UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Construção de uma Escala para Avaliação da Proficiência em Conteúdos Matemáticos Básicos

Paola Rocchi Rossi

Orientadora: Profa. Dra. Aparecida Doniseti Pires de Souza

Co-orientador: Prof. Dr. Adriano Ferreti Borgatto

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Maio de 2015

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Construção de uma Escala para Avaliação da Proficiência em Conteúdos Matemáticos Básicos

Paola Rocchi Rossi

Orientadora: Profa. Dra. Aparecida Doniseti Pires de Souza

Co-orientador: Prof. Dr. Adriano Ferreti Borgatto

Relatório final para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional pela Universidade Estadual Paulista, sob orientação da Profa. Dra. Aparecida Doniseti Pires de Souza.

Presidente Prudente, Maio de 2015

Agradecimentos

Gostaria de deixar alguns agradecimentos especiais:

Aos meus pais que já vêm me apoiando de longa data, sempre me auxiliando em minhas necessidades e escolhas mesmo eu estando longe.

Aos meus avós que também me deram forças e suporte para concluir mais uma jornada de minha vida.

A minha orientadora, professora Cidinha, por toda a dedicação para passar seus ensinamentos e me mostrar o caminho quando eu estava perdida.

Ao professor Adriano pela coorientação, sempre dando apoio com muita atenção as minhas dúvidas.

A professora Mônica que, dividindo a sua experiência e conhecimento, em muito contribuiu para a parte pedagógica do trabalho.

As professoras componentes da banca do exame de qualificação, Maria Raquel e Mariana, pelas contribuições para melhoria do trabalho.

Também não posso deixar de agradecer o pessoal da “Nave” pela amizade, risadas, desabafos e ajuda nos momentos em que eu achava que a tecnologia não estava a meu favor. E as meninas da república, por toda a convivência, dicas, risadas e companheirismo.

E por fim, agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para que eu conseguisse concluir essa etapa, de perto e de longe. E também, o apoio financeiro da CAPES, que contribuiu para a conclusão dessa fase.

"Se eu pudesse deixar algum presente à você,
deixaria aceso o sentimento de amar a vida dos seres humanos.
A consciência de aprender tudo o que foi ensinado pelo tempo a fora.
Lembraria os erros que foram cometidos para que não mais se repetissem.
A capacidade de escolher novos rumos.
Deixaria para você, se pudesse, o respeito aquilo que é indispensável.
Além do pão, o trabalho. Além do trabalho, a ação.
E, quando tudo mais faltasse, um segredo:
o de buscar no interior de si mesmo a resposta e a força
para encontrar a saída."
Mahatma Gandhi

Resumo

Este trabalho apresenta uma aplicação da Teoria da Resposta ao Item (TRI), mais especificamente do modelo logístico unidimensional de três parâmetros, para a construção de uma escala para medir proficiência em conteúdos matemáticos básicos. Os itens que compõem o instrumento de avaliação foram elaborados a partir de uma Matriz de Referência construída com base nas matrizes do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB). Os temas abordados incluem espaço e forma, grandezas e medidas, número e funções, envolvendo álgebra e funções. A calibração dos parâmetros e a estimação das proficiências foram feitas utilizando abordagem bayesiana. Os resultados mostraram que a maioria dos itens propostos permite avaliar a proficiência do ingressante, sendo nove entre os trinta e dois que compuseram a prova, classificados como itens âncoras. No entanto, novos itens precisam ser incluídos para que em parte da escala as habilidades sejam melhor estimadas.

Palavras-Chave: *Teoria da Resposta ao Item; Inferência Bayesiana; Escala para Medir Proficiência em Conteúdos Matemáticos.*

Abstract

This article offers an application of the Item Response Theory (IRT), more specifically, of the one-dimensional logistic model of three parameters, for the construction of a scale to measure proficiency in basic mathematical content. The items making up the evaluation tool were developed from a Reference Matrix based on matrices of the Basic Education and Evaluation System (SAEB). The topics include space and form, quantities and measures, number and functions involving algebra and functions. The calibration of parameters and estimation of proficiencies were carried out using the Bayesian approach. The results showed that most of the proposed items enable evaluation of entrant proficiency, nine of the thirty-two making up the test being classified as anchor items. However, new items need to be included so that the scale of skills can be better estimated.

Keywords: *Item Response Theory (IRT); Bayesian Inference; Scale to Measure Proficiency in Basic Mathematical Content.*

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O relatório pedagógico do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP), para o ano de 2013 (PAULO, 2013), apresenta a distribuição dos alunos segundo níveis de proficiência em Matemática para a 3ª série do Ensino Médio. Nessa distribuição pode ser observado que 54,9% dos alunos estão classificados no nível abaixo do básico, 40,6% no nível básico, 4,2% no nível adequado e apenas 0,2% no nível avançado. Assim, mais da metade dos alunos das escolas públicas saem do Ensino Médio com defasagem nos conteúdos matemáticos básicos.

De acordo com a Fundação Vunesp (VUNESP, 2015), que disponibiliza resultados para o perfil socioeconômico dos candidatos inscritos e matriculados na UNESP por curso anualmente, 65% dos alunos ingressantes nos cursos da área de exatas da FCT/UNESP no ano de 2014 (Ciência da Computação, Engenharia Ambiental, Engenharia Cartográfica, Estatística, Física, Matemática Diurno e Noturno e Química) cursaram o Ensino Médio todo ou maior parte em escola pública.

Considerando essa realidade e os índices de evasão e de retenção em disciplinas do núcleo básico dos cursos de graduação da área de exatas, propõem-se neste trabalho a construção de uma escala para medir proficiência em conteúdos matemáticos básicos para os ingressantes nestes cursos. Isto é, com o objetivo de identificar os conteúdos nos quais os alunos necessitam de mais atenção, este trabalho apresenta uma aplicação da Teoria da Resposta ao Item (TRI), mais especificamente do modelo logístico unidimensional de três parâmetros, para a construção de uma escala para medir proficiência em conteúdos matemáticos básicos.

Esta proposta é parte integrante do projeto "Avaliação do Progresso dos Ingressantes nos Cursos da Área de Exatas na Proficiência em Conteúdos Matemáticos Básicos, Necessários para o Acompanhamento das Disciplinas de Cálculo e Similares". Esse projeto prevê a aplicação piloto na FCT/UNESP e posteriormente para todas as unidades da UNESP, englobando todos os ingressantes dos cursos da área de exatas.

Em geral, quando se quer medir o conhecimento sobre algum conteúdo, aplica-se uma prova e o número de acertos indica o quanto se conhece em relação a este conteúdo. Com este mesmo propósito a Teoria da Resposta ao Item (TRI) busca inferir a habilidade de um indivíduo a partir das respostas às questões colocadas. Seu critério de avaliação pressupõe uma avaliação qualitativa, considerando traços latentes, diferentemente dos utilizados em avaliações baseadas somente no escore bruto[1].

[1] número total de acerto na avaliação.

A TRI apresenta vantagens em relação à Teoria Clássica de Testes[2], pois utiliza modelos matemáticos para retirar informações de características que geralmente não podem ser observadas diretamente. Além disso, consegue comparar populações diferentes, desde que submetidas a provas que tenham itens iguais, ou até mesmo comparar indivíduos de uma mesma população que foram submetidos a provas com itens diferentes. Isto se deve ao fato de que a TRI considera como elementos centrais os itens e não a prova como um todo. Um exemplo de aplicação de provas diferentes são os Testes Adaptativos Computadorizados - CAT, nos quais alunos com conhecimento mais baixo recebem itens mais fáceis e alunos com conhecimento mais alto recebem itens mais difíceis. Isto é, os itens vão ficando mais fáceis ou mais difíceis de acordo com as respostas do examinado, acertando ou errando.

Os testes, baseados na TRI, mais utilizados são compostos de questões (itens) de múltipla escolha, em que os itens são corrigidos de maneira dicotômica, ou seja, corrigidos como certo ou errado. Entretanto, podem também ser dissertativos e corrigidos considerando mais categorias de respostas além de certo e errado, chamados de itens politômicos.

Conforme Andrade, Tavares e Valle (2000), a TRI tem suas origens na década de 1950. Mas foi em 1997 que Bock, Zimowski (apud Andrade, Tavares e Valle (2000)) introduziram modelos logísticos de 1 parâmetro (também conhecido como modelo de Rasch), 2 (também conhecido como modelo Birbaum) e 3 parâmetros para mais de uma população. Esses modelos consideram respectivamente a dificuldade, a discriminação e a probabilidade de acerto ao acaso. Assim, surgiram novas possibilidades de comparações dos rendimentos das populações submetidas a testes diferentes, mas com itens com níveis de habilidade comuns.

Os avanços tecnológicos possibilitaram o desenvolvimento de software, que em muito ajudaram na aplicação da TRI. Em especial para a estimação dos parâmetros dos itens, um de seus pontos críticos, principalmente quando é necessário estimar tanto os parâmetros quanto os traços latentes (habilidades), que é o caso mais comum na TRI.

Conforme já mencionado, a TRI busca inferir a habilidade de um indivíduo em um determinado contexto. Para isso, utiliza-se um modelo matemático que depende de alguns parâmetros. Quando esses parâmetros são desconhecidos se faz necessário o uso de métodos de estimação para fazer afirmações sobre seus verdadeiros valores. Por exemplo, a habilidade do indivíduo representa um destes parâmetros desconhecidos.

Para a estimação dos parâmetros dos itens e das habilidades pode-se utilizar tanto a inferência clássica, como a bayesiana. Ambas as abordagens necessitam do auxílio de métodos numéricos. Em geral, a estimação clássica dos parâmetros dos itens é feita pelo Método de Máxima Verossimilhança Marginal (MVM) com o auxílio do algoritmo EM (proposto por Dempster, Laird e Rubin (1977 apud Andrade, Tavares e Valle (2000)). Já existem vários pacotes implementados na Linguagem de Programação R que utilizam a inferência clássica para a estimação dos parâmetros dos itens. A demonstração de alguns desses pacotes pode ser encontrada em Anjos e Andrade (2012). A estimação bayesiana dos parâmetros dos itens também necessita do auxílio de métodos numéricos. Neste caso, os Métodos de Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC) são os mais utilizados (GAMERMAN; LOPES, 2006).

Embora a TRI tenha surgido em aplicações na área de psicometria, em testes de personalidade, atualmente tem sido muito utilizada na área da educação. Vários países já utilizam as técnicas da TRI em aplicações de provas de avaliação educacional. Entre as mais conhecidas estão o *National Assessment of Educational Progress* (NAEP), *Test*

[2]utiliza o número total de acertos no teste como sua referência de medida. Algumas medidas que podem ser obtidas são: coeficiente de correlação ponto-bisserial, coeficiente de correlação bisserial e coeficiente alfa de Cronbach.

of English as a Foreign Language (TOEFL), o *G*raduate Management Admission Test (GMAT) nos Estados Unidos da América. Os maiores sistemas de avaliação que utilizam a TRI no Brasil são: o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) - que por ter um caráter nacional recebe o nome de Prova Brasil; Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Além desses, no Brasil existem outras avaliações de menor visibilidade que também utilizam a TRI.

A primeira etapa para o desenvolvimento deste trabalho foi a construção da matriz de referência, norteada pelas matrizes de referência do SAEB, que contemplam a maioria das competências e habilidades esperadas. A segunda consistiu na elaboração dos itens relacionados às competências e habilidades esperadas e elaboração da prova. Esta etapa foi trabalhosa, uma vez que as questões são de múltipla escolha, contendo cinco alternativas cada uma, e montar as alternativas é mais complexo do que selecionar e/ou criar itens. É importante ressaltar que, tanto a construção da matriz quanto a elaboração da prova contou com a participação de especialistas em cálculo, professores do Departamento de Matemática e Computação e da Pós-Graduação em Educação.

A prova foi elaborada de acordo com os conteúdos abordados na Matriz de Referência. Tais conteúdos foram escolhidos de tal forma a englobar todo o conteúdo necessário para o acompanhamento de disciplinas como Cálculo Diferencial e Integral I. Assim, espera-se que os alunos do 3º ano do ensino médio devem ter visto boa parte desses conteúdos e os alunos ingressantes da universidade já devem ter passado por todos eles.

Na Matriz de Referência os conteúdos apresentam alguns descritores. Cada descritor representa uma habilidade que o aluno deveria ter desenvolvido ao longo dos anos de estudo antes de ingressar em uma faculdade. A fim de não deixar a prova muito extensa, alguns itens da prova avaliam dois descritores em conjunto. Os itens são todos de múltipla escolha, ou seja, há cinco alternativas em cada item sendo apenas uma a correta.

A proposta inicial não previa a inclusão de alunos externos a UNESP, mas a greve instalada por aproximadamente três meses, atrapalhou o calendário de aplicação da prova, razão pela qual optou-se por trabalhar na FCT/UNESP somente com as disciplinas anuais de Cálculo I e incluir alunos externos a universidade.

A terceira etapa consistiu na aplicação da prova, realizada ao longo do mês de outubro de 2014, para os alunos dos cursos de Graduação já mencionados da FCT/UNESP e também para os alunos do 3º ano do ensino médio de uma escola estadual do município de Presidente Prudente, constituindo os sujeitos da pesquisa. Todos os respondentes assinaram um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido em que davam aval para o uso dos dados no trabalho. As etapas seguintes consistiram na especificação do modelo e na estimação dos itens e das habilidades, na definição dos níveis e itens âncora, e finalmente na construção da escala.

A estimação dos parâmetros dos itens e das habilidades foi feita de acordo com o enfoque bayesiano. Foi utilizado o software OpenBUGS, versão 3.2.2 rev 1063, que já tem implementados diferentes algoritmos da classe MCMC. Para maior esclarecimento sobre este software ver Lunn et al. (2000) e Spiegelhalter, Thomas e Best (2009).

Para cumprir os objetivos do trabalho, no Capítulo 2 apresentam-se os Modelos da Teoria da Resposta ao Item, com destaque para o Modelo Logístico Unidimensional de três parâmetros. No Capítulo 3, apresentam-se os métodos de estimação dos parâmetros, com ênfase na inferência bayesiana. No Capítulo 4, apresentam-se as etapas para a construção da escala, envolvendo a construção da Matriz de Referência, descrevendo os temas e competências necessárias para avaliar a proficiência em conteúdos matemáticos básicos e a elaboração dos itens, que compõem a prova a ser aplicada. No Capítulo 5 apresentam-se a discussão dos resultados e a construção da escala. E finalmente, no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões e perspectivas futuras.

Capítulo

2

Teoria da Resposta ao Item

Segundo Andrade, Tavares e Valle (2000), a Teoria da Resposta ao Item (TRI) consiste em um conjunto de modelos matemáticos, que buscam representar a probabilidade de um indivíduo responder corretamente a um item (no caso dicotômico), em função dos parâmetros do item e da habilidade do respondente (traço latente). Essa relação é expressa de tal maneira que quanto maior a habilidade, maior a probabilidade de acerto do item. Os vários modelos propostos na literatura dependem fundamentalmente de três fatores:

(i) da natureza do item — dicotômicos ou não dicotômicos;

(ii) do número de populações envolvidas — apenas uma ou mais de uma;

(iii) e da quantidade de traços latentes que está sendo medida — apenas um ou mais de um.

Para melhor entendimento do contexto TRI é necessário que fique claro o conceito de *população* e *grupo*. Conforme Andrade, Tavares e Valle (2000) quando se usa o termo *grupo*, refere-se a uma amostra de indivíduos respondentes que foram retirados de uma mesma *população*. Assim, para dois ou mais grupos, tem-se dois ou mais conjuntos distintos de indivíduos, que foram retirados de duas ou mais populações. O conceito de grupo está diretamente ligado ao processo de amostragem. No caso deste trabalho a *população* consiste de alunos ingressantes na FCT/UNESP no ano de 2014 e *grupo*, de alunos ingressantes na FCT/UNESP no ano de 2014 nos cursos da área de exatas de Matemática diurno, Estatística, Engenharia Ambiental e Engenharia Cartográfica.

Neste trabalho serão abordados apenas os modelos para dados de respostas dicotômicas ou dicotomizadas (corrigidas como certa ou errada), utilizados para avaliar apenas um traço latente (ou uma habilidade), chamados de Modelos Unidimensionais.

2.1 Modelo Logístico Unidimensional de 3 parâmetros (ML3) para respostas dicotômicas

O principal modelo em estudo é o logístico unidimensional de 3 parâmetros. Conforme Andrade, Tavares e Valle (2000), esse modelo pode ser utilizado tanto para a análise de itens de múltipla escolha dicotômicos (corrigidos como certo ou errado), como para a análise de itens abertos (dissertativos), quando também são dicotomizados.

Os modelos para itens dicotômicos de 1, 2 e 3 parâmetros, consideram, respectivamente:

(i) somente a dificuldade do item;

(ii) a dificuldade e a discriminação;

(iii) a dificuldade, a discriminação e a probabilidade de resposta correta dada por indivíduos de baixa habilidade.

A partir do modelo Logístico unidimensional de três parâmetros podemos obter os modelos mais simples de 1 ou 2 parâmetros. O modelo Logístico unidimensional de três parâmetros (ML3), segundo Andrade, Tavares e Valle (2000), é dado por

$$P(U_{ij} = 1|\theta_j, a_i, b_i, c_i) = c_i + (1 - c_i)\,\frac{1}{1 + e^{-Da_i(\theta_j - b_i)}}, \tag{2.1}$$

com i = 1, 2,. . . , I, e j = 1, 2, . . . , n, em que:

- U_{ij} representa uma variável dicotômica que assume os valores 1, quando o indivíduo j responde corretamente o item i, ou 0 quando o indivíduo j não responde corretamente o item i;
- θ_j representa a habilidade (traço latente) do j-ésimo indivíduo;
- $P(U_{ij} = 1|\theta_j, a_i, b_i, c_i)$ representa a probabilidade de um indivíduo j com habilidade θ_j responder corretamente o item i, chamada de Função de Resposta do Item (FRI);
- b_i representa o parâmetro de dificuldade (ou de posição) do item i, medido na mesma escala da habilidade;
- a_i representa o parâmetro de discriminação (ou de inclinação) do item i, com valor proporcional à inclinação da Curva Característica do Item (CCI) no ponto $b_i = \theta_j$;
- c_i o parâmetro do item que representa a probabilidade de indivíduos com baixa habilidade responderem corretamente ao item i (muitas vezes referido como a probabilidade de acerto casual).
- neste modelo, D representa um fator de escala, constante e igual a 1, mas utiliza-se o valor 1,7 quando deseja-se que a função logística forneça resultados semelhantes ao da função ogiva normal.

2.2 Curva Característica do Item - CCI

A Curva Característica do Item (CCI) é a relação entre a probabilidade $P(U_{ij} = 1|\theta_j, a_i, b_i, c_i)$ e os parâmetros do modelo, θ_j, a_i, b_i, c_i. Através da Figura 2.1 pode-se notar que o modelo proposto baseia-se no fato de que indivíduos com maior habilidade têm mais chance de responder corretamente ao item e que esta relação não é linear. Nota-se também que a CCI tem forma de "S" com inclinação e deslocamento na escala de habilidades definidos pelos parâmetros do item.

O parâmetro a_i é proporcional à derivada da tangente da curva no ponto de inflexão. Assim, não são esperados valores negativos para esse parâmetro, uma vez que indicaria que o aumento da habilidade diminuiria a probabilidade de se acertar um item. Valores muito baixos indicam que o item tem pouca discriminação (alunos com maior ou menor habilidade tem pouco diferença na probabilidade de acerto), valores muito altos indicam que a curva característica é muito "íngreme" para aquele item, ou seja, separam os alunos em basicamente dois grupos: os que têm habilidade abaixo do parâmetro b_i e os que têm habilidade acima.

O parâmetro b_i segue a mesma escala do parâmetro θ_j. O parâmetro b_i representa a habilidade necessária para uma probabilidade de acerto igual a $(1 + c_i)/2$. Assim, quanto

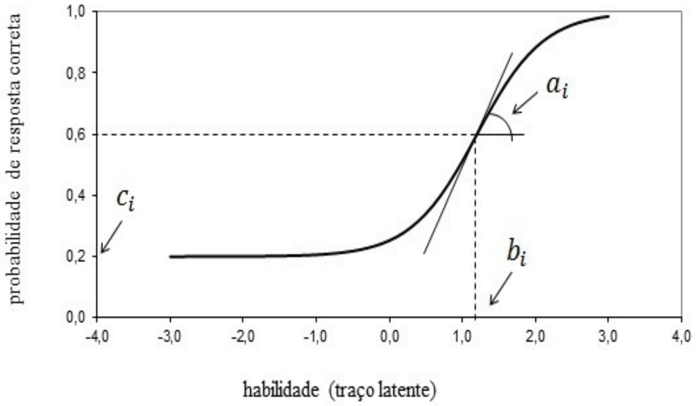


Figura 2.1: Curva Característica do Item - CCI. Fonte: Andrade, Tavares e Valle (2000).

maior o valor de b_i mais difícil o item, e vice-versa. O parâmetro c_i, por se tratar de uma probabilidade, varia entre 0 e 1. Em situações em que não faz sentido o acerto casual, o valor de c_i é igual a 0 e b_i representa o ponto na escala da habilidade onde a probabilidade de se acertar o item é $0,5$.

Em Baker (2001) pode-se encontrar curvas analisadas em relação à dificuldade e a discriminação do item. Na Figura 2.2 são representadas três curvas características. Elas têm o mesmo nível de discriminação, ou seja, o mesmo valor para o parâmetro a_i, mas diferem em relação à dificuldade (b_i). Utilizando o conceito de que as respostas são dicotomizadas (corrigidas como certa ou errada), a curva (1), representa um item fácil, pois a probabilidade de responder corretamente é alta para uma habilidade baixa. Já a curva (2) representa um item de dificuldade média. A curva (3) representa um item difícil, pois a probabilidade de responder corretamente é muito baixa para uma habilidade baixa, mas esta probabilidade aumenta para mais altos níveis de habilidade.

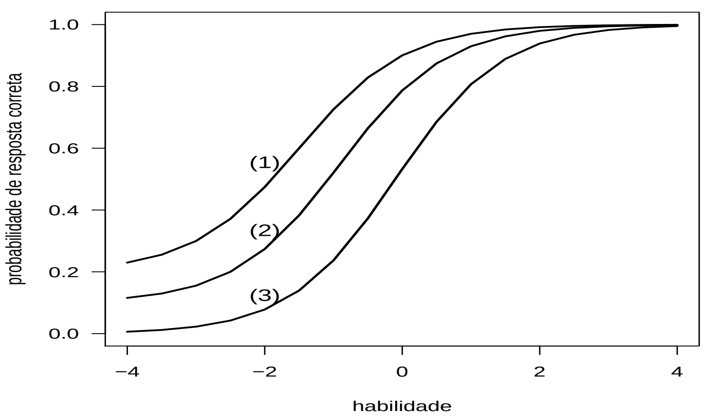


Figura 2.2: Curva Característica do Item com diferentes níveis de dificuldade, mas mesma discriminação. Fonte: Adaptado de Baker (2001).

Na Figura 2.3 está ilustrado o conceito de discriminação, em que as três CCI têm o mesmo nível de dificuldade, mas diferem na discriminação. Pode-se notar que a curva (3) tem maior nível de discriminação, enquanto a curva (2) tem um poder de discriminação médio e a curva (1) tem um baixo poder de discriminação.

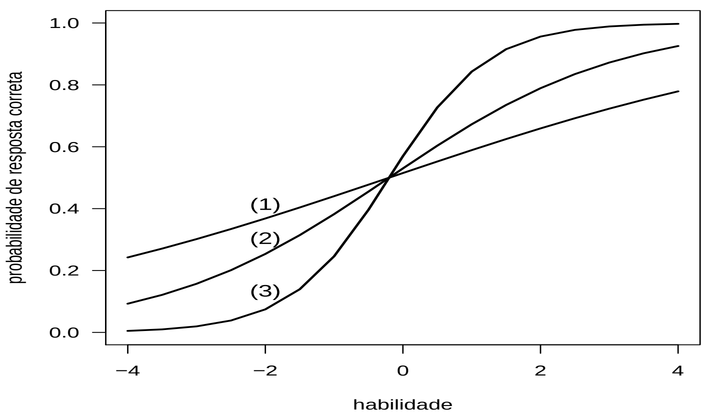


Figura 2.3: Curva Característica do Item com diferentes níveis de discriminação, mas mesma dificuldade. Fonte: Adaptado de Baker (2001).

Conforme Andrade, Tavares e Valle (2000), a habilidade segue uma escala arbitrária, onde o que importa são relações de ordem existentes entre seus pontos e não sua grandeza. Pode assumir, teoricamente, qualquer valor real entre $-\infty$ e $+\infty$. Os valores são escolhidos de modo a representar o valor médio e o desvio-padrão das habilidades dos indivíduos da população em estudo. A escala mais utilizada pela TRI é a (0,1), escala em que os gráficos das Figuras 2.1, 2.2 e 2.3 foram apresentados. Observa-se nestas figuras os valores do parâmetro b variam (tipicamente) entre -2 e $+2$. Para o parâmetro a, são esperados valores entre 0 e $+2$, sendo que os valores maiores que 1 seriam os mais apropriados.

Em termos práticos, não há diferença em se utilizar outros valores para a escala diferentes de (0,1). Segundo Pasquali e Primi (2003) e Baker (2001), na prática geralmente a escala vai de -3 a $+3$, porque entre estes dois pontos estão $99,97\%$ de todos os sujeitos de uma população. O importante são as relações de ordem existentes entre seus pontos. Por exemplo, se na escala (0,1) um indivíduo apresenta habilidade 1,40, quer dizer que ele está 1,40 desvios padrão acima da média. Agora, considerando a escala (500,100), o mesmo indivíduo tem habilidade 640 e, consequentemente, está 1,40 desvios padrão acima da habilidade média.

