

unesp  **UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

LUÍS RODOLFO DOS SANTOS FILHO

INTRODUÇÃO À GRAVITAÇÃO DE BRANS-DICKE

Guaratinguetá
2012

LUÍS RODOLFO DOS SANTOS FILHO

INTRODUÇÃO À GRAVITAÇÃO DE BRANS-DICKE

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Bacharelado em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Bacharelado em Física.

Orientador: Prof^o. Dr^o. Julio Marny Hoff da Silva

Guaratinguetá
2012

Santos Filho, Luís Rodolfo dos
S237i Introdução à Gravitação de Brans-Dicke / Luís Rodolfo dos Santos
Filho – Guaratinguetá : [s.n], 2012.
96 f.: il.
Bibliografia: f. 94-96

Trabalho de Graduação em Bacharelado em Física – Universidade
Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2012.
Orientador: Prof. Dr Julio Marny Hoff da Silva

1. Gravitação 2. Relatividade geral (Física) I. Título

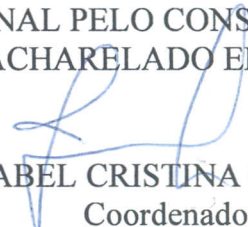
CDU 531.5

INTRODUÇÃO À GRAVITAÇÃO DE BRANS-DICKE

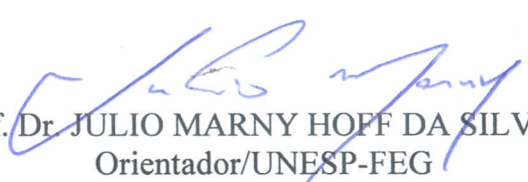
LUÍS RODOLFO DOS SANTOS FILHO

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO
PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE
"GRADUADO EM BACHARELADO EM FÍSICA"

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE
GRADUAÇÃO EM BACHARELADO EM FÍSICA.


Prof.^a. Dr.^a. ISABEL CRISTINA C. MONTEIRO
Coordenadora

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. JULIO MARNY HOFF DA SILVA
Orientador/UNESP-FEG


Prof. Dr. JOSÉ LOURENÇO CINDRA
UNESP-FEG


Prof.^a. Dr.^a. ÁLVARO DE SOUZA DUTRA
UNESP-FEG

Novembro de 2012

DADOS CURRICULARES

LUÍS RODOLFO DOS SANTOS FILHO

NASCIMENTO	20.03.1990 – SÃO JOSÉ DOS CAMPOS / SP
FILIAÇÃO	Luís Rodolfo dos Santos Rosana Aparecida Gomercindo Costa dos Santos
2008/2012	Curso de Graduação Bacharelado em Física - Universidade Estadual Paulista – Campus de Guaratinguetá.

"O belo, o sagrado, a religião, o amor são a isca requerida para despertar o prazer de morder. Não é o conceito, mas o êxtase, não é a necessidade fria e metódica da Coisa que deve constituir a força que sustém e transmite a riqueza da substância, mas sim o entusiasmo abrasador"(Friedrich Hegel).

Agradecimentos

Diferentemente dos trabalhos como teses de mestrado, dissertações de doutorado em que contribuições mais direcionadas são devidamente deixadas à comunidade, esse trabalho não passa de apenas de um roteiro de estudo de algumas interessantes obras. Olhando com outros olhares esse mesmo representa o trabalho mais concreto que até então obtive nesses últimos nove anos, quando que por razões ainda desconhecidas o desejo de tornar-se Físico foi em mim aflorado não como um objeto à vaidade ou de ascensão social.

Apesar dos recursos precários em todos os sentidos oferecidos pelo município de Paraibuna, o agradeço por servir de berço a construção intelectual reflexiva de meus familiares que me ensinaram que para ser feliz em essência basta apenas que se tenha o sagrado prato de arroz com feijão a todos e a boa saúde na maioria dos dias da vida.

Agradeço a música que por estar sempre presente e de alguma forma me fez buscar o desenvolvimento pessoal.

Sou muito grato ao Prof. Cindra por ter me incentivado a jamais descartar o contexto de uma determinada teoria, pois somente poderemos ser grandes contribuintes a qualquer área que se deseje se estivermos em contato com os trabalhos originais e suas ramificações para que possamos saber onde é que teremos de iniciar nossa desejada contribuição. Como diria Descartes a leitura de obras filosóficas é uma maneira de aprender com os antigos espíritos. Agradeço por ter estado sempre preocupado com o meu desenvolvimento intelectual.

Sou bastante grato também ao Prof. Julio por mostrar que é possível atingir a excelência pessoal, intelectual e profissional mesmo ainda sendo jovem. O agradeço por permitir que meus estudos fossem feitos no meu tempo de aprendizado, sem que ouvessem exageradas cobranças e pressões desnecessárias. Sem contar que foi um ótimo professor de Relatividade Geral e um grande amigo.

Tenho muito a agradecer a Moradia estudantil por ter sido um grande laboratório para que corrigissemos os desvios das nossas inteligências sociais que raramente podem ser aprendidas quando se mora sob proteção familiar. E desses lugares os grandes companheiros: Carlos, Gabriel, Fábio, Luciano, Jairo e Felipe. Agradeço aos inúmeros companheiros do bacharelado pelas conversas fiadas: Julio, Luciano, Bendorf, Douglas, Jonata e Pedro. Jamais também poderia deixar de parabenizar ao Prof^o Durval pela sua imensa atenção e tremendo coração.

Muito satisfeito hoje sou com o cursinho voluntário dessa instituição, por ter me servido de palco para que expusesse algumas ambições de ensino aos alunos que precisavam de inspiração. Se contar que o cursinho foi a estrada cintilante que convergiu para o encontro de uma pessoa especial que hoje é e vem se tornando cada vez mais, uma pessoa muito importante para mim. Minha linda namorada Juana.

Sem sombras de dúvida o contato causal de todos aqueles que foram citados ou por ventura deixados entre linhas são os responsáveis pelo que somos, fortalecendo-nos em diversas escalas para que sempre estejamos preparados a lidar com aquilo que está por vir.

"Em memória aos meus avós Benita Lopes dos Santos (Ditinha) e Bento Francisco dos Santos (Bentão)".

"Para que haja o amor é necessário que exista a paz, para que exista a paz é necessário que exista a felicidade, para que exista a felicidade é preciso que busques a verdade e que essa seja una, pois assim, ela o libertará"(Pierre Wiel).

Prêmios

- Menção Honrosa Olimpíada Brasileira de Matemática (OBMEP) 2005, 2006 e 2007.
- Prêmio de Reconhecimento Acadêmico do 1º ano do Bacharelado em Física 2008.
- Prêmio de Reconhecimento Acadêmico do 2º ano do Bacharelado em Física 2009.
- Prêmio de Reconhecimento Acadêmico do 3º ano do Bacharelado em Física 2010.

Bolsas de Estudo

- Estudo sobre a Origem e Evolução do Conceito de Força 2008-2009. Bolsa Proex-UNESP.
- Um estudo elementar da teoria de caos e das oscilações não-lineares e do regime caótico de alguns tipos de pêndulos 2009. Proex-UNESP.
- Um estudo elementar da teoria de caos e das oscilações não lineares e do regime caótico de alguns tipos de pêndulos 2009-2010. FAPESP.
- Monitor de Física 1 2010- Proex-UNESP.
- Bolsa didática Cursinho Pré Vestibular. 2011. Proex-UNESP.
- Soluções de Campo Fraco em Relatividade Geral: Ondas Gravitacionais. 2011-2012. FAPESP.
- Introdução à Gravitação de Brans-Dicke. 2012. FAPESP.

Trabalhos Apresentados

- Presença de Atratores Estranhos nas Oscilações Não-Lineares de um Pêndulo Duplo. UNESP. Guaratinguetá. 2010.
- Equações de Movimento para o Campo Gravitacional. Congresso UNESP. Guaratinguetá. 2011.
- Mínimo Variacional da Ação de Jordan-Brans-Dicke. CBPF. Rio de Janeiro. 2012.
- Equações de Movimento para o Campo Gravitacional via Brans-Dicke. UNESP. Guaratinguetá. 2012.
- Transformações Conformes Aplicadas à Gravitação de Brans-Dicke. IFT. São Paulo. 2012.

Atividades Extra Curriculares

- Representante da Moradia Estudantil em 2009. Desenvolvendo projetos de melhorias econômicas à alimentação.
- Vice Prefeito da Moradia Estudantil em 2010.
- Professor voluntário do Projeto Social Cursinho Pré Vestibular desde 2009, salvo o início de 2011, lecionando disciplinas de nível médio: Álgebra, Mecânica, Eletromagnetismo e Psicologia aplicada à Educação.

FILHO, L. R. S. **Introdução à Gravitação de Brans-Dicke**. 2012. 96 f. Trabalho de Graduação (Graduação em Bacharelado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012.

Resumo

O modelo padrão para a Cosmologia demonstra profundas necessidades de melhorias quando comparado a recentes dados observacionais e também a antigas contradições de caráter teórico. Teorias alternativas à Relatividade Geral são possíveis candidatas a satisfazerem a expectativa conjunta da Física de Partículas Elementares e da Gravitação. Teorias escalares tensoriais aparentam ressurgirem das cinzas dos velhos trabalhos de Jordan por responderem adequadamente aos limites de baixas energias das teorias de grandes unificações.

Sendo a Teoria de Brans Dicke uma teoria escalar tensorial é realizado um estudo da mesma partindo desde as suas primeiras motivações até suas atuais análises e reflexões.

PALAVRAS-CHAVE: Brans Dicke, Gravitação Escalar-Tensorial, Primeiros Princípios, Métodos Variacionais, Transformações Conformes.

FILHO, L. R. S. **Introduction to Brans-Dicke Gravitation**. 2012. 96 f. Graduate Work (Graduate in Baccalaureate Physics) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012.

Abstract

The cosmological standard model needs a deep improvement when compared to recent observational data and also when contrasted with a broad theoretical context. Alternative theories to General Relativity are possible candidates to reach the expectation Physics of Elementary Particles and Gravitation. Scalar-tensor theories seem to reappear from the ashes of the old work by Jordan corresponding appropriately low power limits of unifying theories.

Being the Brans Dicke theory a scalar tensor is conducted a comprehensive study starting from its first motivations to it's current one it is reflections.

KEYWORDS: Brans-Dicke, Scalar-Tensor Gravity, First Principles, Variational Methods, Conformal Transformations.

Sumário

1	Introdução	9
2	Elementos de Relatividade Restrita	10
3	Algumas reflexões em busca de uma Relatividade Geral	16
4	Elementos de Álgebra Tensorial.	20
4.1	Diferenciação Covariante	22
4.2	Discussão a respeito do Símbolo de Christoffel Γ_{bc}^a	26
4.3	Correspondência entre o Símbolo de Christoffel e o tensor métrico	29
4.3.1	Partícula Livre na presença de um campo gravitacional	31
5	Tensor de Curvatura	33
6	O Tensor Energia Momento	46
6.1	Tensor de Energia-Impulso em Coordenadas Curvilíneas	50
7	Ação para o Campo Gravitacional	53
7.1	Equações de Einstein	56
8	Introdução à Gravitação de Brans-Dicke	65
8.1	Analogia com as idéias de gravitação Newtoniana e uma generalização . . .	68
8.2	Equações de Movimento por Primeiros Princípios	69
8.3	Mínimo Variacional da Ação de Jordan-Brans-Dicke	73
8.4	Transformações Conformes	81
8.4.1	Aplicação das Transformações Conformes	82
8.5	O Referencial de Jordan e o Referencial de Einstein	88
8.5.1	Estudo da Hamiltoniana	89
8.5.2	Deflexão da luz: O Referencial de Einstein e o Referencial de Jordan	91
9	Conclusões	92
	Referências bibliográficas	95

Capítulo 1

Introdução

A primeira parte desse trabalho (**Elementos de Relatividade Restrita**) de caráter puramente teórico é praticamente um resumo de uma leitura crítica das notas de aula do Prof^o José Geraldo e Prof^o Androvandi [1]. A partir do segundo capítulo (**Algumas Reflexões em Busca de uma Relatividade Geral**) até o sétimo capítulo (**Ação para o Campo Gravitacional**), expomos o resultado do trabalho do estudo das bases da Relatividade Geral desde suas fundamentações epistemológicas até a sua formulação tensorial. Esse estudo foi realizado por meio do estudo das obras de Landau e de Einstein [12, 16] que tomou boa parte do ano de 2011. Somente a partir do oitavo capítulo (**Introdução à Gravitação de Brans Dicke**) é que realmente foi estudada a Teoria de Brans-Dicke, uma teoria alternativa à descrição dos fenômenos gravitacionais que hoje vem chamando bastante a atenção daquelas que buscam uma melhor descrição física dos fenômenos cosmológicos através do estudo de teorias alternativas à Relatividade Geral. Esse trabalho foi realizado com o uso das obras de Weinberg e dos trabalhos de Brans-Dicke [28, 7], sem contar, é claro, com os fundamentos aprendidos com as demais obras descobertas no decorrer do nosso trabalho. Essa etapa basicamente tomou nossas atenções nesses últimos onze meses deste ano de 2012.

Capítulo 2

Elementos de Relatividade Restrita

Em fins do séc XIX a inconsistência da Mecânica Newtoniana com a denominada Eletrodinâmica de Maxwell era um dos grandes problemas da física teórica.

A fim de esclarecer a aparente contradição foi necessário a introdução de uma nova teoria que sanasse as inconcistências. Essa teoria ficou conhecida como a teoria da relatividade especial ou restrita.

No entanto o princípio da relatividade especial somente era capaz de lidar com conceitos que pertencessem aos ditos referenciais inerciais.

Por referencial inercial entende-se aquele em que todos os observadores não estão privilegiados de distinguir o seu estado de movimento, ou seja, incapazes de afirmar se estão em repouso ou se possuem velocidade constante. Nesses referenciais podemos traduzir uma consequência:

"Qualquer partícula não submetida à forças externas se moverá com velocidade vetorial constante".

Ilustrar com uma situação idealizada o pensamento clássico antes da introdução do princípio de relatividade certamente nos será conveniente:

Imaginemos um referencial inercial $\mathbf{A}$ ao qual são atribuídas coordenadas cartesianas (x^1, x^2, x^3) e a variável t é utilizada para indicar o tempo.

Desse modo a posição de uma determinada partícula é: $X = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$ onde $\{e_i\}$ são as bases ortonormais do espaço vetorial considerado.

Pode-se imaginar um outro sistema de coordenadas $\mathbf{A}'$ que no instante inicial coincide com o referencial $\mathbf{A}$; no entanto, o referencial $\mathbf{A}'$ possui velocidade constante $\mathbf{u}$ em relação ao referencial $\mathbf{A}$.

Pode-se relacionar ambos os referenciais através da relação:

$$x't' = x - ut \text{ e } t = t'.$$

Para esse sistema a lei de composição de velocidades pode ser facilmente encontrada:

$$V = (v^1, v^2, v^3) = \left(\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt} \right) \quad \text{de maneira que: } v' = v - u .$$

Como $\mathbf{v}$ é uma velocidade constante da mesma forma que $\mathbf{u}$ também é, temos diretamente que $\mathbf{v}'$ deve ser também constante.

Essas propriedades de reflexão e simetria dos referenciais em questão indicam que os referenciais inerciais são todos equivalentes.

As leis de Newton também são válidas em ambos os referenciais de modo que:

$$m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv'}{dt} \quad \text{ou seja} \quad F = F'.$$

É notável também que esse sistema possui o tempo absoluto e independente do sistema de coordenada e do estado de movimento. Esse tipo de transformações são ditas "**Transformações de Galileu**". As transformações $x' = x - ut$ são casos particulares.

Se a isotropia do espaço for aceita como verdadeira, deve-se aceitar também que podemos validar essas afirmações por meio de rotações de valores fixos. Podemos realizar uma tal transformação utilizando uma matriz de rotação R de forma que: $X' = RX$.

$$\text{Onde } X' = \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad \text{e } R = \begin{pmatrix} R_1^1 & R_1^2 & R_1^3 \\ R_2^1 & R_2^2 & R_2^3 \\ R_3^1 & R_3^2 & R_3^3 \end{pmatrix}.$$

Portanto:

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1^1 & R_1^2 & R_1^3 \\ R_2^1 & R_2^2 & R_2^3 \\ R_3^1 & R_3^2 & R_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

A transformação de velocidades da mesma forma também sofrerá a rotação $V' = RV$, assim como a força $F' = RF$ estará coerente com a lei de transformação para os referenciais inerciais. Com esse tipo de transformação as leis de Newton deverão permanecer invariantes.

Tais considerações nos permitem entender que as leis de Newton também se preservam sob translações espaciais e translações de contagem do tempo.

$$X' = X - a \text{ e } t' = t - a.$$

Essas informações refletem o fato de que não importa a localização do observador nem mesmo a data e hora da realização das medidas, desde que estejamos nos referindo a referenciais inerciais.

Podemos enunciar as translações também com notação matricial e encontramos:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -a^0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a^1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para o caso das rotações a transformação deverá ser do tipo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_1^1 & R_1^2 & R_1^3 & 0 \\ 0 & R_2^1 & R_2^2 & R_2^3 & 0 \\ 0 & R_3^1 & R_3^2 & R_3^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Essas e outras transformações podem ser sugeridas de forma que preservem as leis fundamentais da Mecânica Clássica.

O conjunto dessas transformações semelhantes constituem um grupo, denominado **Grupo Galileano**. Esse grupo é classificado como um particular **grupo não-abeliano**, onde existem diversas maneiras para se obter uma transformação geral.

É importante dizer, pois, que além de ser extremamente interessante, o Grupo Galileano permite-nos esclarecer alguns conceitos de álgebra linear. O conjunto de coordenadas espaço-temporais:

$$\begin{pmatrix} t \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

constituem um espaço vetorial em que os membros representam todas as possíveis posições e intervalos de tempo. Esse espaço vetorial é o que chamamos de

Espaço-Tempo Newtoniano.

Um dos grandes problemas que possuía o Grupo de Galileu era que não deveria existir um limite na velocidade de propagação de qualquer tipo de informação. Por isso fazia sentido a existência de interações instantâneas. No entanto, as evidências como alguns experimentos mentais sugeridos por Einstein e experimentos relativos a velocidade de propagação da luz em óptica diziam outras particularidades:

"Nenhum efeito poderia ser transmitido com velocidade além da velocidade da luz".

"A velocidade da luz é uma constante universal que independe do observador".

Além do mais, as leis da Mecânica Clássica possuíam invariância Galileana, mas por sua vez, o Eletromagnetismo de Maxwell não satisfazia as mesmas expectativas.

Apesar das equações da eletrodinâmica não serem invariantes pela ação dos elementos do grupo galileano, existiam outras leis de transformações de sistemas de coordenadas $A \rightarrow A'$, de modo que as equações de Maxwell fossem invariantes. Contudo, necessitavam de profundas modificações conceituais a respeito da Mecânica Newtoniana.

Essas equações são conhecidas como transformações de Lorentz:

$$t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad \text{e} \quad x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad . \quad (2.3)$$

Uma consequência direta dessas equações é que não existem velocidades que excedam o valor da velocidade da luz. Outra consequência está em confronto com a doutrina clássica da homogeneidade do tempo que desvinculava intervalos de tempos com os intervalos espaciais, ou seja, essas equações traduzem determinadas íntimas correspondências entre espaço e tempo.

Outro fato de relevante importância foi que em 1881 Michelson concluiu experimentalmente que a velocidade da luz é independente da direção de propagação, abolindo de uma vez a concepção do éter cartesiano.

Apesar de Einstein ter afirmado o desconhecimento sobre os experimentos de Michelson, todas essas informações tiveram grandes impactos, ao ponto de influenciarem o avanço da teoria especial da relatividade.

Com essas novas leis de transformações a mecânica em si deveria ser quase que totalmente reconstruída, com outros devidos grupos que substituíssem o Grupo de Galileu. Pode-se dizer que a Relatividade Especial teve grandes contribuições de cientistas como: Lorentz, Fitz Gerald, Poincaré e finalizada por Einstein e Minkowski.

Era sabido que a eletrodinâmica era invariante apenas por rotações aos velhos grupos galileanos de equações, dessa forma, foi instrutivo elaborar um grupo que fizesse de subconjunto o grupo de Galileu.

Nas coordenadas cartesianas usais, a distância entre dois pontos

$$X = (x^1, x^2, x^3) \text{ e } Y = (y^1, y^2, y^3)$$

é dada por:

$$d(X, Y) = [(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Com as idéias introduzidas a respeito dos espaço vetoriais por Poincaré e Minkowski, a distância entre dois pontos infinitesimais dependeriam do tipo de geometria utilizada, ou seja, da métrica em questão.

Considere o caso em que estamos tratando de distâncias em geometria Euclidiana.

Definimos como intervalo de distância:

$$dl^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j,$$

onde $\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a métrica Euclideana, que é a matriz identidade.

Contudo essa métrica não será a mesma para qualquer tipo de sistemas de coordenadas, como veremos.

A fim de lidarmos com estruturas que sejam invariantes relativísticas, devemos, ao invés de utilizarmos a métrica euclidiana, utilizaremos a métrica de Lorentz que define

o espaço de Minkowski $g_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

No entanto em se tratando das coordenadas 4-dimensionais do tipo: (t, x^1, x^2, x^3) , pode-se perceber a inconsistência dimensional, mas, como a velocidade da luz c é uma constante universal, podemos aproveitar dessa invariância e reescrevermos:

$$X = (ct, x^1, x^2, x^3).$$

Concluindo o intervalo infinitesimal de distância será:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2.$$

É de costume definir:

$$cdt \equiv dx^0.$$

portanto:

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \quad (2.4)$$

Esta expressão nos revela a nova e profunda conexão existente entre **espaço e o tempo**.

Com a sintetização desses princípios em 1905 Albert Einstein publicou seu artigo "**Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento**"[12] e nele o princípio da relatividade restrita estava contido.

Apesar de tornar consistente o Eletromagnetismo de Maxwell e a Mecânica Newtoniana com a introdução de um novo grupo que teoricamente é regido por dois postulados, a relatividade era apenas restrita aos referenciais ditos inerciais, e a Gravitação Universal de Newton ainda era regida pela "**ação a distância e instantânea**". Contudo a interação instantânea não mais poderia fazer sentido para o princípio da relatividade. Sem contar que fenômenos astronômicos como a precessão anômala do periélio de mercúrio não era muito bem determinados pela gravitação newtoniana quando comparados aos dados experimentais [17].

Motivado mais uma vez pelas inconcistências existentes na mecânica relativística, Einstein tornou-se seduzido por vários anos a buscar por uma relatividade generalizada: A relatividade Geral.

Capítulo 3

Algumas reflexões em busca de uma Relatividade Geral

Einstein imaginou um anel ou uma espécie de carrousel munido de rotação em torno de um eixo e dois observadores. Um observador se encontrava em repouso em relação ao eixo do anel enquanto o outro observador estava em repouso em relação ao eixo fixo do anel.

Do ponto de vista do observador sobre o disco a circunferência deveria ter o comprimento de $2\pi r$. No entanto para o observador em repouso no eixo do disco observará quando medir, um determinado encurtamento no anel. Entretanto a medida do raio permanecerá invariante.

Do ponto de vista geométrico essa situação implica em uma contradição, pois a geometria euclidiana implica que a medida do comprimento de arco seja $C = R\theta$, então como o raio permanecendo invariante a relação euclidiana não é satisfeita?

Os dois observadores podem tentar explicar o ocorrido entrando em um consenso e argumentando:

Pode-se dizer que o observador em repouso sobre o disco efetuará medições de acordo com a geometria euclidiana, ou seja no universo de medições onde a relação $ds^2 = \delta_{ik} dx^i dx^k = dx^2 + dy^2 + dz^2$ seja válida.

Agora seria talvez tentador tentar explicar o efeito de contração do comprimento do anel vista pelo referencial em repouso ao eixo através da geometria de Minkowski, ou seja, onde as medições satisfazem $ds^2 = \eta_{ik} dx^i dx^k = -c^2 dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$, contudo não deve se esquecer que o referencial empregado não é inercial, fato indispensável para o emprego da relatividade restrita!

Certamente esse impasse é devido à natureza do referencial agora empregado. Como o referencial está em rotação é não inercial, sendo assim, o intervalo de distância infinitesimal será descrito pelo conjunto de medições que satisfaz a seguinte relação [16]:

$$ds^2 = [c^2 - \Omega^2(x'^2 + y'^2)]dt^2 - dx^2 - dy'^2 - dz'^2 + 2\Omega y' dx' dt - 2\Omega x' dy' dt, \quad (3.1)$$

onde Ω é a velocidade angular de rotação.

Einstein ao levar em conta esses argumentos justificou que o fato das medições serem diferentes para ambos os referenciais poderia ser consequência do emprego de referenciais não inerciais que por algum motivo só podem ser realmente descritos fazendo uso de geometrias não euclidianas. Geometria essa que veremos mais a frente ser a pseudo-Riemanniana.

Outra importante reflexão certamente se refere aos referenciais não inerciais comparados com os efeitos causados pelo campo gravitacional. Um corpo submetido a apenas um campo gravitacional se comporta de modo semelhante a qualquer outro corpo submetido às mesmas condições iniciais.

Um corpo submetido a mover-se com relação a um referencial não-inercial se comporta da mesma forma que qualquer outro corpo que também esteja inserido nesse mesmo referencial não inercial submetido também às mesmas condições iniciais. Os efeitos do campo gravitacional verdadeiro não podem ser excluídos por nenhuma transformação de coordenadas.

Uma rápida análise pode nos levar a intuir que: O movimento de um corpo em relação a um referencial não-inercial é equivalente ao movimento de um corpo em relação a um referencial inercial com a presença de um campo gravitacional.

Um estudo mais quantitativo desses argumentos pode ser realizado com o uso da seguinte comparação.

A expressão que descreve o movimento de uma partícula a mover-se em um campo gravitacional pode ser determinada por:

$$\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2} - m\varphi(x). \quad (3.2)$$

Resolvendo-a podemos encontrar que: $\dot{v} = -\text{grad } \varphi$ ou seja, somos tentados fortemente a especular a respeito de uma certa correspondência entre as acelerações mecânicas propriamente ditas e a aceleração gravitacional.

Vários estudiosos indagaram-se a respeito dessa possibilidade. Uma confirmação empírica somente poderia ser encontrada se a massa que resiste aos efeitos das forças newtonianas de origem mecânica, massas inerciais m_i , fosse exatamente equivalente à massa que resiste aos efeitos das forças de origem gravitacionais, massa gravitacional m_g . Talvez um dos mais expressivos experimentos a respeito tenha sido o proposto pelo físico húngaro Loránd Eötvös [28] que elaborou um experimento de balança de torção, sendo capaz de calcular as irrisórias diferenças entre a m_g e m_i que em módulo seriam menos que $10^{-8}g$. Mais tarde experimentos mais sofisticados como a Balança de torção de Braginsky encontrou que a diferença deveria ser menor que $10^{-13}g$. Resultado esse que certamente corresponde aos erros experimentais em questão [17].

