponto. Nossa, essa aula... Ele estava todo embananado!

Raquel – Então foi bom ter vindo aqui?

Os alunos – Foi, foi sim.

No encontro de preparação, os alunos estavam procurando por assuntos que os colegas estivessem familiarizados.

Nanda – Tem os conceitos de infinitésimo, número muito pequeno.

Lugo - A turma tem uma idéia, porque o Dimas [professor de Física] fala às vezes. Ele pega faz um deslocamento infinitesimal, soma todos e faz o trabalho.

Nanda - É mas ele usa mais como um recurso matemático para provar o que ele está falando. Como no vetor, que ele introduziu o conceito de infinitésimo.

Lina – Ah, que a gente pensou que ele não ia conseguir.

Nanda - Que ele se enrolou todo.

Lugo – Ah, que o vetor aceleração praticamente juntos. E vai ver que eles são quase retos.

Nanda – Essa idéia de zoom ... A Miriam falou um pouco, né?

Lina- É.

Esses episódios, aqui apresentados, constituem os dados da pesquisa. Foram selecionados de modo a auxiliar na reflexão sobre a pergunta-diretriz. No próximo capítulo, estarei olhando para esses dados a partir do quadro teórico, discutido no capítulo III.

CAPÍTULO VI

ANÁLISE DOS DADOS

Os dados da pesquisa, que foram apresentados no capítulo anterior, serão analisados, no presente capítulo, segundo o referencial teórico adotado, tentando refletir sobre a pergunta que guia esta pesquisa:

Como alunos de Cálculo I do curso de Física, da UNESP de Rio Claro, lidam com as concepções infinitesimais, no trabalho tópicos dessa disciplina, estudados segundo a abordagem infinitesimal?

Os trechos dos seis ECI foram agrupados em episódios com um tema em comum. Um trecho, porém, não diz respeito a apenas um assunto. Ele pode contribuir com a reflexão sobre outros temas. A análise dos dados, portanto, não apresentará, necessariamente, as mesmas seções que se encontram no capítulo anterior. Os dados serão reorganizados de modo a contribuir, de uma forma geral, com a reflexão sobre a pergunta acima. Passo, agora, à análise desses dados.

1. A imagem conceitual de infinitésimo

Penso que o início de um trabalho de Cálculo Infinitesimal deve partir das concepções espontâneas infinitesimais dos alunos. Essas concepções infinitesimais existem e fazem parte da cultura do aluno. Cornu (1983), assim como outros trabalhos, discutiu isso. Mesmo se o propósito é trabalhar com limites, acredito que essas idéias não podem ser ignoradas. Com o objetivo de saber com que concepções sobre infinitésimos os alunos chegaram nos encontros, perguntei, na primeira reunião, que idéia eles tinham em mente sobre esse conceito. Esse foi o início do trabalho no contexto infinitesimal, quando o conceito de infinitésimo começou a ser discutido e pensado. Assim, as primeiras imagens sobre o conceito foram sendo evocadas, e, progressivamente, para cada aluno, uma imagem conceitual de infinitésimo foi sendo construída pelo grupo.

Uma das imagens evocadas foi a de *pontos infinitamente pequenos*. Infinitésimo está ligado a algo pequeno. Eles podem ser *desprezíveis* em alguns cálculos. Essa palavra foi bastante utilizada pelos alunos ao longo dos encontros, principalmente quando trabalhamos com o cálculo de derivadas, no contexto infinitesimal. Discutirei seu significado mais adiante, quando analisarei a relação entre a imagem conceitual e definição formal de derivada.

A relação entre infinito e infinitésimo, estabelecida por Nanda, parece ser de caráter lingüístico, devido ao modo pelo qual ela se expressou: “*infinito, infinitésimo*”. As palavras têm uma parte de sua escrita em comum: *infinit*. Porém, além da semelhança lingüística, existe outra relação entre infinito e infinitésimo quando trata-se de uma dízima. Os processos de construção de uma dízima e de um infinitésimo são parecidos. Uma imagem para um número infinitesimal, que pode ser utilizada na representação da diferença entre $0,99\dots$ e 1 , é $0,000\dots 1$. Quanto mais zeros forem colocados, antes do algarismo 1 , menor será o número. Pode-se colocar infinitos zeros. Na construção de uma dízima, pode-se acrescentar infinitos números, como Nanda salientou. No exemplo $23,45555\dots$, o algarismo 5 pode ser escrito infinitas vezes. Os processos lógicos são os mesmos nas duas construções. Existem, então, semelhanças entre um infinitésimo e uma dízima, além da idéia levantada por Nanda.

A concepção que Mino mencionou foi a idéia de infinitésimo no contexto de fractais. Ele diz que “*Infinitésimo é uma coisa que tende ao unidimensional. Ele vai diminuindo tanto que perde a dimensão*”. As expressões *tende* e *vai diminuindo* sugerem a idéia de movimento, muito ligada ao conceito de limite quando associado ao processo de aproximar. O infinitésimo ligado ao processo de tender já havia aparecido na história na seguinte definição dada por Cauchy: “Uma quantidade variável torna-se infinitamente pequena quando seu valor numérico decresce indefinidamente de modo a convergir para o limite zero”¹ (CAUCHY, 1821, p.26, tradução minha). Saliento ainda, sobre fractais, que se pensarmos em dar zooms em uma determinada parte do fractal, sempre conseguiremos enxergar alguma regularidade. Isso ocorre infinitas vezes. Mino pode ter pensado que a porção que antes não enxergávamos e que com o zoom foi possível, fosse o infinitésimo. Ela é tão pequena, vista sem o zoom, que perde a dimensão. Essa é uma relação entre infinito e fractais, que envolve o conceito de infinitésimo. A idéia de fractais é mencionada pelos alunos, no encontro de apresentação, como sendo uma aplicação da abordagem infinitesimal: “*Tem os fractais também. Que é um exemplo bem*

interessante dessa parte infinitesimal. Você vai dividindo, dividindo ...". A idéia foi mencionada juntamente com a teoria do caos, a situação do cronômetro e outros exemplos em que os alunos enxergaram a existência do infinitésimo.

As idéias de pontos infinitamente pequenos, por vezes desprezíveis, que vão diminuindo e que, de certa forma, têm relação com o infinito, foram as concepções apresentadas pelo grupo de alunos (ver página 47). Parece que eles não haviam passado por nenhum ensino organizado sobre o conceito de infinitésimo. Essas idéias vieram de seu cotidiano. No caso de Mino, ele revelou, depois do primeiro encontro, que estava lendo um livro sobre fractais. É possível que se ele não tivesse tido contato com tal leitura, ele teria evocado outra idéia a respeito de infinitésimo. Portanto, essas idéias foram as primeiras concepções espontâneas infinitesimais evocadas pelo grupo.

Prosseguindo no primeiro encontro, perguntei sobre a relação entre 0,999... e 1. A primeira idéia que surgiu foi: *são bem próximos*. Mas, logo em seguida, Lugo diz que "*0,9... é um pouquinho menor que 1*". Sem aproximar ou arredondar os alunos acabam respondendo que 0,999... é menor que 1. Assim como Cornu (1983) e Sierpinska (1983, 1985, 1987), foi constatado que muitos alunos acreditam que existe uma diferença entre os dois números. Foi preciso estimular o aparecimento dessas concepções infinitesimais para que fossem legitimadas. Foi com base nessas concepções espontâneas que começamos a trabalhar com o Cálculo Infinitesimal.

Mais adiante mostrarei que algumas dessas concepções espontâneas não foram substituídas por outras vindas do ensino organizado. Elas continuaram funcionando em diversos contextos, inclusive quando estávamos trabalhando formalmente com os conceitos.

Como explicitarei no capítulo III desta dissertação, falar em uma definição formal ou dizer que o trabalho foi realizado no nível formal significa que estamos falando na definição ou no nível aceitos pela comunidade matemática. Porém, é preciso que seja considerado o contexto no qual essa definição ou conceito estão sendo aceitos. O formal aceito pelos matemáticos de hoje não era o mesmo formal do século XIX, por exemplo. A definição de infinitésimo apresentada aos alunos, no primeiro encontro, foi a seguinte: Infinitésimo é um número menor que qualquer número real positivo. Certamente ela não é a definição formal aceita pela Análise Não-Standard. Essa definição deveria envolver os conceitos de classe de equivalência

¹ "On dit qu'une quantité variable devient *infinitement petite* lorsque sa valeur numérique décroît indéfiniment de

e ultrafiltro (ver apêndice desta dissertação). Mas essa definição não faria mais sentido que a apresentada, uma vez que os números reais também não tinham definição formal para os quatro alunos. Além disso, o contexto do experimento de ensino não era o de um curso de Análise, mas sim, de Cálculo. Portanto, a definição dada cumpre o papel de definição formal no contexto do experimento de ensino.

A concepção de que infinitésimo é um número foi bastante evocada pelos alunos durante todos os encontros: *“Como é um número muito pequeno, a gente trata como se fosse 2 e qualquer outro número”*. A expressão $\frac{dy}{dx}$, que na abordagem do limite é considerada como uma notação, foi tratada como sendo uma divisão: *“Um acréscimo no x e um no y , e dividindo um pelo outro você acha a derivada”*. Os alunos operavam, de fato, com os infinitésimos. Um exemplo ocorreu quando criavam hipóteses sobre a medida de um segmento: $1-dx$, $1+dx$; *“ $\cos dx$ é bem próximo de 1”*; *“ $\sin dx$ é próximo de dx , mas não é dx ”*. Parece, então, que a concepção de infinitésimo como sendo um número tornou-se uma definição para os alunos. Ela foi evocada a partir do ensino organizado, quando apresentei a definição formal de infinitésimo. Portanto, é uma concepção própria que constitui-se como parte da imagem conceitual de infinitésimo.

Com a definição formal apresentada, perguntei aos alunos, no primeiro encontro, por exemplos de infinitésimos. Refletindo sobre a definição, Lugo disse: *“Se a gente imagina um número bem pequeno, 0,0000...1, sempre dá para colocar um número, com uma casa decimal a mais [um zero a mais antes do 1] que ele vai ser menor ainda”*. Dado um real sempre encontramos outro que seja menor. O infinitésimo seria menor que todos esses números dados, como Nanda disse na apresentação: *“Você pensa em um, ele é menor ainda. Então você sempre vai ter um número menor”*. O processo de sempre conseguir um número menor, como Lugo menciona, lembra a relação entre dízima e infinitésimo inicialmente citada.

Segundo a definição formal apresentada, o número -5 poderia ser um exemplo procurado. Nenhum aluno falou isso, e não modifiquei essa definição, durante os encontros, para englobar os outros infinitésimos. Para tanto, a definição ficaria: infinitésimo é um número cujo módulo é menor que qualquer real positivo. É mais comum trabalharmos com infinitésimos positivos, como, por exemplo, no caso do cálculo de derivadas. Sempre

manière à converger vers la limite zéro”.

iniciamos dando um acréscimo infinitesimal positivo a x . Acredito que foi por isso que apresentei a definição como tal. Relacionar infinitésimo a algo positivo não foi apenas minha tendência. Quando perguntei aos alunos se o zero poderia ser um infinitésimo, Mino respondeu: “*Se ele [infinitésimo] é positivo, então ele é maior que zero, não é igual a zero. Então eu acho que ele [zero] não entraria nessa classificação*”. Para ele, infinitésimo como algo positivo é uma concepção espontânea, vem antes de qualquer ensino organizado. Para responder minha pergunta, Mino partiu de tal concepção. Ela foi mais forte que a definição formal. Quando substituí, na definição dada, zero por infinitésimo, todos os alunos responderam positivamente minha pergunta: zero é um exemplo de infinitésimo.

Acredito que a concepção de infinitésimo como sendo algo positivo existia antes da apresentação da definição formal (segundo a qual qualquer número negativo poderia ser um infinitésimo), devido ao fato de que os alunos apresentaram a concepção espontânea de infinitésimo como sendo algo pequeno, pontinhos infinitamente pequenos. Acredito que “pontinhos” e “coisinhas” são, geralmente, pensados como sendo positivos, antes que negativos. Apesar dos alunos terem concordado que o zero era um infinitésimo, ao longo dos encontros, a concepção espontânea de que infinitésimo é algo estritamente positivo continuou aparecendo. Quando perguntei, no primeiro encontro, quem fazia parte da mônada do zero, Lugo respondeu serem os infinitésimos. Todos justificaram dizendo que eram números bem próximos de zero. A justificativa foi correta, já que havia definido para os alunos que os elementos da mônada de um número real eram os números infinitamente próximos desse número, e que também, antes de apresentar a definição formal de infinitésimo, havia dito que esse número era infinitamente próximo de zero. Depois da justificativa, Lugo perguntou: “*Do lado positivo, né? Porque do lado esquerdo não tem números na mônada do zero, só se eles forem negativos*”. Lugo pensou que os elementos da mônada do zero se localizavam apenas à direita do zero. Isso tem sentido se pensarmos que a concepção de infinitésimo que os alunos tinham é que era algo positivo. Lugo levou em conta, depois, a possibilidade de haver infinitésimos negativos.

A utilização de acréscimos infinitesimais positivos, para calcular a derivada de funções, ajudou essa concepção a tornar-se cada vez mais forte. Nesses cálculos, para justificar a resposta obtida para a derivada de uma função, os alunos se apoiaram, muitas vezes, em suas concepções espontâneas apresentadas no início do primeiro encontro. Diziam, por exemplo:

“isso é por causa que dx é um número tão pequeno que dá para aproximar para zero”, “porque ela [a parte infinitesimal] é tão pequena que posso desprezá-la”. Na primeira justificativa, aparece a concepção de que infinitésimo é algo muito pequeno. A segunda justificativa traz a concepção espontânea de que o infinitésimo pode ser desprezado. Uma discussão maior sobre essas justificações para o resultado do cálculo de derivadas será apresentada mais adiante. Trago, agora, outras justificações que auxiliaram-me a conhecer mais uma parte da imagem conceitual de infinitésimo que o grupo construiu.

Na apresentação aos colegas e à Profa. Miriam, Mino resolveu a derivada da equação $S(t) = -4,9t^2 + 50$. Dentre várias justificações dadas para o último passo desse cálculo, estavam as seguintes: “os infinitésimos, neste caso, não vão fazer tanta diferença”, “porque eles são infinitamente pequenos não vão influenciar tanto o resultado”. Isso incentivou os colegas a fazerem algumas perguntas, como: “existe algum exemplo em que se usa esse infinitésimo?”. A maioria das respostas dadas foram de caráter prático, inseridas no contexto de estudo dos alunos, ou seja, a Física. Essas respostas partiram de Nanda e tiveram aprovação dos colegas que estavam apresentando. Respondendo ao colega, Nanda disse que se deveria estar trabalhando com “partículas extremamente pequenas que qualquer alteração possa afetar o resultado que você quer. Se você estiver trabalhando com, por exemplo, raios ou partículas subatômicas, pode ser que esse infinitésimo seja incluído na conta. Agora, esse cálculo é só nesse universo muito pequeno, como o dos números infinitesimais”. Os alunos já tinham como parte de sua imagem conceitual o infinitésimo como um número infinitamente pequeno. Com essa situação, as concepções de caráter matemático foram, então, se misturando com as concepções vindas do contexto físico. Os infinitésimos foram pensados como elementos do mundo microscópico físico.

Na mesma direção, Nanda apresentou mais uma situação: “Se você estiver calculando o coeficiente de dilatação de uma barra de ferro numa ferrovia, no acoplamento de uma barra a outra para permanecer unidas, para juntar os trilhos, esse infinitésimo vai fazer muita diferença naquela dilatação do ferro”. Sobre essa inserção dos infinitésimos ao mundo físico, um pesquisador em mecânica quântica já havia afirmado:

Nós podemos considerar o físico que estuda o comportamento macroscópico de um fenômeno, cujo comportamento microscópico é muito complexo para ele, um observador limitado, que apreende apenas a sombra das coisas. O

comportamento microscópico será descrito pelas funções não-standards² (HARTHONG, 1983, p.1200).

Esses exemplos mostram que os alunos consideraram os números infinitesimais como sendo objetos encontrados no mundo físico. Eles enxergaram os infinitésimos nas situações reais, fazendo parte da matéria. Bachelard (1996) considera que tal crença constitui um obstáculo do conhecimento quantitativo: “[...] a grandeza é uma *qualidade* da extensão” (Ibid., p.260). A dilatação de tamanho infinitesimal é uma propriedade da barra de ferro. Ela pertence à ferrovia. Os infinitésimos foram enxergados na ferrovia. Quando, no primeiro encontro, os alunos apontaram que existia uma diferença entre 0,99... e 1, por menor que fosse, ela, de fato, existia e estava presente no mundo, na realidade.

Quando os alunos pensaram dessa forma, não estavam mais trabalhando no contexto matemático infinitesimal. O que os alunos enxergaram nas situações da realidade eram números finitos. Estavam trabalhando com aproximações, com números reais. Na verdade, muitas vezes os alunos passaram de um contexto para outro. Podiam estar inseridos no contexto infinitesimal, mas mudavam para o finito, como se esse fosse necessário para compreender o que ocorre quando se trabalha com os infinitésimos. Essa mudança de contexto será melhor discutida quando tratarei da experiência dos alunos com o zoom infinito.

Com os exemplos citados por Nanda, ocorreu uma mistura entre concepções matemáticas, contínuas, infinitesimais e a realidade física, discreta e subatômica. A imagem conceitual de infinitésimo foi alargada para abranger essas novas idéias. A concepção de infinitésimo como parte da matéria juntou-se, então, com as primeiras concepções infinitesimais e as próprias, construídas a partir do ensino organizado, constituindo a imagem conceitual de infinitésimo do grupo de alunos. Inicialmente, essa imagem se revelou através de concepções espontâneas como a do infinitésimo ser infinitamente pequeno e, por vezes, desprezível. Com a apresentação da definição formal, a concepção de ser um número foi bastante evocada pelos alunos, tornando-se própria. A idéia de ser algo positivo revelou-se de forma a parecer que estava presente para o grupo desde o princípio dos encontros. Considerei essa idéia, portanto, como sendo uma concepção espontânea. A essas concepções juntou-se o

² “We may regard the physicist who studies the macroscopic behavior of a phenomenon whose microscopic behavior is too complex for him, as a limited observer who cannot apprehend but the shadow of things. The microscopic behavior will be described by non-standard functions”.

fato de que os infinitésimos são partículas extremamente pequenas que fazem parte do mundo, da matéria.

A imagem conceitual de infinitésimo foi se constituindo ao longo dos encontros. Para a apresentação aos colegas e Profa. Miriam, os alunos tiveram tempo para refletir sobre o que haviam estudado nos encontros anteriores. De certa forma, eles tiveram que organizar suas idéias para fazer tal apresentação. O que foi falado nesse encontro, então, foi fundamental para tentar interpretar que idéia os alunos tinham a respeito dos tópicos estudados. Considerando, em particular, o conceito de infinitésimo, acredito que as idéias apresentadas sobre esse conceito foram as que preponderaram em relação às evocadas nos encontros anteriores. Tendo em vista, portanto, a apresentação realizada, a imagem de infinitésimo para o grupo de alunos ficou sendo de um número, uma quantidade infinitamente pequena positiva pertencente à matéria, ao mundo.

2. Desprezar o infinitésimo ou pegar a parte real?: a derivada no contexto infinitesimal

Uma questão de interesse da teoria proposta por Tall e Vinner é tentar compreender a estrutura cognitiva do aluno ao trabalhar com um conceito. Existe uma definição formal do conceito, e tudo o que o aluno evoca quando passa a pensar sobre esse conceito. Tanto a definição quanto essas idéias fazem parte da imagem conceitual. Para melhor interpretar as relações existentes entre as concepções evocadas pelo aluno ao trabalhar com um conceito, faço uma distinção entre as origens de tais concepções. Quando a resposta não for formal, digo que essa veio da imagem conceitual. Afirmo que a resposta veio da definição formal, quando for relacionada à teoria matemática apresentada nos encontros. Dependendo, portanto, da demanda de uma atividade, o aluno recorre à definição formal ou à imagem para trabalhar com um conceito. Nesta seção, analisarei as concepções apresentadas pelo grupo de alunos ao lidarem com a derivada de algumas funções no contexto infinitesimal. Esse trabalho ocorreu em todos os encontros. Focalizarei, no entanto, as situações surgidas na primeira reunião e na apresentação aos colegas e à Profa. Miriam, no que tange às justificações dadas pelos alunos ao resultado encontrado para a derivada.

No primeiro encontro de Cálculo Infinitesimal, apresentei as definições formais de infinitésimo e derivada. Para calcularmos a derivada de uma função, damos, inicialmente, um

acréscimo infinitesimal dx à variável independente x , obtendo, conseqüentemente, um acréscimo infinitesimal dy à variável dependente y . Calculamos o quase-diferencial dy , definido como $dy=f(x+dx)-f(x)$. Dividimos tal igualdade por dx , encontrando a quase-derivada. Por fim, a derivada $f'(x)$ é, por definição, a parte real do quociente $\frac{dy}{dx}$. Essa é a definição formal de derivada apresentada no experimento de ensino. Resumidamente, os alunos sugeriram o seguinte roteiro:

$$1) \quad dy=f(x+dx)-f(x)$$

$$2) \quad \div dx$$

$$3) \quad f'(x)=re\left[\frac{dy}{dx}\right]$$

O cálculo da derivada foi trabalhado de forma técnica. A interpretação geométrica foi abordada posteriormente a esses cálculos, no trabalho com o zoom infinito. Quando os alunos faziam tais cálculos, eu solicitava que justificassem suas respostas. Apresentarei, agora, algumas das concepções que apareceram ao longo dos encontros. Irei numerá-las para poder referir-me a elas posteriormente. Quando tínhamos $f'(x)=re[2x+dx]=2x$, Lugo disse: 1) *“isso é por causa que dx é um número tão pequeno que dá para aproximar para zero”*. Em seguida, Mino opinou: 2) *“na reta dos reais ele [o infinitésimo dx] é zero”*. No cálculo da derivada da função $f(x)=x^3$, Lina determinou a derivada, procurando 3) *“[...] onde não tem dx ”*. No terceiro encontro, ela justificou o terceiro passo do roteiro dizendo: 4) *“porque ela [a parte infinitesimal] é tão pequena, que posso desprezá-la”*. Já Lugo disse: 5) *“porque no conjunto dos reais ela [a parte infinitesimal] não é nada. No conjunto dos reais, os infinitésimos não significam nada”*. Nanda disse: 6) *“porque quero só a parte real”*.

Segundo a definição formal de derivada apresentada, ela é a parte real do quociente infinitesimal. Por definição, toma-se a parte real. A justificativa 6) segue essa linha de raciocínio. Os alunos viram também, através do ensino organizado realizado nos encontros, que um infinitésimo no conjunto dos números reais não vale nada ou não existe. Tiveram como base esse conhecimento, as justificativas 2) e 5). Portanto, as justificativas antes citadas estão ligadas à definição formal de derivada e a conhecimentos formais vistos nos encontros.

Outras idéias apresentadas pelos alunos tiveram a influência de algumas concepções espontâneas que os alunos evocaram no início do primeiro encontro. As imagens de

infinitésimo como sendo algo muito pequeno e que pode ser desprezado foram evocadas nas justificativas 1) e 4). Essas respostas mostram o aparecimento das concepções espontâneas, mesmo depois de um ensino organizado sobre derivada e infinitésimo, mesmo depois das definições formais desses conceitos terem sido apresentadas. Os alunos que apresentaram essas justificativas argumentaram segundo a imagem conceitual de infinitésimo. A justificativa 3) mostra um esquema elaborado para o estabelecimento da derivada de uma função: *é onde não tem dx*. Parece estar mais ligado a um procedimento, uma regra para identificar a derivada. Portanto, essa justificativa também vem da imagem conceitual.

Justificar o resultado da derivada dizendo que os infinitésimos não existem nos reais, por exemplo, tem influência de conhecimentos formais apresentados juntamente com a definição formal de infinitésimo. Tal justificativa está relacionada ao conceito de infinitésimo, mas por ser evocado no cálculo de derivada pode passar a pertencer também à imagem conceitual de derivada, pensando essa como a grande estrutura cognitiva do aluno. Justificar o resultado da derivada segundo a concepção de que infinitésimo é muito pequeno está relacionado à imagem conceitual de infinitésimo. Da mesma forma antes citada, por essa concepção ser evocada no trabalho de derivada ela pode passar também a pertencer à imagem conceitual de derivada, pensando novamente na estrutura cognitiva que o aluno tem a respeito desse conceito. As imagens, portanto, de infinitésimo e derivada não são conjuntos disjuntos de concepções. De fato, o estudo realizado no experimento de ensino foi feito de forma a entrelaçar os conceitos de Cálculo Infinitesimal. Eles foram sendo trabalhados resgatando concepções que já tinham sido apresentadas.

Outras justificativas, além das anteriores, foram utilizadas pelos alunos, no encontro de apresentação, quando calcularam a derivada da função $S(t) = -4,9t^2 + 50$. Por exemplo: 7) *“porque eles são infinitamente pequenos não vão influenciar tanto o resultado”*, 8) *“É definido assim. Você pega a parte real. Você não desconsidera [o infinitésimo], porque os números reais também estão nos hiper-reais. Você só está pegando a parte real”*. Nessa última, Mino deixa claro que a justificativa é simplesmente porque a definição diz isso. Reforça que não é uma questão de desconsiderar ou desprezar. O infinitésimo não é desconsiderado no cálculo. Ele existe e *“é muito importante, tanto que tem até um conjunto especial para ele, que são os hiper-reais”*, legitimando seu uso. O “desprezar” foi utilizado pelos alunos com dois sentidos. Um deles está ligado às concepções espontâneas: infinitésimo

é muito pequeno, pode ser desprezível. O outro foi usado no sentido de não considerar a existência dos infinitésimos, e foi evocado ligado a uma concepção relacionada às definições formais. Mino, que apresentou a justificativa 8), foi o único que em todos os encontros recorreu à definição formal para sustentar suas respostas. Com exceção de Mino, no encontro de apresentação, as justificativas baseadas na imagem conceitual foram preponderantes.

Os outros alunos, principalmente Lina e Nanda, oscilavam entre a imagem conceitual e a definição formal ao fundamentar suas respostas. A justificativa 7) foi apresentada por Nanda, apesar de já ter evocado a concepção 6). Situação semelhante ocorreu com Lina e Lugo. Segundo Cornu (1983),

A definição matemática, as propriedades, os exemplos, os modos de funcionar da noção, não substituem no aluno tudo o que existia antes, todas as concepções espontâneas. Muitas vezes, e mesmo muito tarde em seus estudos, o estudante persiste em fazer funcionar suas concepções espontâneas em vez das concepções matemáticas que lhe foram ensinadas³ (Ibid, p.67-8, tradução de Luisa R. Baldino).

Não posso afirmar que as definições formais tornaram-se concepções próprias para os alunos, pelo menos para Lina, Nanda e Lugo. Mas o ensino organizado foi realizado, ou seja, as definições foram apresentadas, e os alunos, no encontro de apresentação, na maioria das vezes, preferiram responder, tendo incorporado ou não tal definição, segundo sua imagem conceitual. Esse é um exemplo de como é difícil as definições formais tomarem o lugar das concepções espontâneas. Podemos nos perguntar, então, como se faz para o aluno passar para as definições formais e arrumar as imagens segundo tais definições? O que aconteceu com Mino, que não ocorreu com Lina, Nanda e Lugo? A Matemática de hoje exige isso, e pede essa postura nos cursos de Análise.

A preponderância das justificativas vindas da imagem conceitual foi constatada no encontro de apresentação. Os alunos tinham a preocupação de fazer com que seus colegas entendessem o que estavam falando. Essa preocupação podia ser notada no encontro de preparação. Parece que não bastava apenas apresentar a definição formal como justificativa para a derivada ser calculada daquela forma. Eles sentiram a necessidade de explicar por que a

³ “La définition mathématique, les propriétés, les exemples, les façons de fonctionner de la notion ne remplacent pas chez l’élève tout ce qui existait avant, toutes les conceptions spontanées. Bien souvent, et même fort tard dans

derivada era assim definida: “*tem que explicar por que a gente pega a parte real*”. Tendo em vista essa necessidade, fica justificado o grande uso da imagem conceitual. Ela serve para dar apoio ao aluno. Na imagem, encontram-se todas as concepções que o aluno incorporou. Sobre o que está na imagem conceitual, o aluno sabe falar, pois é o que ele construiu.

Para finalizar esta seção, pergunto, então: para calcular a derivada, tanto faz pegar a parte real quanto desprezar os infinitésimos? Na maioria das vezes, pensando no primeiro caminho ou no segundo, chegamos ao mesmo resultado. Existem situações, porém, que o quociente infinitesimal é zero. Se pegarmos a parte real, a derivada é zero. Se pensarmos, no entanto, em desprezar o infinitésimo, não podemos tomar zero como a derivada, pois zero é um infinitésimo⁴. Quando a resposta vem da imagem conceitual, pode ocorrer tal situação. Pedagogicamente falando, portanto, tem diferença entre pegar e desprezar. É importante que o professor saiba de onde vem a resposta do aluno, vendo se ele está fazendo operar sua imagem conceitual ou a definição formal. Em muitos casos, usar uma imagem contraditória com a definição formal pode levar a conflitos, como na situação acima, podendo indicar a existência de um obstáculo epistemológico, muitas vezes causado pelas concepções espontâneas dos alunos. Esses conflitos são importantes para o processo de aprendizagem. Eles podem levar a uma reestruturação da imagem conceitual do aluno, significando a superação de um obstáculo.

3. O obstáculo infinitesimal e sua superação

Cornu (1983), ao estudar os obstáculos epistemológicos à aprendizagem do conceito de limite, verificou que as concepções infinitesimais constituíam um desses obstáculos. Segundo o autor, “É o segundo grande obstáculo para o aluno; tudo se passa como se existissem números muito pequenos, menores que os ‘verdadeiros’ números, mas entretanto não nulos”⁵ (Ibid, p. 152, grifo do autor, tradução de Luisa R. Baldino). A concepção de número muito pequeno positivo (não nulo) estava presente na imagem conceitual de infinitésimo do grupo de alunos. A definição formal diz que o infinitésimo é menor que qualquer real positivo. Os “verdadeiros” números, aos quais Cornu se refere, são os números reais, os números com que mais se trabalha na escola e universidade. Assim, a afirmação de Cornu realmente confere. O

ses études, l'étudiant persiste à faire fonctionner ses conceptions spontanées, plutôt que les conceptions 'mathématiques' qui lui ont été enseignées”.

⁴ Zero é um número menor que qualquer real positivo, portanto é infinitésimo.

⁵ “[...] tout se passe comme s'il existait des nombres très petits, plus petits que les 'vrais' nombres, mais cependant non nuls”.

obstáculo infinitesimal estava presente nas aulas regulares de Cálculo desde quando os alunos, no primeiro encontro de CI, apresentaram suas concepções infinitesimais, evidenciando a existência de uma diferença entre 0,99... e 1.

Em se tratando de um obstáculo epistemológico, para que sua superação aconteça, é preciso que o aluno passe por uma situação de conflito (CORNU, 1983), envolvendo o conhecimento que se constituiu como obstáculo, e se dê conta dessa situação. A superação do obstáculo acontece quando o aluno forma um novo conhecimento. Esse novo, incorpora o velho como negação dialética, ou seja, o novo é sempre novo de um antigo que não se separa dele. O novo só é assim, pois é novo de um dado velho. O velho faz parte do novo. Sem ele, o novo não teria se formado. Assim, o conhecimento que se forma é uma mistura entre o velho e o que se quer que o aluno tenha como crença. Quando o novo se forma, ocorre uma reestruturação da imagem conceitual do aluno. Num determinado contexto, alguma concepção deixa de funcionar e outra entra em ação para responder à demanda que a antiga não respondia nesse contexto.

A existência de obstáculos é positiva e importante. Faz parte do processo de aprendizagem que o aluno passe por obstáculos. Esse sentido de encarar o obstáculo é o apresentado por Bachelard (1996, p.17, grifo do autor): “[...] *é em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado*”. Muitas vezes, o obstáculo é visto, como no senso comum, como uma dificuldade ou um erro que o aluno cometeu. O obstáculo acaba sendo encarado como empecilho à aprendizagem. Isso resulta em querer desviar o aluno dos obstáculos e aliviar seu trabalho. Nesta dissertação, considero o obstáculo no sentido proposto por Bachelard, ou seja, obstáculos não são reduzidos a erros ou dificuldades. Os erros podem indicar a existência de um obstáculo, a existência de um conhecimento que teve sua validade. Um conhecimento que funcionou e teve sucesso, mas que pode ser revelado como falso ou inadequado em um certo contexto (BROUSSEAU, 1997). Não podemos dizer que a crença que constitui o obstáculo é errada. Pode-se afirmar isso somente perante um contexto. Quando o aluno utiliza o conceito de velocidade média, por exemplo, para resolver um problema cuja solução se obtém via velocidade instantânea, possivelmente chega a uma resposta errada. A velocidade média, porém, não é um conhecimento falso. Tem seu campo de validade. Mas quando é evocado no contexto da velocidade instantânea torna-se inadequado. A

velocidade média funcionou como obstáculo à utilização do conceito de velocidade instantânea.

A confusão que se faz ao interpretar obstáculos simplesmente como erros ou dificuldades está relacionada ao fato de não considerar o caráter dialético da superação do obstáculo epistemológico. Segundo Bachelard (1996, p.17, grifo do autor), “No fundo, o ato de conhecer dá-se *contra* um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que, no próprio espírito, é obstáculo à espiritualização”. O verbo *superar* aqui é entendido como *ir além conservando*, em inglês *to conserve-in-surpassing*. Por isso, superar um obstáculo é construir um conhecimento novo que incorpora o antigo. Nessa direção, na citação de Bachelard acima, o verbo *destruir* adquire o sentido de *tornar e mal estabelecidos* refere-se à base negativa do novo conhecimento. Na superação do obstáculo, o conhecimento antigo, que não é válido em um determinado contexto, torna-se base para o conhecimento novo, que o incorpora. Essa noção de superação não está clara em Cornu (1983), e, em Cornu (1991), ela é pensada da seguinte forma: “Por isso torna-se necessário destruir o conhecimento original insuficiente e mal formado, e colocar em seu lugar o novo conceito que opera satisfatoriamente no novo domínio”⁶ (Ibid., p.159, tradução minha). Aqui o conhecimento antigo é substituído por outro, como se fosse algo errado. Na verdade, ele tem seu domínio de validade. Não se coloca em seu lugar outro conhecimento. Ele não desaparece. Ele continua existindo como base para o novo. Essa citação de Cornu contradiz com o que ele afirma mais adiante: “A construção de estratégias pedagógicas de ensino deve então levar em conta tais obstáculos. Não é uma questão de evitá-los, e sim, ao contrário, de levar o aluno a encontrá-los e superá-los”⁷ (Ibid, p.162, tradução minha). Aqui, Cornu não os considera como dificuldade ou erro. Diz que é importante para o processo de aprendizagem que o aluno encontre obstáculos. Considerar o obstáculo simplesmente como erro pode levar à idéia de que o conhecimento que o constituiu deve ser trocado por outro, e não pensá-lo como parte do novo.

Na história do conceito de limite, os infinitésimos funcionaram como obstáculo para o desenvolvimento desse conceito. A visão distorcida do conceito de superação de Bachelard dá

⁶ “It therefore becomes necessary to destroy the original insufficient, malformed knowledge, to replace it with new concept which operates satisfactorily in the new domain”.

⁷ “The construction of pedagogical strategies for teaching students must then take such obstacles into account. It is not a question of avoiding them but, on the contrary, to lead the student to meet them and to overcome them”.

suporte ao que foi feito, no século XX, a respeito do ensino de matemática avançada, ou seja, os infinitésimos foram apagados e o limite foi instituído como conhecimento oficial. No lugar do conhecimento mal formado e insuficiente, os infinitésimos, foi colocado o conhecimento que funcionou naquele contexto, o limite. A respeito do obstáculo infinitesimal, penso que, segundo a visão de Bachelard, os infinitésimos são a base negativa do conceito de limite. Esse conceito, da forma como hoje conhecemos, é a negação dos infinitésimos. Os infinitésimos fazem parte, como base, do conceito de limite.

As concepções infinitesimais estão presentes no pensamento dos alunos. Estão impregnadas em seu hardware biológico (BALDINO, 1995). Nas aulas regulares de Cálculo, o contexto era o tradicional do conceito de limite. Nesse contexto, as concepções infinitesimais dos alunos não eram legítimas. O obstáculo infinitesimal estava instituído. Ao propor o experimento de ensino aos alunos, não tinha o objetivo de fazer com que eles superassem esse obstáculo. Essa superação ou não seria uma consequência do trabalho desenvolvido nos encontros. Sabia que esse obstáculo poderia ser mais facilmente superado se as concepções infinitesimais dos alunos fossem verbalizadas e sua legitimidade reconhecida. Isso foi feito desde o início dos encontros, quando os alunos foram estimulados a se expressar infinitesimalmente.

Durante os encontros, os alunos trouxeram comparações entre os dois contextos de trabalho: infinitesimal e o do conceito de limite. Isso era natural, pois os alunos estavam inseridos nos dois contextos, nos encontros e nas aulas regulares, respectivamente, e estávamos tratando de conceitos em comum, como a derivada e integral definida. Uma primeira comparação foi estimulada por mim ao tratar das notações utilizadas nos dois contextos. Quando trabalhamos com infinitésimos, $\frac{dy}{dx}$ é um quociente infinitesimal definido como a quase-derivada, e $f'(x)$ é a derivada, ou seja, a parte real desse quociente. No contexto das aulas regulares, essas notações foram tomadas como sendo iguais. A primeira, pelo menos até o trabalho com diferenciais, é considerada um único símbolo, não sendo pensada como uma divisão. No segundo encontro, surgiram duas justificações para essas notações serem iguais, na abordagem tradicional de limite. A primeira foi a seguinte: “A Miriam desprezou o infinitesimal”, “A gente fez considerando todo o infinitésimo. A gente pegou a parte real e o infinitésimo. A Miriam já pegou a parte real”. Aqui o sentido dado a

desprezar o infinitesimal foi de desconsiderar a existência desse infinitesimal. Como não se considera a existência dos infinitésimos, mas só a dos reais, não existe a parte infinitesimal e a parte real. Existe apenas a parte real e, portanto, as notações são usadas como equivalentes. A segunda justificativa foi: “*Isso não está em termos de limite, e este número [infinitésimo] está tão pequeno que a gente pode desconsiderar?*”. Explicando mais: “*Como ela [Profa. Miriam] pegou a notação de quase-derivada e disse que era igual a de derivada, a parte infinitesimal é tão pequena que considerou que tende a zero, então tira esta parte e esses dois são iguais*”. Nessa justificativa foram evocadas as concepções espontâneas de infinitésimo como algo pequeno, que tende a zero e que pode ser desprezível. No contexto de limite, como os alunos citaram, o processo que está relacionado a esse conceito aparece no fato do infinitésimo tender a zero e poder ser desconsiderado. O desconsiderar aqui, diferentemente da primeira justificativa, está relacionado às concepções espontâneas dos alunos, segundo as quais o infinitésimo é levado em conta, mas desprezado, não fazendo parte do resultado final.

Com esses dois argumentos, a igualdade $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ foi justificada. O duplo sentido do verbo desprezar apareceu nas duas justificações. Isso também foi evidente no cálculo de derivadas, como discutido na seção anterior. Na segunda justificativa, ocorreu a junção entre os dois contextos em questão. Os infinitésimos tendem a zero, vão diminuindo, quando pensados no contexto de limite. Nessa direção, uma definição de infinitésimo, diferente da formal apresentada nos encontros, foi sugerida por Lugo: “*Num dos livros, eu achei uma definição de infinitésimo por limite. Era essa aqui. Você tem uma função qualquer $f(x)$. Quando limite de $f(x)$ quando x tende para a é zero, ela é chamada infinitésimo*”. Essa foi considerada uma definição de infinitésimo por limite: o limite foi usado para definir um infinitésimo.

Nos encontros de preparação, os alunos discutiram sobre o que iriam apresentar aos colegas e à Profa. Miriam. Uma sugestão dada foi a de comparar os métodos por limite e por infinitésimo, como os alunos chamaram. Algumas das idéias a seguir foram também evocadas na própria apresentação dos alunos. “*Porque o limite quando x tende a a , você está pegando os infinitésimos próximos de a* ”, “*O limite é quando você está pegando os infinitésimos mesmo*”. Há uma relação, levantada pelos alunos, muito próxima entre limite e infinitésimos. Considerando o processo dinâmico de *tender a*, ligado ao conceito de limite, quando x tende

a algum número, os valores de x se aproximam desse número. A variável x assume valores que estão infinitamente próximos a esse número: “*Esse tende é quando você pega os números que estão próximos, você está pegando os infinitésimos*”. Os números que estão infinitamente próximos a um número real pertencem à mônada desse número real. A diferença entre um elemento da mônada e o número real é um infinitésimo: “ *x tende a a . Esta diferença entre os dois é um infinitésimo*”. Ao falar que “*esse tende são os infinitésimos*”, os infinitésimos foram pensados como estando muito próximos de qualquer número e não apenas do zero, como foi definido. Mas logo os alunos corrigiram: “*A diferença é um infinitésimo*”, “*no caso dos infinitésimos, dizer que tende, diz que a diferença é um número muito pequeno, que a gente desconsidera*”. Segundo eles, portanto, no processo de *tender a*, os infinitésimos entram em cena quando x chega próximo do número. A teoria que foi estudada durante o experimento de ensino foi evocada nos dois últimos encontros e incorporada ao contexto do limite, ou vice-versa: a teoria do limite foi incorporada à abordagem infinitesimal.

Outras concepções apresentadas pelos alunos confirmam essa união entre os contextos. No encontro de apresentação Lugo disse: “*se você pensar que uma função tem um limite que vai tendendo a zero, quando ela vai tendendo a zero ela vai se tornando um infinitésimo. Ela vai ficando cada vez menorzinha*”. Nessa concepção, pode ser notada a existência da idéia, trazida por Cauchy, de variável com limite zero, que torna-se infinitamente pequena. A função, quando vai assumindo valores cada vez menores, que tem limite zero, torna-se um infinitésimo e não é um infinitésimo⁸. Após esse fala, Nanda complementa: “*Mas ela vai tendendo. Ela não é o zero. Ela vai tendendo ao zero. Fica na mônada do zero. Na vizinhança do número zero*”. A função com limite zero vai tendendo a zero, até ficar infinitamente próxima de zero. A função fica na mônada do zero. Ela não chega no zero, ela fica infinitesimal. Essa concepção responde à problemática do “*chega ou não chega*”, tanto levantada pelos alunos, no contexto do conceito de limite. O limite tende a zero? A função chega em zero? O limite chega? A função tende? Uma função com limite zero, quando se aproxima de zero, fica infinitesimal. Generalizando para qualquer número real que seja limite de uma função: “*Quando diz ‘ah, um número próximo, x tende a esse número’, ele tende a este número, mas não chega no número. É na mônada do número*”.

⁸ Essa questão é discutida em Sad, Teixeira e Baldino (2002).

A junção dos dois contextos foi sugerida pelos alunos nos dois últimos encontros. O limite foi utilizado para explicar o que acontecia na abordagem infinitesimal, e os infinitésimos foram usados para explicitar o que ocorria no contexto do conceito de limite. Verificando tal junção e fazendo uma avaliação do trabalho realizado nos encontros, Nanda disse: *“Se a gente assimilar a idéia de limite, essa idéia [a idéia de mônada] fica mais clara porque a gente já viu a idéia de limite. E a idéia de limite vinculada à idéia de infinitésimo fica muito mais clara”*. As concepções apresentadas pelos alunos mostraram a existência de um conhecimento novo: limite e infinitésimos sendo utilizados ao mesmo tempo para tratar de um assunto.

Grande parte das idéias dos alunos, apresentadas anteriormente, foram evocadas nos dois últimos encontros de Cálculo Infinitesimal. Nesses encontros não houve nenhuma interferência de minha parte ao longo do trabalho desenvolvido pelos quatro alunos. Durante o experimento de ensino, por outro lado, na grande maioria das vezes, eu que indicava a direção do trabalho. Com um mês e vinte e cinco dias de intervalo entre o último encontro do experimento de ensino e a preparação para a apresentação, os alunos tiveram a oportunidade de refletir sobre o que tinham estudado. Nas duas últimas reuniões, eles ficaram livres para discutir suas idéias, sem contar com minha opinião para dizer o que estava certo e o que estava errado em relação ao que estudamos. Dessa forma, o que foi dito pelos alunos nesses encontros demonstrou suas crenças e concepções a respeito do que foi trabalhado durante o experimento e nas aulas regulares de Cálculo.

A junção dos dois contextos não ocorreu durante o experimento de ensino. O foco principal de estudo eram alguns conceitos de Cálculo trabalhados segundo a abordagem infinitesimal. Procurava, portanto, sempre que possível, fazer a distinção entre o que era relacionado aos infinitésimos e o que se relacionava ao limite, para que os alunos notassem a diferença entre as abordagens e, principalmente, para que conhecessem o trabalho em um contexto diferente do que seria abordado nas aulas regulares. Incentivava os alunos a se expressarem infinitesimalmente, dando continuidade às concepções espontâneas apresentadas no primeiro encontro. Quando surgiam misturas entre os contextos, procurava chamar a atenção para isso, lembrando que estávamos trabalhando com a abordagem infinitesimal. Um exemplo desse tipo de situação ocorreu no terceiro encontro, quando trabalhamos com a derivada da função seno, e Lugo insistiu várias vezes em finalizar os cálculos igualando a

derivada à quase-derivada, mesmo depois dos colegas e eu termos alertado que ele estava pensando como se fosse no contexto do limite (para maiores detalhes ver p.169-171). Sem minha interferência, tais misturas não foram negadas e, assim, os alunos apresentaram as concepções citadas acima. O limite como auxílio para compreender o que ocorria na abordagem infinitesimal surgiu nos dois últimos encontros e não no experimento de ensino. Esse conceito poderia estar sendo pensado pelos alunos juntamente com os infinitésimos, mas, devido a minha conduta de tentar sempre separar o que é relacionado a limite e o que diz respeito a infinitésimos, ele não foi tão fortemente revelado como aconteceu nos dois últimos encontros.

Os infinitésimos assumem o papel de obstáculo epistemológico no ensino tradicional vigente de Cálculo. As concepções apresentadas anteriormente, que mostram a junção dos dois conceitos, indicam a formação de um novo conhecimento. Os alunos fizeram um amálgama conceitual em que limite e infinitésimos se fundiram para tratar de assuntos de Cálculo. O que não tinha validade no contexto de limite tornou-se base para o novo conhecimento. Tornou-se parte do novo. As concepções espontâneas infinitesimais, que antes não eram reconhecidas como legítimas, foram aceitas em um novo contexto. Que contexto é esse? Que contexto é esse no qual limite e infinitésimos caminham juntos, sem problemas de compatibilidade?

O objetivo de um curso de Cálculo é trabalhar com os conceitos desse curso a partir das concepções espontâneas dos alunos, visando a aplicação desses conceitos e não sua formalização. O rigor matemático é objetivo dos cursos de Análise. Idéias como “*quando ela vai tendendo a zero ela vai se tornando um infinitésimo*”, “*Ela vai tendendo ao zero. Fica na mônada do zero*”, que dizem respeito a uma função que tem por limite zero, ou “*Você calcula a área de quadradinhos muito pequenos, infinitésimos. E se você juntar todos você tem a área. Cada vez que você pegar pedacinhos mais pequenos você vai chegar mais próximo do que seria a área embaixo da curva*”, que misturam infinitésimos com o processo de aproximar, relacionado ao conceito de limite, são concepções que funcionam em um curso de Cálculo com tal objetivo. Se os conceitos de limite e infinitésimo aparecerem misturados não há problemas, pois formalizar tais concepções é uma tarefa dos cursos de Análise, sejam Standard ou não. Ainda mais tratando-se de concepções de alunos da graduação em Física, que não possuem em seu currículo, pelo menos na UNESP em Rio Claro, a disciplina de Análise. O contexto, portanto, em que essas concepções têm validade, é em um curso de Cálculo cujo

objetivo é trabalhar intuitivamente com os conceitos, a partir das concepções espontâneas dos alunos, aplicando-os nas diversas áreas de conhecimento, e não procurando formalizá-los, segundo as exigências da Matemática.

Trabalhar com essas concepções em um curso de Cálculo, com o tal objetivo, é reconhecer como válidas as concepções infinitesimais. Essas concepções, antes não legítimas em um contexto bem específico, são o conhecimento antigo que foi base para a formação do novo conhecimento: limite e infinitésimos juntos. Do ponto de vista matemático, esse conhecimento é uma heresia. Mas do ponto de vista da Educação Matemática, ele é permitido. Considerando a formação desse conhecimento, que incorpora o antigo como negação dialética, e a existência do contexto de um curso de Cálculo como antes explicitado, o obstáculo infinitesimal foi superado. Foi uma consequência do trabalho realizado nos encontros, que inclusive envolveu comparações entre as abordagens, podendo ter ocasionado algum conflito cognitivo que tenha implicado na superação de tal obstáculo. Menciono isso aqui, pois quando surgiam comparações no experimento de ensino buscava sempre separar o que era do contexto infinitesimal e o que era relacionado a limite. Eram duas concepções colocadas em choque uma contra a outra, ocasionando possíveis conflitos, explícitos ou não. O fato dos alunos terem assumido o novo conhecimento como legítimo, explicando limite através de infinitésimos e infinitésimos através de limite, em uma aula de Cálculo, demonstra a superação do obstáculo. Cabe salientar que um passo fundamental para a superação de tal obstáculo foi a legitimação das concepções espontâneas dos alunos. Eles foram estimulados a usarem essas concepções e foi, de fato, o que ocorreu na apresentação.

Ao mesmo tempo em que os alunos formaram um amálgama conceitual entre limite e infinitésimos, mostraram uma flexibilidade ao reconhecer o que fazia parte de um contexto e o que fazia parte de outro. Algumas idéias apresentadas pelos alunos mostraram tal flexibilidade: *“É que limite você chama de vizinhança e nos infinitésimos é mônada”, “No limite, a gente trabalha com os reais. E nos reais os infinitésimos não existem. Então a derivada da função e esse quociente $\frac{dS}{dt}$ são iguais. Mas quando a gente vai para os hiper-reais, onde os infinitésimos existem, não são iguais, são aproximadamente iguais”*. O amálgama pode ser separado quando se pretende trabalhar em um contexto específico. Os alunos adquiriram uma consciência de que podem passar de um contexto para outro. Isso

ocorreu com o trabalho durante os encontros e aulas regulares de Cálculo, sem precisar passar pela formalização dos conceitos e correção das concepções que não coincidem com a matemática formal.

Mas e o limite? Pode constituir-se obstáculo epistemológico ao Cálculo Infinitesimal? Hipoteticamente falando, se isso acontecesse, a formação do novo conhecimento apresentado pelos alunos e a consideração do contexto de um curso de Cálculo como explicitado, também mostrariam a superação de tal obstáculo. Esse novo conhecimento poderia ser pensado como novo em relação a um conhecimento sobre limites, o antigo. Mas, o que consta na literatura é a existência do obstáculo infinitesimal. O que encontramos nos diversos cursos de graduação é uma disciplina de Cálculo baseada no contexto de limite, onde as concepções infinitesimais não são aceitas como conhecimento legítimo. Essas, porém, são utilizadas como concepções clandestinas (BALDINO, 1995), ou seja, pode-se pensar ou, de vez em quando, falar em infinitésimos, mas o que é legítimo, o que é aceito numa prova como conhecimento válido, é o conceito de limite. Considerando a concepção de que um curso de Cálculo não tem a finalidade de formalizar conceitos, mas sim de trabalhá-los intuitivamente, tendo como base as concepções espontâneas dos alunos, as idéias infinitesimais dos estudantes acabam tendo um papel diferente do que geralmente costumam ocupar: passam de clandestinas a concepções legítimas.

4. Viagem ao mundo infinitesimal

“Que viagem!” é uma gíria utilizada quando se diz respeito a algo estranho, nunca visto ou pensado, difícil de imaginar. Os alunos costumavam usar expressões que envolviam o verbo *viajar*, para se referir a conceitos e idéias estranhas para eles, dentro da abordagem infinitesimal, ou que fossem de difícil entendimento. Eles estavam trabalhando com números antes nunca vistos no ensino médio e fundamental. Estavam acostumados com os “verdadeiros” números, como disse Nanda: “*uma visão muito diferente do que aquela que a gente vê todo dia*”. Era normal, portanto, um pouco de estranheza ao trabalhar com a nova abordagem. As expressões de “viagem” apareciam em diversas situações, como por exemplo, quando alguma nomenclatura estranha para eles era citada; a situação do cronômetro, trazida por Mino, e a atividade do zoom aplicado ao círculo trigonométrico e à parábola. Vejamos o que ocorreu nessas situações.