A transformação da escala (0,1) para qualquer outra escala, considerando sempre (μ, σ) como a média e o desvio padrão, respectivamente, é feita de modo que

$$a(\theta - b) = (a/\sigma)[(\sigma\theta + \mu) - (\sigma b + \mu)] = a^*(\theta^* - b^*),$$

em que $a(\theta - b)$ é a parte do modelo probabilístico proposto envolvido na transformação. Assim, tem-se que:

- $\theta^* = \sigma\theta + \mu$;
- $b^* = \sigma b + \mu,$;
- $a^* = a/\sigma$;
- $P(U_i = 1|\theta) = P(U_i = 1|\theta^*)$.

Como exemplo, considere um item na escala (0,1), com os valores dos parâmetros a = 0,80 e b = -0,20. Seus correspondentes valores na escala (500,100) são: $a^* = 0,008$ e $b^* = 480$.

Além disso, um indivíduo com habilidade $\theta = 1,00$ medida na escala (0,1) tem o valor de 600 para a habilidade na escala (500,100) e

$$\begin{aligned} P(U_i = 1|\theta) &= 0,2 + (1-0,2)\frac{1}{1+e^{-0,8(1-(-0,2))}} \\ &= 0,2 + (1-0,2)\frac{1}{1+e^{-0,008(600-480)}} \\ &= 0,723 \end{aligned}$$

ou seja, a probabilidade de um indivíduo responder corretamente a um certo item é sempre a mesma, independente da escala utilizada para medir a sua habilidade. Portanto, não faz sentindo analisar itens a partir dos valores de seus parâmetros sem conhecer a escala na qual eles foram determinados.

2.3 Suposições do modelo: Unidimensionalidade, Independência Local e Independência das respostas dos indivíduos

A suposição de unidimensionalidade para o modelo TRI, de acordo com Hambleton, Swaminathan e Rogers (1991) e Andrade, Tavares e Valle (2000), é a de que deve haver apenas um traço latente (θ) responsável pela elaboração de todos os itens que compõem uma prova. Parece claro que qualquer desempenho humano é sempre multideterminado ou multimotivado, dado que mais de um traço latente entra na execução de qualquer tarefa. Contudo, para satisfazer o postulado da unidimensionalidade, é suficiente admitir que haja uma habilidade (θ) dominante (um fator dominante) responsável pelo conjunto de itens. Este fator é o que se supõe estar sendo medido pelo teste.

Outra suposição do modelo TRI é a de Independência local, na qual se assume que os itens respondidos para uma dada habilidade são estatisticamente independentes entre si. Assim, tem-se que a independência local é consequência da unidimensionalidade, o que significa que a resposta de um determinado item só depende dos parâmetros do item e do traço latente do indivíduo, e a relação de ordem de apresentação dos itens, ou respostas dadas anteriormente, não tem influência sobre a resposta atual.

Além disso, também deve-se considerar que as respostas dos indivíduos diferentes são independentes. Assim, há três suposições importantes que devem ser verificadas nos modelos TRI: independência local, fundamental para o processo de estimação dos parâmetros do modelo, unidimensionalidade, que implica na independência local, e independência entre as respostas dos indivíduos.

2.4 Função Informação do Item

A Função de Informação do item é uma medida bastante utilizada em conjunto com a CCI, pois a partir dela podemos analisar o quanto um item contém de informação para a medida de habilidade. De acordo com Andrade, Tavares e Valle (2000), a função informação do item é dada por

$$I_i(\theta) = \frac{\left[\frac{d}{d\theta}P_i(\theta)\right]^2}{P_i(\theta)Q_i(\theta)}, \tag{2.2}$$

em que:

- $I_i(\theta)$ é a "informação de Fisher" fornecida pelo item i ao nível de habilidade θ;
- $\frac{d}{d(\theta)}$ é a derivada da função em relação à θ;
- $P_i(\theta) = P(U_{ij} = 1|\theta)$ e $Q_i(\theta) = 1 - P_i(\theta)$.

Para o modelo logístico de 3 parâmetros, a equação pode ser escrita como

$$I_i(\theta) = D^2 {a_i}^2 \frac{Q_i(\theta)}{P_i(\theta)} \left[\frac{P_i(\theta) - c_i}{1 - c_i}\right]^2. \tag{2.3}$$

Esta equação nos mostra a importância dos três parâmetros sobre o total de informação do item. Assim, a informação é maior:
a) quando b_i se aproxima de θ;
b) quanto maior for a_i;
c) quanto mais c_i se aproximar de 0.

2.5 Função Informação do Teste

Sob as suposições de independência, a Função Informação do Teste é a soma das informações fornecidas pelos itens que compõem a avaliação, segundo Andrade, Tavares e Valle (2000), é dada por

$$I(\theta) = \sum_{i=1}^{I} I_i(\theta) \tag{2.4}$$

em que:

- $I(\theta)$ é a quantidade de informação do teste para a variável latente θ;
- $I_i(\theta)$ é a quantidade de informação para o i-ésimo item para a variável latente θ;
- I é o número de itens do teste.

Há também outra forma de representar a Função Informação do Teste, que é pelo erro-padrão assintótico de medida, que na TRI é conhecido como erro-padrão de estimação e pelas propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança é dado por

$$EP(\hat{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{I(\hat{\theta})}}, \tag{2.5}$$

com $\hat{\theta}$ representando o estimador de máxima verossimilhança.

Observe que essas medidas de informação dependem do valor de θ. Assim, a amplitude do intervalo de confiança para θ dependerá também do seu valor. Uma das vantagens da TRI sob a TCT.

2.6 A Escala de Habilidades

Para se construir escalas de conhecimentos interpretáveis é preciso que todos os parâmetros dos itens e todas as habilidades dos respondentes (tanto populacionais como individuais) de todos os grupos avaliados estejam numa mesma métrica, isto é, pode haver comparação entre os parâmetros.

Como já comentado anteriormente, as estimativas dos parâmetros dos itens e das habilidades são de natureza arbitrária. Assim, considerando a escala (0,1), só é possível afirmar que um indivíduo com habilidade 1,80 possui conhecimento muito maior do conteúdo avaliado do que um indivíduo com habilidade -0,50, e também que o primeiro indivíduo tem uma habilidade 1,80 desvio padrão acima da média da população avaliada, enquanto que o segundo, tem habilidade 0,50 desvio padrão abaixo da média dessa mesma população. Porém, como não possuem significados práticos em termos pedagógico, nada se pode afirmar sobre o indivíduo com habilidade 1,80 saber mais do que o com habilidade -0,50, como é explicado em Andrade, Tavares e Valle (2000).

A partir disso foram criadas as escalas de habilidades ou escalas de conhecimento para tornar possível a interpretação pedagógica dos valores das habilidades. As escalas são definidas a partir de níveis âncoras, que são compostos por itens âncoras. Níveis âncora são pontos selecionados pelo analista na escala para serem interpretados pedagogicamente. Os itens âncora são selecionados a partir da definição abaixo, para cada um dos níveis âncoras. (BEATON; ALLEN, 1992; VALLE, 2001; TEZZA et al., 2009)

Definição de item âncora: Considere dois níveis âncora consecutivos Y e Z com Y < Z. Dizemos que um determinado item é *âncora para o nível Z* se e somente se as 3 condições abaixo forem satisfeitas simultaneamente:

1. $P(U = 1|\theta = Z) \geq 0,65$;
2. $P(U = 1|\theta = Y) < 0,50$ e
3. $P(U = 1|\theta = Z) - P(U = 1|\theta = Y) \geq 0,30$.

Isto é, para um item ser âncora em um determinado nível âncora da escala, ele precisa ser respondido corretamente por uma grande proporção de indivíduos (pelo menos 65%) com este nível de habilidade e por uma proporção menor de indivíduos (no máximo 50%) com nível de habilidade imediatamente anterior. E também, a diferença entre estas proporções deve ser de pelo menos 30%. Logo, para um item ser âncora ele deve ser "típico" daquele nível, isto é, com grande proporção de acertos por indivíduos com aquele nível de habilidade e pequena proporção, por indivíduos com um nível de habilidade imediatamente inferior.

A seguir é colocado um exemplo adaptado de Andrade, Tavares e Valle (2000). Na Figura 3.5, com escala -3, -2, -1, 0, 1, 2 e 3, são apresentados dois itens âncora (item 0 e item 2) para dois níveis âncora (nível 0 e nível 2). Os parâmetros dos itens são:

$$\begin{aligned} a_0 = 1,52, \quad b_0 = -0,47 \quad &\text{e } c_0 = 0,13 \\ a_2 = 1,97, \quad b_2 = 1,50 \quad &\text{e } c_2 = 0,13 \end{aligned}$$

Observando as expressões dadas a seguir pode-se verificar que os dois itens exemplificados satisfazem a definição de item âncora.

$(i)P(U_0 = 1|\theta = 0) = 0,80 \geq 0,65$

$(ii)P(U_0 = 1|\theta = -1) = 0,31 < 0,50$

$(iii)P(U_0 = 1|\theta = 0) - P(U_0 = 1|\theta = -1) = 0,80 - 0,31 = 0,49 \geq 0,30$

e

$(i)P(U_2 = 1|\theta = 2) = 0,86 \geq 0,65$

$(ii)P(U_2 = 1|\theta = 1) = 0,27 < 0,50$

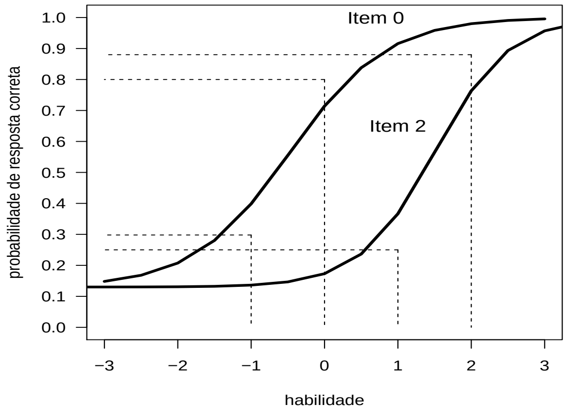


Figura 2.4: Exemplo de 2 itens âncoras. Fonte: Adaptado de Andrade, Tavares e Valle (2000).

$(iii) P(U_2 = 1|\theta = 2) - P(U_2 = 1|\theta = 1) = 0,86 - 0,27 = 0,59 \geq 0,30.$

É necessário que os níveis âncora escolhidos não sejam muito próximos um dos outros, e também que o número de itens a ser aplicado seja bem amplo de modo a possibilitar a construção e interpretação da escala de habilidades. Pois, a princípio não se tem certeza sobre quantos itens âncora serão selecionados em cada nível âncora e nem se existirão itens âncoras para todos os níveis âncoras no teste aplicado.

Para facilitar a construção e utilização da escala é comum, na área educacional, fazer uma transformação linear em todos os parâmetros envolvidos, uma vez que procura-se transformar valores negativos ou decimais em números positivos e inteiros.

Capítulo

3

Estimação dos Parâmetros

A estimação dos parâmetros dos modelos é uma das etapas mais importantes, e também um dos pontos críticos da TRI. Diversos autores salientam que a estimação dos parâmetros dos itens que caracterizam o modelo de resposta ao item e a estimação das habilidades (traço latente) dos respondentes é a etapa mais importante na TRI (ANDRADE; TAVARES; VALLE, 2000); (AZEVEDO, 2003); (HAMBLETON; SWAMINATHAN; ROGERS, 1991); (MARQUES, 2009); (GUZMÁN; CALDERÓN; SERRANO, 2010). Como dito no capítulo anterior, a probabilidade de resposta correta para um item depende somente da habilidade do indivíduo e dos parâmetros que caracterizam esse item. E, em geral, ambos são desconhecidos.

Então, para os Modelos de Resposta ao Item temos dois tipos de parâmetros a serem estimados: as habilidades dos indivíduos e os parâmetros dos itens. Logo, a estimação pode ser dividida em três situações:

1. Quando já conhecemos os parâmetros dos itens e estamos interessados em estimar as habilidades;

2. Quando já conhecemos as habilidades e estamos interessados em estimar os parâmetros dos itens;

3. Quando as habilidades e os parâmetros dos itens são desconhecidos e precisamos estimá-los simultaneamente.

O terceiro caso é o mais comum e também o mais crítico, uma vez que envolve um número maior de parâmetros a serem estimados. O processo de estimação dos parâmetros dos itens é conhecido como calibração na TRI.

Inicialmente, a estimação era feita através do método de máxima verossimilhança conjunta. Mas esse método envolve um número muito grande de parâmetros a serem estimados simultaneamente e, por consequência, grandes problemas computacionais.

Bock e Lieberman (1970 apud Andrade, Tavares e Valle (2000)) introduziram o método de máxima verossimilhança marginal, que consistia em estimar os parâmetros em duas etapas. Na primeira etapa assumia-se uma certa distribuição para as habilidades e estimavam-se os parâmetros dos itens. Na segunda, assumia-se que os parâmetros dos itens eram conhecidos e iguais aos estimados, e estimavam-se as habilidades dos respondentes. Esse método trouxe um grande avanço computacional, porém requeria que todos os parâmetros fossem estimados simultaneamente.

Bock e Aitkin (1981 apud Andrade, Tavares e Valle (2000)) propuseram uma modificação no método de estimação de máxima verossimilhança marginal utilizando o algoritmo EM introduzido por Dempster; Laird; Rubin (1977 apud Andrade, Tavares e Valle (2000)), de modo que os parâmetros pudessem ser estimados separadamente, facilitando o aspecto computacional do processo de estimação clássico.

Métodos bayesianos foram propostos para contornar alguns problemas encontrados ao utilizar a abordagem clássica. Como por exemplo, para estimar os parâmetros e as habilidades associados a itens que são respondidos corretamente ou incorretamente por todos os indivíduos, e também a estimação das habilidades dos respondentes que acertaram ou erraram todos os itens da prova. Além disso, há a possibilidade de que as estimativas clássicas dos parâmetros dos itens caiam fora do intervalo esperado, tal como valores de a_i negativos, ou valores de c_i, fora do intervalo [0,1].

O Método de Máxima Verossimilhança Marginal, bem como o método bayesiano têm sido preferidos para a estimação dos parâmetros de interesse. Neste trabalho será utilizada a abordagem bayesiana.

A função de verossimilhança desempenha papel importante tanto na estimação clássica, quanto na estimação bayesiana. Para construir a função de verossimilhança são necessárias duas suposições:

S1 – as respostas dos indivíduos são independentes;

S2 – os itens são respondidos de forma independente por cada indivíduo, fixada sua habilidade;

S3 – unidimensionalidade: há apenas uma habilidade dominante responsável pelo conjunto de itens - para este trabalho, a habilidade é proficiência em conteúdos matemáticos básicos.

Com isso, seja θ_j a habilidade e U_{ij} a variável aleatória que representa a resposta para o item i do indivíduo j, com

$$\mathrm{U}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{resposta correta,} \\ 0, & \text{resposta incorreta.} \end{cases}$$

Assim, a variável U_{ij} segue uma distribuição Bernoulli com parâmetro p_{ij}, onde p_{ij} é a probabilidade do indivíduo j responder corretamente ao item i.

Sejam $U_{.j} = (U_{1j}, U_{2j}, \ldots, U_{Ij})$ o vetor aleatório de respostas do indivíduo j e $U_{..} = (U_{.1}, U_{.2}, \ldots, U_{.n})$ o conjunto de respostas. De maneira similar, por conveniência, as observações serão representadas por $u_{ij}, u_{.j}, u_{..}$, o vetor de habilidades dos n indivíduos por $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ e $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_I)'$ o conjunto de parâmetros dos itens, com $\zeta_i = (a_i, b_i, c_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Dessa forma, a função de verossimilhança, associada ao modelo Logístico Unidimensional de três parâmetros (ML3), devido às suposições feitas em **S1** e **S2**, $L(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\theta}; u..) = P(U_{..} = u_{..}|\theta, \zeta)$ pode ser escrita como

$$L(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\theta}; u..) = \prod_{j=1}^{n} P(U_{.j} = u_{.j}|\theta_j, \boldsymbol{\zeta}) = \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{I} P(U_{ij} = u_{ij}|\theta_j, \zeta_i)$$

em que a distribuição de U_{ij} só depende de ζ através de ζ_i.

Usando $P_{ij} = P(U_{ij} = 1|\theta_j, \zeta_i)$ e $Q_{ij} = 1 - P_{ij}$ tem-se que

$$P(U_{ij} = u_{ij}|\theta_j, \zeta_i) = [P(U_{ij} = 1|\theta_j, \zeta_i)]^{u_{ij}}[P(U_{ij} = 0|\theta_j, \zeta_i)]^{1-u_{ij}} = P_{ij}^{u_{ij}} Q_{ij}^{1-u_{ij}}. \tag{3.1}$$

Assim, tem-se

$$
\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\theta}; u..) &= \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{I} \left[c_i + (1 - c_i) \frac{1}{1 + e^{-a_i(\theta_j - b_i)}} \right]^{u_{ij}} \\
&\times \left[1 - \left(c_i + (1 - c_i) \frac{1}{1 + e^{-a_i(\theta_j - b_i)}} \right) \right]^{1 - u_{ij}} \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

3.1 Abordagem Clássica

Na abordagem clássica, em geral, a estimação é feita pelo Método de Máxima Verossimilhança (MV) através da aplicação de algum processo iterativo, como por exemplo o algoritmo de Newton-Raphson ou Scoring de Fisher.

Para a situação mais comum, em que se deseja estimar os parâmetros dos itens e as habilidades dos respondentes há dois processos de estimação usuais: estimação conjunta dos parâmetros dos itens e das habilidades; ou estimação em duas etapas, estimando primeiro os parâmetros dos itens e posteriormente as habilidades.

No caso da estimação conjunta, o número de parâmetros a serem estimados pode ser extremamente grande. Para contornar problemas computacionais foi proposto um processo de *back-and-forth* por Birbaum (1968 apud Andrade, Tavares e Valle (2000)), que é iniciado por estimativas grosseiras para as habilidades, e assim, se faz a estimação dos parâmetros dos itens considerando as habilidades conhecidas, e depois estimam-se as habilidades com os parâmetros dos itens conhecidos. Esse processo é realizado até que algum critério de parada seja alcançado. Embora esse método tenha vantagens computacionais, há o problema da falta de consistência dos parâmetros dos itens (ou habilidades) na presença de um número muito grande de indivíduos (ou itens). Porém, quando o número de itens e de respondentes crescem, os EMV podem não ser viesados.

Contornando o possível problema de inconsistência causado pela estimação em uma etapa, Bock; Lieberman (1970 apud Andrade, Tavares e Valle (2000) desenvolveram a estimação em duas etapas. Este método é baseado na existência de uma distribuição (latente) associada à habilidade dos indivíduos da população em estudo Π, possibilitando que a estimação dos parâmetros dos itens seja feita pelo Método da Máxima Verossimilhança Marginal (MVM). Isto é, considerando uma determinada distribuição para a habilidade dos indivíduos de Π, cuja função densidade de probabilidade (fdp) é $g(\theta|\boldsymbol{\eta})$, onde $\boldsymbol{\eta}$ é o conjunto de parâmetros associados à Π, e integrando a função de verossimilhança em relação a θ. Após a estimação dos parâmetros dos itens são estimadas as habilidades individualmente por MV ou pela moda ou média da distribuição condicional de θ_j. Como a estimação desse método também necessita do uso de métodos numéricos, foi proposto que a obtenção das estimativas de MV seja feita com a aplicação do algoritmo EM. Este algoritmo consiste em um passo de cálculo de esperança matemática, seguido de um passo de maximização. Essa abordagem clássica é a mais comum.

Para maiores detalhes sobre os dois métodos de estimação clássico podem ser consultados Andrade, Tavares e Valle (2000) e Baker (2001).

3.2 Abordagem Bayesiana

A abordagem bayesiana consiste na atualização da distribuição a priori especificada para os parâmetros através do teorema de Bayes. A distribuição atualizada, denominada distribuição a posteriori, é obtida combinando a distribuição a priori e a função de verossimilhança. Devido à complexidade dos modelos TRI, os métodos bayesianos também necessitam do auxilio de métodos numéricos. Os mais usuais são os Métodos de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC), sendo o mais simples o amostrador de Gibbs (GAMERMAN; LOPES, 2006).

No contexto bayesiano, para a especificação completa do modelo, além da função de verossimilhança (3.2), deve-se especificar as distribuições a priori ou a distribuição a priori conjunta para os parâmetros dos itens. Considerando, por exemplo, o vetor de parâmetros $\lambda = (a, b, c, \theta)$, então a função densidade de probabilidade a posteriori é dada por

$$p(\lambda|u) \propto L(\lambda; u)p(\lambda), \tag{3.3}$$

em que $L(\lambda; u)$ representa a função de verossimilhança e $p(\lambda)$ a função distribuição de probabilidade a priori.

3.2.1 Especificação da Distribuição a priori

A escolha da distribuição a priori é uma das dificuldades da inferência bayesiana.

Utilizada de modo a introduzir informações externas ao experimento, a distribuição a priori é uma das diferenças em relação à abordagem clássica, que utiliza apenas os dados amostrais para análise, isto é, as informações contidas na função de verossimilhança.

Há uma preocupação importante na especificação da distribuição a priori, pois ela representa a certeza associada ao parâmetro, e quanto maior a certeza atribuída a priori, isto é, quanto maior a precisão a priori, maior será sua influência na distribuição a posteriori. Assim, menor será a influência da amostra, ou seja, menor a influência da função de verossimilhança.

A má escolha da distribuição a priori pode levar a resultados viesados. Baker (2001), ressalta que prioris com variâncias pequenas (informativas) e médias distantes dos verdadeiros valores dos parâmetros dos itens podem levar a resultados totalmente distorcidos. Entretanto, Harwell; Janosky (1991 apud Azevedo (2003)) sugerem que para um número grande de indivíduos, maior que 250, as variâncias das prioris para os parâmetros dos itens não tem muito efeito nas estimativas.

Para a variável latente θ_j, tanto na inferência bayesiana quanto na inferência clássica supõem-se a distribuição normal, com hiperparâmetros $\boldsymbol{\eta} = (\mu_\theta, \sigma^2_\theta)$. Usualmente utiliza-se a distribuição normal padrão.

Como o parâmetro a_i deve ser positivo, o b_i pode assumir qualquer valor real e o c_i deve estar no intervalo [0,1], deve-se assumir distribuições que levem em conta essas limitações. Isso exige um tratamento diferenciado para cada um desses parâmetros.

Seja $f(a, b, c) = \prod_{i=1}^{I} h(a_i, b_i, c_i)$ a distribuição a priori conjunta para os parâmetros dos itens. De acordo com Marques (2009), supõem-se independência a priori entre os parâmetros dos itens

$$h(a_i, b_i, c_i) = h_1(a_i)h_2(b_i)h_3(c_i).$$

Assim,

$$\mathrm{h}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \prod_{j=1}^{n} g(\theta_j) \prod_{i=1}^{I} h_1(a_i)h_2(b_i)h_3(c_i).$$

Para o parâmetro a_i geralmente adota-se as distribuições Qui-Quadrado ou Log-Normal. De acordo com Andrade, Tavares e Valle (2000), uma justificativa teórica para se assumir essas distribuições é que na prática os a_i's são, em geral, positivos, o que sugere que a distribuição de a_i pode ser modelada seguindo uma distribuição unimodal e com assimetria positiva.

Para o parâmetro b_i, definido na mesma escala da habilidade, podendo assumir qualquer valor na reta, supõem-se também distribuição Normal, com vetor de parâmetros $\tau_{b_i} = (\mu_b, \sigma_b^2)$.

Como c_i é uma probabilidade, seu valor só pode estar no intervalo [0,1]. Então, usualmente, utiliza-se a distribuição Beta como distribuição de probabilidade a priori, como proposto por Swaminathan e Gifford (1986 apud Azevedo (2003)). A função densidade da distribuição Beta com parâmetros α_i e β_i é dada por

$$f(c_i|\alpha_i, \beta_i) = \frac{\Gamma(\alpha_i + \beta_i)}{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\beta_i)} c_i^{\alpha_i - 1}(1 - c_i)^{\beta_i - 1}. \tag{3.4}$$

O uso da distribuição Beta como priori faz com que E_i (valor esperado da distribuição) seja interpretado como a probabilidade de acerto por indivíduos com baixa habilidade. Observe que

$$E_i = E[c_i|\alpha_i, \beta_i] = \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i}. \tag{3.5}$$

Assim, especifica-se os valores de α_i e β_i de modo que se tenha o valor de E_i desejado. Geralmente, atribui-se a $E_i = 1/m_i$, onde m_i é o número de alternativas do item i.

3.2.2 Especificação da Distribuição a Posteriori

Como já mencionado anteriormente, a distribuição a posteriori conjunta é obtida a partir da combinação da função de verossimilhança (3.2) com a distribuição a priori conjunta para os parâmetros, pelo teorema de Bayes. Desta forma, considerando $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n)'$, $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_I)'$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_I)'$, $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_I)'$ e $\boldsymbol{u} = u_{..}$, tem-se que a distribuição a posteriori conjunta é dada por

$$\begin{aligned}
p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|\boldsymbol{u}) &\propto \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{I} P_{ij}^{u_{ij}} Q_{ij}^{1-u_{ij}} \prod_{j=1}^{n} g(\theta_j) \prod_{i=1}^{I} h_1(a_i) \prod_{i=1}^{I} h_2(b_i) \prod_{i=1}^{I} h_3(c_i) \\
&\propto \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{I} \left[c_i + (1 - c_i)\frac{1}{1 + e^{-a_i(\theta_j - b_i)}}\right]^{u_{ij}} \\
&\times \left[1 - \left(c_i + (1 - c_i)\frac{1}{1 + e^{-a_i(\theta_j - b_i)}}\right)\right]^{1-u_{ij}} \\
&\times \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\theta} \exp\left(-\frac{(\theta_j - \mu_\theta)^2}{2\sigma_\theta^2}\right) \prod_{i=1}^{I} \frac{1}{a_i\sqrt{2\pi}\sigma_a} \exp\left(-\frac{(\ln a_i - \mu_a)^2}{2\sigma_a^2}\right) \\
&\times \prod_{i=1}^{I} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b} \exp\left(-\frac{(b_i - \mu_b)^2}{2\sigma_b^2}\right) \prod_{i=1}^{I} \frac{\Gamma(\alpha_i + \beta_i)}{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\beta_i)} c_i^{\alpha_i - 1}(1 - c_i)^{\beta_i - 1}. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

A distribuição a posteriori conjunta (3.6) não apresenta forma fechada, isto é, não apresenta uma distribuição conhecida. Logo, é necessário o uso de métodos numéricos para fazer inferência sobre os parâmetros do modelo. Aqui será utilizado o amostrador de Gibbs, já implementado no software estatístico OpenBUGS, direcionado para inferência bayesiana em modelos complexos. O amostrador de Gibbs, algoritmo da classe dos Métodos de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC), consiste em um esquema markoviano de atualização, que permite a obtenção de amostras de uma distribuição conjunta através de amostragens iterativas das distribuições condicionais completas (GAMERMAN; LOPES, 2006).