Sendo assim, as massas gravitacionais são equivalentes às massas inerciais e desta forma podemos então levantar hipóteses de que: *"O referencial não-inercial é equivalente a um certo campo gravitacional"*.

O Princípio de Equivalência

A equivalência entre um observador em queda livre é um observador inserido em um referencial não-inercial, pois em ambos os sistemas o observador não consegue distinguir os efeitos locais da aceleração aos efeitos locais de um campo gravitacional.

Alguns estudiosos [17] classificam o Princípio de Equivalência em **princípio de equivalência fraco e forte**. Ainda hoje é verificado experimentalmente apenas o princípio de equivalência fraco através dos ensaios de balança acima citados. Enquanto que o princípio de equivalência forte é um pouco mais complicado de ser entendido e segundo [28] o princípio é: "As leis da natureza são válidas para todos os referenciais existentes na natureza".

Concluindo, é necessário o emprego de uma nova geometria a fim de que as medidas feitas pelos observadores inseridos nos dois referenciais apresentem concordância com as previsões teóricas, pois como discutido, a descrição de um referencial não inercial requer uso de uma geometria não euclidiana.

Existindo a equivalência entre os referenciais não inerciais com aqueles sujeitos aos campos gravitacionais, a descrição dos referenciais sujeitos aos efeitos gravitacionais também necessitarão do uso de uma geometria não euclidiana.

Levando isso em conta é necessário reformular as leis de maneira invariante por transformações gerais de coordenadas. De fato, podemos lançar mão agora de um pensamento que se embasa no princípio epistemológico da ciência [12]:

"As leis gerais da natureza devem ser representadas por equações que tenham validade em todos os sistemas de coordenadas, isto é, que sejam covariantes em relação a toda e qualquer substituição (covariância geral) ".

Em busca da generalização das representações das leis físicas, foi necessário o emprego de uma nova geometria quadrimensional, e a adequada foi a pseudo-riemanaiana cujos auto valores associados à forma bilinear em questão possuem pelo menos um de sinal oposto aos outros. Para uma adequada descrição em termos dessa nova geometria surge a necessidade de não mais apenas lidarmos com vetores e sim com entidades matemáticas superiores que sejam capazes de suprir nossos anseios. Os tensores.

Capítulo 4

Elementos de Álgebra Tensorial.

Suponha que estejamos lidando com transformações de um sistema de coordenadas arbitrário (x^0, x^1, x^2, x^3) para um outro também genérico (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) , segundo uma determinada lei:

$$x^i = f^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3).$$

Se determinadas quantidades se transformarem como a transformação dos seus diferenciais:

$$dx^i = \frac{\partial f^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial x'^k} dx'^k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k,$$

denominamos de 4-Vetores Contravariantes e definimo-os como:

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k. \quad (4.1)$$

Os 4-Vetores contravariante de ordem superior, 4-tensores de ordens distintas (por exemplo os de segunda ordem), são formados como o produto de dois vetores contravariantes $dx^i dx^k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} dx'^l \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} dx'^m$ e se transformam segundo a seguinte lei:

$$A^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} A'^{lm}. \quad (4.2)$$

Seja φ um escalar que determine a lei de transformação das coordenadas. Quando a transformação de coordenadas de certas quantidades se dá como a transformação das derivadas de um escalar: $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}$, as denominamos 4 -vetores covariantes e os definimos como segue:

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k. \quad (4.3)$$

De modo análogo, um tensor covariante de segunda ordem pode ser construído pelo produto de dois vetores covariantes $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^l} \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k}$ e se transformam segundo a seguinte lei:

$$A_{ik} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} A'_{lm}. \quad (4.4)$$

A mesma idéia de construção pode ser aplicada para definir os tensores mistos:

$$A_k^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} A'_m{}^l. \quad (4.5)$$

Por meio dessas leis de transformações pode-se verificar que $A^i B_i$ é invariante. Assim, dados

$$\begin{aligned} A^i &= \frac{\partial x^i}{\partial x'^p} A'^p \text{ e } B_i = \frac{\partial x'^q}{\partial x^i} B'_q, \text{ temos} \\ A^i B_i &= \frac{\partial x^i}{\partial x'^p} A'^p \frac{\partial x'^q}{\partial x^i} A'_q = \frac{\partial x^i}{\partial x'^p} \frac{\partial x'^q}{\partial x^i} A'^p B'_q = \frac{\partial x'^q}{\partial x'^p} A'^p B'_q = \delta_p^q A'^p B'_q = A'^q B'_q, \\ &\text{onde } \delta_p^q \text{ é o 4-Vetor unitário (a delta de Kronecker).} \end{aligned}$$

Se A^k é definido como um 4-vetor então pela multiplicação do 4-vetor unitário δ_k^i , teremos $A^k \delta_k^i = A^i$ que também é um 4-vetor assim demonstrando que δ_k^i é um tensor. Dois tensores são ditos inversos entre si se : $A_{ik} B^{kl} = \delta_i^l$.

Em coordenadas curvilíneas generalizadas expressamos a distância infinitesimal entre dois pontos no espaço-tempo em termos de uma métrica g_{ik} também conhecida como **tensor métrico** que vai nos fornecer o tipo de geometria utilizada que é afetada ou não pela natureza do campo externo presente na região de interesse:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k. \quad (4.6)$$

Também podemos utilizar o tensor métrico contravariante que é simétrico ao tensor covariante definido acima de modo que:

$$g_{ik}g^{kl} = \delta_i^l. \quad (4.7)$$

Atentamos para o fato de que uma grandeza covariante pode ser expressa por meio de uma grandeza contravariante correspondente desde que exista tal conexão: $A^i = g^{ik} A_k$ ou $A_i = g_{ik} A^k$. Com esse tipo de abordagem podemos encontrar os intervalos de tempo em qualquer sistema de coordenadas, por exemplo:

Suponha que estejamos em um ponto do 4-Espaço tal que:

$$dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0 \quad ,$$

então:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{00}(dx^0)^2.$$

Portanto:

$$d\tau = \frac{\sqrt{g_{00}}dx^0}{c}. \quad (4.8)$$

Essas relações são as que definem os intervalos de tempo real em um sistema qualquer de coordenadas. Uma discussão interessante que essa equação acima nos permite fazer é uma boa comparação:

Na teoria da relatividade especial a marcha do tempo real é distinta para diferentes observadores que se movem uns em relação aos outros. Contudo, na Relatividade Geral a marcha do tempo também é afetada por qual ponto do espaço esses relógios se encontram.

4.1 Diferenciação Covariante

No espaço plano, em coordenadas galileanas, o diferencial dA_i de um vetor covariante A_i também é um vetor, e as derivadas $\frac{\partial A^i}{\partial x^k}$ das componentes do vetor pelas coordenadas, formam um tensor. Por outro lado, em coordenadas generalizadas curvilíneas, o diferencial dA_i nem sempre se comportará como um vetor, da mesma forma que $\frac{\partial A^i}{\partial x^k}$ nem sempre será um tensor. Isso se deve ao fato que em coordenadas curvilíneas cada ponto tem uma determinada lei de transformação já que como vimos, por exemplo, os quadrivetores covariantes dependem das derivadas parciais de cada coordenada em relação a coordenada de transformação $\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}$, que nem sempre serão as mesmas ponto a ponto.

Podemos facilmente demonstrar essas informações:

Seja A^i um 4-vetor covariante : $A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k$. Calculando seu diferencial encontramos

$$dA_i = d\left(\frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k\right) = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^m} A'_k dx^m.$$

Desta forma, o diferencial do quadrivetor não se transforma como um vetor, a não ser nos casos específicos em que $\frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^m} = 0$.

A fim de sanar esse problema é necessário introduzir uma lei de diferenciação generalizada de maneira que independa dos sistemas de coordenadas e nos garanta que a derivada de um determinado vetor continue sendo um vetor, pois desejamos introduzir a covariância em nossas expressões. Por causa disso, definimos que a derivada covariante deverá ser igual à derivada usual menos um decremento δ que seja capaz de balancear as expressões de modo que a derivada de um vetor independentemente do sistema de coordenadas continue sendo um vetor. Assim definimos:

$$DA^i = dA^i - \delta A^i.$$

onde δA^i tem a seguinte estrutura:

$$\delta A^i = -\Gamma_{kl}^i A^k dx^l.$$

O símbolo Γ_{kl}^i é identicamente nulo em coordenadas galileanas. Dessa forma, podemos perceber que ele depende do sistema de coordenadas em questão, por isso, Γ_{kl}^i não é um tensor, já que em um espaço curvo é basicamente impossível o seu anulamento por toda a parte independentemente da escolha das coordenadas.

A grandeza Γ_{kl}^i é conhecida como **Conexão** que para os nossos casos é identificado como **Símbolo de Christoffel**. Para os símbolos de Christoffel também são válidas as seguintes transformações :

$$\Gamma_{i,kl} = g_{im} \Gamma_{kl}^m \quad \text{e} \quad \Gamma_{kl}^i = g^{im} \Gamma_{m,kl}.$$

Algumas referências, por exemplo [2], utilizam também da seguinte notação para o Símbolo de Christoffel:

$$\Gamma_{kl}^i = \left\{ \begin{matrix} kl \\ i \end{matrix} \right\}. \quad (4.9)$$

Com a introdução do Símbolo de Christoffel podemos escrever a derivada covariante de um 4-vetor contravariante. Da expressão $DA^i = dA^i - \delta A^i$, temos que $dA^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} dx^l$.

Sabendo a estrutura de δA^i , compomos a derivada covariante $DA^i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} dx^l \right) - (-\Gamma_{kl}^i A^k dx^l)$, de modo que:

$$DA^i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma_{kl}^i A^k \right) dx^l. \quad (4.10)$$

Do mesmo modo podemos solicitar uma expressão que seja a derivada covariante de um 4-Vetor covariante:

$$DA_i = dA_i - \delta A_i. \quad (4.11)$$

O valor δA_i pode simplesmente ser encontrado a partir da relação de invariância do produto $A^i B_i$, pois como brevemente já discutimos: $\delta (A^i B_i) = 0$. E por consequência:

$\delta A^i B_i + A^i \delta B_i = 0 \Rightarrow \delta A^i B_i = -A^i \delta B_i$. Como sabemos o valor da representação δA^i escrevemos : $-\Gamma_{kl}^i A^k dx^l B_i = -A^i \delta B_i$, e tendo em vista a arbitrariedade dos índices mudos mudamos a representação dos índices de forma a obtermos: $\Gamma_{il}^k A^i dx^l B_k = A^i \delta B_i$, ou seja:

$$\delta B_i = \Gamma_{il}^k B_k dx^l.$$

Com esta expressão e tendo em vista que $dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^l} dx^l$, podemos construir a expressão da derivada covariante de um vetor covariante: $DA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^l} dx^l - \Gamma_{il}^k A_k dx^l$, isto é:

$$DA_i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^k A_k \right) dx^l.$$

Observemos que os termos entre parênteses na expressão da derivada covariante de um vetor contravariante $\left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma_{kl}^i A^k \right)$ e a expressão correspondente da derivação covariante do vetor covariante $\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^k A_k \right)$ são tensores, pois pela contração com o vetor dx^l resultam novamente em vetores. Esses termos são denominados de derivadas covariantes e são representados segundo a notação:

$$A_{;l}^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma_{kl}^i A^k, \quad (4.12)$$

$$A_{i;l} = \frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^k A_k. \quad (4.13)$$

Como nossa preocupação presente está relacionada às derivações invariantes com relação aos sistemas de coordenadas, também necessitamos definir a derivação covariante para um determinado tensor.

A seguinte estrutura nos permitirá extrair algumas conclusões:

$$\delta(A^i B^k) = (\delta A^i) B^k + A^i (\delta B^k) = (-\Gamma_{lm}^i A^l dx^m) B^k + A^i (-\Gamma_{lm}^k B^l dx^m).$$

Como os índices l, m são índices arbitrários, podemos fazer uma mudança de forma que nas expressões acima $l \rightarrow m$ e $m \rightarrow l$, com isso

$$\delta(A^i B^k) = (-\Gamma_{ml}^i A^m dx^l) B^k + A^i (-\Gamma_{ml}^k B^m dx^l) = -(\Gamma_{ml}^i A^m B^k + \Gamma_{ml}^k A^i B^m) dx^l.$$

Em nossas definições o vetor $A^i B^k$ poderia ser equivalente a um certo tensor A^{ik} , assim

$$\delta(A^{ik}) = -(\Gamma_{ml}^i A^{mk} + \Gamma_{ml}^k A^{im}) dx^l.$$

Logo

$$\delta A^{ik} = -(\Gamma_{ml}^i A^{mk} + \Gamma_{ml}^k A^{im}) dx^l. \quad (4.14)$$

A expressão para a derivada covariante de um tensor é da mesma estrutura $D() = d() - \delta()$. Como $dA^{ik} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^l} dx^l$ e com uso do valor superior encontramos a expressão

$$DA^{ik} = \left(\frac{\partial A^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma_{ml}^i A^{mk} + \Gamma_{ml}^k A^{im} \right) dx^l. \quad (4.15)$$

A expressão entre parenteses é simbolizada por:

$$A_{;l}^{ik} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma_{ml}^i A^{mk} + \Gamma_{ml}^k A^{im}. \quad (4.16)$$

Seguindo o mesmo raciocínio anterior é possível encontrar a mesma expressão para a derivada covariante de um tensor da forma A_{ik} :

$$\begin{aligned}\delta(A_i B_k) &= (\delta A_i) B_k + A_i (\delta B_k) = (\Gamma_{im}^l A_l dx^m) B_k + A_i (\Gamma_{km}^l B_l dx^m) = \\ &= (\Gamma_{il}^m A_m dx^l) B_k + A_i (\Gamma_{kl}^m B_m dx^l) = (A_m B_k \Gamma_{il}^m + A_i B_m \Gamma_{kl}^m) dx^l,\end{aligned}$$

ou seja

$$\delta(A_{ik}) = (A_{mk} \Gamma_{il}^m + A_{im} \Gamma_{kl}^m) dx^l.$$

Consequentemente

$$DA_{ik} = \left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^m A_{mk} - \Gamma_{kl}^m A_{im} \right) dx^l,$$

e a expressão entre parêntese é simbolizada por

$$A_{ik;l} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^m A_{mk} - \Gamma_{kl}^m A_{im}. \quad (4.17)$$

Por fim, o cálculo da derivação covariante de um tensor misto é apenas uma combinação dessas idéias

$$\begin{aligned}\delta(A^i B_k) &= -\Gamma_{lm}^i A^l dx^m B_k + A^i \Gamma_{kl}^m B_m dx^l = \\ &= (-\Gamma_{ml}^i A^l B_k + \Gamma_{km}^l A^i B_m) dx^m \Rightarrow \delta(A_k^i) = (-\Gamma_{ml}^i A_k^l + \Gamma_{km}^l A_l^i) dx^m,\end{aligned}$$

logo

$$DA_k^i = \left(\frac{\partial A_k^i}{\partial x^m} - \Gamma_{lm}^i A_k^l + \Gamma_{km}^l A_l^i \right) dx^m. \quad (4.18)$$

4.2 Discussão a respeito do Símbolo de Christoffel Γ_{bc}^a

Foi rapidamente discutido que os símbolos de Christoffel foram um mecanismo adotado de modo a compensar a não linearidade das equações. Em outras palavras, compensar a curvatura do espaço em questão. Assim também é de se esperar que os símbolos Γ_{bc}^a também igualmente possuam determinadas relações com as coordenadas do espaço

em questão. Afim de obtermos essa relação imaginemos um determinado vetor em um sistema de coordenadas qualquer.

$$A = A^i e_i. \quad (4.19)$$

Então o diferencial será

$$\frac{\partial A}{\partial x^j} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} e_i + A^i \frac{\partial e_i}{\partial x^j}.$$

Com a necessária introdução de

$$\frac{\partial e_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k e_k ,$$

teremos

$$\frac{\partial A}{\partial x^j} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} e_i + A^i \Gamma_{ij}^k e_k .$$

Com a manipulação indicial do segundo termo, reescrevemos

$$\frac{\partial A}{\partial x^j} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} e_i + \Gamma_{kj}^i A^k e_i ,$$

e encontremos novamente a expressão para a derivação covariante para vetor o $A = A^i e_i$:

$$\frac{\partial A}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^j} + \Gamma_{kj}^i A^k \right) e_i . \quad (4.20)$$

Realizemos uma projeção da variação da base $\frac{\partial e_i}{\partial x^j}$ em uma determinada base arbitrária e^l do mesmo espaço, encontramos:

$$\left(\frac{\partial e_i}{\partial x^j} \right) e^l = \left(\Gamma_{ij}^k e_k \right) e^l = \left(\Gamma_{ij}^k \right) e_k e^l = \Gamma_{ij}^k \delta_k^l = \Gamma_{ij}^l.$$

Podemos reescrever $\frac{\partial e_i}{\partial x^j}$ como $\frac{\partial e_i}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x'^k} \left(\frac{\partial x'^k}{\partial x^j} e_i \right)$ mas podemos escrever também, como já abordado,

$$e_i = \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} e_m.$$

Com essas estruturas é possível encontrar:

$$\frac{\partial e_i}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x'^k} \left(\frac{\partial x'^k}{\partial x^j} \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} e_m \right) = \frac{\partial x'^k}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x'^k} \left(\frac{\partial x'^m}{\partial x^i} e_m \right).$$

Agora utilizando a estrutura encontrada por $\left(\frac{\partial e_i}{\partial x^j} \right) e^l = \Gamma_{ij}^l$ e utilizando a notação $e^l = \frac{\partial x^l}{\partial x'^n} e^n$, temos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial e_i}{\partial x^j} \right) e^l &= \left[\frac{\partial x'^k}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x'^k} \left(\frac{\partial x'^m}{\partial x^i} e_m \right) \right] \left(\frac{\partial x^l}{\partial x'^n} e^n \right) = \Gamma_{ij}^l = \\ &= \left[\frac{\partial x'^k}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x'^k} \left(\frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \right) e_m + \frac{\partial x'^k}{\partial x^j} \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x'^k} (e_m) \right] \left(\frac{\partial x^l}{\partial x'^n} e^n \right) = \\ &= \frac{\partial x'^k}{\partial x^j} \frac{\partial x^l}{\partial x'^n} \frac{\partial}{\partial x'^k} \left(\frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \right) e_m e^n + \frac{\partial x'^k}{\partial x^j} \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^n} \frac{\partial e_m}{\partial x'^k} e^n. \end{aligned}$$

Como $e_m e^n = \delta_m^n$ e $\frac{\partial e_m}{\partial x'^k} e^n = \Gamma_{mk}^n$, ficamos com

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^l &= \frac{\partial x'^k}{\partial x^j} \frac{\partial x^l}{\partial x'^n} \frac{\partial}{\partial x'^k} \left(\frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \right) \delta_m^n + \frac{\partial x'^k}{\partial x^j} \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^n} \Gamma_{mk}^n = \\ &= \frac{\partial x'^k}{\partial x^j} \frac{\partial x^l}{\partial x'^n} \frac{\partial}{\partial x'^k} \left(\frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \right) + \frac{\partial x'^k}{\partial x^j} \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^n} \Gamma_{mk}^n = \\ &= \frac{\partial x^l}{\partial x'^n} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \right) + \frac{\partial x'^k}{\partial x^j} \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^n} \Gamma_{mk}^n. \end{aligned}$$

Agora apenas rearranjando os termos encontramos finalmente

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{\partial x'^k}{\partial x^j} \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^n} \Gamma_{mk}^n + \frac{\partial x^l}{\partial x'^n} \frac{\partial^2 x'^n}{\partial x^j \partial x^i}, \quad (4.21)$$

que é o símbolo de Christoffel em termos das coordenadas.

Por simples inspeção observamos que os Símbolos Christoffel se transformam como tensores apenas em relação aos termos compostos pelo produto das derivadas primeiras. No entanto, um termo de derivada segunda nos impede de designarmos Γ_{ij}^l como tensores.

A expressão Γ_{ij}^l apenas se comportará como um tensor nos casos em que:

$$\frac{\partial x^l}{\partial x'^n} \left(\frac{\partial^2 x'^n}{\partial x^j \partial x^i} \right) = 0.$$

Uma região previamente localizada do espaço que possui a anulação das derivadas segundas é denominada como **localmente geodésica** ou **localmente inercial**. Essa restrita região se comporta como um espaço galileano localizado.

4.3 Correspondência entre o Símbolo de Christoffel e o tensor métrico

Como discutido a pouco nesse trabalho, a introdução da derivada covariante foi imprescindível para que preservássemos nossas estruturas vetoriais e tensoriais, ou seja, a derivada covariante de um vetor é também um vetor.

Se podemos representar os vetores por meio do tensor métrico $A_i = g_{ik}A^k$, faz muito sentido também podermos escrever a derivada covariante sob mesma notação $DA^i = g_{ik}DA^k$.

Então poderemos concluir que $DA^i = D(g_{ik}A^k) = Dg_{ik}A^k + g_{ik}DA^k$ que deve ser igual a $g_{ik}DA^k$. Então para existir coerência entre as expressões necessariamente $Dg_{ik} = 0$. Considerando a arbitrariedade de um vetor A^i , temos

$$Dg_{ik} = 0. \quad (4.22)$$

Ou ainda

$$g_{ik;l} = 0. \quad (4.23)$$

Isso mostra que a derivada covariante do tensor métrico é nula.

Podemos também expressar:

$$Dg_{ik} = g_{ik;l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^m g_{mk} - \Gamma_{lk}^m g_{im} = 0.$$

Mas das propriedades

$$\Gamma_{il}^m g_{mk} = \Gamma_{k,il} \quad \text{e} \quad \Gamma_{lk}^m g_{im} = \Gamma_{i,lk} ,$$

encontramos

$$g_{ik;l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{k,il} - \Gamma_{i,lk} = 0 ,$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \Gamma_{k,il} + \Gamma_{i,lk} . \quad (4.24)$$

O simples ato de permutação dos índices da expressão acima, quando combinadas entre si, podem nos fornecer uma informação de grande valia.

Então primeiramente façamos a troca : $l \rightarrow k$ e $k \rightarrow l$ para encontrar:

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} = \Gamma_{l,ik} + \Gamma_{i,kl} . \quad (4.25)$$

Agora da relação anterior façamos a troca de: $i \rightarrow k$ e $k \rightarrow i$ ou seja:

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = \Gamma_{l,ki} + \Gamma_{k,il} . \quad (4.26)$$

Com essas expressões aproveitando a repetição de alguns termos desde que seja válido $\Gamma_{bc}^a = \Gamma_{cb}^a$, podemos encontrar

$$\begin{aligned} & \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = \\ & = (\Gamma_{k,il} + \Gamma_{i,lk}) + (\Gamma_{l,ik} + \Gamma_{i,kl}) - (\Gamma_{l,ki} + \Gamma_{k,il}) = \Gamma_{i,lk} + \Gamma_{i,kl} = 2\Gamma_{i,lk}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\Gamma_{i,lk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right). \quad (4.27)$$

Podemos também escrever como Γ_{kl}^i por meio de $\Gamma_{kl}^i = g^{im}\Gamma_{m,kl}$, ou seja

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right), \quad (4.28)$$

que representa o valor do Símbolo de Christoffel em termos do tensor métrico. Essa expressão fortalece algumas de nossas afirmações anteriores, pois, mostra explicitamente a dependência entre Γ e as variações da métrica. Sobre essa perspectiva fica mais claro

entender que a introdução dos símbolos de Christoffel é necessária quando tratamos de coordenadas curvilíneas generalizadas, uma vez que, quem define a geometria é basicamente o tensor métrico e, como percebemos, a expressão para Γ leva em conta as variações da métrica g_{ab} .

Após termos aprendido alguns princípios do cálculo tensorial devemos agora ser capazes de discutir um pouco a respeito da cinemática e dinâmica envolvidas.

4.3.1 Partícula Livre na presença de um campo gravitacional

Se o assunto se trata de equações de movimento, na maioria dos casos, certamente somos levados a recorrer aos métodos de Mecânica Analítica e utilizarmos o Princípio de Mínima Ação, assunto que será melhor discutido no transcorrer desse trabalho. Na Relatividade Especial, define-se mínima ação para uma determinada partícula a seguinte relação:

$$\delta S = -mc\delta \int dt = 0. \quad (4.29)$$

No entanto, podemos também utilizar do fato de que se uma partícula é dita livre então $\frac{d^2 x^i}{dt^2} = 0$, ou seja, a sua 4-aceleração deve ser nula. Em outras palavras a variação de sua 4-velocidade du^i deve ser nula. Essa aparente redundância de definições acima será apenas um artifício para encontrar a equação do movimento de uma partícula livre submetida a um campo.

As expressões $\frac{d^2 x^i}{dt^2} = 0$ e du^i são apenas válidas para coordenadas galileanas cujo espaço é plano. No entanto, a presença de um campo gravitacional torna a métrica em questão diferente da euclidiana, e como a métrica é a responsável pela geometria do espaço em questão, não mais estaremos necessariamente em um espaço que valide essas expressões de diferenciação para todos os pontos do espaço vetorial. Por isso nos tópicos anteriores foram discutidas algumas técnicas capazes de lidar generalizações quanto aos tipos de coordenadas.

Assim em um espaço de coordenadas curvilíneas generalizadas devemos empregar a seguinte relação que envolve a anulação da derivada covariante da 4-velocidade:

$$Du^i = 0. \quad (4.30)$$

Como a derivada de um certo vetor contravariante u^i é

$$Du^i = \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^l} + \Gamma_{kl}^i u^k \right) dx^l,$$

devemos encontrar anulação dessa expressão:

$$Du^i = du^i + \Gamma_{kl}^i u^k dx^l = 0.$$

Agora submetendo essa expressão a uma variação infinitesimal temporal encontramos que

$$\frac{du^i + \Gamma_{kl}^i u^k dx^l}{dt} = 0.$$

Então

$$\frac{du^i}{dt} + \Gamma_{kl}^i u^k \frac{dx^l}{dt} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{dx^i}{dt} \right) + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{dt} \left(\frac{dx^l}{dt} \right) = 0,$$

ou seja

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^l}{dt} = 0. \quad (4.31)$$

A equação escrita logo acima define teoricamente o movimento para uma partícula livre da ação de forças na presença de um campo gravitacional, também conhecida como a equação da geodésica. Ela fornece a trajetória de menor distância entre dois pontos em um sistema de coordenadas qualquer.