Os termos *mônada* e *hiper-reais* chamaram a atenção dos alunos, no primeiro encontro. Na apresentação, inclusive quando eles tocaram nesse assunto, os colegas da turma expressaram essa estranheza: “*Mô? O que que é? Ah? Monicas?*”. Mais que a nomenclatura, considerar a existência de números infinitos, uns maiores que outros, não era algo em que os alunos estavam acostumados a pensar e, por isso, riram e manifestaram-se: “*tem que viajar um pouco!*”.

Os alunos foram convidados a viajar para o mundo infinitesimal, para mergulhar na mônada dos números. O meio de transporte era o zoom infinito. Essa viagem trouxe algumas vertigens para eles. O que enxergavam, depois do zoom, era aquilo mesmo que eles estavam enxergando? Esse foi o questionamento mais evocado pelos alunos. Alguns deles toparam fazer a viagem até o fim. Outros pararam no meio do caminho. Outros ainda chegaram ao fim, mas retornaram ao começo, para, em seguida, entrar na mônada novamente. Foi um movimento de vaivém incessante.

Ao falarmos sobre infinitésimos e números infinitos, no primeiro encontro, Lina apresentou sua preferência por melhor entender o infinitésimo, pois “*Ele está ali. Estou vendo o zero*”. O que não ocorre em relação ao infinito, pois “*parece que eu nunca vou chegar*”. Mino, por sua vez, pensou o contrário: “*Isso sempre me incomodou. Ligo meu cronômetro. Ele nunca marca nada. Sempre marca zero, porque ele nunca chega ao próximo. Se você não impuser limites às casas decimais ele nunca vai chegar ao próximo número*”. Comentei sobre o paradoxo da dicotomia, de Zenão (c. 450 a.C.), que diz: “Se um segmento de reta pode ser dividido indefinidamente, então o movimento é impossível pois, para percorrê-lo, é preciso antes alcançar seu ponto médio, antes ainda alcançar o ponto que estabelece a marca de um quarto do segmento, e assim por diante, *ad infinitum*. Segue-se, então, que o movimento jamais começará” (AVES, 2002, p.418). Os alunos concordaram que as situações eram semelhantes, e Nanda, na apresentação, ao citar a situação do cronômetro, incorporou a sua fala o paradoxo, fazendo com que seus colegas de turma lembrassem de Zenão. Em sua fala inicial, Nanda disse: “*Porque são números tão pequenos, tão pequenos, e não são o infinito, não chega a ser o infinito, são números muito pequenos, infinitamente pequenos, (...) às vezes você pode fazer umas viagens e você não consegue chegar em lugar nenhum, por exemplo: se você pegar um cronômetro e começar a cronometrar o tempo que você leva para chegar na sua casa, você pode perceber que ele nunca vai sair do zero, ou seja, você nunca vai chegar*

na sua casa! Você fica marcando e ele nunca vai sair do zero. Então você começa a perceber que os números são infinitos e pelo fato de serem infinitos isso altera bastante, então você começa a pensar neles, nesse universo que os infinitésimos fazem parte, tem até um conjunto especial, que são os hiper-reais, que os infinitésimos fazem parte”. Não se chega “ao próximo número real”, nem em casa, por causa da infinidade de números existentes depois do zero que o cronômetro tem que percorrer. Esse foi o raciocínio dos alunos. Nessa infinidade, os infinitésimos estão incluídos. Dentro desse “universo que os infinitésimos fazem parte” é que Nanda se encontrava! Ela estava na mônada do zero, entre os infinitésimos, e foi levada até lá através do zoom infinito. Ela enxergava o mundo a partir do ponto final dessa viagem: a mônada do zero. Em consequência disso, a partir desse ponto, tudo ficava infinitamente distante. O mundo ficava inatingível. Essa foi a viagem de Nanda.

Tratando-se do zoom infinito, a primeira atividade em que utilizamos a ferramenta zoom do software Corel Draw ocorreu no primeiro encontro, quando os alunos tentaram descobrir a diferença que existia, considerando a abcissa $x+dx$, entre a curva x^2 e a reta tangente a ela em um ponto P (Figura 1.5). Essa diferença só apareceu quando demos o segundo zoom infinito, que evidenciou o infinitésimo de segunda ordem ($E_f dx = \varepsilon_f$), justamente a diferença procurada. Sugeri que os alunos se baseassem na interpretação geométrica da derivada, e então eles foram em busca de um triângulo retângulo. Na figura resultante do segundo zoom, eles não conseguiram encontrar o triângulo correto para determinar o valor dos catetos. Pensei, no momento, que isso era devido à impossibilidade de traçá-lo por inteiro. Então, na figura 1.4, resultado do primeiro zoom, forcei o aparecimento da reta tangente, pensando que assim tornaria mais evidente a visualização desse triângulo. Com a reta desenhada (Figura 1.7), os alunos localizaram a diferença procurada, mas sua medida não foi determinada. A tentativa seguinte foi recorrer ao caso finito, onde os acréscimos às variáveis x e y eram números reais e não mais infinitésimos. Desenhei a figura 1.8, onde os alunos indicaram $f'(x)\Delta x$ como sendo a medida do cateto oposto. Percebendo a semelhança com $f'(x)dx$ (diferencial de f), eles localizaram essa medida na figura 1.7, onde eu havia forçado o aparecimento da reta tangente, encontrando o valor da ordenada em questão (como soma de segmentos) e a diferença entre a curva e a reta.

No capítulo V, apresentei o trecho acima como retratando uma dificuldade pela qual os alunos passaram na abordagem infinitesimal. Cabe, agora, dizer o que entendendo por dificuldade, em meio aos termos *obstáculo epistemológico* e *conflito*. Como já explicitiei em outro momento, um obstáculo epistemológico é um conhecimento que tem sua validade em certo contexto, mas deixa de funcionar quando evocado em outro contexto. Para ocorrer sua superação, é necessário que um conflito apareça. O conflito ocorre quando dois conhecimentos, que para o aluno são contraditórios, são evocados simultaneamente. Uma dificuldade ou um erro do aluno pode evidenciar a existência de um obstáculo epistemológico. Conhecimentos envolvidos com essa dificuldade ou erro podem ser utilizados para organizar o aparecimento de um conflito. Nesse contexto, penso a dificuldade como sendo a ausência de resposta diante de uma demanda. Uma sensação de não ter entendido, manifestado por uma pessoa, surge quando a dificuldade aparece. Ela deve ser sempre pensada a dois: um sujeito esperando uma resposta de outro. Assim, na situação em que a dificuldade está presente, existe uma diferença entre o que se espera e o que vem. Nas atividades onde apareceram dificuldades por parte dos alunos, não desejava que eles respondessem o correto, mesmo existindo uma resposta adequada à situação. O interesse era saber como trabalhariam com o zoom infinito.

Essa ausência de resposta ocorreu durante a atividade antes explicitada, e foi confirmada pelas falas dos alunos após a realização dessa atividade: “*Confunde qual é a curva e qual é a reta*”, “*Como a gente está tão próximo, percebe-se que a curva e a reta estão paralelas. Num plano maior, dá para ver que é a curva e a reta tangente. Aí, dá para deduzir que tem um triângulo retângulo*”. Quando os alunos embarcaram na viagem do zoom infinito, tiveram uma vertigem: ficava confuso saber o que era a parábola e o que era a reta tangente. Esquecia-se de onde se tinha partido: a parábola se localizava acima da reta. Mesmo sem identificar as linhas, eles enxergaram duas retas paralelas. Olhando de um plano maior, ou seja, saindo do mundo infinitesimal, enxergando a partir do finito, a curva e a reta ficaram fáceis de se identificar. Com o caso finito, a localização de um triângulo e seu transporte para o mundo infinitesimal ficaram mais acessíveis. Nessa atividade, portanto, ocorreu o movimento de vaivém. Os alunos viajaram até a mônada do ponto P , retornaram para trabalhar com o caso finito, desfazendo o zoom infinito, e foram até a mônada novamente, para fechar a situação. Foi realmente uma viagem: “*Não estamos acostumados com esta perspectiva*”.

“*Mas saiu!*”. Os alunos resolveram a atividade, mas parece que a dificuldade não foi superada, pois, no terceiro encontro, tentamos resolver o mesmo exercício, porém com a curva sen x , e a diferença procurada não foi identificada. Mais uma vez, os alunos não localizaram o triângulo esperado. Trabalhamos também com o caso finito, e a atividade não pôde ser concluída por causa do tempo.

Na atividade da parábola, os alunos utilizaram as duas abordagens, tanto a infinitesimal quanto a do conceito de limite. Na primeira, trabalha-se com acréscimos infinitesimais. Na segunda, os acréscimos utilizados são finitos, números reais. O caso finito foi necessário para que os alunos vissem o que ocorria geométrica e algebricamente na abordagem infinitesimal, finalizando a atividade. A dificuldade dos alunos não invalida o trabalho com os infinitésimos. Como ocorreu na apresentação dos alunos, quando eles juntaram os conceitos de limite e infinitésimo, essa é uma situação que reforça a idéia de trabalhar com ambos os contextos. Acredito que nessa situação, porém, o caso finito não surgiu como obstáculo epistemológico para a abordagem infinitesimal, pois os alunos não manifestaram a necessidade de usar os números reais. Tal utilização foi sugestão minha.

Outra atividade em que os alunos demonstraram dificuldade foi a do cálculo da derivada da função seno. Nessa atividade, utilizamos o zoom infinito para visualizar os infinitésimos envolvidos e para auxiliar no desenvolvimento algébrico desse cálculo. No primeiro zoom, retratado pela figura A.5, enxergamos dx igual a $\text{sen } dx$. Sabíamos que o comprimento de um arco era igual ao seu seno somente se esse arco fosse nulo. O zero é um infinitésimo, mas o acréscimo infinitesimal dado na atividade era positivo. Para enxergar, então, a diferença entre dx e $\text{sen } dx$, precisamos de outro zoom. No segundo zoom, retratado pela figura A.6, a diferença apareceu e sua medida era $1 - \cos dx$. Nessa figura, $\text{sen } dx$ e dx estavam representando duas semi-retas. Com esse trabalho, concluímos o desenvolvimento algébrico do cálculo da derivada da função seno. Lugo fez uma breve síntese, com a ajuda de Mino, das conclusões tiradas dos zooms: “*O coseno não é a projeção do arco? Então você vai diminuindo o arco, a projeção vai aumentando. Vai chegando cada vez mais perto de 1, pertinho de 1. É 0.000... Essa diferença é o $1 - \cos dx$. Vai ser infinitesimal. Aqui é a mesma coisa, $\text{sen } dx$ é aproximadamente igual a dx . São números bem pequenos. Dividindo um pelo outro vai dar próximo de 1*”.

Antes de fazer uso do software, solicitei aos alunos, no segundo e terceiro encontros, que imaginassem os resultados dos zooms. No quarto encontro, a atividade foi retomada e o software foi utilizado. Os alunos notaram a diferença entre os trabalhos realizados: *“Na hora, para conceber... Hoje [com o computador] já foi mais normal, visualizar”*, *“Parecia coisa de louco. Na hora a gente não entendia nada. Mas agora melhorou”*. A ferramenta zoom foi importante para tornar mais clara a visualização do que ocorria quando entrávamos no mundo infinitesimal. É uma estratégia pedagógica que pode auxiliar no trabalho com essa abordagem. O zoom no computador viabilizou enxergar o que ocorria na vizinhança infinitesimal da origem do círculo trigonométrico (ponto A , na figura A.4). Os alunos concordaram com os resultados obtidos através do zoom, como Mino disse: *“... pensando neste raciocínio está ok, perfeito”*. Mas ele mesmo pensou em outras possibilidades: *“Deu pra se guiar por essa lógica, mas sempre dá para pensar outra coisa. Pode até ser errado, mas você sempre está pensando em outra coisa. Como eu pensei numa possibilidade da esfera começar a diminuir junto com o zoom. Foi uma série de processos que eu fui pensando e cheguei a esta conclusão que a esfera diminuía junto. Eu queria saber onde eu estou errando para pensar certo”*. Mino poderia estar pensando na ferramenta *zoom out* de muitos softwares, que faz com que enxerguemos a figura em uma proporção menor que a inicial. Nanda, respondendo a Mino, explicitou uma visão que diz sobre a construção de uma teoria matemática: *“Acho que não é pensar errado. Depende do argumento que você está usando. Se você encontrar um argumento bem convincente, mesmo que o que você está pensando não seja certo...”*. Mino, provavelmente, devia ter os argumentos que fundamentavam seu raciocínio para chegar à conclusão apresentada. Nanda deslocou, então, o foco da situação: não é uma questão de *certo ou errado*. Dependendo da argumentação, de convenções, de um conjunto de verdades, podem-se criar novas teorias.

Os alunos concordaram com os resultados obtidos através do zoom, mas confessaram que o processo havia sido difícil. A dificuldade ao compreender o que acontece depois do zoom foi confirmada por eles quando falaram a respeito da atividade: *“Nossa! A gente ficou meia hora para descobrir aquilo. Mais. A gente começou num dia e acabou no outro”*, *“Naquele dia estava difícil visualizar que $\sin dx$ estava paralelo a dx e que dx era uma reta e não o ‘círculo’!”*, *“A minha dúvida era aqui. Eu não me conformava que o seno era igual ao dx . Eu fiquei muito chateada, mas depois eu entendi”*, *“Você tem que viajar muito. Para sair do que você conhece e ir para lá”*.

A viagem do zoom infinito levou os alunos à vizinhança infinitesimal do ponto A , do círculo trigonométrico (Figura A.4). Eles foram levados *para lá*, como disse um dos alunos, na última citação acima. Quando os alunos chegaram *lá*, tiveram uma vertigem: como que estou vendo um arco, que durante toda minha vida foi curvo, representado por algo reto? Como que uma reta ($\text{sen } dx$) é paralela a algo curvo (dx)? Assim disse Lugo: “*O problema é o gráfico. Porque aqui é paralelo e não é paralelo, é curvo, mas é paralelo*”.

O zoom infinito pode causar vertigem. Ele dá uma ilusão de que “ dx é uma reta”: “*Quando a gente chegar perto do ponto A , a gente tem a impressão de que esse pedacinho, o arco aqui é mais ou menos, tem a impressão de uma reta. Dá a impressão, se a gente chegar muito próximo*”. Quando chega-se *lá*, tem-se essa impressão ou ilusão. Em outras proporções, um colega dos apresentadores compreendeu tal ilusão: “*É como o horizonte. O horizonte é curvo e você tende a imaginar que é uma reta*”. Se essa ilusão não é aceita, tem-se vertigens e questiona-se: é curvo ou não é curvo? É paralelo ou não é paralelo?. Essa problemática apareceu enquanto estávamos resolvendo a atividade nos encontros. Os alunos estavam presos à certeza de que um arco é algo curvo e não reto. Nanda, ao avaliar o que foi realizado, tentou justificar a confusão pela qual os alunos passaram: “*A gente não estava chegando tão próximo quanto era preciso*”. Segundo Nanda, os alunos não chegaram até o ponto final da viagem. Pararam um pouco antes, sem se aproximar o suficiente do ponto A para enxergar as duas semi-retas (Figura A.6).

Considerando a existência dos infinitésimos, tanto de primeira quanto de segunda ordem, as medidas $\text{sen } dx$ e dx não representavam entes geométricos paralelos. A medida $\text{sen } dx$ referia-se a um segmento de reta e dx referia-se a um arco. Como era um arco, o infinitésimo dx representava a medida de algo curvo. Esclarecendo o que ocorreu e avaliando o que havia sido feito, Lugo disse: “*A dúvida que a gente teve é ver que dx era aproximadamente reto e que era aproximadamente igual ao seno também. O arco é praticamente igual ao seno do ângulo*”. Lugo evidenciou as concepções infinitesimais ao utilizar os termos *aproximadamente reto e igual e praticamente igual*. Considerando-se os infinitésimos, portanto, o segmento $\text{sen } dx$ e o arco dx não eram paralelos. O zoom infinito dava a ilusão de serem paralelos, mas o que os alunos estavam enxergando era o início de um segmento de reta e de um arco, que estava infinitamente distante do ponto no qual se encontravam. Tudo ficou esclarecido: “*Quando você chegar bem perto do ponto A [na figura*

A.4], *você não vai ver isso [arco dx] virando. Você vai ver paralelo, que é o que tá aqui [figura A.6]. Você vai continuar vendo reto, só que ele [arco dx] vai virando...*”. Nessa fala fica retratado o processo contrário ao zoom infinito. É um movimento de dentro para fora. Saindo de dentro da vizinhança infinitesimal do ponto A , desfazendo o zoom infinito, o arco dx vai virando, pois afinal de contas ele é um arco.

Essas concepções que os alunos formaram a partir de suas vertigens e do trabalho com o zoom infinito, provavelmente seriam coibidas ou ignoradas por um matemático ou professor do ensino tradicional vigente, parecendo ser sem sentido. Esse é o ponto de vista matemático. Mas não é desse ângulo que as concepções devem ser analisadas. Estamos falando de um curso de Cálculo para alunos de Física, ou seja, o ponto de vista deve ser o da Educação Matemática. Essas concepções são válidas nesse contexto. Ouvir esse discurso dos alunos significa legitimar suas concepções espontâneas, permitindo que o obstáculo infinitesimal seja superado.

Rejeitar a ilusão que o zoom infinito provoca, faz com que surjam os questionamentos: é curvo ou não é curvo? É paralelo ou não é paralelo?. O aluno é levado até à “mônada do ponto A ” e pode fazer tais questionamentos. No contexto do conceito de limite, existe uma problemática semelhante a essa. Nesse contexto, o aluno vê o professor traçar várias retas secantes a uma curva dada e quando ele “passa ao limite”, a reta tangente à curva dada é encontrada. Geralmente, os alunos ficam com uma inquietação: chega ou não chega? A reta tangente é atingida ou não?. Nas duas abordagens, encontramos problemáticas semelhantes.

Os quatro alunos passaram pela “vertigem do paralelo e do curvo”, fizeram os respectivos questionamentos e deixaram claro, em suas falas, o que era essa vertigem. Foi possível perceber que ao explicitarem que haviam tido dificuldade, a qual caracterizei como ausência de resposta a uma demanda, essa já havia sido superada: “... *mas depois eu entendi*”, “*Mas depois ficou claro*”, “*A dúvida que a gente teve ...*”. Acredito que as dificuldades que surgiram nas viagens dos alunos, a que ocorreu na atividade do seno, bem como a que apresentei na atividade da parábola, não invalidam o trabalho no contexto infinitesimal. Na situação da parábola e da reta tangente, o caso finito foi necessário e isso só fortaleceu a idéia de se trabalhar com as duas abordagens num curso de Cálculo, a exemplo do novo conhecimento apresentado pelos alunos no último encontro de CI, quando uniram os conceitos de limite e infinitésimo.

5. O Cálculo para o curso de Física: algumas reflexões

Em várias situações, como mostrei em outro momento, os alunos fizeram comparações entre a abordagem infinitesimal e a do conceito de limite. Isso era compreensível, já que estavam em contato com ambas. A primeira estava sendo adotada nos encontros de CI, e a segunda, nas aulas regulares de Cálculo. Nanda, na apresentação, falou da importância dos alunos terem participado dos encontros e terem visto uma visão diferente da trabalhada nas aulas regulares: “... talvez, desta maneira, fica até mais fácil da gente conceber a idéia de limite, de derivada. A integral, dá para ter uma idéia através dos infinitésimos muito maior de por que a área embaixo de uma curva...”. Lina continuou: “Você calcula a área de quadradinhos muito pequenos, infinitésimos. E se você juntar todos você tem a área. Cada vez que você pegar pedacinhos mais pequenos você vai chegar mais próximo do que seria a área embaixo da curva”. Nanda concluiu: “Então é bem mais fácil de você visualizar”. Nanda e Lina recorreram aos infinitésimos para explicar o cálculo da área da região abaixo de um gráfico, ficando “bem mais fácil de visualizar”. No ensino tradicional vigente, esse assunto é tratado através de somas de Riemann. No desenvolvimento desse estudo, partições de tamanho cada vez menor, num dado intervalo, são feitas até se chegar a um ponto não trivial para muitos alunos. Ocorre a “passagem ao limite” do tamanho da partição. Esse estudo análogo à soma infinita, na abordagem infinitesimal, foi desenvolvido no quarto encontro, e já no início os alunos evocaram uma concepção de soma infinita, que apareceu em diversas situações durante tal encontro e apresentação, como a que citei acima: calcula a área de quadradinhos infinitesimais e junta todos, para obter a área. Essa idéia de soma infinita surgiu antes de iniciarmos o estudo da aplicação da integral definida. Desenhei o gráfico de uma função qualquer no quadro e indaguei aos alunos se tinham ouvido falar em algo a respeito de integral e área. Disseram que o professor de Física havia discutido um pouco sobre o assunto, utilizando os conceitos de velocidade e espaço. Eles não deixaram entender que a idéia de soma infinita, relacionada a infinitésimos, havia sido abordada. Associaram o conceito de integral ao de primitiva, como sendo algo que vem antes: quando a integral (indefinida) é calculada, encontra-se uma “função anterior” à função que foi integrada. Nas aulas regulares, sabia que a Profa. Miriam não havia comentado sobre o assunto, pois estava acompanhando a

turma. Seria algo novo, então, para os alunos, trabalhar na abordagem infinitesimal, com essa aplicação da integral.

A partir de uma pergunta de Lugo, que desejava saber se a integral era uma soma, os alunos apresentaram outras idéias a respeito do conceito de integral. Lugo disse: “... *é uma soma de várias arezinhas pequeninhas*”. Nanda prosseguiu: “*Se você calcular a área deste gráfico aí [apontou para o gráfico desenhado no quadro], teria que ter essa idéia [a de Lugo]. Subdividiria em pontinhos pequenos, pequenas coisinhas depois somaria tudo e acharia a área desse gráfico*”. Lugo completou sua fala: “*A largura de cada retângulo desses seria um infinitésimo e a altura seria um número real comum*”. Parece que essas idéias surgem com mais facilidade e naturalidade do que aquelas relacionadas às somas de Riemann, como a de considerar retângulos cada vez menores, utilizadas no ensino tradicional vigente de Cálculo.

Lugo, em sua fala acima citada, evocou a concepção própria de infinitésimo como sendo número. Ele disse que a idéia de considerar a largura do retângulo como infinitesimal veio dos encontros. Perguntei, então, como seria dividir a área em pequenas coisinhas. Lina sugeriu uma maneira de fazer isso: “*Quando a gente tinha uma curva [como em $\sin x$, em x^2], a gente dava zoom, e ela parecia uma reta. Então se a gente desse zooms sucessivos você ia achar retas e ia somando estas áreas que seriam regulares*”. Lugo complementou: “*Você poderia pegar vários retangulinhos que iam até a curva e como esses retangulinhos tinham largura extremamente pequena, a diferença entre a área de todos os retangulinhos somados e a área da figura ia ser muito pequena*”. Nanda apresentou uma idéia de soma infinita, resgatando a concepção espontânea de infinitésimo, como um pontinho pequeno, evocada no primeiro encontro. As concepções espontâneas se desenvolveram ao longo das atividades, à medida que fomos utilizando as idéias de infinitésimo e zoom. A idéia apresentada por Nanda foi o resultado desse desenvolvimento, que pode ter tido influência de algum livro que os alunos tenham visto ou algo que o professor de Física havia dito sobre o assunto, mas não de um ensino organizado sobre soma infinita, que é o que seria apresentado por mim, se isso não tivesse vindo dos alunos. A idéia evocada por Nanda foi, portanto, uma concepção espontânea de soma infinita, que surgiu antes de trabalharmos com o conceito de integral definida. Lugo ainda foi mais específico dizendo que a largura das pequenas coisinhas, que teriam a forma de retângulo, era um infinitésimo.

O trabalho com o zoom infinito, no computador, aplicado ao cálculo da área da região abaixo de uma curva, foi antecipado por Lina ao especificar como seria a divisão da área em pequenas coisinhas. O zoom infinito, que dá ao aluno a ilusão de enxergar uma porção infinitesimal de uma curva como sendo algo reto, fez sentido e foi útil para o cálculo dessa área. Essa ilusão que o aluno teve pode ser questionada perante a Matemática como sendo uma heresia, mas o ponto de vista, nesse caso, não deve ser o matemático. Estamos tratando de alunos de Física em um curso de Cálculo. O ponto de vista deve ser o da Educação Matemática, que enxerga o curso de Cálculo como um campo de trabalho com as concepções do aluno e não da Matemática. O objetivo não é formalizar conceitos, e sim legitimar as concepções espontâneas dos alunos.

A concepção de soma infinita foi ainda aplicada na demonstração do segundo teorema fundamental do Cálculo, tendo um papel importante, inclusive em sua finalização. Antes mesmo de trabalhar com o zoom, para auxiliar nessa demonstração, Mino já havia dado a

“resposta final”. Nós tínhamos que $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx \approx \int_a^b dF$. Perguntei o que significava o

último termo, e Lugo respondeu que era o somatório dos infinitésimos. Quando questionei quanto daria esse somatório, Mino disse: “Acho que o comprimento de a até b , no [eixo] y ”. Depois de trabalharmos com os zooms envolvidos nessa demonstração, no computador, os alunos concluíram que o somatório era $F(b) - F(a)$. Portanto, a soma infinita dos infinitésimos dF , de a até b , resultava no comprimento $F(b) - F(a)$ do segmento de reta no eixo vertical do gráfico da primitiva F . Maiores detalhes sobre essa atividade são encontrados nas páginas 187-191.

Na apresentação dos alunos, a concepção de soma infinita surgiu novamente na fala de Nanda, sobre a existência de infinitésimos na dilatação do ferro. Lembrando o que ela havia dito: “Se você estiver calculando o coeficiente de dilatação de uma barra de ferro numa ferrovia, no acoplamento de uma barra a outra para permanecer unidas, para juntar os trilhos, esse infinitésimo vai fazer muita diferença naquela dilatação do ferro”. O infinitésimo foi pensado como essencial para as barras permanecerem unidas. Se ele não fosse considerado, os trilhos não se juntariam. A dilatação total da barra de ferro foi concebida como a integração de dilatações infinitesimais, como se a matéria fosse contínua.

Antes desse encontro, na reunião em que os alunos prepararam a apresentação, eles estavam procurando por assuntos que seus colegas estivessem familiarizados para poder apresentá-los no último encontro de CI. Nanda comentou sobre a noção de infinitésimo e Lugo confirmou que poderiam falar sobre isso, pois “*A turma tem uma idéia, porque o Dimas [professor de Física] fala às vezes. Ele pega faz um deslocamento infinitesimal, soma todos e faz o trabalho*”. Foi reconhecida, nas aulas de Física, a concepção de soma infinita evocada como espontânea nos encontros. Ela surgiu aplicada ao conceito físico de trabalho. Com esse depoimento, a idéia de soma infinita é legitimada na graduação em Física, por um de seus professores. O mesmo professor que falou em deslocamento infinitesimal, utilizou o zoom em suas aulas: “*O professor falou da idéia de zoom, que você pode chegar infinitamente próximo de um ponto*”. Os alunos estavam a par do que estava sendo dito quando o professor se referia a infinitésimos: “*A gente lembrou do que viu aqui*”, e ressaltaram: “*É, mas acho que não foi para todo mundo aquilo*”. Eles se sentiram privilegiados por terem estudado conceitos de Cálculo via abordagem infinitesimal, sendo útil o que havíamos trabalhado nos encontros em relação às idéias de zoom e infinitésimos, pois isso havia auxiliado a compreensão do que o professor de Física falava em aula.

O trabalho realizado nos encontros foi integralmente voltado à legitimação das concepções infinitesimais espontâneas e próprias apresentadas pelos alunos. Além desse reconhecimento dado por mim, o professor de Física auxiliou nessa direção, legitimando a utilização dos infinitésimos. O curso de Cálculo Infinitesimal não estaria, portanto, defasado da graduação em Física. Nesse sentido, no final do quarto encontro, tivemos uma conversa na qual os alunos mostraram algumas impressões sobre a disciplina de Cálculo para o curso de Física: “*Se vai aplicar isto no nosso curso de Cálculo, por exemplo, eu acho que seria mais coerente aplicar isso*”, “*É mais interessante*”, “*Na Física, eu acho que seria mais interessante*”, “*Tanto na Física quanto na Matemática*”, “*Eu acho que em qualquer área*”. Fizeram também uma avaliação a respeito do que tinham estudado: “*Acho que a gente foi privilegiado mesmo. Vendo agora a aula da Miriam, a gente tem esta visão crítica*”. A idéia do zoom infinito, trabalhada em todos os encontros, foi citada por Lugo como uma ferramenta essencial no trabalho de um profissional de Física: “*Inclusive eu estava pensando que na Física ou em outra ciência, você tem que imaginar uma situação. Tem vezes que você não enxerga direito, porque é uma coisa que acontece num espaço muito pequeno, uma coisa com*

dimensões muito pequenas, como um átomo. Então, se a gente tem essa idéia de imaginar o que é pequeno, como se fosse aumentar, como a idéia do zoom, isso é legal". Harthong (1983) já havia alertado para a importância do físico enxergar o que acontece no mundo microscópico, e não ficar limitado ao macroscópico, apreendendo "[...] apenas a sombra das coisas" (Ibid, p. 1200).

Das comparações feitas entre a abordagem seguida no ensino tradicional vigente e os encontros de CI, os alunos tiveram algumas impressões a respeito das duas formas de se trabalhar com o Cálculo. No encontro de preparação, quando os alunos estavam revisando o que haviam estudado, comentaram sobre a regra da cadeia: *"Eu vi a demonstração da regra da cadeia no livro [SWOKOWSKI, 1994]. Nossa! Duas páginas!"*, *"É aqui é mais fácil esse jeito, né?"*. Demonstramos essa regra no segundo encontro (para detalhes, ver p.148) e os alunos a apresentaram na última reunião. Nas aulas regulares de Cálculo, a Prof. Miriam falou brevemente na definição formal de limite e a reação dos alunos, nos encontros, já era esperada: *"Tem no Swokowski. É um ϵ , um δ , para cima, para baixo"*, *"Isso é muito complicado!"*. O título do livro mencionado pelos alunos sugere que ele seja utilizado em um curso de Cálculo, mas como já havia comentado no capítulo II, a maioria dos livros para esse curso traz os conceitos junto com sua formalização, fugindo do objetivo de trabalho desse curso. O mesmo ocorreu com o livro de Keisler (1986), na tentativa de introduzir os infinitésimos. Outra impressão levantada, dessa vez pela Profa. Miriam, na apresentação dos alunos, foi que na abordagem infinitesimal trabalhada nos encontros *"você não usa limite, aquelas coisas todas de limite. Você opera como se fossem números"*. Aqui a professora estava se referindo à necessidade de escrever "lim" em frente a cada mudança algébrica feita na resolução de um limite. Muitos alunos omitem a expressão, tornando a resolução matematicamente incoerente.

Mostrando as comparações trazidas pelos alunos, não quis privilegiar uma abordagem em vez de outra. Na abordagem tradicional do ensino vigente encontramos problemáticas. Na abordagem infinitesimal dos encontros mostrei que os estudantes passaram por certas dificuldades. O que quero reforçar é o que os alunos apresentaram no último encontro. Propuseram um Cálculo que não privilegia uma abordagem em vez de outra, mas privilegia sim suas concepções. Esse é o objetivo do curso. Deve trabalhar com as concepções espontâneas dos alunos, buscando aplicar os conceitos e abordando-os de forma intuitiva, sem

visar a formalização matemática. De acordo com tal objetivo, concepções dos alunos que unem os conceitos de limite e infinitésimos são bem vindas. Essa foi a sugestão dos alunos: “... talvez, desta maneira [infinitesimal], fica até mais fácil da gente conceber a idéia de limite, de derivada”, “Se a gente assimilar a idéia de limite, essa idéia [a idéia de mônada] fica mais clara porque a gente já viu a idéia de limite. E a idéia de limite vinculada à idéia de infinitésimo fica muito mais clara”.

Todas essas análises poderiam ter sido diferentes se o grupo de alunos fosse outro; se a amostra intencional fosse outra. Portanto, tudo o que está escrito acima diz respeito ao grupo formado por Lina, Lugo, Mino e Nanda. No próximo capítulo, trarei as considerações finais deste trabalho, retomando idéias defendidas ao longo da dissertação e apontando caminhos possíveis de serem percorridos futuramente.

CAPÍTULO VII

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentei o desenvolvimento de um experimento de ensino e mais dois encontros com um grupo de quatro alunos da graduação em Física, da UNESP de Rio Claro, que estavam cursando a disciplina de Cálculo segundo a abordagem tradicional do conceito de limite. Foram seis encontros em que conceitos de Cálculo foram estudados segundo a abordagem infinitesimal, com o auxílio da ferramenta zoom do software gráfico Corel Draw. Resgatarei, agora, algumas reflexões feitas ao longo da dissertação.

O grupo de alunos formou uma imagem conceitual de infinitésimo que revelou tanto concepções espontâneas, apresentadas no início do primeiro encontro, quanto concepções próprias elaboradas pelos alunos durante as atividades. A apresentação aos colegas e à professora responsável pela disciplina foi o momento em que os alunos organizaram e mostraram suas idéias a respeito do que havíamos estudado. Sobre infinitésimo, a imagem conceitual apresentada pelo grupo de alunos foi de um número, uma quantidade infinitamente pequena positiva pertencente à matéria, ao mundo. Nessa imagem, as primeiras idéias de infinitésimos estavam presentes e foram evocadas durante todos os encontros, principalmente quando os alunos procuravam justificar o resultado encontrado para a derivada de algumas funções, na abordagem infinitesimal. Nessas ocasiões, justificativas formais também apareceram. O preponderante, no entanto, foram justificativas baseadas nas concepções espontâneas de infinitésimo, como algo infinitamente pequeno e, por vezes, desprezível. Essas respostas mostraram que mesmo depois de um ensino organizado sobre derivada e infinitésimo, mesmo depois das definições formais desses conceitos terem sido apresentadas, tais concepções espontâneas apareceram. A imagem conceitual foi mais procurada para atender à demanda do que as definições formais.

São essas concepções espontâneas que os alunos apresentaram no primeiro encontro, que constituem o obstáculo epistemológico infinitesimal à aprendizagem do conceito de limite, no ensino tradicional vigente de Cálculo. Essas idéias durante os seis ECI foram reconhecidas como conhecimento válido. Foram legitimadas. Na apresentação, os alunos mostraram suas concepções a respeito do que havíamos trabalhado evocando um

conhecimento novo, em que os conceitos de limite e infinitésimo apareciam juntos para tratar de um assunto. Esse conhecimento que inclui o antigo, as concepções infinitesimais, é válido no contexto de um curso de Cálculo cujo objetivo foi confirmado em vários momentos nesta dissertação. Retomarei tal objetivo mais adiante para discutir sobre uma opinião comum a respeito do trabalho no Cálculo Infinitesimal. Considerando a formação desse novo conhecimento e o contexto no qual ele é válido, ocorreu a superação do obstáculo infinitesimal.

O que foi fundamental para que essa superação ocorresse foi a legitimação das concepções infinitesimais dos alunos. Algumas delas surgiram a partir do trabalho com o zoom infinito, que fez com que os alunos tivessem algumas vertigens. Quando os alunos falaram sobre as dificuldades que sentiram nessas atividades, mostraram que elas já haviam sido superadas. As problemáticas e dificuldades que surgiram nas viagens dos alunos não invalidam o trabalho no contexto infinitesimal. Na situação da parábola e da reta tangente, o caso finito foi necessário e isso só fortaleceu a idéia de se trabalhar com as duas abordagens num curso de Cálculo, a exemplo do novo conhecimento apresentado pelos alunos no último encontro de CI, quando uniram os conceitos de limite e infinitésimo.

Quando se trabalha com o Cálculo Infinitesimal, como foi feito no experimento de ensino, é comum surgir uma opinião de oposição entre muitos matemáticos e professores do ensino tradicional vigente sobre esse estudo. “Tudo o que se prova através da Análise Não-Standard (ANS), pode ser provado pela Análise Real”, “Nada de novo pode ser feito com a abordagem da ANS”, “ANS nunca chegou a dar certo. É um *dead horse*, pelo menos em sala de aula”, “É ridículo pensar em trocar limites por infinitésimos”. Essas idéias constituem a opinião de oposição ao CI em sala de aula. São frases tiradas do parecer de um dos revisores de um congresso internacional, ao qual eu e o orientador desta pesquisa submetemos um trabalho a respeito desta dissertação (BALDINO; MILANI, 2002).

As concepções infinitesimais são fundamentadas rigorosamente pela Análise Não-Standard. Por que, então, os infinitésimos não são tratados como conhecimento legítimo em sala de aula? O que isso significa? Que tipo de pensamento está por trás dessa opinião de oposição? Que ensino é esse? Acredito que é uma concepção de ensino que se fundamenta na idéia de que o centro desse processo é a Matemática. O conteúdo matemático está em primeiro plano. O professor preocupa-se principalmente em como falar sobre um conceito em sala de

aula, para que ele possa ser entendido por seus alunos. Os conceitos, os conteúdos matemáticos já estão determinados há muito tempo para um curso de Cálculo. A teoria já está posta, não precisa-se de outra. É a dos limites, fundamentada pelos epsilons e deltas. Resta pensar em como falar sobre isso para os alunos. Escutar o que o aluno traz para a sala de aula não interessa. Nesse sentido, nada de novo pode ser feito com a abordagem da ANS.

A posição acima explicitada não é a que defendo. Minha visão vai no sentido oposto. Acredito que o centro do processo de ensino é o aluno. O importante não é preocupar-se em como falar sobre um assunto matemático. O centro não é a Matemática. O fundamental é ouvir o que o aluno tem a dizer a respeito do que será estudado. É a partir das concepções que ele traz para a sala de aula que o professor deve pensar em como agir. O que os alunos trazem, em um curso de Cálculo, são concepções espontâneas infinitesimais. É com isso que se deve trabalhar. Segundo a posição de crítica ao Cálculo Infinitesimal, exemplificada anteriormente, a ANS é colocada como objeto de ensino no lugar do Cálculo: *Como trabalhar com ultrafiltro e axioma da escolha? Isso é um absurdo! Não funciona!* Os conceitos e sua formalização são introduzidos juntamente. Durante toda esta dissertação, defendi que o objetivo de um curso de Cálculo, principalmente para alunos de Física, é trabalhar com idéias intuitivas dos conceitos e com suas aplicações. A formalização desses conceitos deve ser feita em um momento posterior, numa disciplina de Análise.

Em que sentido, portanto, nada de novo pode ser feito com a abordagem da ANS? Matematicamente, tudo que se prova através da Análise Real pode ser provado pela ANS e vice-versa. Nesse sentido, ou seja, matematicamente, nada de novo pode ser feito com a ANS. Mas, e em sala de aula? Essa teoria acolhe as concepções espontâneas infinitesimais dos estudantes. Ela sustenta e fundamenta o pensamento infinitesimal dos alunos. A abordagem da ANS nos permite pensar em um curso de Cálculo Infinitesimal, cujas idéias serão fundamentadas, posteriormente, em outra disciplina.

“É ridículo pensar em trocar limites por infinitésimos”. A intenção não é essa. Proponho o trabalho com os dois conceitos, como sugeriu Mino em um dos encontros: *“Eu acho que no nosso curso tem que mostrar a parte histórica. Quando surgiu tudo isto. Os dois lados [infinitésimos e limite]. Mostrar o desenvolvimento da pessoa que pensou isso, para mostrar para gente. Acho que assim a gente entende”*. Não é uma questão de privilegiar uma

abordagem em vez de outra. A intenção é mostrar as duas formas de se trabalhar com o Cálculo, e legitimar concepções como as que os alunos propuseram na apresentação.

Vejo que o objetivo do curso de Cálculo, como explicitiei anteriormente, fundamenta tudo o que ocorreu nos encontros e as conclusões às quais cheguei. Esse objetivo não é compreendido, ou não quer ser compreendido, por muitos professores e matemáticos. A consequência dessa opinião de oposição ao CI é que a teoria do limite acaba se constituindo em um obstáculo epistemológico, no sentido de Bachelard, ao trabalho do Cálculo segundo a abordagem infinitesimal. Obstáculo não para os alunos. A posição é diferente. É obstáculo constituído por concepções desses matemáticos e professores do ensino tradicional vigente. Dentro da Matemática, essas concepções encontram seu contexto de validade, mas considerando o ponto de vista da Educação Matemática, elas não funcionam.

Tendo claro esse objetivo, a formalização dos conceitos do Cálculo é feita em disciplinas de Análise. Não penso, neste momento, em alunos do curso de Física, pois no currículo desse curso não há uma disciplina de Análise, pelo menos na UNESP, de Rio Claro. Penso, agora, em futuros educadores matemáticos que estão em um curso de graduação em Licenciatura em Matemática, no final de uma disciplina de Cálculo. Esse é um possível caminho a ser percorrido em um doutoramento. Tenho em mente que as concepções apresentadas pelos alunos, juntando os conceitos de limite e infinitésimo, são aceitas em um curso de Cálculo. E o passo seguinte? Como seria um curso de Análise que fundamenta tais concepções? Os alunos de Física, da pesquisa, mostraram que se a separação do amálgama pode ser feita, separa-se o que é do contexto do limite do que é infinitesimal, demonstrando uma flexibilidade que não precisou ser trabalhada através da formalização dos conceitos. Penso, no momento, em duas disciplinas de Análise: Análise Real e Análise Infinitesimal. Em ambas deve-se deixar explícita a existência de cada uma. São duas disciplinas para fundamentar: *“Porque o limite quando x tende a a , você está pegando os infinitésimos próximos de a ”*. Como seria a disciplina de Análise Infinitesimal? No apêndice desta dissertação, mostro duas formas de se abordar tal teoria. A primeira é o método construtivo; a segunda é o método axiomático. As duas formas tratam rigorosamente as concepções infinitesimais dos alunos. Qual método seguir?

Segundo a visão por mim defendida anteriormente, o centro do processo de ensino é o aluno, e não o conteúdo matemático. Como defendido em Baldino e Cabral (2000), acredito

que o professor deve trabalhar a partir das concepções que o aluno traz para a sala de aula, visando seu ajuste paulatino às concepções matemáticas. Pensando no aluno, como os quatro estudantes que colaboraram com a pesquisa, que já têm como imagem de infinitésimo um número, um número infinitamente pequeno, ao invés de apresentar uma lista de axiomas, penso que o caminho a ser seguido é ajustar tal concepção. Os primeiros passos seriam apresentar a concepção de que infinitésimo é uma seqüência de número reais, como por exemplo $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$ e, posteriormente, que infinitésimo é um conjunto de seqüências equivalentes de reais, como $\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\rangle$, apresentando a relação de equivalência. Dessa forma, os números hiper-reais seriam construídos a partir de seqüências de reais, como se faz na grande parte dos cursos de Análise Real, quando os reais são construídos a partir de seqüências fundamentais.

Como se dá a transição de concepções baseadas no novo conhecimento, que une os conceitos de limite e infinitésimo, para sua formalização na Análise Infinitesimal? Reflexões sobre essa questão podem ser cenas do próximo capítulo. A certeza que tenho é que durante o tempo em que desenvolvi a presente pesquisa, aprendi com os diversos subgrupos do Grupo de Pesquisa-Ação (GPA) dos quais participei, a escutar o aluno. Só dessa forma, poderia ajudá-lo se ele quisesse aprender Matemática. Só incentivando para que ele falasse, eu teria o alcance de suas concepções e do lugar onde ele se encontraria para ir até lá e ajudá-lo. Durante o experimento de ensino, tive a oportunidade de praticar esse ensinamento, embora em algumas vezes senti que falhei. Antecipei muitas coisas aos alunos, não esperei, algumas vezes, a conclusão de suas falas. Falei algumas coisas que não precisavam ser ditas. Os alunos poderiam falar isso por mim. Mas se isso não tivesse acontecido, não teria feito essa reflexão, e essa situação não serviria de motivação para tentar me corrigir, sempre me guiando pelo grande ensinamento desses três anos de aprendizado: “Aprende-se falando e ensina-se ouvindo” (frase do orientador desta pesquisa, comprovada em diversos momentos de trabalho).

REFERÊNCIAS

- ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. *O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa*. São Paulo: Pioneira, 2001. 203p.
- BACHELARD, G. *Epistemologia. (Trechos Escolhidos)*. Rio de Janeiro: Zahar, 1983.
- BACHELARD, G. *A formação do espírito científico*. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.
- BALDINO, R. R. Cálculo Infinitesimal: passado ou futuro?. *Temas e Debates*, Blumenau, v.8, n.6, p.5-21, 1995.
- BALDINO, R. R. Infinitésimos: quem ri por último?. *Boletim GEPEN*, Rio de Janeiro, n.36, p.69-82, 2000.
- BALDINO, R. R.; CABRAL, T. C. B. Concepções infinitesimais na matemática. Rio Claro: Departamento de Matemática/IGCE/UNESP, 2000. (Relatórios Internos, 56/00)
- BALDINO, R. R.; MILANI, R. The theory of limits as an obstacle to infinitesimal analysis. In: ANNUAL CONFERENCE OF INTERNATIONAL GROUP OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 26., 2002, Norwich. *Proceedings...* Norwich: UEA, 2002. v. 3, p. 345-52.
- BROUSSEAU, G. *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer, 1997.
- CAUCHY, A. *Analyse Algébrique [Algebraic Analysis]*. Paris: De l'Imprimerie Royale, 1821. Reimpresso por Jacques Gabay, 1989.
- CORNU, B. *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*. 1983. Tese (Doctorate de Toisième Cycle de Mathématiques Pure) – Université Scientifique et Médicale de Grenoble, Grenoble, 1983.
- CORNU, B. Limits. In: TALL, D. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer, 1991. p. 153-166.

DUNFORD, N.; SCHWARTZ, J. T. *Linear Operators*. New York: Interscience Publishers, 1964. v.1. p.6-7.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. 3.ed. Campinas: Editora da UNICAMP, 2002.

FRID, S. Three approaches to undergraduate calculus instruction: their nature and potential impact on students' language use and sources of conviction. In: DUBINSKY, E.; SHONFELD, A. H.; KAPUT, J. (Org). *CBMS Issues in Mathematics Education*. Providence: MAA, 1994.v.4, p. 69–100.

GOLDENBERG, M. *A arte de pesquisar*. 2.ed. Rio de Janeiro: Record, 1998. 107p.

HALMOS, P. R. *Teoria ingênua dos conjuntos*. São Paulo: Polígono; EDUSP, 1970. 116p.

HARNIK, V. Infinitesimals from Leibniz to Robinson: time to bring them back to school. *The Mathematical Intelligencer*. v.8, n.63, p.41-7, 1986.

HARTHONG, J. L' analyse nonstandard. *La Recherche*, v. 14, n. 148, 1194-1201, 1983.

KEISLER, H. J. *Elementary Calculus: an infinitesimal approach*. 2nd ed. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1986.

LINCOLN, Y. S.; GUBA, E. G. *Naturalistic inquiry*. London: Sage Publications, 1985. 416p.

LINDSTROM, T. A set of hyperreals. In: CUTLAND, N. (Ed.). *Nonstandard Analysis and its Applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 1988. p. 1-105. (London Mathematical Society. Student Texts, 10).

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU, 1986. 99p.

MILANI, R. Concepções infinitesimais em um curso de Cálculo. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2001, São Paulo. *Anais ...* São Paulo: PUC, 2001. p. 389-394.

PINTO, J. M. S. *Métodos infinitesimais de análise matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2000.

REGO, R. M. *Uma abordagem alternativa de ensino de cálculo utilizando infinitésimos*. 2000. Tese (Doutorado em Educação) – Departamento de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2000.

SAD, L. A.; TEIXEIRA, M. V.; BALDINO, R. R. Cauchy and the problem of pointwise convergence. *Archives Internationales D'histoire Des Sciences*, Liège, Bélgica, v.52, n.148, p.1-32, 2002.

SIERPINSKA, A. On some difficulties in learning limits: a case study. *Seminaire de didactique des mathematiques et de l'informatique*, Grenoble, 1983.

SIERPINSKA, A. Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Paris, v.6, n.1, p.5-67, 1985.

SIERPINSKA, A. Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, Netherlands, v.18, p.371-97, 1987.

STEFFE, L. P.; THOMPSON, P. W. Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In: LESH, R.; KELLY, A. E. (Ed.). *Handbook of research data design in mathematics and science education*. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 2000. p.267-307.

SULLIVAN, K. The teaching of elementary calculus using the nonstandard analysis approach. *The American Mathematical Monthly*, Washington, v.83, p.370-5, 1976.

STROYAN, K. D.; LUXEMBURG, W. A. J. *Introduction to the Theory of Infinitesimals*. New York: Academic Press, 1976.

SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com Geometria Analítica*. 2.ed. São Paulo: Makron Books, 1994. v.1.

TALL, D. O. Intuitive infinitesimals in the calculus. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 4., 1980, Berkeley. *Proceedings...* Berkeley: University of Berkeley, 1980, p.170-6.

TALL, D. O. Elementary axioms and pictures for infinitesimal calculus. *Bulletin of the IMA*, v.18, p.44-8, 1982.

TALL, D. O. Concept image and concept definition. In: DOORMAN, J. L. M. (Ed.). *Senior Mathematics Education*. Utrecht: OW&OC, 1988. p.37-41.

TALL, D. O.; SCHWARZENBERGER, R. L. E. Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, Derby, n.82, p.44-9, 1978.

TALL, D. O.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, Netherlands, n.12, p.151-69, 1981.

VINNER, S. The role of definitions in teaching and learning. In: TALL, D. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer, 1991. p. 65-81.

ANEXO

TRANSCRIÇÃO DOS ENCONTROS DE CÁLCULO INFINITESIMAL

1º Encontro – 04/04/01

Este encontro ocorreu no laboratório didático da Física e teve uma duração média de 1 hora e trinta minutos. Em termos gerais, o encontro teve três momentos: discussão sobre infinitésimos; cálculo de derivadas das funções x^2 , x^3 e $2x$, através da abordagem infinitesimal; utilização do software Corel Draw para interpretar graficamente o zoom infinito e os infinitésimos.

As principais atividades ocorridas no primeiro encontro foram:

- Investigação inicial sobre a idéia que os alunos tinham de infinitésimo.
- Questionamento: 0,999... ____ 1. Menor? Igual?
- Interpretação da definição: *Infinitésimo é um número menor que qualquer número real positivo.*
- Apresentação do conjunto dos números hiper-reais e seus elementos.
- Cálculo de algumas derivadas de funções polinomiais. Os alunos foram ao quadro resolvê-las.
- Apresentação da nomenclatura que seria utilizada neste encontro e se fosse necessário nos posteriores.
- Visualização dos infinitésimos utilizando o zoom do software Corel Draw, na situação de uma reta tangente à curva x^2 .

Apresento, agora, os detalhes destas principais atividades.

1. Investigação inicial sobre a idéia que os alunos tinham de infinitésimo.

Depois de explicar os objetivos de estarmos reunidos, coloquei as seguintes perguntas: “Vocês já ouviram falar em infinitésimo? Vocês lembram de alguma palavra, frase ou figura que esteja relacionada com infinitésimo?” As idéias lembradas foram:

Lina – Ouvi relacionado à infinitesimal. Pontos muito pequenos, que seriam quase desprezíveis.

Lugo - Pontos infinitamente pequenos.

Mino - Fractal, no sentido de pontos muito pequenos, que podem ser desprezíveis em alguns cálculos. Infinitésimo é uma coisa que tende ao unidimensional. Ele vai diminuindo tanto que perde a dimensão. Você pode desprezar dependendo do seu ponto de vista, dependendo de onde você está olhando.

Nanda – Ouvi relacionado a dízimas. Na dízima, tem sempre números se repetindo ou não. Você sempre vai colocar um número. Até o infinito. Nunca acaba. Infinito, infinitésimo.

2. Questionamento: 0,999... ____ 1. Menor? Igual?

Logo depois das primeiras idéias sobre infinitésimo serem apresentadas, a discussão girou em torno da seguinte pergunta que fiz: “0,999... em relação ao 1. É menor? É igual?” As respostas foram as seguintes:

Mino e Lina - São bem próximos.

Lugo - Mas 0,9... é um pouquinho menor que 1. Por menor que seja [a diferença entre eles], o 1 é maior que ele.