Neste caso, as distribuições condicionais completas necessárias para a geração das amostras são:

$$
\begin{aligned}
1.\ p(a_i|\boldsymbol{\theta}, b_i, c_i, \boldsymbol{u}) &\propto \prod_{j=1}^{n} P_{ij}^{u_{ij}} Q_{ij}^{1-u_{ij}} h_1(a_i) \\
&\propto \prod_{j=1}^{n} \left[c_i + (1-c_i)\frac{1}{1+e^{-a_i(\theta_j - b_i)}}\right]^{u_{ij}} \\
&\times \left[1 - \left(c_i + (1-c_i)\frac{1}{1+e^{-a_i(\theta_j - b_i)}}\right)\right]^{1-u_{ij}} \\
&\times \frac{1}{a_i\sqrt{2\pi}\sigma_a} \exp\left(-\frac{(\ln a_i - \mu_a)^2}{2\sigma_a^2}\right),\ i = 1, 2, \ldots, I; \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2.\ p(b_i|\boldsymbol{\theta}, a_i, c_i, \boldsymbol{u}) &\propto \prod_{j=1}^{n} P_{ij}^{u_{ij}} Q_{ij}^{1-u_{ij}} \prod_{i=1}^{I} h_2(b_i) \\
&\propto \prod_{j=1}^{n} \left[c_i + (1-c_i)\frac{1}{1+e^{-a_i(\theta_j - b_i)}}\right]^{u_{ij}} \\
&\times \left[1 - \left(c_i + (1-c_i)\frac{1}{1+e^{-a_i(\theta_j - b_i)}}\right)\right]^{1-u_{ij}} \\
&\times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b} \exp\left(-\frac{(b_i - \mu_b)^2}{2\sigma_b^2}\right),\ i = 1, 2, \ldots, I; \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3.\ p(c_i|\boldsymbol{\theta}, a_i, b_i, \boldsymbol{u}) &\propto \prod_{j=1}^{n} P_{ij}^{u_{ij}} Q_{ij}^{1-u_{ij}} h_3(c_i) \\
&\propto \prod_{j=1}^{n} \left[c_i + (1-c_i)\frac{1}{1+e^{-a_i(\theta_j - b_i)}}\right]^{u_{ij}} \\
&\times \left[1 - \left(c_i + (1-c_i)\frac{1}{1+e^{-a_i(\theta_j - b_i)}}\right)\right]^{1-u_{ij}} \\
&\times \frac{\Gamma(\alpha_i + \beta_i)}{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\beta_i)} c_i^{\alpha_i - 1}(1-c_i)^{\beta_i - 1},\ i = 1, 2, \ldots, I; \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4.\ p(\theta_j|\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{u}) &\propto \prod_{i=1}^{I} P_{ij}^{u_{ij}} Q_{ij}^{1-u_{ij}} g(\theta_j) \\
&\propto \prod_{i=1}^{I} \left[c_i + (1-c_i)\frac{1}{1+e^{-a_i(\theta_j - b_i)}}\right]^{u_{ij}} \\
&\times \left[1 - \left(c_i + (1-c_i)\frac{1}{1+e^{-a_i(\theta_j - b_i)}}\right)\right]^{1-u_{ij}} \\
&\times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\theta} \exp\left(-\frac{(\theta_j - \mu_\theta)^2}{2\sigma_\theta^2}\right),\ j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

O software OpenBUGS é dotado da capacidade de reconhecer formas conjugadas e escolher o melhor esquema para a geração das distribuições de interesse. A utilização deste software facilita a análise uma vez que só exige a especificação da função de verossimilhança e das distribuições a priori para os parâmetros, conforme código apresentado no Apêndice D.

3.3 Estimação das habilidades

Considerando que indivíduos diferentes não possuem informação de outros indivíduos, pode-se considerar que seus traços latentes são estocasticamente independentes e, dessa forma, tratar os respectivos processos de estimação em separado. Portanto, a distribuição a posteriori do traço latente de um determinado indivíduo é dada por

$$g(\theta_j|\boldsymbol{u}_{.j},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta}) \propto l(\theta_j,\boldsymbol{\zeta};\boldsymbol{u_{.j}})g(\theta_j|\boldsymbol{\eta}), \tag{3.11}$$

em que $l(\theta_j,\boldsymbol{\zeta};\boldsymbol{u_{.j}}) = \prod_{i=1}^{I} P_{ij}^{u_{ij}} Q_{ij}^{1-u_{ij}}$.

Observe que a distribuição (3.11) é estimada diretamente quando se utiliza a inferência bayesiana, pois representa a distribuição condicional completa em (3.10).

Os estimadores para as habilidades mais tradicionais adotados são a moda, conhecida como Estimação pelo Máximo da Posteriori (MAP) ou a média, Estimação pela Média da Posteriori (EAP).

Capítulo

4

Sistemas de Avaliação e Matrizes de Referência

Conforme já mencionado, o principal objetivo deste trabalho é a construção de uma escala para medir proficiência em conteúdos matemáticos básicos dos ingressantes em cursos de graduação da área de exatas.

As etapas para a construção desta escala foram especificadas como:

1. Construção da Matriz de Referência para o propósito do trabalho;
2. Elaboração da prova baseada na Matriz construída;
3. Aplicação da prova e leitura dos dados;
4. Especificação do modelo e estimação dos parâmetros dos itens e das habilidades;
5. Definição de níveis e itens âncora;
6. Construção da escala.

As etapas 1 e 2 são discutidas ao longo deste Capítulo, e as etapas 4, 5 e 6, ao longo do Capítulo 5.

A seguir são descritos os principais Sistemas Brasileiros de Avaliação, uma vez que para a construção da Matriz de Referência para este trabalho foram consultados estes sistemas. Todavia, foi utilizado como base para a construção da Matriz de Referência apenas o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB).

4.1 Os Sistemas Brasileiros de Avaliação Educacional

Cada sistema de avaliação educacional tem uma finalidade diferente, embora todos de alguma maneira sejam usados para medir o conhecimento e o rendimento escolar adquirido pelos alunos em cada série avaliada.

Para melhor entendimento a respeito dos Sistemas de Avaliação educacionais do Brasil, aqui serão apresentados os sistemas de avaliação em larga escala que utilizam a TRI para a estimação das habilidades e que estão em constante atualização.

4.1.1 SAEB

O Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), de acordo com o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas (BRASIL, 2014), tem como objetivo principal avaliar a Educação Básica brasileira e contribuir para a melhoria de sua qualidade e para a universalização do acesso a escola, oferecendo subsídios concretos para a formulação, reformulação e monitoramento das políticas públicas voltadas para a Educação Básica. Além disso, procura também oferecer dados e indicadores que possibilitem maior compreensão dos fatores que influenciam o desempenho dos alunos nas áreas e anos avaliados.

O SAEB é composto por três avaliações externas em larga escala: Avaliação Nacional da Educação Básica (ANEB), Avaliação Nacional do Rendimento Escolar (ANRESC/Prova Brasil) e Avaliação Nacional da Alfabetização (ANA). A ANEB e a ANRESC/Prova Brasil são realizadas bianualmente, enquanto a ANA é de realização anual. É importante ressaltar que estas avaliações envolvem somente as disciplinas Língua Portuguesa e Matemática.

A ANEB é realizada de maneira amostral por alunos das redes públicas somente no 3º ano do Ensino Médio, e privadas do país, em áreas urbanas e rurais, matriculados na 4ª série/5º ano e 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental e no 3º ano do Ensino Médio. Tem como objetivo principal avaliar a qualidade, a equidade (direito de cada um) e a eficiência da educação brasileira. Apresenta os resultados do país como um todo, das regiões geográficas e das unidades da federação.

A ANRESC (também denominada "Prova Brasil") é uma avaliação censitária envolvendo alunos da 4ª série/5º ano e 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental das escolas públicas das redes municipais, estaduais e federal, com o objetivo de avaliar a qualidade do ensino ministrado nas escolas públicas. Participam desta avaliação as escolas que possuem, no mínimo, 20 alunos matriculados nas séries/anos avaliados, sendo os resultados disponibilizados por escola e por ente federativo.

A ANA é uma avaliação censitária envolvendo alunos do 3º ano do Ensino Fundamental das escolas públicas, com objetivo principal de avaliar os níveis de alfabetização e letramento em Língua Portuguesa, alfabetização Matemática e condições de oferta do Ciclo de Alfabetização das redes públicas. A ANA foi incorporada ao SAEB pela Portaria nº 482, de 7 de junho de 2013.

4.1.2 SARESP

Conforme a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo Secretaria (2014), <http://www.educacao.sp.gov.br/>, o Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP) é uma avaliação externa em larga escala da Educação Básica, aplicada a cada ano desde 1996. Sua finalidade é produzir um diagnóstico da situação da escolaridade básica na rede pública de ensino paulista, visando orientar os gestores do ensino no monitoramento das políticas voltadas para a melhoria da qualidade educacional. Ou seja, o objetivo é avaliar as escolas como um todo e não os alunos individualmente. Anualmente, o SARESP avalia os alunos dos 2º, 3º, 5º, 7º e 9º anos do Ensino Fundamental e do 3º ano do Ensino Médio por meio de provas cognitivas nas áreas de Língua Portuguesa com Redação e Matemática, com alternância entre as disciplinas das áreas de Ciências Humanas (Geografia e História) e Ciências da Natureza (Biologia, Física e Química) aos alunos do 7º e 9º ano do Ensino Fundamental e do 3º ano do Ensino Médio.

É importante ressaltar que existem outros Sistemas de Avaliação estaduais em larga escala tão importantes quanto o SARESP. Cada estado brasileiro utiliza um sistema para avaliar suas escolas. Em todos os sistemas estaduais as notas das avaliações de Língua Portuguesa e Matemática são colocas na escala do SAEB.

4.1.3 ENEM

De acordo com o (BRASIL, 2014), o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) foi criado em 1998 com o objetivo de avaliar o desempenho do estudante ao fim da educação básica, buscando contribuir para a melhoria da qualidade desse nível de escolaridade. Mas a partir de 2009, quando se implementou a TRI, passou a ser utilizado também como mecanismo de seleção para o ingresso no ensino superior. Foram implementadas mudanças no Exame que contribuem para a democratização das oportunidades de acesso às vagas oferecidas por Instituições Federais de Ensino Superior (IFES), para mobilidade acadêmica e para induzir a reestruturação dos currículos do ensino médio. Respeitando a autonomia das universidades, a utilização dos resultados do ENEM para acesso ao ensino superior pode ocorrer como fase única de seleção ou combinado com seus processos seletivos próprios. O ENEM também pode ser utilizado para o acesso a programas oferecidos pelo governo, tal como o Programa Universidade para Todos (ProUni) e concessão de bolsas em alguns projetos do Programa de Licenciaturas Internacionais (PLI).

4.2 Construção da Matriz de Referência

A matriz de referência para este trabalho é baseada nas matrizes de referência que norteiam os testes de Matemática do SAEB. Estas matrizes estão estruturadas sobre o foco de Resolução de Problemas. Utiliza-se esta opção pois acredita-se que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução.

A matriz de Referência para este trabalho é composta em grande parte por competências e habilidades que compõem as matrizes de matemática do SAEB e de outros conteúdos que envolvem o pré-cálculo. A razão para a construção de uma nova matriz ao invés do uso destas já desenvolvidas, está no fato de que nem todas as competências inclusas nestas matrizes são necessárias para este estudo, e outras deveriam ser incluídas.

Escolheu-se o SAEB como base devido a esse sistema ser de nível nacional, ter matrizes de referências desenvolvidas desde 1997 e incluir quase todos os conteúdos matemáticos básicos exigidos para o acompanhamento da disciplina de Cálculo I e similares. De acordo com o Brasil (2011), no Plano de Desenvolvimento de Ensino (PDE), as matrizes do SAEB têm por referência os Parâmetros Curriculares Nacionais e foram construídas a partir de uma consulta nacional aos currículos propostos pelas Secretarias Estaduais de Educação e por algumas redes municipais. O Instituto Nacional de Estudos e Pesquisa (INEP) consultou também professores regentes das redes municipal, estadual e privada e, ainda, examinou os livros didáticos mais utilizados para estas séries, nas citadas redes, como pode ser visto em <http://portal.inep.gov.br/>.

Conforme discutido no PDE, as Matrizes de Referência de Matemática, diferentemente do que se espera de um currículo, não trazem orientações ou sugestões de como trabalhar em sala de aula. Além disso, não mencionam certas habilidades e competências que, embora sejam importantes, não podem ser medidas por meio de uma prova escrita. Em outras palavras, as Matrizes de Referências de Matemática do SAEB não avaliam todos os conteúdos que devem ser trabalhados pela escola no decorrer dos períodos avaliados. Sob esse aspecto, parece também ser evidente que o desempenho dos alunos em uma prova com questões de múltipla escolha não fornece ao professor indicações de todas as habilidades e competências desenvolvidas nas aulas de matemática e propostas para a escolaridade básica.

Dessa forma, as Matrizes mencionadas envolvem habilidades relacionadas a conhecimentos e a procedimentos que podem ser objetivamente verificados. Portanto, deve ser a referência para a elaboração dos itens da prova a ser aplicada.

A construção da Matriz de Referência para este trabalho tomou como base as matrizes de referências do SAEB, que encontram-se disponíveis nos Anexos 1 e 2. Seguindo o mesmo formato de construção dessas matrizes, a utilizada neste trabalho é separada por temas, que espera-se ter sido desenvolvidos pelos alunos ao longo do Ensino Fundamental e Médio. Os temas abordados consideram Espaço e Forma, Grandezas e Medidas, Número e operações, envolvendo álgebra e funções, conforme organizado nos Quadros 1, 2 e 3, respectivamente. Cada tema traz um conjunto de competências que estão relacionadas aos mesmos.

A Matriz foi estruturada com as competências caracterizadas pela letra C. Cada competência busca avaliar uma habilidade desenvolvida pelos alunos. A maior parte das competências foi retirada das Matrizes de referência do SAEB, aplicadas ao Ensino Fundamental para o 9º ano (antiga 8ª série) e Ensino Médio para a 3ª série. Algumas competências foram acrescentadas à Matriz de Referência deste trabalho com a finalidade de abordar todos os conteúdos necessários para o desenvolvimento da disciplina de cálculo e similares. Na construção dessa Matriz toda competência vem acompanhada de uma informação sobre sua origem e o que se pretende avaliar.

É importante ressaltar a importância de cada competência para o conteúdo de cálculo e similares. Algumas competências podem dar a impressão de serem básicas e não terem relevância para o desenvolvimento das disciplinas. Porém, como exemplo, temos a competência da identificação da localização de pontos no plano cartesiano. Mesmo parecendo simples, esta competência é a base para a disciplina, onde o aluno começa a ter estrutura para a construção de gráficos, que são utilizados para o estudo do comportamento de funções. Na ausência de habilidade nessa competência o aluno não consegue dar sequência ao conteúdo que envolve as disciplinas de cálculo e similares. Portanto, vale enfatizar que cada uma das competências na Matriz de Referência tem papel fundamental dentro dos conteúdos de cálculo.

Ressalta-se, ainda, que tanto a construção da Matriz como a elaboração da prova contou com a participação de especialistas em cálculo, professores do Departamento de Matemática e Computação e da Pós-graduação em Educação. Além disso, contou com o auxílio de um professor do Departamento de Cartografia para a elaboração do cartão-resposta e leitura digital dos mesmos.

Antes de descrever os temas base para a construção da Matriz de Referência se faz necessário mencionar que foram acrescentadas 4 competências que não faziam parte da Matriz do SAEB. As competências 25, 27, 29 e 30 foram adicionadas a Matriz de Referência para que todos os conteúdos matemáticos básicos, importantes para o acompanhamento das disciplinas do núcleo básico, fossem abordados. A seguir podem ser observados os temas base acompanhados de um quadro em que são descritas as competências e sua origem, por exemplo, descritor da Matriz de Referência da Prova Brasil.

A matriz de Referência utilizada, com as competências separadas por tema, é apresentada no A.

Quadro 1: Tema I. Espaço e Forma

Nº	Competência	Origem do Descritor
C1	Identificar a localização de pontos no plano cartesiano	Descritor 6 da Matriz do Ensino Médio do SAEB
C2	Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta	Descritor 7 da Matriz do Ensino Médio do SAEB
C3	Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação	Descritor 8 da Matriz do Ensino Médio do SAEB
C4	Relacionar a determinação do ponto de intersecção de duas ou mais retas com a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas	Descritor 9 da Matriz do Ensino Médio do SAEB
C5	Reconhecer, dentre as equações do segundo grau com duas incógnitas, as que representam circunferências	Descritor 10 da Matriz do Ensino Médio do SAEB

Quadro 2: Tema II. Grandezas e Medidas

Nº	Competência	Origem do Descritor
C6	Resolver problemas envolvendo cálculo de perímetro de figuras planas	Descritor 11 da Matriz do Ensino Médio do SAEB
C7	Resolver problemas envolvendo cálculo de área de figuras planas	Descritor 12 da Matriz da Ensino Médio do SAEB
C8	Resolver problemas envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera)	Descritor 13 da Matriz do Ensino Médio do SAEB

Quadro 3: Tema III. Números e Operações/ Álgebra e Funções

Nº	Competência	Origem do Descritor
C9	Identificar a localização de Números reais na reta numérica	Descritor 14 da Matriz do Ensino Médio do SAEB
C10	Resolver problemas com números naturais e inteiros envolvendo diferentes significados das operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação)	Descritor 19 da Matriz do Ensino Fundamental da Prova Brasil
C11	Identificar a localização de números racionais na reta numérica	Descritor 17 da Matriz do Ensino Fundamental da Prova Brasil
C12	Reconhecer diferentes representações de um número racional	Descritor 21 da Matriz do Ensino Fundamental da Prova Brasil

(continuação)

Nº	Competência	Origem do Descritor
C13	Identificar frações como representação que pode estar associada a diferentes significados	Descritor 22 da Matriz do Ensino Fundamental da Prova Brasil
C14	Identificar frações equivalentes	Descritor 23 da Matriz do Ensino Fundamental da Prova Brasil
C15	Efetuar cálculos que envolvam operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais	Descritor 25 da Matriz do Ensino Fundamental da Prova Brasil
C16	Resolver problemas com números racionais que envolvam as operações: adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação	Descritor 26 da Matriz do Ensino Fundamental da Prova Brasil
C17	Efetuar cálculos com valores aproximados de radicais	Descritor 27 da Matriz do Ensino Fundamental da Prova Brasil
C18	Calcular o valor numérico de uma expressão algébrica	Descritor 30 da Matriz do Ensino Fundamental da Prova Brasil
C19	Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras (padrões)	Descritor 32 da Matriz do Ensino Fundamental da Prova Brasil
C20	Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela	Descritor 18 da Matriz do Ensino Médio do SAEB
C21	Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos	Descritor 20 da Matriz do Ensino Médio do SAEB
C22	Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em texto	Descritor 21 da Matriz do Ensino Médio do SAEB
C23	Identificar e resolver problemas que envolvam funções de primeiro grau	Descritor 19 da Matriz do Ensino Médio do SAEB
C24	Reconhecer a representação algébrica de uma função do primeiro grau dado o seu gráfico	Descritor 24 da Matriz do Ensino Médio do SAEB
C25	Identificar e resolver problemas de inequações de primeiro grau	Competência acrescentada a nossa Matriz
C26	Identificar e resolver problemas que envolvam equações de segundo grau	Descritor 17 da Matriz do Ensino Médio do SAEB
C27	Identificar e resolver problemas de inequações de segundo grau	Competência acrescentada a nossa Matriz
C28	Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo no gráfico de uma função polinomial do segundo grau	Descritor 25 da Matriz do Ensino Médio do SAEB
C29	Identificar e resolver equações modulares	Competência acrescentada a nossa Matriz
C30	Identificar e resolver inequações modulares	Competência acrescentada a nossa Matriz

(continuação)

Nº	Competência	Origem do Descritor
C31	Reconhecer o gráfico de uma função polinomial de primeiro grau por meio de seus coeficientes	Descritor 23 da Matriz do Ensino Médio do SAEB
C32	Relacionar as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do primeiro grau	Descritor 26 da Matriz do Ensino Médio do SAEB
C33	Identificar a representação gráfica e/ou algébrica de uma função exponencial	Descritor 27 da Matriz do Ensino Médio do SAEB
C34	Identificar a representação gráfica e/ou algébrica de uma função logarítmica, reconhecendo-a como inversa da função exponencial	Descritor 28 da Matriz do Ensino Médio do SAEB
C35	Resolver problemas que envolvam função exponencial	Descritor 29 da Matriz do Ensino Médio do SAEB
C36	Identificar a representação gráfica e/ou algébrica de funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente), reconhecendo suas propriedades	Descritor 30 da Matriz do Ensino Médio do SAEB

4.3 Itens associados às competências e Elaboração da Prova

A seguir são apresentados os itens que farão parte da prova a ser aplicada, para cada tema, incluindo as competências e habilidades relacionadas. A fim de não deixar a prova muito extensa, foram colocados alguns itens de caráter mais amplo que abordam mais de uma competência. Para cada item há uma breve descrição informando a que competência está relacionado e de onde foi tirado. A alternativa em negrito corresponde a resposta correta. A prova no formato da aplicação pode ser encontrada no Apêndice B.

Tema I. Espaço e Forma

Este tema é aquele em que o aluno estabelece maior compreensão da matemática.

C1 – Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.
Pretende avaliar a habilidade de identificar adequadamente um ponto no plano a partir de seu par ordenado, ou vice-versa.

C2 – Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.
Pretende avaliar a habilidade de identificar os coeficientes de uma equação de 1º grau.

C3 – Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.
Pretende-se avaliar a habilidade de construir a equação de uma reta a partir de dois de seus pontos ou então a partir de um ponto e de sua inclinação.

C4 – Relacionar a determinação do ponto de intersecção de duas ou mais retas com a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas.

Pretende-se avaliar a habilidade de relacionar dois importantes conceitos matemáticos: a resolução de problemas que envolvam um sistema de equações com duas incógnitas e a determinação do ponto de intersecção de duas retas.

O item a seguir tem por finalidade avaliar duas competências juntas, as **C1** e **C3**. Foi retirado do PDE do SAEB para o Ensino Médio como um exemplo de item para o descritor 8.

Item: Qual é a equação da reta que contém os pontos (3,5) e (4,-2)?

(A) $y = -7x + 26$

(B) $y = -\frac{1}{7}x - \frac{10}{7}$

(C) $y = \frac{1}{7}x - \frac{18}{7}$

(D) $y = x + 2$

(E) $y = 7x - 16$

O item abaixo foi feito de modo a avaliar duas competências juntas, **C2** e **C4**. Baseado no exemplo de item apresentado pelo PDE do SAEB do Ensino Médio para o descritor 7.

Item: As retas das equações (1) $2y + x = 0$ e (2) $y + 1 = 0$

(i) a reta (2) é paralela ao eixo OX.

(ii) a reta (2) é paralela ao eixo OY.

(iii) a reta (1) tem coeficiente angular $-\frac{1}{2}$.

(iv) a reta (1) tem coeficiente angular $\frac{1}{2}$.

(v) as retas (1) e (2) se interceptam no ponto (2,-1).

Dessas afirmações acima:

(A) Somente (v) é verdadeira

(B) Somente (i) e (ii) são verdadeiras

(C) Somente (ii) e (iv) são verdadeiras

(D) Somente (i), (iii) e (v) são verdadeiras

(E) Todas são verdadeiras

C5 – Reconhecer, dentre as equações do segundo grau com duas incógnitas, as que representam circunferências.
Pretende avaliar a capacidade de o aluno reconhecer, dentre um conjunto de equações de 2º grau, aquela que representa a equação de uma circunferência.

O item abaixo é um exemplo de item para o descritor 10 do PDE para o SAEB aplicado ao Ensino Médio.

Item: Dentre as equações abaixo, pode-se afirmar que a de uma circunferência é

(A) $(x - 1)^2 + y^2 = 25$

(B) $x^2 - y - 4x = -3$

(C) $x^2 + y^2 = -16$

(D) $x^2 - y - 9 = 0$

(E) $x^2 - y^2 - 4x = 9$

Tema II. Grandezas e Medidas

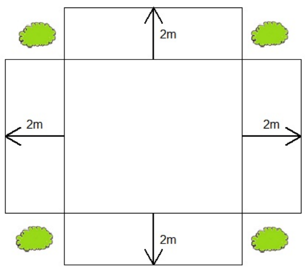
Medir é uma atividade que está presente no cotidiano das pessoas. O estudo desse campo é de grande importância para o desenvolvimento da disciplina de cálculo I, pois as integrais são fortemente ligadas ao cálculo de áreas e volume de sólidos

C6 – Resolver problemas envolvendo cálculo de perímetro de figuras planas.
Pretende avaliar a habilidade de o aluno resolver problemas do cotidiano utilizando cálculo de perímetro.

C7 – Resolver problemas envolvendo cálculo de área de figuras planas.
Pretende avaliar a habilidade de o aluno resolver problemas do cotidiano utilizando cálculo de áreas.

O item a seguir foi baseado no exemplo de item para o descritor 11 apresentado no PDE do SAEB para o Ensino Médio e reformulada a fim de avaliar as competências **C6** e **C7** juntas.

Item: Uma praça quadrada, que possui o perímetro de 24 metros, tem uma árvore próxima de cada vértice e fora dela. Deseja-se aumentar a área da praça, alterando-se sua forma e mantendo as árvores externas a ela conforme ilustra a figura.