Podemos fazer uma analogia entre as equações da dinâmica Newtoniana com a estrutura acima encontrada. O valor para $\frac{d^2 x^i}{dt^2}$ é a 4-aceleração. Nesse mesmo sentido, podemos dizer que $-m\Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^l}{dt}$ é a 4-força da partícula.

Talvez essas conclusões que tiramos da equação de movimento tenham sido um dos maiores triunfos que podemos exaltar sobre a teoria da Relatividade Geral em relação a mecânica clássica, pois uma partícula isenta de forças não está necessariamente em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme como previa Newton e a Relatividade Especial. Mas sim, segue a geodésica de seu movimento que pode ser alterada pela presença do campo em questão.

Assim concluímos que para o escopo da Relatividade Geral se um corpo apresenta-se parado é por que existe uma resultante não nula de forças que age sobre o mesmo.

Capítulo 5

Tensor de Curvatura

Imaginemos que nosso sistema de coordenadas seja o sistema galileano. Se tivermos em mãos um determinado vetor que aponte em uma direção fixa qualquer e o submetermos a diversos transportes paralelos a sua orientação original, perceberemos que independente de quantos transportes paralelos forem realizados, será possível coincidir o vetor transportado com aquele que iniciamos.

Agora imaginemos um 4-espaço qualquer curvo. O transporte paralelo infinitamente pequeno de um determinado vetor, no qual as suas componentes não se alteram, pode ser definido. Para isso consideremos $x^i = x^i(s)$ uma equação paramétrica de uma curva qualquer, onde s é o comprimento de arco em questão. O vetor unitário tangente a curva será: $u^i = \frac{dx^i}{ds}$. No entanto, considerando uma curva geodésica: $Du^i = 0$.

Podemos dizer que se no ponto x^i da linha geodésica o vetor possuir o valor u^i , se realizarmos um transporte até o ponto $x^i + dx^i$ da mesma linha, deveremos encontrar para o vetor o valor de $u^i + du^i$ que será tangente a linha nesse devido ponto.

Realizando o transporte por toda a linha geodésica, o vetor tangente permanecerá paralelo a si mesmo.

Pode-se dizer que em um transporte paralelo de dois vetores, o ângulo entre eles permanece o mesmo. Com base nisso, o transporte paralelo de qualquer vetor ao longo de uma linha geodésica implica o ângulo entre o vetor e a reta tangente à curva permanece invariável.

É importante ressaltar que o transporte paralelo em um espaço curvilíneo entre dois pontos, apresenta distintos resultados que são dependentes do trajeto escolhido entre esses dois pontos.

Um interessante exemplo que facilita a compreensão é o transporte paralelo em um circuito fechado, pois, quando o vetor for transportado paralelamente de $1 \rightarrow 2$ paralelamente $2 \rightarrow 3$ e por final, paralelamente regressar de $3 \rightarrow 1$, ele não coincidirá com o vetor inicial. Tal exemplo está esboçado na figura abaixo:

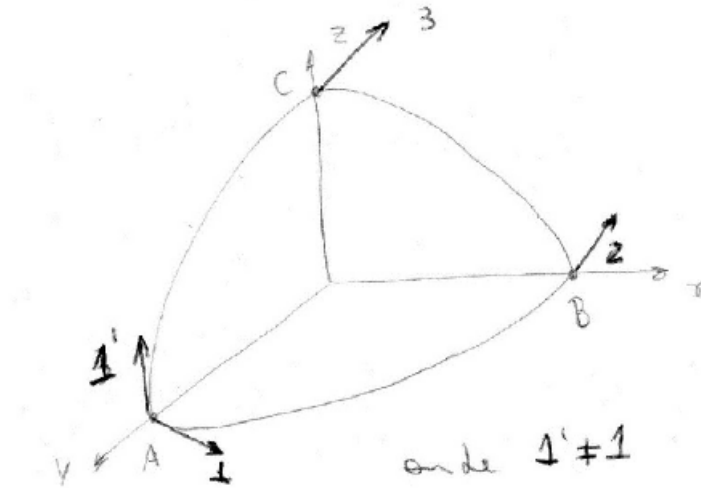


Figura 5.1: Transporte paralelo em um circuito fechado.

Então podemos concluir que nem sempre podemos coincidir um vetor transportado paralelamente com o vetor inicial em um circuito fechado.

Mas o quanto esse vetor está desviado do original?

Para responder essa questão podemos imaginar determinado vetor A_i sendo transportado paralela e infinitesimalmente por um circuito fechado qualquer em coordenadas curvélíneas. A soma dessas composições infinitesimais nos dará o desvio generalizado que pode ser escrito como:

$$\Delta A_k = \oint \delta A_k ,$$

onde

$$\delta A_k = \Gamma_{kl}^i A_i dx^l .$$

Isso implica

$$\Delta A_k = \oint \Gamma_{kl}^i A_i dx^l . \quad (5.1)$$

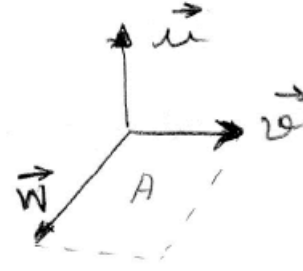


Figura 5.2: Representação tridimensional

Como sabemos, existe uma certa correspondência entre a circulação de um vetor em um circuito fechado com o fluxo do rotacional desse mesmo vetor através da superfície compreendida pelo circuito fechado. Essa correspondência é chamada de teorema de Stockes.

Contudo não podemos esquecer que nossas expressões devem estar escritas para um sistema de coordenadas generalizadas, por isso, o teorema de Stockes deve sofrer certos ajustes. Para isso são necessárias algumas comparações que serão feitas a seguir.

Em um espaço tridimensional euclidiano podemos encontrar o volume do sólido correspondente a três vetores $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ por meio dos seguintes cálculos:

$$|\vec{v} \times \vec{w}| = Area \quad \Rightarrow \quad Volume = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Agora para um espaço quadridimensional calcula-se a área da hipersuperfície de modo análogo ao volume no espaço tridimensional.

$$dS^{ikl} = \begin{vmatrix} dx^i & dx^{i'} & dx^{i''} \\ dx^k & dx^{k'} & dx^{k''} \\ dx^l & dx^{l'} & dx^{l''} \end{vmatrix} \quad (5.2)$$

Também existe uma outra maneira de mudanças de índices que é por meio dos pseudo-tensores e^{iklm} , assim dando origem aos tensores duais $A^{ik} = e^{iklm} A_{lm}$.

Os pseudo-tensores gozam da seguinte propriedade:

$$e^{iklm}e_{prst} = \begin{vmatrix} \delta_p^i & \delta_r^i & \delta_s^i & \delta_t^i \\ \delta_p^k & \delta_r^k & \delta_s^k & \delta_t^k \\ \delta_p^l & \delta_r^l & \delta_s^l & \delta_t^l \\ \delta_p^m & \delta_r^m & \delta_s^m & \delta_t^m \end{vmatrix} \quad (5.3)$$

Assim poderemos associar um 4-vetor dual

$dS^i = -\frac{1}{6}e^{iklm}dS_{klm}$, onde $dS^0 = dS^{123}$, $dS^1 = dS^{023}$, e assim por diante.

Dessa maneira dS^i será o 4-vetor que em módulo será igual a área do elemento da hipersuperfície e de direção normal a esse elemento.

Um caso particular é o caso $dS^0 = dS^{123} = dx dy dz$ conhecido como elemento de volume. Observe que é ds^0 a projeção da hipersuperfície sobre o hiperplano x^0 . Como o elemento de volume quadrimensional é definido como $d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c dt dV$,

podemos também afirmar que:

$$dS_i dx^i \rightarrow d\Omega.$$

Assim uma correspondência entre área e volume é estabelecida:

$$dS_i \rightarrow d\Omega \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (5.4)$$

Se tratarmos de um fluxo podemos agora generalizar afirmando que

$$\oint A^i dS_i = \int \frac{\partial A^i}{\partial x^i} d\Omega. \quad (5.5)$$

que é o teorema da Divergência de Gauss para 4-vetores.

Pensando de modo análogo, podemos fazer também uma determinada correspondência

$$df^{ki} \rightarrow dx^i dx^k,$$

sendo df^{ki} um determinado elemento de área.

Assim obtemos

$$dx^i \rightarrow df^{ki} \frac{\partial}{\partial x^k},$$

de forma que em se tratando da circulação de um determinado vetor A^i tenhamos

$$\oint A^i dx^i = \oint \frac{\partial A^i}{\partial x^k} df^{ki}. \quad (5.6)$$

Analogamente a propriedade que dois vetores possuem ao tratarmos do vetor normal aos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ por meio da relação

$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$ implicando que o vetor normal tem orientação que depende da quiralidade definida, o vetor df^{ki} também possui essa propriedade de forma que é um elemento anti-simétrico:

$$df^{ki} = -df^{ik}. \quad (5.7)$$

Com essas informações é equivalente expressarmos:

$$df^{ki} \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - df^{ki} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = 2df^{ki} \frac{\partial A_k}{\partial x^i}. \quad (5.8)$$

Agora, se trocarmos os índices $i \rightarrow k$ e $k \rightarrow i$ do segundo termo do lado esquerdo da igualdade teremos

$$df^{ki} \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \left(-df^{ik} \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \right) = df^{ki} \frac{\partial A_k}{\partial x^i} + df^{ki} \frac{\partial A_k}{\partial x^i} = 2df^{ki} \frac{\partial A_k}{\partial x^i}. \quad (5.9)$$

De modo conclusivo expressamos

$$\frac{\partial A_k}{\partial x^i} df^{ki} = \frac{1}{2} \left(df^{ki} \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - df^{ki} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right),$$

e então podemos reescrever a afirmação acima:

$$\oint A^i dx^i = \oint \frac{\partial A^i}{\partial x^k} df^{ki} = \frac{1}{2} \oint \left(df^{ki} \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - df^{ki} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right),$$

portanto

$$\oint A^i dx^i = \frac{1}{2} \oint \left(df^{ki} \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - df^{ki} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right),$$

que é uma representação mais ampla para o teorema de Stockes.

Como conseguimos alcançar nosso objetivo de escrever o teorema de Stockes para 4-vetores em espaço curvos, o empregaremos para resolver o problema de estimar a diferença entre um vetor e seu valor inicial após um transporte paralelo, que foi a nossa grande motivação para desenvolvermos o ferramental acima.

Assim

$$\begin{aligned} \Delta A_k &= \oint \delta A_k = \oint \Gamma_{kl}^i A_i dx^l = \frac{1}{2} \oint \left[df^{lm} \frac{\partial}{\partial x^l} (\Gamma_{km}^i A_i) - df^{lm} \frac{\partial}{\partial x^m} (\Gamma_{kl}^i A_i) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \oint \left[\frac{\partial}{\partial x^l} (\Gamma_{km}^i A_i) - \frac{\partial}{\partial x^m} (\Gamma_{kl}^i A_i) \right] df^{lm}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Desenvolvendo o integrando temos

$$A_i \frac{\partial}{\partial x^l} (\Gamma_{km}^i) - A_i \frac{\partial}{\partial x^m} (\Gamma_{kl}^i) + \Gamma_{km}^i \frac{\partial}{\partial x^l} (A_i) - \Gamma_{kl}^i \frac{\partial}{\partial x^m} (A_i). \quad (5.11)$$

Da expressão $\delta A_k = \Gamma_{kl}^i A_i dx^l$ podemos reescrever: $\frac{\partial A_k}{\partial x^l} = \Gamma_{kl}^i A_i$. Por meio disso, com o uso do integrando desenvolvido acima, ficamos com:

$$\begin{aligned} & A_i \frac{\partial}{\partial x^l} (\Gamma_{km}^i) - A_i \frac{\partial}{\partial x^m} (\Gamma_{kl}^i) + \Gamma_{km}^i \frac{\partial}{\partial x^l} (A_i) - \Gamma_{kl}^i \frac{\partial}{\partial x^m} (A_i) = \\ & = A_i \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^l} - A_i \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^m} + \Gamma_{km}^i (\Gamma_{il}^n A_n) - \Gamma_{kl}^i (\Gamma_{im}^n A_n). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Se nos dois últimos termos da expressão fizermos a seguinte troca de índices $i \rightarrow n$ e $n \rightarrow i$, a fim de utilizarmos a arbitrariedade de um vetor A_i , teremos

$$A_i \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^l} - A_i \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^m} + \Gamma_{km}^n (\Gamma_{nl}^i A_i) - \Gamma_{kl}^n (\Gamma_{nm}^i A_i) = A_i \left(\frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^m} + \Gamma_{km}^n \Gamma_{nl}^i - \Gamma_{kl}^n \Gamma_{nm}^i \right).$$

então:

$$\Delta A_k = \oint \Gamma_{kl}^i A_i dx^l = \frac{1}{2} \oint \left[\frac{\partial}{\partial x^l} (\Gamma_{km}^i A_i) - \frac{\partial}{\partial x^m} (\Gamma_{kl}^i A_i) \right] df^{lm} =$$

$$= \frac{1}{2} \oint \left[\frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^m} + \Gamma_{km}^n \Gamma_{nl}^i - \Gamma_{kl}^n \Gamma_{nm}^i \right] A_i df^{lm},$$

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} \oint \left[\frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^m} + \Gamma_{km}^n \Gamma_{nl}^i - \Gamma_{kl}^n \Gamma_{nm}^i \right] A_i df^{lm},$$

onde o termo entre colchetes é o **Tensor de Curvatura**, também conhecido como **Tensor de Riemann**:

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{km} \Gamma^n_{nl} - \Gamma^i_{kl} \Gamma^n_{nm}. \quad (5.13)$$

Observe que o tensor de Rieman é um tensor de quarta ordem. A expressão anterior relaciona o tensor de curvatura com as primeiras derivadas dos Símbolos de Christoffel. No entanto, como já exposto, os Símbolos de Christoffel são dependentes das primeiras derivadas do tensor métrico. Portanto é de esperar que o Tensor de Rieman esteja vinculado com a derivada segunda do tensor métrico. Essa afirmação pode ser demonstrada, mas para isso primeiramente escrevemos o tensor misto R^i_{klm} na forma covariante.

$$R_{iklm} = g_{in} R^n_{klm}. \quad (5.14)$$

Como $R^n_{klm} = \frac{\partial \Gamma^n_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^n_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^n_{km} \Gamma^p_{pl} - \Gamma^n_{kl} \Gamma^p_{pm}$, isso nos possibilita escrever

$$R_{iklm} = g_{in} R^n_{klm} = g_{in} \left(\frac{\partial \Gamma^n_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^n_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^n_{km} \Gamma^p_{pl} - \Gamma^n_{kl} \Gamma^p_{pm} \right). \quad (5.15)$$

Portanto, se reescrevermos as duas primeiras conexões acima em termos da métrica, respeitando é claro os índices correspondentes, encontraremos

$$\Gamma^n_{km} = \frac{1}{2} g^{nq} \left(\frac{\partial g_{qk}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{qm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{km}}{\partial x^q} \right). \quad (5.16)$$

e

$$\Gamma^n_{kl} = \frac{1}{2} g^{nq} \left(\frac{\partial g_{qk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ql}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^q} \right). \quad (5.17)$$

Substituindo as duas últimas equações no tensor de Rieman na forma covariante, teremos:

$$R_{iklm} = g_{in} R^n_{klm} =$$

$$\begin{aligned}
& g_{in} \left(\frac{\partial \left[\frac{1}{2} g^{nq} \left(\frac{\partial g_{qk}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{qm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{km}}{\partial x^q} \right) \right]}{\partial x^l} - \frac{\partial \left[\frac{1}{2} g^{nq} \left(\frac{\partial g_{qk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ql}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^q} \right) \right]}{\partial x^m} + \Gamma_{km}^p \Gamma_{pl}^n - \Gamma_{kl}^p \Gamma_{pm}^n \right) \\
& \frac{1}{2} g_{in} \left[\frac{\partial}{\partial x^l} \left\{ g^{nq} \left(\frac{\partial g_{qk}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{qm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{km}}{\partial x^q} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial x^m} \left\{ g^{nq} \left(\frac{\partial g_{qk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ql}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^q} \right) \right\} \right] \\
& + g_{in} \left(\Gamma_{km}^p \Gamma_{pl}^n - \Gamma_{kl}^p \Gamma_{pm}^n \right) = \\
& \frac{1}{2} g_{in} \left\{ \frac{\partial g^{nq}}{\partial x^l} \left(\frac{\partial g_{qk}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{qm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{km}}{\partial x^q} \right) \right\} + \frac{1}{2} g_{in} \left\{ g^{nq} \left(\frac{\partial^2 g_{qk}}{\partial x^l \partial x^m} + \frac{\partial^2 g_{qm}}{\partial x^l \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^l \partial x^q} \right) \right\} \\
& - \frac{1}{2} g_{in} \left\{ \frac{\partial g^{nq}}{\partial x^m} \left(\frac{\partial g_{qk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ql}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^q} \right) \right\} - \frac{1}{2} g_{in} \left\{ g^{nq} \left(\frac{\partial^2 g_{qk}}{\partial x^l \partial x^m} + \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^m \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^m \partial x^q} \right) \right\} \\
& + g_{in} \left(\Gamma_{km}^p \Gamma_{pl}^n - \Gamma_{kl}^p \Gamma_{pm}^n \right) = \\
& \frac{1}{2} g_{in} \left\{ \frac{\partial g^{nq}}{\partial x^l} \frac{\partial g_{qk}}{\partial x^m} + \frac{\partial g^{nq}}{\partial x^l} \frac{\partial g_{qm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g^{nq}}{\partial x^l} \frac{\partial g_{km}}{\partial x^q} \right\} + \frac{1}{2} g_{in} \left\{ g^{nq} \left(\frac{\partial^2 g_{qk}}{\partial x^l \partial x^m} + \frac{\partial^2 g_{qm}}{\partial x^l \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^l \partial x^q} \right) \right\} - \\
& - \frac{1}{2} g_{in} \left\{ \frac{\partial g^{nq}}{\partial x^m} \frac{\partial g_{qk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g^{nq}}{\partial x^m} \frac{\partial g_{ql}}{\partial x^k} - \frac{\partial g^{nq}}{\partial x^m} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^q} \right\} - \frac{1}{2} g_{in} \left\{ g^{nq} \left(\frac{\partial^2 g_{qk}}{\partial x^l \partial x^m} + \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^m \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^m \partial x^q} \right) \right\} + \\
& + g_{in} \left(\Gamma_{km}^p \Gamma_{pl}^n - \Gamma_{kl}^p \Gamma_{pm}^n \right).
\end{aligned}$$

Observando a simetria existente entre os índices de derivação dos termos que estão organizados na primeira chave $\{ \}$ com os termos contidos na terceira chave, concluímos que sob uma somatória por todos os índices, eles serão equivalentes e portanto se cancelarão. Desse modo, a expressão se reduz a:

$$\begin{aligned}
R_{iklm} &= \frac{1}{2} g_{in} \left\{ g^{nq} \left(\frac{\partial^2 g_{qk}}{\partial x^l \partial x^m} + \frac{\partial^2 g_{qm}}{\partial x^l \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^l \partial x^q} \right) \right\} - \frac{1}{2} g_{in} \left\{ g^{nq} \left(\frac{\partial^2 g_{qk}}{\partial x^l \partial x^m} + \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^m \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^m \partial x^q} \right) \right\} + \\
& + g_{in} \left(\Gamma_{km}^p \Gamma_{pl}^n - \Gamma_{kl}^p \Gamma_{pm}^n \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} g_{in} g^{nq} \left\{ \frac{\partial^2 g_{qk}^2}{\partial x^l \partial x^m} + \frac{\partial^2 g_{qm}}{\partial x^l \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^l \partial x^q} - \frac{\partial^2 g_{qk}^2}{\partial x^l \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^m \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^m \partial x^q} \right\} \\
&\quad + g_{in} (\Gamma_{km}^p \Gamma_{pl}^n - \Gamma_{kl}^p \Gamma_{pm}^n) = \\
&= \frac{1}{2} g_{in} g^{nq} \left\{ \frac{\partial^2 g_{qm}}{\partial x^l \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^l \partial x^q} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^m \partial x^q} - \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^m \partial x^k} \right\} + g_{in} (\Gamma_{km}^p \Gamma_{pl}^n - \Gamma_{kl}^p \Gamma_{pm}^n) = \\
&= \frac{1}{2} \delta_i^q \left\{ \frac{\partial^2 g_{qm}}{\partial x^l \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^l \partial x^q} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^m \partial x^q} - \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^m \partial x^k} \right\} + g_{in} (\Gamma_{km}^p \Gamma_{pl}^n - \Gamma_{kl}^p \Gamma_{pm}^n) = \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^l \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^l \partial x^i} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^m \partial x^i} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^m \partial x^k} \right\} + g_{in} (\Gamma_{km}^p \Gamma_{pl}^n - \Gamma_{kl}^p \Gamma_{pm}^n).
\end{aligned}$$

portanto

$$R_{iklm} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^l \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^l \partial x^i} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^m \partial x^i} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^m \partial x^k} \right\} + g_{in} (\Gamma_{km}^p \Gamma_{pl}^n - \Gamma_{kl}^p \Gamma_{pm}^n). \quad (5.18)$$

Podemos verificar como propriedade do Tensor de Curvatura R_{iklm} , a antisimetria por troca de índices consecutivos e a simetria de troca de índices não consecutivos.

Para justificar o exposto acima façamos como se segue:

Como R_{iklm} é da forma como acima definido, podemos trocar a ordem dos dois primeiros índices consecutivos e encontrarmos:

$$R_{kilm} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^l \partial x^i} - \frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^l \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^m \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^m \partial x^i} \right\} + g_{kn} (\Gamma_{im}^p \Gamma_{pl}^n - \Gamma_{il}^p \Gamma_{pm}^n). \quad (5.19)$$

Os índices do último termo do tensor de Riemann R_{iklm} são equivalentes aos do tensor R_{kilm} sob troca de índices $i \rightarrow k$ e $k \rightarrow i$ e sobre a inversão de sinal. Quanto ao primeiro termo fica explícito que $R_{iklm} = -R_{kilm}$.

Agora com o tensor de Riemann R_{iklm} invertamos a ordem dos dois últimos índices:

$$R_{ikml} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^m \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^m \partial x^i} + \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^l \partial x^i} - \frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^l \partial x^k} \right\} + g_{in} (\Gamma_{kl}^p \Gamma_{pm}^n - \Gamma_{km}^p \Gamma_{pl}^n) . \quad (5.20)$$

e do mesmo modo verifica-se que

$$R_{iklm} = -R_{kilm} = -R_{ikml} ,$$

ou então

$$R_{iklm} + R_{kilm} + R_{ikml} = 0. \quad (5.21)$$

Podemos nos perguntar se existe algum tipo de propriedade quanto às derivadas covariantes do Tensor de Riemann. A resposta é afirmativa e uma dessas propriedades é denominada identidade de **Bianchi**:

$$R_{ikl;m}^n + R_{imk;l}^n + R_{ilm;k}^n = 0. \quad (5.22)$$

Para verificar a identidade de Bianchi, primeiramente escrevamos o tensor de curvatura definido nas respectivas formas R_{ikl}^n , R_{imk}^n , R_{ilm}^n :

$$\begin{aligned} R_{ikl}^n &= \frac{\partial \Gamma_{il}^n}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^n}{\partial x^l} + \Gamma_{il}^p \Gamma_{pk}^n - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{pl}^n , \\ R_{imk}^n &= \frac{\partial \Gamma_{ik}^n}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma_{im}^n}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^p \Gamma_{pm}^n - \Gamma_{im}^p \Gamma_{pk}^n , \\ R_{ilm}^n &= \frac{\partial \Gamma_{im}^n}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^n}{\partial x^m} + \Gamma_{im}^p \Gamma_{pl}^n - \Gamma_{il}^p \Gamma_{pm}^n . \end{aligned} \quad (5.23)$$

Aproveitando o caráter tensorial da expressão do tensor de Riemann, se realizarmos os cálculos no sistema localmente geodésico o valor encontrado deverá também ser equivalente ao cálculo em qualquer outro sistema de coordenadas. A vantagem de fazer o cálculo

em um sistema localmente geodésico somente se justifica pela busca da simplicidade algébrica envolvida nas expressões.

Em um sistema local geodésico a identidade de Bianchi será:

$$R_{ikl,m}^n + R_{imk,l}^n + R_{ilm,k}^n = 0 . \quad (5.24)$$

$$R_{ikl,m}^n = \frac{\partial \Gamma_{il}^n}{\partial x^m \partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^n}{\partial x^m \partial x^l} ,$$

$$R_{imk,l}^n = \frac{\partial \Gamma_{ik}^n}{\partial x^l \partial x^m} - \frac{\partial \Gamma_{im}^n}{\partial x^l \partial x^k} ,$$

$$R_{ilm,k}^n = \frac{\partial \Gamma_{im}^n}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^n}{\partial x^k \partial x^m} .$$

Portanto

$$\frac{\partial \Gamma_{il}^n}{\partial x^m \partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^n}{\partial x^m \partial x^l} + \frac{\partial \Gamma_{ik}^n}{\partial x^l \partial x^m} - \frac{\partial \Gamma_{im}^n}{\partial x^l \partial x^k} + \frac{\partial \Gamma_{im}^n}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^n}{\partial x^k \partial x^m} = 0 . \quad (5.25)$$

Verificando a validade da relação de Bianchi podemos corresponder de modo a dizer que ela é válida para qualquer sistemas de coordenadas devido ao caráter tensorial, ou seja, a identidade de Bianchi para Derivadas Covariantes também é verdadeira. Portanto, a expressão definida é satisfeita.

Um outro comentário a respeito do tensor de Curvatura se refere as suas possíveis contrações. Um tipo de contração muito empregado no estudo em questão é denominado de Tensor de Ricci.

Podemos obter o tensor de Ricci que é um tensor de ordem segunda, por meio da seguinte contração indicial:

$$R_{ik} = g^{lm} R_{limk} = R_{ilk}^l . \quad (5.26)$$

Com os valores definidos para o tensor de Riemann, podemos encontrar:

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^l}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l . \quad (5.27)$$

Uma outra contração muito importante resulta no chamado escalar de Curvatura que é representado por:

$$R = g^{ik} R_{ik} . \tag{5.28}$$

Capítulo 6

O Tensor Energia Momento

A princípio definiremos o Tensor de Energia-Impulso no espaço de Minkowski, mas para isso é necessário definirmos a ação em espaços planos gerados por 4-vetores.

$$S = \frac{1}{c} \iiint \Lambda \left(q, \frac{\partial q}{\partial x^i} \right) dV dt ,$$

onde

$$L = \iiint \Lambda \left(q, \frac{\partial q}{\partial x^i} \right) dV ,$$

é a lagrangiana obtida pela soma infinitesimal da densidade de Lagrangiana $\Lambda \left(q, \frac{\partial q}{\partial x^i} \right)$ por todo o volume.