Nanda - Se você for arredondar, nos cálculos, se for olhar só para as reticências, você diz que é 1.

Raquel - Mas e se você não for arredondar? Na sua frente está o 0,999... e o 1, você os liga com um sinal de maior, menor ou igual?

Nanda - Se for assim, eu diria que o 1 é maior que 0,9...

Raquel, para Mino e Lina - O que vocês acham?

Mino - Eu também. 0,9... é menor que 1.

Lina - Aproximadamente igual a 1.

Raquel - Mas se é aproximado, então ...

Nanda - É, então não é igual.

Lina - É, não é igual.

Lugo - Se não precisar de precisão, você escreve que é igual a 1, para facilitar o entendimento, o cálculo, para arredondar.

A partir deste momento, disse que havia uma teoria que sustentava estas respostas. Apresentei os termos *Cálculo Infinitesimal* e *Análise Infinitesimal* em detrimento ao curso que os alunos estariam fazendo com a Profa. Miriam e à *Análise Real*.

3. Interpretação da definição: *Infinitésim* é um número menor que qualquer número real positivo

Apresentei as seguintes idéias de infinitésimo:

Raquel - Infinitésimo é um número. Um número muito próximo de zero. Um número infinitamente próximo de zero. Agora, o que vocês acham da seguinte frase: “Infinitésimo é um número que é menor que qualquer número real positivo”. Dá para imaginar? Vocês conseguem um exemplo de infinitésimo?

Não tinha reparado, neste encontro, que a definição acima era de um infinitésimo positivo. O correto, se quisesse me referir a todos infinitésimos, era dizer que “Infinitésimo é um número cujo módulo é menor que qualquer real positivo.”

Mino - É difícil definir um padrão para infinitésimo, pelo o que eu entendi. É difícil de imaginar.

Lugo - Se a gente imagina um número bem pequeno, 0,0000...1, sempre dá para colocar um número, com uma casa decimal a mais [um zero a mais antes do 1] que ele vai ser menor ainda.

Nanda - Que ele vai ser um infinitésimo.

Mino - Sempre dá para diminuir.

Raquel - Por menor que eu pegue um número real, sempre posso pegar outro menor, a metade, por exemplo.

Lugo - É. Ele pode chegar bem mais perto de zero, mas não é o zero. Então ainda dá para se dizer que tem números menores.

Raquel - Mas e o zero? Ele poderia ser um infinitésimo?

Lina - Zero é o elemento neutro, não é?

Raquel - Mas ele é um número, né?

Concordam.

Raquel - Então vamos ver se ele se encaixa na definição que eu dei?

Repito a frase.

Lina - Menor que zero? Positivo?

Lugo - O zero é menor que todos os números reais positivos, sim. Porque o zero não é nem positivo, nem negativo, então... [não conclui].

Lina, enquanto Lugo falava - Não tem.

Nanda - Depois dele...

Lina - Depois dele, vêm os negativos.

Raquel - Tudo bem. Então, o que concluímos? Infinitésimo é um número menor que qualquer real positivo. O zero se enquadra nesta definição?

Lina - Não. O zero é o menor.

Mino - Será que o zero ele não transpõe a barreira dos positivos?

Escrevo a definição no quadro.

Raquel - Pensem em todos os reais positivos. O zero está incluído aí ou não? O zero é positivo?

Lugo - Não é positivo nem negativo.

Lina - Ele é neutro.

Raquel - Então, o zero não está dentro dos números reais positivos?

Dizem que não. Mino não se manifesta.

Raquel - O zero pode ser um número menor que qualquer real positivo?

Lina - Sim.

Raquel - Pode?

Nanda - Se ele não tem um sinal definido, então pode.

Raquel, dirigindo-me a Mino - O que você acha? O zero pode ser um infinitésimo?

Mino - Acho que ele não entraria nessa classificação.

Raquel - Vamos supor que esta é a definição de infinitésimo.

Repito a frase.

Mino - Se ele [infinitésimo] é positivo, então ele é maior que zero, não é igual a zero. Então eu acho que ele [zero] não entraria nessa classificação.

Raquel - Vamos ver. Vamos substituir no lugar de infinitésimo o zero para ver se fecha? Zero é um número que é menor que qualquer número real positivo.

Todos concordaram, balançando a cabeça positivamente, exceto Mino. Falo que o zero é o único infinitésimo real. Quando ia começar a falar sobre os outros infinitésimos existentes, Mino me interrompe.

Mino - Tá, o zero é um infinitésimo. Então aquele 0,9999.. seria o 1.

Raquel - Por quê?

Mino - Porque se infinitésimo é um número que é menor que qualquer número real ... Ele é menor que qualquer número real. O que é maior que 0,9999...? Seria o 1.

Nanda - O mais próximo seria o 1.

Raquel - Logo depois dele pode ser o 1. Mas ...

Mino - Ele não se encaixa então? Eu não poderia afirmar que ele é igual a 1?

Raquel - Porque o zero é um infinitésimo?

Mino - É.

Nanda - Não poderia se dizer que o 0,999.. é um infinitésimo?

Mino - É.

Raquel - Ah, é isso que você perguntou?

Voltando-me para Mino.

Mino - Isso.

Leio a definição com 0,999... no lugar da palavra infinitésimo.

Lina - Não. Tem o zero.

Lugo dá outros exemplos, e todos concordam, inclusive Mino, rindo, que 0,999... não é um infinitésimo.

Parece que não foi bem isso que Mino queria perguntar. Não sei se ele se sentiu constrangido e deixou que a pergunta de Nanda fosse a dele. Neste encontro, não entendi o que Mino havia dito.

4. Apresentação do conjunto dos números hiper-reais e seus elementos.

Continuei falando dos infinitésimos.

Raquel - Infinitésimos são números muito próximos de zero. Não posso localizá-los na reta real, apenas o zero. É preciso um conjunto maior. Esse conjunto é o dos números hiper-reais.

Eles riem, e Lina diz que nunca tinha ouvido falar.

Raquel - Fazem parte deste conjunto, os números reais, os infinitésimos e os números infinitos, que são maiores que qualquer número real positivo. O contrário do infinito é o infinitésimo.

Lina – Nossa! São palavras tão parecidas. Eu acho que até confunde, por exemplo no caso do $0,99\dots$, você pensa que é um infinito, então é infinitésimo. Dá para confundir, né? Não vai acabar nunca o 9.

Raquel – Uma coisa é um número infinito e o infinitésimo e outra é o processo de ir para o infinito e para zero.

Não havia entendido o que Lina havia dito. Poderia ter falado da diferença entre os infinitos que ela estava mencionando. Por um lado, você repete o nove infinitas vezes. Por outro, um número infinito é maior que qualquer real. Ainda mais que o infinitésimo na questão do $0,99\dots$ está na diferença entre $0,99\dots$ e 1, e não que $0,99\dots$ é infinitésimo.

Retomei o que estava falando.

Raquel – Então, um número infinito positivo é maior que qualquer real positivo.

Lugo - Isso é teórico, porque na prática você sempre vai conseguir um número maior.

Raquel – Tem vários números infinitos.

Após um silêncio eles começam a rir.

Lina - Vários?

Raquel – Sim.

Lina – Se tiver dois, eu sempre posso dizer que um é maior que outro.

Raquel - Sim, por isso que eu posso comparar números infinitos. Tem um número infinito que é maior que outro. Mas os dois são maiores que quaisquer números reais positivos.

Eles começam a rir.

Nanda - Tem que viajar um pouco!

Raquel - É algo novo para vocês, mas tudo é provado de forma rigorosa. É aceito pela Matemática.

Lugo pede exemplo de um número infinito, mas preferi acabar de caracterizar o conjunto dos números hiper-reais antes de falar em seqüências. Falei sobre os números que pertenciam às mônadas, como sendo infinitamente próximos de cada número real e que a diferença entre eles e o número real era um infinitésimo. Dei o exemplo do número 2.

Raquel – Quem são esses números que estão infinitamente próximos do 2?

Lina – Seria o $1,999\dots$?

Lugo - Seria o $2,000\dots1$?

Raquel – Isso. São números cuja diferença entre eles e o 2 é um infinitésimo. É chamada a mônada do número 2.

Lugo – Como?

Repito e eles riem novamente.

Mino - É totalmente novo!

Raquel – Vamos nos concentrar na idéia de infinitésimo. Eu não posso marcar ele na reta real. O único que infinitésimo que eu posso marcar ...

Os alunos – Zero.

Introduzi, através de exemplos (dA, dV, dW, dx, dy), a notação de infinitésimo que seria utilizada nos encontros. Chamei-os de elementos infinitesimais ou acréscimos infinitesimais às grandezas (acrécimo de área, de volume, de trabalho, ...). Desenhei a reta real e marquei um ponto x . Pedi para localizarem o ponto $x+dx$. Queria ver se eles percebiam que só poderia fazer isso se dx fosse 0.

Lina – Muito próximo de x . Coladinho no x .

Nanda e Lugo – Vai estar um pouquinho depois do x , mas é difícil marcar.

Mino – É o próprio x .

Raquel, para Mino – Por quê?

Mino – Como ele não pode ser marcado na reta real, ele é o próprio x .

Raquel - Ou seja, o dx vai ser quem?

Os alunos – Zero.

Raquel – Se eu quiser marcar $x+dx$, com dx diferente de zero, a reta não pode ser a real. Tem que ser a reta hiper-real.

Falei do zoom infinito, do aproximar infinitamente do ponto, desenhando a seguinte figura.

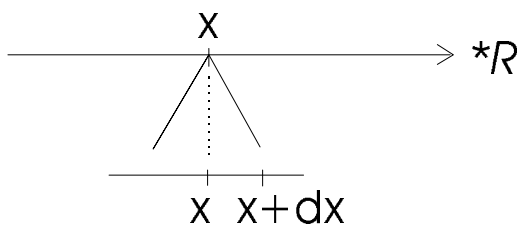


Figura 1.1

Lina – Que zoom, hein?

Esta é a idéia. Para enxergar $x+dx$, precisamos de um “belo zoom”!

Chamamos dy de acréscimo infinitesimal à variável y , e o escrevemos como diferença entre os valores de $f(x)$, após o acréscimo dx a x , ou seja, $dy=f(x+dx)-f(x)$. Por partes, com a ajuda dos alunos, desenhei a figura abaixo, que representa o resultado do zoom para enxergar tais acréscimos.

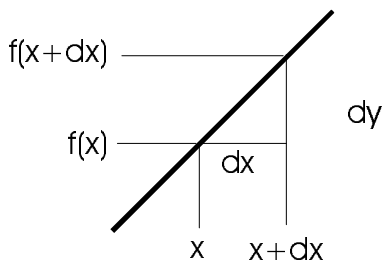


Figura 1.2 – figura dos acréscimos

Raquel - A partir dessa variação em y , a gente vai calcular várias derivadas.

5. Cálculo de algumas derivadas de funções polinomiais

Mostrei aos alunos como era o método de calcular a derivada, através da função $f(x)=x^2$. A cada passo da resolução, pedia a ajuda deles. O procedimento foi o seguinte:

$$y=x^2$$

$$dy=(x+dx)^2-x^2$$

$$dy=x^2+2xdx+dx^2-x^2$$

$$dy=2xdx+dx^2$$

$$dy=dx(2x+dx)$$

$$\frac{dy}{dx}=2x+dx$$

$$y'=re\left[\frac{dy}{dx}\right]=re[2x+dx]=2x$$

Durante a resolução, perguntei sobre os acréscimos.

Raquel – O que significa dx^2 ?

Mino – Acréscimo infinitesimal a x .

Raquel – É o mesmo que dx , então?

Mino – Não.

Lugo – É o quadrado do acréscimo infinitesimal a x .

Raquel – E o que significa $d(x^2)$?

Lina – É o acréscimo no x^2 .

Raquel – Dizemos que dx^2 é infinitésimo de 2ª ordem e dx é de 1ª ordem.

Mais adiante no procedimento, defini a derivada.

Raquel – Chamo de derivada da função, $f'(x)$, a parte real do desenvolvimento $\frac{dy}{dx}$.

Raquel – Quem é $\frac{dy}{dx}$?

Lina - $2x+dx$.

Raquel - Quem é a parte real? O que significa parte real? É um x , o 2, o x^2 , um número real. Falamos em parte real e infinitesimal.

Lugo – A parte real é o $2x$.

Os outros concordam.

Raquel – Isso. Porque x é real, 2 vezes um real ...

Os alunos – ... é real.

Raquel – dx é infinitésimo. Então a parte real é ...

Os alunos - ... $2x$.

Lugo – Isso é por causa que dx é um número tão pequeno que dá para aproximar para zero, é isso?

Raquel – Veja que eu não falei em aproximar para zero...

Mino, interrompendo-me – Na reta dos reais ele é zero.

Raquel - Isso, se eu pular para os reais ...

Lina, interrompendo-me – Seria como número imaginário [complexo]? Você tem a parte real e a imaginária.

Raquel – Isso. Exatamente. Mas vejam que eu não falei em fazer dx igual a zero, mandar ele para sei lá onde [risos]. Ele está aí, eu só disse que a minha derivada é $2x$.

Antes de passar para outro exemplo, disse que outra forma de calcular a derivada é pelo limite. Os alunos disseram que o professor de Física já havia adiantado alguma coisa sobre isso. Lina acrescentou que daria para fazer pela fórmula (regra do tombo, baixar o expoente ...).

Raquel – De qualquer forma, a Miriam vai tratar mais tarde disso.

Lugo calcula a derivada para x^3 . Como o desenvolvimento da derivada anterior ficou no quadro, Lugo se baseia no que estava escrito, e faz o seguinte desenvolvimento.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^3 \\
 dy &= f(x+dx) - f(x) \\
 dy &= (x+dx)^3 - x^3 \\
 dy &= (x^2 + 2xdx + dx^2)(x+dx) - x^3 \\
 dy &= x^3 + 2x^2 dx + x dx^2 + x^2 dx + 2x dx^2 + dx^3 - x^3 \\
 dy &= 3x^2 dx + 3x dx^2 + dx^3 \\
 \frac{dy}{dx} &= 3x^2 + 3x dx + dx^2
 \end{aligned}$$

Lugo - Agora é só pegar a parte real.

Raquel – Isso. Então a derivada $f'(x)$...

Lina – É onde não tem dx .

Nanda - Vai dar $3x^2$.

Lugo – É que vai multiplicar aqui [$3x dx$] e não vai dar real...

Raquel – Vamos ver: x é real, $3x$ continua real e número real vezes infinitésimo é infinitésimo. Nós não entraremos em detalhes sobre as operações com números hiper-reais...

Lugo – ... então tira isso daqui [$3x dx$].

Raquel – Então vai fora. Não é real.

Lugo – Então isso aqui [dx^2] também não.

Raquel – É. Infinitésimo ao quadrado é infinitésimo.

Lugo – Então fica $3x^2$.

Lugo riscou os termos da parte infinitesimal e escreveu a resposta:

$$f'(x) = 3x^2$$

6. Apresentação da nomenclatura

Após a resolução de Lugo, entreguei uma folha com os dizeres abaixo, afim de introduzir a nomenclatura que estaríamos utilizando nos encontros.

1º ENCONTRO DE CÁLCULO - 04/04/01

Chamamos de *derivada* da função f , a parte real do quociente infinitesimal $\frac{dy}{dx}$.

Notamos da seguinte forma: $f'(x) = \text{re}\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Dizemos que a derivada está *infinitamente próxima* deste quociente. Em notação, $\frac{dy}{dx} \approx f'(x)$. Isso significa que a diferença entre eles é um infinitésimo, ou seja, $\frac{dy}{dx} - f'(x) = E_f$. Assim, chamamos este quociente de *quase-derivada*.

Chamamos de *diferencial* da função f , $f'(x)dx$ e de *quase-diferencial* de f , dy , que está infinitamente próximo da diferencial. Em notação, $dy \approx f'(x)dx$. Isso significa que a diferença entre eles é um infinitésimo, ou seja, $dy - f'(x)dx = E_f dx = \mathcal{E}_f$.

A derivada de uma função f em um ponto P é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto P.

Enquanto ia lendo para eles, eu dava algumas explicações baseadas nos exemplos que estavam no quadro.

Raquel – Se $\frac{dy}{dx}$ está bem próximo de $f'(x)$, qual a diferença entre eles?

Lugo – dx .

Raquel – Que é um infinitésimo.

Lugo, falando baixo - Na reta real, dá para dizer que é um ponto só.

Raquel – Quando tenho duas coisas infinitamente próximas, quer dizer que a diferença entre elas é um infinitesimal.

Depois de localizar, com o auxílio dos alunos, nos exemplos da derivada de $y=x^2$ e $y=x^3$, os elementos e propriedades que estavam sendo introduzidos, Lina foi ao quadro para calcular a derivada de $y=2x$. Eu havia apagado os cálculos anteriores.

Ela diz que não lembra como começava. Falei que era a partir da definição de dy . Ela escreve $dy=2x+dx$. Peço para que ela escreva a definição de dy , antes de aplicá-la à função. Escreve $dy=f(x)+dx$. Os colegas não falam nada. Desenho novamente, com o auxílio dela, a figura dos acréscimos (Figura 1.2). Desta vez não indico quem é dx e dy . Queria ver se apenas a figura fazia ela lembrar da definição. Ela escreve $dy=f(x+dx)$.

Raquel – Então, dy é este valor aqui $[f(x+dx)]$?

Mino – Menos $f(x)$.

Ela escreve, então, o que faltava e confere no desenho. Salientei que dy era uma diferença. Lina continua sua resolução.

$$dy=f(x+dx)-f(x)$$

$$dy=2(x+dx)-2x$$

$$dy=2x+2dx-2x$$

$$dy=2dx$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2dx}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=2$$

Este desenvolvimento foi bastante demorado. Por exemplo, Lina não sabia o que fazer da segunda para a terceira linha. Aceitou a sugestão dos colegas de multiplicar por 2. Feito isto, Lina pára novamente e Nanda diz para dividir por dx .

Raquel – Este é o último passo ou tem alguma coisa para fazer?

Mino – Teria que passar para o número real, mas...

Nanda - Tem que passar para o número puro.

Mino – Mas como já foi cancelado o infinitesimal, acho que já é a derivada.

Lugo - A derivada é uma função constante.

Mino - $f'(x)$ já é igual a 2.

Raquel – Isso! Como a gente fez nos casos anteriores?

Escrevi $f'(x)=re[2]$.

Raquel – Qual é a parte real do número real?

Lina – O próprio número.

Raquel – Antes tínhamos a quase-derivada igual à derivada mais um infinitésimo. Mas neste caso conseguimos direto a quase-derivada igual a derivada. Quanto vale o infinitésimo neste caso?

Lina – Zero.

Mino - Aí está provado que o zero realmente é infinitésimo.

Ressaltei que o diferencial ficou igual ao quase-diferencial também, que eles reconheceram como $2x dx$.

Raquel – O que ocorreu neste caso de especial que a derivada ficou igual a quase-derivada e o diferencial igual ao quase-diferencial?

Lugo – O expoente do x é 1.

Raquel – Isso. Quando a função for linear, a derivada será igual a quase-derivada e o diferencial igual ao quase-diferencial.

7. Visualização dos infinitésimos utilizando o zoom do software Corel Draw

Depois dos cálculos, passamos para a interpretação geométrica da derivada. Fizemos uso da ferramenta *zoom* do software Corel Draw para visualizar os infinitésimos. O que aparecia na tela do computador era a figura da página a seguir. Primeiramente, analisamos a figura abaixo.

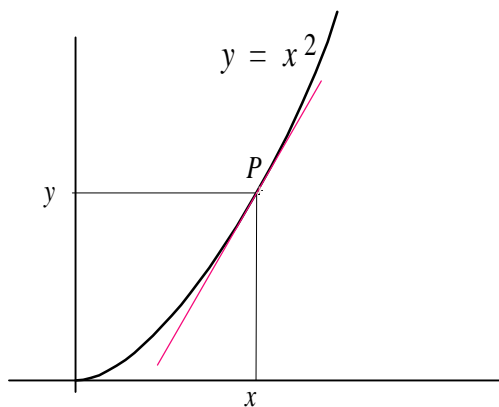


Figura 1.3

Expliquei que os eixos desenhados eram hiper-reais. Depois de eles terem recordado os elementos que faziam parte do conjunto dos hiper-reais, pedi para que os localizassem na figura. Lina apontou para a origem do sistema de eixos, indicando a localização dos infinitésimos (“próximos do zero”, ela disse).

Raquel - Os infinitos positivos?

Lugo – Bem depois do ar condicionado [que ficava à direita da tela do computador].

Raquel – Os infinitos negativos? No lado contrário dos positivos, né? Os reais, é o x , por exemplo. E as mônadas, por exemplo do x ?

Lugo – Bem pertinho do x .

Raquel - Qual a diferença entre um elemento da mônada do x e o x ?

Lina – dx .

Raquel - Isso. Um infinitésimo. Quem faz parte da mônada do zero?

Lugo – Infinitésimos.

Raquel - Por quê?

Os alunos - São números bem próximos do zero.

Raquel – Muito bom.

Lugo – Do lado positivo, né? Porque do lado esquerdo, não tem números na mônada do zero, só se eles forem negativos.

Raquel – Sim, são os infinitésimos negativos.

Identificamos o que tínhamos na primeira figura: parábola e reta tangente a ela no ponto P .

Raquel – Dou um acréscimo infinitesimal dx a x . Vocês estão enxergando?

Risos.

Mino – Tem que dar um zoom.

Raquel – Exatamente. Por isso o Corel Draw é útil, pois tem a ferramenta *zoom*.

Com o acréscimo dado a x , resulta que y também tem um acréscimo. Perto do ponto P , dei sucessivos zooms até visualizar o triângulo dos acréscimos (dx, dy e dP), como mostra a figura abaixo.

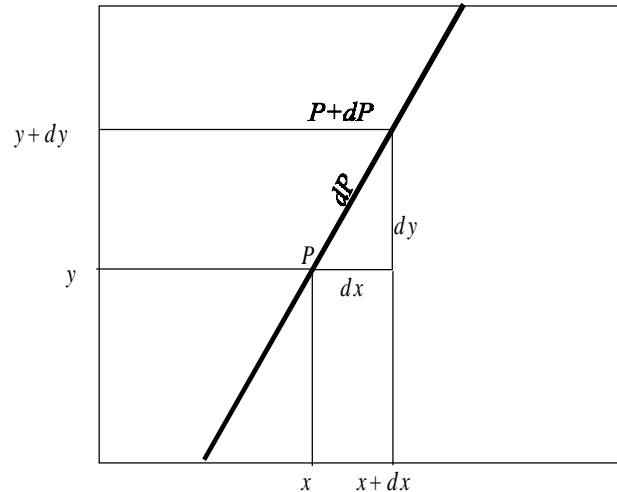


Figura 1.4-primeiro zoom infinito

A figura mostra que estamos muito perto do ponto P .

Raquel – Quem é $P+dP$?

Os alunos – Acréscimo a P .

Raquel – Ele é ponto da curva ou da reta tangente?

Lina e Mino – Da curva.

Lugo – Da tangente.

Por causa desta dúvida, resolvi retomar, perguntando como havia surgido o ponto $P+dP$. Eles dizem que é ponto com coordenadas $x+dx$ e $y+dy$. Pensando que a questão fosse resolvida ao explicitar coordenadas, voltei a perguntar se era ponto da curva ou da tangente. Apenas Lugo respondeu e disse que o ponto estava na tangente.

Raquel - Por quê?

Lugo – Se essa reta está tangenciando a curva [desenhou com o dedo a parábola passando só por P], a gente está fora da curva. A derivada é a inclinação da reta tangente à curva. Então o ponto $P+dP$ está na tangente.

O desenho estava representando para Lugo apenas a reta tangente desenhada. As coordenadas de $P+dP$ não diziam, para ele, que o ponto era da curva.

Raquel – $P+dP$ está na tangente. Mas, então, a gente não tem mais uma reta tangente, e sim secante. Por que qual é o ponto de tangência?

Nanda e Mino – É o ponto P .

Raquel – Se o ponto $P+dP$ também está na tangente...

Lugo – Mas o ponto $P+dP$ não é ponto de interseção com a curva.

Raquel – Ah, o ponto $P+dP$ só está na tangente?

Lugo – Sim.

Ele, realmente, só enxergava a reta, e as coordenadas de $P+dP$ não lhe diziam sobre ser um ponto da curva. Joguei a bola para os colegas.

Raquel – É isso?

Eles disseram que não estavam conseguindo visualizar. Escrevemos dy em termos de uma diferença.

Raquel – $f(x+dx)$ é a imagem que consegui depois do acréscimo à curva ou à reta tangente?

Os alunos – Curva.

Raquel – Depois subtraí a imagem de x , que era um ponto da ...

Nanda – Parábola.

Raquel - Então essa diferença é da curva ou da reta tangente?

Os alunos - Da curva.

Raquel – Então, se tenho y que é da curva e dy que é acréscimo na curva, $P+dP$ é ponto de quem?

Lina e Mino – Da curva.

Mino – É que um está em função do outro, então é ponto da curva mesmo.

Não voltei a perguntar a Lugo sobre isso.

Raquel – Nesta figura, a reta tangente está coincidindo com a curva, por quê?

Lugo – Porque você se aproximou tanto da curva que acabou ficando igual.

Lina – Chega a ser um pedaço da curva.

Raquel – Mas a tangente toca a curva num único ponto, então se dermos um zoom no ponto $P+dP$ vamos ter que ver a separação, né?

Lina – É pois chegaremos mais perto ainda.

Raquel – Antes de ver a separação, onde estão os eixos, se eu estou muito perto do ponto P ?

Lina – Bem longe.

O resultado do zoom infinito perto do ponto $P+dP$ é a figura a seguir.

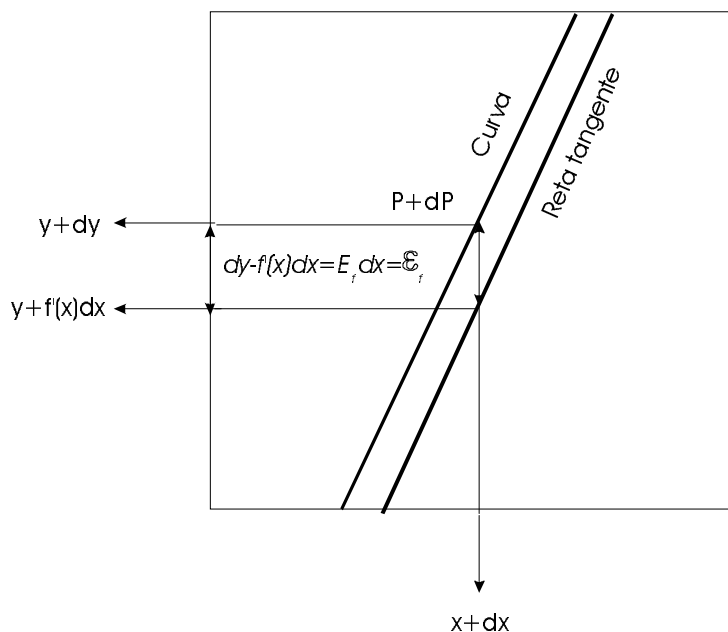


Figura 1.5-segundo zoom infinito

Aparecem, nesta figura, duas retas paralelas, pois estamos muito perto do ponto $P+dP$. Os alunos justificaram que, na verdade, elas não são paralelas, pois elas se cruzam em P , que está muito longe. Novamente, eles localizaram os eixos como estando infinitamente longe do desenho. A próxima discussão girou em torno de saber o porquê que a diferença entre a reta e a curva era dada pela expressão $dy - f'(x)dx$. Lina, apontando para o desenho, disse que era a diferença entre $y+dy$ e $y+f'(x)dx$. Perguntei, então, por que a ordenada do ponto da reta tangente era dada por $y+f'(x)dx$.

Lugo – y é a ordenada de P e $f'(x)dx$ é o quanto deslocou no eixo y ...

Lina - Não mas o que deslocou é dy .

Nanda – $f'(x)dx$ é o resultado dos acréscimos em x e em y .

Deixei eles discutindo.

Mino – Você deu zoom até encontrar a diferença entre a reta e a curva. No caso, quando você deriva, para passar para o número real, você tira aquela parcela. Não seria essa diferença aquela parcela?

Lina concordou com ele. No momento, não consegui compreender o que Mino havia dito. Ele estava quase certo, achando a relação entre o que havíamos feito algebricamente no quadro e o que estávamos fazendo geometricamente no computador. Mino estava pensando que a diferença em questão era o que faltava para derivada e a quase-derivada serem iguais, mas,

na verdade, era a diferença entre diferencial e o quase-diferencial. Lugo e Nanda não haviam compreendido também o que Mino e Lina tinham dito. Olhando a gravação, dá para notar que Mino estava lendo a folha que entreguei sobre as nomenclaturas e a partir daí deu sua resposta. Mas isso não garantiu que ele soubesse interpretar geometricamente.

Sugeri que eles se baseassem na definição geométrica de derivada: a derivada de uma função f em um ponto P é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto P . Nanda tenta aplicar esta definição, localizando no desenho um cateto oposto sobre o adjacente.

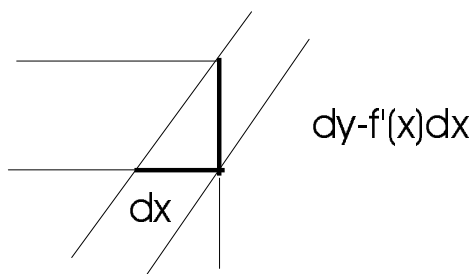


Figura 1.6

Perguntei aos alunos como era formado o ângulo que determinava os catetos do triângulo, no cálculo do coeficiente de uma reta. Responderam que era formado pela própria reta e uma paralela ao eixo x .

Raquel – O ângulo deste triângulo, é formado por quem?

Perceberam que estavam olhando para a “reta” de cima (a curva) e não para a de baixo (a tangente). Foi difícil visualizar o triângulo correto no desenho do segundo zoom. Portanto, na figura do primeiro zoom infinito, forcei o aparecimento da reta tangente.

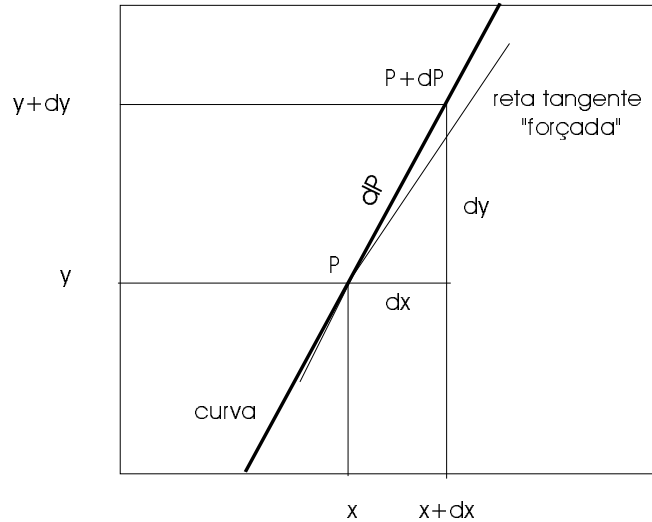


Figura 1.7

Os alunos localizaram a diferença procurada neste desenho. Mas mesmo assim, a resposta não veio. Passei então para o caso finito, desenhando para eles a figura abaixo.

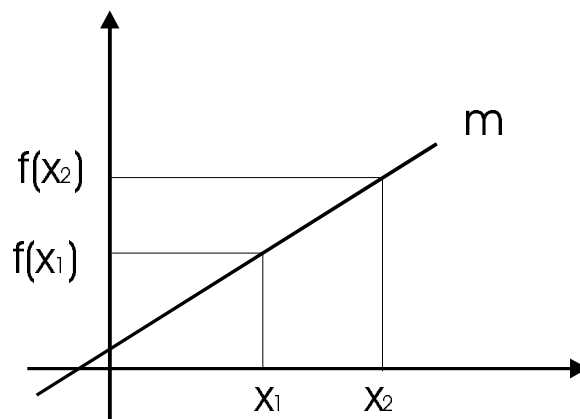


Figura 1.8

Facilmente, eles escreveram $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = m = f'(x)$. Chamei a atenção de que os acréscimos, neste caso, eram reais e que não poderíamos escrever com a notação de infinitésimo. Escreveram, então, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. Pedi para que determinassem o cateto oposto: $\Delta y = f'(x)\Delta x$. Eles notaram a semelhança com $f'(x)dx$, e reconheceram esta medida na figura “forçada” do primeiro zoom, lembrando que os acréscimos eram infinitesimais.

Raquel – Então quanto vale desde a origem?

Nanda - Vale a medida até o ponto P e mais o que foi calculado.

Raquel - Ou seja...

Lugo – $y + f'(x)dx$.

Raquel - Ficou difícil de enxergar aqui [2º zoom]?

Lugo - Confunde qual que é a curva e qual que é a reta.

Nanda – Como a gente está tão próximo, percebe-se que a curva e a reta estão paralelas. Num plano maior, dá para ver que é a curva e a reta tangente. Aí, dá para deduzir que tem um triângulo retângulo. Não estamos acostumados com esta perspectiva. Mas saiu!

O resultado poderia ter saído mais facilmente se eu tivesse exibido o modo Aramado do Corel Draw.

Por fim, retomei a pergunta de Lugo sobre um exemplo de numero infinito. Falei de seqüências de números reais, de classes, utilizando o hiper-real $\langle n \rangle$. Lugo confundiu a seqüência (1, 2, 3, ...) com $1/x$ quando x é muito pequeno.

Lugo – Eu fiz confusão.

Lina – Acho que é mais fácil entender a idéia de infinitésimo do que de infinito.

Mino – Para mim, é o contrário. Por exemplo, se for aplicar no cotidiano, você pega um cronômetro. Ele não tem limite de casas para começar a marcar o tempo. Então ele nunca marcaria nada, ele sempre marcaria zero quando você ligasse ele. Ele nunca ia chegar ao próximo número.

Nanda - Ao próximo número real.

Mino - Isso sempre me incomodou. Sempre penso assim. Ligo meu cronômetro. Ele nunca marca nada. Sempre marca zero, porque ele nunca chega ao próximo. Se você não impuser limites às casas decimais ele nunca vai chegar ao próximo número.

Lembro do paradoxo da dicotomia de Zenão e digo a eles.

Mino – É exatamente isso. Se a gente for pensar assim, a matemática não admitiria espaço nem tempo.

Lina – Eu falei que é mais fácil o infinitésimo, pois ele está ali. Estou vendo o zero. Mas infinito, parece que eu nunca vou chegar.

Mino - Você tem uma referência.

Não retomei a confusão de Lugo com números infinitos.

2º Encontro – 11/04/01

Este encontro teve que se realizar numa sala onde não havia computador, pois o laboratório, onde o encontro iria acontecer, estava interdito, devido a veneno contra cupim. A reunião teve uma duração média de 1 hora e trinta minutos. Começamos o encontro combinando a respeito da data do próximo, pois na quarta-feira seguinte, no horário do encontro, haveria prova de Cálculo. Decidimos, então, nos encontrar depois da prova. Temi que estariam cansados, mas os alunos aceitaram sem problemas. As principais atividades ocorridas no segundo encontro foram:

- Revisão da regra da cadeia, assunto tratado nas aulas regulares no momento do encontro. Foi uma atividade de monitoria.
- Comparações entre as notações utilizadas na abordagem infinitesimal e no contexto do conceito de limite.
- Demonstração da regra da soma e da cadeia. As provas foram conduzidas por mim, mas com a colaboração dos alunos.
- Início do cálculo da derivada do seno, feito por um aluno.

Apresento, agora, os detalhes destas principais atividades.

1. Revisão da regra da cadeia

Como combinamos que uma revisão a respeito das aulas regulares poderia ser feita no início dos encontros, trabalhamos com a regra da cadeia, assunto atual das aulas regulares. Calculamos para 3 exemplos: $y = \sqrt{x^2 + x^3}$, $y = \sin(\sqrt{2x+1})$ e $y = \cos(x^3)\sqrt{2x}$. Nanda resolveu corretamente o primeiro, utilizando o método da substituição. O segundo exemplo foi resolvido por Mino, que como Nanda, utilizou a substituição por variáveis. Neste exemplo, Mino aplicou a regra da cadeia duas vezes. Na segunda vez, fez direto, sem explicitar a função em termos da nova variável. Ele não conseguiu explicar aos colegas o que havia feito, *agora eu me confundi*. Pedi para ele explicitar a função em termos da nova variável. Dessa forma, conseguiu dizer o que havia pensado.

Lina, antes de resolver o terceiro exemplo, avisou, “*eu não gosto desse método de letrinhas, porque eu me embanano toda*”. Lina se referia ao método da substituição. Apresentou, então, sua solução fazendo *a derivada da interna vezes a da externa*:

$$-\text{sen } 3x^2 \cdot \frac{1}{2} (2x)^{-1/2} \cdot 2$$

$$\frac{-3\text{sen } x^2}{\sqrt{2x}}$$

Entre as explicações que deu para o que havia feito, a partir de perguntas minhas, Lina disse que tinha uma multiplicação entre seno e $3x^2$ (inserindo o sinal de multiplicação na sua resposta), e que depois poderia passar o 3 para frente. Questionei-a a respeito de quando tem-se a função $y = \text{sen } x$, se o seno está multiplicando x . Pensou por um instante e riu, dizendo que não e que o que tinha era o seno do ângulo. Ao mesmo tempo, apagou o sinal de multiplicação que havia escrito. Resolvi fazer com que ela enxergasse o que havia feito, pedindo para Lugo resolver da sua maneira. Ele disse “*prefiro fazer pela substituição, para não confundir*”, contrastando com a opinião de Lina sobre este método.

Lugo resolveu corretamente, utilizando a regra do produto e depois a da cadeia, com o auxílio da substituição. Ao ver a resolução de Lugo, Lina notou que não havia usado a regra do produto. Pedi para ela refazer seus cálculos. Escreveu:

$$\cos x^3 \frac{1}{2} (2x)^{-1/2} + \sqrt{2x} \cdot -\text{sen } 3x^2$$

Sua dificuldade em calcular a derivada de uma função composta que envolve seno persistiu. Depois de algumas sugestões diretas¹ dos colegas, Lina apagou o que tinha escrito. Calculou novamente sem utilizar as substituições, concertando a resposta, *agora é que estou entendendo*.

$$-\text{sen}(x^3) \cdot 3x^2 \cdot \sqrt{2x} + \cos(x^3) \cdot \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

Nanda disse que havia utilizado o método da substituição, pois segundo ela, *o jeito direto é mais fácil de se complicar nas contas*. Lugo e Mino também se mostraram adeptos deste método. Lina, que achava que se complicaria com as “letrinhas”, preferiu o método direto, mas acabou aplicando-o incorretamente. Creio que as dificuldades que eles tiveram foram devido a estarem trabalhando com este assunto há apenas dois dias, em aula regular. Acredito que a prática auxilia muito nestes exercícios.

2. Comparações entre as notações utilizadas na abordagem infinitesimal e no contexto do conceito de limite

Aproveitando as notações que surgiram nos cálculos de derivada pela regra da cadeia, quis saber se lembravam da diferença entre essas notações na abordagem infinitesimal.

Raquel – Vocês notaram diferença entre o que a Miriam usou de notação e o que nós usamos no encontro passado?

Lina – É mesma coisa. Também usamos $\frac{dy}{dx}$ e $f'(x)$.

Raquel – Mas é mesma coisa?

Lugo e Mino – A Miriam desprezou o infinitesimal.

Lina – A gente fez considerando todo o infinitésimo. A gente pegou a parte real e o infinitésimo. A Miriam já pegou a parte real.

Raquel – A Miriam considerou as notações como iguais. Para nós também era a mesma coisa?

Eles respondem que não.

Lugo – O $\frac{dy}{dx}$ não era a quase-derivada?

Raquel – Sim, que é igual a ...

Lugo - A parte real mais a infinitesimal.

Raquel – Onde entra $f'(x)$ nessa história?

Todos - Era só a parte real.

Raquel – Então, com a Miriam estas notações são ...

Todos – Iguais.

Raquel - Ela não está enxergando $\frac{dy}{dx}$ como quociente de infinitesimais. E nós estamos considerando essas notações como ...

Todos – Diferentes.

Lugo – Isso não está em termos de limite, e este número [infinitésimo] está tão pequeno que a gente pode desconsiderar?

Raquel - Sim, usa-se o limite e se acaba com os infinitésimos.

¹ Chamo sugestão direta, aquela na qual se encontra a resposta. Por exemplo, *faça isso* ou *seu erro está aqui*.

Lugo – Dá para considerar que $\frac{dy}{dx}$ é aproximadamente, bem aproximadamente igual a derivada.

Raquel - É isso que a gente está fazendo aqui, com o símbolo \approx .

Lugo – Eu sei, mas como ela pegou a notação de quase-derivada e disse que era igual a de derivada, a parte infinitesimal é tão pequena que considerou que tende a zero, então tira esta parte e esses dois são iguais.

Raquel - Vocês acham que é igual?

Todos dizem que não.

Mino - Nos hiper-reais não.

Lina – Os infinitésimos existem.

Raquel – Vocês estarão vendo lá no curso de Cálculo algumas dessas diferenças. São correntes que trabalham com os mesmos conceitos, chegam aos mesmos resultados, mas de maneiras diferentes.

Nos exemplos trabalhados anteriormente, os alunos utilizaram e escreveram a regra abaixo, exceto Lina que preferiu o jeito “direto”.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Raquel – O que a Miriam comentou ontem sobre essa regra que aparece no livro? Ela até deu uma risadinha, lembram?

Lugo – Não pode cortar esses dois aqui [du com du].

Lina – Não é uma divisão. É só uma notação. Não está dividindo dy por dx , nem está multiplicando para você cortar [du com du].

Nanda – Para melhorar o entendimento, para você visualizar a derivada, para saber os cálculos que tem que fazer, qual o resultado final, você cortaria o du com o outro du . Você cancelaria, mas isso é um abuso.

Raquel – É um abuso?

Nanda - É, pois é uma notação.

Raquel – Mas para nós, aqui nos encontros, isso faz sentido, pois podemos dividir um infinitesimal por outro.

Lugo – É o que eu ia falar. No encontro passado, a gente não ia fazendo [desenvolvendo dy] e depois dividia tudo por dx ?

Raquel – Isso. Calculávamos dy e para achar a derivada, dividíamos por dx .

3. Regra da soma e da cadeia

Com o objetivo de ver se os alunos utilizam as definições que foram trabalhadas no encontro passado, e se sabem lidar com a diferença entre as notações, tentamos desenvolver a prova algébrica da regra da soma. A confusão e o esquecimento dos nomes pode aparecer, já que no encontro passado, introduzimos vários conceitos novos. Esperava que eles lembrassem da definição de quase-diferencial e de tomar a parte real da quase-derivada.

Escrevo no quadro a função soma e a sua derivada - o que queríamos provar.

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

$$h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Raquel – Como começávamos a calcular?

Lugo – Pega x mais um infinitésimo numa função ...

Mino – $f(x) + f(x+dx)$.

Lugo – Faz o mais o infinitésimo e substitui na função, menos a função.

Raquel – Tem um nome para isso aí?

Querida que falassem quase-diferencial de y ou acréscimo infinitesimal a y .

Os alunos comentam rindo que lembram de vários nomes.

Raquel - Por exemplo?

Falaram em *diferenciação*, *mônada* (Lugo disse: “Esse *mônada* aí foi novidade!) e *hiper-reais*. Disse que era normal esse momento de confundir nomes e mesmo não lembrar, já que era algo novo. Fiz uma associação a quando eles aprenderam o conjunto dos números complexos, pois era um conjunto novo, o que acarretaria a novos nomes. Aproveitando, Nanda lembrou de como foi estranho trabalhar com raiz quadrada de números negativos.

Raquel – Pois é, se vocês aceitaram que se podia fazer isso, por que não aceitar os hiper-reais?

Risos. Mino perguntou sobre a relação entre os complexos e os hiper-reais, já que os dois conjuntos englobavam os números reais. Desenhei o que ele disse:

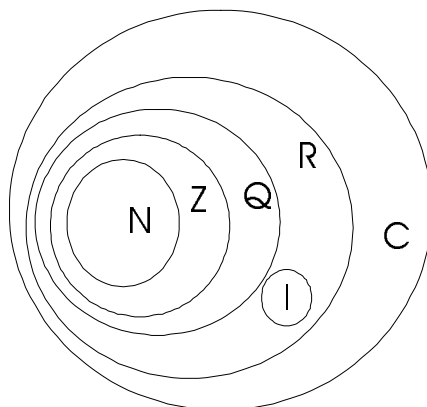


Figura 2.1

Desenhei ao lado outro círculo, representando o conjunto dos reais e perguntei onde estaria os hiper-reais.

Lina – Fora de tudo [englobando todos os conjuntos]? Não, acho que não.

Mino – No infinitésimo do real.

A frase de Mino provocou muitos risos, inclusive por parte dele.

Raquel – Desenha para mim onde seria isso!

Ele desistiu da idéia e Lugo lembrou que os hiper-reais englobavam os reais, os infinitésimos e outros. Sugeri, então, o desenho abaixo.

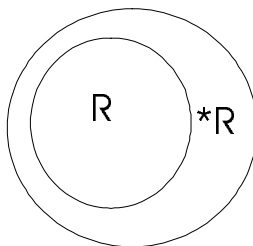


Figura 2.2

São caminhos diferentes de organizar os conjuntos. Falei da existência dos hiper-complexos ($*C$) também. Isto fez com que Lina retomasse a comparação que havia feito no encontro anterior, entre a parte imaginária dos complexos e a parte infinitesimal dos hiper-reais. Lugo ainda perguntou sobre a possibilidade de existir algo do tipo $2dx+i$, já que existe $2+i$,

sugerindo que fosse um hiper-complexo. Isso havia fugido do meu conhecimento sobre o assunto e não dei certeza sobre a validade. Voltamos a regra da soma.

Raquel – Alguém se habilita a fazer?

Lina, rindo - Eu não lembro mais dessa parte.

Mino - Seria $f(x) + f(x+dx)$?

Lugo não se manifesta com sua idéia anterior da diferença entre os valores da função.

Raquel, escrevendo no quadro - Tínhamos $y=f(x)$, e começávamos com ...

Lina - dy .

Raquel – E o que era?

Lina e Mino, tímidos - $f(x)+dx$.

Escrevo.

Lugo – Era $f(x+dx)-f(x)$.

Escrevo também.

Lina – Não.

Lugo, fazendo de seu ante-braço uma reta – Sim, porque era a inclinação da reta. Era um ponto menos outro ponto.

Lina – Mas era dentro do ... [o dx dentro do parênteses]?

Mino – É, era isso mesmo.

Lugo, com a imagem de seu ante-braço, fez-me lembrar do encontro passado quando trabalhamos com o zoom no Corel Draw. Assim, desenhei o resultado do primeiro zoom infinito.

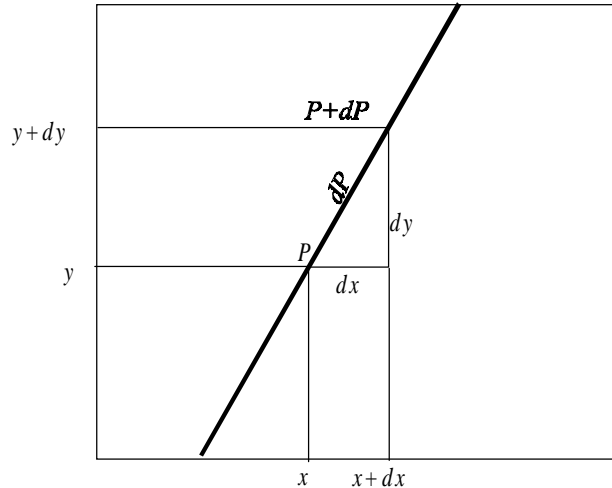


Figura 2.3

Os alunos é que foram dizendo onde eu deveria marcar as abscissas, ordenadas e acréscimos. Quando comecei a desenhar, Mino, rindo, disse “esse zoom é um problema, complicou”. Os colegas riram. Eu devia ter explorado isso. Depois de concordarem com o que Lugo havia dito, voltamos a função h .

Raquel – Como fica agora com a função h ?

Lina – dh .

Peço para que alguém vá ao quadro. Eles resistem, mas Lina tenta dizer quem é dh . Escreve $f(x+dx) - f(x) + g(x+dx) - g(x)$. Creio que pensou em $df + dg$. Escrevi $dh = h(x+dx) - h(x)$ antes da expressão de Lina, e perguntei quem era $h(x+dx)$. Apenas Lina respondeu $f(x+dx) + g(x+dx)$. Como os outros não se manifestaram, pedi que ela seguisse a definição. Apagou sua expressão e escreveu $f(x+dx) + g(x+dx) - (f(x) + g(x))$, vacilando várias vezes na colocação dos parênteses e explicando aos colegas, que parece que entenderam.

Raquel – O que podemos fazer agora?

Silêncio.

Raquel – Dá para tirar aqueles parênteses dali...

Estava me referindo aos que continham $f(x) + g(x)$. Mas Lina indicou, sem surpresa para mim, o que faria.

Lina – Dá para multiplicar g por x e dx .

Os colegas de imediato falaram *não*.

Raquel – E quando você tem $\sin(x)$, você multiplica seno por x ?

Lina, de imediato, diz que não e retira os últimos parênteses. Por sugestão de Lugo, Lina divide a igualdade por dx . Sem mais sugestões, pergunto quem é $f(x+dx)-f(x)$. Mino sussurra $f(x)$, mas logo em seguida concorda com Lugo, quando diz que é dy . Lina se refere a definição de dy escrita no quadro e concorda com seus colegas. Ela mesma pergunta quem é $g(x+dx)-g(x)$. Os colegas logo respondem dg . Lina escreve $\frac{dh}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$.

Raquel – Chegamos ou não chegamos?

Mino e Lugo – Essa é a quase-derivada.

Lugo – Se tirar toda a parte infinitesimal...

Lina – Chega no resultado.

Para deixar na forma desejada, continuei de onde Lina parou. Perguntei a eles “cada parcela está infinitamente próxima de quem?”. A partir do que responderam, escrevi $\frac{dh}{dx} \approx f'(x) + g'(x)$.

Raquel – Se eles são quase iguais, a diferença entre eles é ...

Os alunos - Infinitésimo.

Raquel – Posso escrever então $\frac{dh}{dx} = f'(x) + g'(x) \dots$

Os alunos – Mais um infinitésimo.

Escrevi, então, $\frac{dh}{dx} = f'(x) + g'(x) + \varepsilon$. Tomando a parte real, concluímos que $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Ao iniciarmos esta prova, apenas Lugo lembrou da diferença entre os valores da função, explicitando a definição que eu desejava, apesar de não citar o nome *quase-diferencial*. Esta definição só foi lembrada por todos quando retomamos o zoom infinito. Lina se complicou com os parêntese como aconteceu no exercício de regra da cadeia que resolveu. Mesmo com a conversa que tivemos, não pode-se garantir que ela não irá se confundir da próxima vez que uma situação igual a essa aparecer.

Até este momento do encontro, os alunos lembraram de tomar a parte real de um desenvolvimento hiper-real, para encontrar a derivada da função. Já descreveram o

procedimento, como fez Lina e se expressaram como em *retirar a parte infinitesimal*. Sabiam da existência de um infinitésimo entre dois números que eram infinitamente próximos.

Regra da Cadeia

Trabalhamos com uma forma simples de se chegar à regra da cadeia. Conduzi a prova através de perguntas. Da mesma forma que na regra da soma, esperava que eles utilizassem os conceitos que trabalhamos no encontro anterior. Escrevi a função composta e a sua derivada - o que queríamos provar.

$$h(x) = f(g(x)), h = f(u), u = g(x)$$

$$h'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

A prova desenvolvida foi a seguinte:

$$dh \approx f'(u)du \approx f'(u).g'(x)dx$$

$$dh \approx f'(g(x)).g'(x)dx$$

$$\frac{dh}{dx} \approx f'(g(x)).g'(x)$$

$$\frac{dh}{dx} = f'(g(x)).g'(x) + \varepsilon$$

$$h'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

A primeira linha demorou para aparecer. Escrevi no quadro a quase-diferencial de $y = f(x)$, $dy \approx f'(x)dx$. Eles não tinham essa relação clara em mente. Para escrever a diferencial de f e g , eles não utilizaram a variável correta. Os alunos que se pronunciaram, falaram em $f'(u)dx$ e $g'(x)dg$. Eu os fazia recorrer sempre a $dy \approx f'(x)dx$. Até este ponto tínhamos $dh \approx f'(g(x)).g'(x)dx$. As demais linhas surgiram mais naturalmente.