Nessas condições, qual foi o aumento da área da praça?

(A) 12 m^2

(B) 24 m^2

(C) 36 m^2

(D) 48 m^2

(E) 84 m^2

C8 – Resolver problemas envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).
Pretende avaliar a habilidade de resolver problemas que envolvam cálculo de área e volume de sólidos geométricos.

O item que avalia essa competência é apresentado a seguir. Foi baseado no exemplo de item para o descritor 13 no PDE so SAEB para o Ensino Médio.

Item: Um corpo cilíndrico, com 4 cm de raio e 12 cm de altura, está com água até a altura de 8 cm. Foram colocadas em seu interior bolas de gude de 2 cm de diâmetro, e o nível da água atingiu a boca do vidro, sem derramamento.

Quantas bolas de gude foram colocadas?

(A) 32

(B) 48

(C) 64

(D) 80

(E) 96

Tema III. Números e Operações/Álgebra e Funções

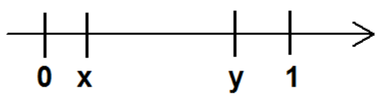
Este tema é composto por conteúdos vistos desde o Ensino Fundamental, de caráter cumulativo, ou seja, os conteúdos mais avançados do Ensino Médio dependem do entendimento do aluno em conteúdos mais simples, visto no Ensino Fundamental. Para o entendimento das definições da disciplina de cálculo e similares, na maioria das vezes é necessária a compreensão da base matemática vista nos conteúdos do Ensino Fundamental e Médio.

C9 – Identificar a localização de números reais na reta numérica.

Pretende avaliar a habilidade de os alunos representarem a posição de números reais na reta numérica.

O item que a avalia essa competência foi retirado do PDE do SAEB para o Ensino Médio como exemplo de item para o descritor 14.

Item: Na figura abaixo estão representados os números reais 0, x, 1, y.



A posição do produto xy é

(A) à esquerda do zero

(B) entre 0 e x

(C) entre x e y

(D) entre y e 1

(E) à direita de 1

C10 – Resolver problemas com números naturais e inteiros envolvendo diferentes significados das operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).

Pretende avaliar a habilidade de resolver problemas utilizando-se das cinco operações com números naturais.

O item que avalia essa competência foi retirado do PDE da Prova Brasil para o Ensino Fundamental. É apresentado como exemplo de item para o descritor 19.

Item: Num cinema, há 12 fileiras com 16 poltronas e 15 fileiras com 18 poltronas. O número de poltronas é

(A) 78

(B) 192

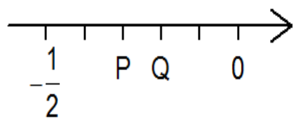
(C) 270

(D) 462

(E) 480

C11 – Identificar a localização de números racionais na reta numérica.
Pretende avaliar a habilidade de localizar números racionais na reta representativa do conjunto Q, reconhecendo que entre dois números racionais existem infinitos outros racionais.
O item abaixo foi retirado do PDE da Prova Brasil para o Ensino Fundamental apresentado como exemplo de item para o descritor 17.

Item: A figura abaixo mostra os pontos P e Q que correspondem a números racionais e foram posicionados na reta numerada do conjunto dos racionais.



Os valores atribuídos a P e Q, conforme suas posições na reta numérica são:

(A) P $= -\frac{1}{5}$ e Q $= -\frac{3}{10}$

(B) P $= -\frac{3}{10}$ e Q $= -\frac{1}{5}$

(C) P $= -\frac{3}{5}$ e Q $= -\frac{7}{10}$

(D) P $= -\frac{7}{10}$ e Q $= -\frac{3}{5}$

(E) P $= -\frac{3}{5}$ e Q $= -\frac{1}{5}$

C12 – Reconhecer diferentes representações de um número racional.
Pretende avaliar a habilidade de identificar números racionais nas suas diversas representações: fracionária, decimal ou percentual.
O item para essa competência foi retirado do PDE da Prova Brasil do Ensino Fundamental apresentado um exemplo de item para o descritor 21.

Item: No Brasil $\frac{3}{4}$ da população vive na zona urbana.

De que outra forma podemos representar esta fração?

(A) 7,5%

(B) 15%

(C) 25%

(D) 34%

(E) 75%

C13 – Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados.
Pretende avaliar a habilidade de reconhecer frações em diversas representações como, por exemplo, partes de um inteiro, relação entre conjuntos, razão entre medidas, etc.
O item abaixo avalia essa competência foi baseado no exemplo de item para o descritor 22 do PDE da Prova Brasil do Ensino Fundamental.

Item: Dos 11 jogadores de um time de futebol, apenas 5 tem menos de 25 anos de idade.

A fração de jogadores com mais de 25 anos de idade é:

(A) $\frac{5}{6}$

(B) $\frac{6}{5}$

(C) $\frac{5}{11}$

(D) $\frac{6}{11}$

(E) $\frac{5}{25}$

C14 – Identificar frações equivalentes.
Pretende avaliar a habilidade de reconhecer que uma fração pode também ser representada por um conjunto infinito de outras frações equivalentes a ela.
O item a seguir foi retirado do PDE da Prova Brasil do Ensino Fundamental onde é apresentado como exemplo de item para o descritor 23.

Item: Quatro amigos, João, Pedro, Ana e Maria saíram juntos para fazer um passeio por um mesmo caminho. Até agora, João andou $\frac{6}{8}$ do caminho; Pedro, $\frac{9}{12}$; Ana, $\frac{3}{8}$ e Maria, $\frac{4}{6}$.

Os amigos que se encontram no mesmo ponto de caminho são

(A) João e Pedro

(B) João e Ana

(C) Ana e Maria

(D) Pedro e Ana

(E) Maria e João

C15 – Efetuar cálculos que envolvam operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais.
Pretende avaliar a habilidade de efetuar cálculos de expressões com diferentes representações do números racionais e envolvendo as operações básicas do conjunto Q.
O item a seguir foi baseado no exemplo de item apresentado no PDE da Prova Brasil do Ensino Fundamental, onde é apresentado como exemplo de item para o descritor 25.

Item: A professora de matemática propôs como exercício a expressão

$$\left[\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]^2$$

Os alunos que resolveram corretamente a expressão encontraram como resultado
(A) $-\frac{8}{9}$

(B) 0

(C) $\frac{8}{9}$

(D) 2

(E) $\frac{64}{81}$

C16 – Resolver problemas com números racionais que envolvam as operações: adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação.
Pretende avaliar a habilidade de resolver problemas utilizando-se das cinco operações com números racionais.
O item a seguir foi retirado do exemplo de item para o descritor 26 do PDE da Prova Brasil do Ensino Fundamental.

Item: Uma horta comunitária será criada em uma área de 5100 m^2. Para o cultivo de hortaliças, serão destinados $\frac{2}{3}$ dessa área.

Quantos metros quadrados serão utilizados nesse cultivo?

(A) 170

(B) 340

(C) 1700

(D) 2550

(E) 3400

C17 – Efetuar cálculos com valores aproximados de radicais.
Pretende avaliar a habilidade de resolver expressões com radicais não exatos, resolvendo os radicais com aproximações, como no caso dos números irracionais.
O item que segue é uma questão do vestibular do MACK-SP, retirado do livro do Dante, (DANTE, 2000).

Item: Supondo $\sqrt[4]{8} = 1,68$, o valor mais próximo de $\sqrt{\frac{0{,}09}{\sqrt{2}}}$ é:

(A) 25,2

(B) 0,0252

(C) 0,252

(D) 2,5

(E) 0,00252

C18 – Calcular o valor numérico de uma expressão algébrica.
Pretende avaliar a habilidade de substituir as variáveis da expressão por números inteiros e calcular seu valor numérico.
O item a seguir foi retirado do exemplo de item para o descritor 30 do PDE da Prova Brasil para o Ensino Fundamental.

Item: O resultado da expressão $2x^2 - 3x + 10$, para $x = -2$, é

(A) -4

(B) 0

(C) 12

(D) 13

(E) 24

C19 – Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras (padrões).
Pretende avaliar a habilidade de reconhecer a regularidade ocorrida em uma sequência e representá-la por meio de uma expressão algébrica.
O item a seguir foi retirado do PDE da Prova Brasil apresentado como exemplo de item para o descritor 32.

Item: As variáveis n e P assumem valores conforme mostra o quadro abaixo.

n	5	6	7	8	9	10
P	8	10	12	14	16	18

A relação entre P e n é dada pela expressão

(A) P = n+1

(B) P = n+2

(C) P = 2n-2

(D) P = n-2

(E) P = 2n

C20 – Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela.
Pretende avaliar a habilidade de o aluno identificar a expressão algébrica que representa a função que rege os dados indicados em uma tabela dada.
O item a seguir foi retirado do PDE do SAEB para o Ensino Médio, onde é apresentado como exemplo de item para o descritor 18.

Item: Uma empresa, em processo de reestruturação, propôs a seus funcionários, admitidos há pelo menos dois anos, uma indenização financeira para os que pedissem demissão, que variam em função do número de nos trabalhados. A tabela abaixo era utilizada para calcular o valor (i) da indenização, em função do tempo trabalhado (t).

Tempo trabalho (em anos)	**Valor indenização (em reais)**
1	450
2	950
3	1450
4	1950

A expressão que permite determinar o valor da indenização **i** para **t** anos trabalhados é

(A) i = 450t

(B) i = 450+500t

(C) i = 450(t-1)

(D) i = 450+500(t-1)

(E) i = 500t

C21 – Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos.

Pretende avaliar a habilidade de identificar os zeros de qualquer função e/ou crescimento e/ou decrescimento também de qualquer função.

O item para avaliar essa competência é apresentado junto com a competência C30.

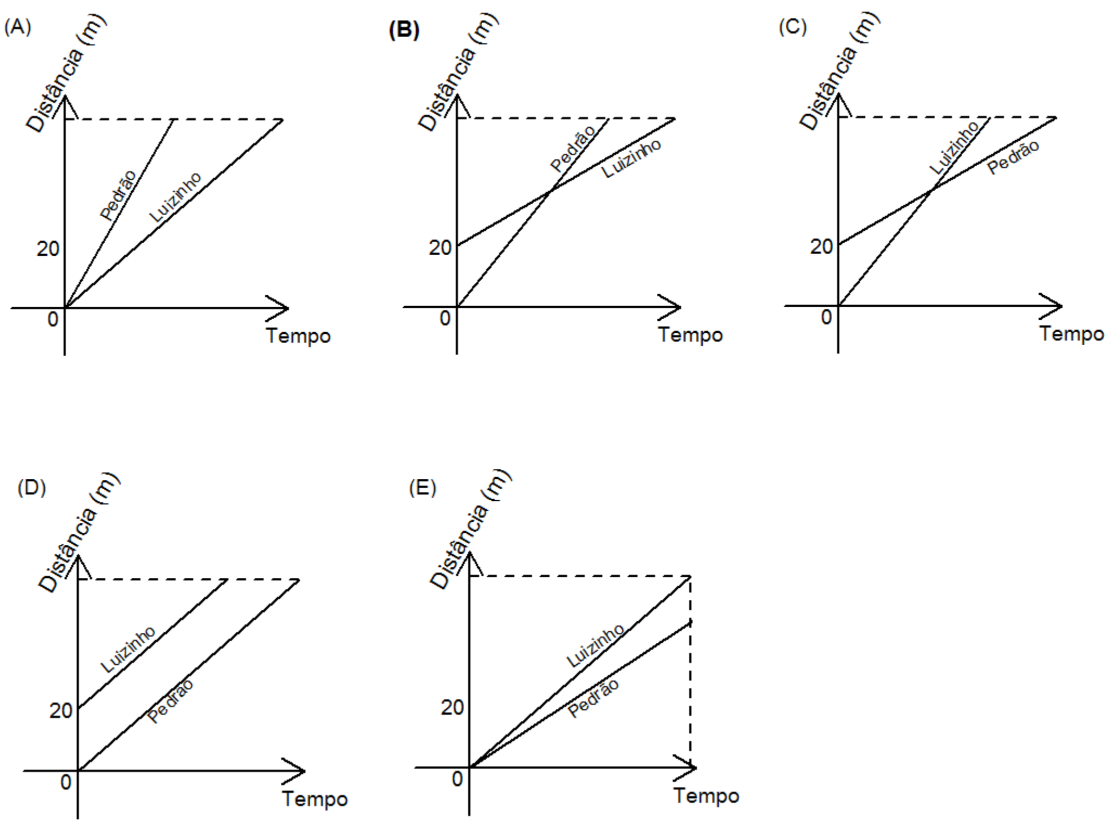
C22 – Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em texto.

Pretende avaliar a habilidade de associar um gráfico à descrição de uma situação-problema.

O item a seguir faz parte do exemplo de item para o descritor 21 do PDE do SAEB para o Ensino Médio.

Item: Luizinho desafia seu irmão mais velho, Pedrão, para uma corrida. Pedrão aceita e permite que o desafiante saia 20 metros a sua frente. Pedrão ultrapassa Luizinho e ganha a corrida.

O gráfico que melhor ilustra essa disputa é



C23 – Identificar e resolver problemas que envolvam funções de primeiro grau.

O estudo das funções inicia-se no ensino fundamental, com o reconhecimento de regularidades numéricas ou geométricas, e amplia-se no ensino médio. A importância do estudo da função de primeiro grau está relacionada à necessidade de resolução de problemas simples do cotidiano.

O item a seguir faz parte do PDE do SAEB para o Ensino Médio como exemplo de item para o descritor 19.

Item: O custo de produção de uma pequena empresa é composto por um valor fixo de $R\$1.500,00$ mais $R\$10,00$ por peça fabricada.

O número x de peças fabricadas quando o custo é de $R\$3.200,00$ é

(A) 150

(B) 160

(C) 170

(D) 320

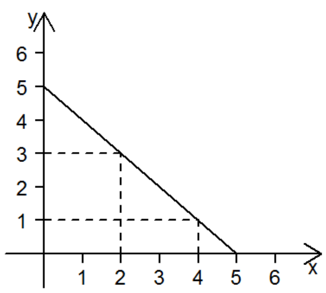
(E) 470

C24 – Reconhecer a representação algébrica de uma função do primeiro grau, dado o seu gráfico.

Pretende avaliar a habilidade de associar o gráfico de uma função polinomial de 1º grau ao seu gráfico.

O item apresentado a seguir compõem o PDE do SAEB para Ensino Médio como exemplo de item para o descritor 24.

Item: O gráfico abaixo mostra uma reta em um plano cartesiano.



Qual é a equação da reta apresentada no gráfico?

(A) $x - y - 5 = 0$

(B) $x + y - 5 = 0$

(C) $x + y + 5 = 0$

(D) $x + y - 4 = 0$

(E) $x + y = 6$

C25 – Identificar e resolver problemas de inequações de primeiro grau.

Pretende avaliar a habilidade dos alunos de resolverem problemas através de inequações.

O item a seguir faz parte dos exercícios e testes de revisão do livro de Smole e Diniz (2010).

Item: Por uma mensagem dos Estados Unidos para o Brasil, via fax, a Empresa de Correios e Telégrafos (ECT) cpbra $R\$1,37$ pela primeira página e $R\$0,67$ por página que se segue, completa ou não. Qual o número mínimo de páginas de uma dessas mensagens para que seu preço ultrapasse o valor de $R\$10,00$?

(A) 8

(B) 10

(C) 12

(D) 14

(E) 16

C26 – Relacionar as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do primeiro grau.

Pretende avaliar a habilidade de decompor um polinômio em fatores do 1º grau.

O item a seguir faz parte do PDE do SAEB, onde é apresentado como exemplo de item para o descritor 26.

Item: As raízes do polinômio $P(x) = (x-3)^2(x+1)$ são

(A) -2 e 1

(B) 3 e -1

(C) -3 e 1

(D) 3 e 1

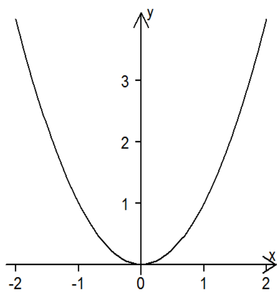
(E) -3 e -1

C27 – Reconhecer o gráfico de uma função polinomial de primeiro grau por meio de seus coeficientes.

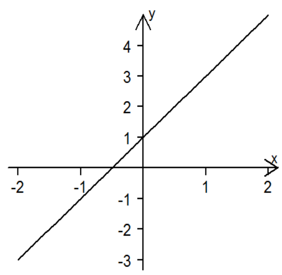
Pretende avaliar a habilidade de manusear os coeficientes linear e angular da reta de forma a identificar o gráfico de uma função polinomial do 1º grau.

O item foi fundamentado em Smole e Diniz (2010).

Item: Observe os gráficos



(1)



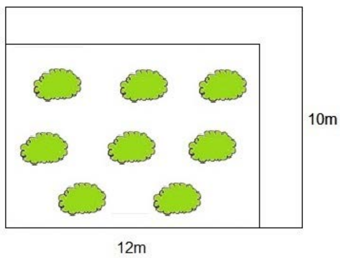
(2)

Qual dos gráfico representa uma função polinomial?

(A) O gráfico (2)
(B) O gráfico (1)
(C) Os dois gráficos
(D) O gráfico (2) apenas considerando a parte positiva
(E) Nenhum dos gráficos

C28 – Identificar e resolver problemas que envolvam equações de segundo grau.
Pretende avaliar a habilidade de resolver problemas em que seja necessário utilizar uma equação de 2º grau.
O item a seguir foi retirado do PDE do SAEB para Ensino Médio, onde é apresentado como exemplo de item para o descritor 17.

Item: Em um terreno retangular de 10 m x 12 m, deseja-se construir um jardim com $80m^2$ de área, deixando uma faixa para o caminho (sempre de mesma largura), como mostra a figura.



A largura do caminho deve ser de

(A) 1 m

(B) 1,5 m

(C) 2 m

(D) 2,5 m

(E) 3 m

C29 – Identificar e resolver problemas de inequações de segundo grau.
Pretende avaliar a habilidade dos alunos resolverem problemas que envolvem inequações de segundo grau.
O item a seguir foi retirado das questões de vestibular do livro de Smole e Diniz (2010). Foi aplicado pelo vestibular da UFMG - Universidade Federal de Minas Gerais.

Item: Seja M o conjunto dos números naturais n tal que $2n^2 - 75n + 700 \leq 0$. Assim, é correto afirmar que:

(A) Apenas um do elementos de M é múltiplo de 4

(B) Apenas dois dos elementos de M são primos

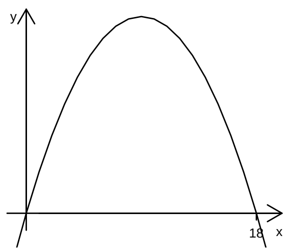
(C) A soma de todos os elementos de M é igual a 79

(D) M contém exatamente 6 elementos

(E) Os elementos de M são múltiplos de 3

C30 – Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo no gráfico de uma função polinomial do segundo grau.
Pretende avaliar a habilidade de resolver problemas relacionados com os pontos de máximo ou de mínimo de uma função polinomial de 2º grau.
E junto a esta competência avalia a C21 também.

Item: Uma bala é atirada de um canhão e sua trajetória descreve uma parábola de equação $y = -52x^2 + 90x$, onde as variáveis e y são medidas em metros.



Nessas condições, a altura máxima atingida pela bala é

(A) 30,0m
(B) 40,5m
(C) 81,5m
(D) 405m
(E) 810m

C31 – Identificar e resolver equações modulares.
Pretende avaliar a habilidade do aluno reconhecer e solucionar equações modelares.
O item apresentado a seguir faz parte dos Exercícios e testes de revisão do livro de Smole e Diniz (2010), item aplicado ao vestibular da PUC - MG.

Item: O conjunto solução da equação $|3x - 5| = 5x - 1$ é:

(A) $\{-2\}$

(B) $\{\frac{3}{4}\}$

(C) $\{\frac{1}{5}\}$

(D) $\{2\}$

(E) $\{\frac{3}{4}, -2\}$

C32 – Identificar e resolver inequações modulares.
Pretende avaliar a habilidade dos alunos em reconhecer e resolver inequações modulares.
O item apresentado para esta competência foi retirado dos Exercícios e testes de revisão do livro de Smole e Diniz (2010), aplicado pela UNIFOR (Universidade de Fortaleza) - CE.

Item: São dados os conjuntos $A = \{x \in Z/ |x - 1| < 3\}$ e $B = \{x \in Q/x^2 < 4\}$.

É correto afirmar que

(A) $A \cap B = \emptyset$

(B) $A \cup B = B$

(C) $A \subset B$ e $A \neq B$

(D) $A \cap B$ tem dois elementos

(E) $A \cup B$ tem infinitos elementos

C33 – Identificar a representação gráfica e/ou algébrica de uma função exponencial.

Pretende avaliar a habilidade de identificar a representação algébrica ou gráfica de uma função exponencial.

O item a seguir faz parte do PDE do SAEB para Ensino Médio, onde é apresentado como um exemplo de item para o descritor 27.

Item: Abaixo estão relacionadas algumas funções.

Entre elas, a função exponencial crescente é

(A) $f(x) = 5^{-x}$

(B) $f(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$

(C) $f(x) = (0,1)^x$

(D) $f(x) = 10^x$

(E) $f(x) = 0,5^x$

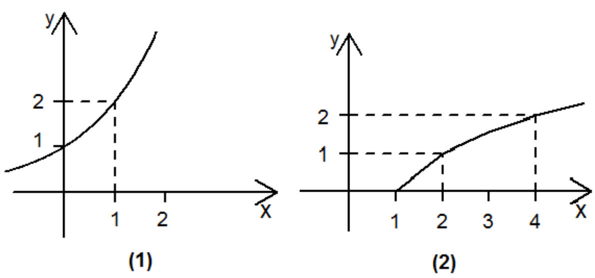
C34 – Identificar a representação gráfica e/ou algébrica de uma função logarítmica, reconhecendo-a como inversa da função exponencial.

Pretende avaliar a habilidade de reconhecer a representação algébrica ou gráfica de uma função logarítmica e associá-la a uma função exponencial.

O item a seguir é apresentado como exemplo de item para o descritor 28 do PDE do SAEB para Ensino Médio.

Item: Nos gráficos 1 e 2 abaixo estão representadas duas funções.

Pode-se afirmar que:



(A) $y = 2x$ está representada no (1)

(B) $y = x^2 + 1$ está representada no (2)

(C) $y = \log_2 x$ está representada no (2)

(D) $y = 2^x$ está representada no (2)

(E) $y = \log x$ está representada no (2)

C35 – Resolver problemas que envolvam função exponencial.

Pretende avaliar a habilidade de resolver um problema envolvendo a função exponencial, muito comum no contexto de fenômenos químicos, biológicos, entre outros.

O item a seguir faz parte dos Exercícios e testes de revisão do livro de Smole e Diniz (2010). Item aplicado pela FATEC - SP.

Item: Suponhamos que a população de uma certa cidade seja estimada, daqui a **x** anos, por $f(x) = \left(20 - \frac{1}{2^x}\right)$ 1000 habitantes. Estima-se que durante o terceiro ano, essa população:

(A) se aumentará constantemente

(B) aumentará de até 125 habitantes

(C) aumentará de até 250 habitantes

(D) diminuirá de até 125 habitantes

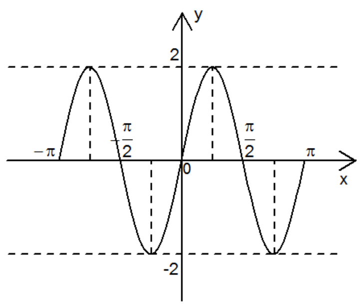
(E) diminuirá de até 250 habitantes

C36 – Identificar a representação gráfica e/ou algébrica de funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente), reconhecendo suas propriedades.

Pretende avaliar a habilidade de, dada uma função trigonométrica, identificar o gráfico que a representa e vice-versa.

O item a seguir é apresentado no livro de Smole e Diniz (2010) como Exercícios e testes de revisão.

Item: O gráfico abaixo representa a função:



(A) $y = -2\cos x$

(B) $y = \cos \frac{x}{2}$

(C) $y = 2\,\mathrm{sen}\, x$

(D) $y = \mathrm{sen}\, \frac{x}{2}$

(E) $y = 2\,\mathrm{sen}\, 2x$

4.3.1 Aplicação da Prova

É importante ressaltar que a aplicação das provas só ocorreu após aprovação do projeto pelo Comitê de Ética em Pesquisa. Por isso, junto à prova foram entregues duas cópias do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice C) para cada aluno assinar e autorizar a utilização de suas respostas. Uma cópia ficou com o aluno para maiores informações sobre o trabalho e uma cópia foi entregue junto com a prova e do gabarito.

As provas foram aplicadas na FCT/UNESP para os alunos matriculados na disciplina anual de Cálculo Diferencial e Integral I nos cursos de Estatística (33 respondentes), Matemática Diurno (23 respondentes), Engenharia Cartográfica (49 respondentes) e Engenharia Ambiental (35 respondentes), totalizando 140 respondentes. Em função da decisão de aplicar a prova somente para as disciplinas anuais e englobar alunos com diferentes níveis de habilidades, a prova também foi aplicada em uma escola estadual do município de Presidente Prudente, escolhida por ter um dos maiores Índices de Desenvolvimento do Ensino Básico (IDEB) na região. Nesta escola a prova foi aplicada para seis turmas de terceiro ano do ensino médio, contando com 211 alunos. Logo, a amostra ficou totalizada em 351 respondentes da prova. A aplicação de todas provas ocorreram durante o mês de outubro de 2014.

Antes da aplicação na escola estadual foram realizadas reuniões de planejamento com a direção da escola, coordenação e professores de matemática, que concluíram que a aplicação em uma única vez seria muito extensa para os alunos, e estes poderiam não responder com seriedade e comprometimento necessário para o projeto.

A aplicação das provas na FCT/UNESP não foi feita para todas as salas em um mesmo dia, entretanto a aplicação em cada sala foi feita de uma única vez. Já na escola estadual, a aplicação para os alunos do Ensino Médio foi feita em duas partes para poder atender as exigências da escola.