Consequentemente a ação pode ser expressa como a integral por todo o espaço de Minkowski,

$$S = \frac{1}{c} \iiint \Lambda \left(q, \frac{\partial q}{\partial x^i} \right) d\Omega . \quad (6.1)$$

Calculando a anulação do variacional da ação, temos

$$\delta S = \frac{1}{c} \iiint \delta \Lambda \left(q, \frac{\partial q}{\partial x^i} \right) d\Omega = 0 ,$$

$$\delta S = \iiint\!\!\!\int \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \Lambda}{\partial \left(\frac{\partial q}{\partial x^i} \right)} \delta \left(\frac{\partial q}{\partial x^i} \right) \right) d\Omega = 0 .$$

Reescrevendo essa expressão utilizando o diferencial total da expressão teremos

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \Lambda}{\partial \left(\frac{\partial q}{\partial x^i} \right)} \delta \left(\frac{\partial q}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \delta q \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \right) \delta q ,$$

desde que

$$\frac{\partial \delta q}{\partial x^i} = \delta \left(\frac{\partial q}{\partial x^i} \right) .$$

Com a derivação total escrevemos:

$$\begin{aligned} & \iiint\!\!\!\int \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \Lambda}{\partial \left(\frac{\partial q}{\partial x^i} \right)} \delta \left(\frac{\partial q}{\partial x^i} \right) \right) d\Omega = \\ & = \iiint\!\!\!\int \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \delta q \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \right) \delta q \right) d\Omega = 0 \\ & = \iiint\!\!\!\int \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \right) \delta q \right) d\Omega - \iiint\!\!\!\int \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \delta q \right) d\Omega = 0 . \end{aligned}$$

Como o segundo termo da equação acima é a integral sobre todo o espaço da divergência, assumimos que não existem fontes de campo no infinito quando tratamos de uma fonte de campo finita. Por isso a expressão (que é o teorema de Gauss) deve ser nula no fim da integração. Portanto

$$\iiint\!\!\!\int \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \right) \delta q \right) d\Omega = 0 ,$$

ou seja

$$\left[\frac{\partial \Lambda}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \right) \right] \delta q = 0 ,$$

para toda variação δq logo

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \right) = 0 . \quad (6.2)$$

A divergência da densidade de Lagrangiana também pode ser transformada pelas regras de derivação.

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Lambda (q, \partial q_{,i}) = \frac{\partial \Lambda}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x^i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \frac{\partial q_{,k}}{\partial x^i} .$$

Como

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \right), \text{ reescrevemos:}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Lambda (q, \partial q_{,i}) = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \right) \frac{\partial q}{\partial x^i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \frac{\partial q_{,k}}{\partial x^i} . \quad (6.3)$$

Assumindo que

$$q_{,k,i} = q_{,i,k} , \text{ temos}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Lambda (q, \partial q_{,i}) = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \right) \frac{\partial q}{\partial x^i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \frac{\partial q_{,k}}{\partial x^i} ,$$

que poderá ser contraído em um diferencial total. Desse modo ficamos com

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Lambda (q, \partial q_{,i}) = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \frac{\partial q}{\partial x^i} \right) . \quad (6.4)$$

Realizando uma mudança de índices através do tensor identidade

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Lambda(q, \partial q_{,i}) = \delta_i^k \frac{\partial}{\partial x^k} \Lambda(q, \partial q_{,i}) \quad ,$$

temos:

$$\delta_i^k \frac{\partial}{\partial x^k} \Lambda(q, \partial q_{,i}) = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \frac{\partial q}{\partial x^i} \right) \quad . \quad (6.5)$$

De maneira a concluirmos que

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \frac{\partial q}{\partial x^i} - \delta_i^k \Lambda(q, \partial q_{,i}) \right) = 0 \quad ,$$

encontrando assim uma importante relação, expressando divergência nula de uma certa quantidade. Essa certa expressão é conhecida como o tensor de energia-impulso e definida como

$$T_i^k \equiv \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \frac{\partial q}{\partial x^i} - \delta_i^k \Lambda(q, \partial q_{,i}) \quad . \quad (6.6)$$

Para um sistema de partículas este tensor pode ser escrito como

$$T_i^k \equiv \sum_l \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}^{(l)}} \frac{\partial q^{(l)}}{\partial x^i} - \delta_i^k \Lambda(q^{(l)}, \partial q_{,i}^{(l)}) \quad . \quad (6.7)$$

6.1 Tensor de Energia-Impulso em Coordenadas Curvilíneas

Como foi discutido, a ação que encontramos é válida para os espaços de Minkowski. Contudo desejamos, como sempre, expressões invariantes por mudanças gerais de coordenadas.

Para generalizar a ação, lembremos que o elemento que proporciona a correta transposição de coordenadas x à x' é denominado de jacobiano de transformação. Além do mais, é de se suspeitar que o tensor métrico esteja novamente presente nessa relação já que estamos lidando com propriedades geométricas. O Jacobiano de Transformação é definido como:

$$J \equiv \left| \frac{\partial (x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)} \right|. \quad (6.8)$$

Como discutido, os tensores se transformam como

$$g^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} g'^{lm}.$$

Em termos do determinante, temos

$$|g^{ik}| = \left| \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \right| \left| \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} \right| |g'^{(0)lm}|.$$

Sabendo que $g_{ik}g^{ik} = 1$ e $|g_{ik}g^{ik}| = |g_{ik}| |g^{ik}| = 1$, definindo $|g_{ik}| \equiv g$, teremos que $|g^{ik}| = \frac{1}{g}$.

Usando mais uma vez do caráter tensorial, calculemos o determinante da métrica de Minkowski representada por $g'^{(0)lm}$, ou seja,

$$|g'^{(0)lm}| = -1,$$

$$\frac{1}{g} = J^2 (-1) \rightarrow J = \sqrt{-\frac{1}{g}}.$$

Partindo de um sistema de coordenadas generalizadas para outro

$$d\Omega = Jd\Omega' , \text{ ou ainda}$$

$$d\Omega = \sqrt{-\frac{1}{g}}d\Omega' .$$

De onde concluimos que

$$d\Omega' = \sqrt{-g}d\Omega . \quad (6.9)$$

Calculando a ação para o sistema de coordenadas (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) temos:

$$S = \frac{1}{c} \int \Lambda \left(g^{ik}, \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right) d\Omega' . \quad (6.10)$$

Como essas expressões precisamente devem ser válidas para qualquer sistema em questão, vamos escrever a mesma utilizando a relação de transformação obtida logo acima

$$S = \frac{1}{c} \int \Lambda \left(g^{ik}, \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right) \sqrt{-g}d\Omega . \quad (6.11)$$

Com essa expressão, novamente procedemos os mesmos cálculos anteriores

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{c} \int \delta \Lambda \left(g^{ik}, \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right) \sqrt{-g}d\Omega = 0 , \\ \delta S &= \frac{1}{c} \int \left[\frac{\partial \Lambda \sqrt{-g}}{\partial g^{ik}} \delta g^{ik} + \frac{\partial \Lambda \sqrt{-g}}{\partial \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right)} \delta \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right) \right] d\Omega = 0 . \end{aligned}$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial \Lambda \sqrt{-g}}{\partial \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right)} \delta g^{ik} \right) = \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\Lambda \sqrt{-g}}{\partial \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right)} \right) \delta g^{ik} + \frac{\Lambda \sqrt{-g}}{\partial \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right)} \frac{\partial}{\partial x^l} \delta g^{ik} ,$$

a anulação do variacional da ação pode ser transformada como:

$$\frac{1}{c} \int \left[\frac{\partial \Lambda \sqrt{-g}}{\partial g^{ik}} \delta g^{ik} + \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\Lambda \sqrt{-g}}{\partial \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right)} \delta g^{ik} \right) - \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\Lambda \sqrt{-g}}{\partial \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right)} \right) \delta g^{ik} \right] d\Omega = 0 .$$

Do mesmo modo a 4-divergência deverá ser nula quando somada por todo o espaço quando a fonte de campo supostamente for finita. Disso resulta

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{c} \int \left[\frac{\partial \Lambda \sqrt{-g}}{\partial g^{ik}} \delta g^{ik} - \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\Lambda \sqrt{-g}}{\partial \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right)} \right) \delta g^{ik} \right] d\Omega = 0 , \\ \therefore \delta S &= \frac{1}{c} \int \left[\frac{\partial \Lambda \sqrt{-g}}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\Lambda \sqrt{-g}}{\partial \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right)} \right) \right] \delta g^{ik} d\Omega = 0 . \end{aligned} \quad (6.12)$$

Como feito para o espaço de Minkowski, a relação entre colchetes fornece

$$\frac{\partial \Lambda \sqrt{-g}}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\Lambda \sqrt{-g}}{\partial \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right)} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{ik} ,$$

que representa o Tensor de Energia-Impulso para coordenadas generalizadas.

Capítulo 7

Ação para o Campo Gravitacional

O formalismo da Mecânica Analítica possibilita encontrar as equações de movimento para uma ou para um sistema de partículas por meio do princípio da Mínima Ação. A ideia desse princípio possivelmente teve suas origens com os ensaios filosófico-teológicos de Maupertuis [19] publicados em 1744. Posteriormente foi reestruturado em formalismo matemático por meio dos trabalhos publicados em meados do século XVIII por Euler, Lagrange entre outros. O formalismo que hoje utilizamos para o Princípio de Mínima Ação deve-se a William Rowan Hamilton que foi registrado por volta dos anos de 1834, 1835.

Para uma partícula a ação é definida como:

$$S = \int L \left(q, \frac{dq}{dt}, t \right) dt . \quad (7.1)$$

Observemos que a ação é uma integral de uma função das coordenadas generalizadas da partícula, das suas velocidades generalizadas e do tempo; todas calculadas em um intervalo de tempo qualquer.

A langrangiana em sua estrutura traz consigo marcas profundas do determinismo clássico [21] que almeja prever o comportamento de qualquer corpo desde que se conheça sua posição e sua velocidade no uniforme transcorrer do tempo, dessa forma descrevendo toda a trajetória futura desse determinado corpo.

A Langrangiana também pode ser determinada por uma generalização por todo o espaço envolvido (que é a densidade de Lagrangiana) como fizemos sem justificar no tópico do tensor Energia-Impulso, mas agora uma interpretação mais profunda será necessária.

Observemos a estrutura da densidade de lagrangeana

$$L = \int \mathcal{L} \left(q, \frac{dq}{dt} \right) d^N q . \quad (7.2)$$

A ação poderá ser reescrita na forma:

$$S = \int \left(\mathcal{L} \left(q, \frac{dq}{dt} \right) d^N q \right) dt . \quad (7.3)$$

No entanto o grande objetivo que agora devemos explorar não está totalmente em saber qual é a equação de movimento de uma partícula, mas sim qual é a "equação de movimento" (se assim podemos dizer) para o campo gravitacional.

Por isso precisamos construir a ação do campo gravitacional de modo análogo à estrutura das equações acima discutidas para o movimento de uma partícula.

Podemos começar estabelecendo o valor para o número de dimensões "N" em nosso caso é o 4-espaco. A lagrangiana usualmente vincula posição e velocidade. Para o campo gravitacional posição fara o papel análogo o tensor métrico, a velocidade como se fosse a variação da métrica.

Contudo tanto a Lagrangiana como a densidade de Lagrangiana são escalares, e a simples combinação de g_{ik} com Γ_{kl}^i não resultará em um escalar. Mas, a poucos cálculos atrás, nós definimos o escalar de curvatura R que, por ventura, depende das derivadas primeiras e segundas do tensor métrico g_{ik} em questão. Isso a princípio nos atrapalha a construir as equações de movimento de 2ª ordem, a não ser que usemos algum artifício.

Poderemos tentar definir um elemento $G(g_{ik}, \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l})$ de forma que

$$\int G \sqrt{-g} d\Omega = \int R \sqrt{-g} d\Omega - \int \frac{\partial (\sqrt{-g} A^i)}{\partial x^l} d\Omega ,$$

onde A^i é um vetor de transformação.

Se considerarmos que o campo e suas variações se anulem nas fronteiras, consequentemente a sua variação também se anulará. Por esse fato

$$\delta \int G \sqrt{-g} d\Omega = \delta \int R \sqrt{-g} d\Omega . \quad (7.4)$$

Agora, podemos escrever

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}R &= \sqrt{-g}g^{ik}R_{ik} = \\ &= \sqrt{-g} \left\{ g^{ik} \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} - g^{ik} \frac{\partial \Gamma_{il}^l}{\partial x^k} + g^{ik} \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - g^{ik} \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l \right\}\end{aligned}$$

e rearranjando:

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}g^{ik} \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} &= \frac{\partial}{\partial x^l} (\sqrt{-g}g^{ik} \Gamma_{ik}^l) - \Gamma_{ik}^l \frac{\partial}{\partial x^l} (\sqrt{-g}g^{ik}) , \\ \sqrt{-g}g^{ik} \frac{\partial \Gamma_{il}^l}{\partial x^k} &= \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g}g^{ik} \Gamma_{il}^l) - \Gamma_{il}^l \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g}g^{ik}) .\end{aligned}$$

Como estamos tratando do variacional das expressões, desde já desprezamos as derivadas totais de modo que

$$G\sqrt{-g} = \Gamma_{im}^m \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g}g^{ik}) - \Gamma_{ik}^l \frac{\partial}{\partial x^l} (\sqrt{-g}g^{ik}) - g^{ik} \sqrt{-g} (\Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m) .$$

Tendo em vista a relação

$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2}g^{im}(g_{mi,k} + g_{mk,i} - g_{ki,m}) = \frac{1}{2}(g^{im}g_{mi,k} + g^{im}g_{mk,i} - g^{im}g_{ki,m})$ e considerando que a contração indicial realizada pelo tensor métrico implica que $g^{im}g_{mk,i} - g^{im}g_{ki,m} = 0$, ou seja, $\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2}g^{im}g_{mi,k}$.

Apesar dos tensores métricos serem representados por matrizes, assim respeitando a álgebra matricial, quando realizarmos a soma de termo a termo da expressão anterior, teremos a relação definida abaixo

$$\begin{aligned}\Gamma_{ki}^i &= \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k} , \\ \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} &= -\Gamma_{ml}^i g^{mk} - \Gamma_{ml}^k g^{im} .\end{aligned}\tag{7.5}$$

Logo pode-se encontrar que

$$G = g^{ik} (\Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m) . \quad (7.6)$$

É de fundamental importância sabermos que as grandezas que sofrem a variação são as componentes do tensor métrico. Contra intuitivamente a integral da ação de um campo real nem sempre resultará em um mínimo, como esperado. Esse resultado deve-se ao fato que nem toda as variações possíveis de g_{ik} resultam em uma alteração da métrica do espaço-tempo, ou seja, a alteração real do campo gravitacional.

7.1 Equações de Einstein

As equações de movimento para o campo gravitacional foram obtidas por Einstein no início do século XX por métodos diferentes dos de Hamilton [12]. Ainda hoje se discute sobre quem teria primeiramente obtido as equações que hoje governam a Relatividade Geral, pois, data-se que nesse mesmo ano David Hilbert haveria proposto as mesmas equações só que derivadas por princípios variacionais [17].

Não realizaremos os procedimentos conforme realizados por Einstein e sim pelos princípio variacionais ao modo de Hilbert. Da mesma forma que as equações de Euler-Lagrange podem ser extraídas por métodos variacionais de uma ação, em se tratando da família das Equações de Einstein para o movimento propriamente dito do campo gravitacional não será diferente.

Podemos encontrar as equações do campo gravitacional por meio da variação funcional:

$$\delta(S_m + S_g) = 0 ,$$

onde S_m é a ação para a matéria e S_g é a ação para o campo gravitacional.

Como já analisamos, a estrutura para a ação do campo gravitacional, que foi possível por meio de uma analogia com a Mecânica Analítica, permite concluir que

$$\int G \sqrt{-g} d\Omega = \int R \sqrt{-g} d\Omega - \int \frac{\partial}{\partial x^l} A^l \sqrt{-g} d\Omega . \quad (7.7)$$

Desconsiderando os termos de superfície que são encontrados quando integramos por todo o hipervolume temos

$$\delta \int G \sqrt{-g} d\Omega = \delta \int R \sqrt{-g} d\Omega . \quad (7.8)$$

Dessa forma

$$\delta \int G \sqrt{-g} d\Omega = \delta \int R_{ik} g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega ,$$

$$\delta \int R_{ik} g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega = \int \delta (R_{ik}) g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega + \int R_{ik} \delta (g^{ik}) \sqrt{-g} d\Omega + \int R_{ik} g^{ik} \delta (\sqrt{-g}) d\Omega . \quad (7.9)$$

Sabemos que $\delta (\sqrt{-g})$ pode ser calculado como se fosse uma determinada derivada, ou seja

$$\delta (\sqrt{-g}) = \frac{1}{2} \frac{-\delta g}{\sqrt{-g}} . \quad (7.10)$$

A quantidade δg pode ser escrita também como [28].

$$\delta g = g g_{ik} \delta g^{ik} . \quad (7.11)$$

Por meio dessas duas idéias acima reescrevemos

$$\delta (\sqrt{-g}) = \frac{1}{2} \frac{-g g_{ik} \delta g^{ik}}{\sqrt{-g}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ik} \delta g^{ik} . \quad (7.12)$$

Com essas transformações podemos reescrever o termo correspondente à $\delta \int R \sqrt{-g} d\Omega$.

Portanto

$$\delta \int R_{ik} g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega = \int \delta (R_{ik}) g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega + \int R_{ik} \delta (g^{ik}) \sqrt{-g} d\Omega + \int R_{ik} \left(-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ik} \delta g^{ik} \right) g^{ik} d\Omega.$$

Agrupando o segundo com o terceiro termo da expressão acima, de modo a escrever sobre uma mesma variação δg^{ik} , ficamos com

$$\delta \int R_{ik} g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega = \int \delta (R_{ik}) g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega + \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega . \quad (7.13)$$

Relembremos agora a estrutura do tensor de Ricci em termos dos Símbolos de Christoffel:

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^l}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l . \quad (7.14)$$

Se aproveitarmos o caráter tensorial da expressão acima, podemos definir o tensor de Ricci em um sistema local-geodésico. Uma vez que nesse sistema não existirá contribuição significativa do produto das primeiras derivadas, a expressão para o tensor de Ricci se reduz

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^l}{\partial x^k} . \quad (7.15)$$

Consequentemente o variacional δR_{ik} será

$$\delta R_{ik} = \delta \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} - \delta \frac{\partial \Gamma_{il}^l}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^l} (\delta \Gamma_{ik}^l) - \frac{\partial}{\partial x^k} (\delta \Gamma_{il}^l) . \quad (7.16)$$

Então

$$\delta R_{ik} g^{ik} = g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^l} (\delta \Gamma_{ik}^l) - g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} (\delta \Gamma_{il}^l) . \quad (7.17)$$

A fim de uma simplificação façamos a alternância dos índices no segundo termo $l \rightarrow k$ e $k \rightarrow l$, ou seja

$$\delta R_{ik} g^{ik} = g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^l} (\delta \Gamma_{ik}^l) - g^{il} \frac{\partial}{\partial x^l} (\delta \Gamma_{ik}^k) = \frac{\partial A^l}{\partial x^l} ,$$

pois como toda a equação está submetida aos mesmos diferencias, reescrevemos

$$g^{ik} \delta \Gamma_{ik}^l - g^{il} \delta \Gamma_{ik}^k = A^l . \quad (7.18)$$

Apesar de ainda estarmos em um sistema local geodésico, com essas estruturas discutidas acima, podemos reescrever as expressões não mais apenas considerando os sistemas locais e geodésicos, mas sim levando em conta a arbitrariedade da escolha dos referencias. Por isso acrescentamos o Jacobiano de transformação $\sqrt{-g}$, elemento que garante a independência do espaço ser plano ou curvo:

$$\delta R_{ik} g^{ik} \sqrt{-g} = \frac{\partial}{\partial x^l} (\sqrt{-g} A^l) . \quad (7.19)$$

Esse foi um argumento extraído de [16] que apesar de lógico pode levantar suspeitas. Uma prova rigorosa da mesma expressão é encontrada em [28], que apenas não a realizei aqui por não ter conseguido até a presente data fazê-la sem pedir auxílios.

Sobre essas transformações a expressão

$$\delta \int R_{ik} g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega = \int \delta (R_{ik}) g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega + \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega ,$$

se reduzirá a

$$\delta \int R \sqrt{-g} d\Omega = \int \frac{\partial}{\partial x^l} (\sqrt{-g} A^l) d\Omega + \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega . \quad (7.20)$$

Considerando como válido o Teorema da Divergência de Gauss, o primeiro termo que está escrito em termos de uma divergência não interferirá nos resultados depois de integrarmos por todo o hipervolume e aplicarmos o variacional, ou seja:

$$\delta \int R \sqrt{-g} d\Omega = \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega . \quad (7.21)$$

Assumiremos que a variação da ação será nula da mesma forma que quando tratamos com o princípio da Mínima Ação. No entanto, vale ressaltar que a variação nem sempre será um mínimo, mas deve ser garantida que seja um extremo [16].

Podemos expressar, com correções de algumas constantes, que o variacional da Ação do Campo Gravitacional em questão será:

$$\delta S_g = \frac{-c^3}{16\pi k} \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega ,$$

portanto em se tratando da ação para o campo gravitacional em uma região isenta de outras fontes de campo teremos

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = 0 ,$$

que a conhecida Equação de Einstein do Campo Gravitacional para o vácuo.

No entanto em se tratando da parte δS_m , temos

$$\delta S_m = \delta \int G \sqrt{-g} d\Omega = \delta \int G \left(g^{ik}, \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^i} \right) \sqrt{-g} d\Omega . \quad (7.22)$$

Aplicando o variacional no termo $G \left(g^{ik}, \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^i} \right)$ ficamos com

$$\int \left[\frac{\partial G}{\partial g^{ik}} \sqrt{-g} \delta g^{ik} + \frac{\partial G}{\partial \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right)} \sqrt{-g} \delta \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right) \right] d\Omega . \quad (7.23)$$

Podemos reduzir o segundo termo da expressão acima através de uma transformação de diferencial total, ou seja, se notarmos que

$$\frac{\partial}{\partial x^l} \left[\frac{\partial G}{\partial \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right)} \delta g^{ik} \right] = \frac{\partial}{\partial x^l} \left[\frac{\partial G}{\partial \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right)} \right] \delta g^{ik} + \frac{\partial G}{\partial \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right)} \delta \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right) . \quad (7.24)$$

encontraremos

$$\int \left[\frac{\partial G}{\partial g^{ik}} \sqrt{-g} \delta g^{ik} + \frac{\partial}{\partial x^l} \left[\frac{\partial G}{\partial \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right)} \delta g^{ik} \right] - \frac{\partial}{\partial x^l} \left[\frac{\partial G}{\partial \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right)} \right] \delta g^{ik} \right] d\Omega . \quad (7.25)$$

Novamente estamos tratando de uma expressão que possui um diferencial total que pelo teorema da divergência não afetará nossos resultados por ser nulo no infinito. Portanto a expressão δS_m simplificada será

$$\int \left(\frac{\partial G}{\partial g^{ik}} \sqrt{-g} \delta g^{ik} - \frac{\partial}{\partial x^l} \left\{ \frac{\partial G}{\partial \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right)} \right\} \delta g^{ik} \right) d\Omega . \quad (7.26)$$

Com a reinclusão das constantes temos

$$\delta S_m = \frac{c^3}{16\pi k} \int \left\{ \frac{\partial G}{\partial g^{ik}} \sqrt{-g} \delta g^{ik} - \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial G}{\partial \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right)} \right) \delta g^{ik} \right\} d\Omega . \quad (7.27)$$

Sabemos que existe uma conexão profunda entre a variação da ação em termos da densidade de Lagrangeana e o tensor de Energia-Impulso, ou comumente Energia-Momento. Tal tensor pode ser escrito como

$$\delta S_m = \frac{1}{2c} \int T_{ik} \sqrt{-g} \delta g^{ik} d\Omega . \quad (7.28)$$

Assim, se compararmos ambas as expressões para δS_m teremos que

$$\frac{8\pi k}{c^4} T_{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial G}{\partial g^{ik}} \sqrt{-g} \delta g^{ik} - \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial G}{\partial \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right)} \right) \delta g^{ik} \right\} . \quad (7.29)$$

Da expressão $\delta (S_g + S_m) = 0$, temos

$$\frac{-c^3}{16\pi k} \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega + \frac{c^3}{16\pi k} \int \left\{ \frac{\partial G}{\partial g^{ik}} \sqrt{-g} \delta g^{ik} - \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial G}{\partial \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right)} \right) \delta g^{ik} \right\} d\Omega = 0 .$$

Concluimos assim que

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial G}{\partial g^{ik}} \sqrt{-g} \delta g^{ik} - \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial G}{\partial \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right)} \right) \right\} . \quad (7.30)$$

A mesma expressão é mais comumente escrita através do tensor de energia momento. Se utilizarmos a relação existente entre G e T , podemos escrever a expressão acima indicada como

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik} . \quad (7.31)$$

Essa é a equação de Einstein não homogênea para o campo gravitacional. Em outras palavras é a equação que descreve a equação de movimento para o campo gravitacional na presença de fontes. Tanto a energia quanto o momento das fontes presentes são os responsáveis em modelar a geometria do espaço-tempo.

Podemos também buscar uma representação mista da equação acima. Para isso simplesmente contraímos os índices por meio da métrica g^{jk} :

$$g^{jk} \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \right) = g^{jk} \left(\frac{8\pi k}{c^4} T_{ik} \right) . \quad (7.32)$$

$$\text{Como } g^{jk} R_{ik} = R_i^k \quad ; \quad g^{jk} g_{ik} = \delta_i^j \quad \text{e} \quad g^{jk} T_{ik} = T_i^j ,$$

concluimos que

$$R_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k R = \frac{8\pi k}{c^4} T_i^k . \quad (7.33)$$

Contraindo os índices da expressão acima ficamos com

$$R - \frac{1}{2} 4R = \frac{8\pi k}{c^4} T ,$$

que se reduz a

$$R = -\frac{8\pi k}{c^4} T . \quad (7.34)$$

Com esse valor para o escalar de curvatura, completamos a equação de Einstein

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} \left(-\frac{8\pi k}{c^4} T \right) = \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik} ,$$

que quando simplificada é geralmente expressa por

$$R_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4} \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right) . \quad (7.35)$$

É importante salientar que as equações de Einstein, tanto a homogênea quanto a não homogênea, não são lineares ou seja, o princípio da superposição de efeitos não se verifica. Somente existe um caráter linear nas equações de Einstein que é quando estamos tratando de campos débeis, ou seja, campos ditos fracos. Em outras palavras, os campos gravitacionais no limite Clássico Newtoniano.