Raquel – Acabamos a prova?

Lina – Tem que desprezar ... falta pegar a parte real.

Mino – Dividir por dx .

Raquel – Isso. Vamos antes dividir por dx .

Escrevo, com o auxílio deles, $\frac{dh}{dx} \approx f'(g(x)).g'(x)$.

Raquel – Se são quase-iguais, então dá para escrever $\frac{dh}{dx} = f'(g(x)).g'(x) \dots$

Os alunos – Mais um infinitésimo.

$$\frac{dh}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x) + \varepsilon$$

Raquel – E agora?

Os alunos – A parte real é $f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Escrevo $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Assim como no trabalho com a regra da soma, a definição de quase-diferencial não apareceu. Os alunos não lembraram de escrevê-lo em termos do diferencial da função. Foi a segunda vez que eles trabalharam com isso, então, acredito, que foi normal esse esquecimento. Eles mostraram facilidade no restante da demonstração, lembrando de dividir o quase-diferencial por dx e encontrar a parte real do desenvolvimento hiper-real.

No final do exercício, surgiram algumas conclusões e comentários.

Nanda – A gente parte de uma definição pequena como aquela e começa a definir, a demonstrar todas as fórmulas que se usa, como a da cadeia e as outras.

Mino, dirigindo-se a mim – Você falou que os infinitésimos e o limite partem de raciocínios diferentes. Dá para provar por limite também?

Raquel – Sim. Acho que vocês verão com a Miriam este trabalho. Acho que com o professor de Física vocês já viram algo de limite, né? Mas ele demonstrou alguma regra ou não?

Mino - Não. Só ensinou o processo.

Nanda - Ele só indicou como fazer para chegar aos cálculos que ele queria, aos resultados que queria. Ele não demonstrou, não ensinou. Só deu uma idéia geral. Só para a gente poder fazer os cálculos ligados a derivada.

Lugo – Ele deu um exemplo. Pegou uma função e foi substituindo valores e foi vendo que cada vez ficava mais próximo de um número. Falou, então, que o limite é quando a função tende a este número. E a partir daí, ele deu a definição para nós.

Segundo a fala de Lugo sobre limite, ele diz que o conceito é o processo da função tender a um número, e não o resultado deste processo.

4. Derivada do seno

A prova da derivada do seno foi outro exercício para verificar como os alunos aplicam os conceitos trabalhados no encontro passado. Lugo se prontificou a fazer no quadro. Começou aplicando a definição de dy .

$$y = \text{sen } x$$
$$dy = \text{sen}(x + dx) - \text{sen } x$$

Lugo já tinha lembrado da definição de dy nos exercícios anteriores e aqui mais uma vez.

Lina – Divide por dx .

Nanda – Já de cara?

Lugo – Acho que vai dar um trabalho enorme, mas tem aquele negócio da soma de dois ângulos.

Nanda - Com troquinha, sem misturinha.

Raquel - Como é?

Nanda e Lugo vão falando a resolução $\text{sen } x \cdot \cos dx - \text{sen } dx \cdot \cos x - \text{sen } x$.

Lina - De onde vocês tiraram isso?

Nanda – Eu aprendi assim. Com troquinha, você vai trocar o sinal. É o coseno. Sem misturinha é o seno. Você não mistura o seno com o coseno.

Lugo – Minha professora ensinou outra regra: minha terra tem palmeiras onde canta o sabiá, seno a coseno b, seno b coseno a.

Nanda - Essa é mais poética.

Lina – Ah, eu sei! Daí é que tiramos o $\text{sen}(2x)$.

O grupo se torna mais dinâmico. Cada um dá um palpite para o que Lugo deve fazer. Colocam $\text{sen } x$ em evidência: $\text{sen } x(\cos dx - 1) + \text{sen } dx \cdot \cos x$. Em seguida, Nanda sugere $(\text{sen } x + \text{sen } dx \cdot \cos x) \cdot (\cos dx - 1)$, mas os colegas logo a corrigem. Depois de pensarem em outras tentativas de desenvolver mais a expressão, eles aceitam a sugestão inicial de Lina de dividir os dois membros por dx . Chegam a seguinte igualdade:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{sen } x(\cos(dx) - 1)}{dx} + \frac{\text{sen}(dx) \cdot \cos x}{dx}$$

Raquel - Qual seria o próximo passo?

Lina – Separar a parte real da infinitesimal.

Os alunos mostraram ter aprendido a maneira pela qual se calcula a derivada de uma função. Aplicaram a definição de quase-diferencial, dividiram a igualdade por dx e foram em busca da parte real. Acredito que a prática adquirida com estes exercícios, foi um ponto decisivo para eles mostrarem facilidade no cálculo da derivada do seno.

Raquel – $\sin x$ é real. O problema é saber quanto vale seno e coseno de dx .

Lugo – $\cos dx$ é bem próximo de 1, porque se eu tiver o círculo trigonométrico, dx é um número extremamente pequeno, próximo de zero. Então é quase como se ele tivesse aqui [bem próximo do zero].

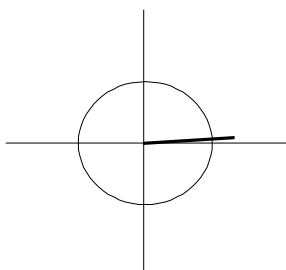


Figura 2.4

Lina – $\cos 0 = 1$.

Lugo – Então $\cos dx$ é bem próximo de 1.

Lina – Daí, fica zero.

Lugo – Vai sair essa parte aqui [o primeiro membro da soma]. Posso fazer isso?

Mino – Aí, você não está considerando os infinitesimais! Se você está considerando o infinitesimal, você não pode fazer isso.

Raquel – Pois é. Eu só posso tirar esta parte se eu escrever um \approx .

Mino – É.

Lugo – Não, mas o dx não é um número bem pertinho daqui [aponta para o zero]?

Os outros – Sim, mas não é isso...

Lugo – Não, mas o $\cos dx$. Pensando só nele. É um número bem próximo de 1.

Raquel – É 1 ou não é 1?

Lugo – Próximo.

Lina – Vai ficar $1 + dx$.

Mino – Não, $1 - dx$.

Pedi para Lugo resolver essa dúvida. Ele mostra no círculo dx , e afirma que vai ser menor que 1, mas insiste que a diferença é pouquíssima. Os colegas riem por causa do “mas”. Parece que Lugo quer mesmo cancelar a primeira parcela da soma. Pedi para ele explicar por que que vai ser menor que 1.

Lugo – $\cos dx$ vai ser 0,999...

Mino – Se eu der um zoom ali [na origem], vai formar um triângulo retângulo, com um ângulo bem pequeno e vai sobrar uma parte, um pedacinho.

Lugo desenha um triângulo pequeno. Mino vai ao quadro e desenha, com calma a figura abaixo.

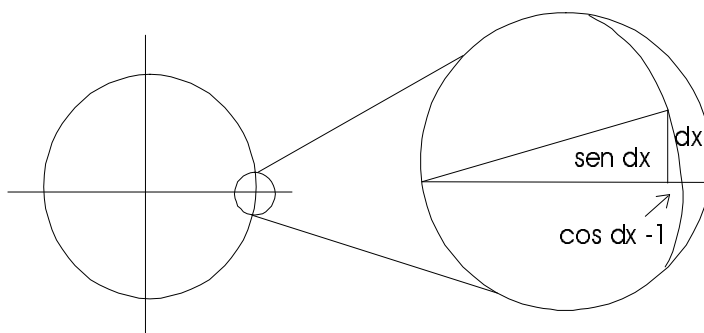


Figura 2.5

Conclui que vai faltar um pouco para $\cos dx$ ser 1. Mino indica ainda em seu desenho dx e $\sin dx$. Os nomes da figura fui eu quem coloquei para facilitar a compreensão do leitor. Chamo atenção que ele não deu um zoom infinito. Ele prontamente responde.

Mino – É, o dx ficaria mais reto, ou reto se der um zoom infinito. O arco vai formar 90° , quase 90° .

Por causa do horário, tive que finalizar o encontro. Foi uma pena, pois eles estavam engrenados! Mino visualizou exatamente o que faríamos com o zoom, e seu resultado.

Entreguei o desenho abaixo e comecei a explicar a situação. Ao falar do zoom, Mino relaciona com o que havia desenhado.

Mino – Se o zoom é infinito, vai ficar perpendicular, quase paralelo ao eixo y .

Concordo e peço o que significa a semi-reta que parte de A no primeiro zoom.

Lina – Você marca os arcos.

Raquel – E no infinito, você terá o quê?

Nanda – Círculo.

Peço a eles para completarem os zooms infinitos, marcando dx , $\text{sen } dx$ e $\text{cos } dx$. Lina acha estranho dar dois zooms na mônada de A . Retomo, então, a atividade do encontro passado, desenhando os resultados dos zooms.

Raquel – O que acontecia depois do primeiro zoom?

Lugo – Ficavam [curva e tangente] paralelas.

Lina – Não. Ficavam juntas e não conseguia distinguir uma da outra.

Mino – Depois é que ficavam paralelas.

Raquel – Isso. Agora, é parecido. É uma dica. Tentem preencher.

A atividade ficou para casa, pois já estávamos ultrapassando o horário.

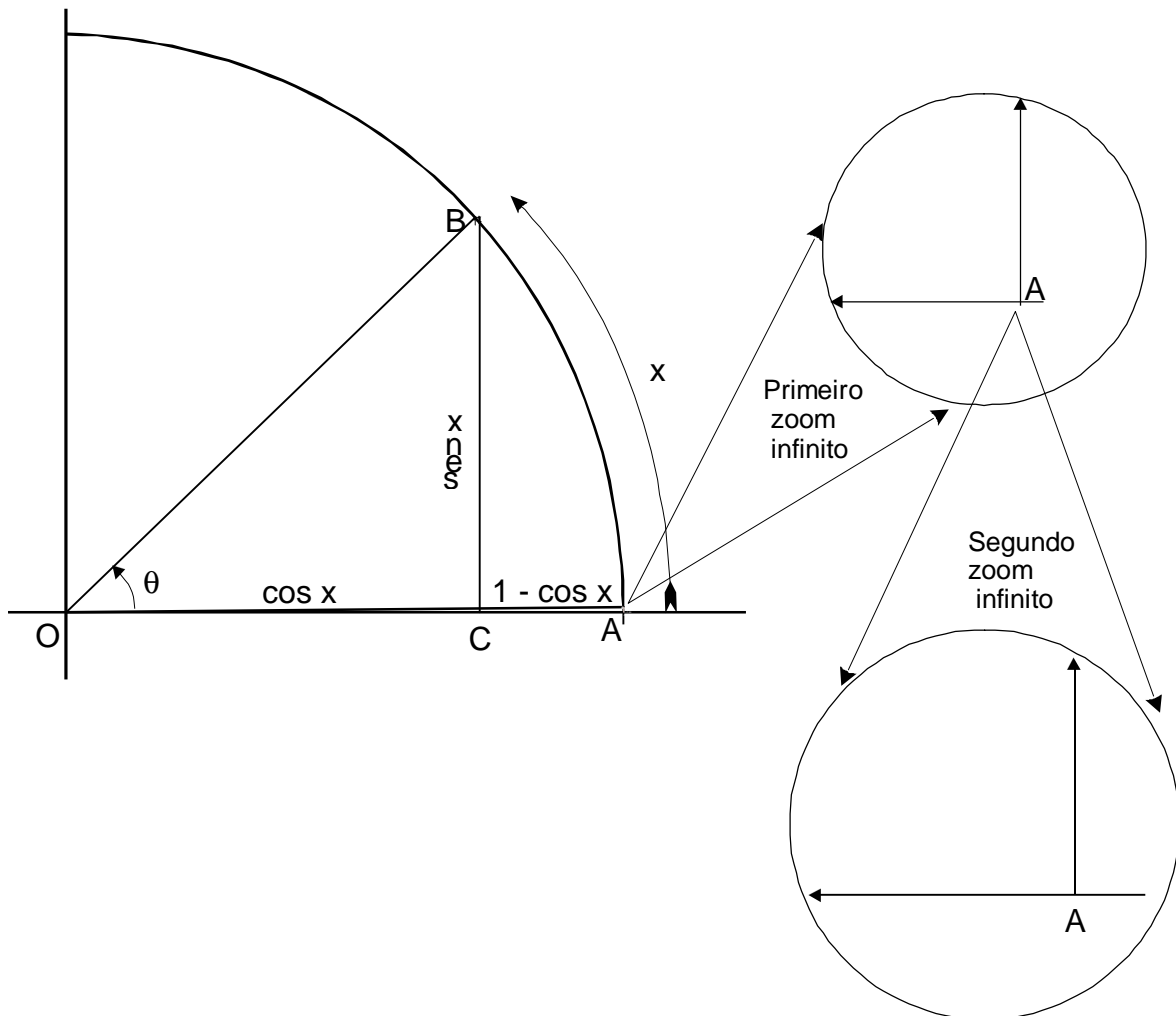


Figura 2.6

3º Encontro – 18/04/01

Este encontro foi realizado no laboratório didático de computadores do curso de Física e teve uma duração média de 1 hora e quarenta minutos. A reunião não foi no mesmo horário da aula de Cálculo, pois os alunos tinham uma prova desta disciplina. Começamos o encontro, então, após a realização desta prova.

As principais atividades ocorridas no terceiro encontro foram:

- Um roteiro para o cálculo de derivada.
- Cálculo da derivada do seno.
- Interrupção do cálculo algébrico para buscar auxílio do zoom infinito. Não foi utilizado o computador. Os alunos fizeram previsões para o resultado do zoom.
- Checagem destes resultados, solicitados no encontro anterior.
- Término do cálculo algébrico da derivada do seno.
- Distância entre a curva e a reta tangente.

Apresento, agora, os detalhes destas principais atividades.

1. Um roteiro para o cálculo de derivada

Com o objetivo de verificar se sabiam como calcular a derivada de uma função, via abordagem infinitesimal, solicitei aos alunos que falassem um roteiro para este cálculo. No final das discussões, considerando a função $y=f(x)$, eles indicaram o seguinte procedimento, em ordem:

$$1) \quad dy=f(x+dx)-f(x)$$

$$2) \quad \div dx$$

$$3) \quad f'(x)=re\left[\frac{dy}{dx}\right]$$

Apresento, agora, como foi a determinação deste roteiro.

Escrevi $y=f(x)$ no quadro.

Raquel – Você tem uma função e quer calcular sua derivada. Qual a primeira coisa que a gente faria?

Lina – Somar com os infinitésimos.

Raquel – Quem?

Lina – A função.

Lugo – O $y \cdot f(x+\Delta x)$...

Lina – $f(x+\Delta x)$...

Lugo, corrigindo - ... dx

Lina, corrigindo - ... dx

Creio que estavam lembrando da fórmula de dy .

Raquel – Somo um infinitésimo à função e isso origina ...

Lugo e Lina – Um acréscimo no y também.

Raquel – Então, acrescenta um infinitésimo à função e depois no y .

Lina – Não. Acrescenta no y e isso acarreta na função.

Lugo – Não. Acrescenta no x e isso ...

Raquel, para Lina – Acrescenta no y , que não é a função, e depois acrescenta na função.

Lina, rindo – Não, y é a função.

Lugo - Acrescenta ao x e isso origina um acréscimo ao y .

Os alunos concordam

Raquel – Como chamei isso?

Os alunos- dx .

Raquel – O acréscimo ao x , que originava o quê?

Os alunos – dy .

Raquel – Que nome eu dou a dy ?

Lugo – Acréscimo infinitesimal a y .

Raquel – Existe outro?

Nanda sussurra “quase-derivada”. Percebendo esta confusão e o silêncio deles, escrevi no quadro algumas notações que estávamos usando. Falaram da diferença entre $f'(x)$ e $\frac{dy}{dx}$. Quando escrevi $f'(x)dx$, falaram que era o diferencial da função e, logo em seguida, notaram que o nome que eu estava esperando era “quase-diferencial”. Mais uma vez, como nos outros encontros, a confusão e o esquecimento dos nomes foi evidente.

Raquel – Por que “quase”?

Lugo – Porque a diferença é um infinitésimo.

Raquel - Como calculávamos dy ?

Mino e Nanda - $f(x+dx)-f(x)$.

Os outros colegas concordam. O segundo passo foi mencionado como “divide dy por dx ”, e o terceiro como “eliminar a parte infinitesimal da quase-derivada” e “ficar só com a parte real”. Perguntei se tinham algo em mente para lembrar destes passos.

Nanda – É das outras vezes, quando a gente ia resolver um exercício, demonstrar, sempre partia dessa definição.

Eles falaram que estava incorporado.

Para saber se estes passos faziam sentido para eles, perguntei a respeito do motivo pelo qual se executava tais passos.

Raquel - Qual o objetivo deste roteiro?

Lina e Mino – Achar a derivada.

Raquel – Por que começo com dy ?

Lina – Você tem que dar primeiro um acréscimo...

Lugo – Porque a quase-derivada é a inclinação da reta. Se fosse nos reais seria $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Nos hiper-reais é $\frac{dy}{dx}$. Eu divido dy por dx para achar a inclinação da reta.

Raquel - Porque sem o dy não tenho como fazer os próximos passos e nem calcular a derivada. Por que divido por dx ?

Lina – Também. Porque se não tiver o dx não ...

Lugo – Tem que ter os dois [dy e dx].

Raquel – Por que retiro a parte infinitesimal?

Lina – Porque ela é tão pequena, que posso desprezá-la.

Lugo – Porque no conjunto dos reais ela não é nada. No conjunto dos reais, os infinitésimos não significam nada.

Raquel – Como eu defini a derivada? Como a parte real. Por que tenho que tirar a parte infinitesimal? O que eu quero?

Nanda – Porque quero a parte real só.

Os alunos concordaram com Nanda.

O roteiro estava pronto. Do último encontro, fiquei com a impressão de que eles teriam incorporado o processo. Neste terceiro encontro, creio que isto se afirmou.

2. Derivada do seno

Deixei o roteiro escrito no quadro. Lina, não muito satisfeita com minha escolha, foi vai ao quadro, para calcular a derivada de $y = \sin x$. Escolhi Lina, pois dentre os 4 alunos, ela demonstrou cometer mais erros durante os encontros, e assim, poderíamos discutir mais dúvidas, além das que eu estava prevendo para este exercício, como no momento de tomar a parte real do desenvolvimento hiper-real. A solução que eu desejava obter até o momento da análise do zoom, sabendo que poderia haver passos intermediários e erros, era a seguinte:

$$\begin{aligned} dy &= \sin(x+dx) - \sin x \\ dy &= \sin x \cos dx + \sin dx \cos x - \sin x \\ dy &= \sin x(\cos dx - 1) + \sin dx \cos x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{\sin x(\cos dx - 1)}{dx} + \frac{\sin dx \cos x}{dx} \end{aligned}$$

Já tínhamos feito isto no encontro passado.

Lina – O que tenho que fazer? Fazer por isso aqui [roteiro]?

Raquel – O que queremos?

Lina - A derivada.

Mino fala em voz baixa “começa pelo dy ”.

Raquel - O que tenho que fazer?

Lina – Tem que fazer o dy .

Escreve $dy = \sin(x+dx)$, sem olhar para o roteiro. Quando ia começar a dividir por dx , Mino diz “não”. Ela imediatamente pega o apagador e diz que está errado, procurando o que está errado. Mino e Nanda dizem que falta $-\sin x$. Continuando sem entender, ela pergunta “onde $-\sin x$ ”. Mino aponta para o roteiro. Lina confere e escreve o que faltava. Divide, então, por dx , obtendo $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(x+dx) - \sin x}{dx}$. Com a sugestão direta de Mino e Nanda, solicitei que a deixassem resolver da sua maneira. Pensei que ela estivesse seguindo o roteiro e que, então, já tentaria achar a parte real, mas diz que o próximo passo é distribuir, e escreve $\sin x + \sin dx - \sin x$. Espanta-se, pois apenas sobraria $\sin dx$. Ela insiste em multiplicar seno por x . Este erro apareceu em seus cálculos no encontro passado, mostrando que o conceito de seno de uma soma não estava assimilado. Como da outra vez, pergunto que operação existe

entre $\sin x$ e $(x+dx)$. Ela ri e diz “de novo”. Isso não garante que da próxima vez ela não cometerá este erro. Lugo fala $\sin x \cos dx$, e Lina percebe o que deveria ter feito.

Nanda a auxilia, com sua regra “sem troquinha e com misturinha”. Perguntei a Lina sobre o próximo passo, e ela disse que ainda não dava para ver a parte real. Enquanto isso, Lugo falou baixo que o problema era calcular $\sin dx$ e $\cos dx$. No caso particular de Lugo, este era o ponto de passar para o zoom. Mino sugere colocar $\sin x$ em evidência. Assim,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x(\cos dx - 1) + \sin dx \cos x}{dx}$$

Já na elaboração do primeiro passo do roteiro, Lina atrapalha-se ao falar sobre como chegamos à definição de dy . Mesmo concordando com o roteiro e justificando-o, em especial o primeiro passo, não escreve corretamente a definição de dy , quando vai ao quadro. Se ela aceitou a sugestão de Mino para começar pelo dy , ela poderia nem saber como começar a resolução do exercício. A cada passo que Lina iria executar, ela nos perguntava, antes, se poderia ou não fazê-lo. Dessa forma, a sua reação ao “não” de Mino, de prontamente pegar o apagador, fica compreensível. Mostra-se insegura no que está fazendo. Lina nem olhou a definição de dy que estava escrita no quadro, e que ela havia concordado em estar certa.

3. Auxílio do zoom infinito

Chegamos no ponto de passar para o zoom, mas queria que eles sentissem esta necessidade. Lugo diz, novamente, que tem que calcular quem é $\sin dx$ e $\cos dx$. Lina fala que a dificuldade é isolar os termos com dx .

Lugo - dx é infinitésimo, mas isso não significa que $\sin dx$ e $\cos dx$ também são.

Lina começa, então, a fazer estimativas do valor de $\cos dx$ e $\sin dx$, desenhando um círculo trigonométrico, como Lugo fez no encontro passado.

Lina - $\cos dx$ está bem próximo de 1 e $\sin dx$ está bem próximo de zero. Isso $[\cos dx - 1]$ vai dar zero, se $\cos dx$ fosse 1, e isso $[\sin dx \cos x]$ também vai dar zero, se $\sin dx$ fosse zero. Sumiu tudo!

Diante disto tentei sugerir o zoom.

Raquel – Como fazemos para enxergar esses dx .

Mino – Dá um zoom.

Nanda – Um plano cartesiano.

Lugo, acrescentando – Plano cartesiano hiper-real.

Desenhei, então, a figura inicial do círculo trigonométrico, onde aplicaríamos o zoom infinito. Discutimos maneiras de encontrar o seno de um ângulo. As respostas foram na seguinte direção: “A partir do ponto do círculo, representando o final do arco em questão, traçamos uma reta paralela ao eixo horizontal, até encontrar o vertical num ponto. Deste ponto até a origem dos eixos, temos o seno do ângulo”, “Unimos o ponto do círculo até a origem dos eixos, encontrando o ângulo, e, então, calculamos o seno deste ângulo” e, a desejada, “Pelo ponto do círculo, traçamos uma reta paralela ao eixo vertical. A medida do segmento, de extremidades ponto do círculo e ponto de interseção da reta traçada e o eixo horizontal, era o seno do ângulo”. Desejei que eles falassem essa maneira, para que pudesse me remeter a ela quando, no 1º zoom, $\text{sen } dx$ apareceria igual a dx . Para o cosseno, era a medida do segmento de extremidades origem dos eixos e o último ponto antes citado.

Desenhei a figura abaixo, para trabalharmos com o primeiro zoom infinito.

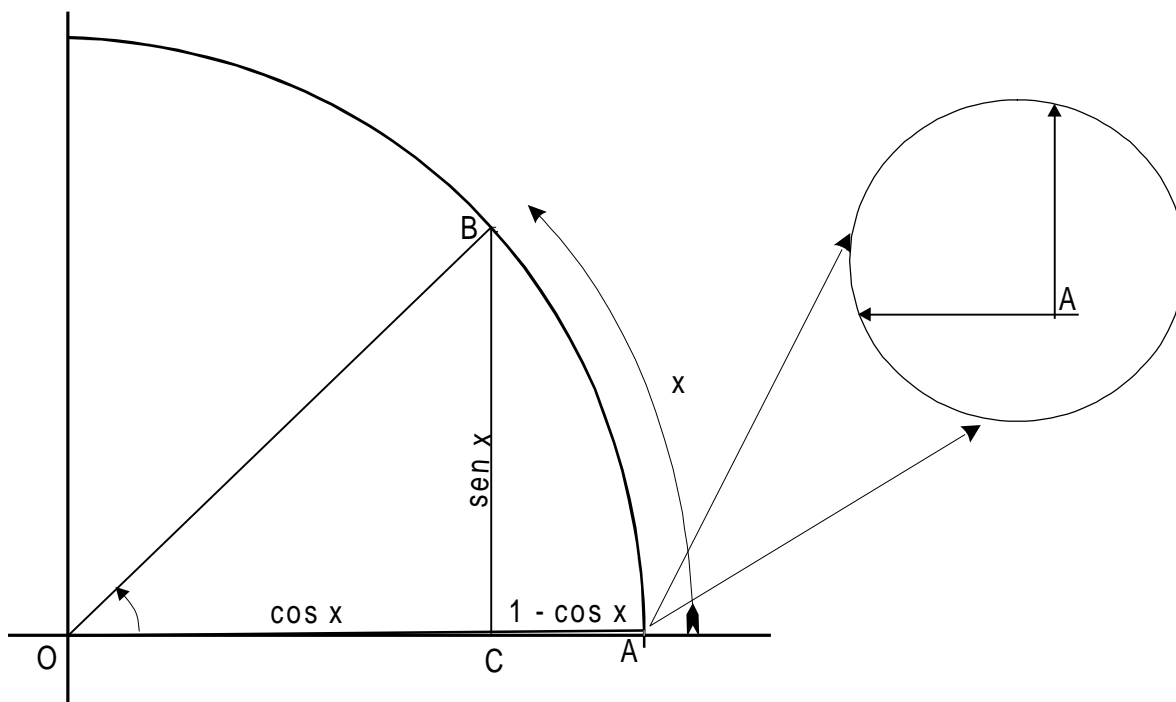


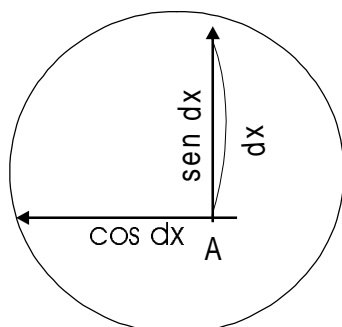
Figura 3.1

Sobre a localização, após o primeiro zoom, os alunos apresentaram idéias do tipo:

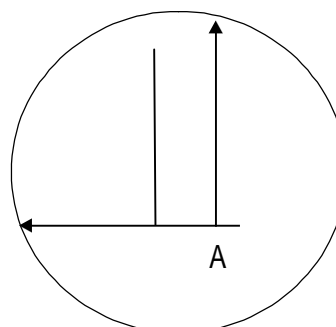
- Estamos infinitamente distantes da origem dos eixos;
- Estamos infinitamente próximos do ponto A;

- A reta horizontal que passa por A chegará, no infinito, na origem dos eixos;
- A reta vertical que passa por A formará, no infinito, o círculo.

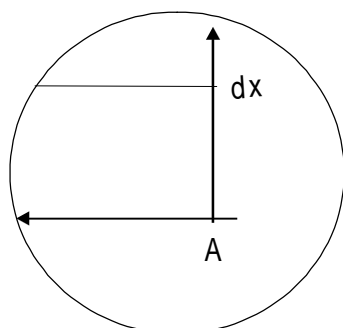
Isso mostra que os alunos sabiam o que aconteceria, em termos de distância, após um zoom infinito. Estavam bem localizados. Restava saber se suas imagens do resultado se encaixariam na situação descrita acima por eles. Ficou como de tarefa de casa, eles pensarem no resultado dos zooms. Abaixo temos suas imagens desenhadas:



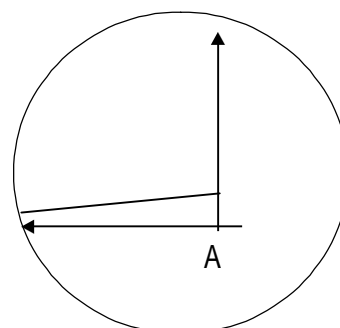
Nanda



Lina



Mino



Lugo

Figura 3.2

O resultado imaginado para o primeiro zoom era o seguinte:

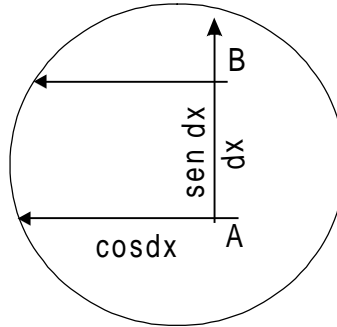


Figura 3.3

No círculo trigonométrico, desenhado anteriormente, B marcava o final do arco x . Na figura acima, B marca o final do arco infinitesimal dx . Depois do primeiro zoom, dx e $\text{sen } dx$ podem ser visualizados e se confundem, como na situação da curva e reta tangente, do primeiro encontro. Neste desenho, $\text{cos } dx$ parece que vai da origem até o ponto A , valendo 1, mas como os alunos falaram, isto é aproximadamente.

As imagens estavam de acordo com o que os alunos responderam sobre a localização depois do primeiro zoom. À medida que um aluno comentava sobre o que havia pensado, os outros concordavam ou discordavam, e assim iam mudando de opinião sobre o que haviam desenhado. Nanda ressaltou que achava que dx e $\text{sen } dx$ estavam quase paralelos. Em suas palavras, “não imaginei que o acréscimo no seno fosse tão infinitamente pequeno e que meu zoom fosse tão grande para poder perceber que tanto o arco e o seno estivessem paralelos já. No segundo zoom sim, eles estariam paralelos.” Eu disse que achava estranho não marcar dx na reta que partia de A , já que eles tinham concordado que esta reta, formaria o círculo e era ali que se marcavam os arcos. Mino e Lugo pensaram como o desenho da figura 3.3. Lina pensou que dx e $\text{sen } dx$ já estivessem paralelos e já havia enxergado a diferença entre $\text{cos } dx$ e 1, antecipando o resultado do segundo zoom em A . Todos acabaram concordando com a posição de dx .

A respeito de $\text{sen } dx$, Lugo sugeriu duas alternativas para o visualizar: $\text{sen } dx$ deveria ser marcado no eixo y , e para enxergá-lo deveríamos dar um zoom no centro do círculo; ou traçar uma reta paralela ao eixo horizontal a partir de B , sendo a distância entre as duas retas, o $\text{sen } dx$. Desenhei esta reta paralela ao eixo horizontal. Concluíram, então, que $\text{sen } dx$ seria marcado no mesmo lugar de dx . Lina justificou esta igualdade através da maneira que desejei

de se marcar o seno, citada anteriormente, mudando sua opinião em relação ao que havia desenhado.

Raquel – Onde vai chegar esta reta que desenhamos?

Lina – No eixo y .

Raquel – E se eu quisesse desenhar um reta que chegasse na origem?

Nanda – Fica difícil de desenhar, pois você não sabe a inclinação.

Raquel – Eu poderia indicar a direção dela, como fiz com esta [reta paralela ao eixo horizontal]?

Os alunos - Pode.

Raquel – Como seria?

Lugo – Praticamente paralela ao eixo x .

Lina – Paralela?

Lugo – Paralela, ué. Duas retas paralelas se encontram no infinito.

Risos.

Nanda – Mas não necessariamente na origem.

Lugo – Mas se a gente está infinitamente longe ...

Mino, explicando o que Lugo havia dito – A reta que vai encontrar a origem e o eixo horizontal vão se encontrar na origem.

Lugo – O infinito aqui, é a origem.

Lugo, então, mudou de idéia em relação ao que tinha desenhado, sobre a reta que chega na origem. Os alunos marcaram como $\cos dx$, a distância do centro do círculo até A . O desenho de Mino foi o que mais se aproximou do resultado esperado. Creio ser normal as diferenças entre as imagens e o desenho esperado, já que o zoom infinito é uma idéia nova para os alunos, e este exercício foi o primeiro que tentaram fazer sozinhos. Acredito que os alunos não mostraram dificuldades nesta etapa.

O resultado do primeiro zoom em A estava pronto.

Raquel – Acabou? Não preciso mais de nenhum zoom, né? Podemos até riscar o segundo círculo que vocês têm desenhado na folha!

Lugo – O $\sin dx$ é aproximadamente igual a dx , e $\cos dx$ é aproximadamente igual a 1.

Lina – Como é?

Lugo – Quase igual, porque a reta representa o seno e o ângulo.

Raquel – Iguais ou diferentes?

Lina – Diferentes. Mas quase iguais. Tem uma diferença.

Lugo – A diferença é um infinitésimo.

Como quase-igual não é o mesmo que igual, estava explicado a necessidade de um segundo zoom infinito. Lina sugeriu dar um zoom no ponto B. Um primeiro resultado a que chegamos foi o seguinte:

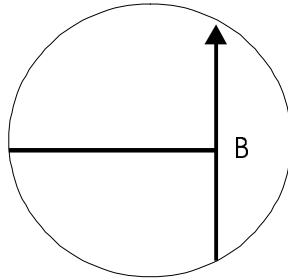


Figura 3.4

Não tinha pensado no zoom neste ponto. Ele criou mais polêmica. Concordaram que a reta horizontal que aparece, é a que chega no centro do círculo e no eixo y . Acima do ponto B , temos o círculo. A questão discutida foi saber como desenhar abaixo deste ponto: uma única reta ou duas. Essa dúvida foi sendo esclarecida, depois de desenhado o segundo zoom no ponto A . Mino foi o defensor de desenhar duas retas abaixo de B , porque achou que já se poderia ver a diferença entre o $\cos dx$ e 1 , neste zoom. Lugo acabou sugerindo que desenhassemos o resultado do segundo zoom em A . Obtivemos o seguinte:

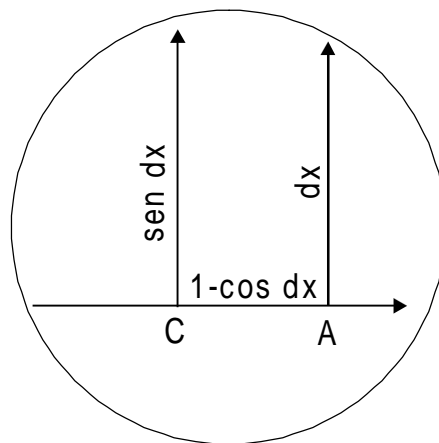


Figura 3.5

Depois desse zoom, continuamos com a reta que parte de A , onde marcamos os arcos. O que aparece é uma fração de dx , como concluiu Lugo. Acharam que poderíamos marcar a diferença entre o $\cos dx$ e 1, e concordam com o lugar onde marquei. Senti que faltou iniciativa por parte deles em escolher um ponto (C) para indicar o final do segmento que representaria o $\cos dx$, neste zoom, e o dx , no primeiro zoom. Falei que o que sabíamos é que era um infinitésimo, mas que o tamanho exato não podíamos saber. Lugo sugeriu desenhar a reta que representaria o $\sin dx$, paralela a dx , partindo de C . Lina afirmou que elas se encontrarão no ponto B , que está infinitamente longe de A .

Lina – E no zoom do ponto B , não poderia ter uma reta paralela bem próxima? Uma seria $\sin dx$ e a outra dx ?

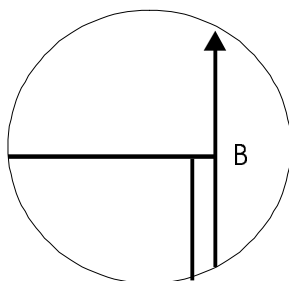


Figura 3.6

Raquel – Mas você disse que elas iam se encontrar no ponto B ! Aqui elas não estão se encontrando.

Lugo – Será que não vai dar para ver as duas chegando no B ?

Raquel – Algo assim?

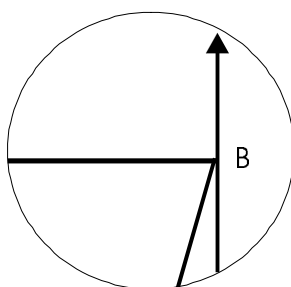


Figura 3.7

Raquel, falando com Mino e Nanda – O que vocês acham?

Mino – É estranho, você tem o mesmo zoom [o do ponto B e o segundo do ponto A]. Se você caminhar [a partir do eixo horizontal, no 2º zoom] infinitamente para cima, com o

mesmo zoom até chegar no B , você teria que ter uma reta paralela a reta desenhada no zoom em B .

Mino deve ter pensado algo do tipo: “Se no zoom em A apareceram duas retas paralelas, no zoom em B , que tem o mesmo poder que o de A , tem que ter duas paralelas também.”

Lugo – Ah, mas aqui [a partir do 2º zoom] vai começar a entortar um pouco, porque $[dx]$ é uma curva.

Lina – É isso aí.

Mino – Eu tenho como noção de curva, na verdade não uma curva. São vários traços pequenos. Infinitos traços que formam uma curva.

Lugo – Curva é um polígono de infinitos traços.

Raquel – Que tamanho eles têm?

Lugo, rindo – Infinitésimo.

Raquel – Como fica a história de ter duas paralelas em cima, já que o zoom tem o mesmo poder?

Mino – Só se você visse esses lados infinitesimais como uma curva, para formar uma circunferência.

Lugo – Tá infinitamente próximo, não quer dizer que é uma reta, mas uma reta um pouco inclinada.

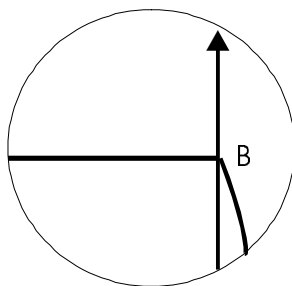


Figura 3.8

Havia me esquecido da Nanda e pedi a ela o que estava achando.

Nanda – Sinceramente?

Raquel – Sinceramente.

Nanda – Eu não consigo visualizar o $\text{sen } dx$ paralelo ao dx .

Achei estranho, pois quando ela explicou o resultado que previa do primeiro zoom em A , ela imaginou as duas retas paralelas depois do segundo zoom.

Mino – É, eu também.

Raquel – Mas como vocês visualizariam?

Nanda – Eu não sei.

Lina – Mas vocês concordaram com a marcação do $\cos dx$ aqui?

Mino e Nanda – Sim.

Lina – Então se está afastado aqui [$\cos dx$ e A], então $\sin dx$ não pode estar encostado com dx .

Nanda – É.

Mino – Seguindo uma linha de raciocínio dos infinitesimais, está perfeito, mas seguindo a minha linha, não dá.

Raquel – Como você faria?

Mino – Agora eu não enxergo, talvez eu tenha que pensar mais um pouco.

Silêncio.

Mino – A não ser que tenha uma prova matemática que prove que duas retas paralelas se cruzam no infinito. Até aceito, mas ... no meu senso comum é difícil imaginar isso.

Raquel – Por quê? Vamos tentar entender.

Lina – É que se tem duas retas paralelas aqui [no segundo zoom em A] ...

Mino – E com o mesmo zoom ...

Lina - ... como elas vão se encontrar?

Mino – É, deveria ter outra reta [no zoom do ponto B].

Lugo – Mas a segunda reta não é reta. É uma curva. É uma curva que parece reta.

Nanda, gesticulando o encontro das duas – É, elas vão se encontrar.

Sugeri pensar como seria o zoom na metade de dx .

Lugo – Vai ver as duas retas um pouco mais próximas. Elas vão ficando cada vez mais próximas, até se encontrarem no ponto B .

Os alunos concordam com o que foi dito e com o desenho feito:

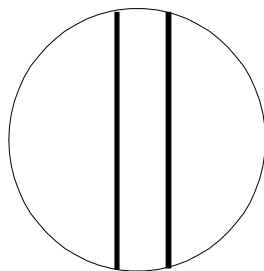


Figura 3.9

Lugo – É eu imaginei isto no começo.

Raquel – Você falou isso?

Lugo – Mais ou menos. Eu só pensei em ver as duas inclinadas em B .

Raquel, para Nanda – E aí?

Nanda – Eu realmente entendi que a reta que sai de A é um arco, não é uma reta. Sei que ela vai se encontrar com a reta do $\text{sen } dx$. Tranquilo. E vi que o desenho que fiz, apesar de não estar coerente com o que está desenhado aí, tem uma certa lógica, pois aquela reta [que sai de A] não é reta, só que eu não dei um zoom não tão infinito como você deu ali.

Creio que só Lugo, e talvez Lina, aceitaram o resultado dos zooms. Nanda e Mino entenderam o que fizemos, mas não imaginariam isto. No próximo encontro, veremos estes resultados no computador, para comparar com o que fizemos. Não utilizei, neste encontro, o computador, pois queria aproveitar as imagens e explicações dos alunos. Centrei-me nisso. Sobre os resultados, é difícil dizer o que é certo e errado. Na verdade, temos que concluir o que faz sentido e o que não faz, como Mino falou. Disse a eles que retomaríamos a discussão no próximo encontro.

4. Término do cálculo algébrico da derivada do seno

Retornamos ao desenvolvimento algébrico, por sugestão de Lugo.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{sen } x(\cos dx - 1) + \text{sen } dx \cos x}{dx}$$

Ele disse que se considerar $\text{sen } dx$ igual a dx , $\text{sen } dx \cos x$ vai ser infinitésimo, ficando $dx \cos x$, e além disso, a primeira parcela vai ser zero e, então, cortando dx com dx fica $\cos x$.

Raquel – Mas não é igual [a $\frac{dy}{dx}$].

Lugo – É, só que não é igual. Eu acho que estou misturando um pouco com limite.

Lugo não fez a relação que eu esperava entre os infinitésimos (a de grandeza) e não falou da parte real como sendo a derivada. Falou em termos gerais, sem dar importância para a aproximação.

Mino diz que se considerar o desenho do segundo zoom em A como correto, o $\cos dx$ é 1 menos uma parte. Lina chamou esta parte de dx .

Mino – Não. dx é maior do que esse [a parte] infinitésimo.

Raquel - Por que que esta parte é um infinitésimo?

Lina – Porque $\cos dx$ tá quase igual a 1.

Lugo – Porque é uma distância muito pequena.

Raquel – Porque eu não enxergo ele aqui [indicando o ponto A , no primeiro zoom]. Toda vez que eu dou um zoom e enxergo uma medida, é porque a medida é um infinitésimo. Agora, este infinitésimo $[1-\cos dx]$ em relação a esse $[dx]$ aqui, é maior, menor, igual?

Os alunos – Bem menor.

Raquel – Eu chamo ele $[1-\cos dx]$ de infinitésimo de segunda ordem. Eu tive que dar dois zooms para enxergar ele.

Lugo – Infinitésimo do infinitésimo.

Raquel – Ele é infinitamente menor que o outro, mas ainda infinitésimo.

Lugo – O infinitésimo que é menor que todos infinitésimos.

Raquel – Aí, seria um infinitésimo de ordem infinita. Porque é o menor de todos os infinitésimos.

Risos. Eu não sabia se isso que disse fazia sentido!

Lina – Quando eu falei, aquela hora, que $\cos dx$ era 1 menos dx , eu estava pensando em um infinitésimo, e não como dx .

Lugo – Acho que achei um jeito de resolver usando os infinitésimos.

Ele vai para o quadro e explica.

Lugo - $\cos dx$ é quase igual a 1, mas menor que 1. Então $\cos dx - 1$ vai ser um infinitésimo negativo. Um infinitésimo vezes um número real é infinitésimo. $\sin dx$ é

aproximadamente igual a dx . Então vai ficar $dx \cos x$. A primeira parte é infinitesimal, você despreza. Dividido por dx . Corta dx com dx e chega no $\cos x$.

Mino - Você usou o limite.

Raquel – Você considerou $\sin dx$ igual a dx , não é permitido. A gente sabe que não é igual.

Lugo – A primeira parte é infinitésimo.

Lina – É se você for pensar assim, a segunda parte também é infinitésimo.

Lugo – Sim, mas eu pensei quando a gente tirava a parte infinitesimal como em $2x+dx$ [exercício do primeiro encontro].

Mino – Mas aqui, $\sin dx$ você aproximou para dx .

Lina – Acho que a gente teria que se interessar por $\sin dx$, pois é ali que está a parte real.

Mino sugeriu escrever $\frac{\sin x(-\varepsilon) + \sin dx \cos x}{dx}$.

Sugeri separar a soma em duas parcelas: $\frac{\sin x(-\varepsilon)}{dx} + \frac{\sin dx \cos x}{dx}$.

Raquel – A primeira parte vai dar infinitésimo. Por quê?

Lugo – Porque em cima é um infinitésimo vezes um hiper-real dividido por um infinitésimo.

Mino - Só que esse $[dx]$ é bem maior que o outro $[-\varepsilon]$.

Lugo - Só que quando a gente dividir um infinitésimo por outro pode nem sempre dá um número tão pequeno assim.

Raquel – O de cima é um infinitésimo de primeira ordem, o de baixo é de segunda. Quanto vai dar a divisão?

Lugo – Vai ser um infinitésimo.

Raquel – Um infinitésimo vezes um real $[\sin x]$?

Os alunos – Infinitésimo.

Perguntei sobre a divisão $\frac{\sin dx}{dx}$ da segunda parcela. Lina diz que resultará num infinitésimo, mas muda de opinião quando Lugo e Mino explicam que “ $\sin dx$ é próximo de dx , mas não é dx . É um infinitésimo da mesma forma que dx . Então o resultado será

próximo de 1". Conferimos, depois, o resultado da divisão no primeiro zoom em A , quando as retas estão coincidentes.

Raquel – Uma coisa infinitamente próxima de 1 vezes $\cos x$...

Os alunos – $\cos x$.

Raquel – Então, tenho um infinitésimo mais algo que está infinitamente próximo de $\cos x$.

Escrevo $\frac{dy}{dx} \approx \cos x$.

Lugo – Mas aí não está pensando em limite?

Raquel – Por quê?

Lugo – Tá bem próximo de 1. A gente tá aproximando que um número bem próximo de 1 vezes o coseno é um número bem próximo do coseno, mas não é o coseno.

Raquel – Não é o coseno.

Pausa.

Raquel – Qual é o último passo?

Lugo – Pegar só a parte real, mas já pegou!

Mino - Escreve $f'(x)$ igual a $\cos x$.

Lugo – É que eu estava estranhando porque $\frac{\text{sen } dx}{dx}$ sobre dx é um número ... tá na mônada do 1, tá perto de 1, mas não é 1.

Raquel - Vamos multiplicar isso por $\cos x$.

Lugo – Então, vai dar infinitamente próximo de $\cos x$.

Escrevo $\frac{\text{sen } dx}{dx} \cos x \approx \cos x$.

Lugo - A gente tá aproximando para $\cos x$.

Mino sugere escrever $\frac{\text{sen } dx}{dx} \cos x \approx \cos x \approx \frac{dy}{dx}$.

Lugo – Ah, tá. Acho que entendi. $\frac{dy}{dx}$ igual a $\cos x$ mais um infinitésimo.

Lina – Aí se vai desprezar o infinitésimo.

Lugo – Agora eu entendi.

Lugo ficou estimulado a fazer a derivada do coseno.

Lugo pensou que já houvesse acabado o cálculo, e que inclusive já havíamos tomado a parte real. Na verdade, nas suas tentativas que chegavam em $\cos x$, ele fazia as aproximações, mas pensava que estava chegando na derivada e não na quase-derivada, além de passar por cima da relação entre os infinitésimos de ordens diferentes.

Com este encontro podemos notar que não houve dificuldade em lembrar da definição de quase-diferencial ($dy = f(x+dx) - f(x)$), o que ocorreu nos encontros anteriores. Creio que isto se deve a prática realizada até este momento e o próprio entendimento dos alunos. Apenas Lina mostrou resistência a esta definição. A nomenclatura ainda estava um pouco confusa para eles.

5. Distância entre a curva e a reta tangente

Foi difícil para os alunos, no primeiro encontro, justificar a expressão para a distância entre a curva x^2 e a reta tangente. Resolvi, fazer o mesmo exercício com a curva $\sin x$, para ver o que havia ficado para eles da discussão do primeiro encontro.

Desenhei o gráfico da função seno no período de 0 a 2π , no plano hiper-real, e a reta tangente a esta curva no ponto P . Dei um acréscimo dx à x . Para visualizar este acréscimo, os alunos disseram que era necessário um zoom no ponto P .

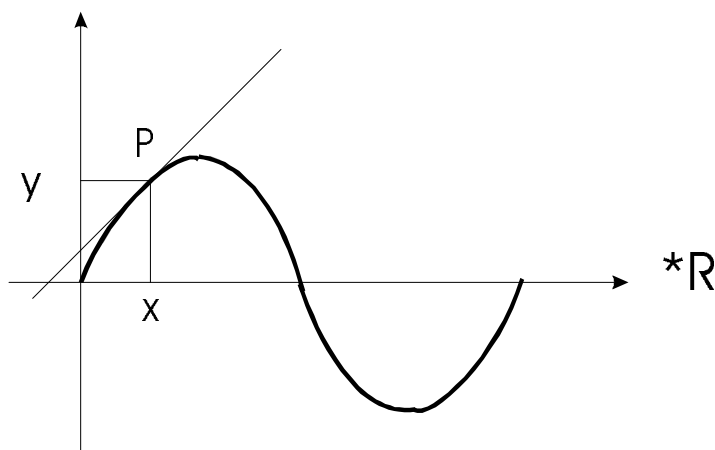


Figura 3.10

Dei, então, um zoom infinito no ponto P e pedi aos alunos que previssem o resultado.

Mino – Vai aparecer uma reta.

Raquel – E o que ela é?

Os alunos – A curva e a reta.

Raquel – E o ponto P ?

Lugo – Agora é que ele vai aparecer!

Raquel – Ele não existia antes?

Lugo – Não, eu estava falando do outro, do $P + \dots$

Lina - $P + dx$

Lugo – Não, $P + dP$.

Todos riram, pois Lina sempre responde dx para um acréscimo infinitesimal.

Lugo – Vai sonhar com dx !

Mino – Quero ver o que ela vai falar no próximo!

Raquel – E os eixos?

Os alunos – Infinitamente distantes.

Quando pedi a ordenada do ponto $P + dP$, Lugo respondeu $f(x + dx)$ e logo em seguida,

Lina disse f de $x + dy$. Mais risos. Mas ela poderia ter pensado em $f(x) + dy$.

Desenhei, então, o resultado. Nenhuma dificuldade neste passo.

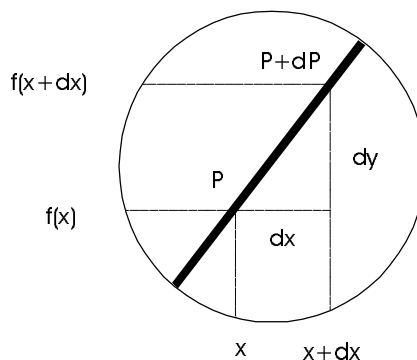


Figura 3.11

As coordenadas dos pontos e os acréscimos foram determinados pelos alunos.

Raquel – Bom, mas a curva e a tangente se coincidem somente em P . Para ver a diferença ...

Lina - Dá um zoom no ponto P .

A resposta que eu esperava era um zoom no ponto $P + dP$. Mas resolvi prosseguir na sugestão de Lina.

Raquel – Como seria?

Lugo – Veria as retas paralelas.

Lugo pode ter decorado que num segundo zoom tem que ver retas paralelas.

Nanda – Mas se aí é o ponto de tangência ...

Os alunos – É uma única reta.

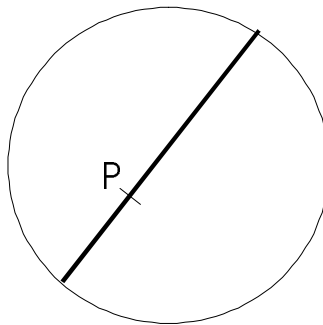


Figura 3.12

Raquel – E para ver a diferença entre as retas?

Lina – Dá um zoom no ponto $P+dP$.

Raquel – O que enxergo?

Lina – Aí sim dá para ver duas retas paralelas.

Raquel – Quem é a de cima e quem é a de baixo?

Os alunos – A de cima é a tangente e a de baixo é a curva.