Todas as questões da prova são de múltipla escolha, tendo cinco alternativas, em que apenas uma é a correta. Para colocar a prova no formato dos sistemas de avaliação nacional e facilitar a leitura das respostas, foi elaborado um cartão de resposta (Apêndice C) em que cada respondente deveria preencher o gabarito de suas respostas.

Capítulo

5

Discussão dos Resultados e Construção da Escala

Para atingir os objetivos do trabalho as respostas da prova foram analisadas inicialmente de forma descritiva e posteriormente de acordo com a aplicação da TRI, mais precisamente do modelo Logístico Unidimensional de três parâmetros (ML3) para respostas dicotômicas. Portanto, além dos resultados fornecerem o número total de acertos de cada respondente, também fornecem estimativas para o quanto de conhecimento o respondente possui e mostra em quais conteúdos há maior dificuldade.

O Modelo TRI ML3 especificado para as análises, conforme descrito no Capítulo 2, consiste em

$$P(U_{ij} = 1|\theta_j, a_i, b_i, c_i) = c_i + (1 - c_i)\,\frac{1}{1 + e^{-Da_i(\theta_j - b_i)}}, \tag{5.1}$$

com i = 1, 2,..., I, e j = 1, 2, ..., n.

Depois de aplicada a prova, os cartões-resposta foram lidos para planilhas em Excel. Como as respostas apresentavam as alternativas marcadas pelos respondentes, precisavam ser dicotomizadas, ou seja, lidas como certo (apresentando o valor 1) ou como errado (apresentando o valor 0), e apresentando 'NA' para respostas em branco ou anuladas. Assim, se fez necessária a transformação das respostas. Para isso, foi utilizado o software R, através do pacote *mirt* aplicando a função 'key2binary'.

As estatísticas descritivas dos itens e dos respondentes foram obtidas através das planilhas em Excel com o auxílio do software R. Para a calibração dos parâmetros dos itens e estimação das habilidades foi utilizado o software OpenBUGS (Código no Apêndice E), direcionado para a inferência bayesiana, conforme já mencionado no Capítulo 3. As estimativas foram obtidas por MCMC através do Amostrador de Gibbs. Para isso, utilizou-se uma amostra de tamanho 20000, com um *burn-in* (período de aquecimento) de 5000 iterações para tirar efeito de valores iniciais e excluir fase transiente da cadeia. A indicação de convergência da cadeia foi monitorada através das trajetórias observadas para cada um dos parâmetros ao longo das iterações. A especificação das distribuições a priori marginais, com seus respectivos hiperparâmetros, consistiu em:

$\theta_j \sim Normal(0,1)$, $j = 1, 2, \cdots, n$; $a_i \sim LogNormal(0, 0.5)$; $b_i \sim Normal(0, 2)$; $c_i \sim Beta(6, 16)$; $i = 1, 2, \cdots, I$. Estas especificações foram baseadas em Marques (2009), que apresenta um estudo detalhado sobre distribuições a priori neste contexto.

5.1 Resultados para a Análise Descritiva das Respostas

Antes da apresentação dos resultados são apresentados na Tabela 5.1 os dados sobre o número de ingressantes na FCT/UNESP em 2014 para os cursos da área de exatas, separados de acordo com onde cursou o Ensino Médio, todo ou maior parte em escola pública, ou todo ou maior parte em escola particular. Observe que esses dados confirmam a afirmação de que grande parte destes alunos vêm de escola pública.

Tabela 5.1: Ingressantes nos cursos da área de exatas da FCT/UNESP - 2014

	Ensino Médio		
Curso	**Escola Pública (*)**	**Escola Particular (*)**	**Total**
Ciência da Computação	16 (46%)	19 (54%)	35
Engenharia Ambiental	10 (29%)	25 (71%)	35
Engenharia Cartográfica	20 (50%)	20 (50%)	40
Estatística	18 (60%)	12 (40%)	30
Física	25 (81%)	06 (19%)	31
Matemática Diurno	23 (82%)	05 (18%)	28
Matemática Noturno	45 (92%)	04 (08%)	49
Quimica	32 (78%)	09 (22%)	41
Total	189 (65%)	100 (35%)	289

(*) Todo ou maior parte.
Fonte: Fundação Vunesp <http://www.vunesp.com.br/>.

Os resultados descritivos para o mínimo, máximo e média de acertos por sala são apresentados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Estatísticas Descritivas para o número de acertos por sala considerando 32 itens da prova.

Curso	**Mínimo**	**Máximo**	**Média**
UNESP - Engenharia Ambiental	08	25	20
UNESP - Engenharia Cartográfica	12	28	19
UNESP - Estatística	13	27	20
UNESP - Matemática diurno	03	25	15
Escola Estadual - 3º A	03	25	12
Escola Estadual - 3º B	02	24	13
Escola Estadual - 3º C	04	22	13
Escola Estadual - 3º D	02	20	10
Escola Estadual - 3º E	03	25	12
Escola Estadual - 3º F	04	25	14

Também, como resultado descritivo, tem-se o número de acertos por item. Esses resultados foram obtidos através do uso do software R, após a transformação dos dados. Na Tabela 5.3 podem ser observados os números de acertos, o número total de respostas e a porcentagem de acerto por item. O número total de respostas foi obtido tirando o número de respostas em branco ou anuladas, NA's. Lembrando que o número de alunos que realizou a prova foi 351, a Tabela 5.3 está ordenada, em ordem decrescente, de acordo com a porcentagem de resposta correta por item. Pode ser observado que o item 7 foi o que obteve mais respostas corretas, 92% de acerto, e o item 5 foi o que obteve menos repostas corretas, 15% de acerto, total de 277 respostas incorretas.

Tabela 5.3: Número de Acertos, Total de Respostas e Percentual de Acerto por Item

Item	**Total de Acertos**	**Total de Respostas**	**%**
7	324	351	92%
9	291	349	83%
19	248	327	76%
10	261	351	74%
16	256	350	73%
23	234	327	72%
13	241	351	69%
15	238	351	68%
24	205	326	63%
20	200	326	61%
29	197	324	61%
18	192	327	59%
22	189	327	58%
11	200	351	57%
1	187	350	53%
17	167	326	51%
8	173	349	50%
4	171	350	49%
12	159	350	45%
2	141	351	40%
32	123	324	38%
28	79	235	34%
27	106	324	33%
6	104	349	30%
14	82	326	25%
3	86	350	25%
31	80	326	25%
21	79	326	24%
26	65	323	20%
30	58	326	18%
25	52	327	16%
5	50	327	15%

Observação: 351 Respondentes

Além disso, a Figura 5.1 apresenta o Gráfico de Barras para o Número de acertos *versus* número de indivíduos. Isto é, observa-se que dois indivíduos acertaram 2 itens, cinco indivíduos acertaram 3 itens, e assim por diante. Vale ressaltar que as habilidades dos indivíduos que acertaram o mesmo número de itens quase sempre são diferentes. Pois, acertar o mesmo número de itens não significa acertar as mesmas questões. Por exemplo, para a escala (250,50), cinco indivíduos acertaram 5 itens, mas suas habilidades são 200, 218, 213, 220 e 165. Isso pode ser observado na Tabela 5.4, que traz o número de itens respondidos corretamente e a habilidade dos 351 respondentes.

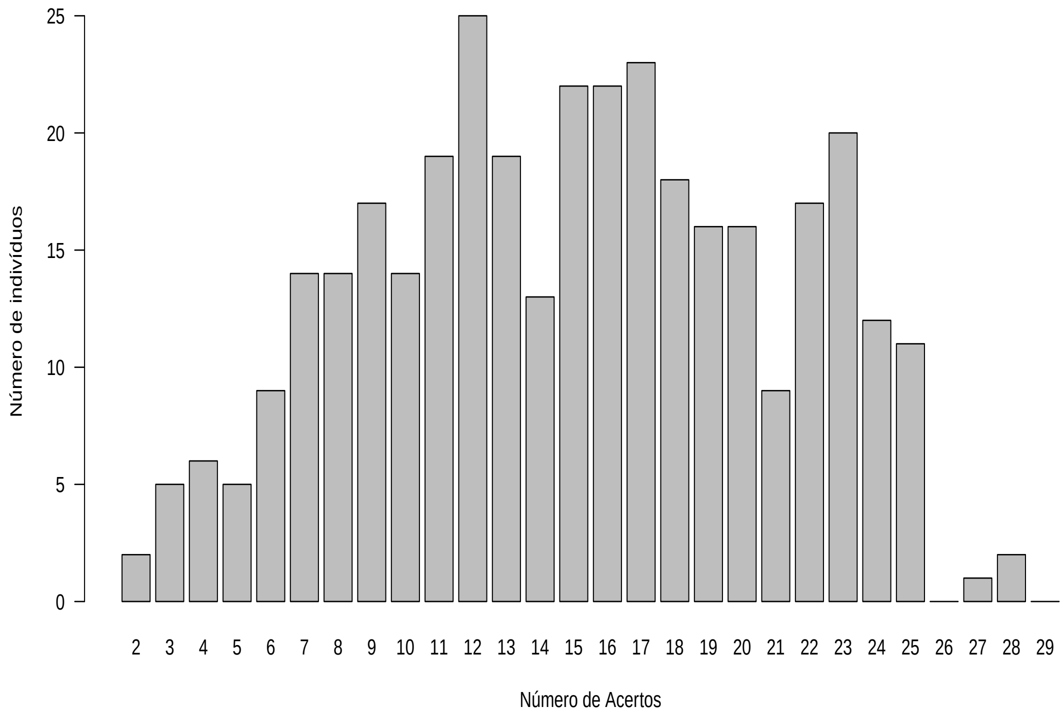


Figura 5.1: Relação entre o número de acertos e número de indivíduos.

Tabela 5.4: Número Total de Acertos e Habilidade por Indivíduo na Escala (250,50)

Indivíduo	**Acertos**	**Habilidade**	**Indivíduo**	**Acertos**	**Habilidade**
210	2	165,3	277	8	172,7
283	2	144,0	280	8	214,9
20	3	161,9	295	8	173,8
153	3	162,0	302	8	192,9
159	3	150,8	316	8	200,1
256	3	181,3	346	8	207,5
310	3	179,8	7	9	188,2
152	4	175,4	8	9	191,8
157	4	160,1	19	9	192,8
187	4	204,8	149	9	199,3
245	4	183,9	161	9	189,6
339	4	163,5	185	9	176,8
342	4	161,9	213	9	236,0
142	5	199,6	227	9	192,8
172	5	218,0	248	9	179,8
221	5	213,0	259	9	262,6
261	5	220,4	269	9	167,5
315	5	165,2	276	9	190,8
146	6	224,0	293	9	204,9
171	6	174,7	312	9	179,5
188	6	211,1	317	9	242,4
191	6	175,7	327	9	168,3
193	6	222,2	338	9	172,8
278	6	170,8	141	10	194,9

(continuação)

Indivíduo	**Acertos**	**Habilidade**	**Indivíduo**	**Acertos**	**Habilidade**
279	6	183,3	147	10	190,8
300	6	222,1	164	10	207,7
340	6	157,7	184	10	203,3
162	7	187,5	211	10	274,6
178	7	175,0	215	10	208,7
179	7	159,6	223	10	231,1
186	7	178,1	241	10	209,2
230	7	175,7	253	10	211,5
238	7	167,1	271	10	225,6
247	7	161,4	290	10	205,9
260	7	216,4	304	10	265,8
266	7	177,7	314	10	261,9
282	7	192,7	319	10	216,9
318	7	196,8	11	11	230,5
320	7	223,9	32	11	234,0
341	7	156,8	154	11	182,8
345	7	194,0	156	11	212,5
10	8	210,5	174	11	217,7
13	8	199,4	176	11	210,2
57	8	190,6	177	11	206,4
255	8	189,3	182	11	228,2
258	8	164,1	195	11	193,8
262	8	181,9	207	11	213,2
267	8	175,9	220	11	221,9
275	8	183,5	242	11	226,8
246	11	213,7	334	13	222,1
249	11	193,9	349	13	209,9
263	11	244,0	23	14	256,8
281	11	193,0	25	14	243,7
309	11	182,4	60	14	251,2
311	11	209,8	116	14	242,3
326	11	209,9	131	14	256,3
5	12	241,2	144	14	263,6
21	12	236,8	151	14	240,4
37	12	244,2	217	14	220,0
123	12	235,1	244	14	248,3
160	12	241,5	257	14	238,2
168	12	231,5	285	14	218,3
170	12	232,7	303	14	254,6
180	12	222,6	343	14	243,5
183	12	203,7	1	15	257,3
196	12	283,4	2	15	257,6
200	12	205,9	3	15	237,6
236	12	218,3	4	15	253,1
240	12	214,2	17	15	250,2
254	12	214,2	41	15	263,1

(continuação)

Indivíduo	Acertos	Habilidade	Indivíduo	Acertos	Habilidade
268	12	221,6	112	15	245,5
272	12	215,1	124	15	262,1
286	12	203,6	150	15	236,1
289	12	199,1	173	15	255,8
292	12	231,7	192	15	228,5
294	12	215,8	203	15	233,0
296	12	223,8	205	15	253,1
298	12	237,7	216	15	241,6
299	12	230,9	224	15	256,9
322	12	219,2	265	15	251,0
330	12	191,7	270	15	239,3
87	13	244,3	301	15	227,2
129	13	242,0	321	15	233,3
158	13	235,2	328	15	253,7
197	13	228,9	332	15	233,0
198	13	229,0	347	15	240,4
204	13	220,3	52	16	264,7
219	13	231,1	53	16	261,3
234	13	250,1	54	16	268,5
243	13	232,7	77	16	247,2
273	13	216,4	82	16	264,9
287	13	243,2	107	16	261,6
288	13	222,7	122	16	261,2
305	13	220,0	125	16	252,4
306	13	228,7	132	16	273,0
307	13	207,5	133	16	262,7
325	13	216,3	136	16	245,1
331	13	225,0	155	16	253,3
194	16	252,2	324	18	259,7
225	16	242,9	350	18	268,4
228	16	260,3	351	18	288,1
229	16	260,2	26	19	288,9
232	16	239,9	35	19	280,6
235	16	219,1	45	19	273,2
237	16	273,0	58	19	285,1
264	16	264,5	65	19	290,4
329	16	242,1	71	19	290,0
335	16	232,3	102	19	286,3
6	17	256,0	113	19	283,1
15	17	266,8	120	19	258,7
62	17	285,1	139	19	275,8
66	17	265,9	140	19	289,4
90	17	280,4	163	19	268,0
91	17	271,5	201	19	279,3
92	17	269,3	209	19	273,3
94	17	266,3	226	19	275,2
114	17	265,0	291	19	269,2

(continuação)

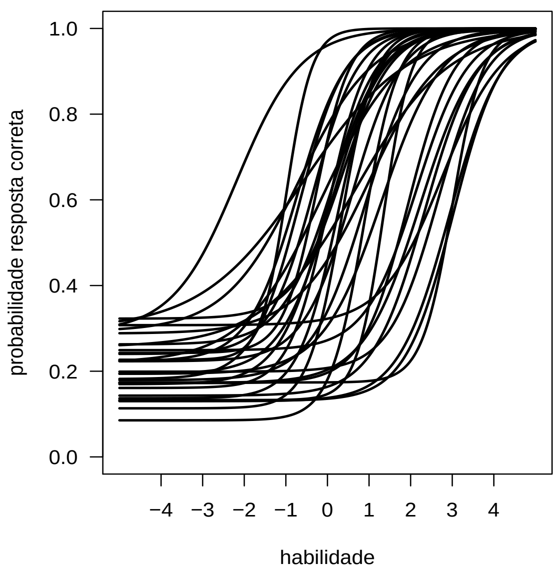
Indivíduo	Acertos	Habilidade	Indivíduo	Acertos	Habilidade
117	17	266,1	14	20	289,1
119	17	267,9	31	20	297,0
121	17	251,8	44	20	285,4
127	17	263,5	61	20	288,3
148	17	274,2	73	20	264,4
189	17	244,9	79	20	287,3
190	17	276,2	86	20	278,9
202	17	257,0	98	20	287,7
218	17	257,3	101	20	281,4
222	17	266,9	103	20	292,9
231	17	230,1	111	20	295,1
233	17	269,9	126	20	279,1
251	17	272,3	134	20	295,9
297	17	240,4	214	20	276,1
24	18	279,2	252	20	260,2
39	18	286,3	333	20	284,8
49	18	262,7	29	21	299,1
68	18	287,0	46	21	303,0
76	18	278,5	59	21	295,4
99	18	270,5	80	21	312,1
105	18	268,7	96	21	157,9
106	18	272,4	108	21	295,5
109	18	267,1	166	21	304,0
130	18	276,9	167	21	294,0
138	18	348,7	181	21	286,8
206	18	276,9	47	22	308,7
208	18	271,6	48	22	289,8
250	18	261,0	50	22	304,1
274	18	262,2	70	22	312,2
308	18	275,2	74	22	306,2

5.2 Resultados para a Análise das Respostas através do Ajuste do Modelo ML3

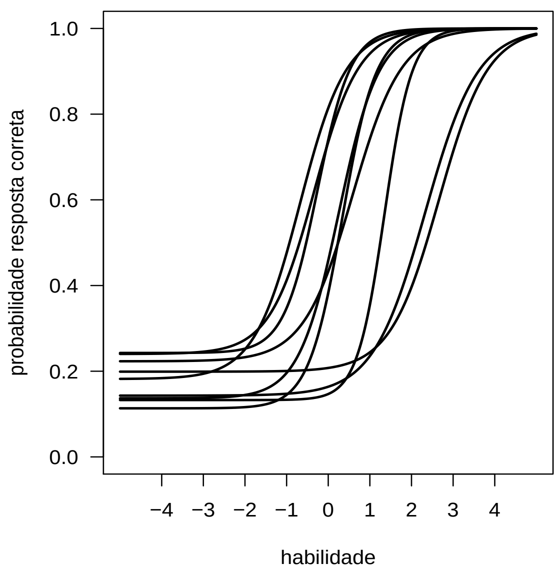
As estimativas dos parâmetros dos itens e também das habilidades dos respondentes foram obtidas através da utilização do software OpenBUGS. Na Tabela 5.5 são apresentadas as estimativas e seus Intervalos de Credibilidade (IC) com 95% para os parâmetros de discriminação (a_i), dificuldade (b_i) e acerto ao acaso (c_i), respectivamente. Pode ser observado que o item 23 apresenta a menor discriminação (0,801), enquanto que o item 9 apresenta a maior discriminação (3,247). Com relação a dificuldade, pode-se observar que o item 'mais fácil' por apresentar o menor valor, é o item 7 (-2,178), e o item considerado o 'mais difícil' em relação aos outros, com maior valor, é o item 5 (3,019). Note que o IC para o parâmetro de dificuldade contém o valor zero, mas nesse contexto isso indica somente que o parâmetro está em torno de zero na distribuição Normal (0,1).

Para o parâmetro de acerto ao acaso, que representa a probabilidade de indivíduos com baixa habilidade responderem corretamente a um item, é esperado que as estimativas estejam em torno de 0,20 pois, como a prova é de múltipla escolha, com cada item composto por 5 alternativas, a probabilidade de se escolher ao acaso alguma alternativa e acertar é de 0,20. Itens com menor probabilidade de acerto ao acaso apresentam valor estimado abaixo de 0,20, e indicam que os alunos não estão sendo atraídos pelas alternativas para responder, mas sim pelo conhecimento sobre o tema da questão. Observa-se que o item 6 é o de menor probabilidade de acerto ao acaso; isto é, esse é um item que exige maior conhecimento sobre o assunto para ser respondido corretamente, seu valor é de 0,085. Já, itens com probabilidade acima de 0,20 podem indicar que há alguma alternativa que é eliminada na hora de escolher a correta, assim ninguém marca essa alternativa e aumenta a probabilidade de acerto ao acaso, pois há menos alternativas candidatas a resposta correta. Nota-se que o item 29 é aquele que apresenta maior probabilidade de acerto casual, seu valor é de 0,323.

As Curvas Características dos Itens - CCIs - para os 32 itens da prova podem ser observadas na Figura 5.2 (a). De maneira geral os itens apresentam curvas com comportamento característico. Na Figura 5.2 (b) são apresentadas CCIs para os itens âncora, com o objetivo de ressaltar o comportamento característico destas curvas.



(a) Para cada item



(b) Para os itens âncoras

Figura 5.2: Curvas Característica dos Itens - CCIs.

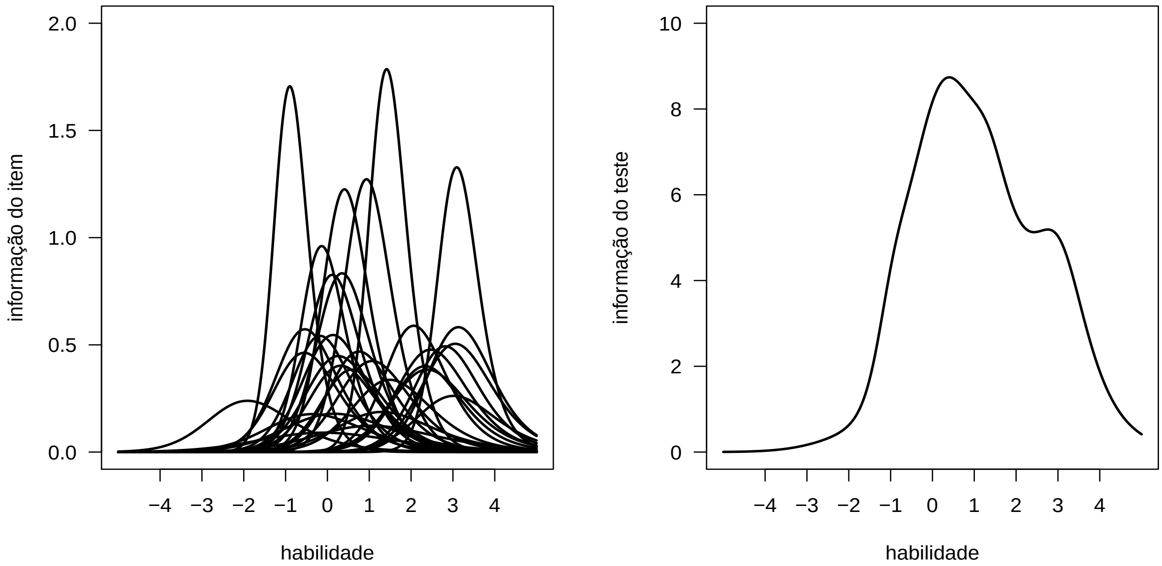
Na Figura 5.3(a) são apresentadas as curvas de informação do item e na 5.3(b) a curva de informação do teste, que representa a soma das informações dos itens. Estas curvas mostram onde estão concentradas a informação sobre as habilidades para cada item e no teste como um todo, mostrando que a prova aplicada está conseguindo estimar melhor as habilidades dos indivíduos entre -1 e 2. Na escala (250,50), as habilidades entre 200 e 350, implicando que mais itens devem ser incluídos na prova para permitir avaliar melhor habilidades abaixo de 200 e acima de 350.

Na Figura 5.4 relaciona-se o número de acertos com as habilidades estimadas, representadas por boxplots. Como já mencionado, observe que a habilidade estimada para pessoas com um mesmo número de acertos pode ser diferente. Isto é, a habilidade estimada não depende somente do número de acertos, mas dos itens respondidos corretamente, reforçando a ideia de que as habilidades estimadas dependem do padrão de respostas dos

Tabela 5.5: Estimativas dos parâmetros de discriminação (a_i), dificuldade (b_i) e acerto ao acaso (c_i) e seus respectivos Intervalos de Credibilidade (IC) de 95%

Item	a_i	**IC**	b_i	**IC**	c_i	**IC**
1	0,896	0,463; 1,580	0,692	0,053; 1,399	0,2563	0,1214; 0,3940
2	1,547	0,905; 2,505	0,909	0,573; 1,297	0,1791	0,0911; 0,2699
3	1,464	0,652; 2,992	2,223	1,596; 3,262	0,1728	0,0940; 0,2406
4	1,696	1,034; 2,642	0,587	0,267; 0,940	0,2232	0,1259; 0,3206
5	1,732	0,704; 4,605	3,019	2,096; 4,416	0,1312	0,0727; 0,1847
6	2,451	1,614; 3,637	0,878	0,668; 1,117	0,0854	0,0403; 0,1385
7	1,295	0,790; 1,922	-2,178	-3,106; -1,460	0,2913	0,1224; 0,4879
8	2,083	1,463; 2,958	0,251	0,023; 0;496	0,1367	0,0632; 0,2203
9	3,247	2,055; 2,958	-0,990	-1,278; -0,694	0,2268	0,0970; 0,3803
10	1,116	0,680; 1,772	-0,673	-1,364; 0,045	0,2929	0,1265; 0,4762
11	2,122	1,481; 3,005	0,008	-0,235; 0,262	0,1609	0,0755; 0,2611
12	2,470	1,750; 3,446	0,336	0,138; 0,539	0,1134	0,0551; 0,1829
13	1,854	1,231; 2,757	-0,337	-0,707; 0,045	0,2402	0,1097; 0,3802
14	1,811	0,727; 4,087	1,930	1,414; 2,837	0,1723	0,0936; 0,2409
15	2,474	1,602; 3,825	-0,261	-0,558; 0,029	0,2426	0,1207; 0,3663
16	1,802	1,276; 2,435	-0,679	-0,991; -0,371	0,1818	0,0789; 0,3070
17	1,142	0,456; 2,620	1,003	0,336; 1,742	0,2879	0,1302; 0,4243
18	1,739	1,196; 2,445	-0,004	-0,296; 0,289	0,1698	0,0788; 0,2729
19	1,686	1,147; 2,397	-0,726	-1,111; -0,335	0,2233	0,0954; 0,3762
20	1,634	0,948; 2,703	0,124	-0,323; 0,550	0,2626	0,1239; 0,3984
21	1,704	0,624; 4,358	2,658	1,835; 4,091	0,1990	0,1178; 0,2648
22	1,612	1,058; 2,411	0,099	-0,238; 0.468	0,1940	0,0889; 0,3193
23	0,801	0,451; 1,349	-0,541	-1,407; 0,356	0,2974	0,1263; 0,4836
24	1,044	0,656; 1,520	-0,110	-0,613; 0,441	0,2199	0,0941; 0,3700
25	1,611	0,687; 3,900	2,935	2,037; 4,298	0,1301	0,0717; 0,1847
26	1,586	0,713; 3,122	2,332	1,662; 3,496	0,1431	0,0836; 0,2033
27	1,608	0,557; 3,601	2,143	1,477; 3,329	0,2492	0,1513; 0,3250
28	1,398	0,621; 2,952	1,303	0,780; 2,148	0,1939	0,0951; 0,2954
29	1,695	0,813; 3,356	0,364	-0,196; 0,827	0,3228	0,1649; 0,4557
30	2,723	1,030; 6,517	3,003	2,060; 4,519	0,1738	0,1315; 0,2190
31	3,037	1,459; 5,797	1,351	1,096; 1,724	0,1327	0,0816; 0,1855
32	1,378	0,358; 4,134	2,760	1,767; 4,242	0,3075	0,1542; 0,3996

indivíduos e não do número total de acertos. Isto é, indivíduos com mesmo número de acertos podem ter habilidades diferentes.