Capítulo 8

Introdução à Gravitação de Brans-Dicke

Antes mesmo da formulação da Relatividade Geral ser estabelecida, outras tentativas contemporâneas à época visavam aprimorar os resultados da Gravitação Newtoniana e certamente essas hoje compõe parte do cenário da história da gravitação. Talvez um dos grandes expoentes desse tenha sido o físico finlandes Nordström que estabeleceu uma teoria que podia ser derivada de uma ação que foi determinada um ano mais tarde por Einstein e Fokker [8]. A métrica de sua teoria era um acoplamento de um campo escalar com a métrica de Minkowski. No entanto o problema para a precessão do periélio de Mercúrio era erroneamente prevista pela teoria de Nordström. Esse fato fez da teoria obsoleta para os fins práticos, mas uma inspiração à comunidade científica.

Em 1915 a teoria da Relatividade Geral em uma das suas primeiras versões foi estabelecida [12]. A partir disso uma série de experiências a fim de testá-la foram propostas, problemas como: desvio da luz na presença de um campo gravitacional, a precessão do periélio de Mercúrio, equivalência entre massas inerciais e gravitacionais entre outras [9]. Esses experimentos foram importantes pois fizeram da Relatividade Geral a teoria mais bem sucedida, quando comparada a experimentos em nosso sistema solar. Na década de vinte o russo Alexander Friedmann propôs uma solução para as equações de Einstein que, segundo o próprio Einstein não estaria errada matematicamente, no entanto, incoerente fisicamente. O francês Georges Lemaitre, e os norte americanos Robertson e Walker aprimoraram esse mesmo modelo que visava explicar um universo dinâmico que em larga escala de acordo com a Relatividade Geral seria homogêneo e isotrópico. Essa proposta que começou a ser desenvolvida nos anos de 1927, tornou-se universalmente aceita por volta da década de sessenta e compõe o que a comunidade científica chama de Modelo Padrão para a Cosmologia [24].

Apesar do Modelo padrão ser considerado um sucesso por explicar satisfatoriamente problemas como a expansão do universo (através dos resultados publicados por Hubble

em 1929), e a existência das radiações cósmicas de fundo (que foram constatadas pelos experimentos de Wilson e Penzias em 1965). Esse modelo não é capaz de explicar com a mesma concordância alguns problemas como: o problema do horizonte de eventos (regiões do universo provavelmente jamais tiveram contato causal se comparado a idade prevista do universo), o problema dos monopólos magnéticos (por que hoje não os observamos), expansão acelerada do universo, etc.

Modelos atuais denominados Λ CDM (Lâmbda-Cold Dark Matter) atualmente vem sendo empregados a fim de responder essas questões que o modelo de Friedmann não podia responder, como por exemplo a expansão acelerada do universo. No entanto, ainda assim problemas são identificados. Por exemplo a constante Λ (Constante Cosmológica) utilizada nesses modelos é 120 ordens de grandezas diferente do valor obtido pela Física de Partículas Elementares, sem contar que assumir a veracidade do modelo implica também considerar que 70% da quantidade de matéria do universo se encontra em uma forma desconhecida de fluido constituído por um conteúdo não bariônico, a matéria escura [25].

Algumas teorias de grande unificação como a teoria de Super Cordas no seus limites para baixas energias implicam na existência de um campo escalar denominado Dilaton que compõe a interação gravitacional [3].

Motivados pelas questões astronômicas acima discutidas, a não concordância dos modelos clássicos à explicação de fenomenologias de dimensões cosmológicas e a perspectiva real das teorias modernas, retornemos por mais um instante ao século XIX.

Em 1883 o filósofo Ernst Mach em sua famosa obra "Ciência da Mecânica" faz valiosas críticas a algumas concepções definidas por Newton, a definição de massa e a definição de espaço-tempo [20].

Abaixo confrontaremos esses pensamentos de forma mais direta

"A quantidade de matéria é a medida da mesma, obtida conjuntamente a partir de sua densidade e volume. [...] é essa quantidade que doravante sempre denominarei pelo nome de corpo ou massa"[20].

Mach não satisfeito com a definição da medida de massa dada por Newton, alegando ser uma espécie de "pseudo definição", afirma:

"O conceito de massa não fica mais claro descrevendo a massa como o produto do volume pela densidade, já que a própria densidade denota simplesmente a massa pela unidade de volume. A definição verdadeira de massa só pode ser deduzida das relações dinâmicas dos corpos" [20].

Ao contrário das concepções newtonianas Mach defendia que a medida de massa deveria levar em conta a interação com as denominadas estrelas fixas, uma vez que a medida

de massa está intrinsecamente relacionada com a medida entre a força e a aceleração e essas que podem ser diferentes dependendo da região do universo considerado.

Em se tratando do conceito de espaço tempo, Newton afirmava a existência independente do mesmo, se comparada ao restante do universo. Agora sob os pontos de vista de Mach o espaço e tempo apenas poderiam fazer sentido a partir do momento que existisse observadores, que em nosso vocabulário moderno talvez possa ser definido como a presença de Energia e Momento. O uso do talvez na frase anterior é apenas consequência direta de que o princípio de Mach ainda não pode ser analisado experimentalmente.

Certamente essa discordância de caráter epistemológico teve repercussão na formulação das teorias de Gravitação. Eintein havia mencionado em suas notas bibliográficas a inspiração gerada pelo Princípio de Mach em sua teoria relativista para os referenciais generalizados [12].

Apesar das equações de Einstein vincularem diretamente a matéria com o espaço tempo, a teoria Einsteniana não é completamente Machiana, uma vez que as soluções das equações de campo da Relatividade Geral na ausência completa de fontes prevêm a existência de um espaço-tempo plano quadrimensional, o espaço de Minkowski. Mas como havíamos discutido outras teorias para a Gravitação também estavam em perspectivas.

Em 1937 Paul Dirac em seu polêmico trabalho "Teoria dos Grandes Números" [11] estabeleceu relações diretas entre as constantes mais diversas da Física. Dentre essas relações existia também a hipótese da Constante Gravitacional G newtoniana ser uma função dependente da era cosmológica do universo. Esse trabalho levantou polêmica, como pode ser visto no artigo publicado por Edward Teller que confrontou tais hipóteses com alguns dados geológicos, obtendo contradições com as evidências empíricas [27].

Em 1949 Jordan publica um trabalho que basicamente compõe o início das Teorias Escalares Tensoriais à Gravitação [15]. Tal teoria foi inspirada nos trabalhos de Dirac, só que ao invés de apenas considerar a Constante da Gravitação Universal uma variável dependente da era cosmológica, considerou um campo escalar [15].

Jordan também havia proposto que devido essas consequências o tensor de energia-momento, não necessariamente deveria ser sempre nulo sob derivações covariantes e propôs mecanismos de produção de massa que violava a equação da conservação de massa.

Apesar da teoria escalar-tensorial de Jordan concordar com a proposta de Dirac, a construção de sua teoria apresentava acoplamente mínimo entre o campo escalar e o tensor métrico, ou seja, o Princípio de Equivalência da Relatividade Geral seria violado, pois, para uma mesma métrica seria possível estabelecer diversas geodésicas associadas. Para a época, violar o princípio base de uma das teorias mais fundamentadas certamente não foi atitude bem aceita, tanto que em 1959 Markus Fierz publicou um trabalho propondo que a teoria de Jordan deveria ser construída através de um acoplamento escalar tensorial realizado não minimamente [14].

Em 1961 Brans e Dicke publicaram um trabalho cujo título: "Princípio de Mach e uma teoria Relativística da Gravitação"[7]. Hoje considera-se a gravitação de Brans e Dicke a mais fácil e a mais precisa dentre as inúmeras teorias escalares e multi escalares-tensoriais [13].

A teoria de Brans e Dicke é uma teoria escalar-tensorial assim como imaginava Jordan, no entanto o campo escalar não se acoplava a parte material apresentando acoplamento não-mínimo. O campo escalar proposto possuía a ordem de grandeza do inverso da constante gravitacional [6], sendo assim fazia o papel da suposta constante gravitacional variável de acordo com a intuição física de Dirac. Também com isso atendia o princípio de Mach uma vez que a medida de massa não mais seria absoluta e sim o resultado da interação com os corpos nas vizinhanças. Além de tudo isso a teoria de Brans e Dicke concordava muito bem com as previsões da teoria padrão de Einstein.

8.1 Analogia com as idéias de gravitação Newtoniana e uma generalização

A fim de obter a expressão que relaciona o campo escalar com a existencia de matéria e energia, realizaremos uma analogia, que para nossos fins se adequa perfeitamente. No entanto, é importante deixarmos claro que o potencial gravitacional é uma grandeza física distinta do campo escalar que media a interação gravitacional!

Seja a lei de Gauss para o campo gravitacional $\vec{E}_g$, $\oint \vec{E}_g d\vec{a} = Gm$, quando essa relacionada através do teorema da divergência e pela equivalência existente entre o gradiente do potencial escalar φ e o campo gravitacional, $\nabla\varphi = -\vec{E}_g$. Note que

$\int \vec{E}_g d\vec{A} = Gm = \int \nabla\vec{E}_g dV$. Como $m = \int \rho dV$, temos: $\int \vec{E}_g d\vec{A} = \int \nabla\vec{E}_g dV = G \int \rho dV \rightarrow \nabla\vec{E}_g = G\rho$, portanto: $\nabla^2\varphi = -G\rho$.

A equação resumida logo acima é a equação de Poisson para o potencial gravitacional newtoniano. No entanto, a expressão está escrita para um sistema de coordenadas planas tridimensionais. A extensão natural do Laplaciano ∇^2 para um espaço regido por uma métrica pseudo-Riemanniana, assim como a Relatividade Geral, é o D' Lambertiano em coordenadas curvilíneas $\square \equiv \nabla^k \partial_k$. Agora precisamos apenas encontrar um elemento correspondente à densidade de massa. Podemos encontrar a resposta se pensarmos da seguinte forma. O tensor de energia-momento é a grandeza que fornece toda e qualquer informação da existência e dinâmica da matéria existente em um determinado sistema. Sendo T_{00} a densidade de energia, assim dizendo o escalar associado ao tensor de energia-momento é a densidade de energia. Portanto, é coerente dizermos que o escalar do tensor de matéria se relacione à densidade de massa ρ de um determinado sistema. Sendo

adequada a comparação, em busca de uma expressão que seja covariante e dependente aos campos tensoriais-escalares, pode-se sugerir tal estrutura $\square\Phi = \lambda T_i^i$, onde Φ é um campo escalar que assim como a partícula associada ao campo gravitacional, media a interação gravitacional, e T_i^i é o traço do tensor de energia-momento. Sabemos que a expressão padrão definida pelos livros textos como por exemplo [28] é praticamente a mesma por nós deduzidas levando em conta um fator de ângulo esférico.

$$\square\Phi = 4\pi\lambda T_i^i. \quad (8.1)$$

8.2 Equações de Movimento por Primeiros Princípios

Assim como feito por Einstein em sua Relatividade Geral, pode-se também obter as equações de movimento para a Gravitação de Brans Dicke sem a minimização funcional. Para isso utilizaremos argumentos físicos indispensáveis e estruturas matemáticas escalares- tensoriais generalizadas, assim como parte é realizado em [28].

Consideremos a equação de Einstein na presença de matéria $R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R = -8\pi GT^{ik}$. Utilizando a hipótese de que a constante gravitacional não mais é um valor fixo (como desejaria Dirac) e sim um parâmetro que se comporta como o inverso de um campo escalar Φ (como esperaria Jordan). A equação de Einstein ficará como $R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R = -8\pi\frac{1}{\Phi}T^{ik}$ e quando reescrita assume a seguinte forma:

$$\left(R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R\right)\Phi = -8\pi T^{ik}. \quad (8.2)$$

Podemos pensar qual é a razão de variação dessa equação quando a mesma é definida em um sistema arbitrário de coordenadas, para isso, calculemos a derivação covariante da expressão:

$$\left(R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R\right)_{;i}\Phi + \left(R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R\right)\Phi_{;i} = -8\pi (T^{ik})_{;i} \quad (8.3)$$

Analizando essa expressão pode-se concluir que, como a matéria ou energia, não podem ser criadas, o tensor de energia momento é conservado. Portanto, sua derivação covariante deverá ser nula.

Sendo nula a derivação covariante do tensor de energia-momento, para preservar a igualdade, o lado esquerdo da equação também deverá ser nulo. De fato o tensor de Einstein $G^{ik} = R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R$, é nulo sob derivações covariantes, isso pode ser entendido

de duas maneiras, a primeira e a mais usual é que ela respeita a Identidade de Bianchi e geometricamente dizendo deve ser nula. Uma outra maneira de percebermos que a derivação covariante $(G^{ik})_{;i}$ é identicamente nula é imaginar as equações de Einstein para o vácuo: $R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R = 0$. Assumindo essa igualdade como verdadeira quando nessa realizarmos a derivada covariante: $(R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R)_{;i} = (G^{ik})_{;i} = 0$, encontra-se naturalmente que a derivação é obrigatoriamente nula, se não fosse, seria possível levantar problemas, um deles é que o Tensor de Einstein não seria nulo sobre derivação covariante sem que seja realizada alteração nesse conteúdo, em outras palavras alteraríamos a geometria sem alteração das fontes.

Percebendo que o tensor de Einstein é nulo sob derivações covariantes, a equação proposta com a inserção do campo escalar está incoerente, pois: $(R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R)\Phi_{;i} = 0$, ou seja, estamos assumindo, sem conhecer a dinâmica do campo Φ , que é necessariamente nula a sua derivação.

Se tivermos interessados na arbitrariedade de uma teoria, concluiremos que a equação está incompleta, coisa que pode ser corrigida com a inserção de um tensor pertinente à existência do campo escalar T_{Φ}^{ik} .

Por isso a equação mais coerente de acordo com os argumentos deverá ser:

$$\left(R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R\right)\Phi = -8\pi(T^{ik} + T_{\Phi}^{ik}). \quad (8.4)$$

Apesar da coerência e necessidade quanto a existência do tensor T_{Φ}^{ik} , ainda não conhecemos os seus termos. Sendo assim sugere-se a estrutura mais generalizada para um tensor de segunda ordem:

$$T_{\Phi k}^i = A(\Phi)\Phi^i\Phi_{,k} + B(\Phi)\delta_k^i\Phi_{,m}\Phi^{,m} + C(\Phi)\Phi_{;k}^i + \delta_k^i D(\Phi)\square\Phi \quad (8.5)$$

Se calcularmos a derivada covariante desse tensor generalizado, poderemos determiná-lo a menos de constantes, quando o compararmos com a equação de Einstein acoplada ao campo escalar.

Faremos as derivadas termo a termo:

$$\begin{aligned} [A(\Phi)\Phi^i\Phi_{,k}]_{;i} &= A'(\Phi)\Phi_{,i}\Phi^i\Phi_{,k} + A(\Phi)\Phi_{;i}^i + A(\Phi)\Phi^i\Phi_{,k;i}, \\ [B(\Phi)\delta_k^i\Phi_{,m}\Phi^{,m}]_{;i} &= \delta_k^i B'(\Phi)\Phi_{,i}\Phi_{,m}\Phi^{,m} + \delta_k^i B(\Phi)\Phi_{,m;i} + \delta_k^i B(\Phi)\Phi_{;i}^m\Phi_{,m}, \\ [C(\Phi)\Phi_{;k}^i]_{;i} &= C'(\Phi)\Phi_{,i}\Phi_{;k}^i + C(\Phi)\Phi_{;k;i}^i, \\ [D(\Phi)\square\Phi\delta_k^i]_{;i} &= \delta_k^i D'(\Phi)\Phi_{,i}\square\Phi + \delta_k^i D(\Phi)(\square\Phi)_{;i}. \end{aligned}$$

Tais derivadas quando agrupadas, fornecem encontra-se a seguinte forma para $(T_{\Phi k}^i)_{;i}$

$$(T_{\Phi k}^i)_{;i} = [A'(\Phi) + B'(\Phi)] \Phi_{,i} \Phi^i \Phi_{,k} + [A(\Phi) + D'(\Phi)] \Phi_{,k} \square \Phi + [A(\Phi) + 2B(\Phi) + C'(\Phi)] \Phi_{,i} \Phi^i_{;k} + C(\Phi) \Phi^i_{;k ;i} + D(\Phi) (\square \Phi)_{;i} .$$

Assumindo a validade da transformação

$\Phi_{,m} R_k^m = \Phi^i_{;i;k} - (\Phi^i_{,k})_{;i} = (\square \Phi)_{;k} - \square(\Phi_{,k})$, implica que a derivada covariante do D'alambertiano de um campo nem sempre será igual ao D'alambertiano da derivada do campo escalar, ou seja, a ordem das derivadas não mais comutam e sim são dependentes do tipo de geometria que está sendo empregada.

A equação de Einstein na forma mista $(R_k^i - \frac{1}{2} \delta_k^i R) \Phi_{,i} = -8\pi (T_{\Phi k}^i)_{;i}$, poderá ser reescrita em termos do tensor generalizado e em termos da identidade que relaciona o campo

$$\begin{aligned} (\square \Phi)_{;k} - \square(\Phi_{,k}) - \frac{1}{2} R \Phi_{,i} &= \\ &= -8\pi \{ [A' + B'] \Phi_{,i} \Phi^i \Phi_{,k} + [A + D'] \Phi_{,k} \square \Phi + [A + 2B + C'] \Phi_{,i} \Phi^i_{;k} + C(\Phi) \square(\Phi_{,i}) \} \\ &- 8\pi D(\Phi) (\square \Phi)_{;k} . \end{aligned}$$

Comparando os dois primeiros termos do lado esquerdo da equação com os dois últimos termos do lado direito, para garantir a igualdade, podemos afirmar que $-8\pi C = -1 \rightarrow C = \frac{1}{8\pi}$, $8\pi D = 1 \rightarrow D = -\frac{1}{8\pi}$.

Para encontrarmos os demais coeficientes precisaremos calcular o traço da equação de Jordan-Brans-Dicke, $R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R = -\frac{8\pi}{\Phi} (T_{M i}^i + T_{\Phi i}^i)$, que pode ser expresso por $R = \frac{8\pi}{\Phi} (T_{M i}^i + T_{\Phi i}^i)$ e inserirmos nessa os tensores de energia-momento correspondentes.

Como $\square \Phi = 4\pi \lambda T_{M i}^i \rightarrow T_{M i}^i = \frac{\square \Phi}{4\pi \lambda}$, e a contração do tensor de energia-momento relacionado ao campo escalar é dada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} T_{\Phi i}^i &= A(\Phi) \Phi^i \Phi_{,i} + B(\Phi) \delta_i^i \Phi_{,m} \Phi^m + C(\Phi) \Phi^i_{;i} + \delta_i^i D(\Phi) \square \Phi = \\ &= A(\Phi) \Phi^i \Phi_{,i} + 4B(\Phi) \Phi_{,m} \Phi^m + C(\Phi) \Phi^i_{;i} + 4D(\Phi) \square \Phi . \end{aligned}$$

Assim substituindo os dois resultados acima no traço da equação de Jordan-Brans-Dicke ficamos com

$$R = \frac{8\pi}{\Phi} \left(\frac{\square \Phi}{4\pi \lambda} + A(\Phi) \Phi^i \Phi_{,i} + 4B(\Phi) \Phi_{,m} \Phi^m + C(\Phi) \Phi^i_{;i} + 4D(\Phi) \square \Phi \right) . \quad (8.6)$$

Com o valor para o "Escalar de Curvatura" em termos do campo escalar e das suas derivadas poderemos determinar finalmente os parâmetros A, B quando compararmos com o restante dos termos ao lado direito da igualdade sugerida:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}R\Phi_{,i} &= -8\pi \left\{ [A' + B'] \Phi_{,i} \Phi^{,i} \Phi_{,k} + [A + D'] \Phi_{,k} \square \Phi + [A + 2B + C'] \Phi_{,i} \Phi^{,i}_{;k} \right\} , \\
-\frac{8\pi}{\Phi} \frac{1}{2} \Phi_{,k} \left(\frac{\square \Phi}{4\pi\lambda} + A(\Phi) \Phi_{,i} \Phi^{,i} + 4B(\Phi) \Phi_{,m} \Phi^{,m} + C(\Phi) \Phi^{,i}_{;i} + 4D(\Phi) \square \Phi \right) &= \\
&= -8\pi \left\{ [A' + B'] \Phi_{,i} \Phi^{,i} \Phi_{,k} + [A + D'] \Phi_{,k} \square \Phi + [A + 2B + C'] \Phi_{,i} \Phi^{,i}_{;k} \right\} .
\end{aligned}$$

Assim se agruparmos os termos em comum encontraremos

$$4\pi C \Phi_{,k} \frac{\square \Phi}{\Phi} + \frac{\square \Phi}{\lambda} \frac{\Phi_{,k}}{\Phi} + 16\pi D \Phi_{,k} \frac{\square \Phi}{\Phi} = 8\pi \left\{ [A + D'] \square \Phi \Phi_{,k} \right\} , \text{ que poderá ser reduzida}$$

a

$$\frac{4\pi C}{\Phi} + \frac{1}{\lambda\Phi} + \frac{16\pi}{\Phi} D = 8\pi [A + D'] .$$

A outra correlação é

$$\frac{4\pi}{\Phi} \Phi_{,k} (A + 4B) \Phi_{,i} \Phi^{,i} = 8\pi (A' + B') \Phi_{,k} \Phi_{,i} \Phi^{,i} , \text{ que pode ser reduzida a}$$

$$\frac{4\pi}{\Phi} (A + 4B) = 8\pi (A' + B') .$$

E o último termo $-8\pi [A + 2B + C'] \Phi_{,i} \Phi^{,i}_{;k}$ por não possuir correspondência, os coeficientes deverão satisfazer

$$A + 2B + C' = 0 .$$

Desenvolvendo a primeira relação tendo em vista como conhecidos os valores de C e D , temos

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi}{\Phi} \left(\frac{1}{8\pi} + \frac{1}{4\pi\lambda} - \frac{1}{2\pi} \right) &= 8\pi A , \\
\frac{-3\lambda+2}{2(8\pi\lambda)} &= A = \omega \frac{1}{8\pi\Phi} . \quad \text{onde} \quad \omega = \frac{1}{\lambda} - \frac{3}{2} .
\end{aligned}$$

Agora quando simplificamos a terceira equação, $A + 2B + C' = 0 \rightarrow B = -\omega \frac{1}{16\pi\Phi} .$

Ao encontrarmos esses parâmetros podemos escrever o tensor de Energia-Momento associado ao campo escalar $T_{\Phi k}^i$:

$$\begin{aligned}
T_{\Phi k}^i &= \frac{\omega}{8\pi} \frac{1}{\Phi} \Phi_{,i} \Phi_{,k} - \omega \frac{1}{16\pi} g_{ik} \frac{\Phi_{,m} \Phi^{,m}}{\Phi} + \frac{1}{8\pi} \Phi_{,i} \Phi_{;k} - \frac{1}{8\pi} g_{ik} \square \Phi = \\
&= \frac{1}{8\pi} \frac{1}{\Phi} \omega \left(\Phi_{,i} \Phi_{,k} - \frac{1}{2} g_{ik} \Phi_{,m} \Phi^{,m} \right) + \frac{1}{8\pi} (\Phi_{,i} \Phi_{;k} - g_{ik} \square \Phi) .
\end{aligned}$$

Tendo em vista essas relações é possível determinar a equação de movimento para o campo gravitacional na presença de fontes isto é, tensor de energia momento referente ao campo escalar mais tensor de energia momento para a matéria propriamente dita.

Assim, podemos encontrar por completo a equação de Jordan-Brans-Dick:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -\frac{8\pi}{\Phi} T_{M ik} - \frac{1}{\Phi^2} \omega \left(\Phi_{,i} \Phi_{,k} - \frac{1}{2} g_{ik} \Phi_{,m} \Phi^{,m} \right) - \frac{1}{\Phi} (\Phi_{,i} \Phi_{;k} - g_{ik} \square \Phi) . \quad (8.7)$$

8.3 Mínimo Variacional da Ação de Jordan-Brans-Dicke

Uma outra maneira de se obter as equações de movimento para o campo gravitacional é através da minimização do variacional da ação, para isso seja a ação de Brans-Dick para os campos na ausência de matéria dada de acordo com [7, 6].

$$S = \int (R\Phi - \omega \frac{\Phi^{,i}\Phi_{,i}}{\Phi}) \sqrt{-g} d\Omega \quad . \quad (8.8)$$

Calculando o variacional da expressão temos dois tipos de equações. Uma em termos da variação da métrica como de costume nos procedimentos de Einstein-Hilbert, e outra em termos da variação do campo escalar. Nota-se a presença em ambas as equações do acoplamento escalar tensorial exigido como hipótese inicial:

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int (R\Phi - \omega \frac{\Phi^{,i}\Phi_{,i}}{\Phi}) \sqrt{-g} d\Omega = \\ &= \int \left[\delta(R)\Phi + R\delta(\Phi) - \omega \delta\left(\frac{\Phi^{,i}\Phi_{,i}}{\Phi}\right) \right] \sqrt{-g} d\Omega + \int (R\Phi - \omega \frac{\Phi^{,i}\Phi_{,i}}{\Phi}) \delta(\sqrt{-g}) d\Omega . \end{aligned}$$

Lidaremos a priori com as respectivas variações de $\delta(\frac{\Phi^{,i}\Phi_{,i}}{\Phi})$.

$$\delta\left(\frac{\Phi^{,i}\Phi_{,i}}{\Phi}\right) = \delta\left(g^{ik} \frac{\Phi_{,k}\Phi_{,i}}{\Phi}\right) = \delta(g^{ik}) \frac{1}{\Phi} \Phi_{,k}\Phi_{,i} + g^{ik} \delta\left(\frac{1}{\Phi}\right) \Phi_{,k}\Phi_{,i} + g^{ik} \frac{1}{\Phi} \delta(\Phi_{,k}\Phi_{,i}) .$$

Das regras dos variacionais de uma função associamos

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{1}{\Phi}\right) &= -\frac{\delta\Phi}{\Phi^2} , \\ g^{ik} \frac{1}{\Phi} \delta(\Phi_{,k}\Phi_{,i}) &= g^{ik} \frac{1}{\Phi} [\delta(\Phi_{,k})\Phi_{,i} + \Phi_{,k}\delta(\Phi_{,i})] . \end{aligned}$$

Como os índices da segunda expressão acima estão contraídos podemos reduzi-los de forma:

$$g^{ik} \frac{1}{\Phi} [\delta(\Phi_{,k})\Phi_{,i} + \Phi_{,k}\delta(\Phi_{,i})] = 2 \frac{1}{\Phi} \Phi^{,i} \delta(\Phi_{,i}) .$$

Pode-se reescrever a expressão acima levando em conta uma generalização das regras de derivação

$$2 \frac{1}{\Phi} \Phi^{,i} \delta(\Phi_{,i}) = 2 [\ln \Phi]^{,i} (\delta\Phi)_{,i} = 2 [\ln \Phi]^{,i} \delta(\Phi)_{,i} .$$

Agora é necessário realizarmos uma transformação de derivadas totais, a fim de que em se tratando do processo de integração seja utilizado algum tipo de divergência:

$$2 [\ln \Phi]^{,i} \delta(\Phi)_{,i} = 2 \left([\ln \Phi]^{,i} \delta\Phi \right)_{;i} - 2 \left([\ln \Phi]^{,i} \right)_{;i} \delta\Phi ,$$

portanto o variacional da primeira parte da ação S será

$$\begin{aligned}\delta S_1 &= \int \left[R\delta(\Phi) - \omega\delta\left(\frac{\Phi^{,i}\Phi_{,i}}{\Phi}\right) \right] \sqrt{-g}d\Omega = \\ &= \int \left\{ R\delta\Phi + \omega\Phi^{,i}\Phi_{,i}\frac{\delta\Phi}{\Phi^2} - 2\omega\left([\ln\Phi]^{,i}\delta\Phi\right)_{;i} + 2\omega\left([\ln\Phi]^{,i}\right)_{;i}\delta\Phi - \omega\frac{\Phi_{,k}\Phi_{,i}}{\Phi}\delta g^{ik} \right\} \sqrt{-g}d\Omega.\end{aligned}$$

Tendo em vista o teorema da divergência de Gauss, a integral da divergência deverá se anular nas regiões de fronteira, ou seja

$$2\omega \int \left([\ln\Phi]^{,i}\delta\Phi\right)_{;i} \sqrt{-g}d\Omega = 0 ,$$

A dúvida que talvez poderia surgir nesse etapa é: Sabe-se que em termos de derivadas usuais, a integral da divergência é nula quando nos tratamos de situações em que o campo se anula no infinito (condições de contorno). Mas o que de fato nos garante que a integral da derivada covariante também deverá ser nula? Primeiramente podemos entender de um modo discursivo através da idéia básica que uma derivada covariante é de fato uma derivada usual "corrigida", e que não deixa de ser um processo de medida da taxa de variação de uma grandeza. Sendo assim somado com o fato das nossas soluções desejadas serem finitas e comportadas, concluímos ser nula.