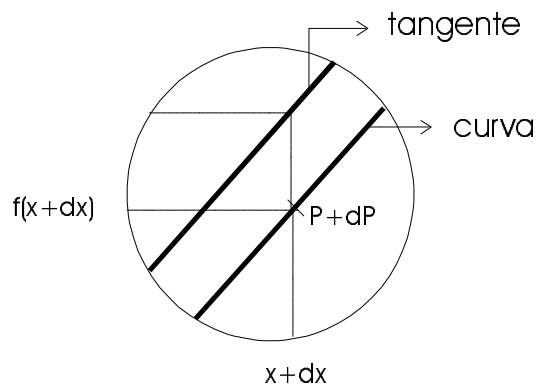


Figura 3.13

As indicações do desenho foram feitas pelos alunos. Pedi a eles quanto valia a distância da tangente até a curva. Esta situação é diferente da trabalhada no primeiro encontro. Lá, tínhamos a parábola em cima da reta tangente, e a diferença era dada por $dy - f'(x)dx$. No presente caso, a tangente está em cima da curva e a diferença é dada por $f'(x)dx - dy$.

Lugo falou que a diferença era um infinitésimo. Lina complementou que era um infinitésimo do infinitésimo. Nanda lembrou que tinha algo a ver com $f'(x)$, coeficiente angular.

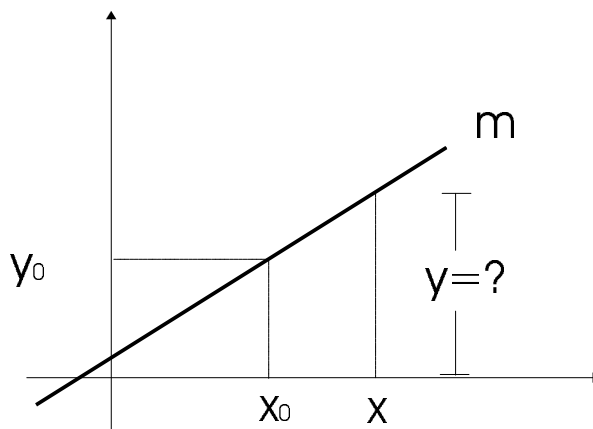


Figura 3.14

A intenção desse desenho é diferente daquela da figura do primeiro encontro (figura 1.8). Aqui, queria que eles dissessem quanto valia a ordenada y . No outro desenho, a intenção era calcular a diferença entre $f(x_2)$ e $f(x_1)$, que de acordo com o atual desenho, entre y_0 e y . Todos as tentativas de resposta eram do tipo “ $y_0 +$ ”. Lugo sugeriu $y_0 + f(x - x_0)$. Testamos e foi verificado que não valia. Eles sabiam que a parte que faltava para y era a distância de y_0 até o ponto da reta. Mino falou em algo sobre o coeficiente angular. Antes de prosseguir seu raciocínio, Lugo tentou $y_0 + (f(y) - f(y_0))$. Conferimos e vimos que dava certo. Pedi, então, uma resposta em função do coeficiente angular m . Mino retomou sua idéia e, com a ajuda dos colegas, calculou o valor de m . Escrevi o que eles disseram: $m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$.

Assim, concluíram $y = y_0 + m(x - x_0)$.

Lina achou que a diferença buscada é mdx , e ajeita para $f'(x)dx$.

Lina – Se aqui [figura 3.14] é assim, lá em cima [3.13] também vai ser.

Nanda e Lugo concordam. Mino diz que não pode ser. Depois, com base no resultado e desenho acima, os alunos trabalharam com o triângulo que apareceu no último zoom. Isto ocorreu também no primeiro encontro.

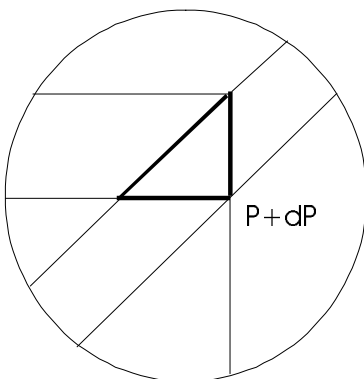


Figura 3.15

Queriam saber que ponto era o vértice à esquerda de $P+dP$ e a distância entre estes pontos, que seria o cateto adjacente. Disse que não daria para determinar este ponto.

Lina – Mas este ponto não é o $f(x+dx)$?

Lina pode ter se confundido no desenho 3.13, pelo fato de eu ter escrito $f(x+dx)$ perto do ponto em questão.

Lugo – É o ponto $P+dP$.

Mino – Não! $P+dP$ está do lado.

A atividade teve que ser interrompida por causa do horário de fechamento do laboratório.

3º Encontro – 18/04/01

Este encontro foi realizado no laboratório didático de computadores do curso de Física e teve uma duração média de 1 hora e quarenta minutos. A reunião não foi no mesmo horário da aula de Cálculo, pois os alunos tinham uma prova desta disciplina. Começamos o encontro, então, após a realização desta prova.

As principais atividades ocorridas no terceiro encontro foram:

- Um roteiro para o cálculo de derivada.
- Cálculo da derivada do seno.
- Interrupção do cálculo algébrico para buscar auxílio do zoom infinito. Não foi utilizado o computador. Os alunos fizeram previsões para o resultado do zoom.
- Checagem destes resultados, solicitados no encontro anterior.
- Término do cálculo algébrico da derivada do seno.
- Distância entre a curva e a reta tangente.

Apresento, agora, os detalhes destas principais atividades.

1. Um roteiro para o cálculo de derivada

Com o objetivo de verificar se sabiam como calcular a derivada de uma função, via abordagem infinitesimal, solicitei aos alunos que falassem um roteiro para este cálculo. No final das discussões, considerando a função $y=f(x)$, eles indicaram o seguinte procedimento, em ordem:

$$1) \quad dy=f(x+dx)-f(x)$$

$$2) \quad \div dx$$

$$3) \quad f'(x)=re\left[\frac{dy}{dx}\right]$$

Apresento, agora, como foi a determinação deste roteiro.

Escrevi $y=f(x)$ no quadro.

Raquel – Você tem uma função e quer calcular sua derivada. Qual a primeira coisa que a gente faria?

Lina – Somar com os infinitésimos.

Raquel – Quem?

Lina – A função.

Lugo – O $y \cdot f(x+\Delta x)$...

Lina – $f(x+\Delta x)$...

Lugo, corrigindo - ... dx

Lina, corrigindo - ... dx

Creio que estavam lembrando da fórmula de dy .

Raquel – Somo um infinitésimo à função e isso origina ...

Lugo e Lina – Um acréscimo no y também.

Raquel – Então, acrescenta um infinitésimo à função e depois no y .

Lina – Não. Acrescenta no y e isso acarreta na função.

Lugo – Não. Acrescenta no x e isso ...

Raquel, para Lina – Acrescenta no y , que não é a função, e depois acrescenta na função.

Lina, rindo – Não, y é a função.

Lugo - Acrescenta ao x e isso origina um acréscimo ao y .

Os alunos concordam

Raquel – Como chamei isso?

Os alunos- dx .

Raquel – O acréscimo ao x , que originava o quê?

Os alunos – dy .

Raquel – Que nome eu dou a dy ?

Lugo – Acréscimo infinitesimal a y .

Raquel – Existe outro?

Nanda sussurra “quase-derivada”. Percebendo esta confusão e o silêncio deles, escrevi no quadro algumas notações que estávamos usando. Falaram da diferença entre $f'(x)$ e $\frac{dy}{dx}$. Quando escrevi $f'(x)dx$, falaram que era o diferencial da função e, logo em seguida, notaram que o nome que eu estava esperando era “quase-diferencial”. Mais uma vez, como nos outros encontros, a confusão e o esquecimento dos nomes foi evidente.

Raquel – Por que “quase”?

Lugo – Porque a diferença é um infinitésimo.

Raquel - Como calculávamos dy ?

Mino e Nanda - $f(x+dx)-f(x)$.

Os outros colegas concordam. O segundo passo foi mencionado como “divide dy por dx ”, e o terceiro como “eliminar a parte infinitesimal da quase-derivada” e “ficar só com a parte real”. Perguntei se tinham algo em mente para lembrar destes passos.

Nanda – É das outras vezes, quando a gente ia resolver um exercício, demonstrar, sempre partia dessa definição.

Eles falaram que estava incorporado.

Para saber se estes passos faziam sentido para eles, perguntei a respeito do motivo pelo qual se executava tais passos.

Raquel - Qual o objetivo deste roteiro?

Lina e Mino – Achar a derivada.

Raquel – Por que começo com dy ?

Lina – Você tem que dar primeiro um acréscimo...

Lugo – Porque a quase-derivada é a inclinação da reta. Se fosse nos reais seria $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Nos hiper-reais é $\frac{dy}{dx}$. Eu divido dy por dx para achar a inclinação da reta.

Raquel - Porque sem o dy não tenho como fazer os próximos passos e nem calcular a derivada. Por que divido por dx ?

Lina – Também. Porque se não tiver o dx não ...

Lugo – Tem que ter os dois [dy e dx].

Raquel – Por que retiro a parte infinitesimal?

Lina – Porque ela é tão pequena, que posso desprezá-la.

Lugo – Porque no conjunto dos reais ela não é nada. No conjunto dos reais, os infinitésimos não significam nada.

Raquel – Como eu defini a derivada? Como a parte real. Por que tenho que tirar a parte infinitesimal? O que eu quero?

Nanda – Porque quero a parte real só.

Os alunos concordaram com Nanda.

O roteiro estava pronto. Do último encontro, fiquei com a impressão de que eles teriam incorporado o processo. Neste terceiro encontro, creio que isto se afirmou.

2. Derivada do seno

Deixei o roteiro escrito no quadro. Lina, não muito satisfeita com minha escolha, foi vai ao quadro, para calcular a derivada de $y = \sin x$. Escolhi Lina, pois dentre os 4 alunos, ela demonstrou cometer mais erros durante os encontros, e assim, poderíamos discutir mais dúvidas, além das que eu estava prevendo para este exercício, como no momento de tomar a parte real do desenvolvimento hiper-real. A solução que eu desejava obter até o momento da análise do zoom, sabendo que poderia haver passos intermediários e erros, era a seguinte:

$$\begin{aligned} dy &= \sin(x+dx) - \sin x \\ dy &= \sin x \cos dx + \sin dx \cos x - \sin x \\ dy &= \sin x(\cos dx - 1) + \sin dx \cos x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{\sin x(\cos dx - 1)}{dx} + \frac{\sin dx \cos x}{dx} \end{aligned}$$

Já tínhamos feito isto no encontro passado.

Lina – O que tenho que fazer? Fazer por isso aqui [roteiro]?

Raquel – O que queremos?

Lina - A derivada.

Mino fala em voz baixa “começa pelo dy ”.

Raquel - O que tenho que fazer?

Lina – Tem que fazer o dy .

Escreve $dy = \sin(x+dx)$, sem olhar para o roteiro. Quando ia começar a dividir por dx , Mino diz “não”. Ela imediatamente pega o apagador e diz que está errado, procurando o que está errado. Mino e Nanda dizem que falta $-\sin x$. Continuando sem entender, ela pergunta “onde $-\sin x$ ”. Mino aponta para o roteiro. Lina confere e escreve o que faltava. Divide, então, por dx , obtendo $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(x+dx) - \sin x}{dx}$. Com a sugestão direta de Mino e Nanda, solicitei que a deixassem resolver da sua maneira. Pensei que ela estivesse seguindo o roteiro e que, então, já tentaria achar a parte real, mas diz que o próximo passo é distribuir, e escreve $\sin x + \sin dx - \sin x$. Espanta-se, pois apenas sobraria $\sin dx$. Ela insiste em multiplicar seno por x . Este erro apareceu em seus cálculos no encontro passado, mostrando que o conceito de seno de uma soma não estava assimilado. Como da outra vez, pergunto que operação existe

entre $\sin x$ e $(x+dx)$. Ela ri e diz “de novo”. Isso não garante que da próxima vez ela não cometerá este erro. Lugo fala $\sin x \cos dx$, e Lina percebe o que deveria ter feito.

Nanda a auxilia, com sua regra “sem troquinha e com misturinha”. Perguntei a Lina sobre o próximo passo, e ela disse que ainda não dava para ver a parte real. Enquanto isso, Lugo falou baixo que o problema era calcular $\sin dx$ e $\cos dx$. No caso particular de Lugo, este era o ponto de passar para o zoom. Mino sugere colocar $\sin x$ em evidência. Assim,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x(\cos dx - 1) + \sin dx \cos x}{dx}$$

Já na elaboração do primeiro passo do roteiro, Lina atrapalha-se ao falar sobre como chegamos à definição de dy . Mesmo concordando com o roteiro e justificando-o, em especial o primeiro passo, não escreve corretamente a definição de dy , quando vai ao quadro. Se ela aceitou a sugestão de Mino para começar pelo dy , ela poderia nem saber como começar a resolução do exercício. A cada passo que Lina iria executar, ela nos perguntava, antes, se poderia ou não fazê-lo. Dessa forma, a sua reação ao “não” de Mino, de prontamente pegar o apagador, fica compreensível. Mostra-se insegura no que está fazendo. Lina nem olhou a definição de dy que estava escrita no quadro, e que ela havia concordado em estar certa.

3. Auxílio do zoom infinito

Chegamos no ponto de passar para o zoom, mas queria que eles sentissem esta necessidade. Lugo diz, novamente, que tem que calcular quem é $\sin dx$ e $\cos dx$. Lina fala que a dificuldade é isolar os termos com dx .

Lugo - dx é infinitésimo, mas isso não significa que $\sin dx$ e $\cos dx$ também são.

Lina começa, então, a fazer estimativas do valor de $\cos dx$ e $\sin dx$, desenhando um círculo trigonométrico, como Lugo fez no encontro passado.

Lina - $\cos dx$ está bem próximo de 1 e $\sin dx$ está bem próximo de zero. Isso $[\cos dx - 1]$ vai dar zero, se $\cos dx$ fosse 1, e isso $[\sin dx \cos x]$ também vai dar zero, se $\sin dx$ fosse zero. Sumiu tudo!

Diante disto tentei sugerir o zoom.

Raquel – Como fazemos para enxergar esses dx .

Mino – Dá um zoom.

Nanda – Um plano cartesiano.

Lugo, acrescentando – Plano cartesiano hiper-real.

Desenhei, então, a figura inicial do círculo trigonométrico, onde aplicaríamos o zoom infinito. Discutimos maneiras de encontrar o seno de um ângulo. As respostas foram na seguinte direção: “A partir do ponto do círculo, representando o final do arco em questão, traçamos uma reta paralela ao eixo horizontal, até encontrar o vertical num ponto. Deste ponto até a origem dos eixos, temos o seno do ângulo”, “Unimos o ponto do círculo até a origem dos eixos, encontrando o ângulo, e, então, calculamos o seno deste ângulo” e, a desejada, “Pelo ponto do círculo, traçamos uma reta paralela ao eixo vertical. A medida do segmento, de extremidades ponto do círculo e ponto de interseção da reta traçada e o eixo horizontal, era o seno do ângulo”. Desejei que eles falassem essa maneira, para que pudesse me remeter a ela quando, no 1º zoom, $\text{sen } dx$ apareceria igual a dx . Para o cosseno, era a medida do segmento de extremidades origem dos eixos e o último ponto antes citado.

Desenhei a figura abaixo, para trabalharmos com o primeiro zoom infinito.

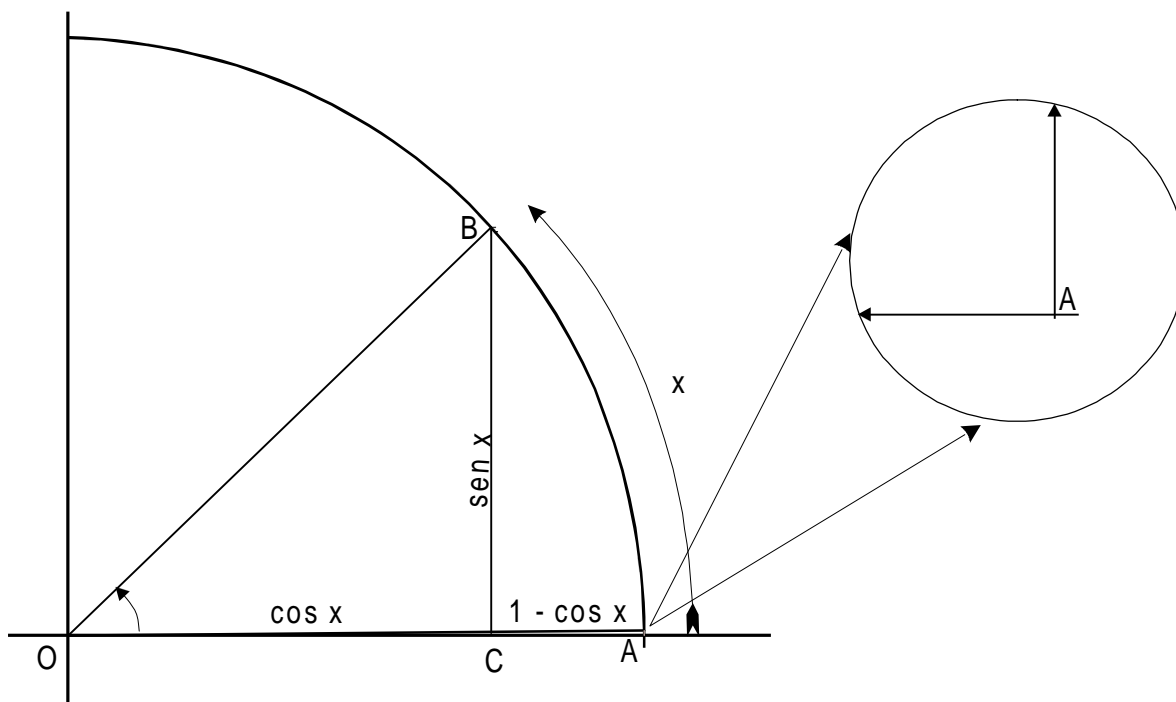


Figura 3.1

Sobre a localização, após o primeiro zoom, os alunos apresentaram idéias do tipo:

- Estamos infinitamente distantes da origem dos eixos;
- Estamos infinitamente próximos do ponto A;

- A reta horizontal que passa por A chegará, no infinito, na origem dos eixos;
- A reta vertical que passa por A formará, no infinito, o círculo.

Isso mostra que os alunos sabiam o que aconteceria, em termos de distância, após um zoom infinito. Estavam bem localizados. Restava saber se suas imagens do resultado se encaixariam na situação descrita acima por eles. Ficou como de tarefa de casa, eles pensarem no resultado dos zooms. Abaixo temos suas imagens desenhadas:

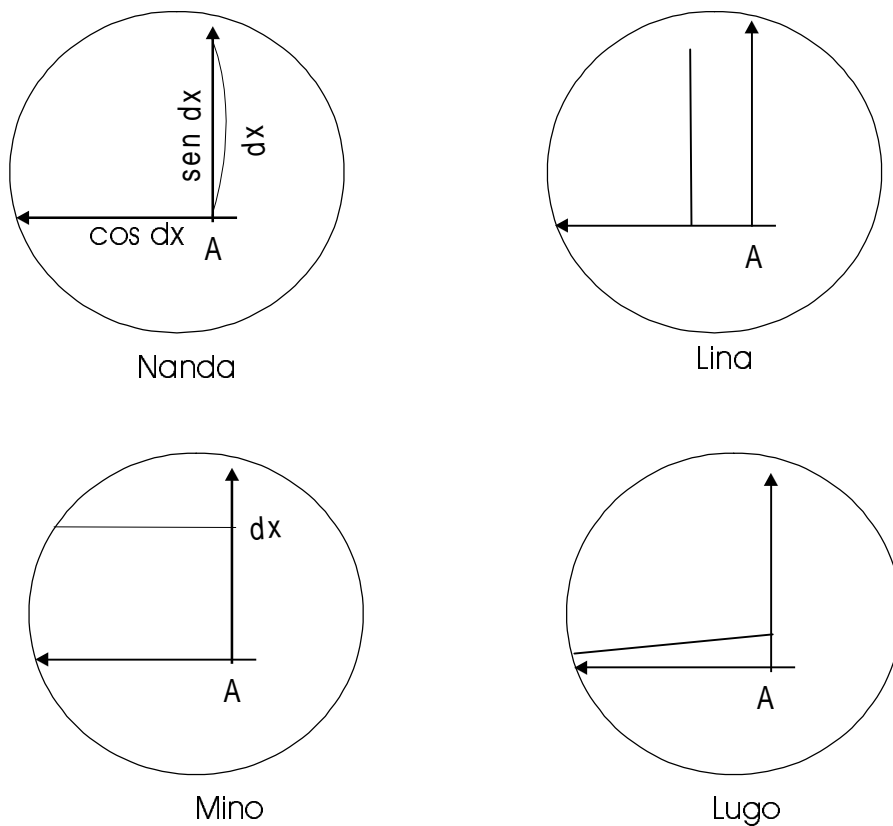


Figura 3.2

O resultado imaginado para o primeiro zoom era o seguinte:

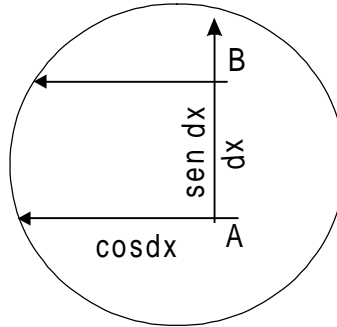


Figura 3.3

No círculo trigonométrico, desenhado anteriormente, B marcava o final do arco x . Na figura acima, B marca o final do arco infinitesimal dx . Depois do primeiro zoom, dx e $\text{sen } dx$ podem ser visualizados e se confundem, como na situação da curva e reta tangente, do primeiro encontro. Neste desenho, $\text{cos } dx$ parece que vai da origem até o ponto A , valendo 1, mas como os alunos falaram, isto é aproximadamente.

As imagens estavam de acordo com o que os alunos responderam sobre a localização depois do primeiro zoom. À medida que um aluno comentava sobre o que havia pensado, os outros concordavam ou discordavam, e assim iam mudando de opinião sobre o que haviam desenhado. Nanda ressaltou que achava que dx e $\text{sen } dx$ estavam quase paralelos. Em suas palavras, “não imaginei que o acréscimo no seno fosse tão infinitamente pequeno e que meu zoom fosse tão grande para poder perceber que tanto o arco e o seno estivessem paralelos já. No segundo zoom sim, eles estariam paralelos.” Eu disse que achava estranho não marcar dx na reta que partia de A , já que eles tinham concordado que esta reta, formaria o círculo e era ali que se marcavam os arcos. Mino e Lugo pensaram como o desenho da figura 3.3. Lina pensou que dx e $\text{sen } dx$ já estivessem paralelos e já havia enxergado a diferença entre $\text{cos } dx$ e 1, antecipando o resultado do segundo zoom em A . Todos acabaram concordando com a posição de dx .

A respeito de $\text{sen } dx$, Lugo sugeriu duas alternativas para o visualizar: $\text{sen } dx$ deveria ser marcado no eixo y , e para enxergá-lo deveríamos dar um zoom no centro do círculo; ou traçar uma reta paralela ao eixo horizontal a partir de B , sendo a distância entre as duas retas, o $\text{sen } dx$. Desenhei esta reta paralela ao eixo horizontal. Concluíram, então, que $\text{sen } dx$ seria marcado no mesmo lugar de dx . Lina justificou esta igualdade através da maneira que desejei

de se marcar o seno, citada anteriormente, mudando sua opinião em relação ao que havia desenhado.

Raquel – Onde vai chegar esta reta que desenhamos?

Lina – No eixo y .

Raquel – E se eu quisesse desenhar um reta que chegasse na origem?

Nanda – Fica difícil de desenhar, pois você não sabe a inclinação.

Raquel – Eu poderia indicar a direção dela, como fiz com esta [reta paralela ao eixo horizontal]?

Os alunos - Pode.

Raquel – Como seria?

Lugo – Praticamente paralela ao eixo x .

Lina – Paralela?

Lugo – Paralela, ué. Duas retas paralelas se encontram no infinito.

Risos.

Nanda – Mas não necessariamente na origem.

Lugo – Mas se a gente está infinitamente longe ...

Mino, explicando o que Lugo havia dito – A reta que vai encontrar a origem e o eixo horizontal vão se encontrar na origem.

Lugo – O infinito aqui, é a origem.

Lugo, então, mudou de idéia em relação ao que tinha desenhado, sobre a reta que chega na origem. Os alunos marcaram como $\cos dx$, a distância do centro do círculo até A . O desenho de Mino foi o que mais se aproximou do resultado esperado. Creio ser normal as diferenças entre as imagens e o desenho esperado, já que o zoom infinito é uma idéia nova para os alunos, e este exercício foi o primeiro que tentaram fazer sozinhos. Acredito que os alunos não mostraram dificuldades nesta etapa.

O resultado do primeiro zoom em A estava pronto.

Raquel – Acabou? Não preciso mais de nenhum zoom, né? Podemos até riscar o segundo círculo que vocês têm desenhado na folha!

Lugo – O $\sin dx$ é aproximadamente igual a dx , e $\cos dx$ é aproximadamente igual a 1.

Lina – Como é?

Lugo – Quase igual, porque a reta representa o seno e o ângulo.

Raquel – Iguais ou diferentes?

Lina – Diferentes. Mas quase iguais. Tem uma diferença.

Lugo – A diferença é um infinitésimo.

Como quase-igual não é o mesmo que igual, estava explicado a necessidade de um segundo zoom infinito. Lina sugeriu dar um zoom no ponto B. Um primeiro resultado a que chegamos foi o seguinte:

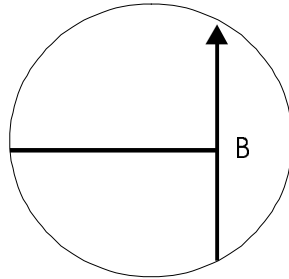


Figura 3.4

Não tinha pensado no zoom neste ponto. Ele criou mais polêmica. Concordaram que a reta horizontal que aparece, é a que chega no centro do círculo e no eixo y . Acima do ponto B , temos o círculo. A questão discutida foi saber como desenhar abaixo deste ponto: uma única reta ou duas. Essa dúvida foi sendo esclarecida, depois de desenhado o segundo zoom no ponto A . Mino foi o defensor de desenhar duas retas abaixo de B , porque achou que já se poderia ver a diferença entre o $\cos dx$ e 1 , neste zoom. Lugo acabou sugerindo que desenhassemos o resultado do segundo zoom em A . Obtivemos o seguinte:

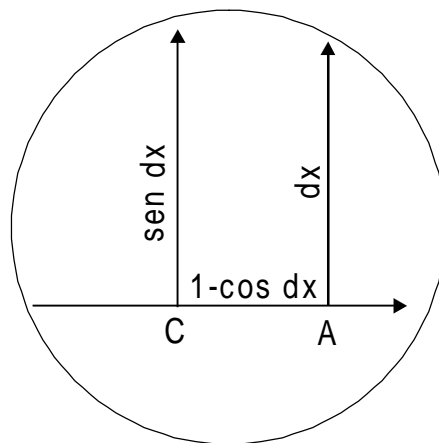


Figura 3.5

Depois desse zoom, continuamos com a reta que parte de A , onde marcamos os arcos. O que aparece é uma fração de dx , como concluiu Lugo. Acharam que poderíamos marcar a diferença entre o $\cos dx$ e 1, e concordam com o lugar onde marquei. Senti que faltou iniciativa por parte deles em escolher um ponto (C) para indicar o final do segmento que representaria o $\cos dx$, neste zoom, e o dx , no primeiro zoom. Falei que o que sabíamos é que era um infinitésimo, mas que o tamanho exato não podíamos saber. Lugo sugeriu desenhar a reta que representaria o $\sin dx$, paralela a dx , partindo de C . Lina afirmou que elas se encontrarão no ponto B , que está infinitamente longe de A .

Lina – E no zoom do ponto B , não poderia ter uma reta paralela bem próxima? Uma seria $\sin dx$ e a outra dx ?

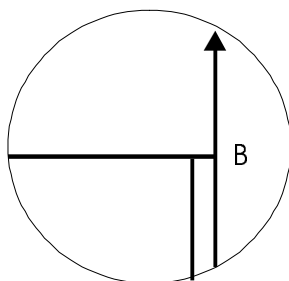


Figura 3.6

Raquel – Mas você disse que elas iam se encontrar no ponto B ! Aqui elas não estão se encontrando.

Lugo – Será que não vai dar para ver as duas chegando no B ?

Raquel – Algo assim?

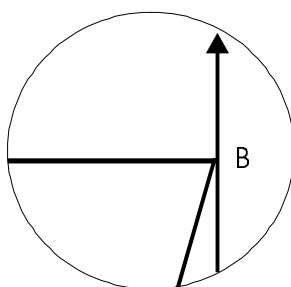


Figura 3.7

Raquel, falando com Mino e Nanda – O que vocês acham?

Mino – É estranho, você tem o mesmo zoom [o do ponto B e o segundo do ponto A]. Se você caminhar [a partir do eixo horizontal, no 2º zoom] infinitamente para cima, com o

mesmo zoom até chegar no B , você teria que ter uma reta paralela a reta desenhada no zoom em B .

Mino deve ter pensado algo do tipo: “Se no zoom em A apareceram duas retas paralelas, no zoom em B , que tem o mesmo poder que o de A , tem que ter duas paralelas também.”

Lugo – Ah, mas aqui [a partir do 2º zoom] vai começar a entortar um pouco, porque $[dx]$ é uma curva.

Lina – É isso aí.

Mino – Eu tenho como noção de curva, na verdade não uma curva. São vários traços pequenos. Infinitos traços que formam uma curva.

Lugo – Curva é um polígono de infinitos traços.

Raquel – Que tamanho eles têm?

Lugo, rindo – Infinitésimo.

Raquel – Como fica a história de ter duas paralelas em cima, já que o zoom tem o mesmo poder?

Mino – Só se você visse esses lados infinitesimais como uma curva, para formar uma circunferência.

Lugo – Tá infinitamente próximo, não quer dizer que é uma reta, mas uma reta um pouco inclinada.

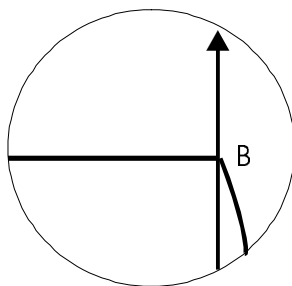


Figura 3.8

Havia me esquecido da Nanda e pedi a ela o que estava achando.

Nanda – Sinceramente?

Raquel – Sinceramente.

Nanda – Eu não consigo visualizar o $\text{sen } dx$ paralelo ao dx .

Achei estranho, pois quando ela explicou o resultado que previa do primeiro zoom em A , ela imaginou as duas retas paralelas depois do segundo zoom.

Mino – É, eu também.

Raquel – Mas como vocês visualizariam?

Nanda – Eu não sei.

Lina – Mas vocês concordaram com a marcação do $\cos dx$ aqui?

Mino e Nanda – Sim.

Lina – Então se está afastado aqui [$\cos dx$ e A], então $\sin dx$ não pode estar encostado com dx .

Nanda – É.

Mino – Seguindo uma linha de raciocínio dos infinitesimais, está perfeito, mas seguindo a minha linha, não dá.

Raquel – Como você faria?

Mino – Agora eu não enxergo, talvez eu tenha que pensar mais um pouco.

Silêncio.

Mino – A não ser que tenha uma prova matemática que prove que duas retas paralelas se cruzam no infinito. Até aceito, mas ... no meu senso comum é difícil imaginar isso.

Raquel – Por quê? Vamos tentar entender.

Lina – É que se tem duas retas paralelas aqui [no segundo zoom em A] ...

Mino – E com o mesmo zoom ...

Lina - ... como elas vão se encontrar?

Mino – É, deveria ter outra reta [no zoom do ponto B].

Lugo – Mas a segunda reta não é reta. É uma curva. É uma curva que parece reta.

Nanda, gesticulando o encontro das duas – É, elas vão se encontrar.

Sugeri pensar como seria o zoom na metade de dx .

Lugo – Vai ver as duas retas um pouco mais próximas. Elas vão ficando cada vez mais próximas, até se encontrarem no ponto B .

Os alunos concordam com o que foi dito e com o desenho feito:

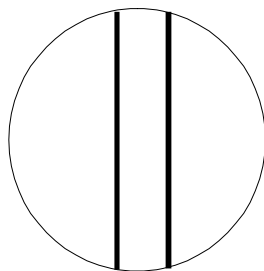


Figura 3.9

Lugo – É eu imaginei isto no começo.

Raquel – Você falou isso?

Lugo – Mais ou menos. Eu só pensei em ver as duas inclinadas em B .

Raquel, para Nanda – E aí?

Nanda – Eu realmente entendi que a reta que sai de A é um arco, não é uma reta. Sei que ela vai se encontrar com a reta do $\text{sen } dx$. Tranquilo. E vi que o desenho que fiz, apesar de não estar coerente com o que está desenhado aí, tem uma certa lógica, pois aquela reta [que sai de A] não é reta, só que eu não dei um zoom não tão infinito como você deu ali.

Creio que só Lugo, e talvez Lina, aceitaram o resultado dos zooms. Nanda e Mino entenderam o que fizemos, mas não imaginariam isto. No próximo encontro, veremos estes resultados no computador, para comparar com o que fizemos. Não utilizei, neste encontro, o computador, pois queria aproveitar as imagens e explicações dos alunos. Centrei-me nisso. Sobre os resultados, é difícil dizer o que é certo e errado. Na verdade, temos que concluir o que faz sentido e o que não faz, como Mino falou. Disse a eles que retomariamos a discussão no próximo encontro.

4. Término do cálculo algébrico da derivada do seno

Retornamos ao desenvolvimento algébrico, por sugestão de Lugo.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{sen } x(\cos dx - 1) + \text{sen } dx \cos x}{dx}$$

Ele disse que se considerar $\text{sen } dx$ igual a dx , $\text{sen } dx \cos x$ vai ser infinitésimo, ficando $dx \cos x$, e além disso, a primeira parcela vai ser zero e, então, cortando dx com dx fica $\cos x$.

Raquel – Mas não é igual [a $\frac{dy}{dx}$].

Lugo – É, só que não é igual. Eu acho que estou misturando um pouco com limite.

Lugo não fez a relação que eu esperava entre os infinitésimos (a de grandeza) e não falou da parte real como sendo a derivada. Falou em termos gerais, sem dar importância para a aproximação.

Mino diz que se considerar o desenho do segundo zoom em A como correto, o $\cos dx$ é 1 menos uma parte. Lina chamou esta parte de dx .

Mino – Não. dx é maior do que esse [a parte] infinitésimo.

Raquel - Por que que esta parte é um infinitésimo?

Lina – Porque $\cos dx$ tá quase igual a 1.

Lugo – Porque é uma distância muito pequena.

Raquel – Porque eu não enxergo ele aqui [indicando o ponto A , no primeiro zoom]. Toda vez que eu dou um zoom e enxergo uma medida, é porque a medida é um infinitésimo. Agora, este infinitésimo [$1 - \cos dx$] em relação a esse [dx] aqui, é maior, menor, igual?

Os alunos – Bem menor.

Raquel – Eu chamo ele [$1 - \cos dx$] de infinitésimo de segunda ordem. Eu tive que dar dois zooms para enxergar ele.

Lugo – Infinitésimo do infinitésimo.

Raquel – Ele é infinitamente menor que o outro, mas ainda infinitésimo.

Lugo – O infinitésimo que é menor que todos infinitésimos.

Raquel – Aí, seria um infinitésimo de ordem infinita. Porque é o menor de todos os infinitésimos.

Risos. Eu não sabia se isso que disse fazia sentido!

Lina – Quando eu falei, aquela hora, que $\cos dx$ era 1 menos dx , eu estava pensando em um infinitésimo, e não como dx .

Lugo – Acho que achei um jeito de resolver usando os infinitésimos.

Ele vai para o quadro e explica.

Lugo - $\cos dx$ é quase igual a 1, mas menor que 1. Então $\cos dx - 1$ vai ser um infinitésimo negativo. Um infinitésimo vezes um número real é infinitésimo. $\sin dx$ é

aproximadamente igual a dx . Então vai ficar $dx \cos x$. A primeira parte é infinitesimal, você despreza. Dividido por dx . Corta dx com dx e chega no $\cos x$.

Mino - Você usou o limite.

Raquel – Você considerou $\sin dx$ igual a dx , não é permitido. A gente sabe que não é igual.

Lugo – A primeira parte é infinitésimo.

Lina – É se você for pensar assim, a segunda parte também é infinitésimo.

Lugo – Sim, mas eu pensei quando a gente tirava a parte infinitesimal como em $2x+dx$ [exercício do primeiro encontro].

Mino – Mas aqui, $\sin dx$ você aproximou para dx .

Lina – Acho que a gente teria que se interessar por $\sin dx$, pois é ali que está a parte real.

Mino sugeriu escrever $\frac{\sin x(-\varepsilon) + \sin dx \cos x}{dx}$.

Sugeri separar a soma em duas parcelas: $\frac{\sin x(-\varepsilon)}{dx} + \frac{\sin dx \cos x}{dx}$.

Raquel – A primeira parte vai dar infinitésimo. Por quê?

Lugo – Porque em cima é um infinitésimo vezes um hiper-real dividido por um infinitésimo.

Mino - Só que esse $[dx]$ é bem maior que o outro $[-\varepsilon]$.

Lugo - Só que quando a gente dividir um infinitésimo por outro pode nem sempre dá um número tão pequeno assim.

Raquel – O de cima é um infinitésimo de primeira ordem, o de baixo é de segunda. Quanto vai dar a divisão?

Lugo – Vai ser um infinitésimo.

Raquel – Um infinitésimo vezes um real $[\sin x]$?

Os alunos – Infinitésimo.

Perguntei sobre a divisão $\frac{\sin dx}{dx}$ da segunda parcela. Lina diz que resultará num infinitésimo, mas muda de opinião quando Lugo e Mino explicam que “ $\sin dx$ é próximo de dx , mas não é dx . É um infinitésimo da mesma forma que dx . Então o resultado será

próximo de 1". Conferimos, depois, o resultado da divisão no primeiro zoom em A , quando as retas estão coincidentes.

Raquel – Uma coisa infinitamente próxima de 1 vezes $\cos x$...

Os alunos – $\cos x$.

Raquel – Então, tenho um infinitésimo mais algo que está infinitamente próximo de $\cos x$.

Escrevo $\frac{dy}{dx} \approx \cos x$.

Lugo – Mas aí não está pensando em limite?

Raquel – Por quê?

Lugo – Tá bem próximo de 1. A gente tá aproximando que um número bem próximo de 1 vezes o coseno é um número bem próximo do coseno, mas não é o coseno.

Raquel – Não é o coseno.

Pausa.

Raquel – Qual é o último passo?

Lugo – Pegar só a parte real, mas já pegou!

Mino - Escreve $f'(x)$ igual a $\cos x$.

Lugo – É que eu estava estranhando porque $\frac{\text{sen } dx}{dx}$ sobre dx é um número ... tá na mônada do 1, tá perto de 1, mas não é 1.

Raquel - Vamos multiplicar isso por $\cos x$.

Lugo – Então, vai dar infinitamente próximo de $\cos x$.

Escrevo $\frac{\text{sen } dx}{dx} \cos x \approx \cos x$.

Lugo - A gente tá aproximando para $\cos x$.

Mino sugere escrever $\frac{\text{sen } dx}{dx} \cos x \approx \cos x \approx \frac{dy}{dx}$.

Lugo – Ah, tá. Acho que entendi. $\frac{dy}{dx}$ igual a $\cos x$ mais um infinitésimo.

Lina – Aí se vai desprezar o infinitésimo.

Lugo – Agora eu entendi.

Lugo ficou estimulado a fazer a derivada do coseno.

Lugo pensou que já houvesse acabado o cálculo, e que inclusive já havíamos tomado a parte real. Na verdade, nas suas tentativas que chegavam em $\cos x$, ele fazia as aproximações, mas pensava que estava chegando na derivada e não na quase-derivada, além de passar por cima da relação entre os infinitésimos de ordens diferentes.

Com este encontro podemos notar que não houve dificuldade em lembrar da definição de quase-diferencial ($dy = f(x+dx) - f(x)$), o que ocorreu nos encontros anteriores. Creio que isto se deve a prática realizada até este momento e o próprio entendimento dos alunos. Apenas Lina mostrou resistência a esta definição. A nomenclatura ainda estava um pouco confusa para eles.

5. Distância entre a curva e a reta tangente

Foi difícil para os alunos, no primeiro encontro, justificar a expressão para a distância entre a curva x^2 e a reta tangente. Resolvi, fazer o mesmo exercício com a curva $\sin x$, para ver o que havia ficado para eles da discussão do primeiro encontro.

Desenhei o gráfico da função seno no período de 0 a 2π , no plano hiper-real, e a reta tangente a esta curva no ponto P . Dei um acréscimo dx à x . Para visualizar este acréscimo, os alunos disseram que era necessário um zoom no ponto P .

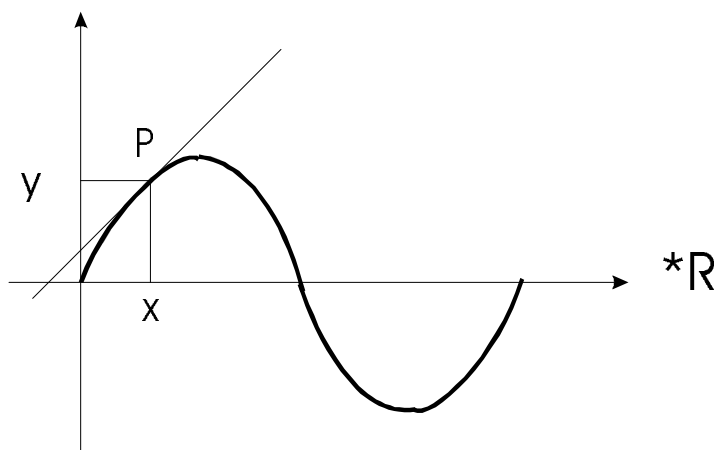


Figura 3.10

Dei, então, um zoom infinito no ponto P e pedi aos alunos que previssem o resultado.

Mino – Vai aparecer uma reta.

Raquel – E o que ela é?

Os alunos – A curva e a reta.

Raquel – E o ponto P ?

Lugo – Agora é que ele vai aparecer!

Raquel – Ele não existia antes?

Lugo – Não, eu estava falando do outro, do $P + \dots$

Lina - $P + dx$

Lugo – Não, $P + dP$.

Todos riram, pois Lina sempre responde dx para um acréscimo infinitesimal.

Lugo – Vai sonhar com dx !

Mino – Quero ver o que ela vai falar no próximo!

Raquel – E os eixos?

Os alunos – Infinitamente distantes.

Quando pedi a ordenada do ponto $P + dP$, Lugo respondeu $f(x + dx)$ e logo em seguida,

Lina disse f de $x + dy$. Mais risos. Mas ela poderia ter pensado em $f(x) + dy$.

Desenhei, então, o resultado. Nenhuma dificuldade neste passo.

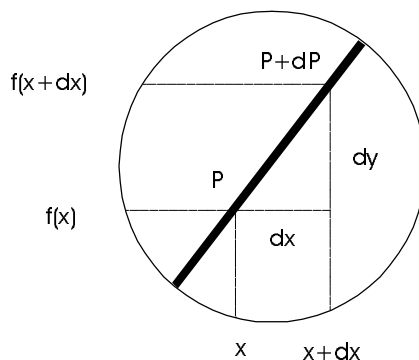


Figura 3.11

As coordenadas dos pontos e os acréscimos foram determinados pelos alunos.

Raquel – Bom, mas a curva e a tangente se coincidem somente em P . Para ver a diferença ...

Lina - Dá um zoom no ponto P .

A resposta que eu esperava era um zoom no ponto $P + dP$. Mas resolvi prosseguir na sugestão de Lina.

Raquel – Como seria?

Lugo – Veria as retas paralelas.

Lugo pode ter decorado que num segundo zoom tem que ver retas paralelas.

Nanda – Mas se aí é o ponto de tangência ...

Os alunos – É uma única reta.

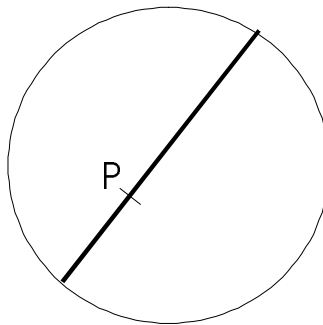


Figura 3.12

Raquel – E para ver a diferença entre as retas?

Lina – Dá um zoom no ponto $P+dP$.

Raquel – O que enxergo?

Lina – Aí sim dá para ver duas retas paralelas.

Raquel – Quem é a de cima e quem é a de baixo?

Os alunos – A de cima é a tangente e a de baixo é a curva.

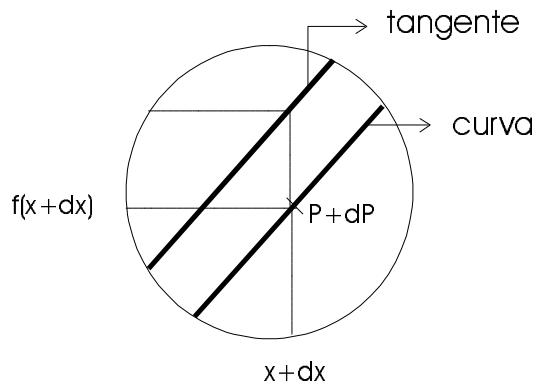


Figura 3.13

As indicações do desenho foram feitas pelos alunos. Pedi a eles quanto valia a distância da tangente até a curva. Esta situação é diferente da trabalhada no primeiro encontro. Lá, tínhamos a parábola em cima da reta tangente, e a diferença era dada por $dy - f'(x)dx$. No presente caso, a tangente está em cima da curva e a diferença é dada por $f'(x)dx - dy$.

Lugo falou que a diferença era um infinitésimo. Lina complementou que era um infinitésimo do infinitésimo. Nanda lembrou que tinha algo a ver com $f'(x)$, coeficiente angular.

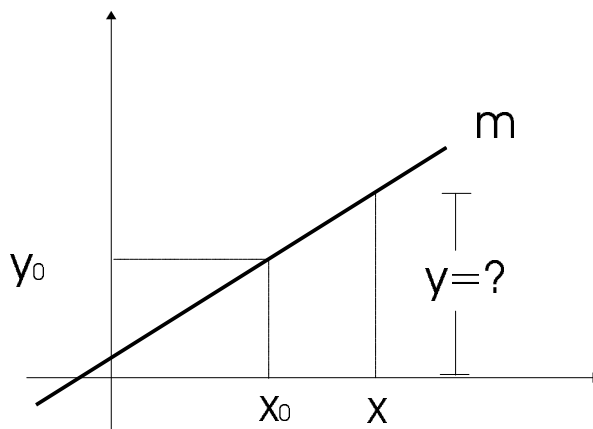


Figura 3.14

A intenção desse desenho é diferente daquela da figura do primeiro encontro (figura 1.8). Aqui, queria que eles dissessem quanto valia a ordenada y . No outro desenho, a intenção era calcular a diferença entre $f(x_2)$ e $f(x_1)$, que de acordo com o atual desenho, entre y_0 e y . Todos as tentativas de resposta eram do tipo “ $y_0 +$ ”. Lugo sugeriu $y_0 + f(x - x_0)$. Testamos e foi verificado que não valia. Eles sabiam que a parte que faltava para y era a distância de y_0 até o ponto da reta. Mino falou em algo sobre o coeficiente angular. Antes de prosseguir seu raciocínio, Lugo tentou $y_0 + (f(y) - f(y_0))$. Conferimos e vimos que dava certo. Pedi, então, uma resposta em função do coeficiente angular m . Mino retomou sua idéia e, com a ajuda dos colegas, calculou o valor de m . Escrevi o que eles disseram: $m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$.

Assim, concluíram $y = y_0 + m(x - x_0)$.

Lina achou que a diferença buscada é mdx , e ajeita para $f'(x)dx$.

Lina – Se aqui [figura 3.14] é assim, lá em cima [3.13] também vai ser.

Nanda e Lugo concordam. Mino diz que não pode ser. Depois, com base no resultado e desenho acima, os alunos trabalharam com o triângulo que apareceu no último zoom. Isto ocorreu também no primeiro encontro.

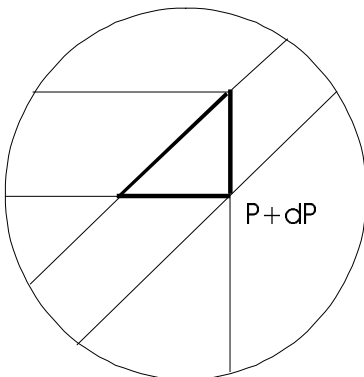


Figura 3.15

Queriam saber que ponto era o vértice à esquerda de $P+dP$ e a distância entre estes pontos, que seria o cateto adjacente. Disse que não daria para determinar este ponto.

Lina – Mas este ponto não é o $f(x+dx)$?

Lina pode ter se confundido no desenho 3.13, pelo fato de eu ter escrito $f(x+dx)$ perto do ponto em questão.

Lugo – É o ponto $P+dP$.

Mino – Não! $P+dP$ está do lado.

A atividade teve que ser interrompida por causa do horário de fechamento do laboratório.

4º Encontro – 25/04/01

Este encontro foi realizado no laboratório didático de computadores do curso de Física e teve uma duração média de 1 hora e quarenta minutos. Em termos gerais, nesta reunião, trabalhamos com a visualização dos infinitesimais envolvidos no cálculo da derivada do seno, através do Corel Draw, com o objetivo de clarear possíveis dúvidas e reforçar a idéia do zoom infinito. Também com o auxílio do computador, estudamos uma aplicação da integral definida, provando intuitivamente um dos teoremas fundamentais do Cálculo. As principais atividades ocorridas no quarto encontro foram:

- Checagem, no Corel Draw, do trabalho feito no encontro anterior sobre a derivada do seno. Através de perguntas, tentei fazer com que os alunos retomassem o que havíamos concluído. Depois das respostas, eu mostrava os resultados.
- Aplicação da integral definida como área sob o gráfico de uma função, com o auxílio do computador.
- Demonstração do segundo teorema fundamental do cálculo. Foi comandada por mim, mas, como sempre, com o auxílio dos alunos.
- Auxílio do zoom no computador numa das passagens finais da demonstração algébrica do teorema. As conclusões tiradas a partir da visualização do computador foram feitas muitas vezes pelos alunos, a partir de perguntas minhas do tipo: *o que vocês estão vendo?* e *o que isso quer dizer?*
- Discussão final

Apresento, agora, os detalhes destas principais atividades.

1. A derivada do seno no ambiente do Corel Draw

Da experiência do primeiro encontro, quando a visualização dos resultados dos zooms não ficou muito clara, reorganizei estes resultados exibindo-os no modo Aramado do software Corel Draw. Isto possibilitou uma idéia mais clara do trabalho com o zoom. Retomamos algumas idéias vistas no encontro passado que foram trabalhadas no quadro. Os alunos começaram justificando a aplicação do zoom, ou seja, para visualizar os elementos infinitamente pequenos. Antes de vermos os resultados do zoom no computador, solicitei que antecipassem o que aconteceria. Queria ver se lembravam do que havia sido concluído, e se as dúvidas que surgiram no encontro passado surgiriam novamente.

Raquel – Depois do primeiro zoom em A , o que víamos?

Lugo e Lina – $\sin dx$ igual ao dx .

Conferimos no computador. Neste momento, só tínhamos o desenho do caso finito no monitor.

Raquel – Dando outro zoom infinito em A , o que acontecia?

Lina – Via a separação das duas.

Nanda – Ficavam paralelas.

Conferimos, atingindo o máximo poder de aproximação do software. Visualizamos $1 - \cos dx$. Expliquei que o número 405651% que aparecia no monitor era relativo ao máximo de zoom alcançado. Com este zoom, a figura inicial ficava 4.056,51 vezes maior. Isto era uma aproximação para o que estávamos chamando de zoom infinito.

Raquel - $1 - \cos dx$ em relação a dx é o quê?

Silêncio. Queria que lembrassem do infinitésimo de segunda ordem.

Raquel – Onde está o dx ?

Apontaram para a respectiva reta no monitor.

Raquel – Podemos ver o fim dele?

Os alunos – Não.

Voltamos ao primeiro zoom para enxergá-lo.

Raquel - Para vermos $1 - \cos dx$ tivemos que dar um zoom infinito, então o que ele é em relação a dx ?

Mino - Perpendicular.

Raquel – Certo, e em termos de grandeza? Quem é maior que quem?

Nanda e Mino – dx é maior.