(a) Para cada item (b) Para o teste

Figura 5.3: Informação do teste.

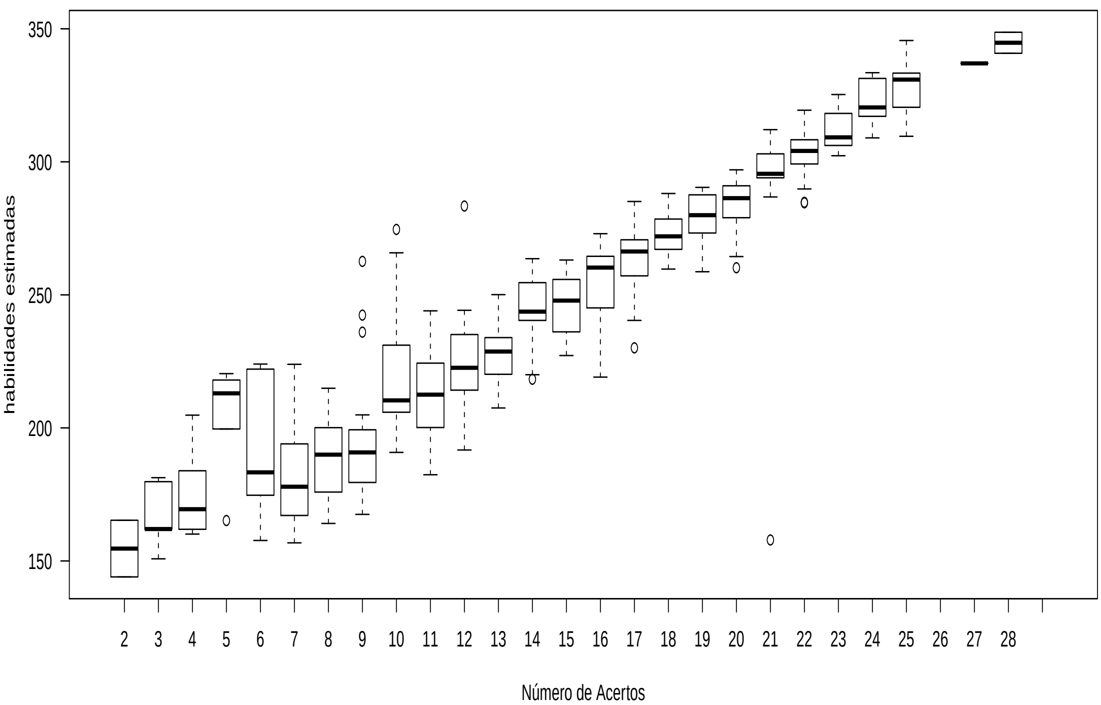


Figura 5.4: Relação entre o número de acertos e habilidades estimadas.

5.3 Construção e Interpretação da Escala

A Construção da Escala de Habilidades é feita a partir do posicionamento dos itens âncora. Após esta etapa posicionam-se os outros itens. Antes de se determinar quais são os itens âncora, se faz necessária a determinação dos níveis âncora. Os níveis âncora são pontos selecionados pelo analista na escala de habilidades para serem interpretados na prática. Neste trabalho foram considerados como níveis âncora valores na escala da distribuição normal padrão, intercalados por um desvio padrão. Os itens âncora servem de base para o posicionamento dos demais itens e marcam os níveis da escala de habilidades para melhor interpretação dos especialistas sobre os conteúdos avaliados na prova. São selecionados a partir da definição abaixo.

Conforme já visto na Seção 2.6, para um item ser classificado como âncora é necessário que três condições sejam satisfeitas. Por exemplo, considerando dois níveis âncora consecutivos, Y e Z, com $Y < Z$, um item é denominado âncora para o nível Z se e somente se:

- $P(U = 1|\theta = Z) \geq 0,65$;
- $P(U = 1|\theta = Y) < 0,50$;
- $P(U = 1|\theta = Z) - P(U = 1|\theta = Y) \geq 0,30$.

Esses itens são mais relevantes para a interpretação da escala, mas os demais itens, não âncoras, devem ajudar na interpretação do nível da escala. Logo, todos os itens são posicionados na escala de habilidades.

Com o objetivo de posicionar os itens na escala de habilidades foram calculadas as probabilidades para os 32 itens nos diferentes níveis da escala. Pode-se observar essas probabilidades na Tabela 5.6. É a partir dessas probabilidades que verifica-se se há algum item âncora e em qual nível da escala ele está. Podemos observar que são satisfeitas as condições de âncora para apenas 9 itens do total de 32 que compõem a prova. São os itens 4, 8, 12, 13, 15, 16, 21, 26 e 31, que podem ser observados na Tabela 5.6 com os níveis em que são âncora em negrito. Pode-se notar que há itens âncora para os níveis 0, 1, 2 e 3 da escala (0,1) de habilidades. Já, na escala (250,50) de habilidades, os itens âncora estão posicionados nos níveis 250, 300, 350 e 400.

Alguns itens foram posicionados a partir do valor para a probabilidade nos níveis da escala apresentados na Tabela 5.6, pois, de maneira geral esses itens satisfaziam uma ou duas das condições apresentadas para os itens âncora. Os itens da prova foram posicionados a partir do nível -2 até o nível 4 na escala (0,1) de habilidades. Passando para a escala (250,50), tem-se que os itens estão posicionados do nível 150 ao 450.

A interpretação da escala e o aprimoramento do banco de itens são tarefas a serem realizadas em conjunto com especialistas e fazem parte das perspectivas futuras. Entretanto, a seguir é apresentada uma análise por item de acordo com as respostas obtidas. As habilidades dos respondentes foram estimadas apenas para que os itens âncora pudessem ser identificados e posicionados na escala de habilidades, que é o objetivo principal do trabalho.

Dos 9 itens âncora identificados, 8 fazem parte do Tema III: Número e Operações/ Álgebra e Funções, o que já era esperado, uma vez que este tema engloba 27 das 36 competências consideradas. Apenas um, o item 4, pertence ao Tema II: Grandezas e Medidas, não tendo nenhum item âncora no Tema I: Espaço e Forma.

O item 4 está relacionado a competência C6 e C7, e está posicionado no nível 1 da escala de habilidades (0,1), ou no nível 300 para a escala de habilidades (250,50). Ou seja, os respondentes que tem conhecimento sobre essas competências devem ter desenvolvido a habilidade de resolver problemas envolvendo cálculo de perímetro e de área de figuras planas. Assim, as habilidades desses respondentes devem estar posicionadas no mesmo nível do item na escala. Para esse item, foi observado o percentual de 49% de respostas corretas.

Tabela 5.6: Probabilidade de resposta correta, condicionada ao nível de habilidade Z, para cada um dos itens da prova ($P(U = 1|\theta = Z)$).

	Níveis da Escala (Z)								
Item	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0,28	0,32	0,39	0,52	0,68	0,82	0,92	0,96	0,98
2	0,18	0,19	0,22	0,34	0,62	0,87	0,97	0,99	1,00
3	0,17	0,17	0,18	0,20	0,29	0,52	0,80	0,94	0,99
4	0,22	0,23	0,27	0,43	**0,74**	0,94	0,99	1,00	1,00
5	0,13	0,13	0,13	0,14	0,16	0,26	0,56	0,87	0,97
6	0,09	0,09	0,09	0,18	0,61	0,95	0,99	1,00	1,00
7	0,47	0,69	0,87	0,96	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00
8	0,14	0,14	0,20	0,46	**0,85**	0,98	1,00	1,00	1,00
9	0,23	0,25	0,61	0,97	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,34	0,42	0,58	0,77	0,91	0,97	0,99	1,00	1,00
11	0,16	0,17	0,25	0,58	0,91	0,99	1,00	1,00	1,00
12	0,11	0,12	0,14	0,38	**0,86**	0,99	1,00	1,00	1,00
13	0,25	0,27	0,41	**0,74**	0,94	0,99	1,00	1,00	1,00
14	0,17	0,17	0,18	0,20	0,30	0,61	0,90	0,98	1,00
15	0,24	0,25	0,35	**0,74**	0,97	1,00	1,00	1,00	1,00
16	0,19	0,25	0,48	**0,81**	0,96	0,99	1,00	1,00	1,00
17	0,30	0,31	0,35	0,46	0,64	0,83	0,93	0,98	0,99
18	0,17	0,19	0,29	0,59	0,88	0,98	1,00	1,00	1,00
19	0,24	0,30	0,52	0,82	0,96	0,99	1,00	1,00	1,00
20	0,27	0,28	0,36	0,59	0,86	0,97	0,99	1,00	1,00
21	0,20	0,20	0,20	0,21	0,24	0,40	**0,71**	0,93	0,99
22	0,20	0,22	0,31	0,56	0,85	0,96	0,99	1,00	1,00
23	0,38	0,46	0,58	0,72	0,84	0,92	0,96	0,98	0,99
24	0,26	0,32	0,44	0,63	0,81	0,92	0,97	0,99	1,00
25	0,13	0,13	0,13	0,14	0,17	0,29	0,59	0,87	0,97
26	0,14	0,14	0,15	0,16	0,24	0,46	**0,78**	0,94	0,99
27	0,25	0,25	0,25	0,27	0,35	0,58	0,85	0,96	0,99
28	0,20	0,20	0,22	0,31	0,51	0,78	0,93	0,98	1,00
29	0,33	0,33	0,38	0,56	0,83	0,96	0,99	1,00	1,00
30	0,17	0,17	0,17	0,17	0,18	0,22	0,59	0,95	1,00
31	0,13	0,13	0,13	0,15	0,35	**0,89**	0,99	1,00	1,00
32	0,31	0,31	0,31	0,32	0,36	0,49	0,71	0,89	0,97

Os itens 13, 15 e 16 avaliam as competências C16, C18 e C19, respectivamente. Esses itens estão posicionados no nível 0 da escala (0,1), ou nível 250 da escala (250,50). Os alunos que acertaram a esses itens deve estar com suas habilidades posicionadas nesse nível também.

Para o nível 1 da escala de habilidades (0,1), ou o nível 300 da escala de habilidades (250,50), estão posicionados os itens 8 e 12. Esses itens estão relacionados as competências C11 e C15, respectivamente, e indicam que os alunos que acertaram a esses itens possuem a habilidade de identificar a localização de números racionais na reta numérica e efetuar cálculos que envolvam operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais e também devem ser posicionados nesse nível da escala. Para o item 8 o percentual de acertos foi de 49% e para o item 12 foi de 45%.

No nível 2 da escala de habilidades (0,1), ou nível 350 da escala de habilidades (250,50), está posicionado o item 31. Esse item é referente a competência C34, que compreende identificar a representação gráfica e/ou algébrica de uma função logarítmica, reconhecendo-a como inversa da função exponencial. O percentual de acertos para esse item foi de 23%, o que indica que menos da metade dos respondentes apresentam a habilidade avaliada. Acertar a esse item indica que a habilidade do indivíduo está posicionada neste nível da escala, nível em que o item está posicionado.

Conforme os respondentes vão acertando os itens posicionados nos níveis mais altos, suas habilidades também vão para esses níveis. Em vista disso, quem acertou os itens 21 e 26, posicionados no nível 3 para a escala (0,1) ou 400 para a escala (250,50), terá sua habilidade nesse nível. O que indica que o respondente que acertou a esses itens, certamente possui as habilidades de identificar e resolver equações e inequações modulares, que são as competências C31 e C32, relacionadas aos itens 26 e 21. O percentual de acertos foi de 23% para o item 21 e 19% para o item 26.

A seguir é feita uma análise por item onde são apresentados os resultados das respostas obtidas pelos alunos. A avaliação das respostas e habilidades dos alunos tem como finalidade maior a validação dos itens, e não a avaliação dos alunos.

5.3.1 Análise por item

Além do número de acertos por item, é interessante saber o número de respostas por alternativa para cada item. Algumas alternativas receberam maior número de respostas que a alternativa correta. Em alguns casos isso mostra a dificuldade e despreparo dos alunos interpretarem a questão e saberem as propriedades sobre o conteúdo e competência avaliada.

Questão 1
Qual é a equação da reta que contém os pontos (3,5) e (4,-2)?
(A) $y = -7x + 26$
(B) $y = -\frac{1}{7}x - \frac{10}{7}$
(C) $y = \frac{1}{7}x - \frac{18}{7}$
(D) $y = x + 2$
(E) $y = 7x - 16$

Tabela 5.7: Respostas do item 1

A	B	C	D	E	NA's
187	36	27	29	71	1

Esse item está avaliando as competências: **C1**: Identificar a localização de pontos no plano cartesiano e **C3**: Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto de inclinação. A resposta correta é a alternativa A, que foi a alternativa mais marcada. Entretanto, quase metade dos respondentes escolheram outras alternativas, demonstrando que não desenvolveram a competência avaliada e a mesma precisa ser melhor trabalhada pelos professores.

Questão 2
As retas das equações
(1) $2y + x = 0$ e (2) $y + 1 = 0$
(i) a reta (2) é paralela ao eixo OX.
(ii) a reta (2) é paralela ao eixo OY.

(iii) a reta (1) tem coeficiente angular $-\frac{1}{2}$.
(iv) a reta (1) tem coeficiente angular $\frac{1}{2}$.
(v) as retas (1) e (2) se interceptam no ponto (2,-1).

Dessas afirmações acima:
(A) Somente (v) é verdadeira
(B) Somente (i) e (ii) são verdadeiras
(C) Somente (ii) e (iv) são verdadeiras
(D) Somente (i), (iii) e (v) são verdadeiras
(E) Todas são verdadeiras

Tabela 5.8: Respostas do item 2

A	B	C	**D**	E	NA's
52	46	106	141	6	0

Esse item está avaliando as competências: **C2**: Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta, e **C4**: Relacionar a determinação do ponto de intersecção de duas ou mais retas com a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas. A resposta correta é a alternativa D, entretanto além dessa alternativa, a alternativa C também teve um alto índice de respostas. Sendo que uma alternativa é o complementar da outra. Isso demonstra que boa parte dos alunos não tem domínio sobre os conceitos e propriedades avaliados pelas competências.

Questão 3
Dentre as equações abaixo, pode-se afirmar que a de uma circunferência é
(A) $(x-1)^2 + y^2 = 25$
(B) $x^2 - y - 4x = -3$
(C) $x^2 + y^2 = -16$
(D) $x^2 - y - 9 = 0$
(E) $x^2 - y^2 - 4x = 9$

Tabela 5.9: Respostas do item 3

A	B	C	D	E	NA's
86	37	110	82	35	1

Esse item está avaliando a competência **C5**: Reconhecer, dentre as equações do segundo grau com duas incógnitas, as que representam circunferências. Embora a resposta correta seja a alternativa A, os alunos escolheram mais a alternativa C. Isso demonstra que a boa parte dos alunos não tem domínio sobre a equação da circunferência ou não prestaram atenção ao número negativo na alternativa C.

Questão 4
Uma praça quadrada, que possui o perímetro de 24 metros, tem uma árvore próxima de cada vértice e fora dela. Deseja-se aumentar a área da praça, alterando-se sua forma e mantendo as árvores externas a ela conforme ilustra a figura.
Nessas condições, qual foi o aumento da área da praça?
(A) 12 m^2
(B) 24 m^2
(C) 36 m^2
(D) 48 m^2
(E) 84 m^2

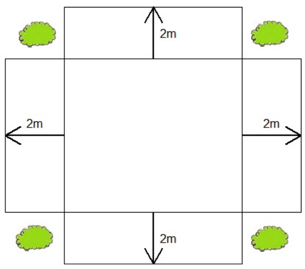


Tabela 5.10: Respostas do item 4

A	B	C	**D**	E	NA's
75	60	34	171	10	1

Esse item está avaliando as competências: **C6**: Resolver problemas envolvendo cálculo de perímetro de figuras planas, e **C7**: Resolver problemas envolvendo cálculo de área de figuras planas. A alternativa correta é a alternativa D e também a mais escolhida. Entretanto, boa parte dos respondentes não desenvolveram todas as habilidades previstas pelas competências. Os alunos podem estar confundindo as propriedades de área e perímetro ou ter dificuldade em algumas dessas habilidades.

Questão 5

Um corpo cilíndrico, com 4 cm de raio e 12 cm de altura, está com água até a altura de 8 cm. Foram colocadas em seu interior bolas de gude de 2 cm de diâmetro, e o nível da água atingiu a boca do vidro, sem derramamento.
Quantas bolas de gude foram colocadas?
(A) 32
(B) 48
(C) 64
(D) 80
(E) 96

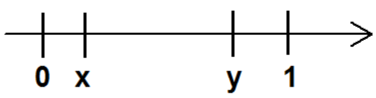
Tabela 5.11: Respostas do item 5

A	B	**C**	D	E	NA's
153	92	50	13	19	24

Esse item está avaliando a competência **C8**: Resolver problemas envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera). A alternativa mais respondida foi a A, mas a alternativa correta é a C. Uma explicação para isso foi a falta de atenção ou conhecimento de que 2 cm de diâmetro implica em 1 cm de raio.

Questão 6

Na figura abaixo estão representados os números reais 0, x, 1, y.



A posição do produto xy é

(A) à esquerda do zero
(B) entre 0 e x
(C) entre x e y
(D) entre y e 1
(E) à direita de 1

Tabela 5.12: Respostas do item 6

A	**B**	C	D	E	NA's
25	104	145	31	44	2

Esse item está avaliando a competência **C9** Identificar a localização de números reais na reta numérica. Para responder corretamente a essa questão o aluno deveria reconher que o produto de dois números menores que um e maiores que zero é igual a um número menor que o menor deles. Assim, o produto de x por y é um número menor que x, e na reta ficará posicionado entre 0 e x, conforme a alternativa B. Todavia, muitos alunos não marcaram essa alternativa indicando desconhecer essa propriedade.

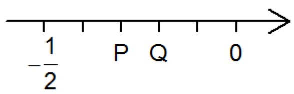
Questão 7
Num cinema, há 12 fileiras com 16 poltronas e 15 fileiras com 18 poltronas. O número de poltronas é
(A) 78
(B) 192
(C) 270
(D) 462
(E) 480

Tabela 5.13: Respostas do item 7

A	B	C	**D**	E	NA's
1	14	7	324	5	0

Esse item está avaliando a competência **C10**: Resolver problemas com números naturais e inteiros envolvendo diferentes significados das operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação). Esse foi o item que teve maior número de acertos e, também o mais fácil. Errar esse item pode ser uma indicação de que os alunos não desenvolveram a habilidade de resolver situações-problemas com diversos significados.

Questão 8
A figura abaixo mostra os pontos P e Q que correspondem a números racionais e foram posicionados na reta numerada do conjunto dos racionais.



Os valores atribuídos a P e Q, conforme suas posições na reta numérica são:
(A) P $= -\frac{1}{5}$ e Q $= -\frac{3}{10}$
(B) P $= -\frac{3}{10}$ e Q $= -\frac{1}{5}$
(C) P $= -\frac{3}{5}$ e Q $= -\frac{7}{10}$
(D) P $= -\frac{7}{10}$ e Q $= -\frac{3}{5}$

Tabela 5.14: Respostas do item 8

A	**B**	C	D	E	NA's
57	173	41	23	55	2

(E) P $= -\frac{3}{5}$ e Q $= -\frac{1}{5}$

Esse item está avaliando a competência **C11** Identificar a localização de números racionais na reta numérica. A resposta correta para essa questão é a alternativa B, mas mais da metade dos respondentes marcaram alternativas erradas (178 incorretas). Isso evidencia que os alunos não devem conhecer a ordem de crescimento dos números racionais ou a divisão adequada entre racionais na reta numerada.

Questão 9

No Brasil $\frac{3}{4}$ da população vive na zona urbana.

De que outra forma podemos representar esta fração?

(A) 7,5%

(B) 15%
(C) 25%
(D) 34%
(E) 75%

Tabela 5.15: Respostas do item 9

A	B	C	D	**E**	NA's
19	12	11	16	291	2

Esse item está avaliando a competência **C12**: Reconhecer as diferentes representações de um número racional. A maioria dos respondentes escolheu a alternativa correta para esse item, a alternativa A. Logo, pode-se concluir que os alunos têm conhecimento de equivalência de números racionais. Os alunos que escolheram as alternativas B ou C devem ter escolhido ao acaso.

Questão 10

Dos 11 jogadores de um time de futebol, apenas 5 tem menos de 25 anos de idade.
A fração de jogadores com mais de 25 anos de idade é:

(A) $\frac{5}{6}$

(B) $\frac{6}{5}$

(C) $\frac{5}{11}$

(D) $\frac{6}{11}$

(E) $\frac{5}{25}$

Tabela 5.16: Respostas do item 10

A	B	C	**D**	E	NA's
13	9	56	261	12	0

Esse item está avaliando a competência **C13**: Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados. Observa-se que a maioria domina a habilidade referente a essa competência. Aqueles que assinaram outras alternativas mostram não compreender a correspondência entre a situação relatada e a fração.

Questão 11

Quatro amigos, João, Pedro, Ana e Maria saíram juntos para fazer um passeio por um mesmo caminho. Até agora, João andou $\frac{6}{8}$ do caminho; Pedro, $\frac{9}{12}$; Ana, $\frac{3}{8}$ e Maria, $\frac{4}{6}$.

Os amigos que se encontram no mesmo ponto de caminho são

(A) João e Pedro
(B) João e Ana
(C) Ana e Maria
(D) Pedro e Ana
(E) Maria e João

Tabela 5.17: Respostas do item 11

A	B	C	D	E	NA's
200	40	17	11	83	0

Esse item está avaliando a competência **C14**: Identificar frações equivalentes. Observa-se que a alternativa A, que é a correta foi bastante respondida. Aqueles que não responderam corretamente possivelmente não desenvolveram a habilidade de identificar equivalências através de frações.

Questão 12

A professora de matemática propôs como exercício a expressão

$$\left[\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]^2$$

Os alunos que resolveram corretamente a expressão encontraram como resultado

(A) $-\frac{8}{9}$
(B) 0
(C) $\frac{8}{9}$
(D) 2
(E) $\frac{64}{81}$

Tabela 5.18: Respostas do item 12

A	B	C	D	**E**	NA's
25	81	56	29	159	1

Esse item está valiando a competência **C15**: Efetuar cálculos que envolvam operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais. Embora grande parte dos respondentes acertou a essa questão marcando a alternativa E, boa parte dos respondentes apresenta dificuldade de operar adequadamente frações e números decimais.

Questão 13

Uma horta comunitária será criada em uma área de 5100 m^2. Para o cultivo de hortaliças, serão destinados $\frac{2}{3}$ dessa área.

Quantos metros quadrados serão utilizados nesse cultivo?

(A) 170
(B) 340

(C) 1700
(D) 2550
(E) 3400

Tabela 5.19: Respostas do item 13

A	B	C	D	**E**	NA's
12	15	52	31	241	0

Esse item está avaliando a competência **C16**: Resolver problemas com números racionais que envolvam as operações: adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação. De acordo com as respostas para as alternativas conclui-se que a maior parte dos respondentes desenvolveu a habilidade de resolução de problemas que envolvem as operações com racionais.

Questão 14
Supondo $\sqrt[4]{8} = 1,68$, o valor mais próximo de $\sqrt{\frac{0,09}{\sqrt{2}}}$ é:
(A) 25,2
(B) 0,0252
(C) 0,252
(D) 2,5
(E) 0,00252

Tabela 5.20: Respostas do item 14

A	B	**C**	D	E	NA's
13	118	82	31	82	25

Esse item está avaliando a competência **C17**: Efetuar cálculos com valores aproximados de radicais. A alternativa correta C foi menos respondida que a alternativa B, uma explicação para isso é que os alunos não têm habilidade de resolver expressões com radicais não exatos e na hora de resolver não utilizaram o raciocínio $\sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}} = 1,68$ e $2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{3}{4}} = 2$.

Questão 15
O resultado da expressão $2x^2 - 3x + 10$, para $x = -2$, é
(A) -4
(B) 0
(C) 12
(D) 13
(E) 24

Tabela 5.21: Respostas do item 15

A	B	C	D	**E**	NA's
23	22	52	16	238	0

Esse item está avaliando a competência **C18**: Calcular o valor numérico de uma expressão algébrica. A alternativa correta, E, foi respondida por maior parte dos respondentes, o que indica que a maioria dos alunos têm habilidade de substituir variáveis em expressões por números inteiros e calcular seu valor numérico.

Questão 16

n	5	6	7	8	9	10
P	8	10	12	14	16	18

As variáveis n e P assumem valores conforme mostra o quadro abaixo.
A relação entre P e n é dada pela expressão:
(A) P = n+1
(B) P = n+2
(C) P = 2n-2
(D) P = n-2
(E) P = 2n

Tabela 5.22: Respostas do item 16

A	B	**C**	D	E	NA's
27	45	256	4	18	1

Esse item está avaliando a competência **C19**: Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras (padrões). A resposta correta é a alternativa C, e foi escolhida pela maioria dos respondentes. Apenas alguns escolheram a alternativa errada, indicando que esses alunos podem não ter desenvolvido a habilidade de reconhecer a regularidade ocorrida em uma sequência e representá-la por meio de uma expressão algébrica.