Não satisfeitos podemos visualizar matematicamente a partir das seguintes considerações. Como $\partial^i [\ln\Phi] \delta\Phi$ se transforma como um B^i , teremos que $\left([\ln\Phi]^{,i}\delta\Phi\right)_{;i} \equiv B^i_{;i}$.

Uma vez que $B^i_{;i} = \frac{\partial}{\partial x^i} B^i + \Gamma^i_{ki} B^k$, e também sabendo que $\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2}g^{im} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} g_{mi} + \frac{\partial}{\partial x^i} g_{mk} - \frac{\partial}{\partial x^m} g_{ki} \right)$, ao analisarmos a expressão poderemos concluir que os dois últimos termos poderão ser simplificados se for levado em conta que o índice i poderá comutar com o índice m do termo $\frac{1}{2}g^{im} \frac{\partial}{\partial x^i} g_{mk} = \frac{1}{2}g^{mi} \frac{\partial}{\partial x^m} g_{ik}$, ou seja $\frac{1}{2}g^{im} \frac{\partial}{\partial x^i} g_{mk} - \frac{1}{2}g^{im} \frac{\partial}{\partial x^m} g_{ki} = \frac{1}{2}g^{mi} \frac{\partial}{\partial x^m} g_{ik} - \frac{1}{2}g^{im} \frac{\partial}{\partial x^m} g_{ki}$.

Portanto

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2}g^{im} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} g_{mi} + \frac{\partial}{\partial x^i} g_{mk} - \frac{\partial}{\partial x^m} g_{ki} \right) = \Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2}g^{im} \frac{\partial}{\partial x^k} g_{mi}. \quad (8.9)$$

O resultado acima é genérico no sentido que é válido para métricas não necessariamente diagonais. No entanto o resultado que pretendemos encontrar é tanto válido para uma métrica diagonal, quanto uma métrica completa. Por via de simplificação, analisa-se o caso de uma métrica do tipo diagonal para concluir um resultado que também é válido a uma métrica g^{ab} qualquer $\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2}g^{ii} \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ii}$.

Notemos que

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2}g^{ii} \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ii} = \frac{1}{2}g^{00} \frac{\partial}{\partial x^k} g_{00} + \frac{1}{2}g^{11} \frac{\partial}{\partial x^k} g_{11} + \frac{1}{2}g^{22} \frac{\partial}{\partial x^k} g_{22} + \frac{1}{2}g^{33} \frac{\partial}{\partial x^k} g_{33} .$$

Partindo do fato que $\frac{d}{dx^n} \ln(A) = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x^n} A$, então, $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^k} \ln g_{00} = \frac{1}{2} \frac{1}{g_{00}} \frac{\partial}{\partial x^k} g_{00}$ e $g_{00} g^{00} = 1$, concluí-se que

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^k} \ln g_{00} = \frac{1}{2} \frac{1}{g_{00}} \frac{\partial}{\partial x^k} g_{00} = \frac{1}{2} g^{00} \frac{\partial}{\partial x^k} g_{00} .$$

Desse modo a expressão Γ_{ki}^i poderá ser reduzida a

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ii} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^k} \ln g_{ii} \quad (8.10)$$

Sendo assim $B_{;i}^i = \frac{\partial}{\partial x^i} B^i + \Gamma_{ki}^i B^k = \frac{\partial}{\partial x^i} B^i + \frac{1}{2} B^k \frac{\partial}{\partial x^k} \ln g_{ii}$; levando em conta a arbitrariedade indicial consequente das contrações, $\frac{1}{2} B^k \frac{\partial}{\partial x^k} \ln g_{ii} \equiv \frac{1}{2} B^i \frac{\partial}{\partial x^i} \ln g_{ii}$, ou seja,

$B_{;i}^i = \frac{\partial}{\partial x^i} (B^i + B^i \ln \sqrt{g_{ii}})$, que por ser uma divergência e apresentar os limites adequados, deverá ser nula sobre integração. Dessa forma a ação do campo escalar ficará.

$$\delta S_1 = \int \left[R \delta(\Phi) - \omega \delta\left(\frac{\Phi_{,i} \Phi_{,i}}{\Phi}\right) \right] \sqrt{-g} d\Omega ,$$

$$\delta S_1 = \int \left\{ R \delta\Phi + \omega \Phi_{,i} \Phi_{,i} \frac{1}{\Phi^2} \delta\Phi + 2\omega \left(\left[(\ln \Phi)^{,i} \right]_{;i} \right) \delta\Phi - \omega \frac{\Phi_{,k} \Phi_{,i}}{\Phi} \delta g^{ik} \right\} \sqrt{-g} d\Omega =$$

$$\delta S_1 = \int \left\{ R + \omega \frac{1}{\Phi^2} \Phi_{,i} \Phi_{,i} + 2\omega \left([\ln \Phi]^{,i} \right)_{;i} \right\} \delta\Phi \sqrt{-g} d\Omega - \int \omega \frac{\Phi_{,k} \Phi_{,i}}{\Phi} \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega .$$

Sabendo que $\left([\ln \Phi]^{,i} \right)_{;i} = \left(\frac{\Phi_{,i}}{\Phi} \right)_{;i} = \frac{1}{\Phi} (\Phi_{,i})_{;i} - \frac{1}{\Phi^2} \Phi_{,i} \Phi_{,i}$, a ação se reduzirá a

$$S = \int \left\{ R + \omega \frac{1}{\Phi^2} \Phi_{,i} \Phi_{,i} + 2\omega \frac{1}{\Phi} (\Phi_{,i})_{;i} - 2\omega \frac{1}{\Phi^2} \Phi_{,i} \Phi_{,i} \right\} \delta\Phi \sqrt{-g} d\Omega - \int \omega \frac{\Phi_{,k} \Phi_{,i}}{\Phi} \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega =$$

$$= \int \left\{ R - \omega \frac{1}{\Phi^2} \Phi_{,i} \Phi_{,i} + 2\omega \frac{1}{\Phi} (\Phi_{,i})_{;i} \right\} \delta\Phi \sqrt{-g} d\Omega - \int \omega \frac{\Phi_{,k} \Phi_{,i}}{\Phi} \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega .$$

Além do termo acima encontrado que resulta no variacional do tensor métrico, a ação completa possui outros termos dependentes de δg^{ik} se agora estudarmos a segunda parte da ação, que resultará no variacional dos termos tensoriais:

$$S_2 = \int \Phi \delta(R) \sqrt{-g} d\Omega + \int \left(\Phi R - \omega \frac{1}{\Phi} \Phi_{,i} \Phi_{,i} \right) \delta(\sqrt{-g}) d\Omega .$$

A fim de reduzir a expressão calculamos o variacional do Escalar de Curvatura

$$\delta R = \delta(g^{ik} R_{ik}) = \delta(g^{ik}) R_{ik} + g^{ik} \delta(R_{ik}) .$$

É sabido que o tensor de Ricci definido em termos dos Símbolos de Christoffel são dados por

$$R_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{ik}^l - \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{il}^l + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l ,$$

e o cálculo do variacional do tensor de Ricci é

$$\delta R_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l} \delta \Gamma_{ik}^l - \frac{\partial}{\partial x^k} \delta \Gamma_{il}^l + \delta \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m + \Gamma_{ik}^l \delta \Gamma_{lm}^m - \delta \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l - \Gamma_{il}^m \delta \Gamma_{km}^l .$$

Em Relatividade Geral os ditos Símbolos de Christoffel não são tensores, pois transformam-se como os mesmos apenas em termos de primeira ordem

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{\partial x'^k}{\partial x^j} \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^n} \Gamma_{mk}^n + \frac{\partial x^l}{\partial x'^n} \frac{\partial^2 x'^n}{\partial x^j \partial x^i} .$$

No entanto o variacional dos Símbolos de Christoffel,

$$\delta \Gamma_{ij}^l = \frac{\partial x'^k}{\partial x^j} \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^n} \delta \Gamma_{mk}^n ,$$

são estruturas que se transformam como tensores. Se combinarmos esse fato com a estrutura geral das derivadas covariantes de um Tensor misto A_l^{ik} qualquer

$$(A_{jk}^i)_{;l} = \frac{\partial}{\partial x^l} A_{jk}^i + \Gamma_{ml}^i A_{jk}^m - \Gamma_{jl}^m A_{mk}^i - \Gamma_{kl}^m A_{jm}^i ,$$

Pode-se reduzir a expressão do variacional do tensor de Ricci δR_{ik} , reescrevendo-o sobre as seguintes contrações:

$$(\delta \Gamma_{ik}^l)_{;l} = \frac{\partial}{\partial x^l} \delta \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{ml}^l \delta \Gamma_{ik}^m - \Gamma_{il}^m \delta \Gamma_{mk}^l - \Gamma_{kl}^m \delta \Gamma_{im}^l ,$$

$$(\delta \Gamma_{il}^l)_{;k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \delta \Gamma_{il}^l + \Gamma_{km}^l \delta \Gamma_{il}^m - \Gamma_{ik}^m \delta \Gamma_{lm}^l - \Gamma_{lk}^m \delta \Gamma_{im}^l .$$

Sendo assim

$$\begin{aligned} (\delta \Gamma_{ik}^l)_{;l} - (\delta \Gamma_{il}^l)_{;k} &= \\ \frac{\partial}{\partial x^l} \delta \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{ml}^l \delta \Gamma_{ik}^m - \Gamma_{il}^m \delta \Gamma_{mk}^l - \Gamma_{kl}^m \delta \Gamma_{im}^l - \frac{\partial}{\partial x^k} \delta \Gamma_{il}^l - \Gamma_{km}^l \delta \Gamma_{il}^m + \Gamma_{ik}^m \delta \Gamma_{lm}^l + \Gamma_{lk}^m \delta \Gamma_{im}^l &= \\ = \frac{\partial}{\partial x^l} \delta \Gamma_{ik}^l - \frac{\partial}{\partial x^k} \delta \Gamma_{il}^l + \Gamma_{ml}^l \delta \Gamma_{ik}^m - \Gamma_{il}^m \delta \Gamma_{mk}^l - \Gamma_{km}^l \delta \Gamma_{il}^m + \Gamma_{ik}^m \delta \Gamma_{lm}^l . \end{aligned}$$

Essa expressão acima é equivalente ao variacional do tensor de Ricci, portanto

$$\delta R_{ik} = (\delta \Gamma_{ik}^l)_{;l} - (\delta \Gamma_{il}^l)_{;k} . \quad (8.11)$$

O variacional de Γ_{jk}^i é

$$\delta \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \delta (g^{im}) \left(\frac{\partial}{\partial x^k} g_{mj} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{mk} - \frac{\partial}{\partial x^m} g_{jk} \right) + \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \delta g_{mj} + \frac{\partial}{\partial x^j} \delta g_{mk} - \frac{\partial}{\partial x^m} \delta g_{jk} \right) ,$$

Analisando estruturalmente a expressão acima, o primeiro termo, pode ser escrito por meio da utilização de uma outra conexão

$$\Gamma_{jk}^n = \frac{1}{2} g^{nm} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} g_{mj} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{mk} - \frac{\partial}{\partial x^m} g_{jk} \right) ,$$

que deve estar devidamente contraída por meio de g_{na} :

$$\begin{aligned} g_{na} \Gamma_{jk}^n &= \frac{1}{2} g_{na} g^{nm} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} g_{mj} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{mk} - \frac{\partial}{\partial x^m} g_{jk} \right) = \frac{1}{2} \delta_a^m \left(\frac{\partial}{\partial x^k} g_{mj} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{mk} - \frac{\partial}{\partial x^m} g_{jk} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} g_{aj} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ak} - \frac{\partial}{\partial x^a} g_{jk} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} g_{mj} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{mk} - \frac{\partial}{\partial x^m} g_{jk} \right) . \end{aligned}$$

Sabendo disso, escrevemos o variacional dos Símbolos de Christoffel sobre essas considerações:

$$\delta \Gamma_{jk}^i = \delta (g^{im}) g_{na} \Gamma_{jk}^n + \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \delta g_{mj} + \frac{\partial}{\partial x^j} \delta g_{mk} - \frac{\partial}{\partial x^m} \delta g_{jk} \right) .$$

Pode-se, a critério de simplificação, analisar os termos $\delta (g^{im}) g_{na}$, em relação às transformações de coordenadas, de modo que

$$g^{im} g_{na} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^p} \frac{\partial x^m}{\partial x'^q} g'^{pq} \frac{\partial x'^r}{\partial x^n} \frac{\partial x'^s}{\partial x^a} g'_{rs} = \delta_n^i \delta_a^m \delta_p^r \delta_q^s g'^{pq} g'_{rs} = \delta_n^i \delta_a^m g'^{rs} g'_{rs} ,$$

$$\text{Sendo assim, } \delta (g^{im} g_{na}) = \delta g^{im} g_{na} + g^{im} \delta g_{na} = 0 \rightarrow \delta g^{im} g_{na} = -g^{im} \delta g_{na} .$$

Portanto com a utilização da forma acima definida, $\delta \Gamma_{jk}^i$ ficará

$$\delta \Gamma_{jk}^i = -g^{im} \delta g_{na} \Gamma_{jk}^n + \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \delta g_{mj} + \frac{\partial}{\partial x^j} \delta g_{mk} - \frac{\partial}{\partial x^m} \delta g_{jk} \right) .$$

Mais uma vez recorreremos às regras de transformação das derivadas covariantes de um tensor qualquer A_{ij} , a fim de estabelecer uma forma reduzida ao tensor $\delta \Gamma_{jk}^i$:

$$(A_{jk})_{;l} = \frac{\partial}{\partial x^l} g_{jk} - \Gamma_{lj}^m g_{mk} - \Gamma_{lk}^m g_{mj} ,$$

Seguindo a regra geral de diferenciação covariante, escrevemos as derivadas do variacional dos tensores métricos como

$$\begin{aligned} (\delta g_{mj})_{;k} &= \frac{\partial}{\partial x^k} \delta g_{mj} - \Gamma_{km}^n \delta g_{nj} - \Gamma_{kj}^n \delta g_{nm} , \\ (\delta g_{mk})_{;j} &= \frac{\partial}{\partial x^j} \delta g_{mk} - \Gamma_{jm}^n \delta g_{nk} - \Gamma_{jk}^n \delta g_{nm} , \\ (\delta g_{jk})_{;m} &= \frac{\partial}{\partial x^m} \delta g_{jk} - \Gamma_{mj}^n \delta g_{nk} - \Gamma_{mk}^n \delta g_{nj} . \end{aligned}$$

Ou seja, podemos reagrupar as expressões acima a fim de obtermos $\delta \Gamma_{jk}^i$

$$\begin{aligned} (\delta g_{mj})_{;k} + (\delta g_{mk})_{;j} - (\delta g_{jk})_{;m} &= \frac{\partial}{\partial x^k} \delta g_{mj} + \frac{\partial}{\partial x^j} \delta g_{mk} - \frac{\partial}{\partial x^m} \delta g_{jk} - \Gamma_{km}^n \delta g_{nj} - \Gamma_{jm}^n \delta g_{nk} + \\ \Gamma_{mj}^n \delta g_{nk} - \Gamma_{kj}^n \delta g_{nm} - \Gamma_{jk}^n \delta g_{nm} + \Gamma_{mk}^n \delta g_{nj} &= \\ = \frac{\partial}{\partial x^k} \delta g_{mj} + \frac{\partial}{\partial x^j} \delta g_{mk} - \frac{\partial}{\partial x^m} \delta g_{jk} - 2\Gamma_{kj}^n \delta g_{nm} . \end{aligned}$$

Quando a semi-soma das derivadas covariantes do tensor métrico são contraídas pela métrica g^{im} , encontramos $\frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \delta g_{mj} + \frac{\partial}{\partial x^j} \delta g_{mk} - \frac{\partial}{\partial x^m} \delta g_{jk} - 2\Gamma_{kj}^n \delta g_{nm} \right)$ que é exatamente o variacional de Γ_{jk}^i . Portanto

$$\delta\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{im} \left[(\delta g_{mj})_{;k} + (\delta g_{mk})_{;j} - (\delta g_{jk})_{;m} \right] . \quad (8.12)$$

Finalmente podemos escrever o variacional do tensor de Ricci em termos das derivadas covariantes do variacional do tensor métrico g_{ab} , já que o variacional do Tensor de Ricci está escrito em termos do variacional do Símbolo de Christoffel e esse por sua vez é diretamente relacionado com δg_{ab} .

Assim, se $\delta R_{ik} = (\delta\Gamma_{ik}^l)_{;l} - (\delta\Gamma_{il}^l)_{;k}$ e $\delta\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{im} \left[(\delta g_{mj})_{;k} + (\delta g_{mk})_{;j} - (\delta g_{jk})_{;m} \right]$, são válidos, conclui-se

$$\begin{aligned} \delta R_{ik} &= \left(\frac{1}{2}g^{lm} \left[(\delta g_{mi})_{;k} + (\delta g_{mk})_{;i} - (\delta g_{ik})_{;m} \right] \right)_{;l} - \left(\frac{1}{2}g^{lm} \left[(\delta g_{mi})_{;l} + (\delta g_{ml})_{;i} - (\delta g_{il})_{;m} \right] \right)_{;k} = \\ &= \frac{1}{2}g^{lm} \left[(\delta g_{mi})_{;k;l} + (\delta g_{mk})_{;i;l} - (\delta g_{ik})_{;m;l} - (\delta g_{mi})_{;l;k} - (\delta g_{ml})_{;i;k} + (\delta g_{il})_{;m;k} \right] . \end{aligned}$$

Logo

$$\delta R_{ik} = \frac{1}{2}g^{lm} \left[(\delta g_{mk})_{;i;l} - (\delta g_{ik})_{;m;l} - (\delta g_{ml})_{;i;k} + (\delta g_{il})_{;m;k} \right] . \quad (8.13)$$

Com esse resultado, o primeiro termo relacionado com a variação da segunda ação, $\int \Phi \delta(R) \sqrt{-g} d\Omega$, será

$$\begin{aligned} \delta S_2 &= \int \Phi \delta(R_{ik} g^{ik}) \sqrt{-g} d\Omega = \int \Phi (\delta R_{ik} g^{ik} + R_{ik} \delta g^{ik}) \sqrt{-g} d\Omega = \\ &= \int \Phi \left(\frac{1}{2}g^{lm} \left[(\delta g_{mk})_{;i;l} - (\delta g_{ik})_{;m;l} - (\delta g_{ml})_{;i;k} + (\delta g_{il})_{;m;k} \right] g^{ik} \right) \sqrt{-g} d\Omega + \int \Phi R_{ik} \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega . \end{aligned}$$

Primeiramente nos atentaremos ao primeiro termo apresentado acima:

$$\int \Phi \left(\frac{1}{2}g^{lm} \left[(\delta g_{mk})_{;i;l} - (\delta g_{ik})_{;m;l} - (\delta g_{ml})_{;i;k} + (\delta g_{il})_{;m;k} \right] g^{ik} \right) \sqrt{-g} d\Omega .$$

Analisando o argumento da expressão:

$$\frac{1}{2}g^{lm} g^{ik} \left[(\delta g_{mk})_{;i;l} - (\delta g_{ik})_{;m;l} - (\delta g_{ml})_{;i;k} + (\delta g_{il})_{;m;k} \right] ,$$

e utilizando do fato que: $g^{ik} \delta g_{mk} = -g_{mk} \delta g^{ik}$ para quaisquer índices, teremos

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}g^{lm} g_{mk} (\delta g^{ik})_{;i;l} + \frac{1}{2}g^{lm} g_{ik} (\delta g^{ik})_{;m;l} + \frac{1}{2}g^{ik} g_{ml} (\delta g^{ml})_{;i;k} - \frac{1}{2}g^{ik} g_{il} (\delta g^{ml})_{;m;k} = \\ &= -\frac{1}{2}(\delta g^{il})_{;i;l} + \frac{1}{2}(g_{ik} \delta g^{ik})_{;l}^l + \frac{1}{2}(g_{ml} \delta g^{ml})_{;k}^k - \frac{1}{2}(\delta g^{mk})_{;m;k} . \end{aligned}$$

Como esses termos acima definidos são componentes e estão sendo somadas, se utilizarmos o fato que as expressões estão devidamente contraídas:

$$-\frac{1}{2}(\delta g^{il})_{;i;l} - \frac{1}{2}(\delta g^{mk})_{;m;k} = -(\delta g^{ab})_{;a;b} \text{ e que}$$

$$\frac{1}{2} (g_{ik} \delta g^{ik})_{;l}^{;l} + \frac{1}{2} (g_{ml} \delta g^{ml})_{;k}^{;k} = (g_{pq} \delta g^{pq})_{;q}^{;q} ,$$

onde a, b, p, q foram utilizados para mostrar a conveniência imposta pelos índices mudos. Portanto o argumento da expressão simplificado será

$$(g_{ik} \delta g^{ik})_{;l}^{;l} - (\delta g^{il})_{;i;l} .$$

Tendo isso em vista, concluimos que

$$\begin{aligned} & \int \Phi \left(\frac{1}{2} g^{lm} \left[(\delta g_{mk})_{;i;l} - (\delta g_{ik})_{;m;l} - (\delta g_{ml})_{;i;k} + (\delta g_{il})_{;m;k} \right] g^{ik} \right) \sqrt{-g} d\Omega = \\ & = \int \Phi \left[(g_{ik} \delta g^{ik})_{;l}^{;l} - (\delta g^{il})_{;i;l} \right] \sqrt{-g} d\Omega = \int \Phi \left[(g_{ik} \delta g^{ik})_{;l}^{;l} - (\delta g^{il})_{;i;l} \right] \sqrt{-g} d\Omega . \end{aligned}$$

Se compararmos os termos acima com os de uma integração por partes

$$\begin{aligned} & \int \Phi \left[(g_{ik} \delta g^{ik})_{;l}^{;l} - (\delta g^{il})_{;i;l} \right] \sqrt{-g} d\Omega = \\ & = \Phi \left[(g_{ik} \delta g^{ik})_{;l}^{;l} - (\delta g^{il})_{;i;l} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int \left[(g_{ik} \delta g^{ik})_{;l}^{;l} - (\delta g^{il})_{;i;l} \right] \Phi_{,l} \sqrt{-g} d\Omega , \end{aligned}$$

e considerarmos que tanto o campo escalar quanto o tensor métrico sejam comportados de forma a se anularem nas regiões de fronteira, teremos

$$\begin{aligned} & \int \Phi \left[(g_{ik} \delta g^{ik})_{;l}^{;l} - (\delta g^{il})_{;i;l} \right] \sqrt{-g} d\Omega = - \int \left[(g_{ik} \delta g^{ik})_{;l}^{;l} - (\delta g^{il})_{;i;l} \right] \Phi_{,l} \sqrt{-g} d\Omega = \\ & = - \int \left[(g_{ik} \delta g^{ik})_{;l}^{;l} \right] \Phi_{,l} \sqrt{-g} d\Omega + \int \left[(\delta g^{il})_{;i;l} \right] \Phi_{,l} \sqrt{-g} d\Omega . \end{aligned}$$

Agora, se calcularmos essas novas duas integrações por partes, também levando em conta as condições de borda acima discutidas, encontramos

$$\begin{aligned} & \int \left[(g_{ik} \delta g^{ik})_{;l}^{;l} \right] \Phi_{,l} \sqrt{-g} d\Omega = - \int \left[(\Phi_{,l})^{;l} \right] g_{ik} \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega , \\ & \text{e } \int \left[(\delta g^{il})_{;i;l} \right] \Phi_{,l} \sqrt{-g} d\Omega = - \int \left[(\Phi_{,l})_{;i}^{;i} \right] \delta g^{il} \sqrt{-g} d\Omega . \end{aligned}$$

Organizando os termos

$$\begin{aligned} & \int \Phi \left[(g_{ik} \delta g^{ik})_{;l}^{;l} - (\delta g^{il})_{;i;l} \right] \sqrt{-g} d\Omega = \int (\Phi_{,l})^{;l} g_{ik} \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega - \int \Phi_{,l;i} \delta g^{il} \sqrt{-g} d\Omega = \\ & = \int \left(g_{ik} \Phi_{,l}^{;l} - \Phi_{,l;i} \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega . \end{aligned}$$

Portanto

$$\int \Phi (g^{ik} \delta R_{ik} + \delta g^{ik} R_{ik}) \sqrt{-g} d\Omega = \int \left(g_{ik} \Phi_{,l}^{;l} - \Phi_{,k;i} + \Phi R_{ik} \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega . \quad (8.14)$$