Raquel – Se tivemos que dar um zoom infinito para enxergá-lo, o que ele é?

Os alunos - Infinitésimo.

Raquel – Quantos zooms dei no ponto A para enxergá-lo?

Mino – 2.

Lina – Vários.

Raquel, referindo-me a Lina – Ok, e quantos infinitos?

Lina – 2.

Lugo falou que $1-\cos dx$ era um infinitésimo de segunda ordem, e os demais concordaram. Retomei, por causa da resposta de Lina, que a ferramenta *zoom* do Corel Draw é uma maneira para compreendermos o zoom infinito, sendo que para termos idéia do que isso seria, deveríamos executar várias vezes o zoom do software. Passamos a analisar o que ocorria no ponto B . Lembrei a eles que este zoom havia causado polêmica, no encontro passado. Antes de verificarmos no computador, Lugo foi ao quadro para desenhar o resultado. Ele identificou, inicialmente, apenas a reta que encontraria a origem do sistema.

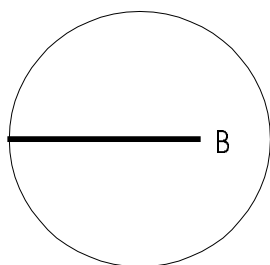


Figura 4.1

Já que esta reta e a que encontraria o eixo vertical não eram paralelas, Lugo achou que poderíamos enxergar, após o zoom infinito no ponto B , a bifurcação entre as duas retas. Esta idéia não havia surgido no encontro passado. Os colegas discordaram, dizendo que estariam sobrepostas, e que se diferenciariam sim, porém, mais adiante. Com a opinião dos colegas e com a visualização das duas retas nos casos infinitesimal e finito, Lugo acaba concordando.

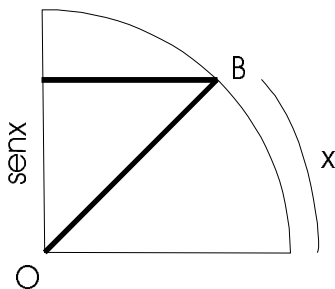


Figura 4.2 – As retas no caso finito.

Raquel - E abaixo do ponto B ?

Os alunos – Tem $\sin dx$ e dx .

Raquel - Como enxergaremos?

Os alunos – Vão aparecer juntas [as retas].

Não surgiram as dúvidas do encontro passado sobre isso. As hipóteses eram as figuras 3.4, 3.6, 3.7 e 3.8.

Nanda – Elas vão ter que se encontrar no ponto B .

Raquel – É a mesma situação que as outras duas retas [que partem de B e chegam uma na origem e outra no eixo vertical]?

Os alunos – Sim.

Nanda – Só que quem vai fechando é o dx . $\text{sen } dx$ é paralelo ao eixo y e dx é curvo.

Lugo – É, no caso anterior a diferença é que tinha duas retas mesmo.

Conferimos no computador. Pode ser que a utilização do computador tenha ajudado na visualização.

Mino – E se der um zoom na origem? Vão ser paralelas, né?

Eu não tinha este resultado feito no computador. Então imaginamos. Lugo desenhou, baseado num caso finito, a figura abaixo, afirmando que as retas seriam coincidentes, discordando de Mino. Lina e Nanda concordaram com Lugo.

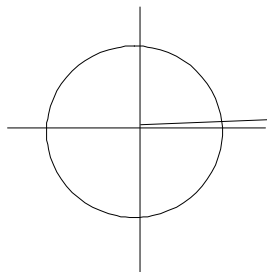


Figura 4.3

Mas Mino estava considerando outras retas: a que partia de B e chegava no eixo vertical do sistema e reta considerada o eixo horizontal. Neste caso, todos concordaram que elas seriam paralelas, mas que com um zoom na origem não conseguiríamos enxergar a primeira das retas consideradas. Lugo ainda pensou em outras duas retas: a que partia de B e que chegava no eixo vertical e a que também partia de B e que chegava na origem. No caso sugerido por Mino, Lugo disse que as retas iam “chegar” separadas. Pedi sobre a distância entre elas. Todos responderam dx . Interpretei o “chegar separadas”, como uma chegando na origem e outra no ponto $(0, dx)$. Lugo ainda acrescentou que era só pensar no “caso normal” para checar o fato. Ele estava se referindo ao caso finito.

Lugo – Espera aí! A distância será $\text{sen } dx$.

Todos pensam, inclusive eu.

Lugo – O $\sin dx$ e o dx são muito parecidos, mas não são iguais!

Ele estava certo. Lina discordou.

Raquel, para Lugo – Defenda sua idéia!

Ele explicou utilizando o caso infinitesimal, se baseando num sistema de eixos e num círculo finito, mas muito pequenos. Todos concordaram.

Depois do esclarecimento sobre a situação das várias retas após os zooms, pedi sobre um zoom no meio do arco dx que aparecia igual ao segmento $\sin dx$. Eles anteciparam que as “retas” estariam paralelas, condizendo com o que desenhamos no encontro passado (figura 3.9). Conferimos no computador. Os alunos concordaram com todos resultados obtidos com o zoom no computador. As dúvidas do encontro passado não haviam aparecido. Acredito que a visualização através do Corel Draw auxiliou os alunos a compreenderem mais nitidamente o que ocorria no contexto geométrico. Foi importante eles preverem, no encontro passado, os resultados dos zooms, para notar que muito da intuição deles fazia sentido.

Raquel, para Mino – Você pensou sobre a dúvida que você tinha no encontro passado? A respeito de como seria para baixo do ponto B ?

Mino – Pensei e até demais.

Nanda – Ontem a gente ficou falando sobre isso.

Mino, rindo – É, mas não vem ao caso o que pensei.

Lugo - Qualquer coisa que a gente via, relacionava com isso aí.

Risos.

Nanda – Mas é sério! A maneira de você observar ...

Mino - Você colocou mais dúvidas do que eu já tinha na minha cabeça.

Raquel – Não era a minha intenção, confundir vocês.

Mino - Mas isso é bom!

Raquel – Se vocês tiverem mais dúvidas a gente pode conversar durante a aula da Miriam, a qualquer hora.

Mino – Não, não foram dúvidas a respeito disso. Pelo contrário, isso ajudou bastante a visualizar no Cálculo. Bem melhor que visualizar por limite, eu achei. Você vê a coisa.

Lugo – É que na quarta passada a gente ficou extrapolando. A gente começou a juntar isso aí com um monte de coisas, teorias, caos ...

Nanda – Fractal.

Devia ter insistido neste assunto, para ver qual relação estabeleceram com o que estávamos trabalhando.

2. Uma aplicação da integral definida: área sob o gráfico de uma função

Desenhei a figura abaixo no quadro:

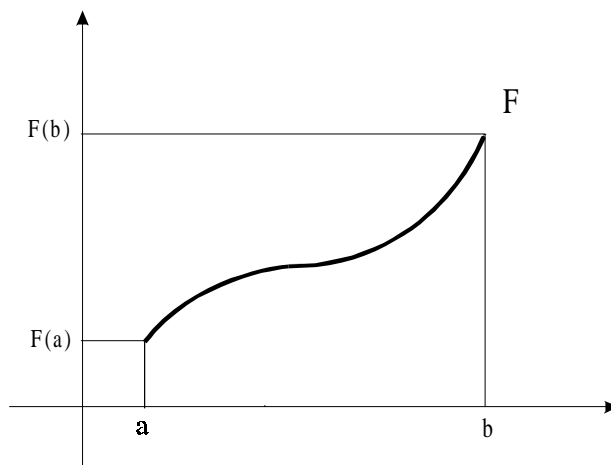


Figura 4.4

Pedi a eles se já haviam discutido a noção de área com o professor de Física. Com a Profa. Miriam ainda não, pois eu estava acompanhando as aulas regulares. Mas o professor de Física estava mais adiante, se considerarmos um programa tradicional de Cálculo.

Nanda - Discutimos um pouco.

Mino – A gente tinha um gráfico de velocidade pelo tempo. Se a gente calculasse a área embaixo do gráfico, a gente tinha o espaço.

Lina – A integral, achava o espaço.

Lugo - Se fosse uma figura perfeita, um quadrado, um retângulo dava calcular pelas fórmulas da geometria. Mas se não fosse, usava integral, que é uma aproximação.

Raquel - Por que usava integral? O que significa integral? Quando falo integral o que vocês lembram?

Lina - Alguma coisa que está acima de outra. Por exemplo, você tem a velocidade, que vem antes, seria o espaço.

Mino – Seguindo essa seqüência, você pega o espaço, deriva e chega na velocidade.

Lina - É uma coisa que vem primeiro, primitiva. Volta no que tinha antes.

Raquel - Qual o símbolo?

Eles desenham “no ar” \int e Lugo diz que é um S esticado. Desenho o símbolo.

Raquel - Vocês sabem o que é isso?

Lina – Não.

Lugo – Somatório.

Desenho o símbolo do somatório.

Raquel - Qual a relação?

Lugo - A soma. S de soma.

Raquel - Tem uma diferença. Por que esticaram o S. Para que inventariam outro símbolo?

Lugo - A integral é uma soma?

Raquel - O que vocês acham?

Mino - É uma soma.

Lugo - É, é uma soma de várias arezinhas pequeninhas.

Nanda - Se você calcular a área deste gráfico aí, teria que ter essa idéia [a de Lugo]. Subdividiria em pontinhos pequenos, pequenas coisinhas depois somaria tudo e acharia a área desse gráfico.

Lugo - A largura de cada retângulo desses seria um infinitésimo e a altura seria um número real comum.

Fiquei surpresa com estas respostas e perguntei se o professor de Física ou a Profa. Miriam havia falado em infinitésimo. Eles disseram que não.

Raquel, para Lugo – Infinitésimo, você tirou daqui, então?

Lugo – Sim.

Comentei sobre a notação que a gente usa hoje vem de Leibniz.

Raquel – Como seria dividir esta área em coisas pequenas?

Lina - Quando a gente tinha uma curva [como em $\sin x$, em x^2], a gente dava zoom, e ela parecia uma reta. Então se a gente desse zooms sucessivos você ia achar retas e ia somando estas áreas que seriam regulares.

Lugo – Você poderia pegar vários retangulinhos que iam até a curva e como esses retangulinhos tinham largura extremamente pequena, a diferença entre a área de todos os retangulinhos somados e a área da figura ia ser muito pequena.

A forma de calcular a área sob o gráfico de uma curva, via abordagem infinitesimal, havia sido, então, apresentada pelos alunos. Não sabia se eles tinham idéia de como fazer o mesmo através do limite.

Raquel – E como seria calcular esta área pelo limite? Vocês tem alguma noção?

Lugo - Você pegaria os quadradinhos cada vez mais diminuindo, até tender a zero.

Raquel - E como é que áreas iam se tornando cada vez menores?

Mino – Você pegaria intervalos cada vez menores.

Raquel - Quem faz esses intervalos diminuir?

Silêncio.

Raquel - Que ferramenta matemática faz isso?

Nanda - Infinitésimos.

Raquel – Você começa com um certo número de intervalos. Depois você diminui ...

Mino - É só multiplicar por um número pequeno, você diminui.

Raquel - E se eu quiser diminuir ainda mais?

Mino - Você multiplica por um infinitésimo.

Raquel – Como assim?

Lugo – Acho que entendi o que ele falou.

Lugo desenha um segmento de reta no quadro e explica dizendo que se quiséssemos reduzir ele à metade bastava multiplicar por $\frac{1}{2}$, se quiséssemos ainda a metade disso, era para multiplicar por $\frac{1}{2}$ de novo, e assim por diante. Se quiséssemos diminuir muito, bastava multiplicar por um infinitésimo. Mino disse que era isso o que estava querendo dizer.

Raquel – Ok, você vai dividindo, dividindo, mas que ferramenta matemática me faz chegar num intervalo muito pequeno?

Mino - O zoom?

Lugo - Limite ou infinitésimo, dependendo da forma de utilização.

Raquel - É, se eu chamar o intervalo de Δx , para diminuí-lo eu escrevo $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0$.

Quando vocês aprenderem limite vocês vão ver que dá zero isso.

Lugo - Os livros que eu trouxe fazem uma equivalência entre limites e infinitésimos.

Raquel - Ele trouxe dois livros para a gente olhar, que tem o título “Cálculo Infinitesimal”, mas que na verdade utilizam limite. Eles definem infinitésimo através do

limite, como uma variável que tende a zero. É diferente do que estamos fazendo aqui. Infinitésimo é um número.

Desde que eu perguntei sobre como seria calcular a área através do limite, o tempo todo eu estava querendo que eles respondessem em termos de limite, mas o tempo todo eles estavam pensando em infinitésimos. Isto para quem me respondeu, principalmente Mino. As meninas não se manifestaram.

Raquel - Vou dividir este intervalo em uma partição infinitesimal, em vários pedacinhos, de modo que se eu tomar um valor x do intervalo, o ponto seguinte distará quanto de x ?

Lina - dx .

Raquel - Isso, um infinitésimo. Se eu quiser ver a diferença entre eles ...

Lina - Dá um zoom em x .

Lugo - Ou em qualquer outro ponto [do intervalo].

Raquel - Isso, já que é uma partição infinitesimal.

Vimos como seria este zoom no computador, baseados na figura abaixo.

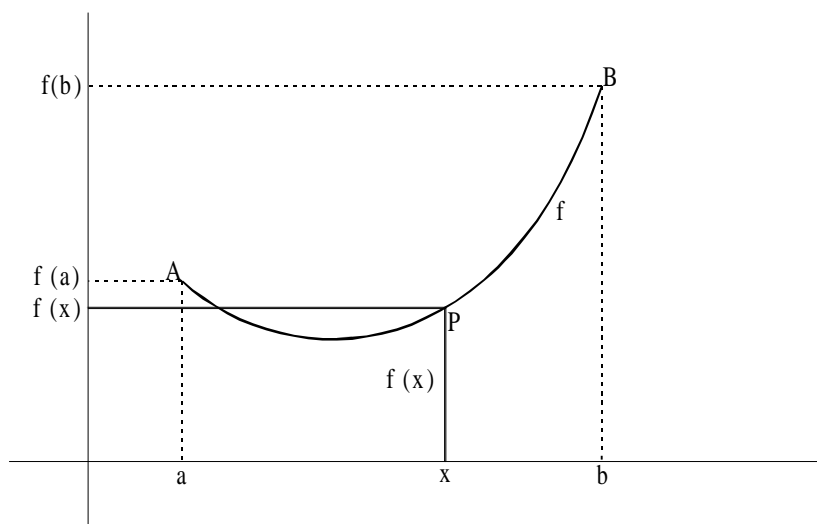


Figura 4.5

Estávamos desejando calcular a área abaixo desta curva. Com o zoom no ponto P , obtivemos a figura a seguir.

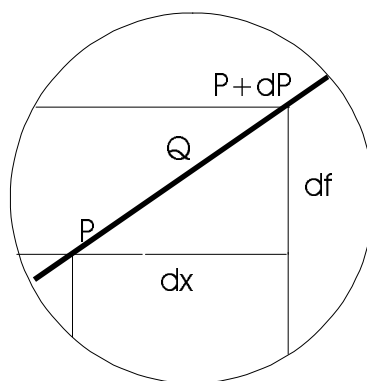


Figura 4.6

Raquel - Quem é df ?

Lina – É a diferença do $f(x)$ e $f(x+dx)$.

Raquel - Isso, é o acréscimo à função f a partir do acréscimo dx a x . Então surge $P+dP$, que um ponto da onde?

Os alunos - Curva.

Eles perguntaram sobre o ponto Q . Disse que mais tarde iríamos utilizá-lo.

Raquel – Como vou calcular, então, a área abaixo da curva. Esta porção de área aqui [que, no zoom, vemos apenas uma parte] é grande, pequena?

Os alunos – Pequena.

Lina – Pequeníssima.

Lugo – Tem base dx e altura $f(x)$, então multiplicando vai dar um infinitésimo.

Eu estava considerando o trapézio, mas tudo bem.

Raquel – Vamos chamar ela de dA .

Fui para o quadro para calcular a área (A) da região sob a curva de a até b . Expliquei que o símbolo de integral queria dizer que iríamos somar infinitas parcelas. Escrevi $A = \int_a^b dA$.

Pedi a eles que tentassem escrever dA . Lina disse $\frac{df \cdot dx}{2}$.

Lugo – Mas eu pensei que dA fosse tudo.

Confirmei o que Lugo disse e Mino, então, sugeri $\int_a^b \frac{dx \cdot df}{2} + f(x)dx$, como sendo a soma do triângulo e o retângulo que formam o trapézio. Disse que já poderíamos dar um

significado ao que a Profa. Miriam estava fazendo nas aulas regulares, quando escrevia $\int f(x)dx = F(x) + c$ (primitiva mais uma constante), ou seja, uma soma infinita de um retângulo de base dx e altura $f(x)$. Assim, o primeiro membro não era um símbolo único.

Mino, antecipando – Aí a gente vai pegar só a parte real de novo agora?

Raquel – Sim. Mas calma.

Voltamos ao computador.

Raquel – Por que será este ponto Q ? Vocês acham que o dA é exatamente isto [escrito no quadro]?

Lugo – Não.

Lina - Tem uma diferença.

Lugo - Não, porque é uma curva e não uma reta. Tem uma aproximação.

Raquel – Isso. P e $P+dP$ estão unidos por uma reta, para formar o triângulo. Este ponto Q é da curva. O que vocês acham que vai acontecer quando a gente chegar perto de Q ?

Lina – Vai ver a distinção entre a curva e a reta.

Raquel – E bem perto de Q , como serão?

Lina – Paralelas.

Conferimos com o zoom.

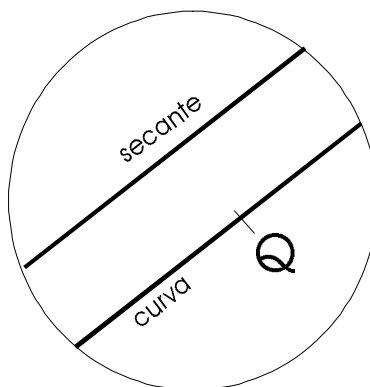


Figura 4.7

Eles localizaram a reta secante como estando em cima da curva. Disse que dA é um trapézio com um dos lados curvos.

Raquel – Na expressão que escrevemos, estamos pegando área a mais ou a menos?

Os alunos – A mais.

Raquel – Isto. Então estou considerando que o dA é mais do que ele realmente é. Para consertar isto, utilizamos \approx .

Consertei o que tínhamos escrito, $A = \int_a^b dA \approx \int_a^b \frac{dx \cdot df}{2} + f(x)dx$. Eles sabiam das aulas

regulares que a integral de uma soma é a soma das integrais. Escrevi $\int_a^b \frac{dx \cdot df}{2} + \int_a^b f(x)dx$. Na

primeira parcela temos a soma de infinitésimos de segunda ordem. Intuitivamente, os alunos disseram que o resultado seria também infinitésimo. Não perguntei sobre a ordem deste infinitésimo, pois não tinha certeza. Mas o importante era ser infinitésimo. Assim,

concordaram em escrever $A \approx \int_a^b f(x)dx$.

Faltou eu concluir que, na verdade, tomamos como a área a parte real desta integral, o que Mino já havia sugerido anteriormente.

Raquel – Mas como se calcula a área de uma região como esta [do quadro]? Como vou somar infinitas parcelas infinitesimais?

Tomei como exemplo a região sob a curva x^2 entre as abscissas 1 e 3. Eles sabiam calcular, através do resultado do segundo teorema fundamental do Cálculo.

Raquel – Por que isto vale?

Lugo – Porque você pega a primitiva e calcula nos valores.

Raquel - Por que a primitiva?

Os alunos - Porque derivando volta na função.

Raquel - Generalizando, como fica?

Lugo citou: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

3. Demonstração do segundo teorema fundamental do Cálculo

Raquel – Então, por que que essa soma de infinitas parcelas infinitesimais vai dar alguma coisa com a primitiva? Vamos provar isto, então, na abordagem infinitesimal. Como escrevo a propriedade de F ?

Os alunos - $F'(x) = f(x)$.

Comandei a demonstração do segundo teorema fundamental do Cálculo, com o auxílio dos alunos. Partimos de $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx$.

Raquel – Vocês lembram quem era $F'(x)dx$? Estava naquela folha que entreguei no primeiro encontro.

Lina – Diferencial.

Raquel – De quem?

Lina – Da quase-derivada.

Lugo – Da função F .

Raquel – Como eu chamava o quase-diferencial de F ?

Nanda – $\frac{dy}{dx}$.

Lugo - Não $\frac{dy}{dx}$ é a quase-derivada.

Mino – dy .

Raquel – Isso, dy . Mas neste caso, chamo de dF . Ele era igual $F'(x)dx + E_f dx$.

Retomei isto para os alunos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dx} &= F'(x) + E_f \\ dF &= F'(x)dx + E_f dx\end{aligned}$$

Raquel – $E_f dx$ é ...

Os alunos – Infinitésimo.

Raquel – De que ordem?

Lugo – De primeira ordem.

Mino – De segunda ordem.

Raquel, para os dois – Por quê?

Mino – Porque é um infinitésimo multiplicado por outro.

Os alunos concordam com Mino.

Retomando a demonstração, $\int_a^b F'(x)dx = \int_a^b dF - \int_a^b E_f dx$.

Raquel – A segunda parcela é soma de infinitésimos de segunda ordem. Isto dá o quê?

Os alunos – Infinitésimo.

Escrevemos, então, $\int_a^b F'(x)dx \approx \int_a^b dF$. Retomando do início, $A \approx \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b dF$.

Raquel – O que significa $\int_a^b dF$?

Lugo – Somatório de todos os infinitésimos.

Raquel – Somatório de todos os dF de a até b . O que será que vai dar isto aí? Vocês têm alguma idéia?

Lugo – Vai dar a primeira função ou a área?

Mino – Acho que o comprimento de a até b .

Raquel – No eixo x ?

Mino – No y .

Raquel – Se fosse no x , teríamos dx .

4. Auxílio do zoom do computador numa das passagens finais da demonstração

Para prosseguir a demonstração, fizemos uso do computador. Trabalhamos em cima do gráfico da primitiva F .

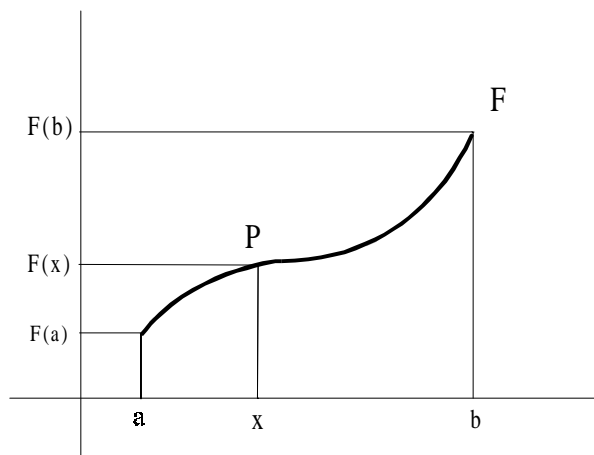


Figura 4.8

Raquel – Nosso problema, neste momento, é saber o que vai dar a soma dos dF . Como podemos achar o dF aqui?

Mino – Dá um zoom em P .

O resultado é a figura abaixo.

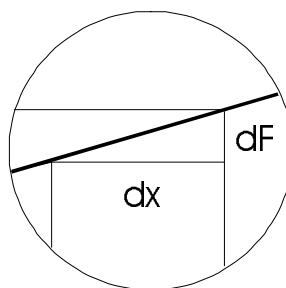


Figura 4.9

Raquel – O que a gente quer saber mesmo?

Mino – Somatório de dF de a até b .

Raquel – O que será isso?

Nanda - Acho que é aquele pedacinho que sobrava da área que a gente estava calculando.

Raquel - Será que é aquilo lá? Aqui a gente não está interessado na área.

Mino – Eu acho que vai ser a distância de a até b .

Raquel – No x então?

Mino – Não no y .

Raquel - Então como fica?

Mino - Distância de $F(a)$ até $F(b)$.

Raquel - O que vocês acham?

Lugo – É verdade.

Raquel - Se eu pegar outro ponto x no intervalo de a até b , dar um acréscimo dx , eu vou ter um dF . Soma este, com um outro dF , de quando eu tomar um outro ponto x . Soma estes dois com todos os dF , todos os outros pedacinhos [dF depois do zoom].

Mino e Lina concordaram com Lugo.

Raquel – Somando todos os degrauzinhos dos triângulos ...

Os alunos – Tem a distância de $F(a)$ até $F(b)$.

Completamos a demonstração: $\int_a^b dF = F(b) - F(a)$.

Raquel – Acabamos de ver, então, por que quando quero calcular a área abaixo de uma curva, tenho que tomar uma primitiva e calcular a tal diferença.

5. Discussão final

Nanda – Quando se faz gráfico de termodinâmica, de isotérmico, você acha uma figura parecendo com um círculo, mas não é um círculo. Aí, eles dizem que a figura é numericamente igual a tal número. Se é uma aproximação, por que tenho que falar que é igual? Numericamente igual.

Lugo – É, e também como se faz para calcular a área de um lago? Se acha uma função?

Raquel – Eu acredito que se façam aproximações. Aqui a gente também faz aproximações, só que a gente preserva o sinal \approx , assumimos que aproximamos.

Lugo, rindo – Como é que a Matemática é uma ciência exata, então?

Risos.

Mino – Mas essa noção de infinitesimal, você vê a realidade da coisa. Como você disse, a gente conserva o sinal de aproximação.

Lina – A gente considera ele.

Mino – No limite não. No limite você tende a coisa. É bem mais abstrato.

Raquel – Mas chegamos aos mesmos resultados. Então, qual é o problema lá?

Mino – É que você não visualiza a coisa como realmente ela é.

Nanda - Você vê a coisa meio solta. Você tem que acreditar naquilo. Vai chegar naquilo, mas você não tem uma prova.

Lina – Você não vê o que está por trás.

Raquel – Aqui a gente aproxima e deixa claro que fazemos isso.

Lugo – A gente entende a parte que está jogando fora.

Lina - Sabe o que está jogando fora. Sabe o porquê que tá jogando.

Raquel – O que aconteceu na aula da Miriam ontem? Vocês estão vendo integrais por substituição. O que ela fez uma certa hora? Não sei se vocês notaram, quando ela começou a explicar. Mino já me falou ontem. Vocês lembram?

Lugo - Pegou a derivada de uma função e indicou, por exemplo, $\frac{dy}{dx}=5$. Aí isolou o dy .

Escreveu $dy=5dx$.

Nanda – Ah, que ela dividiu?

Lina – Que depois ela passou multiplicando?

Lina – Tinha uma outra coisa que ela fez também, que eu ia perguntar para você.

Lina – Isso eu achei estranho. Não era uma coisa só. Você até frisou que era uma coisa só e como passa para o outro lado, né?

Nanda – É um abuso.

Lina – É um abuso mesmo.

Lugo – Aquilo não é uma coisa só, né?

Raquel - Agora você sabe que não é. Mas os colegas de vocês, que não trabalharam com infinitésimos, não sabem. Ela disse no início da aula que era uma coisa só. Os livros falam que é um símbolo.

Mino – É uma notação.

Raquel – Como $f'(x)$. Mas aí chega num certo ponto que não é mais. Lembram na regra da cadeia?

Lugo – Cortava o du com du .

Raquel – E agora ela passou para o outro lado.

Lugo – Mas, na verdade, é uma fração. É um número dividido pelo outro.

Raquel – Que tipo de número?

Lugo – Infinitesimal.

Raquel – Gente, eu falo ela a Miriam porque é o exemplo que vocês têm. Mas na verdade todos os cursos fazem isso.

Lina – Para simplificar.

Raquel – Quer simplificar, simplifica, mas seja coerente.

Nanda – Se for apresentar essa teoria, o pessoal nunca vai chegar em casa. Se liga o cronômetro, ele nunca sai do zero, se você não der um limite para ele. Se você leva 15 minutos para chegar em casa, você nunca vai chegar!

Risos.

Mino – Se vai aplicar isto no nosso curso de Cálculo, por exemplo, eu acho que seria mais coerente aplicar isso.

Lina – É mais interessante.

Mino – É, mais interessante.

Nanda – Na Física, eu acho que seria mais interessante.

Mino - Tanto na Física quanto na Matemática.

Lugo – Eu acho que em qualquer área.

Lina – Mas no colegial não.

Lugo – No colegial você não vai dar nem limite.

Raquel – Mas tem escolas que trabalham com limite.

Nanda – Eu tive, mas era só continha.

Lugo – Ah, não. Eu estou falando de limite, limite. Bem dado.

Raquel – E aqui, num curso de Cálculo da faculdade, vocês acham que ...

Mino – Eu acho que no nosso curso tem que mostrar a parte histórica. Quando surgiu tudo isto. Os dois lados [infinitésimos e limite]. Mostrar o desenvolvimento da pessoa que pensou isso, para mostrar para gente. Acho que assim a gente entende.

Raquel – Você acha que estudando a história...

Mino – Acho que estudando a história você consegue relatar todos os fatos.

Lugo – Inclusive eu estava pensando que na Física ou em outra ciência, você tem que imaginar uma situação. Uma coisa que a gente não enxerga direito, porque é uma coisa que acontece num espaço muito pequeno, uma coisa com dimensões muito pequenas, como um átomo. Então, se a gente tem essa idéia de imaginar o que é pequeno, como se fosse aumentar, como a idéia do zoom, isso é legal.

Lina - Acho que a gente foi privilegiado mesmo. Vendo agora a aula da Miriam, a gente tem esta visão crítica, né?

Mino – É, a gente aprendeu os dois lados.

Nanda – A explicação hoje do Dimas [professor de Física], deu uma clareada ...

Lina – A gente lembrou do que viu aqui.

Mino – É, mas acho que não foi para todo mundo aquilo.

Nanda – Não foi não.

Lugo – A menos que alguém esteja correndo num livro para ver o que acontece.

Raquel – Que matéria?

Mino – Infinitesimais.

Nanda – O professor falou da idéia de zoom, que você pode chegar infinitamente próximo de um ponto. Nossa, essa aula... Ele estava todo embananado!

Raquel – Então foi bom ter vindo aqui?

Nanda – Ô! Foi legal!

Os outros – Foi, foi sim.

Raquel – Então, eu vou tirar o ponto de vocês, já que vocês estão gostando, não estão fazendo esforço e tal.

Risos.

Entreguei a eles um material que abordava o que havíamos visto nos encontros. Assim, teriam, pelo menos, uma fonte para onde recorrer quando fossem preparar a apresentação aos colegas e professora. Ele se encontra no final da transcrição deste encontro. Os alunos deram uma olhada.

Nanda – Esse $P+dP$!

Lina – A gente demorou meia hora para descobrir o que é [no primeiro encontro].

Risos.

Nanda – O seno foi um problema [terceiro encontro].

Raquel – Por quê?

Nanda – Na hora, para conceber... Hoje já foi mais normal, visualizar.

Lugo – Parecia coisa de louco. Na hora a gente não entendia nada. Mas agora melhorou.

Nanda - Naquele dia, estava difícil visualizar que $\sin dx$ estava paralelo a dx e que dx era uma reta e não o “círculo”!

Raquel – Na verdade, sempre foi o “círculo”.

Nanda - Mas depois ficou claro. A gente não estava chegando tão próximo quanto era preciso.

Mino – Tem mais um zoom aqui?

Era o zoom no final do arco $x+dx$, no círculo. Falamos um pouco sobre ele e, depois, mostrei a obra de Keisler (1986), para que os alunos vissem e soubessem que havia um livro que abordava os infinitésimos.

Mino – Tem bastante livros nesta área?

Raquel – Conheço este e a apostila que meu grupo de pesquisa está montando. Vocês já ouviram falar no Baldino?

Mino – Eu já.

Raquel – Ele é meu orientador e já deu curso de Cálculo via infinitésimos.

Nanda – Mas ele dava num curso normal?

Raquel – Sim. Na Física.

Lina – Meu namorado teve aula com ele e disse que aprendeu muito com o Baldino. Ele adorou o Baldino.

Raquel – O que foi mais difícil para vocês aqui? Teve alguma coisa difícil?

Lina – Eu acho que foi em enxergar os zooms.

Lugo – Principalmente no seno, no dx lá.

Nanda – Essa coisa de dar um acréscimo e enxergar no gráfico como ficava.

Lugo – Círculo trigonométrico hiper-real.

Raquel – Ah, aquela história de que duas retas paralelas se encontram no infinito, isto é verdade na Geometria Projetiva. Na Euclidiana, isto não é válido. E para você Mino, o que foi difícil?

Mino – Ah, eu extrapolo um pouco. Eu penso em outras possibilidades para o zoom. E isso dificulta um pouco.

Raquel – Possibilidades de quê?

Mino - Tem vezes que eu penso no zoom numa maneira que eu acabo não concordando com isto. E eu gostaria de saber em que ponto eu estou errando para poder chegar.

Raquel – Eu pensei que com o computador tivesse ficado mais claro.

Mino – Não, pensando neste raciocínio, está ok, perfeito. Mas sempre dá para extrapolar ainda mais. Não tem limite para isso.

Lina – O livro que eu estou lendo, diz que muitas vezes, trabalhar com o infinito contraria a sua lógica. O exemplo que ele dá é que você pega o conjunto dos naturais e o conjunto dos pares e pergunta qual é o maior. A lógica é que o de todos os números, porque o dos pares é só uma parte. Mas a resposta é que eles são iguais, porque ele faz uma relação entre os conjuntos.

Mino – Deu para se guiar por essa lógica, mas sempre dá para pensar outra coisa. Pode até ser errado, mas você sempre está pensando em outra coisa. Como, eu pensei numa possibilidade da esfera começar a diminuir junto com o zoom. Foi uma série de processos que eu fui pensando e cheguei a esta conclusão que a esfera diminuía junto. Eu queria saber onde eu estou errando para pensar certo.

Nanda – Acho que não é pensar errado. Depende do argumento que você está usando. Se você encontrar um argumento bem convincente, mesmo que o que você está pensando não seja certo ...

Raquel – É possível inventar novas teorias, basta fixar certas verdades, axiomas e a partir deles desenvolver uma cadeia.

Lina - Um vai levando no outro.

Tivemos que fechar o encontro, pois já estávamos passando do horário.

1º ENCONTRO – 04/04/01

Cálculo de derivadas de algumas funções polinomiais:

$$y=x^2$$

$$dy=(x+dx)^2 - x^2$$

$$dy=x^2 + 2xdx + dx^2 - x^2$$

$$dy=2xdx + dx^2$$

$$dy=dx(2x+dx)$$

$$\frac{dy}{dx}=2x+dx$$

$$y'=re\left[\frac{dy}{dx}\right]=re[2x+dx]=2x$$

$$y=x^3$$

$$dy=(x+dx)^3 - x^3$$

$$dy=x^3 + 3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3 - x^3$$

$$dy=3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3$$

$$dy=dx(3x^2 + 3xdx + dx^2)$$

$$\frac{dy}{dx}=3x^2 + 3xdx + dx^2$$

$$y'=re\left[\frac{dy}{dx}\right]=re[3x^2 + 3xdx + dx^2]=3x^2$$

$$y=2x$$

$$dy=2(x+dx) - 2x$$

$$dy=2x + 2dx - 2x$$

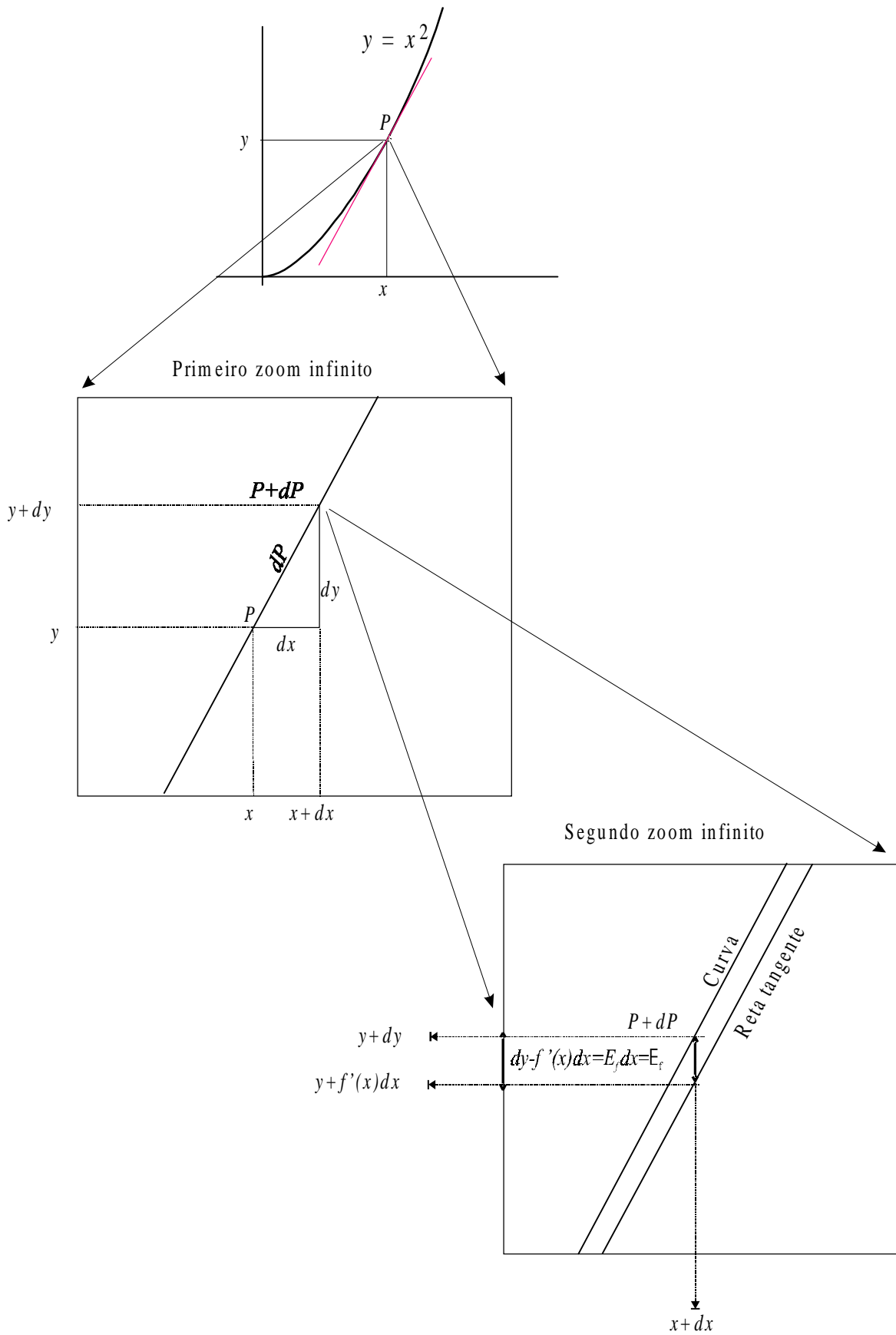
$$dy=2dx$$

$$\frac{dy}{dx}=2$$

$$y'=re\left[\frac{dy}{dx}\right]=re[2]=2$$

Visualização dos infinitésimos:

(x^2 e reta tangente)



2º ENCONTRO – 11/04/01

Por que a derivada da soma é a soma das derivadas?

$$\begin{aligned}
 h(x) &= f(x) + g(x) \\
 dh &= h(x+dx) - h(x) \\
 dh &= f(x+dx) + g(x+dx) - [f(x) + g(x)] \\
 dh &= f(x+dx) - f(x) + g(x+dx) - g(x) \\
 dh &= df + dg \\
 \frac{dh}{dx} &= \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} \\
 \frac{dh}{dx} &\approx f'(x) + g'(x) \\
 h'(x) &= \operatorname{re} \left[\frac{dy}{dx} \right] = f'(x) + g'(x)
 \end{aligned}$$

Por que a derivada de uma função composta é a derivada da função externa vezes a derivada da interna?

Seja h uma função composta.

$$h(x) = f(g(x))$$

$$h = f(u)$$

$$u = g(x)$$

Escrevemos o quase-diferencial em termos do diferencial de h :

$$1) dh \approx h'(x)dx = f'(u)du$$

$$2) du \approx u'(x)dx = g'(x)dx$$

Então, substituindo 2 em 1:

$$\begin{aligned}
 dh &\approx f'(u)du \approx f'(u).g'(x)dx \\
 dh &\approx f'(g(x)).g'(x)dx \\
 \frac{dh}{dx} &\approx f'(g(x)).g'(x) \\
 \frac{dh}{dx} &= f'(g(x)).g'(x) + \varepsilon \\
 h'(x) &= \operatorname{re} \left[\frac{dh}{dx} \right] = f'(g(x)).g'(x)
 \end{aligned}$$

3º ENCONTRO – 18/04/01

Calculando a derivada de uma função $y=f(x)$:

$$1) \quad dy=f(x+dx)-f(x)$$

$$2) \quad \div dx$$

$$3) \quad f'(x)=re\left[\frac{dy}{dx}\right]$$

Qual a derivada de $y=\text{sen } x$?

$$dy=\text{sen}(x+dx)-\text{sen } x$$

$$dy=\text{sen } x.\cos dx+\text{sen } dx.\cos x-\text{sen } x$$

$$dy=\text{sen } x(\cos dx-1)+\text{sen } dx.\cos x$$

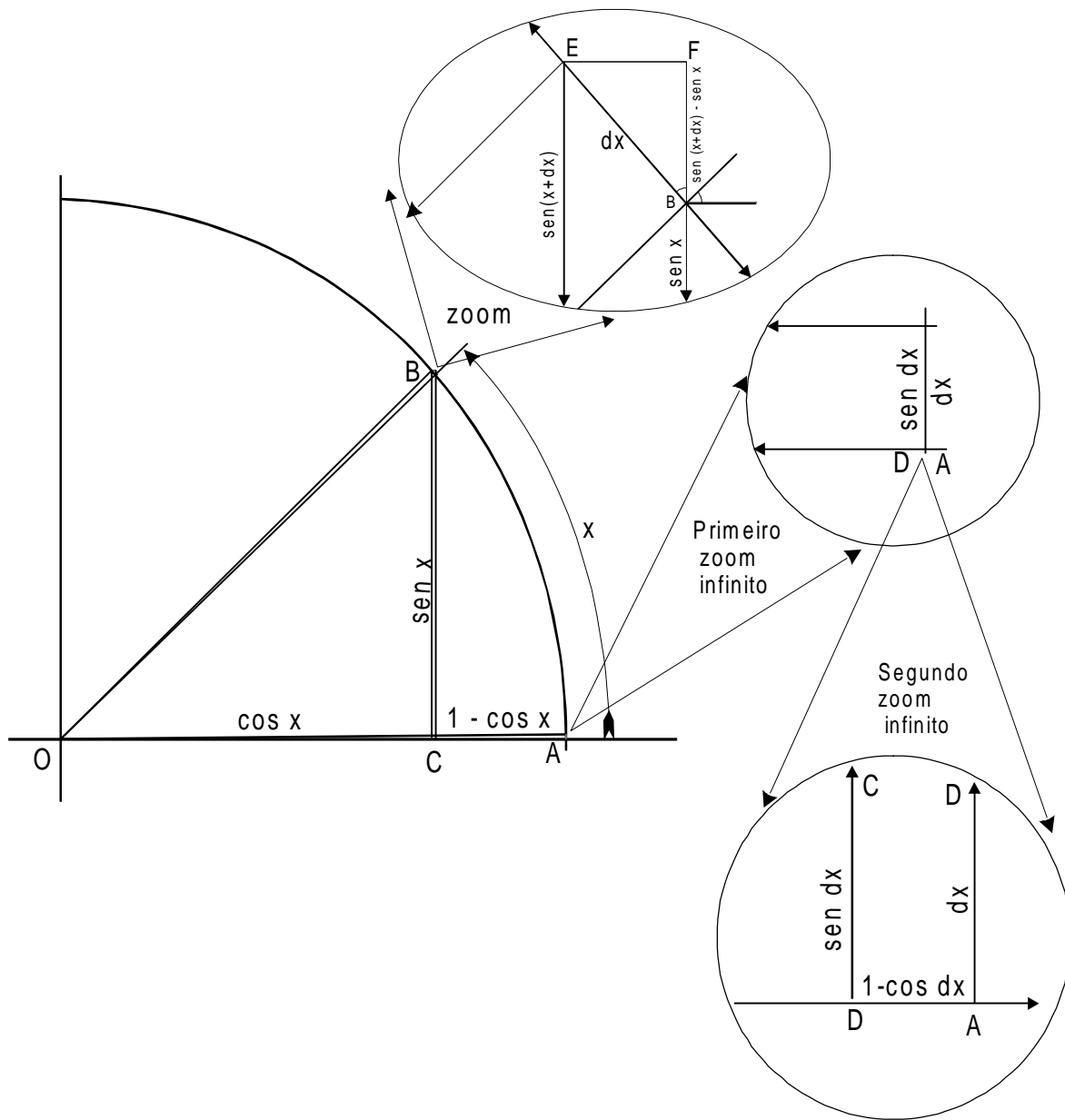
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\text{sen } x(\cos dx-1)}{dx}+\frac{\text{sen } dx.\cos x}{dx}$$

$$\frac{\cos dx-1}{dx}\approx 0$$

$$\frac{\text{sen } dx}{dx}\approx 1\Rightarrow\frac{\text{sen } dx}{dx}\cos x\approx\cos x$$

$$\text{Então, } \frac{dy}{dx}\approx 0+\cos x\rightarrow\frac{dy}{dx}\approx\cos x. \text{ Logo } f'(x)=re\left[\frac{dy}{dx}\right]=\cos x.$$

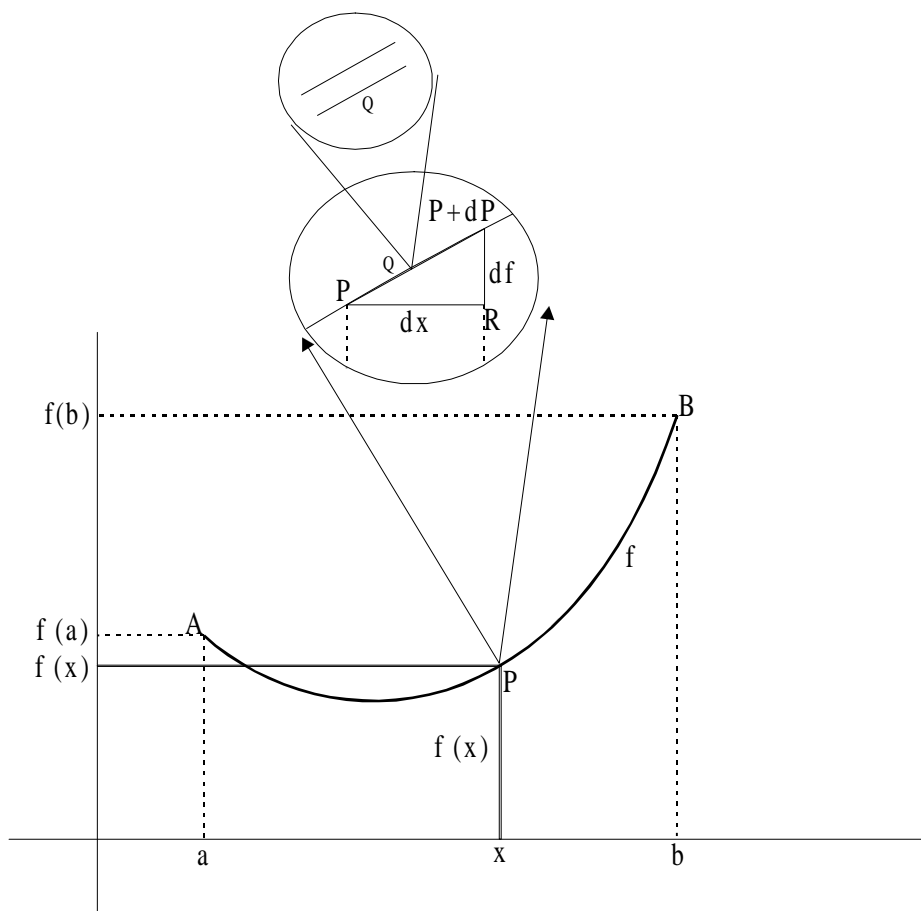
Para melhor enxergarmos as relações entre os infinitésimos:



4º ENCONTRO – 25/04/01

Qual a área abaixo de uma curva?

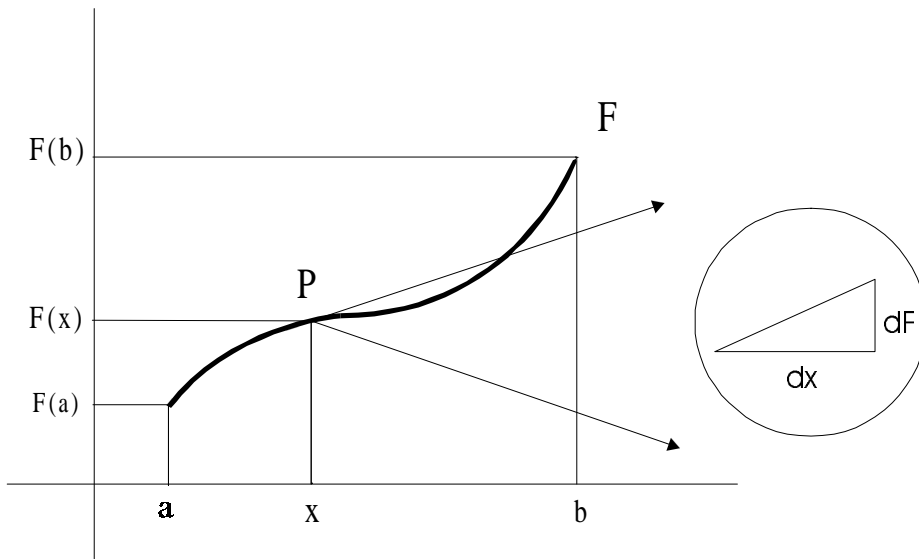
Você pode dividir o seu intervalo em n subintervalos, e depois passar o limite, mas abaixo segue uma outra forma:



$$A = \int_a^b dA \approx \int_a^b f(x)dx + \frac{dx dy}{2} = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \frac{dx dy}{2} \approx \int_a^b f(x)dx$$

Se F é uma anti-derivada de f , então $F'(x) = f(x)$.

$$A \approx \int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b dF - E_F dx = \int_a^b dF - \int_a^b E_F dx \approx \int_a^b dF$$



$$A \approx \int_a^b dF = F(b) - F(a)$$

$$A \approx \int_a^b f(x) dx \approx F(b) - F(a)$$

Encontro de Preparação – 20/06/01

Após, exatamente, um mês e vinte e cinco dias da realização do último encontro, reuni-me com os alunos novamente. Nesta época, os alunos já estavam trabalhando com limite, definição de derivada e diferenciais, nas aulas regulares de Cálculo. A reunião ocorreu no laboratório didático de computadores da Física. O local escolhido foi este, pois, assim, o computador estaria à disposição, caso os alunos precisassem. Este encontro teve o objetivo de saber o que havia ficado para os alunos do que foi discutido e ensinado durante as quatro sessões de Cálculo Infinitesimal. As concepções infinitesimais haviam mudado? Alguma concepção foi acrescentada à imagem conceitual de um certo conceito? As dificuldades e erros persistiam?

As principais atividades que ocorreram no encontro de preparação foram:

- Resolução da questão da prova, pelo aluno que optou por infinitésimos.
- Revisão dos tópicos vistos.
- Tentativa de demonstrar a regra do produto.

Antes dos alunos começarem a trabalhar, expliquei por que este encontro estava ocorrendo e o que queria que eles fizessem.

Raquel - É importante que vocês saibam do objetivo deste encontro. Desde o início, esclareci que estava realizando minha pesquisa. Depois dos 4 encontros que tivemos, onde trabalhamos com alguns conceitos de Cálculo Infinitesimal, chegou o momento de vocês mostrarem o que ficou de tudo isso. O que aparecer neste encontro e na apresentação é fundamental para minha pesquisa. As respostas devem vir apenas de vocês. Dessa forma, não adiantará me perguntar se algo está certo ou errado. Eu não vou responder. Do contrário, estaria interferindo no pensamento de vocês, em suas respostas. Isso não serve para o trabalho que estou desenvolvendo. Os erros e as divergências entre vocês podem aparecer. Isto será importante para mim. Não tenham medo de errar e de não saber responder a possíveis perguntas dos colegas. Se vocês tiverem dúvida sobre algum assunto podemos conversar depois da apresentação. Ontem [na aula regular], vocês pareceram um pouco receosos quando falei que eram vocês quem fariam a apresentação. Falar em público é muito importante. Vocês terão que fazer uma apresentação no final do ano. A Profa. Miriam solicitou como uma das possíveis notas para o curso. Vocês poderão apresentar trabalhos em congressos. É bom já começar com esta prática. Os quatro estarão na frente da sala, no quadro.