Questão 17
As raízes do polinômio
$P(x) = (x-3)^2(x+1)$ são:
(A) -2 e 1
(B) 3 e -1
(C) -3 e 1
(D) 3 e 1
(E) -3 e -1

Tabela 5.23: Respostas do item 17

A	**B**	C	D	E	NA's
24	167	63	52	20	25

Essa competência está avaliando a competência **C26**: Relacionar as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do primeiro grau. A alternativa correta é a letra B, e também a que foi mais marcada. Mas ainda percebe-se que falta domínio da habilidade medida pelos respondentes.

Questão 18
ma empresa, em processo de reestruturação, propôs a seus funcionários, admitidos há pelo menos dois anos, uma indenização financeira para os que pedissem demissão, que variam em função do número de nos trabalhados. A tabela abaixo era utilizada para calcular o valor (i) da indenização, em função do tempo trabalhado (t).
A expressão que permite determinar o valor da indenização **i** para **t** anos trabalhados é
(A) i = 450t
(B) i = 450+500t

Tempo trabalho (em anos)	**Valor indenização (em reais)**
1	450
2	950
3	1450
4	1950

(C) i = 450(t-1)
(D) i = 450+500(t-1)
(E) i = 500t

Tabela 5.24: Respostas do item 18

A	B	C	**D**	E	NA's
39	58	21	192	17	24

Esse item está avaliando a competência **C20**: Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela. A resposta correta é a D. Mas, para os alunos que assinalaram a alternativa A, provavelmente leram a primeira linha da tabela e perceberam que existia uma relação direta entre o tempo trabalhado e o valor da indenização e, sem acompanhar as demais linhas foram em busca de uma resposta entre as alternativas. Já aqueles que responderam a letra B, provavelmente não fizeram a relação dos anos trabalhados **t**.

Questão 19

O custo de produção de uma pequena empresa é composto por um valor fixo de $R\$1.500,00$ mais $R\$10,00$ por peça fabricada.

O número x de peças fabricadas quando o custo é de $R\$3.200,00$ é

(A) 150
(B) 160
(C) 170
(D) 320
(E) 470

Tabela 5.25: Respostas do item 19

A	B	**C**	D	E	NA's
8	13	248	50	8	24

Esse item está relacionado a competência **C23**: Identificar e resolver problemas que envolvam equações de primeiro grau. A resposta correta é a alternativa C. Essa foi a resposta mais assinalada e indica que a maior parte dos respondentes tem compreensão da proporcionalidade direta entre um par de grandezas precedendo o estudo da função de primeiro grau.

Questão 20

Luizinho desafia seu irmão mais velho, Pedrão, para uma corrida. Pedrão aceita e permite que o desafiante saia 20 metros a sua frente. Pedrão ultrapassa Luizinho e ganha a corrida.

O gráfico que melhor ilustra essa disputa é

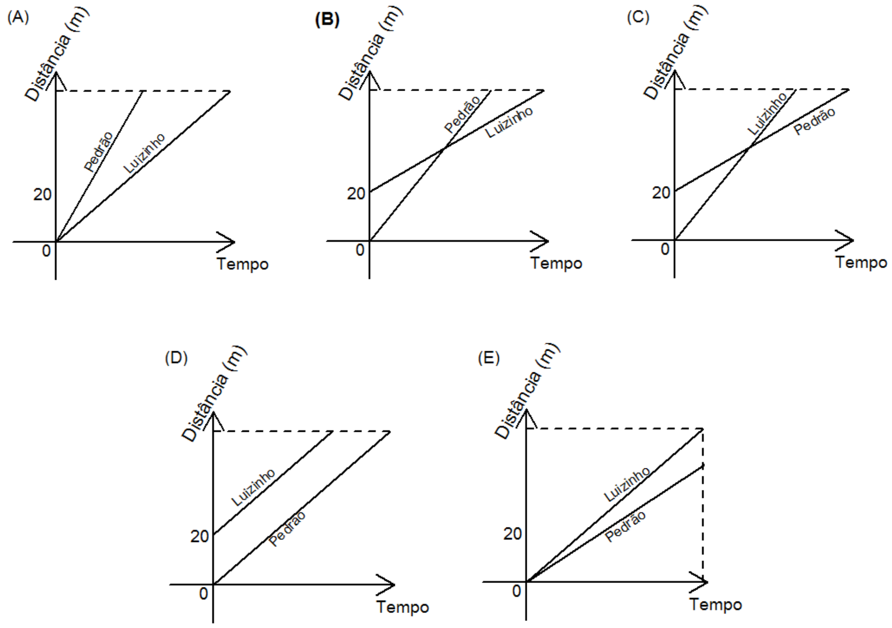


Tabela 5.26: Respostas do item 20

A	**B**	C	D	E	NA's
5	200	25	85	11	25

Esse item está avaliando a competência **C22**: Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em texto. A resposta correta é a alternativa B. Pode-se observar que a maior parte dos respondentes desenvolveu a habilidade de associar um gráfico à descrição de uma situação problema.

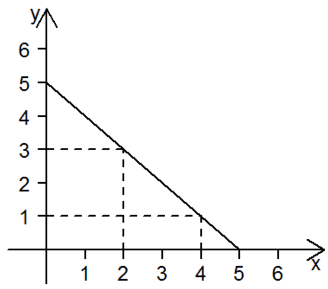
Questão 21
São dados os conjuntos
$A = \{x \in Z / \, |x - 1| < 3\}$ e
$B = \{x \in Q / x^2 < 4\}$.
É correto afirmar que
(A) $A \cap B = \emptyset$
(B) $A \cup B = B$
(C) $A \subset B$ e $A \neq B$
(D) $A \cap B$ tem dois elementos
(E) $A \cup B$ tem infinitos elementos

Tabela 5.27: Respostas do item 21

A	B	C	D	**E**	NA's
36	41	102	68	79	25

Esse item está avaliando a competência **C32**: Identificar e resolver inequações modulares. Pode-se perceber que grande parte dos respondentes não assinalou a alternativa correta, que é a letra E. Para essa questão há uma necessidade de se entender se os alunos têm mais dificuldade em resolver uma inequação modular ou identificar que o conjunto B pertence aos racionais.

Questão 22
O gráfico abaixo mostra uma reta em um plano cartesiano.



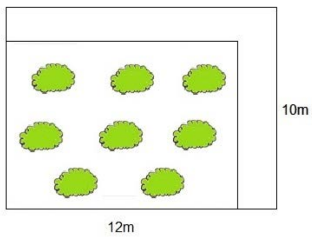
Qual é a equação da reta apresentada no gráfico?
(A) $x - y - 5 = 0$
(B) $x + y - 5 = 0$
(C) $x + y + 5 = 0$
(D) $x + y - 4 = 0$
(E) $x + y = 6$

Tabela 5.28: Respostas do item 22

A	**B**	C	D	E	NA's
21	189	99	11	7	24

Esse item está avaliando a competência **C24**: Reconhecer a representação algébrica de uma função do primeiro grau, dado o seu gráfico. Os alunos que responderam a alternativa B acertaram o item. Os que escolheram a alternativa C devem ter trocado o sinal do termo independente.

Questão 23
Em um terreno retangular de tamanho 10m x 12m, deseja-se construir um jardim com $80m^2$ de área, deixando uma faixa para o caminho (sempre de mesma largura), como mostra a figura.



A largura do caminho deve ser de
(A) 1 m
(B) 1,5 m
(C) 2 m
(D) 2,5 m
(E) 3 m

Esse item está avaliando a competência **C28**: Identificar e resolver problemas que envolvam equações de segundo grau. A alternativa correta é a letra C e a maior parte dos respondentes acertou essa questão. Mas, essa questão precisa ser revista, uma vez que pode não estar discriminando as habilidades dos alunos.

Tabela 5.29: Respostas do item 23

A	B	**C**	D	E	NA's
8	46	234	21	18	24

Questão 24

Por uma mensagem dos Estados Unidos para o Brasil , via fax, a Empresa de Correios e Telégrafos (ECT) cpbra $R\$1,37$ pela primeira página e $R\$0,67$ por página que se segue, completa ou não. Qual o número mínimo de páginas de uma dessas mensagens para que seu preço ultrapasse o valor de $R\$10,00$?

(A) 8
(B) 10
(C) 12
(D) 14
(E) 16

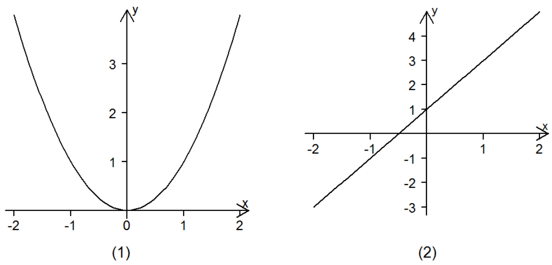
Tabela 5.30: Respostas do item 24

A	B	C	**D**	E	NA's
28	9	46	205	38	25

Esse item está avaliando a competência **C25**: Identificar e resolver problemas de inequações de primeiro grau. A resposta correta é a letra D e mais da metade dos respondentes acertou esse item. Entretanto, boa parte dos alunos apresenta problemas na identificação de inequação do primeiro grau.

Questão 25

Observe os gráficos



Qual dos gráficos representa uma função polinomial?

(A) O (2)
(B) O (1)
(C) Os dois
(D) O (2) apenas considerando a parte positiva
(E) Nenhum dos gráficos

Tabela 5.31: Respostas do item 25

A	B	**C**	D	E	NA's
91	125	52	24	35	24

Esse item está avaliando a competência **C27**: Reconhecer o gráfico de uma função polinomial de primeiro grau por meio de seus coeficientes. A resposta correta é alternativa

C, mas a maior parte dos respondentes escolheu uma alternativa errada. A alternativa B foi a que teve maior número de respostas assinaladas. Uma explicação para isso foi os alunos identificarem a função polinomial de segundo grau no gráfico (1) mas não lembrarem das propriedades das funções polinomiais do primeiro grau e assim acharem que o gráfico (1) não representa uma função polinomial.

Questão 26
É solução da equação $|3x - 5| = 5x - 1$:
(A) $\{-2\}$
(B) $\left\{\frac{3}{4}\right\}$
(C) $\left\{\frac{1}{5}\right\}$
(D) $\{2\}$
(E) $\left\{\frac{3}{4}, -2\right\}$

Tabela 5.32: Respostas do item 26

A	**B**	C	D	E	NA's
102	65	34	54	68	28

Esse item está avaliando a competência **C31**: Identificar e resolver equações modulares. A resposta correta é a alternativa B. Mas a maior parte dos alunos errou essa questão. Conclui-se que a habilidade avaliada por essa competência precisa ser melhor trabalhada com os alunos, que parecem ter dificuldade de trabalhar com módulo em equações.

Questão 27
Seja M o conjunto dos números naturais n, tal que $2n^2 - 75n + 700 \leq 0$. Assim, é correto afirmar que:
(A) Apenas um do elementos de M é múltiplo de 4
(B) Apenas dois dos elementos de M são primos
(C) A soma de todos os elementos de M é igual a 79
(D) M contém exatamente 6 elementos
(E)Os elementos de M são múltiplos de 3

Tabela 5.33: Respostas do item 27

A	B	C	D	E	NA's
106	74	45	55	44	27

Esse item está avaliando a competência **C29**: Identificar e resolver problemas de inequações de segundo grau. A resposta correta é alternativa A. Mesmo essa alternativa tendo o maior número de respostas ainda há a necessidade de desenvolver mais atividades a respeito dessa competência com os alunos.

Questão 28
Uma bala é atirada de um canhão e sua trajetória descreve uma parábola de equação $y = -52x^2 + 90x$, onde as variáveis e y são medidas em metros.
Nessas condições, a altura máxima atingida pela bala é
(A) 30,0m
(B) 40,5m
(C) 81,5m
(D) 405m
(E) 810m

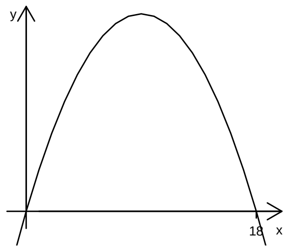


Tabela 5.34: Respostas do item 28

A	B	C	**D**	E	NA's
23	53	56	79	24	116

Esse item está avaliando a competência **C30**: Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo no gráfico de uma função polinomial do segundo grau. Essa é uma questão que teve um número considerável de respostas nulas ou em branco, os Na's totalizam 116 respostas. Esse número é devido a um problema apresentado pela questão nas aplicações iniciais, mas que foi corrigido e assim teve 235 repostas avaliadas. Considerando isso, o número de respostas corretas é baixo e indica que falta domínio por parte dos alunos na habilidade de resolver situações-problema envolvendo pontos de máximo ou de mínimo de uma função polinomial apresentados em gráfico.

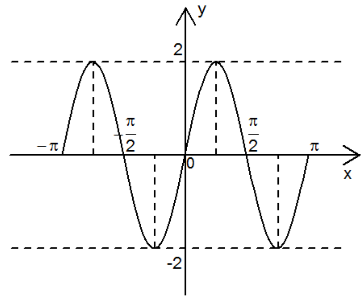
Questão 29
Abaixo estão relacionadas algumas funções.
Entre elas, a função exponencial crescente é
(A) $f(x) = 5^{-x}$
(B) $f(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$
(C) $f(x) = (0,1)^x$
(D) $f(x) = 10^x$
(E) $f(x) = 0,5^x$

Tabela 5.35: Respostas do item 29

A	B	C	**D**	E	NA's
29	52	31	197	15	27

Esse item está valiando a competência **C33**: Identificar a representação gráfica e/ou algébrica de uma função exponencial. A resposta correta é a letra D, que obteve maior número de respostas. Mas ainda há alguns alunos que não demonstraram ter a habilidade de identificar que as quatro funções, apresentadas nas alternativas incorretas, apesar de serem exponenciais, são decrescentes.

Questão 30
O gráfico abaixo representa a função:
(A) $y = -2\cos x$
(B) $y = \cos\frac{x}{2}$
(C) $y = 2\sin x$



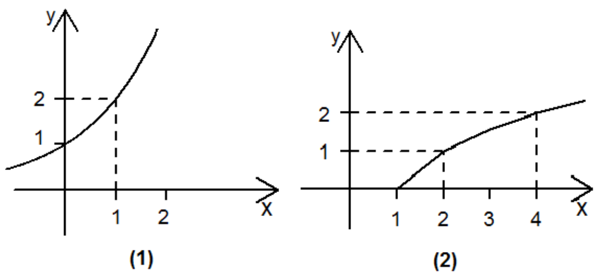
(D) $y = \sin \frac{x}{2}$
(E) $y = 2\sin 2x$

Tabela 5.36: Respostas do item 30

A	B	C	D	**E**	NA's
53	61	110	44	58	25

Esse item está associado a competência **C36**: Identificar a representação gráfica e/ou algébrica de funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente), reconhecendo suas propriedades. A resposta correta é a alternativa E. Mas a alternativa C foi a mais marcada. Nota-se assim, que os alunos não conseguiram identificar a representação gráfica da função trigonométrica $y = 2\sin 2x$ verificando que a curva no eixo das abcissas passa por $\frac{\pi}{2}$.

Questão 31
Nos gráficos 1 e 2 abaixo estão representadas duas funções.



Pode-se afirmar que:
(A) $y = 2x$ está representada no (1)
(B) $y = x^2 + 1$ está representada no (2)
(C) $y = \log_2 x$ está representada no (2)
(D) $y = 2^x$ está representada no (2)
(E) $y = \log x$ está representada no (2)

Tabela 5.37: Respostas do item 31

A	B	**C**	D	E	NA's
94	54	80	46	51	26

Esse item está avaliando a competência **C34**: Identificar a representação gráfica e/ou algébrica de uma função logarítmica, reconhecendo-a como inversa da função exponencial. Verifica-se que a maioria dos alunos não possui a habilidade avaliada. A resposta correta seria a alternativa C, porém ela não obteve um índice de escolha alto. assim, há necessidade de ser melhor trabalhada a função logarítmica e exponencial com os alunos.

Questão 32

Suponhamos que a população de uma certa cidade seja estimada, daqui a **x** anos, por $f(x) = \left(20 - \frac{1}{2^x}\right)$ 1000 habitantes. Estima-se que durante o terceiro ano, essa população:

(A) Se aumentará constantemente
(B) Aumentará de até 125 habitantes
(C) Aumentará de até 250 habitantes
(D) Diminuirá de até 125 habitantes
(E) Diminuirá de até 250 habitantes

Tabela 5.38: Respostas do item 32

A	B	C	D	E	NA's
123	67	61	43	24	33

Esse item está avaliando a competência **C35**: Resolver problemas que envolvam função exponencial. A alternativa correta é a A. Pode-se notar que mais da metade dos respondentes errou essa questão demonstrando não ter domínio sobre a habilidade de resolver situações-problemas que envolvam função exponencial.

Capítulo

6

Conclusões e Perspectivas Futuras

Conforme já mencionado, a proposta deste trabalho consistiu na construção de uma escala para medir proficiência em conteúdos matemáticos básicos, para ingressantes em cursos da área de exatas. Para isso, foi utilizado como população a FCT/UNESP, porém a prova só foi aplicada à alunos do primeiro ano dos cursos de graduação em Matemática diurno, Engenharia Ambiental, Engenharia Cartográfica e Estatística, cursos que possuem a matéria anual de Cálculo Diferencial e Integral I. Para completar a amostra e garantir a presença de respondentes com diferentes níveis de habilidade, a prova foi aplicada para alunos do 3º ano do ensino médio, oriundos de uma escola estadual do município de Presidente Prudente, escolhida por apresentar um dos maiores IDEB.

Conforme apresentado ao longo do texto, este trabalho foi elaborado através de etapas, sendo a primeira delas a construção da Matriz de Referência e a segunda a elaboração dos itens relacionados as competências e habilidades esperadas e da prova. A terceira etapa consistiu na aplicação da prova, realizada ao longo do mês de outubro de 2014. As etapas seguintes consistiram na especificação do modelo e na estimação dos itens e das habilidades, na definição dos níveis e itens âncora, e finalmente na construção da escala.

Para a análise das respostas da aplicação da prova foi especificado o Modelo Logístico Unidimensional de três parâmetros (ML3). Este modelo, conforme explicado no Capítulo 2, fornece estimativas para as probabilidades de resposta correta dada por um indivíduo levando em consideração a sua habilidade (conhecimento).

Para o procedimento de inferência, sob o enfoque bayesiano, se fez necessário o uso de métodos numéricos. Neste caso, a distribuição a posteriori conjunta não apresenta forma fechada e o amostrador de Gibbs, implementado no software OpenBUGS, foi utilizado. O código utilizado na análise é apresentado neste relatório.

Os resultados mostraram que a maioria dos itens que compuseram o instrumento de avaliação (prova) são importantes para medir a proficiência, sendo nove deles considerados itens âncoras. No entanto, mostram também que em parte da escala as habilidades são melhor estimadas e em outras novos itens deveriam ser incluídos para este fim.

Embora também tenham sido estimadas as habilidades, pois eram necessárias para a definição dos itens âncora, o principal objetivo foi testar os itens para poder construir a escala de proficiência em conteúdos matemáticos básicos. Também, como a população de respondentes não foi composta apenas por ingressantes da FCT/UNESP, uma análise sobre o rendimento voltada apenas aos ingressantes não seria conclusiva.

É importante ressaltar que o projeto "Avaliação do Progresso dos Ingressantes nos Cursos da Área de Exatas na Proficiência em Conteúdos Matemáticos Básicos, Necessários para o Acompanhamento das Disciplinas de Cálculo e Similares" prevê a aplicação de uma prova no ingresso do aluno e outra no final do ano, para avaliar o ganho ao longo deste primeiro ano. Como neste trabalho o objetivo foi a construção da escala, somente a primeira prova foi aplicada.

Conforme já mencionado a interpretação da escala e o aprimoramento do banco de itens são tarefas a serem realizadas em conjunto com especialistas e fazem parte das perspectivas futuras.

Referências

ANDRADE, D. F.; TAVARES, H. R.; VALLE, R. C. Teoria da Resposta ao Item: conceitos e aplicações. 4º SINAPE, ABE, São Paulo, p. 154p., 2000.

ANJOS, A.; ANDRADE, D. F. Teoria de Resposta ao Item com uso do R. 20º SINAPE, João Pessoa, PB, p. 104p., 2012.

AZEVEDO, C. L. N. *Métodos de Estimação na Teoria de Resposta ao Item*. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 27/02/2003., 2003.

BAKER, F. B. *The Basics of Item Response Theory*. 2ed. ed. University of Wisconsin: ERIC Clearinghouse on Assessment and Evaluation, 2001. 164p. p. ISBN 1-886047-03-0.

BEATON, A. E.; ALLEN, N. L. Interpreting scales through scale anchoring. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, Sage Publications, v. 17, n. 2, p. 191–204, 1992.

BRASIL. *Ministério da Educação, PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação: SAEB: Ensino M´dio: Matrizes de referência, tópicos e descritores*. INEP, 2011. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&id=209&Itemid=326>. Acesso em: 13 ago. 2014.

BRASIL. *Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas - INEP*. 2014. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/>. Acesso em: 13 ago. 2014.

DANTE, L. R. Matemática: Contexto e Aplicações. *São Paulo: Ática*, v. 3, 2000.

GAMERMAN, D.; LOPES, H. F. *Markov chain Monte Carlo: stochastic simulation for Bayesian inference*. 2ed.. ed. Nova York: CRC Press/Chapman & Hall, 2006.

GUZMÁN, J. L. B.; CALDERÓN, A.; SERRANO, L. H. V. *Enfoque Bayesiano en Modelos de Teoría de Respuesta al ´tem*. [S.l.]: Pontificia Universidad Católica del Perú. Departamento de Ciencias. Sección Matemáticas, 2010.

HAMBLETON, R. K.; SWAMINATHAN, H.; ROGERS, H. J. *Fundamentals of Item Response Theory (measurement methods for the social science)*. [S.l.]: SAGE Publications, Newbury Park, California, 1991. 174p. p.

LUNN, D. J. et al. Winbugs-a Bayesian modelling framework: concepts, structure, and extensibility. *Statistics and computing*, Springer, v. 10, n. 4, p. 325–337, 2000.

MARQUES, K. A. *Análise bayesiana em modelos TRI de três parâmetros*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2009.

PASQUALI, L.; PRIMI, R. Fundamentos da Teoria da Resposta ao Item: TRI. *Avaliação Psicológica*, Instituto Brasileiro de Avaliação Psicológica. UFRGS, v. 2, n. 2, p. 99–110, 2003.

PAULO São. *Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo: SARESP*. 2013. Disponível em: <http://file.fde.sp.gov.br/saresp/saresp2013/Arquivos/SARESP\%202013_Relat\%C3\%B3rio\%20Pedag\%C3\%B3gico_Matem\%C3\%A1tica.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2015.

SECRETARIA: Site - Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. 2014. Disponível em: <http://www.educacao.sp.gov.br/>. Acesso em: 10 fev. 2014.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. *Matemática: Ensino Médio*. 6ed.. ed. São Paulo: Saraiva, 2010. v. 3vol.

SPIEGELHALTER, D.; THOMAS, A.; BEST, N. The BUGS project: Evolution, critique and future directions (with discussion). *Stat. Med*, v. 28, p. 3049–3082, 2009.

TEZZA, R. et al. Proposta de um construto para medir usabilidade em sites de e-commerce utilizando a teoria da resposta ao item. Florianópolis, SC, 2009.

VALLE, R. d. C. A construção e a interpretação das escalas de conhecimento– considerações gerais e uma visão do que vem sendo feito no saresp. *Estudos em*, 2001.

VUNESP: Fundação Vunesp. 2015. Disponível em: <http://www.vunesp.com.br/>. Acesso em: 19 abr. 2015.

Apêndice

A

Matriz de Referência

Tema I. Espaço e Forma

C1 – Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.
C2 – Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.
C3 – Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto de inclinação.
C4 – Relacionar a determinação do ponto de intersecção de duas ou mais retas com a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas.
C5 – Reconhecer, dentre as equações do segundo grau com duas incógnitas, as que representam circunferências.

Tema II. Grandezas e Medidas

C6 – Resolver problemas envolvendo cálculo de perímetro de figuras planas.
C7 – Resolver problemas envolvendo cálculo de área de figuras planas.
C8 – Resolver problemas envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

Tema III. Números e Operações/Álgebra e Funções

C9 – Identificar a localização de números reais na reta numérica.
C10 – Resolver problemas com números naturais e inteiros envolvendo diferentes significados das operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).
C11 – Identificar a localização de números racionais na reta numérica.
C12 – Reconhecer as diferentes representações de um número racional.
C13 – Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados.
C14 – Identificar frações equivalentes.
C15 – Efetuar cálculos que envolvam operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais.
C16 – Resolver problemas com números racionais que envolvam as operações: adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação.
C17 – Efetuar cálculos com valores aproximados de radicais.
C18 – Calcular o valor numérico de uma expressão algébrica.
C19 – Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras (padrões).
C20 – Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela.

C21 – Analisar crescimento/decrescimento, zero de funções reais apresentadas em gráficos.
C22 – Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em texto.
C23 – Identificar e resolver problemas que envolvam equações de primeiro grau.
C24 – Reconhecer a representação algébrica de uma função do primeiro grau, dado o seu gráfico.
C25 – Identificar e resolver problemas de inequações de primeiro grau.
C26 – Relacionar as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do primeiro grau.
C27 – Reconhecer o gráfico de uma função polinomial de primeiro grau por meio de seus coeficientes.
C28 – Identificar e resolver problemas que envolvam equações de segundo grau.
C29 – Identificar e resolver problemas de inequações de segundo grau.
C30 – Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo no gráfico de uma função polinomial do segundo grau.
C31 – Identificar e resolver equações modulares.
C32 – Identificar e resolver inequações modulares.
C33 – Identificar a representação gráfica e/ou algébrica de uma função exponencial.
C34 – Identificar a representação gráfica e/ou algébrica de uma função logarítmica, reconhecendo-a como inversa da função exponencial.
C35 – Resolver problemas que envolvam função exponencial.
C36 – Identificar a representação gráfica e/ou algébrica de funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente), reconhecendo suas propriedades.