Por fim, resta conhecer o valor de $\delta\sqrt{-g}$, para completar os correspondentes termos de δS_R . Mas vimos que

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{\sqrt{-g}g_{ik}\delta g^{ik}}{2} ,$$

desse modo

$$\begin{aligned} \int (\Phi R - \omega \frac{1}{\Phi} \Phi^{,i} \Phi_{,i}) \delta(\sqrt{-g}) d\Omega &= \int [\Phi R - \omega \frac{1}{\Phi} \Phi^{,i} \Phi_{,i}] \left(-\frac{\sqrt{-g}g_{ik}\delta g^{ik}}{2} \right) d\Omega = \\ &= \int -\frac{1}{2}g_{ik} [\Phi R - \omega \frac{1}{\Phi} \Phi^{,i} \Phi_{,i}] \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega . \end{aligned}$$

Com esses resultados pode-se escrever por completo δS_2 :

$$\begin{aligned} \delta S_2 &= \int \Phi \delta(R) \sqrt{-g} d\Omega + \int (\Phi R - \omega \frac{1}{\Phi} \Phi^{,i} \Phi_{,i}) \delta(\sqrt{-g}) d\Omega = \\ &= \int \left(g_{ik} \Phi_{,i}^{,l} - \Phi_{,k;i} - \frac{1}{2}g_{ik} [\Phi R - \omega \frac{1}{\Phi} \Phi^{,i} \Phi_{,i}] + \Phi R_{ik} \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega . \end{aligned}$$

Finalmente unindo os variacionais $\delta\Phi$ e δg^{ik} temos

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int \left(\Phi R - \omega \frac{\Phi^{,i} \Phi_{,i}}{\Phi} \right) \sqrt{-g} d\Omega = \\ &= \int \left(g_{ik} \Phi_{,i}^{,l} - \Phi_{,k;i} - \frac{1}{2}g_{ik} [\Phi R - \omega \frac{1}{\Phi} \Phi^{,i} \Phi_{,i}] - \omega \frac{\Phi_{,k} \Phi_{,i}}{\Phi} + \Phi R_{ik} \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega \\ &+ \int \left\{ R - \omega \frac{1}{\Phi^2} \Phi^{,i} \Phi_{,i} + 2\omega \frac{1}{\Phi} (\Phi^{,i})_{;i} \right\} \delta\Phi \sqrt{-g} d\Omega . \end{aligned}$$

Considerando válida para todo e qualquer $\delta\Phi$ e δg^{ik} , para que a ação possua valor nulo, devemos exigir que

$$g_{ik} \Phi_{,i}^{,l} - \Phi_{,k;i} - \frac{1}{2}g_{ik} \left[\Phi R - \omega \frac{1}{\Phi} \Phi^{,i} \Phi_{,i} \right] - \omega \frac{\Phi_{,k} \Phi_{,i}}{\Phi} + \Phi R_{ik} = 0 , \quad (8.15)$$

$$R - \omega \frac{1}{\Phi^2} \Phi^{,i} \Phi_{,i} + 2\omega \frac{1}{\Phi} (\Phi^{,i})_{;i} = 0 , \quad (8.16)$$

onde $(\Phi^{,i})_{;i}$ é o operador D' Alembertiano em coordenadas Curvelíneas

$$\square\Phi = \Phi^{,i}_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g} \Phi^{,i}) .$$

Se rearranjarmos a expressão que anula o variacional para todo δg^{ik} , encontramos

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{1}{\Phi} \left(\Phi_{,k;i} - g_{ik} \Phi_{,i}^{,l} \right) + \frac{\omega}{\Phi^2} \left(\Phi_{,k} \Phi_{,i} - \frac{1}{2}g_{ik} \Phi^{,i} \Phi_{,i} \right) . \quad (8.17)$$

É importante notar que a equação acima, a parte à esquerda, corresponde exatamente com a Equação de Einstein homogênea. No entanto, a parte à direita difere com a existência de termos dependentes do campo escalar. Em Relatividade Geral o espaço-tempo era devidamente moldado pela existência e dinâmica das fontes. Agora a equação de Brans-Dicke estabelece que o espaço tempo possui mais uma dependência correspondente a dinâmica de Φ .

8.4 Transformações Conformes

Considere dois vetores X e Y pertencentes a um mesmo espaço tempo que é regido por uma métrica g_{ik} . Os vetores pertencentes ao espaço serão transformados da seguinte maneira: $X^i = g^{ik} X_k$ e $Y^p = g^{pq} Y_q$.

Para calcular o valor do módulo ao quadrado do vetor X realizamos os procedimentos:

$X^i X_i = (g^{ik} X_k) (g_{mi} X^m) = \delta_m^k X_k X^m = X_m X^m = X^2 = g_{km} X^k X^m$, resultado análogo é empregado para obter o módulo de Y ao quadrado.

O ângulo entre os vetores X e Y podem ser determinados por meio da simples relação: $X^i Y_i = |X| |Y| \cos(X, Y)$ que sob nosso contexto será o valor que satisfaz

$$g_{pq} X^p Y^q = |g_{km} X^k X^m|^{\frac{1}{2}} |g_{ab} Y^a Y^b|^{\frac{1}{2}} \cos(X, Y) . \quad (8.18)$$

Agora se por conveniência desejarmos relacionar esses vetores definidos no espaço-tempo regido pela métrica g_{ik} com a sua representação em um outro espaço-tempo regido por uma métrica distinta $\tilde{g}_{ik}$, deveremos usar utilizar um artifício matemático que relacione de maneira unívoca cada ponto do espaço correspondente à métrica g_{ik} com cada ponto do espaço relativo à métrica $\tilde{g}_{ik}$.

Desejando também preservar a assinatura das métricas relacionadas, a estrutura geral da transformação deverá ser algo do tipo:

$$g_{ik} \rightarrow \Omega^2 \tilde{g}_{ik} . \quad (8.19)$$

Como $g_{ik} g^{im} = \delta_k^m$, a representação contravariante para o tensor métrico será $g^{ik} \rightarrow \Omega^{-2} \tilde{g}^{ik}$.

Aplicando essa transformação nos vetores X e Y definidos acima e novamente calculando a correspondência angular entre ambos teremos:

$$X^i = g^{ik} X_k = \Omega^{-2} \tilde{g}^{ik} X_k \quad \text{e} \quad Y^p = \Omega^{-2} \tilde{g}^{pq} Y_q ,$$

O produto $X^p Y_p$ será $(\Omega^{-2} \tilde{g}^{pk} X_k) (\Omega^2 \tilde{g}_{pq} Y^q) = \tilde{g}_{ab} X^a Y^b$. O módulo dos vetores transformados serão:

$X^2 = X^a X_a = (\Omega^{-2} \tilde{g}^{am} X_m) (\Omega^2 \tilde{g}_{ak} X^k) = \tilde{g}_{jr} X^j X^r$ e de modo analogo $Y^2 = Y^p Y_p = \tilde{g}_{mn} Y^m Y^n$. Portanto o ângulo entre os vetores associados ao espaço regido por $\tilde{g}_{ik}$ satisfará a relação

$$\tilde{g}_{ab} X^a Y^b = |\tilde{g}_{jr} X^j X^r|^{\frac{1}{2}} |\tilde{g}_{mn} Y^m Y^n|^{\frac{1}{2}} \cos(X, Y) . \quad (8.20)$$

Essa expressão relaciona o ângulo entre os vetores no novo espaço. Se compararmos o cosseno do ângulo entre os vetores definidos no antigo e no novo espaço, perceberemos que são equivalentes. Isso nos possibilita afirmar também que o ângulo entre os vetores foi preservado após a transformação. Esse tipo de transformação é denominada de invariante conforme, pois os objetos ao se transformarem preservaram por exemplo suas características matemáticas, assim como no caso o ângulo inicial entre X e Y .

O uso das transformações conformes recentemente vem sendo muito empregada principalmente no estudo das teorias alternativas à Relatividade Geral, nas novas propostas de modelos cosmológicos, e em novas propostas de teorias gravitacionais em que o princípio de equivalência é violado [13].

Um fato extremamente importante para discutir é que as transformações conformes não são apenas mudanças de coordenadas ou apenas mudanças de unidades, pois teorias conformalmente relacionadas apesar de matematicamente inambíguas podem muitas vezes serem fisicamente diferentes. Se assumirmos a veracidade dos trabalhos a pouco citados concluiremos que as transformações conformes não serão de fato mudanças de coordenadas ou de unidades. Isso pode ser entendido fisicamente, pois, a transformação conforme empregada foi realizada na própria métrica. É sabido que quem define a métrica é a natureza dos campos envolvidos, dessa forma, alterando a métrica estaremos alterando a natureza do problema em questão e poderemos então estar lidando com situações físicas que podem ser complementemente distintas.

Levando em conta que sistemas fisicamente relacionados por transformações conformes podem levar a físicas diferentes é natural esperar então que alguns objetos matemáticos que nos permitem traduzir os significados físicos da teoria sejam também alterados. Por exemplo os objetos tensoriais, símbolo de Christoffel, tensor de Ricci e escalar de curvatura são alterados por transformações conformes.

Essas importantes diferenças serão analisadas nos capítulos a seguir e poderão ficar mais evidentes.

8.4.1 Aplicação das Transformações Conformes

Seja a Ação de Jordan-Brans-Dicke [7]

$$S_{JBD} = \int \left(\Phi R - \frac{\omega}{\Phi} \Phi^i \Phi_{,i} \right) \sqrt{-g} d\Omega .$$

como anteriormente verificamos, essa ação fornece as equações de movimento para o campo gravitacional mediado pela métrica g_{ik} e por um campo Φ de origem escalar.

Deseja-se agora reescrever a ação de modo que desacoplemos o escalar de curvatura com o campo Φ , pois se assim satisfeito, as equações obtidas serão mais simplificadas e terão estruturas matemáticas mais semelhantes com as da Relatividade Geral.

O sistema definido pela métrica g_{ik} e pelo campo escalar Φ é denominado Referencial de Jordan. A transformação que leva a métrica g_{ik} para $\tilde{g}_{ik}$ e o campo Φ para $\tilde{\Phi}$ será a transformação conforme [26, 13]. A nova métrica $\tilde{g}_{ik}$ e o novo campo $\tilde{\Phi}$ definirão um novo referencial cuja literatura denomina de Referencial de Einstein [23]. Sendo assim utilizaremos a princípio um parâmetro conforme arbitrário Ω^2 de forma a não alterarmos o sinal da métrica, mas que associe cada objeto definido através do Referencial de Jordan com o seu equivalente no Referencial de Einstein.

A fim de levarmos a ação acima definida no Referencial de Jordan para o Referencial de Einstein, necessitamos encontrar a transformação conforme específica Ω^2 para o tensor de Ricci R_{ik} e consequentemente conheceremos o escalar de Curvatura R . É necessário também conhecermos a transformação para a raiz do determinante $\sqrt{-g}$ que é o Jacobiano para as transformações em espaços curvos. Iniciemos nossa proposta.

É sabido que o tensor de Ricci é transformado como

$$R_{ik} = \Gamma_{ik,l}^l - \Gamma_{lk,i}^l + \Gamma_{ik}^j \Gamma_{jl}^l - \Gamma_{lk}^j \Gamma_{ji}^l .$$

Sugere-se então a transformação conforme generalizada [13]:

$$\tilde{g}_{ik} = \Omega^{-2} g_{ik} \quad \text{e} \quad \tilde{g}^{ik} = \Omega^{+2} g^{ik} ,$$

Para conhecer a transformação conforme do Tensor de Ricci é preciso conhecer a transformação dos símbolos de Christoffel. Os mesmos são definidos como:

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{da} (g_{bd,c} + g_{cd,b} - g_{bc,d}) .$$

Para obter a transformação conforme da conexão é substituído no mesmo a nova métrica reescalada

$$\begin{aligned} \Gamma_{ik}^l &= \frac{1}{2} \Omega^{-2} \tilde{g}^{lm} \left[\left(\Omega^{+2} \tilde{g}_{mi} \right)_{,k} + \left(\Omega^{+2} \tilde{g}_{mk} \right)_{,i} - \left(\Omega^{+2} \tilde{g}_{ik} \right)_{,m} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \tilde{g}^{lm} \left(\tilde{g}_{mi,k} + \tilde{g}_{mk,i} - \tilde{g}_{ik,m} \right) + \Omega^{-1} \left(\Omega_{,k} \delta_i^l + \Omega_{,i} \delta_k^l - \Omega^l_{,l} \tilde{g}_{ik} \right) . \end{aligned}$$

Portanto

$$\Gamma_{ik}^l = \tilde{\Gamma}_{ik}^l + \Omega^{-1} \left(\Omega_{,k} \delta_i^l + \Omega_{,i} \delta_k^l - \Omega^{,l} \tilde{g}_{ik} \right). \quad (8.21)$$

É simples perceber que os Símbolos de Christoffel não são invariantes por transformações conformes arbitrárias. São invariantes apenas quando Ω for uma constante diferente de zero.

Calcula-se agora $\Gamma_{ik,l}^l$:

$$\Gamma_{ik,l}^l = \tilde{\Gamma}_{ik,l}^l - \Omega^{-2} \left(2\Omega_{,k} \Omega_{,i} - \tilde{g}_{ik} \Omega^{,l} \Omega_{,l} \right) + \Omega^{-1} \left(2\Omega_{,i;k} - \tilde{g}_{ik} \Omega_{,l}^l - \Omega^{,l} \tilde{g}_{ik,l} \right),$$

Seguindo os mesmos procedimentos encontram-se Γ_{lk}^l e $\Gamma_{lk,i}^l$.

$$\Gamma_{lk}^l = \tilde{\Gamma}_{lk}^l + 4\Omega_{,k} \Omega^{-1}, \quad \Gamma_{lk,i}^l = \tilde{\Gamma}_{lk,i}^l - \Omega^{-2} \left(2\Omega_{,k} \Omega_{,i} + \tilde{g}_{ik} \Omega^{,l} \Omega_{,l} \right) + 4\Omega^{-1} \Omega_{,k;i}.$$

Agora pode-se conhecer o resultado dos dois primeiros termos do tensor de Ricci:

$$\Gamma_{ik,l}^l - \Gamma_{lk,i}^l = \tilde{\Gamma}_{ik,l}^l - \tilde{\Gamma}_{lk,i}^l + \Omega^{-2} \left(2\Omega_{,k} \Omega_{,i} + \tilde{g}_{ik} \Omega^{,l} \Omega_{,l} \right) + \Omega^{-1} \left(-2\Omega_{,i;k} - \tilde{g}_{ik} \Omega_{,l}^l - \Omega^{,l} \tilde{g}_{ik,l} \right).$$

Resta-nos conhecer a transformação dos dois últimos termos do tensor de Ricci, $\Gamma_{ik}^j \Gamma_{jl}^l$ e $\Gamma_{lk}^j \Gamma_{ji}^l$. Para isso encontramos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ik}^j &= \tilde{\Gamma}_{ik}^j + \Omega^{-1} \left(\delta_i^j \Omega_{,k} + \delta_k^j \Omega_{,i} - \Omega^{,j} \tilde{g}_{ik} \right), \quad \Gamma_{jl}^l = \tilde{\Gamma}_{jl}^l + 4\Omega^{-1} \Omega_{,j} \\ \Gamma_{lk}^j &= \tilde{\Gamma}_{lk}^j + \Omega^{-1} \left(\delta_l^j \Omega_{,k} + \delta_k^j \Omega_{,l} - \Omega^{,j} \tilde{g}_{lk} \right), \quad \Gamma_{ji}^l = \tilde{\Gamma}_{ji}^l + \Omega^{-1} \left(\delta_j^l \Omega_{,i} + \delta_i^l \Omega_{,j} - \Omega^{,l} \tilde{g}_{ji} \right). \end{aligned}$$

Os produtos das conexões serão

$$\begin{aligned} \Gamma_{ik}^j \Gamma_{jl}^l &= \tilde{\Gamma}_{ik}^j \tilde{\Gamma}_{jl}^l + \Omega^{-1} \left(4\Omega_{,j} \tilde{\Gamma}_{ik}^j + \Omega_{,k} \tilde{\Gamma}_{il}^l + \Omega_{,i} \tilde{\Gamma}_{kl}^l - \tilde{g}_{ik} \Omega^{,j} \tilde{\Gamma}_{jl}^l \right) \\ &+ \Omega^{-2} \left(8\Omega_{,k} \Omega_{,i} - 4\tilde{g}_{ik} \Omega_{,j} \Omega^{,j} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{lk}^j \Gamma_{ji}^l &= \tilde{\Gamma}_{jl}^l \tilde{\Gamma}_{ji}^l + \Omega^{-1} \left(3\Omega_{,j} \tilde{\Gamma}_{ik}^j - \tilde{g}_{ik} \Omega^{,j} \tilde{\Gamma}_{jl}^l - \Omega_{,l} \tilde{\Gamma}_{ik}^l + \Omega^{,j} \tilde{g}_{lk} \tilde{\Gamma}_{ji}^l + \Omega^{,l} g_{ij} \tilde{\Gamma}_{lk}^j \right) \\ &+ \Omega^{-2} \left(2\Omega_{,i} \Omega_{,k} - 2\tilde{g}_{ik} \Omega_{,l} \Omega^{,l} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Assim } \Gamma_{ik}^j \Gamma_{jl}^l - \Gamma_{lk}^j \Gamma_{ji}^l &= \\ &= \tilde{\Gamma}_{ik}^j \tilde{\Gamma}_{jl}^l - \tilde{\Gamma}_{lk}^j \tilde{\Gamma}_{ji}^l + \Omega^{-1} \left(3\Omega_{,j} \tilde{\Gamma}_{ik}^j - \tilde{g}_{ik} \Omega^{,j} \tilde{\Gamma}_{jl}^l - \Omega_{,l} \tilde{\Gamma}_{ik}^l + \Omega^{,j} \tilde{g}_{lk} \tilde{\Gamma}_{ji}^l + \Omega^{,l} \tilde{g}_{ij} \tilde{\Gamma}_{lk}^j \right) \\ &+ \Omega^{-2} \left(2\Omega_{,i} \Omega_{,k} - 2\tilde{g}_{ik} \Omega_{,l} \Omega^{,l} \right). \end{aligned}$$

Reunindo os resultado encontrados anteriormente, encontramos a transformação conforme para o Tensor de Ricci:

$$\begin{aligned} R_{ik} &= \tilde{R}_{ik} + \Omega^{-2} \left(4\Omega_{,i} \Omega_{,k} - \tilde{g}_{ik} \Omega_{,l} \Omega^{,l} \right) \\ &+ \Omega^{-1} \left(-2\Omega_{,i;k} - \tilde{g}_{ik} \Omega_{,l}^l - \Omega^{,l} \tilde{g}_{ik,l} + 3\Omega_{,j} \tilde{\Gamma}_{ik}^j - \tilde{g}_{ik} \Omega^{,j} \tilde{\Gamma}_{jl}^l - \Omega_{,l} \tilde{\Gamma}_{ik}^l + \Omega^{,j} \tilde{g}_{lk} \tilde{\Gamma}_{ji}^l + \Omega^{,l} \tilde{g}_{ij} \tilde{\Gamma}_{lk}^j \right). \end{aligned}$$

É muito importante notar que a expressão acima pode ser simplificada um pouco mais já que possui uma derivada covariante do tensor métrico que em geometrias Riemannianas deverá ser nulo. Os termos $-\Omega^l \tilde{g}_{ik,l} + \Omega^j \tilde{g}_{lk} \tilde{\Gamma}_{ji}^l + \Omega^l \tilde{g}_{ij} \tilde{\Gamma}_{lk}^j$ podem ser reduzidos a zero, uma vez que

$$-\Omega^l \left(\tilde{g}_{ik,l} - \tilde{g}_{ij} \tilde{\Gamma}_{lk}^j - \tilde{g}_{jk} \tilde{\Gamma}_{li}^j \right) \equiv -\Omega^l \tilde{g}_{ik;l} = 0, \text{ dessa forma encontra-se:}$$

$$R_{ik} = \tilde{R}_{ik} + \Omega^{-2} \left(4\Omega_{,i} \Omega_{,k} - \tilde{g}_{ik} \Omega_{,l} \Omega^l \right) + \Omega^{-1} \left(-2\Omega_{,i;k} - \tilde{g}_{ik} \Omega^l_{,l} + 2\Omega_{,j} \tilde{\Gamma}_{ik}^j - \tilde{g}_{ik} \Omega^j \tilde{\Gamma}_{jl}^l \right),$$

que corresponde exatamente ao valor expandido definido pelo artigo [13].

Uma representação para transformação conforme realizada no Escalar de Curvatura pode ser expressa como [13]:

$$R = \Omega^2 \tilde{R} + \frac{1}{\Omega} 6\Omega^i_{;i}, \quad (8.22)$$

Se sugerirmos uma transformação conforme tal que satisfaça nossa idéia inicial, ou seja, desacople na ação de Jordan-Brans-Dicke a parte tensorial da escalar, teremos uma ação mais simples no ponto de vista matemático já que as equações de movimento serão as de Einstein corrigidas com alguns termos de dinâmica do campo escalar. Visando esse objetivo é sugerida a transformação tal que $\Omega^2 = \Phi = e^{\alpha\tilde{\Phi}}$, de acordo com [13, 5, 22]. No entanto se utilizarmos a transformação $\tilde{g}_{ik} = \Phi^{2\alpha} g_{ik}$ e $\tilde{\Phi} = \Phi^{1-2\alpha}$ a ação de Brans Dicke será invariante conforme desde que o parâmetro α seja diferente de $\frac{1}{2}$ [22].

Realizando a transformação conforme que desacopla a parte geométrica da escalar, o tensor métrico e o campo escalar serão escritos da seguinte forma:

$$g_{ik} = e^{-\alpha\tilde{\Phi}} \tilde{g}_{ik} \quad \text{e} \quad \Phi = e^{\alpha\tilde{\Phi}},$$

Desejamos realizar uma transformação conforme no escalar de curvatura, sendo assim é necessário conhecer a transformação de $\frac{1}{\Omega} 6\Omega^i_{;i}$ já que a transformação do primeiro termo é imediata. A definição do D’Lambertiano em espaços curvos é: $\Omega^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{ik} \Omega_{,i})_{,k}$, a transformação conforme para a raiz do determinante do Jacobiano será: $\sqrt{-g} = e^{-2\alpha\tilde{\Phi}} \sqrt{-\tilde{g}}$. Portanto o cálculo direto dessa expressão conduz $\Omega^i_{;i} = e^{\frac{3}{2}\alpha\tilde{\Phi}} \left(-\frac{1}{4}\alpha^2 \tilde{g}^{ik} \tilde{\Phi}_{,i} \tilde{\Phi}_{,k} + \frac{\alpha}{2} \tilde{g}^{ik} \tilde{\Phi}_{,i;k} \right)$, dessa maneira $\frac{1}{\Omega} \Omega^i_{;i} = e^{\alpha\tilde{\Phi}} \left(-\frac{1}{4}\alpha^2 \tilde{g}^{ik} \tilde{\Phi}_{,i} \tilde{\Phi}_{,k} + \frac{\alpha}{2} \tilde{g}^{ik} \tilde{\Phi}_{,i;k} \right)$.

Com esse resultado constrói-se a transformação conforme para o escalar de curvatura:

$$R = \tilde{R} - \frac{3}{2}\alpha^2 \tilde{g}^{ik} \tilde{\Phi}_{,i} \tilde{\Phi}_{,k} + 3\alpha \tilde{g}^{ik} \tilde{\Phi}_{,i;k} . \quad (8.23)$$

O outro termo que compõe a ação de Jordan-Brans-Dicke é o termo cinético $\frac{\omega}{\Phi} g^{ik} \Phi_{,i} \Phi_{,k}$ que sobre transformação conforme é representado por:

$$\omega e^{2\alpha\tilde{\Phi}} \alpha^2 \tilde{g}^{ik} \tilde{\Phi}_{,i} \tilde{\Phi}_{,k} . \quad (8.24)$$

Reunindo os termos calculados individualmente teremos:

$$\begin{aligned} (\Phi R - \frac{\omega}{\Phi} \Phi^i \Phi_{,i}) \sqrt{-g} &= \left(e^{2\alpha\tilde{\Phi}} \left[\tilde{R} - \frac{3}{2}\alpha^2 \tilde{g}^{ik} \tilde{\Phi}_{,i} \tilde{\Phi}_{,k} + 3\alpha \tilde{g}^{ik} \tilde{\Phi}_{,i;k} \right] - \omega e^{2\alpha\tilde{\Phi}} \alpha^2 \tilde{g}^{ik} \tilde{\Phi}_{,i} \tilde{\Phi}_{,k} \right) \sqrt{-\tilde{g}} e^{-2\alpha\tilde{\Phi}} = \\ &= \left(\tilde{R} - \frac{3}{2}\alpha^2 \tilde{g}^{ik} \tilde{\Phi}_{,i} \tilde{\Phi}_{,k} + 3\alpha \tilde{g}^{ik} \tilde{\Phi}_{,i;k} - \omega e^{2\alpha\tilde{\Phi}} \alpha^2 \tilde{g}^{ik} \tilde{\Phi}_{,i} \tilde{\Phi}_{,k} \right) \sqrt{-\tilde{g}} . \end{aligned}$$

Como o termo $3\alpha \tilde{g}^{ik} \tilde{\Phi}_{,i;k}$ compõe uma divergência, essa quando for integrada deverá ser nula devido as impostas condições de fronteira, ou seja, o termo resultante será: $\left(\tilde{R} - \left(\omega + \frac{3}{2} \right) \alpha^2 \tilde{g}^{ik} \tilde{\Phi}_{,i} \tilde{\Phi}_{,k} \right) \sqrt{-\tilde{g}}$. Portanto a ação escrita no referencial de Einstein será:

$$S_{QE} = \int \left(\tilde{R} - \left(\omega + \frac{3}{2} \right) \alpha^2 \tilde{g}^{ik} \tilde{\Phi}_{,i} \tilde{\Phi}_{,k} \right) \sqrt{-\tilde{g}} d\Omega . \quad (8.25)$$

Logo, quando realiza-se uma transformação conforme específica na ação estaremos relacionando as equações definidas nos quadros de Jordan com suas representações para os quadros de Einstein.

$$S_{QJBD} = \int \left(\Phi R - \frac{\omega}{\Phi} \Phi^i \Phi_{,i} \right) \sqrt{-g} d\Omega \quad \rightarrow \quad S_{QE} = \int \left(\tilde{R} - \left(\omega + \frac{3}{2} \right) \alpha^2 \tilde{g}^{ik} \tilde{\Phi}_{,i} \tilde{\Phi}_{,k} \right) \sqrt{-\tilde{g}} d\Omega .$$

Como havia sido dito, transformações conformes são geralmente empregadas com o intuito de facilitar as operações algébricas. A ação obtida para o quadro de Einstein nos fornecerá as equações de movimento para esse mesmo sistema. Para obtê-las é mais

simples se realizarmos por métodos variacionais, pois do primeiro termo que é o escalar de curvatura sob minimização funcional, resultará nas próprias equações de Einstein, agora o segundo termo entrará como uma soma nas equações de Einstein quando levado em conta a existência de uma equação para o funcional do campo escalar. Em termos matemáticos o que está sendo dito é:

$$\text{Considere } S_{QE} = \int \left(\tilde{R} - \left(\omega + \frac{3}{2} \right) \alpha^2 \tilde{g}^{ik} \tilde{\Phi}_{,i} \tilde{\Phi}_{,k} \right) \sqrt{-\tilde{g}} d\Omega .$$

Pelos métodos variacionais escrevemos

$$\begin{aligned} \delta S_{QE} = & \int \delta \tilde{R} \sqrt{-\tilde{g}} d\Omega - \left(\omega + \frac{3}{2} \right) \alpha^2 \int \left(\delta \tilde{g}^{ik} \tilde{\Phi}_{,i} \tilde{\Phi}_{,k} + 2 \tilde{g}^{ik} \delta \tilde{\Phi}_{,i} \tilde{\Phi}_{,k} \right) \sqrt{-\tilde{g}} d\Omega \\ & + \int \left(\tilde{R} - \left(\omega + \frac{3}{2} \right) \alpha^2 \tilde{g}^{ik} \tilde{\Phi}_{,i} \tilde{\Phi}_{,k} \right) \delta \sqrt{-\tilde{g}} d\Omega , \end{aligned}$$

Sabemos que $\int \delta \tilde{R} \sqrt{-\tilde{g}} d\Omega = \int \delta \left(\tilde{g}^{ik} \tilde{R}_{ik} \right) \sqrt{-\tilde{g}} d\Omega = \int \left(\delta \tilde{g}^{ik} \tilde{R}_{ik} + \tilde{g}^{ik} \delta \tilde{R}_{ik} \right) \sqrt{-\tilde{g}} d\Omega$, os procedimentos de Einstein-Hilbert nos ensinaram que o termo $\tilde{g}^{ik} \delta \tilde{R}_{ik} \sqrt{-\tilde{g}}$ resultará em um termo de superfície que quando integrado será nulo.