No dia 30/05/01, a turma fez uma prova em que uma das questões dava a possibilidade dos alunos optarem por resolver via infinitésimos ou via limite. A questão era a seguinte: *A equação que descreve a distância percorrida por um objeto é dada por $S(t) = -4,9t^2 + 50$, justifique pela via dos limites ou pela via dos infinitesimais por que a função velocidade é $v(t) = -9,8t$ m/s.* Outra questão interessante, que poderia revelar alguma concepção infinitesimal foi a seguinte: *O que você entende pela expressão: O limite de $f(x)$ quando x tende para a é L ?*

Em seguida, falei que deveriam resolver a primeira questão acima e escolher um tópico que havíamos trabalhado. Disponibilizei o computador e o quadro. Os alunos ainda tinham como suporte, o material que havia entregado no último encontro. Sentei ao fundo da sala e deixei-os começar a preparação. Não interfeiri em nenhum momento e procurei não reagir às falas deles. A neutralidade e o meu silêncio foram fundamentais para a espontaneidade das respostas. O relato apresentado a seguir foi o que ocorreu no encontro.

1. Resolução da questão da prova e revisão de alguns tópicos vistos

Os alunos começaram a trabalhar discutindo a questão da prova.

Mino – Quem respondeu por infinitésimos?

Lina – Eu só mencionei a palavra infinitésimo.

Lina se referiu a infinitésimos na segunda questão acima citada da prova. Considerou infinitésimos como sendo os números bem próximos de a .

Nanda – Eu fiz por limite.

Lugo – Eu ia fazer por infinitésimo, mas aí escrevi que a velocidade era o limite ... Aí continuei.

Risos.

Mino – Eu fiz por infinitésimos..

Nanda – Você respondeu todinha por infinitésimos?

Mino – Sim.

Lugo – Ah, é só aplicar a definição... Vai fazendo e no final pegar a parte real.

Todos concordam. Mino vai ao quadro resolver a questão. Enquanto isso, os outros folheiam o material, entregue no último encontro, e discutem o que escolher para a apresentação.

Lugo – Quem vai pegar aquela parte do seno e cosseno?

Lina – Nossa! A gente ficou meia hora para descobrir aquilo.

Lugo – Mais. A gente começou num dia e acabou no outro [2º e 3º encontro].

Nanda – Seria interessante falar das retas, curva paralela à tangente. É legal.

Lina – Zoom. A Miriam até comentou, né?

Nanda – Tem que escolher uma coisa menos complicada de entender para passar para todo mundo.

Nanda se mostrou preocupada em que os colegas entendessem o que eles estariam apresentando. Lina indicou a parte do cálculo da derivada de funções polinomiais, salientando que seria interessante dizer por que os infinitésimos para calcular a derivada. Lugo diz que seria interessante mostrar as diferenças de nomenclatura nas duas abordagens.

Lina – A parte gráfica é legal, mas como a gente vai desenhar isso aqui?

Lugo – Se a gente conseguir explicar bem, na primeira vez para todo mundo entender... aí seria legal!

Lina - É difícil.

Lugo – Não é difícil. O difícil é enxergar as retinhas no gráfico. Depois vai! Fica fácil!

Nanda – A minha dúvida era aqui. Eu não me conformava que o seno era igual ao dx . Eu fiquei muito chateada, mas depois eu entendi [risos]. Essa parte gráfica a Miriam não deu.

Lina - Foi bem geral.

Nanda – Tem os conceitos de infinitésimo, número muito pequeno.

Lugo - A turma tem uma idéia, porque o Dimas [professor de Física] fala às vezes. Ele pega faz um deslocamento infinitesimal, soma todos e faz o trabalho.

Nanda - É mas ele usa mais como um recurso matemático para provar o que ele está falando. Como no vetor, que ele introduziu o conceito de infinitésimo.

Lina – Ah, que a gente pensou que ele não ia conseguir.

Nanda - Que ele se enrolou todo.

Lugo – Ah, que o vetor aceleração praticamente juntos. E vai ver que eles são quase retos.

Nanda – Essa idéia de zoom ... A Miriam falou um pouco, né?

Lina- É.

Lina – Não teria nada para a gente relacionar com o que a gente está vendo agora na aula?

Lugo – É que isto que a gente viu aqui é mais conceitual, de definições. A Miriam não falou muito disso. E essa parte final, do último dia, de integral?

Nanda – Para achar a área de baixo de uma curva.

Lina – Ah, é! Que ela foi juntando, dividindo em pedacinhos.

Nanda – O Ermino [professor de Física Experimental] fez.

Lina – É a reta tangente aqui?

Mino – Vamos ver se está certo?

A resolução feita por Mino foi a seguinte:

$$\begin{aligned}S(t) &= -4,9t^2 + 50 \\dS &= S(t+dt) - S(t) \\dS &= [-4,9(t+dt)^2 + 50] - [-4,9t^2 + 50] \\dS &= -4,9(t^2 + 2tdt + dt^2) + 4,9t^2 \\dS &= -9,8tdt - 4,9dt^2 \quad (\div dt) \\ \frac{dS}{dt} &= -9,8t - 4,9dt \\v(t) &= \operatorname{Re} \left[\frac{dS}{dt} \right] \\v(t) &= -9,8t\end{aligned}$$

Todos conferem a resolução.

Nanda - Temos que explicar.

Lina – Começa com o que é dS , por que você soma com dt e depois tira.

Lugo – Mas isso é definição! Ah, tem que falar do conjunto numérico também, dos hiper-reais.

Mino no quadro tenta desenhar a figura dos acréscimos (figura 1.2).

Mino – Como é?

Lina – Você tem o ponto P . Dava um acréscimo infinitesimal, surgindo o $P+dP$. Aí encontrava o $S(t+dt)$.

Mino – Aí se já fosse com zoom, seria um dt assim.

Lugo – Aí, fazia a inclinação da reta. E pela definição, tira a parte infinitesimal e fica só a parte real.

Mino – É. O que é o dS mesmo?

Lina – É a diferença.

Mino – Ah, é.

Mino fica olhando para o gráfico. Parecia que ele estava com uma sensação de que faltava alguma coisa. De repente, seria algo relacionado com a inclinação da reta, que eles falaram.

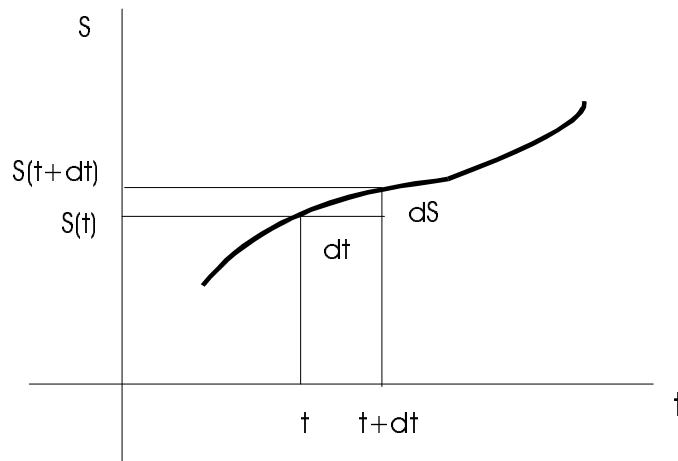


Figura P.1

Lina – Então, esses aqui são todos infinitésimos [apontando para a resolução de Mino]. Depois pega só a parte real, já que eles estão nos hiper-reais, pega só a parte real.

Lugo – Aliás a gente tem que começar dizendo o que é infinitésimo. Dizer que eles estão num outro conjunto numérico.

Lina – Mostrar por exemplo, quando a Raquel desenhou uma reta, marcou um número e acrescentou uma coisa bem pequenininha ...

Lugo – Nos reais a gente não consegue ver.

Lina - E para a gente ver ...

Nanda - Se a gente tivesse uma definição ...

Lugo - A gente tem: infinitésimo é um número menor que qualquer número real positivo.

Eles concordam.

Lugo – O zero é o único número real que é infinitésimo. Essa é a introdução.

Nanda – A gente podia introduzir o conceito de infinitésimo. Fala do conjunto dos hiper-reais e depois passa para a questão da prova.

Mino – Ou como a gente aprendeu, através do exemplo, que foi o x^2 . Aí a gente pode pegar a questão da prova como exemplo.

Lina – Tem que explicar por que a gente pega a parte real.

Outros, rindo – Ah, porque é!

Lina – “A gente pega a parte real”. Aí pode ter alguém que pode perguntar [ironizando]:
Por quê?

Risos.

Lugo – Porque o resultado que a gente vai usar não vai ...

Nanda – Alterar.

Lugo – Não, não é que vai alterar é que não vai ter utilidade a gente pegar o infinitésimo.

Lina – A gente tem que falar que é tão pequeno que não altera o... Eu tenho certeza que vai ter um pentelho que vai perguntar: Por quê?

Lugo – Eu até já sei quem.

Mino – O Lugo vai apresentar, então não vai ter ninguém para perguntar.

Risos.

Lugo - Eu sou perguntador mesmo.

Nanda – A gente tem que usar as palavras certas.

Mino – $\frac{dS}{dt}$ não é igual a $-9,8t$. Ele é aproximadamente. Para ser igual você ...

Lina – Tem que acrescentar um infinitésimo.

Mino – É.

Lugo - A gente pode até mostrar uma comparação entre o método por limite e por infinitésimo. Para poder dizer que existe uma ...

Lina – Semelhança.

Mino e Lugo - Isso.

Lugo – Aliás, essa parte é muito parecida.

Nanda – A gente podia fazer essas contas através do limite, porque o pessoal fez pelo limite.

Lina – Porque o limite quando x tende a a , você está pegando os infinitésimos próximos de a .

Lugo – x tende a a . Esta diferença entre os dois é um infinitésimo.

Lina- Essa parte dá para falar. É legal.

Mino – Essa parte do seno talvez seja inconveniente falar.

Lina- É, é difícil de desenhar.

Mino – Não por isso. Acho que vai ser difícil deles entenderem. Lembra que foi uma briga isso?

Nanda – A Miriam colocou isto no quadro, lembra?

Lina – É, mas não foi bem assim. Aqui é pequenininho.

Lugo – A gente pode comentar por cima esta parte e manda ver.

Mino – A gente provou a regra da soma, do produto.

Nanda - Mas isso tem no livro.

Mino - Mas a gente provaria pelos infinitésimos.

Lugo - A gente pode fazer isso sim. Eu vi a demonstração da regra da cadeia no livro.

Nossa! Duas páginas!

Lina – É aqui é mais fácil esse jeito, né?

Mino – A gente podia usar o retro-projetor para mostrar esses acréscimos.

Nanda – É, faz umas transparências ...

Lina - O problema que eu vejo é que eu acho que vai ser difícil eles entenderem. Porque a gente demorou para entender.

Lugo – Só que eu acho que agora a gente já sabe como chegar lá. Então, a gente pode orientar a turma toda para chagar lá.

Risos.

Lina – Você quer influenciar!

Lugo – Ah, que tem? Tem que ser assim.

Lina – Ah, mas é eles que têm que enxergar.

Lugo – Se perguntarem que por que tem que ser assim, a gente diz que tem que ser!

Nanda - Tem que confiar!

Risos.

Lugo – É mas eu acho que o pessoal não gosta muito de demonstrar.

Lina – É, pelo menos, eu disperso!

Mino – É mas a gente podia fazer.

Lina – Só que dispersa.

Nanda – O problema de demonstrar é que o professor prova que $a < b$, etc. É isso! Uma coisa mecânica.

Mino – Tem a integral também.

Lugo – A gente tem que falar um pouco de tudo que a gente viu.

Nanda - Acho legal a gente pegar um tema e comentar sobre ele. Se for a integral, a gente pode fazer a demonstração gráfica que a professora fez, achar a área embaixo da curva, você vai usar o mesmo conceito dali [infinitésimo].

Mino - Qual o problema?

Nanda - Ah, se sai de derivada e vai para integral?

Mino - Não vai demorar muito.

Lugo - Também acho.

Nanda - O problema não é demorar, e sim se enrolar.

Lina - Eu não lembro!

Mino - Eu também não

Nanda - Integral é o último desenho.

Lina - Eu só lembro do negócio de dividir em pequenos pedacinhos, somar e achar a área total.

Lugo – A gente tá discutindo e não estamos chegando em lugar nenhum.

Mino - Calma Lugo, calma.

Risos.

Lugo – Se vocês quiserem que eu me arrisque a fazer a derivada do seno eu faço. O problema é o gráfico. Porque aqui é paralelo e não é paralelo, é curvo, mas é paralelo.

Lina – Mas esse gráfico não vai dá para fazer.

Lugo - Dá para fazer numa transparência.

Começam a discutir sobre a derivada do seno. Lina não lembrava mais por que havia surgido o cosseno no desenvolvimento algébrico. Os colegas falaram sobre a regra do seno de uma soma.

Lina – Você lembra por que que o $\cos dx$ é bem próximo de 1?

Lugo - Ah, é só fazer o círculo. Se você tiver bem pertinho [arco perto do zero], se você for chegando cada vez mais perto, esta linha [linha do cosseno] vai correr para cá [origem do círculo]. Quando estiver bem pequenininho vai estar bem próximo de 1. Essa é a explicação.

Lina - Como é essa história de correr?

Lugo - O coseno não é a projeção do arco? Então você vai diminuindo o arco, a projeção vai aumentando. Vai chegando cada vez mais perto de 1, pertinho de 1. É 0.000...

Mino - Essa diferença é o $1 - \cos dx$.

Lugo - Vai ser infinitesimal. Aqui é a mesma coisa, $\sin dx$ é aproximadamente igual a dx . São números bem pequenos. Dividindo um pelo outro vai dar próximo de 1.

Nanda - E o último [zoom] foi o que deu problema.

Lugo - É. A dúvida que a gente teve é ver que dx era aproximadamente reto e que era aproximadamente igual ao seno também. O arco é praticamente igual ao seno do ângulo.

Lugo parecia estar por dentro do assunto da deriva da do seno, mas Lina não.

Mino - É essa parte vai ser complicada.

Lugo - É, vai só ver. A gente vai passar rapidinho pelas definições e vai chegar aqui e vai empacar.

Mino - É, mas vamos tentar.

Lina - É a gente tem que falar para eles que a gente teve dificuldade, que não foi tão fácil, como a gente vai explicar.

Mino - Tem que falar também que a gente teve uma vantagem sobre eles, porque ficamos bastante tempo pensando nisto. Uma semana quase.

Os alunos, quando se encontravam, discutiam sobre o assunto.

Lina - Eu acho que eles não vão entender muito bem isso não. Eu tive dificuldade para entender isso.

Mino - É que a gente teve tempo para pensar.

Nanda - E ainda a gente teve o recurso do computador também. A gente ia e voltava, ia e voltava.

Lina - Eu tenho medo do pessoal perguntar e a gente não souber responder.

Mino - Mas isso aí vai acontecer. Certo. Mas se a gente não souber ...

Os alunos comentaram um pouco sobre o zoom no ponto final do arco $x+dx$, na derivada do seno. Disseram que preferiram o zoom no ponto A mesmo. Talvez porque

trabalhamos pouco no outro zoom. Concluem que vão mostrar a derivada do seno. Começarão com a questão da prova, mostrando um exemplos de derivada via infinitésimos.

Nanda – Mas a gente tem que ver as notações que estão sendo usadas. O aproximado, que não é igual.

Mino - Para limite, o que gente usa no dia a dia [nas aulas regulares], $\frac{dS}{dt}$ já é igual à derivada.

Nanda - Por isso fazer primeiro por limite. Seria interessante porque a maioria do pessoal fez por limite.

Mino - Então a gente explica o infinitesimal. Faz por limite e depois por infinitésimo.

Lugo - Porque por limite a gente fazia $v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}$.

Lugo - O dt está no lugar do Δt quando tender a zero.

Lina – Isso.

Lugo – É que por limite, a professora já está fazendo lá.

Lina – Eu não lembro bem de a Miriam ter explicado muito de onde surgiu esse $t + \Delta t$.

Mino – Ela falou sim. Na verdade foi o Dimas que falou que a gente ia chegando mais perto, que o Δt ia tendendo a 0.

Mino explicou apontando para o desenho do quadro e fez que o $P + dP$ deslizasse até P .

Mino – E o negócio de cortar o Δx [no desenvolvimento de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$] é porque o Δx não é zero. Você garante que o Δt não é igual a zero, por isso você pode cortar. Tem que falar essas coisas. Aí você compara com o infinitésimo. Você garante que aquele infinitésimo não é zero. Você pode cortar, dividir. Mas a gente tem que falar dessas notações.

Lugo – Eu li que no $\frac{dS}{dt}$, o d foi Leibniz quem introduziu para representar os passos bem pequeninhos, esses infinitesimais.

Mino – Bom, acho melhor fazer por infinitésimo e depois comparar com o limite.

Lugo – Olha gente, o desenvolvimento dos cálculos é igual. O que muda é o dt que vai ter um Δt ou um h . Só quando chegar neste ponto [parte real] é que a gente explica. Vai ficar diferente.

Lina – É o que eu disse. O limite é quando você está pegando os infinitésimos mesmo.

Lugo – Eu li num livro uma definição assim. O infinitésimo de uma função é quando ela tende a zero num dado ponto. Quando ela tem por limite zero num dado ponto.

Mino – Mas acho que aí é a definição de limite.

Nanda – É a gente viu o conceito de velocidade instantânea. É no instante.

Mino – Eu acho pertinente a gente fazer a comparação.

Lugo – E ainda, a gente pode dizer que a gente usa lá que $\frac{dy}{dx}$ é uma notação. A gente pode comentar que é uma notação, mas tem um sentido de divisão. Que é o que a gente vai falar. Um acréscimo no x e um no y , e dividindo um pelo outro você acha a derivada. Mas o livro do Swokowski [adotado como livro-texto na disciplina de Cálculo do curso de Física] também fala que é uma divisão, quando trabalha com os diferenciais.

Durante a organização dos itens da apresentação, os alunos olharam para a folha das definições e notações, e lembraram que para calcular a diferença entre a reta tangente e a curva x^2 foi difícil. Nesta folha, lembraram de mais diferenças entre as abordagens.

Nanda – $\frac{dy}{dx}$ é a quase-derivada.

Lina – É porque você tem ainda, neste quociente, a parte infinitesimal. Depois, é na derivada que você pega parte real.

Mino – Você não pode falar que $\frac{dS}{dt}$ é igual a $v(t)$.

Lina – É aproximadamente igual.

Lugo – É que quando é por limite, $\frac{dS}{dt}$ é um número que tende a outro. E esse tende desconta. Esse tender a gente diz que é. E aí no caso dos infinitésimos, dizer que tende, diz que a diferença é um número muito pequeno, que a gente desconsidera. É praticamente igual.

Na mesma folha, alguns infinitésimos estavam representados por ε . Mino lembrou, então, da definição de limite.

Mino – A Miriam passou por cima disso.

Lugo - Tem no Swokowski. É um ε , um δ , para cima, para baixo.

Mino - Isso é muito complicado.

2. Regra do produto

Passaram, posteriormente, às regras de derivação. Lugo diz que as regras são parecidas nas duas abordagens.

Lugo – Numa você aproxima para zero e na outra você tira os infinitesimais.

Ficaram procurando pela regra do produto. Mino estava certo que tínhamos demonstrado. Decidiram tentar desenvolvê-la no quadro.

$$h(x) = f(x).g(x)$$
$$dh = h(x+dx) - h(x)$$

Lina não entende porque escrever $-h(x)$. Mais uma vez ela tem problemas com o quase diferencial, ou acréscimo infinitesimal, como ela prefere chamar. Além disso, ela sugere uns procedimentos algébricos errados envolvendo $f(x)$ e $g(x)$. Lugo faz um desenho e explica a diferença infinitesimal.

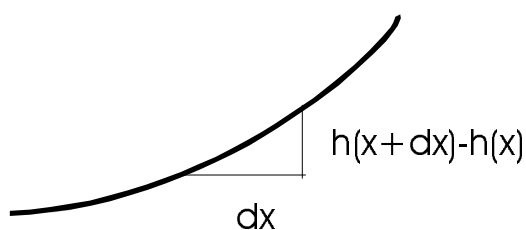


Figura P.2

Explica:

Lugo – Para fazer a inclinação você precisa fazer $\frac{h(x+dx)-h(x)}{dx}$. Agora você vai pegar os valores e vai substituir na função $h(x)$ que é $f(x).g(x)$.

Lina diz que entende e eles prosseguem a prova.

$$dh = f(x+dx).g(x+dx) - f(x).g(x)$$

Lina sugere para dividir por dx , mas Lugo diz para fazer isso no final. Ele lembra da demonstração desta regra por limites, e diz que tem uma “sacadinha” de somar e subtrair por um mesmo número, mas que não lembra qual. Como Lugo não lembra como está no livro, Mino sugere uma “ladroagem”: partir de onde querem chegar. Engraçado que Mino afirma que nós fizemos a prova em um dos encontros. Mino escreve:

$$(f(x+dx) - f(x))g(x) + (g(x+dx) - g(x))f(x)$$

Sugere dividir por dx , mas depois desiste. Eles tentam fazer o que Lina sugeriu no início da prova:

$$\begin{aligned}dh &= h(x+dx) - h(x) \\dh &= [f(x+dx) - f(x)][g(x+dx) - g(x)] \\dh &= f(x+dx).g(x+dx) - f(x+dx).g(x) - f(x).g(x+dx) + f(x).g(x)\end{aligned}$$

Lina pensou em $dh = df.dg$, como fez na derivada da soma, no segundo encontro, $dh = df + dg$.

Lugo – Acho que isto não vai dar certo. Porque se você pegar $f(x+dx) - f(x)$ e dividir por dx , você já vai ter a quase-derivada. Depois de tirar o infinitésimo você vai ficar com $f'(x)$, e a mesma coisa par a outra. Então vai ficar $f'(x).g'(x)$ e a gente sabe que não é esse o resultado.

Os outros alunos relutam em entender o que Lugo diz. Ele tenta mais uma vez, mas não adianta.

Lugo – Já que ninguém me ouviu, eu retiro.

Lina sugere colocar termos em evidência. Lugo muda de idéia e acha que pode dar certo.

$$dh = f(x+dx).(g(x+dx) - g(x)) + f(x).(g(x) - g(x+dx))$$

Nanda localiza um dg . Por causa do sinal de menos na segunda parcela, escrevem:

$$dh = f(x+dx).(g(x+dx) - g(x)) - f(x).(-g(x) + g(x+dx))$$

Lina sugere colocar dg em evidência, mas logo percebe que vai voltar em $dh = df.dg$.

Lugo – Estou falando. Ninguém me escuta!

Nanda – Mas a gente tinha que tentar.

Todos riem e pedem calma a ele. Ele sugere abandonar a demonstração para ver num livro como se faz. Passam, então, a fazer a prova derivada de uma soma, para ver se têm alguma idéia.

$$\begin{aligned}h(x) &= f(x) + g(x) \\dh &= h(x+dx) - h(x) \\dh &= f(x+dx) - f(x) + g(x+dx) - g(x)\end{aligned}$$

Lina – Não pode fazer isso.

Lugo – Por quê?

Lina – Você disse que não podia antes. É a mesma coisa.

Lugo – Só que ali é soma. Lá é multiplicação. É diferente.

Mino – É diferente?

Lina- Eu não enxergo isso.

Lugo se referia a $dh=df+dg$ e $dh\neq df.dg$. Tenta explicar, mas, de novo, os colegas não entendem. Enquanto ele explicava, Mino havia trocado o sinal de adição pelo de multiplicação e voltado para o caso do produto. Todos ficam confusos.

Mino – A gente está se atrapalhando na função. Não é nem questão de infinitésimo. Não era para a gente ter empacado nisto.

Lugo – Treina a da soma.

Enquanto Lina e Nanda tentam resolver cada uma do seu jeito, Mino e Lugo no quadro escrevem:

$$\begin{aligned}h(x) &= f(x) + g(x) \\ dh &= h(x+dx) - h(x) \\ dh &= [f(x+dx) - f(x)] + [g(x+dx) - g(x)]\end{aligned}$$

Eles fizeram $dh=df+dg$. Não calcularam o valor numérico para a função h .

$$\frac{dh}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

Mino – Pronto.

Lugo – Não. Aí você tem que tirar a parte infinitesimal. Aí você tem a quase derivada. Lembra das definições? Lembra que na questão da prova você tirou a parte infinitesimal?

Os dois olham o material que contem a resolução e riem para câmera. Mino escreve:

$$\begin{aligned}h'(x) &= \text{Re} \left[\frac{dh}{dx} \right] \\ h'(x) &= f'(x) + g'(x)\end{aligned}$$

Não sei se compreenderam ou copiaram da folha.

Mino – E aí meninas? Chegaram em alguma coisa?

Lugo – De repente, a gente descobre um novo teorema.

Risos.

Mino – A gente não sabe nem substituir função.

Lugo – Muitas coisas são descobertas por acaso.

Eles tentam fazer a regra da cadeia. Lugo acompanha na folha e Mino fica tentando fazer sem olhar.

$$h(x)=f(g(x))$$

$$dh=h(x+dx)-h(x)$$

$$dh=f(g(x+dx))-f(g(x))$$

Mino – O que você acha?

Lugo – Está certo, mas não é o que está aqui.

Lina – Eu acho que está certo. Você substituiu.

Mino olhou a folha.

Lugo – Acho melhor a gente preparar bem estas demonstrações para a gente não empacar na hora. Ter um papel escrito do lado, com possíveis perguntas que venham a fazer.

Mino – Acho melhor a gente não falar neste assunto.

Risos. Lina me olha. Mino desiste da regra da cadeia. Todos passam a trabalhar com a regra do produto. Lugo lembra que não comentaram sobre os números infinitos.

Lugo – Infinitésimos são os números menores que os reais positivos e os infinitos são os maiores que os reais positivos. Teve um dia que o Dirceu [um colega] estava perguntando para a Miriam o que era o infinito. Que infinito era uma idéia meio esquisita.

Nanda – A gente também. Saía dos encontros viajando. Lembra aquela vez do cronômetro?

Lugo – Ah, vamos falar sobre isto também.

Risos.

Nanda – Não, esse aí é um problema. Mais um!

Mino volta à regra do produto e fica pensando, indignadamente, como fazer a substituição de $h(x+dx)-h(x)$.

Lugo – Gente. Isto é aquele macete que eu não estou lembrando.

Nanda – Como é que fazem isto com a gente!

Mino continuava indignado por não saber como substituir.

Mino – E se a gente tentar um exemplo numérico?

Lugo – Tenta aí.

Nanda – A gente já sabe onde quer chegar, isso induz a gente .

Lugo – Quando a gente faz demonstração, a gente tem que fazer vendo que a gente tem que chegar naquele negócio.

Nanda – A gente induz. Se você já sabe o resultado de um exercício, você encaminha.

Lugo – Então, é isso. Quando a gente resolve um exercício “demonstre a fórmula tal”, é isso o que a gente faz.

Depois de um silêncio, Nanda que conclui que as demonstrações não eram tão importantes para serem mostradas. Aviso que faltam 5 minutos para acabar o encontro e eles resolvem dividir as tarefas para a apresentação.

Lina – Acho que cada um vai complementando a fala do outro.

Nanda – É. E a gente tem que falar bastante da parte introdutória.

Lugo e Mino – Essa é a mais importante.

Nanda - A gente estuda as coisas que a gente tem. Não precisa mostrar todas as demonstrações. A gente não precisa demonstrar todas elas. A gente demonstra e diz que as outras partem do mesmo princípio.

Lugo – Parte do mesmo princípio. A gente partiu do mesmo princípio e não saiu!

Risos.

Mino – O problema foi a função.

Lugo – Acho que não. A gente sabe onde quer chegar, mas não sabe como chegar.

Nanda – E a do seno?

Lugo – Eu posso fazer. Eu fiz a do cosseno também. Eu posso apresentar.

Mino estava esperando a Deinha desligar a câmera para saber uma coisa muito importante para a vida dele.

Deinha – É agora que eu não vou desligar.

Raquel - O que é?

Mino – Não, é eu queria saber como se resolve a derivada do produto!

Os alunos fizeram várias comparações entre as abordagens infinitesimal e do conceito de limite. Algumas dificuldades persistiram, principalmente com o trabalho com o zoom. Eles demonstraram estar preocupados em apresentar os tópicos de forma que os colegas entendessem. Creio que eles vão se encontrar no meio da semana para estudar.

Encontro de Apresentação – 25/06/01

O encontro de apresentação foi realizado na segunda-feira, após o encontro de preparação, na sala de aula regular de Cálculo, no horário de aula. O objetivo e as questões de interesse deste encontro são as mesmas do encontro de preparação. Este momento também era a chance de saber o que persistia e havia mudado em termos das concepções infinitesimais dos alunos. Um interesse difere dos apresentados para o encontro de preparação. Na apresentação dos quatro alunos, os colegas e professora poderiam fazer questionamentos a eles. Estes questionamentos seriam importantes para saber a reação e o tipo de respostas dos quatro alunos, e o contexto em que as perguntas estariam inseridas.

Interferi neste encontro apenas ao apresentar à turma o que os alunos iriam fazer. Depois deste momento, apenas fiquei observando e fazendo anotações sobre a apresentação. As principais atividades do encontro foram:

- Apresentação dos infinitésimos e do conjunto dos hiper-reais.
- Realização da questão da prova.
- Regra da cadeia e da soma.
- Cálculo da derivada do seno. Para ajudar nas justificações os alunos desenharam o resultado dos zooms em folhas grandes, para que os colegas e professora pudessem enxergar.

Apresento, agora os detalhes destas atividades.

1. Apresentação dos infinitésimos e do conjunto dos hiper-reais

Nanda – Não sei se vocês observaram que a gente não ficou algumas vezes na aula com vocês, justamente porque a gente ficou no laboratório com a Raquel. Ela nos mostrou coisas muito interessantes para nós da parte de Cálculo, que são os infinitésimos, que é um universo, pelo menos na minha opinião, um universo bem diferente, uma visão muito diferente do que aquela que a gente vê todo dia. Porque são números tão pequenos, tão pequenos, e não são o infinito, não chega a ser o infinito, são números muito pequenos, infinitamente pequenos, (...) às vezes você pode fazer umas viagens e você não consegue chegar em lugar nenhum, por exemplo: se você pegar um cronômetro e começar a cronometrar o tempo que você leva para chegar na sua casa, você pode perceber que ele nunca vai sair do zero, ou seja, você nunca vai chegar na sua casa! Pelo tempo, se você for marcando o tempo.

Isso provoca risos na turma inteira, inclusive, nos apresentadores. Alguns colegas dizem “Zenão, Zenão”, “Isto é Zenão”. Nanda continua.

Nanda - Você fica marcando e ele nunca vai sair do zero. Então você começa a perceber que os números são infinitos e pelo fato de serem infinitos isso altera bastante então você começa a pensar neles, nesse universo que os infinitésimos fazem parte, tem até um conjunto especial, que são os hiper-reais, que os infinitésimos fazem parte.

Lina - Eles não fazem parte dos reais. Eles fazem parte dos hiper-reais.

Lugo – Nos reais não existe. Esses hiper-reais contém os números reais, os números infinitésimos, que são infinitamente pequenos os números infinitos, que são infinitamente grandes, e as mônadas, que daqui a pouco a gente fala o que é.

Turma – Mô? O que que é? Ah? Monicas?

Risos. Lugo desenha uma reta (a dos reais) e marca o número 2.

Lugo – Se eu chegar bem próximo de 2, esses pontos é o que se chama de mônada. Mônada do 2 são os números infinitamente próximos de 2. A diferença entre eles é um infinitésimo. Entenderam?

Risos.

Nanda - Se vocês não entenderam, perguntem, a gente tenta explicar. Porque esse conceito cada um assimilou de uma forma. Se você pegar o 1, por exemplo. Esses números que estão próximos dele é a mônada do 1. Mônada é uma notação. Esses números que estão aqui [faz um círculo ao redor do 1, marcado numa reta] estão na mônada do 1.

Profa. Miriam – Seria o mesmo que a idéia de vizinhança?

Nanda – É.

Lina – É, também quando a gente trabalhou com limite, você falava quando tende a. Esse tende é quando você pega os números que estão próximos, você está pegando os infinitésimos. Então são os próximos, quando tende a, esse tende são os infinitésimos.

Lina e Lugo - A diferença é um infinitésimo.

Nanda - É um número muito pequeno, não chega a ser o número, mas é um número bem próximo dele. Se a gente assimilar a idéia de limite, essa idéia fica mais clara porque a gente já viu a idéia de limite. E a idéia de limite vinculada à idéia de infinitésimo fica muito mais clara. Quando diz “ah, um número próximo, x tende a esse número”, ele tende a este número, mas não chega no número.

Lina - É na mônada do número.

Nanda - Na vizinhança do número. Então fica mais claro para perceber. Tem um lado histórico dos infinitésimos. Ele foi vinculado ao Cálculo Diferencial e Integral, ao desenvolvimento do Cálculo.

Lugo – No século XVII eles começaram a usara este termo infinitésimos. Só que o significado era diferente do que se usa hoje em dia. Foi mais recentemente, um matemático chamado Cauchy que deu a definição que se usa hoje.

Provavelmente eles pesquisaram em livros.

2. Realização da questão da prova

Mino – Agora eu vou fazer a questão da prova. Como foi anunciado, ela era para ser feita através de limite e para quem trabalhou com a Raquel, através de infinitésimos. Primeiro eu vou fazer por infinitésimos e depois vou comparar com o limite.

Para lembrar ao leitor, a Profa. Miriam disse que os alunos poderiam optar, e não como Lugo disse. Mino escreve $S(t) = -4,9t^2 + 50$.

Mino – Era uma função do espaço pelo tempo. Pedia para você dar a derivada, para chegar numa equação da velocidade em função do tempo. Como você vai tratar nos infinitésimos?

Mino desenha um gráfico qualquer do espaço pelo tempo e explica primeiro como a derivada é abordada no contexto do limite.

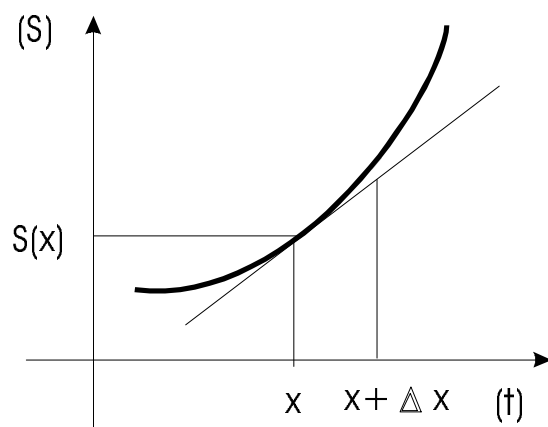


Figura A.1

Mino – O que a gente fazia por limite? O que seria a derivada? Seria a reta tangente a este ponto. Você ia pegando um intervalo Δx e ia aproximando este intervalo ao ponto. Você ia tendendo o Δx ao valor zero. Então limite de Δx tendendo a zero.

Lugo – Esse número $x + \Delta x$ vai ficar cada vez mais próximo de x . Ele vai entrar na mônada de x .

Mino – Isso. Então, o que a gente faz com os infinitésimos? A gente já pega um dx , que é a representação de infinitésimo. Isso não consegue identificar na reta dos reais.

Mino, então, desenha uma reta e marca um ponto x .

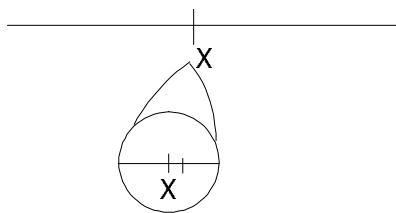


Figura A.2

Mino - Se você quiser dar um acréscimo infinitesimal a esse número, você tem que dar um zoom nesta parte [perto de x], para aproximar. Aí você estará vendo a reta dos hiper-reais, para identificar o acréscimo infinitesimal, que seria o dx que eu estou chamando.

Mino retorna a seu desenho inicial, e faz algumas mudanças.

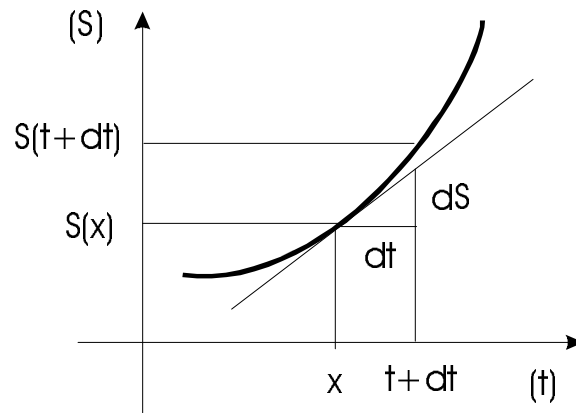


Figura A.3

Mino – A derivada seria o coeficiente angular da reta tangente. Você vai ter, como são números muito pequenos, você vai ter um dS e um dt .

Mino inicia o cálculo algébrico.

$$S(t) = -4,9t^2 + 50$$

$$dS = S(t+dt) - S(t)$$

Mino – Primeiro a gente calcula o dS , depois a gente divide por dt , para ter o coeficiente angular da reta.

Lina – A gente chama esse dS de quase-diferencial.

Mino – É depois eu vou falar sobre isso.

$$dS = \left[-4,9(t+dt)^2 + 50 \right] - \left[-4,9t^2 + 50 \right]$$

$$dS = -4,9t^2 - 9,8tdt - 4,9dt^2 + 4,9t^2$$

$$dS = -9,8tdt - 4,9dt^2$$

Lina – Na realidade, se a gente fizer por limite, vai chegar na mesma coisa.

Mino – É. Aí, depois a gente divide toda expressão por dt , para a achar a inclinação.

$$dS = -9,8tdt - 4,9dt^2 \quad (\div dt)$$

$$\frac{dS}{dt} = -9,8t - 4,9dt$$

Lugo – Esse quociente entre esses dois infinitesimais é o que a gente chama de quase-derivada. Por que quase-derivada? Porque ainda tem esse pedaço infinitesimal aqui $[-4,9dt]$, que a gente vai desconsiderar.

Lina – Quando a gente faz a derivada a gente só pega a parte real.

Lugo – Só a parte real.

Nanda – Porque os infinitésimos, neste caso, não vão fazer tanta diferença.

Lina - Porque eles são infinitamente pequenos.

Nanda - Porque eles são infinitamente pequenos não vão influenciar tanto o resultado. Então eles podem ser, não desprezados, mas não contados, não incluídos nesta conta.

Lina - Só vai pegar os reais, a parte real.

Colega 1 - Existe algum exemplo que vocês têm que considerar esses infinitésimos?

Nanda – Depende do cálculo que você estiver fazendo.

Lugo – Este caso da derivada não.

Lina – Aqui a gente só vai pegar a parte real.

Lugo – Por exemplo, na derivada você só vai trabalhar no conjunto dos números reais. Então, esse número aqui, é um infinitesimal que nos números reais, não existe.

Colega 1 – Mas existe algum exemplo em que se usa esse infinitésimo?

Lina – Acho que você teria que estar trabalhando com os \mathbb{R} .

Nanda - Ou então com partículas extremamente pequenas que qualquer alteração possa afetar o resultado que você quer. Se você estiver trabalhando com, por exemplo, raios ou partículas subatômicas, pode ser que esse infinitésimo seja incluído na conta. Agora, esse cálculo é só nesse universo muito pequeno, como o dos números infinitesimais. Aí pode ser que esse número seja contado.

Mino continua a resolução.

$$v(t) = \operatorname{Re} \left[\frac{dS}{dt} \right]$$

Um colega 2 pede sobre mais uma aplicação da Física. Por causa do barulho, não consegui entender o que ele havia dito. Era algo relacionado à temperatura.

Nanda – Então. Nesse caso, esse infinitesimal, que aqui foi desprezado, vai ser incluído nesse. Depende da expressão que você estiver usando.

Lina - Depende do cálculo.

Nanda – Se você estiver usando na termodinâmica ou se for na dilatação, que tem aquelas fórmulas de dilatação, esse infinitésimo vai fazer muita diferença.

Lina – Depende da influência do infinitésimo no cálculo. Aqui o infinitésimo não vai influenciar tanto, em outros vai.

Nanda - Se você estiver calculando o coeficiente de dilatação de uma barra de ferro numa ferrovia, no acoplamento de uma barra a outra para permanecer unidas, para juntar os trilhos, esse infinitésimo vai fazer muita diferença naquela dilatação do ferro. O infinitésimo não pode ser desprezado, só que neste caso a gente só quer a parte real, para poder encontrar a inclinação da reta, que é o $v(t)$ que a gente quer.

Lina - O infinitésimo existe, ele está aí, mas neste cálculo só interessou a parte real.

Nanda – Depende do cálculo. Ele é muito importante, tanto que tem até um conjunto especial para ele, que são os hiper-reais.

Mino – Então, voltando para cá, a gente vai pegar só a parte real da divisão. Foi falado que o infinitésimo faz parte dos hiper-reais. Ele seria essa parte aqui [aponta apenas para dx].

Lugo – Um número real vezes um infinitésimo dá um infinitésimo.

Mino – Então a gente tem que $v(t)$ é aproximadamente igual a $\frac{dS}{dt}$, mas não igual como no Cálculo que a gente está aprendendo aqui, que considera igual.

$$v(t) \approx \frac{dS}{dt}$$

Mino – O que falta para que ocorra essa igualdade é um infinitesimal.

Lugo – Que é a diferença entre eles.

$$v(t) = \frac{dS}{dt} + \varepsilon$$

Lina – Na passagem de cada aproximação para a igualdade você tem que acrescentar um infinitésimo.

Lugo – No limite, a gente trabalha com os reais. E nos reais os infinitésimos não existem. Então a derivada da função e esse quociente $\frac{dS}{dt}$ são iguais. Mas quando a gente vai para os hiper-reais, onde os infinitésimos existem, não são iguais, são aproximadamente iguais.

$$v(t) = \operatorname{Re} \left[\frac{dS}{dt} \right] \rightarrow v(t) = -9,8t$$

Lugo – Então é essa a resolução pelos infinitésimos.

Profa. Miriam – Por que você chama dS de quase-diferencial?

Lina – Porque já não é a derivada.

Profa. Miriam – Lá [no gráfico], o dS é a diferença na função entre $S(t+dt)$ e $S(t)$ ou ele está na reta? Porque ali [no desenvolvimento algébrico] você disse que era a diferença entre dois pontos da função. Ele é igual mesmo ou é aproximado?

Lugo - Para você ver o quase-diferencial você teria que dar um zoom. Aí seria a diferença entre a curva e a reta. Não sei se é isso mesmo? [olha para os colegas apresentadores]

Profa. Miriam – No cálculo, o dS é um ΔS e na figura você coloca que é da reta até ...

Lugo – É que esse dS já é um número infinitesimal. Então na verdade esse dS e o dt estão bem pertinho do ponto $(x, S(x))$. Só que ele desenhou assim para ficar mais visível.

Profa. Miriam – Então você pode por uma igualdade e não aproximadamente.

Mino – Aqui [no cálculo] é igual.

Lina – Ah, eu entendi o que você está falando. Esse dS é na curva ou na reta.

Profa. Miriam – Isso.

Lina – É que tem uma diferença [olhando para o gráfico], então lá [no cálculo] tem que ser aproximadamente.

Lugo – Não! Lá é igual.

Profa. Miriam – Eu estou perguntando, porque nós aqui quando estudamos de diferencial usamos aproximado [$dS \approx S(t+dt) - S(t)$]. Você está dizendo que é o quase-diferencial.

Lina – O diferencial da função é seria o $S'(x)dx$. E esse dS é o quase-diferencial.

Mino – No limite você só colocaria um $S(t+\Delta t) - S(t)$ dividido por Δt . Depois você ia tender o Δt a zero. Seria equivalente a pegar só a parte real.

Profa. Miriam - A definição de velocidade instantânea é pelo limite ou pegar a parte real.

Enquanto essa conversa acontecia, Nanda tentava fazer um desenho para resolver a questão do dS . Mino sugeriu para passar para as demonstrações. Eles ficam consultando o material que tem em mãos e Lugo resolve esclarecer a dúvida da Profa. Miriam.

Lugo – A diferencial é $f'(x)dx$. A quase-diferencial é o dy .

Lina – Os dois estão infinitamente próximos. O que separa eles é um infinitésimo.

Lugo escreve $dy=f'(x)dx+\varepsilon$.

Lugo – Esse infinitésimo é a diferença ... [aponta para o gráfico]

Lina – Entre a curva e a reta tangente.

Lugo desenha o ε na figura.

Profa. Miriam – Entendi. É que o dy aí para vocês é o que a gente chama de Δy . É um problema de notação.

Nanda pega o livro de Swokowski e desenha indicando o que Profa. Miriam disse, ou seja, dy é do eixo x até a tangente e Δy é do eixo x até a curva.

Lugo – Se a gente dividir $dy=f'(x)dx+\varepsilon$ por dx , teremos o quociente igual à derivada mais o infinitésimo. Esse infinitésimo é o que o Mino desconsiderou ali. Pegou só a parte real.

Mino – Na verdade, você não está desconsiderando. Você está pegando a parte real.

Profa. Miriam – É. É definido assim.

Mino – É definido assim. Você pega a parte real. Você não desconsidera [o infinitésimo], porque os números reais também estão nos hiper-reais. Você só está pegando a parte real.

Profa. Miriam – É possível representar os hiper-reais geometricamente? Os reais são representados na reta ...

Mino – Os hiper-reais são representados na reta hiper-real.

Mino desenha a reta real, toma um ponto x e dá um zoom infinito neste este ponto. O desenho é a figura A.2.

Mino – Os infinitésimos estão infinitamente próximos de x , só que na reta dos reais você não consegue identificar esses valores. Aí você dá um zoom infinito neste ponto. Você vai continuar com o x , e aí você vai poder representar o acréscimo infinitesimal que é o dx . Na verdade, você tem $x+dx$. O dx é essa diferençazinha aqui. É assim que se representa os hiper-reais. Você tem que dar um zoom infinito para chegar nos hiper-reais.

Nanda – Pode ser que não tenha ficado claro, porque cada um de nós entendeu de uma forma isso, então se vocês tiverem alguma dúvida pode perguntar.

Colega 3 – É muito parecido com limite. A única diferença é a mônada que é o nome diferente para a região onde você está chegando. Ao invés de estar chegando no limite está chegando na mônada.

Nanda – É que limite você chama de vizinhança e nos infinitésimos é mônada. É a notação que você usa para cada situação que você está abordando. A questão da prova mostrou isso. Dava para você desenvolver tanto por limites quanto por infinitésimos. A maioria das pessoas fez pelo limite, porque não tinha visto isso aqui, mas dava para fazer por infinitésimos.

Lina – É que quando a gente faz por limite, a gente não se dá conta que existem esses números infinitamente pequenos. A gente faz os cálculos, o t tende a zero, mas, na verdade, não fica bem claro que são esses números infinitamente pequenos que você está usando. Você está pegando a parte real só.

Lugo – Inclusive se você pensar que uma função tem um limite que vai tendendo a zero, quando ela vai tendendo a zero ela vai se tornando um infinitésimo. Ela vai ficando cada vez menorzinha.

Nanda - Mas ela vai tendendo. Ela não é o zero. Ela vai tendendo ao zero. Fica na mônada do zero. Na vizinhança do número zero. Deu para entender?

Alguns da turma dizem sim.

Nanda – Sério?

Alguns confirmam.

Nanda, rindo – Então tá bom. A gente vai fazer agora a demonstração das fórmulas. Primeiro a gente vai fazer a da composta. No livro tem, mas também dá para fazer por infinitesimais.

3. Regra da cadeia e da soma

Lina – Eu vou provar porque que para uma função composta a derivada é a de fora vezes a de dentro. A regra da cadeia.

$$\begin{aligned}
h(x) &= f(g(x)) \\
h &= f(u) \\
u &= g(x) \\
dh &\approx h'(x)dx = f'(u)du \\
du &\approx u'(x)dx = g'(x)dx \\
dh &\approx f'(u)du \\
dh &\approx f'(u)g'(x)dx \\
dh &\approx f'(g(x))g'(x)dx \quad (\div dx) \\
\frac{dh}{dx} &\approx \frac{f'(g(x))g'(x)dx}{dx} \\
\frac{dh}{dx} &\approx f'(g(x))g'(x)
\end{aligned}$$

Enquanto Lina escrevia, ia explicando os passos. Justificava o sinal \approx , dizendo que faltava um infinitésimo para escrever igual, como no último passo.

Lina – Agora, para eu eliminar o sinal de infinitamente próximo, para escrever uma igualdade, eu tenho que acrescentar um infinitésimo.

$$\frac{dh}{dx} = f'(g(x))g'(x) + \varepsilon$$

Lina – Agora eu vou pegar a parte real.

Nanda – Retomando o que o Colega 1 perguntou, se a pessoa realmente estivesse interessado em acrescentar o infinitésimo, ela não pegaria só parte real. Partiria dali [antes de pegar a parte real] já faria os cálculos dele, as substituições dele. Seria justamente naquele ponto que iria diferenciar do valor que a gente vai obter agora.

$$h'(x) = re[f'(g(x))g'(x)]$$

Profa. Miriam – Não. Não seria a parte real incluindo “ $+\varepsilon$ ” ali.

Lina – Não, mas ε é um infinitésimo. Eu só peguei a parte real.

Profa. Miriam – Então, não precisaria escrever “real”, né? Ou você escreve a parte real de tudo aquilo ou você só escreve a parte real.

Lina – Mas eu peguei a parte real.

Profa. Miriam – Você não tinha que escrever tudo dentro do colchetes?

Lugo estava ao lado de Lina apontando o erro.

Lina – Ah, tá!

$$\frac{dh}{dx} = re[f'(g(x))g'(x)]$$

Profa. Miriam – Não teria que colocar o “+ε” ali?

Lugo diz que tem que colocar o infinitésimo.

Profa. Miriam – Entendeu?

Lina – Entendi.

$$\frac{dh}{dx} = re[f'(g(x))g'(x)] + \varepsilon$$

Profa. Miriam – Mas tira aquele colchete.

$$\frac{dh}{dx} = re f'(g(x))g'(x) + \varepsilon$$

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Lina – Agora deu. Alguma dúvida?

Profa. Miriam e os colegas não quiseram mais chamar a atenção de Lina para a escrita.

Nanda – Agora a derivada da soma é a soma das derivadas. É mais uma questão de definição também.

Profa. Miriam – O que é legal aí é que você não usa limite, aquelas coisas todas de limite. Você opera como se fossem números. O dx ali ...

Nanda – Cancela ..

Profa. Miriam – Isso. Quando a gente trabalha da outra forma, é uma notação apenas. Você não pode já ir cancelando assim.

Nanda - Tanto é que quando a senhora explicou a função composta mesmo, você disse “eu não posso passar o dx para cá multiplicando”. Neste caso a gente pode fazer isso, pode cortar normalmente.

Profa. Miriam – É um número.

Nanda – É. É um número.

Profa. Miriam – Muito pequeno, mas é um número.

Nanda – É. Não como a notação usada no limite. Não pode passar para lá dividindo, passa para lá multiplicando. Como é um número muito pequeno, a gente trata como se fosse 2 e qualquer outro número. Bem, a regra da soma, a gente tem uma função $h(x) = f(x) + g(x)$ e a gente parte da definição. Essa aqui é a minha definição de dh : $dh = h(x+dx) - h(x)$.

$$\begin{aligned}
h(x) &= f(x) + g(x) \\
dh &= h(x+dx) - h(x) \\
dh &= f(x+dx) + g(x+dx) - [f(x) + g(x)] \\
dh &= f(x+dx) - f(x) + g(x+dx) - g(x) \\
dh &= df + dg
\end{aligned}$$

Nanda – Pegando a parte real disto aqui, para não ficar repetitivo, pois a gente tem outra função para mostrar, $h'(x) = \text{re} \left[\frac{dy}{dx} \right] = f'(x) + g'(x)$. Se vocês pegarem isso aqui e quiserem fazer as continhas, as operações são as mesmas que a gente faz nas demonstrações do livro. Só tem que cuidar com esse sinal de menos [na definição de dh]. Ele está na definição do conceito de derivada. Quando você tiver fazendo as operações, pode ser que ele se perca. Mas você tem que observar que a definição é essa.

Lugo avisou que não era dy e sim dh entre colchetes. Nanda, então consertou.

Nanda – É mais a notação. Esse é o problema. A notação que você usa para cada uma das coisas que você faz. Essas letras, de vez em quando, você fica meio perdido.

Profa. Miriam – Aí no lugar de df você substitui por $f'(x)dx$. É isso?

Nanda – É. Aí teria que fazer as contas, pois vai ficar igual a de Lina.

Profa. Miriam – Sim, mas é isso que tem que fazer?

Nanda – Você divide direto por dx . Só que não vai ser igual. Vai ser aproximado.

Profa. Miriam – Vai escrever $df \approx f'(x)dx$ e $dg \approx g'(x)dx$. Aí coloca dx em evidência e divide por dx . Ah, acho que você poderia fazer.

Nanda – É que tem o seno.

Profa. Miriam – Ah então deixa. Eu entendi, não sei se vocês entenderam.

4. Cálculo da derivada do seno

Para a derivada do seno, eles fixam no quadro cartolinas com as figuras do círculo trigonométrico e zooms.

Lugo – Vamos mostrar agora porque que a derivada do seno é o cosseno, pelos infinitésimos. A gente vai usar a definição de dy . Vamos dar um acréscimo infinitesimal.

$$\begin{aligned}
 dy &= \text{sen}(x+dx) - \text{sen } x \\
 dy &= \text{sen } x \cdot \cos dx + \text{sen } dx \cdot \cos x - \text{sen } x \\
 dy &= \text{sen } x(\cos dx - 1) + \text{sen } dx \cdot \cos x \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{\text{sen } x(\cos dx - 1)}{dx} + \frac{\text{sen } dx \cdot \cos x}{dx}
 \end{aligned}$$

Lugo – Agora, a gente vai precisar de muita atenção. Porque a gente chega neste problema. Qual é o $\text{sen } dx$ e o $\cos dx$. Agora eu vou tentar explicar a vocês.

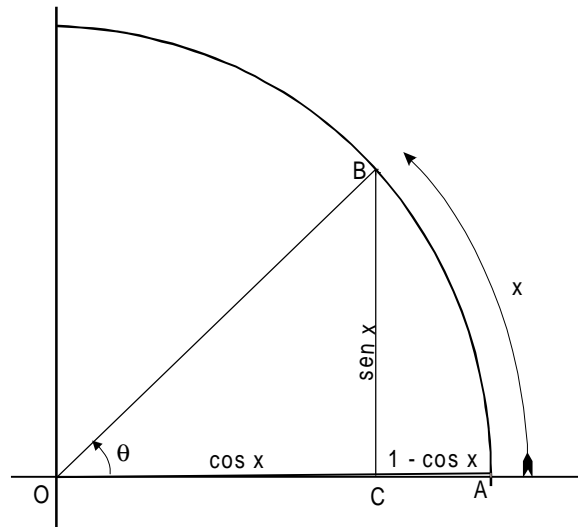


Figura A.4

Lugo - Quando a gente tem um círculo trigonométrico da forma que a gente conhece, se esse for o arco teta, o coseno vai ser a projeção no eixo horizontal e o seno a projeção no eixo vertical. Agora a gente vai trabalhar com um arco infinitesimal, dx . Então a gente dá um zoom. Quando a gente chegar perto do ponto A, a gente tem a impressão de que esse pedacinho, o arco aqui é mais ou menos, tem a impressão de uma reta. Dá a impressão, se a gente chegar muito próximo.

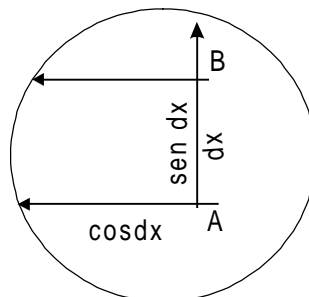


Figura A.5

Nanda – Você tem que viajar um pouco.

Lugo – Tem que imaginar um pouco.

Colega 3 – É como o horizonte. O horizonte é curvo e você tende a imaginar que é uma reta.

Nanda – Exatamente. Você tem que viajar muito. Para você sair do que você conhece e ir para lá.

Lina – Quando a Raquel propôs para gente foi bem ...

Isto causou risos e muitas conversas paralelas entre os alunos e professora.

Lugo – Só que aqui [Figura A.5] ainda tá meio difícil da gente evidenciar onde é o arco e onde é o seno. Aí eu vou dar um outro zoom aqui [ponto A] e vou enxergar melhor.

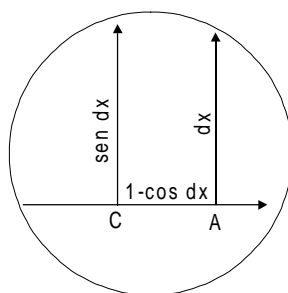


Figura A.6

Lugo – Essa projeção [$\cos dx$] vem lá da origem, pois eu estou muito distante da origem, estou infinitamente próximo do ponto A, até C. 1 é porque o raio do círculo é 1. Essa diferença aqui é uma diferença infinitesimal.

Nanda – É uma diferença muito pequena.

Lugo – Então, $\cos dx \approx 1$.

Nanda – É próximo, mas não é 1.

Lugo – Porque $\cos 0 = 1$. Se você aumentar um pouquinho o ângulo, um ângulo infinitesimal, ele vai ter o cosseno muito próximo de 1, mas menor que 1. A gente vai trabalhar com infinitamente próximo. A primeira parte foi. Graças a Deus, tudo bem.

Risos entre os apresentadores.

Lugo – No segundo zoom, $\sin dx$ é esse segmento aqui. Notem que quando a gente chegar muito próximo, como o arco é muito pequeno, a gente vai ter a impressão que o seno vai ser igual ao próprio dx .

Profa. Miriam – O x do dx ?

Lugo – É aproximadamente igual.

Nanda – Dá para vocês perceber esse zoom, de chegar próximo demais?

Lugo – O seno de zero é quanto Profa. Miriam? Zero. Se você aumentar um pouquinho mais o ângulo o seno vai ser próximo de zero. Como o arco já é pequeno, bem próximo de zero, eles são aproximadamente iguais.

Colega 4 – dx é igual ao dy ?

Lugo - É que dx é o arco, não depende do eixo x e do y .

Profa. Miriam – Ah, é um arco.

Nanda – Quando você chegar bem perto do ponto A [na figura A.4], você não vai ver isso [arco] virando. Você vai ver paralelo, que é o que tá aqui [figura A.6].

Lugo – Você vai continuar vendo reto, só que ele [arco] vai virando. ..

Profa. Miriam – O que atrapalhou ali foi esse círculo que você fez em volta do zoom [no segundo]. Dá a impressão que o círculo é o círculo trigonométrico.

Lugo - Não. Esquece esse círculo!

Nanda – Não. Isso aqui é só para denotar o que a gente tem.

Lugo – Esse dx aqui [figura A.6], na verdade, é esse pedacinho aqui [dx em figura A.4] do círculo trigonométrico. Só que é tão pequeno, ou melhor, a gente tá tão perto que a gente enxerga ele como uma reta. E o $\text{sen } dx$ é paralelo a ele. São aproximadamente iguais: $\text{sen } dx \approx dx$.

Lina – A diferença é $1 - \cos dx$, infinitesimal.

Ninguém reclamou da fala de Lina.

Lugo – Tudo bem? Bom se vocês entenderam até aqui, o resto vai ser beleza! O coseno de dx é infinitamente próximo de 1. Então, 1 menos o coseno de dx é o quê?

Profa. Miriam – É uma coisa bem próxima de zero.

Outros colegas – Infinitésimo.

Lina aponta no segundo zoom em A , a diferença em questão.

Lugo diz que um infinitesimal vezes um número real [$\text{sen } x$] é um infinitesimal.

Lugo – $\text{sen } dx$ é aproximadamente igual a dx . Aproximadamente. Não são iguais. Então

$$\frac{\text{sen } dx}{dx} \approx \frac{dx}{dx} = 1.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{sen } x(\cos dx - 1)}{dx} + \frac{\cos x \text{sen } dx}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \varepsilon + \cos x$$

Profa. Miriam – Tá mas você não vai colocar $\frac{\text{sen } dx}{dx}$?

Lina e Lugo – Já colocou.

Profa. Miriam – Seria aproximadamente!

Lugo diz que a primeira parcela é um infinitésimo e apaga a última linha. Escreve:

$$\frac{dy}{dx} \approx 0 + \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x + \varepsilon$$

Lugo – Agora a gente vai fazer o de sempre. Vai pegar a parte real e desconsiderar o infinitésimo. Ele existe, mas a gente vai desconsiderar.

$$f'(x) = \cos x$$

Lugo – A derivada do cosseno é extremamente parecida.

Nanda – Só que no gráfico, você vai ter que olhar para outro eixo. Ao invés do seno, o eixo do cosseno. Independente dessas contas, o interessante é você olhar. Ter essa visão gráfica aqui. Enxergar que bem perto do ponto você vai ver $\text{sen } dx$ paralelo a dx .

Profa. Miriam – Isto é muito estranho.

Risos.

Nanda – Eu acho.

Colega 3 - Para facilitar a visualização, ao invés de pegar um espaço muito pequeno, aumenta isso aí. Desenha um raio grandão ...

Nanda – Você quer aumentar a escala do desenho, mas isso não vai adiantar porque tem que ir muito próximo do 1.

Lugo, para o colega 3 – Isso que você tá falando, você teria que aumentar infinitamente o seu círculo. Você teria que Ter um círculo infinito. Aí você vai enxergar.

Colega 3 – É que fica difícil enxergar, quando é muito pequeno, que são paralelos. Aí se você fizer grande, você consegue enxergar melhor que são paralelos.

Nanda – Não. Você já chega com um preconceito. Você sabe que são paralelos. Até você conceber, aceitar que eles realmente são paralelos demora!

Lugo – A gente demorou uma semana para entender isto aí!

Alguns pontos que ficaram obscuros em encontros anteriores, foram explicados neste encontro de apresentação. Deu para entender que a dificuldade deles em desenhar o segundo zoom em A , no terceiro encontro, vinha da crença de que $\sin dx$ e dx eram paralelos. Eles acharam que eu estava falando que isto era verdade. Não compreenderam que se enxergava desta forma, pois estávamos muito no começo do ponto A . Mas muito mesmo! Mas que, na verdade, uma curva e uma reta nunca são paralelos!

Lugo desenha um círculo trigonométrico e marca um arco muito pequeno.

Colega 3 – É paralelo ao seno dele.

Lugo pára sem resposta.

Profa. Miriam – Não são paralelos. Um arco e uma reta.

Colega 3 – Mas no infinitesimal eles são paralelos.

Profa. Miriam – Dá a idéia de que são paralelos.

Nanda – Depende do zoom que você dá. Num zoom, você vê os dois juntos. Se você der outro zoom, você vê os dois paralelos.

A turma estava agitada. Quase nem dava para ouvir os apresentadores.

Nanda – Deu para entender alguma coisa.

A Profa. Miriam e alguns alunos respondem afirmativamente.

Profa. Miriam – Agora me diz uma coisa. Por que que vocês viram tudo isto?

Nanda – Para ter uma visão diferente do Cálculo. Porque antes, aqui na faculdade, o Cálculo era dado através dos infinitésimos. Você tinha esta visão dos infinitésimos no Cálculo. Por causa da pesquisa da Raquel, ela nos chamou a gente para ir lá, se a gente concordasse, para ver esta visão diferente. E talvez, desta maneira, fica até mais fácil da gente conceber a idéia de limite, de derivada. A integral, dá para ter uma idéia através dos infinitésimos muito maior de por que a área embaixo de uma curva...

Lina – Você calcula a área de quadradinhos muito pequenos, infinitésimos. E se você juntar todos você tem a área.

Nanda desenha uma curva qualquer e se refere à área da região entre a curva e o eixo horizontal.

Nanda - Você pode calcular essa área aqui e é muito legal. Porque você pode dividir esta área em trapézios muito pequenos e calcular a área.

Lina – Cada vez que você pegar pedacinhos mais pequenos você vai chegar mais próximo do que seria a área embaixo da curva.

Nanda – Então é bem mais fácil de você visualizar.

Profa. Miriam – Como essas idéias se desenvolveram? Paralelamente? Foi essa a idéia genuína e depois foi a de limite? Porque vocês perceberam que eu nunca aprendi isso. Eu nunca vi dessa forma. Lá na Matemática, é só por limite. Historicamente, vocês chegaram a ver?

Lugo – Eu acredito que o limite veio primeiro. Eu vi num livro. Porque a gente se interessou e começou a correr atrás de um monte de livro. Num dos livros, eu achei uma definição de infinitésimo por limite. Era essa aqui. Você tem uma função qualquer $f(x)$. Quando limite de $f(x)$ quando x tende para a é zero, ela é chamada infinitésimo. É uma outra definição. Mas a definição que a gente ouviu com a Raquel foi que um infinitésimo é um número menor que qualquer número real positivo.

Profa. Miriam – Menor número...

Lugo – Menor que qualquer real positivo.

Profa. Miriam – Você pensa em um. Infinitésimo é menor que ele.

Nanda – Você pensa em um, ele é menor ainda. Então você sempre vai ter um número menor.

Lina – A gente não falou em infinitésimo de segunda ordem.

Lugo – É. Aqui [figura A.5] a gente deu um zoom para ver o infinitésimo. Aqui [figura A.6] a gente deu outro zoom para ver outro infinitésimo. Esse $[dx]$ é de primeira ordem e esse $[1-\cos dx]$ é de segunda ordem. É um infinitésimo menor que o outro infinitésimo. Se você tiver um infinitésimo menor que todos infinitésimos, é um infinitésimo de ordem infinita.

Risos da turma inteira.

Nanda – É viagem.

Colega 4 – Você vai ter infinitésimo de infinitésimo de infinitésimo.

Nanda – Alguém tem pergunta? Deu para entender essa idéia de infinitésimo, zoom? Esse zoom aí é muito legal. A demonstração da fórmula da derivada do produto e do quociente é a mesma coisa.

Lina – Parte do mesmo princípio.

Nanda – É só você pegar a definição ...

Lugo – Demora um pouquinho, mas com esforço sai!

Nanda – A gente fica enrolado um pouco com essas demonstrações, porque a gente não está acostumado. A gente pega mais a parte prática da Matemática. Tanto que quando o professor demonstra as fórmulas, a gente fica “ah ...” [risos]. Mas é legal, bem interessante isso aí. Principalmente essa visão geométrica que a gente teve do zoom.

Profa. Miriam – Eu gostei das viagens.

Nanda - Toda a vez que a gente saía dos encontros a gente ficava viajando.

Lugo – Essa história do cronômetro, de que você nunca vai chegar na sua casa. Por exemplo, se você pegar uma distância. Daqui até ali. Primeiro você vai percorrer a distância até o meio, depois percorrer a metade. Depois a outra metade, a outra metade ... Você nunca vai chegar no lugar. Aí a gente ficou acabados ...

Profa. Miriam – Arrasados!

Risos.

Nanda – Tem os fractais também. Que é um exemplo bem interessante dessa parte infinitesimal. Você vai dividindo, dividindo ... A teoria do caos também. A idéia de que uma coisa muito pequena que pode afetar. Como nos exemplos que a gente deu. Dependendo do cálculo que você tiver fazendo esse infinitésimo vai ter que ser contado. Vai fazer diferença. Como o bater das asas de uma borboleta pode provocar um ciclone. Então tem que ver.

Colega 5 – Para calcular o decaimento de um elemento radioativo, esse infinitésimo entra?

Nanda – Olha sinceramente eu não sei. Mas pelo problema que isso pode causar, ou até mesmo dependendo da parte que você quer observar deste cálculo, esse infinitésimo possa fazer muita diferença. Eu acredito que sim.

Colega 5 – É que nunca chega no lugar, né? Então o elemento nunca vai decair

Nanda – Mas esse negócio de que nunca chega no lugar, já é mais uma visão. A parte algébrica do infinitésimo é que vai influenciar mesmo neste cálculo. As viagens que você vai fazer aí é outra coisa.

Os alunos acabam a apresentação.

Raquel – Eu quero agradecer a participação da turma e principalmente a das minhas “cobaias” [risos], porque eles se dispuseram a sair da sala de aula, perderam a explicação da Miriam, para estar lá comigo, ajudando na minha pesquisa. Eu fico muito feliz como pesquisadora e professora por estar vendo os quatro aqui desenvolvendo o que a gente viu nos encontros. Eles conseguiram passar para vocês uma idéia do que aconteceu lá. A dedicação deles foi bastante grande e eu agradeço por isso. E o nome de vocês [dos 4 alunos] vai estar lá no início da dissertação, nos agradecimentos.

Profa. Miriam – Eles podem ir na defesa!

Raquel – É. Então, palmas para eles!

Depois de acabada a apresentação, a aula foi encerrada e fiquei conversando um pouco com os apresentadores. Discutimos sobre a derivada do produto. Eles haviam gostado da apresentação e acharam que os colegas e professora também haviam pensado o mesmo.

APÊNDICE

ESTUDO SOBRE ANÁLISE INFINITESIMAL

Os conceitos com os quais trabalhei com os quatro alunos, colaboradores de minha pesquisa, nos encontros de Cálculo Infinitesimal, são fundamentados por uma teoria matemática rigorosa. Apresento, neste apêndice, essa teoria abordada através de dois métodos, igualmente rigorosos, que denominarei: método construtivo e método axiomático.

A teoria é chamada de *Análise Infinitesimal*. Não utilizo o termo *Análise Não-Standard*, pois, como já mencionado em capítulos anteriores, não estou lançando mão da lógica formal dos modelos. É importante ressaltar que o termo *infinitesimal*, não se remete à idéia de infinitésimo definido através do conceito de limite, e sim, diz respeito ao conceito de infinitésimo quando tratado segundo a *Análise Não-Standard*.

O leitor encontra este anexo, nesta dissertação, por dois motivos. Um deles é para mostrar que as idéias intuitivas utilizadas nos encontros de Cálculo Infinitesimal, não são nenhuma invenção da autora e de seu grupo de pesquisa. São idéias que têm fundamentação teórica rigorosa e que, portanto, essa teoria é aceita, ou, pelo menos, deveria ser aceita, pela comunidade matemática. O outro motivo é para auxiliar o leitor que queira iniciar um estudo sobre *Análise Infinitesimal*. Com o texto apresentado a seguir, não tive intenção de esgotar o tema, mas, sim, de mostrar algumas idéias sobre a teoria.

O estudo está dividido na *via construtiva* e na *via axiomática*. No primeiro método de abordar a *Análise Infinitesimal*, primeiramente, os números hiper-reais são construídos a partir de seqüências de números reais. Posteriormente, as operações com tais números são apresentadas; os elementos do conjunto dos hiper-reais são abordados mais detalhadamente; e, por fim, o conjunto com as operações e relação de ordem definidas forma um corpo ordenado não completo.

No método axiomático, primeiramente, um corpo ordenado (não completo) com certas operações é apresentado através de axiomas específicos. Posteriormente, este corpo é chamado de conjunto dos números hiper-reais.

Análise Infinitesimal

1. Via Construtiva

A construção dos números hiper-reais segue de perto a construção dos números reais por seqüências fundamentais. Porém, a relação de equivalência entre duas seqüências será diferente, e, ao invés de partirmos dos racionais, partiremos dos reais.

Antes de abordarmos a construção dos hiper-reais, apresentaremos alguns conceitos que serão necessários ao desenvolvimento do estudo.

Dizemos que um ultrafiltro livre nos naturais é uma família de partes de \mathbb{N} , anotada por \mathcal{U} , que satisfaz as seguintes condições:

- 1) $\mathcal{U} \neq \emptyset$ e $\emptyset \notin \mathcal{U}$
- 2) Se $A \in \mathcal{U}$ e $B \in \mathcal{U}$ então $(A \cap B) \in \mathcal{U}$
- 3) Se $A \in \mathcal{U}$ e $B \supset A$ então $B \in \mathcal{U}$
- 4) Nenhum conjunto finito pertence a \mathcal{U}
- 5) $(\forall A) A \subset \mathbb{N}$, ou $A \in \mathcal{U}$ ou $A^c \in \mathcal{U}$

Se considerármos apenas as condições 1, 2 e 3, \mathcal{U} é um filtro. Se além destas, considerármos a condição 4, \mathcal{U} é um filtro livre. Se considerármos as condições 1, 2, 3 e 5, \mathcal{U} é um ultrafiltro.

Seja S o conjunto de todas seqüências de números reais. Para construir o conjunto dos hiper-reais, vamos estabelecer a seguinte relação de equivalência entre duas seqüências de S :

$$(a_n) \sim (b_n) \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} | a_n = b_n\} \in \mathcal{U}$$

Outra forma de escrever esta relação de equivalência é,

$$(a_n) \sim (b_n) \Leftrightarrow a_n = b_n \text{ qs (quase sempre).}$$

Provemos que a relação \sim é de equivalência. Antes disso, é importante salientar que, em vários momentos, neste material, estaremos analisando se certos conjuntos pertencem ou não a \mathcal{U} . Esses conjuntos serão sempre partes de \mathbb{N} . Provemos, agora, que a relação \sim é reflexiva, simétrica e transitiva.

Seja (a_n) uma seqüência qualquer de reais. O complementar de $\{n \in \mathbb{N} | a_n = a_n\} = \mathbb{N}$ é vazio. Assim, pela condição 4 e 5, $\{n \in \mathbb{N} | a_n = a_n\} \in \mathcal{U}$. Logo, $(a_n) \sim (a_n)$ e a relação \sim é reflexiva.

Sejam (a_n) e (b_n) quaisquer duas seqüências de reais. Vamos supor que $(a_n) \sim (b_n)$. Assim, $\{n \in \mathbb{N} | a_n = b_n\} \in \mathcal{U}$. Sabendo que a relação de igualdade é simétrica, temos que $\{n \in \mathbb{N} | b_n = a_n\} \in \mathcal{U}$. Logo, $(b_n) \sim (a_n)$ e a relação \sim é simétrica.

Sejam (a_n) , (b_n) e (c_n) quaisquer três seqüências de reais. Vamos supor que $(a_n) \sim (b_n)$ e $(b_n) \sim (c_n)$. Assim, $A = \{n \in \mathbb{N} | a_n = b_n\} \in \mathcal{U}$ e $B = \{n \in \mathbb{N} | b_n = c_n\} \in \mathcal{U}$. A interseção $A \cap B$ é o conjunto $\{n \in \mathbb{N} | a_n = b_n \text{ e } b_n = c_n\}$. Pela condição 2, $A \cap B \in \mathcal{U}$. Para qualquer $n \in A \cap B$, $a_n = b_n$ e $b_n = c_n$. Como a relação de igualdade é transitiva, $a_n = c_n$. Por isso, o conjunto $\{n \in \mathbb{N} | a_n = c_n\}$ contém $A \cap B$. Pela condição 3, $\{n \in \mathbb{N} | a_n = c_n\} \in \mathcal{U}$. Logo, $(a_n) \sim (c_n)$ e a relação \sim é transitiva.

Fica provado, então, que a relação \sim é de equivalência.

Se $(a_n) \sim (b_n)$, então (a_n) e (b_n) pertencem à mesma classe de equivalência, que anotamos por $\langle a_n \rangle$ ou $\langle b_n \rangle$.

Feitas estas considerações preliminares, apresentamos, agora, a definição de um número hiper-real.

Definição 1. *Seja S/\sim o conjunto das classes de equivalência de S sob a relação \sim . Nessas condições, um hiper-real é definido como uma classe de equivalência do conjunto S/\sim . Anotamos tal conjunto por ${}^*\mathbb{R}$.*

OBS 1: É válido salientar que duas classes de equivalência são sempre disjuntas e, portanto, determinam dois hiper-reais distintos.

OBS 2: Embora resulte, imediatamente, da observação acima, que cada seqüência de reais determina um único hiper-real, não é verdade que um hiper-real é determinado por uma única seqüência. É determinado por infinitas seqüências, por exemplo:

Seja $\langle a_n \rangle \in {}^*\mathbb{R}$, determinado por (a_n) . Sejam $k \in \mathbb{N}$ e

$$(b_n) = \begin{cases} 0, & n \in \{1, 2, \dots, k\} \\ a_n, & n \in \{k+1, k+2, \dots\} \end{cases}$$

$\{n | a_n = b_n\} \supset \{k+1, k+2, \dots\} = A$. A^c é finito. Pela condição 4 e 5, $A \in \mathcal{U}$. Daí e pela condição 3, $\{n \in \mathbb{N} | a_n = b_n\} \in \mathcal{U}$. Logo, $(a_n) \sim (b_n)$ e $\langle a_n \rangle$ é determinado por mais de uma seqüência.

Consideremos, agora, a seguinte lei que gera várias seqüências:

$$(b_n)_{(k)} = \begin{cases} 0, & n \in \{1, 2, \dots, k\} (k \in \mathbb{N}) \\ a_n, & (\forall n) n \in \{k+1, k+2, \dots\} \end{cases}$$

De acordo com esta lei, temos as seguintes seqüências:

$$\begin{aligned} (b_n)_1 &= \{0, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\} \\ (b_n)_2 &= \{0, 0, a_3, \dots, a_n, \dots\} \\ &\vdots \\ (b_n)_k &= \{0, 0, \dots, 0, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n, \dots\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Se para todo k natural as infinitas seqüências acima forem equivalentes entre si, elas determinarão o hiper-real $\langle a_n \rangle$. De fato, sejam l e h naturais e

$$\begin{aligned} (b_n)_l &= \{0, 0, \dots, 0, a_{l+1}, \dots, a_n, \dots\} \\ (b_n)_h &= \{0, 0, \dots, 0, a_{h+1}, \dots, a_n, \dots\} \end{aligned}$$

as respectivas seqüências.

Seja $f = \max\{l, h\}$. O conjunto $\{n \in \mathbb{N} | (b_n)_l = (b_n)_h\}$ contem $\{f+1, f+2, \dots\} = A$. O complementar de A é finito. Pela condição 4 e 5, $A \in \mathcal{U}$. Pela condição 3, $\{n \in \mathbb{N} | (b_n)_l = (b_n)_h\} \in \mathcal{U}$. Logo, $(b_n)_l \sim (b_n)_h$. Dessa forma, um hiper-real é determinado por infinitas seqüências de reais.

Até agora, estamos utilizando um ultrafiltro livre \mathcal{U} , mas não temos como determiná-lo. A existência desse ultrafiltro depende de se possa consumir uma infinidade de escolhas, o que é impossível em tempo finito. Estamos falando do axioma da escolha. Ele nos permite supor que já se tenha feito uma escolha, não interessando saber qual dentre as infinitas que se possa fazer. Este axioma da teoria dos conjuntos é equivalente ao lema de Zorn. A demonstração da existência de um ultrafiltro livre é garantida por uma aplicação desse lema. Esta demonstração pode ser encontrada em Dunford e Schwartz (1964, p.6,7).

Dado um conjunto infinito de naturais, não temos como saber se ele pertence ou não a \mathcal{U} . Sabemos apenas que ou ele ou seu complementar pertence a \mathcal{U} . Isso porque \mathcal{U} não é construtível. Por exemplo, vamos considerar as seguintes seqüências:

$$(a_n) = (0, 1, 0, 1, 0, \dots)$$

$$(b_n) = (1, 0, 1, 0, 1, \dots)$$

$$0 = (0, 0, 0, 0, 0, \dots)$$

Então,

$$\{n | a_n = 0\} = \{1, 3, 5, \dots\} \text{ é conjunto dos números ímpares}$$

e

$$\{n | b_n = 0\} = \{2, 4, 6, \dots\} \text{ é o conjunto dos números pares.}$$

Tanto o conjunto dos pares quanto o dos ímpares é um conjunto infinito de naturais. Qual dos dois pertence a \mathcal{U} ? Se os dois pertencessem, de acordo com a condição 2, a interseção pertenceria. Mas ela é o conjunto vazio e, segundo a condição 1, o vazio não pertence a \mathcal{U} . Então, os dois conjuntos não estão em \mathcal{U} . Se apenas o conjunto dos ímpares pertencer a \mathcal{U} , então, pela relação de equivalência definida, $(a_n) \sim 0$. Se apenas o conjunto dos pares pertencer a \mathcal{U} , então $(b_n) \sim 0$. Não temos como saber, portanto, qual das duas sequências é equivalente à sequência nula.

Operações em ${}^*\mathbb{R}$

As operações de soma e multiplicação em ${}^*\mathbb{R}$ são definidas da seguinte maneira. Seja $a = \langle a_n \rangle$ e $b = \langle b_n \rangle$.

$$a + b = \langle a_n \rangle + \langle b_n \rangle = \langle a_n + b_n \rangle$$

$$a \cdot b = \langle a_n \rangle \cdot \langle b_n \rangle = \langle a_n \cdot b_n \rangle$$

Para mostrar que estas operações estão bem definidas, ou seja, que a soma e o produto de dois hiper-reais independem da seqüência que determina cada classe em questão, tomemos $(a_n) \sim (a'_n)$ e $(b_n) \sim (b'_n)$.

$$(a_n) \sim (a'_n) \Leftrightarrow A = \{n \in \mathbb{N} | a_n = a'_n\} \in \mathcal{U}$$

$$(b_n) \sim (b'_n) \Leftrightarrow B = \{n \in \mathbb{N} | b_n = b'_n\} \in \mathcal{U}$$

$$\text{Pela condição 2, } A \cap B = \{n \in \mathbb{N} | a_n = a'_n \text{ e } b_n = b'_n\} \in \mathcal{U}.$$

$$\{n \in \mathbb{N} | a_n + b_n = a'_n + b'_n\} \supset A \cap B$$

Pela condição 3, $\{n \in \mathbb{N} | a_n + b_n = a'_n + b'_n\} \in \mathcal{U}$. Logo, $(a_n + b_n) \sim (a'_n + b'_n)$ e ambos pertencem a $\langle a_n + b_n \rangle$. O mesmo vale para a multiplicação. ■

Relação de ordem em ${}^*\mathbb{R}$

A relação de ordem em ${}^*\mathbb{R}$ é definida da seguinte maneira. Seja $a = \langle a_n \rangle$ e $b = \langle b_n \rangle$.

$$a = \langle a_n \rangle \leq \langle b_n \rangle = b \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \leq b_n\} \in \mathcal{U}$$

Para mostrar que a relação de ordem está bem definida, tomemos $(a_n) \sim (a'_n)$, $(b_n) \sim (b'_n)$ e $\langle a_n \rangle \leq \langle b_n \rangle$.

$$(a_n) \sim (a'_n) \Leftrightarrow A = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = a'_n\} \in \mathcal{U}$$

$$(b_n) \sim (b'_n) \Leftrightarrow B = \{n \in \mathbb{N} \mid b_n = b'_n\} \in \mathcal{U}$$

$$\langle a_n \rangle \leq \langle b_n \rangle \Leftrightarrow C = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \leq b_n\} \in \mathcal{U}$$

Pela condição 2, $A \cap B = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = a'_n \text{ e } b_n = b'_n\} \in \mathcal{U}$.

Novamente por 2, $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n = a'_n \text{ e } b_n = b'_n \text{ e } a_n \leq b_n\} = A \cap B \cap C \in \mathcal{U}$.

$$\{n \in \mathbb{N} \mid a'_n \leq b'_n\} \supset \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = a'_n \text{ e } b_n = b'_n \text{ e } a_n \leq b_n\}$$

Pela condição 3, $\{n \in \mathbb{N} \mid a'_n \leq b'_n\} \in \mathcal{U}$.

Logo, $\langle a'_n \rangle \leq \langle b'_n \rangle$.

Os Elementos de ${}^*\mathbb{R}$

1. Os Números Reais

Definamos uma função h da seguinte maneira.

$$h : \mathbb{R} \rightarrow {}^*\mathbb{R}$$

$$a \rightarrow h(a) = \langle a \rangle$$

O número real a será reconhecido como o hiper-real $\langle a \rangle$, que é a classe de equivalência da seqüência constante (a) . Provemos que h é um homomorfismo, ou seja, uma função que preserva as operações e a relação de ordem de \mathcal{U} .

Para isto devemos provar que:

1. $(\forall a)(\forall b)(a, b \in \mathbb{R} \rightarrow h(a + b) = h(a) + h(b))$
2. $(\forall a)(\forall b)(a, b \in \mathbb{R} \rightarrow h(a \cdot b) = h(a) \cdot h(b))$
3. $(\forall a)(\forall b)(a, b \in \mathbb{R} \rightarrow (a < b \rightarrow h(a) < h(b)))$

Prova

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$.

$$1. h(a + b) = \langle a + b \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle = h(a) + h(b)$$

$$2. h(a \cdot b) = \langle a \cdot b \rangle = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle = h(a) \cdot h(b)$$

3. Sejam $a_n = a$ e $b_n = b$, $(\forall n)(n \in \mathbb{N})$. Como $a < b$, temos que $\{n \in \mathbb{N} | a_n < b_n\} = \mathbb{N}$. O complementar de \mathbb{N} é o conjunto vazio. Pela condição 1, $\emptyset \notin \mathcal{U}$ e, portanto, pela condição 5, $\{n \in \mathbb{N} | a < b\} = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$. Daí, $\langle a \rangle < \langle b \rangle$. Logo, $h(a) < h(b)$. ■

Provemos, agora, que h é injetiva, ou seja, $(\forall a)(\forall b)(a, b \in \mathbb{R})(a \neq b \rightarrow h(a) \neq h(b))$. Isto mostra que para cada dois reais quaisquer e distintos, obtemos dois números hiper-reais também distintos. De fato, sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Como $a \neq b$, ou $a < b$ ou $b < a$. Do terceiro resultado acima provado, temos que ou $h(a) < h(b)$ ou $h(b) < h(a)$. Logo, $h(a) \neq h(b)$.

Todo número real é, portanto, um número hiper-real.

2. Os Infinitésimos

Infinitésimo é um hiper-real cujo módulo é menor que qualquer número real positivo. Ou seja, $x \in {}^*\mathbb{R}$ é infinitésimo $\Leftrightarrow (\forall a)(a \in \mathbb{R}^+ \rightarrow |x| < a)$.

Como exemplo, provaremos que $\langle \frac{1}{n} \rangle$ é um número infinitesimal. Para isto, e para outros exemplos, precisaremos definir o que é módulo de um hiper-real. Assim, se $\langle a_n \rangle \in {}^*\mathbb{R}$, então $|\langle a_n \rangle| = \langle |a_n| \rangle$. Voltemos ao exemplo.

Prova

Seja $a \in \mathbb{R}^+$; $\langle a \rangle \in {}^*\mathbb{R}$. Temos que $|\langle \frac{1}{n} \rangle| = \langle |\frac{1}{n}| \rangle = \langle \frac{1}{n} \rangle$.

$$(\exists N)(N \in \mathbb{N})(\forall n)(n > N \Rightarrow \frac{1}{n} < a)$$

$\{n \in \mathbb{N} | \frac{1}{n} < a\} \supset \{N + 1, N + 2, \dots\} = A$. O complementar de A é finito. Pelas condições 4 e 5, $A \in \mathcal{U}$. Daí e de acordo com a condição 3, $\{n \in \mathbb{N} | \frac{1}{n} < a\} \in \mathcal{U}$. Logo, $\langle \frac{1}{n} \rangle < \langle a \rangle$. ■

Outro exemplo: Provar que $\langle \frac{1}{n} \rangle < \langle \frac{1}{\sqrt{n}} \rangle$.

Prova

Seja $A = \{n \in \mathbb{N} | \frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}\}$. O complementar de A é o conjunto finito $\{n \in \mathbb{N} | \frac{1}{n} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\} = \{1\}$. Pela condição 4 e 5, $A \in \mathcal{U}$. Logo, $\langle \frac{1}{n} \rangle < \langle \frac{1}{\sqrt{n}} \rangle$. ■

Isto mostra que para duas seqüências serem equivalentes, não basta convergirem para o mesmo limite. É necessário que a "taxa de convergência seja a mesma". Mais um exemplo

disto são as seqüências,

$$\begin{aligned}(a_n) &= \{0,9; \quad 0,99; \quad 0,999; \dots\} \\(b_n) &= \{0,99; \quad 0,9999; \quad 0,999999; \dots\} \\(c_n) &= \{0,999; \quad 0,999999; \quad 0,99999999; \dots\}\end{aligned}$$

Desta forma, $\langle a_n \rangle < \langle b_n \rangle < \langle c_n \rangle$.

Um infinitésimo pode ser positivo, negativo ou nulo. Os infinitésimos positivos e negativos são hiper-reais e não são reais. O único infinitésimo nulo é o número real zero. Para qualquer outro real x , diferente de zero, existe sempre um real positivo a (por exemplo, $a = \frac{|x|}{2}$) tal que $|x| \geq a$.

Os Números Infinitos

Um hiper-real infinito positivo é um número maior que qualquer número real. Ou seja, $w \in {}^*\mathbb{R}$ é infinito positivo $\Leftrightarrow (\forall a)(a \in \mathbb{R} \rightarrow w > a)$.

Como exemplo, provaremos que $\langle n \rangle$ é um número infinito positivo.

Prova

Sejam $a \in \mathbb{R}$; $\langle a \rangle \in {}^*\mathbb{R}$.

Como \mathbb{R} é um corpo arquimediano, existe um natural N maior que a . Seja $A = \{N + 1, N + 2, \dots\}$. O complementar de A é finito. Pelas condições 4 e 5, $A \in \mathcal{U}$. O conjunto A está contido em $\{n \in \mathbb{N} | n > a\}$. Daí e de acordo com a condição 3, $\{n \in \mathbb{N} | n > a\} \in \mathcal{U}$. Logo, $\langle n \rangle > \langle a \rangle$. ■

Um hiper-real infinito negativo é um número menor que qualquer real. Ou seja, $w \in {}^*\mathbb{R}$ é infinito negativo $\Leftrightarrow (\forall a)(a \in \mathbb{R} \rightarrow w < a)$.

Como exemplo, provaremos que $\langle -n \rangle$ é um número infinito negativo.

Prova

Sejam $a \in \mathbb{R}$; $\langle a \rangle \in {}^*\mathbb{R}$.

Como \mathbb{R} é um corpo arquimediano, existe um natural N maior que $-a$. Seja $A = \{N + 1, N + 2, \dots\}$. O complementar de A é finito. Pelas condições 4 e 5, $A \in \mathcal{U}$. O conjunto A está contido em $\{n \in \mathbb{N} | n > -a\} = \{n \in \mathbb{N} | -n < a\}$. Daí e de acordo com a condição 3, $\{n \in \mathbb{N} | -n < a\} \in \mathcal{U}$. Logo, $\langle -n \rangle < \langle a \rangle$. ■

Os Números Finitos

Um hiper-real finito é um número cujo módulo é menor que algum número real positivo. Ou seja, $x \in {}^*\mathbb{R}$ é finito $\Leftrightarrow (\exists a)(a \in \mathbb{R}^+ \text{ e } |x| < a)$. Dessa forma, todo número real e número infinitesimal são hiper-reais finitos.

As Mônadas dos Números Reais

O conjunto dos hiper-reais finitos x que estão infinitamente próximos de um número real a é conhecido como a mônada de a . Dizer que x está infinitamente próximo de a , significa que a diferença entre x e a é um infinitésimo. Anotamos por $x \approx a$.

Teorema 1. *Todo hiper-real finito pode ser escrito univocamente como a soma de um real com um infinitésimo.*

Prova

Seja $x \in {}^*\mathbb{R}$ finito. Primeiramente, provemos a unicidade de $x = a + \varepsilon$, onde a é real e ε é infinitésimo. Vamos supor que existem $b \neq a$ real e $\delta \neq \varepsilon$ infinitésimo tais que $x = b + \delta$. Daí, $x = a + \varepsilon = b + \delta \Rightarrow a - b = \delta - \varepsilon$. $a - b$ é real e $\delta - \varepsilon$ é infinitésimo. Já que o único infinitésimo real é o zero, então $a - b = \delta - \varepsilon = 0$. Logo, $a = b$ e $\varepsilon = \delta$.

Provemos, agora, a existência de a e ε . Seja $A = \{c \mid c \in \mathbb{R} \wedge c < x\}$. De acordo com a definição de hiper-real finito, existe um real positivo d tal que $-d < x < d$. Assim, A não é vazio e é limitado superiormente por d . Como \mathbb{R} é completo, então A tem supremo. Seja $a = \sup A$. Devemos provar que $(x - a)$ é infinitesimal. Vamos supor que não. Assim, pela definição de infinitésimo, existe um real positivo r tal que $|x - a| > r$. Se $x > a$,

$$x - a > 0 \rightarrow x - a > r \rightarrow x > a + r \rightarrow (a + r) \in A,$$

absurdo, já que $a < (a + r)$ é cota superior de A . Se $x < a$,

$$x - a < 0 \rightarrow -x + a > r \rightarrow a - r > x,$$

absurdo, pois $(a - r)$ não é cota superior e, portanto, é menor que algum $y \in A$, $y < x$.

Logo, $(x - a)$ é infinitesimal. ■

De acordo com o teorema acima, dizemos que a é a parte real (ou standard) de x , e anotamos por $a = re[x]$ ou $a = st[a]$. A diferença entre x e a é um infinitésimo, então $x \approx a$

e x está na mônada de a . Um exemplo de mônada é o conjunto dos infinitésimos, que estão infinitamente próximos do zero.

Teorema 2. ${}^*\mathbb{R}$ é corpo

Consideremos o conjunto dos números hiper-reais munido das operações de adição e multiplicação, anteriormente definidas. Provemos que valem as seguintes propriedades das operações:

1. Associativa da adição: $(\forall a)(\forall b)(\forall c)(a, b, c \in {}^*\mathbb{R} \rightarrow a + (b + c) = (a + b) + c)$

Prova: Sejam $a = \langle a_n \rangle$, $b = \langle b_n \rangle$ e $c = \langle c_n \rangle$ hiper-reais.

$$\langle a_n \rangle + (\langle b_n \rangle + \langle c_n \rangle) = \langle a_n \rangle + \langle b_n + c_n \rangle = \langle a_n + (b_n + c_n) \rangle$$

Baseados nas propriedades das operações com números reais, temos que, $\langle a_n + (b_n + c_n) \rangle = \langle (a_n + b_n) + c_n \rangle = \langle a_n + b_n \rangle + \langle c_n \rangle$.

2. Comutativa da adição: $(\forall a)(\forall b)(a, b \in {}^*\mathbb{R} \rightarrow a + b = b + a)$

A prova dessa propriedade é semelhante à anterior.

3. Elemento neutro da adição: $(\exists x)(x \in {}^*\mathbb{R})(\forall a)(a \in {}^*\mathbb{R} \rightarrow a + x = a)$

Prova: Sejam $x = \langle 0 \rangle \in {}^*\mathbb{R}$ e $a = \langle a_n \rangle \in {}^*\mathbb{R}$.

$$\langle a_n \rangle + \langle 0 \rangle = \langle a_n + 0 \rangle = \langle a_n \rangle$$

4. Elemento simétrico aditivo: $(\forall a)(a \in {}^*\mathbb{R})(\exists x)(x \in {}^*\mathbb{R} \rightarrow a + x = 0)$

Prova: Sejam $a = \langle a_n \rangle$ e $x = \langle -a_n \rangle$ hiper-reais.

$$\langle a_n \rangle + \langle -a_n \rangle = \langle a_n + (-a_n) \rangle = \langle 0 \rangle = 0$$

5. Associativa da multiplicação: $(\forall a)(\forall b)(\forall c)(a, b, c \in {}^*\mathbb{R} \rightarrow a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c)$

A prova dessa propriedade é semelhante às anteriores.

6. Comutativa da multiplicação: $(\forall a)(\forall b)(a, b \in {}^*\mathbb{R} \rightarrow a \cdot b = b \cdot a)$

A prova dessa propriedade é semelhante às anteriores.

7. Elemento neutro da multiplicação: $(\exists x)(x \in {}^*\mathbb{R})(\forall a)(a \in {}^*\mathbb{R} \rightarrow a \cdot x = a)$

Prova: Sejam $x = \langle 1 \rangle$ e $a = \langle a_n \rangle$ hiper-reais.

$$\langle a_n \rangle \cdot \langle 1 \rangle = \langle a_n \cdot 1 \rangle = \langle a_n \rangle$$

8. Elemento inverso da multiplicação: $(\forall a)(a \in {}^*\mathbb{R} \setminus \{0\})(\exists x)(x \in {}^*\mathbb{R} \rightarrow a \cdot x = 1)$

Prova: Sejam $a = \langle a_n \rangle$ hiper-real não nulo e $x = \langle \frac{1}{b_n} \rangle$ hiper-real, onde

$$(b_n) = \begin{cases} a_n, & n \in \{k | a_k \neq 0\}, k \in \mathbb{N} \\ 1, & n \in \{k | a_k = 0\}, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Desta forma, $(\frac{1}{b_n})$ fica bem definida. Já que $a \neq 0$ quase sempre e (b_n) foi construída da forma acima, então $a_n = b_n$ qs. Daí, $\langle a_n \rangle \cdot \langle \frac{1}{b_n} \rangle = \langle a_n \cdot \frac{1}{b_n} \rangle = \langle 1 \rangle = 1$.

9. A multiplicação é distributiva em relação à adição: $(\forall a)(\forall b)(\forall c)(a, b, c \in {}^*\mathbb{R} \rightarrow a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \wedge (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c)$

A prova dessa propriedade é semelhante às anteriores.

Tendo provado as propriedades acima, o conjunto dos números hiper-reais com as operações de adição e multiplicação definem um corpo completo.

Teorema 3. ${}^*\mathbb{R}$ é corpo ordenado

Consideremos o conjunto dos números hiper-reais munido das operações de adição e multiplicação, e da relação de ordem. Para provar que essa quádrupla define um corpo ordenado, basta provar que existe compatibilidade entre as operações e a ordem definidas em ${}^*\mathbb{R}$. É o que faremos a seguir.

1. $(\forall a)(\forall b)(a, b \in {}^*\mathbb{R})(a > 0 \text{ e } b > 0 \rightarrow a + b > 0)$

Prova: Sejam $a = \langle a_n \rangle$ e $b = \langle b_n \rangle$ hiper-reais.

$$\langle a_n \rangle > 0 \text{ e } \langle b_n \rangle > 0$$

$$a + b = \langle a_n \rangle + \langle b_n \rangle = \langle a_n + b_n \rangle$$

$A = \{n \in \mathbb{N} | a_n > 0\} \in \mathcal{U}$ e $B = \{n \in \mathbb{N} | b_n > 0\} \in \mathcal{U}$. Pela condição 2, $A \cap B = \{n \in \mathbb{N} | a_n > 0 \wedge b_n > 0\} \in \mathcal{U}$. A interseção $A \cap B$ está contida em $\{n \in \mathbb{N} | a_n + b_n > 0\}$.

Pela condição 3, $\{n \in \mathbb{N} | a_n + b_n > 0\} \in \mathcal{U}$. Logo, $\langle a_n + b_n \rangle > 0$.

2. $(\forall a)(\forall b)(a, b \in {}^*\mathbb{R})(a > 0 \text{ e } b > 0 \rightarrow a \cdot b > 0)$

A prova dessa propriedade é semelhante à anterior.

3. Lei da Tricotomia: $(\forall a)(a \in {}^*\mathbb{R} \rightarrow \text{ou } a > 0 \text{ ou } a < 0 \text{ ou } a = 0)$

Antes de provar essa lei, salientamos que dizer que um conjunto A pertence a \mathcal{U} é equivalente a dizer que a medida de A é 1 ($m(A) = 1$), sendo 0 a medida de seu complementar. Um dos axiomas, se seguirmos o estudo por essa última forma, é que se dois subconjuntos dos naturais A e B são disjuntos, a medida de $A \cap B$ é igual a soma das medidas de A e B . Vamos fazer uso desse axioma na prova da lei da tricotomia.

Prova: Seja $a = \langle a_n \rangle \in {}^*\mathbb{R}$.

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} | a_n > 0\} \cup \{n \in \mathbb{N} | a_n < 0\} \cup \{n \in \mathbb{N} | a_n = 0\}$$

O complementar de \mathbb{N} é o conjunto vazio. Pela condição 1 e 5, $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$. A união acima é disjunta. Sejam $A = \{n \in \mathbb{N} | a_n > 0\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} | a_n < 0\}$ e $C = \{n \in \mathbb{N} | a_n = 0\}$. Segundo o axioma acima, sem perda de generalidade, $m(\mathbb{N}) = m(A) + m(B \cup C)$. Como $m(\mathbb{N}) = 1$, ou $m(A) = 1$ ou $m(B \cup C) = 1$. Se $m(A) = 1$, a prova acaba. Se $m(B \cup C) = 1$, usando o axioma, ou $m(B) = 1$ ou $m(C) = 1$. Logo, ou $a_n > 0$ ou $a_n < 0$ ou $a_n = 0$.

Fica provado, assim, que o conjunto dos números hiper-reais juntamente com as operações de adição e multiplicação, e a relação de ordem definem um corpo ordenado.

Teorema 4. ${}^*\mathbb{R}$ não é completo

Prova

Consideremos o corpo ordenado ${}^*\mathbb{R}$. Devemos provar que $(\exists A)(A \subset {}^*\mathbb{R}$ e A é limitado superiormente e A não tem supremo). Seja, então, $A = \mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$, limitado superiormente por todos hiper-reais infinitos positivos. Vamos supor que A tem supremo w , número infinito positivo. Pela definição de supremo, w é a menor das cotas superiores. Como, $\frac{w}{2}$ é um infinito positivo, ele é uma cota superior de A . Mas, $\frac{w}{2} < w$. Absurdo, já que havíamos considerado que w era supremo de A . Logo, A não tem supremo e, assim, ${}^*\mathbb{R}$ não é completo. ■

OBS 3: ${}^*\mathbb{R}$ é não-arquimediano, ou seja, existem elementos desse conjunto que são maiores que todos os naturais. Pela definição de número hiper-real infinito positivo, podemos verificar tal afirmação.

Para maiores detalhes sobre o estudo da Análise Infinitesimal, segundo o método construtivo, o leitor pode consultar as obras de Baldino e Cabral (2000), Pinto (2000), Lindstrom (1988) e Stroyan e Luxemburg (1976).

2. Via Axiomática

Nesse método de abordar a Análise infinitesimal, três importantes axiomas serão listados: axioma da extensão, axioma da transferência e axioma da parte standard.

1. Axioma da Extensão:

- a) O conjunto \mathbb{R} dos números reais é um subconjunto do conjunto ${}^*\mathbb{R}$ dos números hiper-reais.
- b) Existe uma relação dada $<^*$ em ${}^*\mathbb{R}$, tal que a relação de ordem $<$ em \mathbb{R} é um subconjunto de $<^*$, $<^*$ é transitiva ($a <^* b$ e $b <^* c$ implicam $a <^* c$), e $<^*$ satisfaz a Lei da Tricotomia: $(\forall a)(a \in {}^*\mathbb{R} \rightarrow ou\ a > 0\ ou\ a < 0\ ou\ a = 0)$
- c) Existe um hiper-real ϵ tal que $0 <^* \epsilon$ e $\epsilon <^* r$ para todo real positivo r .
- d) Para cada função real f , existe uma dada função hiper-real *f com o mesmo número de variáveis, chamada *extensão natural de f* .

Antes de enunciar o axioma da transferência, a noção de afirmação real será definida.

Definição 1. *Uma afirmação real é ou um conjunto não vazio de fórmulas T , ou uma combinação envolvendo dois subconjuntos não vazios de fórmula S e T , que assegura que "se toda fórmula de S é verdadeira, então toda fórmula de T é verdadeira".*

Por *fórmula* entende-se uma equação ou uma inequação entre duas expressões reais, ou uma afirmação do tipo " a é definido" ou " a é indefinido", onde a é uma expressão real.

Por *expressão real* entende-se uma constante real ou uma variável real. Além disso, se a é uma expressão real, e f é uma função real de uma variável, então $f(a)$ é uma expressão real. Da mesma forma, se a_1, \dots, a_n são expressões reais, e g é uma função real de n variáveis, então $g(a_1, \dots, a_n)$ é uma expressão real.

Com essas informações, segue abaixo o segundo axioma.

2. Axioma da Transferência:

Toda afirmação real válida para todo número real, é válida para todo número hiper-real.

Segundo esse axioma, todos os axiomas algébricos e de ordem dos números reais, são válidos para os números hiper-reais.

O terceiro axioma segue abaixo.

3. Axioma da Parte Standard:

Para todo número hiper-real finito b , existe exatamente um número real a que está infinitamente próximo de b .

Parte do texto apresentado aqui sobre o método axiomático, foi traduzido de Keisler (1986). Para maiores informações sobre esse método de estudo da Análise Infinitesimal, o leitor pode consultar Keisler (1986) e Tall (1982).