É sabido também que $\delta \sqrt{-\tilde{g}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}_{ik} \delta \tilde{g}^{ik}$, ou seja,

$$\begin{aligned} S_{QE} = & \int \left[\tilde{R}_{ik} - \left(\omega + \frac{3}{2} \right) \alpha^2 \tilde{\Phi}_{,i} \tilde{\Phi}_{,k} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{ik} \tilde{R} + \frac{1}{2} \tilde{g}_{ik} \tilde{g}^{ik} \left(\omega + \frac{3}{2} \right) \alpha^2 \tilde{\Phi}_{,i} \tilde{\Phi}_{,k} \right] \delta \tilde{g}^{ik} \sqrt{-\tilde{g}} d\Omega \\ & + 2 \int \tilde{g}^{ik} \tilde{\Phi}_{,k} \delta \tilde{\Phi}_{,i} \sqrt{-\tilde{g}} d\Omega . \end{aligned}$$

Em relação ao funcional $\delta \tilde{\Phi}$, para estabelecermos a condição de mínimo variacional pode-se realizar a determinada transformação levando novamente em conta que a integral de uma divergência é nula:

$$\int \tilde{g}^{ik} \tilde{\Phi}_{,k} \delta \tilde{\Phi}_{,i} \sqrt{-\tilde{g}} d\Omega = \int \tilde{g}^{ik} \left[\left(\tilde{\Phi}_{,k} \delta \tilde{\Phi} \right)_{,i} - \tilde{\Phi}_{,k;i} \delta \tilde{\Phi} \right] \sqrt{-\tilde{g}} d\Omega = - \int \tilde{g}^{ik} \tilde{\Phi}_{,k;i} \delta \tilde{\Phi} \sqrt{-\tilde{g}} d\Omega ,$$

ou seja para todo $\delta \tilde{\Phi}$,

$$\tilde{g}^{ik} \tilde{\Phi}_{,k;i} = 0 . \quad (8.26)$$

Por outro lado do ponto de vista de todo os possíveis variacionais do tensor métrico $\delta \tilde{g}^{ik}$, ao assumirmos a condição de mínimo, teremos a equação de movimento para o campo gravitacional no referencial de Einstein.

$$\tilde{R}_{ik} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{ik} \tilde{R} + \frac{1}{2} \tilde{g}_{ik} \tilde{g}^{mn} \left(\omega + \frac{3}{2} \right) \alpha^2 \tilde{\Phi}_{,m} \tilde{\Phi}_{,n} - \left(\omega + \frac{3}{2} \right) \alpha^2 \tilde{\Phi}_{,i} \tilde{\Phi}_{,k} = 0 . \quad (8.27)$$

Se desejarmos que a equação de movimento obtida acima se torne equivalente a da literatura [5] devemos assumir que $\alpha^2 = \frac{4}{2\omega+3}$, tomando o cuidado de garantir $\omega \neq -\frac{3}{2}$.

Realizando essa substituição, a equação para o campo gravitacional tomará a seguinte forma

$$\tilde{R}_{ik} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{ik}\tilde{R} = +2\tilde{\Phi}_{,i}\tilde{\Phi}_{,k} - \tilde{g}_{ik}\tilde{g}^{mn}\tilde{\Phi}_{,m}\tilde{\Phi}_{,n} . \quad (8.28)$$

Em relação às equações de movimento para o campo gravitacional obtidas diretamente do referencial de Jordan, as equações no quadro de Einstein são mais simplificada e para alguns determinados fins pode facilitar os cálculos, uma vez que como pode ser observado a equação acima é de razoável semelhança às equações de campo para a Relatividade Geral, acrescida de termos da dinâmica do campo escalar.

Resumidamente para a teoria escalar-tensorial de Brans-Dicke é notável a existência de duas teorias conformemente relacionadas, uma definida nos referenciais de Jordan que é o quadro em que a teoria foi originalmente desenvolvida. Quando realizada uma transformação específica de forma a eliminar o acoplamento tensorial escalar contruímos a teoria no quadro de Einstein.

A aparente inofensiva transformação realizada na teoria de Brans Dicke implica em profundas questões de caráter conceituais, que até hoje geram divisões de águas entre os simpatizantes de cada ponto de vista que defendem o referencial de Einstein ou o de Jordan como sendo o fisicamente consistente.

Uma questão bastante evidente é que o tensor de energia-momento que é conservado no quadro de Jordan não mais é nulo por derivações covariantes nos quadros de Einstein. Certamente dentre os grupos existentes como pode ser visto em [4], pertecerei ao grupo dos Agnósticos, no entanto, será discutido alguns pontos que certamente poderão futuramente serem conclusivos para uma postura mais concreta.

8.5 O Referencial de Jordan e o Referencial de Einstein

O referencial de Jordan possui interação gravitacional mediada por um campo tensorial assim como a Relatividade Geral e um campo escalar não massivo que desempenha o papel de uma componente de spin zero da gravidade [4]. Nesse quadro o campo escalar se acopla de maneira mínima, sendo assim, uma métrica física define unívocamente o movimento geodésico de um corpo. Nesse quadro o tensor de energia momento é conservado.

O referencial de Einstein permite que as partículas tenham suas massas dependentes do campo escalar e não se movão ao longo das geodésicas da métrica do quadro de Einstein,

resultado esse devido à existência de uma força dependente do campo escalar. Esse fato é manifestado na conservação da soma do tensor de energia momento no Quadro de Jordan, o campo escalar e a constante cosmológica (quando levada em conta) [4]. Nesse quadro o tensor de energia momento não é covariantemente conservado.

Não desejamos pertencer a qualquer um dos grupos de discussão como ilustra [13], no entanto, dois importantes pontos de vistas serão analisados.

1) A natureza da Hamiltoniana das teorias definidas nos dois quadros. Uma vez que deverão ser positivas definidas para que possam traduzir significados fisicamente aceitáveis.

2) O segundo ponto de vista fundamental seria discutir detalhadamente um observável físico. Alguma experiência que pudesse permitir refinar nossas conclusões. Um exemplo poderia ser a deflexão de um raio de luz devido a interação gravitacional assim como feito em [4]. No entanto realizaremos apenas um acompanhamento das ideias defendidas pelo artigo.

8.5.1 Estudo da Hamiltoniana

Os elementos da Mecânica Análítica nos possibilita determinarmos a Hamiltoniana a partir da Lagrangeana utilizando a conhecida expressão.

$$H(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L. \quad (8.29)$$

Desejando realizar um estudo a respeito da Hamiltoniana da Gravitação de Brans e Dicke definidas no Referencial de Jordan e no Referencial de Einstein realizamos uma aproximação que a princípio não é completamente rigorosa, uma vez que métodos mais sofisticados deveriam ser empregados, como por exemplo o método ADM.

Interessados em uma primeira aproximação, considera-se uma região pertencente ao espaço de Jordan em que o escalar de curvatura é aproximadamente nulo, $R \simeq 0$.

Nessa localidade a Lagrangeana será então puramente escalar:

$$L \simeq -\omega g_{ik} \frac{\Phi^{,i} \Phi^{,k}}{\Phi}. \quad (8.30)$$

Separando a parte temporal da espacial, teremos

$$L \simeq -\omega \left(g_{00} \frac{\dot{\Phi}^2}{\Phi} + g_{ab} \frac{\Phi^{,a} \Phi^{,b}}{\Phi} \right)$$
 onde a e b são números inteiros maiores do que zero e menores do que três.

Calculando agora os termos que constituirão a Hamiltoniana:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} = -2\omega g_{00} \frac{\dot{\Phi}}{\Phi} \text{ e como a convenção empregada apresenta } g_{00} = -1, \text{ temos que:}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} = 2\omega \frac{\dot{\Phi}}{\Phi}. \text{ Sendo assim a Hamiltoniana será}$$

$$H_{RJ} = 2\omega \frac{\dot{\Phi}^2}{\Phi} + \omega \left(g_{00} \frac{\dot{\Phi}^2}{\Phi} + g_{ab} \frac{\Phi^{,a} \Phi^{,b}}{\Phi} \right) = \omega \frac{\dot{\Phi}^2}{\Phi} + \omega \frac{\Phi_{,b} \Phi^{,b}}{\Phi}.$$

$$H_{RJ} = \frac{\omega}{\Phi} \left(\dot{\Phi}^2 + \Phi_{,b} \Phi^{,b} \right). \quad (8.31)$$

Realizando agora o estudo da Hamiltoniana partindo da Lagrangeana de Brans e Dicke definida no Referencial de Einstein, considerando também a mesma aproximação a respeito do escalar de Ricci temos

$$L \simeq - \left(\omega + \frac{3}{2} \right) \alpha^2 \tilde{g}_{ik} \tilde{\Phi}^{,i} \tilde{\Phi}^{,k}. \quad (8.32)$$

Novamente separando a parte estacionária da temporal

$$L \simeq - \left(\omega + \frac{3}{2} \right) \alpha^2 \left[-\dot{\tilde{\Phi}}^2 + \tilde{g}_{ab} \tilde{\Phi}^{,a} \tilde{\Phi}^{,b} \right]. \quad (8.33)$$

Calculando o momento generalizado ficamos com

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{\Phi}}} = 2 \left(\omega + \frac{3}{2} \right) \alpha^2 \dot{\tilde{\Phi}}. \quad (8.34)$$

Encontra-se assim a Hamiltoniana para o Referencial de Einstein:

$$H = 2 \left(\omega + \frac{3}{2} \right) \alpha^2 \dot{\tilde{\Phi}}^2 + \left(\omega + \frac{3}{2} \right) \alpha^2 \left[-\dot{\tilde{\Phi}}^2 + \tilde{g}_{ab} \tilde{\Phi}^{,a} \tilde{\Phi}^{,b} \right] = \left(\omega + \frac{3}{2} \right) \alpha^2 \left[\dot{\tilde{\Phi}}^2 + \tilde{\Phi}_{,b} \tilde{\Phi}^{,b} \right],$$

quando assumido que $\alpha^2 = \frac{4}{2\omega + 3}$, temos

$$H_{RE} = 2 \left(\dot{\tilde{\Phi}}^2 + \tilde{\Phi}_{,b} \tilde{\Phi}^{,b} \right). \quad (8.35)$$

Considerando possível essa aproximação, obtivemos as Hamiltonianas correspondentes aos Referenciais de Jordan e o de Einstein. Levando em conta que a constante de acoplamento ω obtido pela sonda Cassini é positiva e da ordem de grandeza de alguns milhares, as duas Hamiltonianas são positivas definidas uma vez que apresentam limites inferiores, e não possuem condições privilegiadas sem que haja o consumo de energia para realizá-las. No entanto trabalhos recentes [18, 2] tem realizado importantes estudos que validam o uso da constante ω com valores negativos para a explicação de fenômenos como por exemplo a expansão acelerada do Universo. Sob esse ponto de vista encontramos problemas na Hamiltoniana definida no Referencial de Jordan, uma vez que essa não mais teria um limite inferior. No entanto no referencial de Einstein a Hamiltoniana independe da constante ω uma vez que seja garantido que seja diferente de $-\frac{3}{2}$, desse modo, permanecerá positivo definida e não apresentará problemas.

8.5.2 Deflexão da luz: O Referencial de Einstein e o Referencial de Jordan

Sabe-se que a análise do desvio da luz solar serviu de fundamentação experimental à Relatividade Geral, como por exemplo os experimentos realizados no ano de 1919 em Sobral e Príncipe, tanto quanto os modernos aparatos utilizando o espectro das ondas de rádio realizados em Cambridge em 1973. Da mesma forma o artigo [4] analisa um observável físico que é o desvio da luz devido a interação gravitacional, confrontando os resultados obtidos através dos modelos da Relatividade Geral, da teoria de Brans-Dicke definida no quadro de Jordan e a Teoria de Brans Dicke definida no Referencial de Einstein. Analisando o desvio nesses referenciais levando em conta fatores de aproximação pós-newtonianos de até terceira ordem e confrontando diretamente com os dados experimentais foi possível concluir:

1) Utilizando o menor valor atual para ω obtida a partir dos recentes dados experimentais obtidos pela sonda espacial Cassini, verificou-se a concordância na ordem de 100 picos de segundos de arco entre a Relatividade Geral e o quadro de Jordan nas aproximações de segunda ordem para o desvio da luz.

2) A teoria de Brans-Dicke no Referencial de Einstein contém um campo escalar que se acopla não minimamente à gravidade. Então na primeira ordem de PPN, não existe efeito do campo escalar nas deflexões angulares. A diferença da Relatividade Geral ocorre em magnitudes de segunda ordem e em ordens superiores.

Capítulo 9

Conclusões

A gravitação de Brans-Dicke é uma interessante teoria que além de ser fundamentada por estruturas matemáticas tensoriais assim como a Relatividade Geral, possui em suas bases um campo escalar não massivo como uma espécie de componente de spin zero da gravidade. A hipótese da existência de um campo escalar como mediador dos efeitos gravitacionais possui suas raízes nas místicas concordâncias numéricas de Dirac, como talvez faria um contemporâneo pitagórico. Sua estrutura formal como uma teoria escalar-tensorial se enraiza nos ideais de Nordström e Jordan. Quanto ao âmbito epistemológico é fundamentada nas pseudo definições encontradas por Mach que confrontam a validade à definição da medida de massa e das condições para a existência do espaço tempo Newtonianos e o espaço tempo da Relatividade Geral.

Nos desenvolvimentos matemáticos à gravitação de Brans-Dicke foi encontrada a equação que descreve o movimento do espaço-tempo, ou seja, a família de equações que descreve as possíveis geodésicas espaço-temporais como função da existência de matéria e energia e das consequências gravitacionais geradas pela existência da dinâmica do campo escalar. Campo esse que por construção possui dinâmica proporcional ao traço do tensor de energia-momento da Relatividade Geral. A mencionada equação de movimento foi obtida partindo das Equações de Einstein, realizando a hipótese de que a constante Newtoniana da gravitação portaria-se como o inverso de um campo escalar e com o uso de alguns primeiros princípios foram obtidas as equação de Brans Dicke.

Partindo de uma lagrangiana para a gravitação de Brans Dicke, escrevendo a ação para a mesma e fazendo a hipótese do mínimo variacional da ação de Jordan Brans Dicke, também foi possível obter a mesma equação de movimento realizada por primeiros princípios.

Depois de termos sido capazes de obter as equações de movimento por dois distintos métodos, foi realizado o estudo introdutório de transformação conformes. Discutindo a sua relevante importância no contexto atual das teorias alternativas para a Relatividade Geral assim como sua aplicação no contemporâneo cenário da Cosmologia. Foi também possível aprender que transformações conformes não são tão inocentes como aparentam,

pois não são, por via de regra, o resultado de simples mudanças de escala ou de variáveis, uma vez que podem alterar totalmente a descrição física de um determinado problema. Por exemplo o empregado do reescalonamento de Weyl altera a métrica levando-a a outra conformalmente relacionada. Como aprendemos em Relatividade Geral a métrica traz em si a informação sobre a existência das fontes de campo, desse modo, alterar a métrica pode significar alteração nos campos que serão associados a distintas fontes de energia momento.

Matematicamente isso é justificado pois nem todos objetos que descrevem a teoria são conformalmente invariante, por exemplo: os símbolo de Christoffel, o tensor de curvatura, o escalar de Ricci, etc. O resultado direto é que a Gravitação de Brans Dicke não é invariante conforme, apresentando descrições matematicamente inambiguas em dois distintos referencias: o Referencial de Jordan e o Referencial de Einstein.

Como estudado os referencias conformalmente relacionados podem descrever físicas diferentes. No referencial de Jordan assim como a Relatividade Geral, o tensor de energia e momento é conservado sob diferenciações covariantes, satisfazendo a equação da continuidade de massa e energia. Possui um parâmetro ajustável que funciona como descrevem alguns autores "O salvador da Teoria de Brans Dicke" uma vez que não possui um valor bem definido. Algumas medidas realizadas no sistema solar como as realizadas pela Sonda Cassini indicam que esse fator é da ordem de dezenas de milhares. No entanto, trabalhos promissores descrevem com razoável precisão experimentos astronômicos com o emprego da constante com valor negativo.

Por outro lado a teoria de Brans e Dicke conformalmente relacionada através de uma específica regra define a teoria no Referencial de Einstein. Essa representação apresenta um campo escalar que se acopla a gravidade de maneira não mínima, sendo assim uma geodésica definida pela métrica do Referencial de Einstein é incapaz de descrever o movimento de uma determinada partícula, pois a partícula é sujeita a uma força proporcional ao campo escalar uma vez que o tensor de energia-momento possui em sua construção dependência direta com o campo escalar. Devido ao acoplamento não mínimo presente nesse referencial o tensor de energia momento não é conservado sob diferenciações covariantes. Assim como imaginou Jordan possíveis mecanismos de criação de massa e energia não são totalmente descartados. Missões interestelares hoje tentam medir essas assinaturas do campo acoplado diretamente à gravidade como por exemplo a missão de Lattor.

Já faz um certo tempo que algumas comunidades científicas fazem parte de uma espécie de guerra que tentando definir qual dos referenciais é o fisicamente consistente. Pelo menos do meu ponto de vista, se é que é válido, não assumo partidários, apenas faço questão em discutir algumas opiniões e características marcantes de cada um deles.

Do ponto de vista teórico formal, o estudo da Hamiltoniana geralmente é decisivo para definir se uma teoria é fisicamente aceitável. Nesse trabalho foi realizada uma aproximação servindo como um primeiro critério. Apesar de não muito rigoroso nos serviu

como fonte de discussão.

Calculou-se a Hamiltoniana nos dois referenciais, e como resultado a Hamiltoniana no Referencial de Jordan é positiva definida em sua estrutura. No entanto a dependência do parâmetro de acoplamento que até então não possui nenhuma proibição de ser negativo pode colocar o Referencial de Jordan em problemas fundamentais.

A Hamiltoniana calculada para o Referencial de Einstein é positiva definida em sua construção e não apresenta dependência do parâmetro de acoplamento desde que o mesmo seja diferente de menos três meios. Nesse contexto de aproximações o Referencial de Einstein não apresenta complicações de cunho teórico.

Por fim realizou-se o acompanhamento das conclusões obtidas por um artigo. Esse artigo realizou o estudo de um observável que é a deflexão da luz por efeitos gravitacionais, comparando os dados experimentais com as previsões teóricas obtidas pela Relatividade Geral e pela gravitação de Brans-Dicke definida em suas duas representações. Os resultados foram que os dados experimentais concordam adequadamente com as previsões da Relatividade Geral e essa concorda com as aproximações de segunda ordem em 100 picos de segundos de arco com a teoria definida no Referencial de Jordan. A teoria definida no Referencial de Einstein está de acordo com a previsão da Relatividade Geral apenas em aproximações de primeira ordem.

Apesar de até hoje não ter sido possível medir o campo escalar que juntamente à gravidade intermedia a interação gravitacional, esse tem se mostrado importante na descrição dos fenômenos naturais, tanto que teorias de grande unificação como a teoria de super gravidade e teorias de Super Cordas prevêm nos seus limites à baixas energias a existência de mediadores escalares.

A hipótese de DÍlatons, Ínflatons e Modelos de Quinta Essência podem até serem modelos atuais análogos aos modelos dos Epicíclon e Deferentes elaborados por Apolônio e Hiparco. No entanto, o cenário atual da física de partículas e da Cosmologia do século XXI ainda é bastante insatisfatório e parece ansiar por profundas refinarias. A Teoria de Brans Dicke faz o uso desses elementos escalares que completam ou refinam a descrição da interação gravitacional, e talvez como diria Francis Bacon nos torna ainda mais capazes de não apenas decifrar a *physis*, mas sim, mais capacitados a controlá-la em nosso favor.

Referências Bibliográficas

- [1] ALDROVANDI, R.; GERALDO, J. **Classical Fields**. São Paulo. 2004. 214 p. Disponível em: <<http://www.ift.unesp.br/users/jpereira/ClassiFields.pdf>>. Acesso em: 03 nov. 2012. 2002. 453–458 p.
- [2] BATISTA, A.; FABRIS, J. **A remark on Brans-Dicke cosmological dust solutions with negative**. Vitória. arXiv:gr-qc/0001055 2000. 6 p.
- [3] BELLUCCI, S.; FARAONI, V. **Energy conditions and classical scalar fields**. Roma. Nuclear Physics B.
- [4] BHADRA, Aru. **Brans-Dicke theory: Jordan vs Einstein Frame**. Índia. arxiv:gr-qc/0605109v1. 2006. 10 p.
- [5] BOISSEAU, B et al. **Exact metric for the exterior of a global string in the Brans-Dicke theory**. Tours. arxiv:gr-qc/9802007v1. 1998. 10 p.
- [6] BRANS, Carl. **The roots of scalar-tensor theory: an approximate history**. New Orleans. arxiv:gr-qc/0506063v1. 2005. 18 p.
- [7] BRANS, C.; DICKE, R. **Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation**. Princeton. Physical Review. 1961. 11 p.
- [8] CARVALHO, M.; WAGA, I. **Inflação Cósmica e Teorias Escalares-Tensoriais**. Rio de Janeiro. UFRJ. 2010. 136 p.
- [9] CLIFFORD, Will. **The Conformal between General Relativity and Experiment**. Washington. arXiv:gr-qc/0510072v2. 2005. 89 p.
- [10] DICKE, Robert. **Mach's Principle and Invariance under Transformation of Units**. New Jersey. Physical Review. 1962. 5 p.
- [11] DIRAC, Paul. **Cosmological Models and the Large Numbers Hypothesis**. Londres. Royal Society A. 1974. 10 p. Disponível em: < doi: 10.1098/rspa.1974.0095 >. Acesso em: 01 nov. 2012.

- [12] EINSTEIN, A.; MINKOWSKI et al. **Princípio da Relatividade**. Lisboa. Fundação Calouste Gulbenkian. 1998. 160 p.
- [13] FARAONI, V et al. **Conformal Transformation in classical gravitational theories and in cosmology**. Bruxelas. General Relativity and Quantum Cosmology. 1998. 52 p.
- [14] FIERZ, Markus. Polônia. Acta Rewiel Physics. 1956.
- [15] JORDAN, Pascual. **Formation of the Stars and Development of the Universe**. Hamburgo. Nature. 1949. 4p.
- [16] LANDAU, L.; LIFSHITZ, E. **Teoria do Campo**. Moscou. Editora Mir. 1980. 470 p.
- [17] MAIA, Nelson. **Introdução à Relatividade**. São Paulo. Livraria da Física. 2009. 150 p.
- [18] MATTHEW, Klimek. **Brans-Dicke gravity with $d + 1$ dimensions**. New Jersey. arXiv:0901.4530 [gr-qc]. 2009. 9 p.
- [19] MOREIRA, Ideu. **Maupertuis (1698- 1759) e o Princípio de Mínima Ação**. Revista Brasileira de Ensino de Física. 1999. 14 p.
- [20] PESSOA, O.; ASSIS, A. **Erwin Schrödinger e o Princípio de Mach**. Campinas. Caderno de História e Filosofia das Ciências. 2001 131-152 p. Disponível em: <[http://www.cle.unicamp.br/cadernos/pdf/Andr%C3%A9%20Ass\[1\]...pdf](http://www.cle.unicamp.br/cadernos/pdf/Andr%C3%A9%20Ass[1]...pdf)>. Acesso em: 03 nov. 2012.
- [21] PRIGOGINE, Ilya. **O fim das certezas**. São Paulo. Ed UNESP. 1996. 65 p.
- [22] QUIROS, Israel. **Conformal classes of Brans-Dicke gravity**. Cuba. arxiv.org/pdf/gr-qc/9904004v2. 1999. 3 p.
- [23] QUIROS, Israel. **The conformal transformation's controversy: what are we missing?** Jalisco. General Relativity and Quantum Cosmology. 2012. 17 p.
- [24] RIBEIRO,R; FABRIS. **Modelos Alternativos para a Energia Escura**. Espírito Santo. UFES. 2007. 90 p.
- [25] RUBANO, C et al. **Physical non-equivalence of the Jordan and Einstein frames**. Napoli. arXiv:1003.5394v2 [gr-qc]. 2010. 8 p.
- [26] SERGEY, Kozyrev. **"Gauge"freedom and relationship between the Einstein and Jordan conformal frames**. Kazan. General Relativity and Quantum Cosmology. 2012. 7 p.

- [27] TELLER, Eduard. **On the Change of Physical Constants**. Chicago. Physical Review. 1948. 2 p.
- [28] WEINBERG, Steven. **Gravitation and Cosmology**. New Jersey. John Wiley and Sons. 1972. 658 p.