Apêndice

B

Prova

Projeto: Construção de uma escala para avaliação da proficiência em conteúdos matemáticos básicos

Nome do aluno: ______________________________

RG: ______________________________

INSTRUÇÕES

1. Preencha o cartão resposta com seu nome completo, assinatura e documento de identidade (observe que idade e sexo já fazem parte das respostas).

2. Cada questão tem cinco alternativas de resposta: (A), (B), (C), (D) e (E) e apenas uma delas é correta.

3. Para cada questão marque a alternativa escolhida no cartão-resposta, preenchendo todo o espaço dentro do retângulo correspondente com caneta esferográfica azul ou preta.

4. Marque apenas uma alternativa para cada questão.

Atenção: questão com mais de uma alternativa marcada será anulada, mesmo que uma das marcações esteja correta.

5. Não é permitido o uso de instrumentos de desenho, calculadoras, aparelhos eletrônicos ou quaisquer fontes de consulta.

6. Os espaços em branco na prova podem ser usados para rascunho.

7. Ao final, a prova deverá ser entregue juntamente com o cartão-resposta.

É com grande alegria que contamos com a sua participação neste projeto. Encare as questões desta prova como quebra-cabeças interessantes e divirta-se com a busca de suas soluções.

Desejamos que faça uma boa prova!

---

1. Qual é a equação da reta que contém os pontos (3,5) e (4,-2)?

(A) $y = -7x + 26$

(B) $y = -\frac{1}{7}x - \frac{10}{7}$

(C) $y = \frac{1}{7}x - \frac{18}{7}$

(D) $y = x + 2$

(E) $y = 7x - 16$

2. As retas das equações
(1) $2y + x = 0$ e (2) $y + 1 = 0$

(i) a reta (2) é paralela ao eixo OX.
(ii) a reta (2) é paralela ao eixo OY.
(iii) a reta (1) tem coeficiente angular $-\frac{1}{2}$.
(iv) a reta (1) tem coeficiente angular $\frac{1}{2}$.
(v) as retas (1) e (2) se interceptam no ponto (2,-1).

Dessas afirmações acima:

(A) Somente (v) é verdadeira

(B) Somente (i) e (ii) são verdadeiras

(C) Somente (ii) e (iv) são verdadeiras

(D) Somente (i), (iii) e (v) são verdadeiras

(E) Todas são verdadeiras

3. Dentre as equações abaixo, pode-se afirmar que a de uma circunferência é

(A) $(x-1)^2+y^2=25$

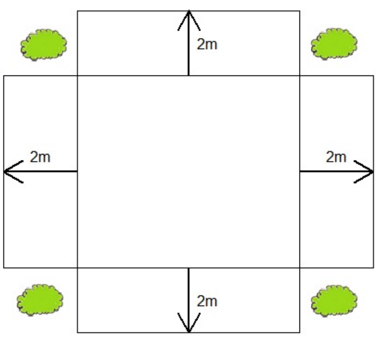
(B) $x^2-y-4x=-3$

(C) $x^2+y^2=-16$

(D) $x^2-y-9=0$

(E) $x^2-y^2-4x=9$

4. Uma praça quadrada, que possui o perímetro de 24 metros, tem uma árvore próxima de cada vértice e fora dela. Deseja-se aumentar a área da praça, alterando-se sua forma e mantendo as árvores externas a ela conforme ilustra a figura.



Nessas condições, qual foi o aumento da área da praça?

(A) 12 m^2

(B) 24 m^2

(C) 36 m^2

(D) 48 m^2

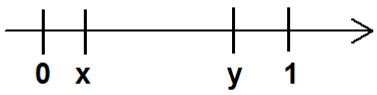
(E) 84 m^2

5. Um corpo cilíndrico, com 4 cm de raio e 12 cm de altura, está com água até a altura de 8 cm. Foram colocadas em seu interior bolas de gude de 2 cm de diâmetro, e o nível da água atingiu a boca do vidro, sem derramamento.

Quantas bolas de gude foram colocadas?

(A) 32
(B) 48
(C) 64
(D) 80
(E) 96

6. Na figura abaixo estão representados os números reais 0, x, 1, y.



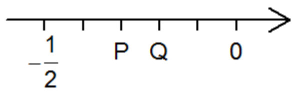
A posição do produto xy é

(A) à esquerda do zero
(B) entre 0 e x
(C) entre x e y
(D) entre y e 1
(E) à direita de 1

7. Num cinema, há 12 fileiras com 16 poltronas e 15 fileiras com 18 poltronas. O número de poltronas é

(A) 78
(B) 192
(C) 270
(D) 462
(E) 480

8. A figura abaixo mostra os pontos P e Q que correspondem a números racionais e foram posicionados na reta numerada do conjunto dos racionais.



Os valores atribuídos a P e Q, conforme suas posições na reta numérica são:

(A) P $=-\frac{1}{5}$ e Q $=-\frac{3}{10}$

(B) P $=-\frac{3}{10}$ e Q $=-\frac{1}{5}$

(C) P $=-\frac{3}{5}$ e Q $=-\frac{7}{10}$

(D) P $= -\frac{7}{10}$ e Q $= -\frac{3}{5}$

(E) P $= -\frac{3}{5}$ e Q $= -\frac{1}{5}$

9. No Brasil $\frac{3}{4}$ da população vive na zona urbana.

De que outra forma podemos representar esta fração?

(A) 7,5%

(B) 15%

(C) 25%

(D) 34%

(E) 75%

10. Dos 11 jogadores de um time de futebol, apenas 5 tem menos de 25 anos de idade.

A fração de jogadores com mais de 25 anos de idade é:

(A) $\frac{5}{6}$

(B) $\frac{6}{5}$

(C) $\frac{5}{11}$

(D) $\frac{6}{11}$

(E) $\frac{5}{25}$

11. Quatro amigos, João, Pedro, Ana e Maria saíram juntos para fazer um passeio por um mesmo caminho. Até agora, João andou $\frac{6}{8}$ do caminho; Pedro, $\frac{9}{12}$; Ana, $\frac{3}{8}$ e Maria, $\frac{4}{6}$.

Os amigos que se encontram no mesmo ponto de caminho são

(A) João e Pedro

(B) João e Ana

(C) Ana e Maria

(D) Pedro e Ana

(E) Maria e João

12. A professora de matemática propôs como exercício a expressão

$$\left[\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]^2$$

Os alunos que resolveram corretamente a expressão encontraram como resultado

(A) $-\frac{8}{9}$

(B) 0

(C) $\frac{8}{9}$

(D) 2

(E) $\frac{64}{81}$

13. Uma horta comunitária será criada em uma área de 5100 m^2. Para o cultivo de hortaliças, serão destinados $\frac{2}{3}$ dessa área.

Quantos metros quadrados serão utilizados nesse cultivo?

(A) 170

(B) 340

(C) 1700

(D) 2550

(E) 3400

14. Supondo $\sqrt[4]{8} = 1,68$, o valor mais próximo de $\sqrt{\frac{0,09}{\sqrt{2}}}$ é:

(A) 25,2

(B) 0,0252

(C) 0,252

(D) 2,5

(E) 0,00252

15. O resultado da expressão $2x^2 - 3x + 10$, para $x = -2$, é

(A) -4

(B) 0

(C) 12

(D) 13

(E) 24

16. As variáveis n e P assumem valores conforme mostra o quadro abaixo.

n	5	6	7	8	9	10
P	8	10	12	14	16	18

A relação entre P e n é dada pela expressão:

(A) P = n+1

(B) P = n+2

(C) P = 2n-2

(D) P = n-2

(E) P = 2n

17. As raízes do polinômio $P(x) = (x-3)^2(x+1)$ são:

(A) -2 e 1
(B) 3 e -1
(C) -3 e 1
(D) 3 e 1
(E) -3 e -1

18. Uma empresa, em processo de reestruturação, propôs a seus funcionários, admitidos há pelo menos dois anos, uma indenização financeira para os que pedissem demissão, que variam em função do número de nos trabalhados. A tabela abaixo era utilizada para calcular o valor (i) da indenização, em função do tempo trabalhado (t).

Tempo trabalho (em anos)	**Valor indenização (em reais)**
1	450
2	950
3	1450
4	1950

A expressão que permite determinar o valor da indenização **i** para **t** anos trabalhados é

(A) i = 450t
(B) i = 450+500t
(C) i = 450(t-1)
(D) i = 450+500(t-1)
(E) i = 500t

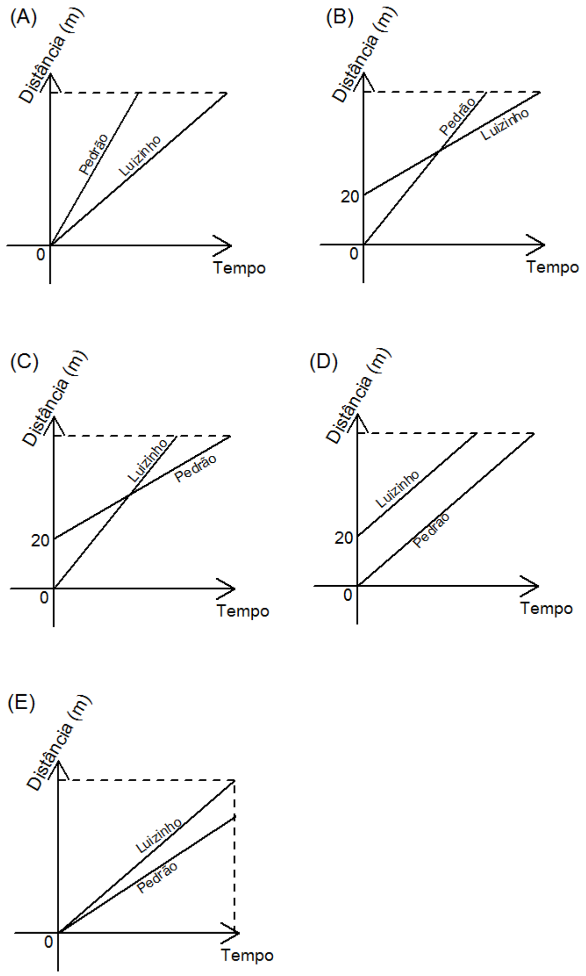
19. O custo de produção de uma pequena empresa é composto por um valor fixo de $R\$1.500,00$ mais $R\$10,00$ por peça fabricada.

O número x de peças fabricadas quando o custo é de $R\$3.200,00$ é

(A) 150
(B) 160
(C) 170
(D) 320
(E) 470

20. Luizinho desafia seu irmão mais velho, Pedrão, para uma corrida. Pedrão aceita e permite que o desafiante saia 20 metros a sua frente. Pedrão ultrapassa Luizinho e ganha a corrida.

O gráfico que melhor ilustra essa disputa é

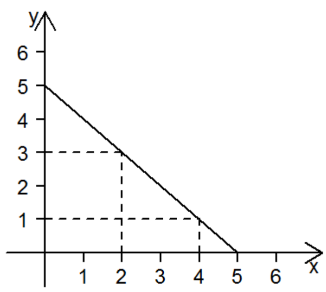


21. São dados os conjuntos
$A = \{x \in Z / |x-1| < 3\}$ e
$B = \{x \in Q / x^2 < 4\}$.

É correto afirmar que

(A) $A \cap B = \emptyset$
(B) $A \cup B = B$
(C) $A \subset B$ e $A \neq B$
(D) $A \cap B$ tem dois elementos
(E) $A \cup B$ tem infinitos elementos

22. O gráfico abaixo mostra uma reta em um plano cartesiano.



Qual é a equação da reta apresentada no gráfico?

(A) $x - y - 5 = 0$

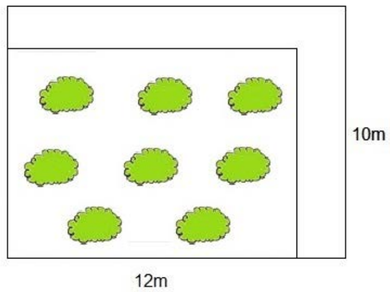
(B) $x + y - 5 = 0$

(C) $x + y + 5 = 0$

(D) $x + y - 4 = 0$

(E) $x + y = 6$

23. Em um terreno retangular de tamanho 10m x 12m, deseja-se construir um jardim com $80m^2$ de área, deixando uma faixa para o caminho (sempre de mesma largura), como mostra a figura.



A largura do caminho deve ser de

(A) 1 m

(B) 1,5 m

(C) 2 m

(D) 2,5 m

(E) 3 m

24. Por uma mensagem dos Estados Unidos para o Brasil , via fax, a Empresa de Correios e Telégrafos (ECT) cpbra $R\$1,37$ pela primeira página e $R\$0,67$ por página que se segue, completa ou não. Qual o número mínimo de páginas de uma dessas mensagens para que seu preço ultrapasse o valor de $R\$10,00$?

(A) 8

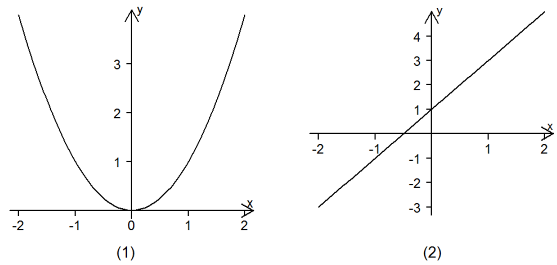
(B) 10

(C) 12

(D) 14

(E) 16

25. Observe os gráficos



Qual dos gráficos representa uma função polinomial?

(A) O (2)

(B) O (1)

(C) Os dois

(D) O (2) apenas considerando a parte positiva

(E) Nenhum dos gráficos

26. É solução da equação $|3x - 5| = 5x - 1$:

(A) $\{-2\}$

(B) $\{\frac{3}{4}\}$

(C) $\{\frac{1}{5}\}$

(D) $\{2\}$

(E) $\{\frac{3}{4}, -2\}$

27. Seja M o conjunto dos números naturais n, tal que $2n^2 - 75n + 700 \leq 0$. Assim, é correto afirmar que:

(A) Apenas um do elementos de M é múltiplo de 4

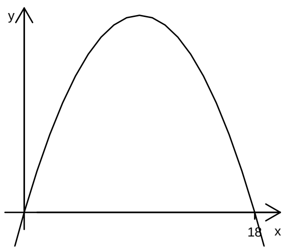
(B) Apenas dois dos elementos de M são primos

(C) A soma de todos os elementos de M é igual a 79

(D) M contém exatamente 6 elementos

(E)Os elementos de M são múltiplos de 3

28. Uma bala é atirada de um canhão e sua trajetória descreve uma parábola de equação $y = -52x^2 + 90x$, onde as variáveis e y são medidas em metros.



Nessas condições, a altura máxima atingida pela bala é

(A) 30,0m
(B) 40,5m
(C) 81,5m
(D) 405m
(E) 810m

29. Abaixo estão relacionadas algumas funções.

Entre elas, a função exponencial crescente é

(A) $f(x) = 5^{-x}$

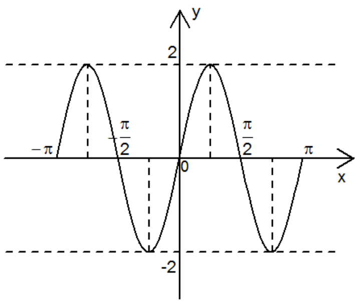
(B) $f(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

(C) $f(x) = (0,1)^x$

(D) $f(x) = 10^x$

(E) $f(x) = 0,5^x$

30. O gráfico abaixo representa a função:



(A) $y = -2\cos x$

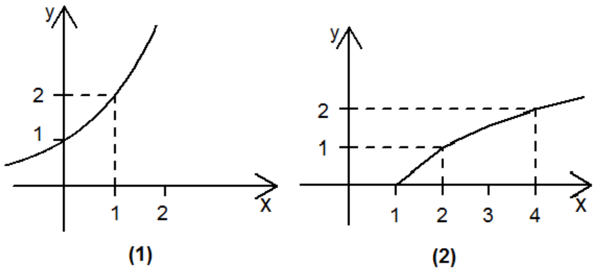
(B) $y = \cos\frac{x}{2}$

(C) $y = 2\sin x$

(D) $y = \sin\frac{x}{2}$

(E) $y = 2\sin 2x$

31. Nos gráficos 1 e 2 abaixo estão representadas duas funções.



Pode-se afirmar que:

(A) $y = 2x$ está representada no (1)

(B) $y = x^2 + 1$ está representada no (2)

(C) $y = \log_2 x$ está representada no (2)

(D) $y = 2^x$ está representada no (2)

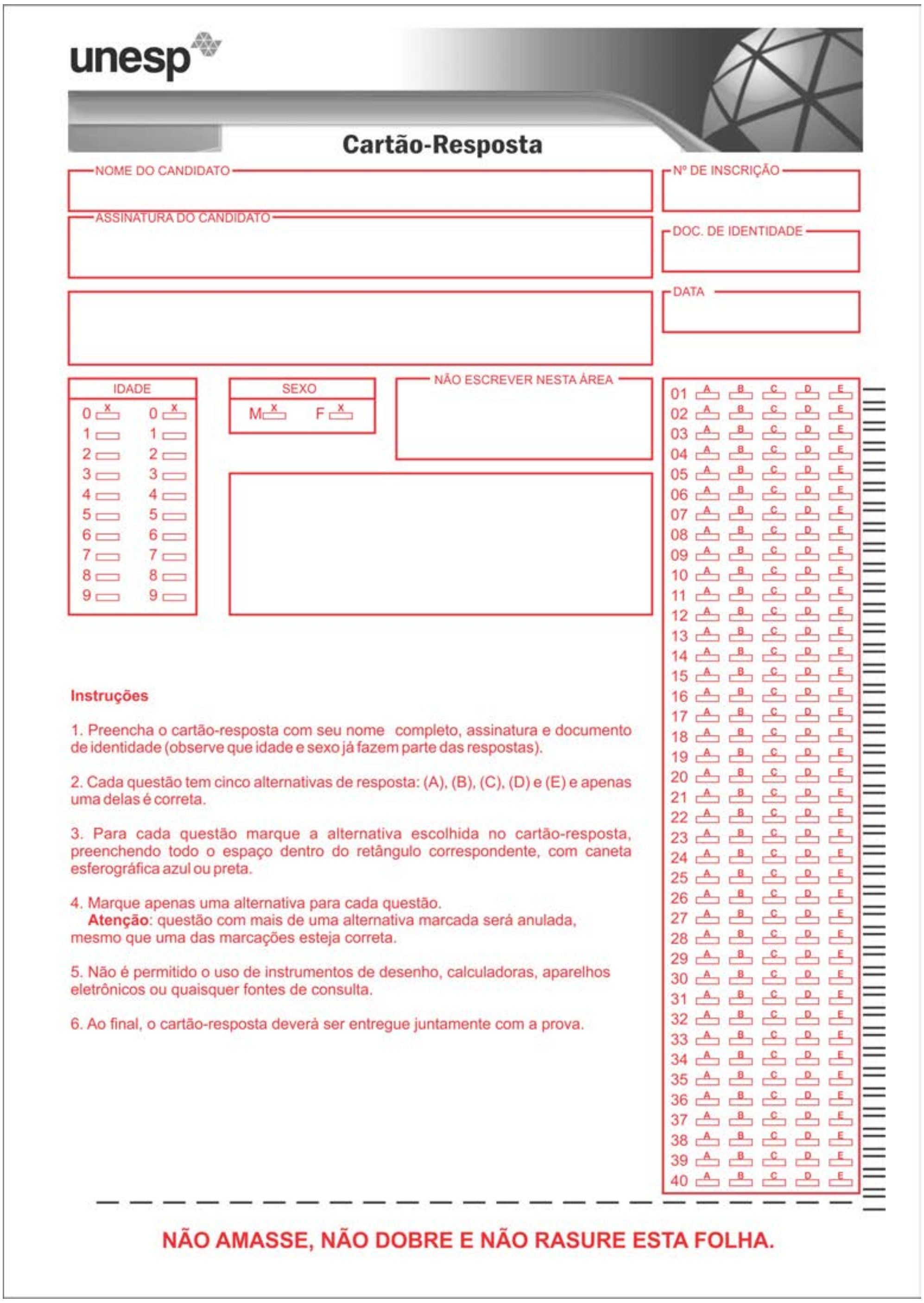
(E) $y = \log x$ está representada no (2)

32. Suponhamos que a população de uma certa cidade seja estimada, daqui a **x** anos, por $f(x) = \left(20 - \frac{1}{2^x}\right)$ 1000 habitantes. Estima-se que durante o terceiro ano, essa população:

(A) Se aumentará constantemente
(B) Aumentará de até 125 habitantes
(C) Aumentará de até 250 habitantes
(D) Diminuirá de até 125 habitantes
(E) Diminuirá de até 250 habitantes

Apêndice C

Cartão-Resposta



unesp

Cartão-Resposta

NOME DO CANDIDATO

Nº DE INSCRIÇÃO

ASSINATURA DO CANDIDATO

DOC. DE IDENTIDADE

DATA

IDADE

0 x	0 x
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

SEXO

M x F x

NÃO ESCREVER NESTA ÁREA

Instruções

1. Preencha o cartão-resposta com seu nome completo, assinatura e documento de identidade (observe que idade e sexo já fazem parte das respostas).

2. Cada questão tem cinco alternativas de resposta: (A), (B), (C), (D) e (E) e apenas uma delas é correta.

3. Para cada questão marque a alternativa escolhida no cartão-resposta, preenchendo todo o espaço dentro do retângulo correspondente, com caneta esferográfica azul ou preta.

4. Marque apenas uma alternativa para cada questão.
Atenção: questão com mais de uma alternativa marcada será anulada, mesmo que uma das marcações esteja correta.

5. Não é permitido o uso de instrumentos de desenho, calculadoras, aparelhos eletrônicos ou quaisquer fontes de consulta.

6. Ao final, o cartão-resposta deverá ser entregue juntamente com a prova.

01 A B C D E
02 A B C D E
03 A B C D E
04 A B C D E
05 A B C D E
06 A B C D E
07 A B C D E
08 A B C D E
09 A B C D E
10 A B C D E
11 A B C D E
12 A B C D E
13 A B C D E
14 A B C D E
15 A B C D E
16 A B C D E
17 A B C D E
18 A B C D E
19 A B C D E
20 A B C D E
21 A B C D E
22 A B C D E
23 A B C D E
24 A B C D E
25 A B C D E
26 A B C D E
27 A B C D E
28 A B C D E
29 A B C D E
30 A B C D E
31 A B C D E
32 A B C D E
33 A B C D E
34 A B C D E
35 A B C D E
36 A B C D E
37 A B C D E
38 A B C D E
39 A B C D E
40 A B C D E

NÃO AMASSE, NÃO DOBRE E NÃO RASURE ESTA FOLHA.

Apêndice

D

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está convidado a participar desta pesquisa intitulada **"AVALIAÇÃO DOS INGRESSANTES NOS CURSOS DA ÁREA DE EXATAS NA PROFICIÊNCIA EM CONTEÚDOS MATEMÁTICOS BÁSICOS, NECESSÁRIOS PARA O ACOMPANHAMENTO DAS DISCIPLINAS DE CÁLCULO E SIMILARES"**, que tem por objetivo construir uma escala para medir o conhecimento em conteúdos matemáticos básicos, necessários para o acompanhamento em disciplinas de cálculo e similares. Como colaborador você fará uma prova de múltipla escolha, envolvendo questões sobre conteúdos básicos de matemática, no nível de ensino médio.

Participar como voluntário deste estudo contribuirá com as investigações propostas pela pesquisadora, no entanto, você tem a liberdade de se recusar a participar e ainda se recusar a continuar participando em qualquer fase da pesquisa, sem que tenha qualquer prejuízo. A qualquer momento poderá pedir mais informações sobre a pesquisa atravês do telefone da pesquisadora do projeto e, se necessário através do telefone do Comitê de Ética em Pesquisa da FCT/UNESP - Campus de Presidente Prudente.

Sua participação não lhe trará complicações legais. Os procedimentos adotados nesta pesquisa obedecem aos Critérios da Ética em Pesquisa com Seres Humanos conforme Resolução no. 466/12 do Conselho Nacional de Saúde. Nenhum dos procedimentos usados oferece riscos á sua dignidade. As informações coletadas neste estudo serão estritamente confidenciais de modo que somente o pesquisador terá conhecimento dos dados. Na publicação dos resultados desta pesquisa, sua identidade será mantida no mais rigoroso sigilo. Serão omitidas todas as informações que permitam identificá-lo.

Mesmo não tendo benefícios diretos em participar, indiretamente você estará contribuindo para a compreensão do fenômeno estudado e para a produção de conhecimento científico. Isso porque esperamos que este estudo contribua com informações para que se proponham atividades que auxiliem os alunos no acompanhamento das disciplinas de cálculo e similares. Sua participação na pesquisa não lhe acarretará nenhum tipo de despesa, bem como nada será pago por sua participação.

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, ____, RG ________________________, por meio deste instrumento de autorização, dou pleno consentimento ao pesquisador abaixo relacionado a realizar as análises necessárias da pesquisa. Tenho pleno conhecimento dos objetivos da pesquisa e dos procedimentos a serem executados e da possibilidade de receber esclarecimentos sempre que considerar necessário.

Concordo que os dados obtidos ou quaisquer outras informações permaneçam como propriedade exclusiva da pesquisadora. Dou pleno direito da utilização desses dados e informações para uso no ensino, pesquisa e divulgação em periódicos científicos, ciente do sigilo de minha identidade, bem como do meu responsável legal.

Presidente Prudente, _____ de ______________ de 201__

____

Assinatura

Pesquisadora: Profa. Dra. Aparecida Doniseti Pires de Souza
Rua Cyro Bueno, No. 98, Bloco C Apto 33 - Jardim Morumbi
Presidente Prudente/SP
CEP: 19060-560
Tel: (18) 3229-5617
E-mail: adps@fct.unesp.br

Membro do Comitê de Ética em Pesquisa: Profa. Dra. Edna Maria do Carmo
Tel: (18) 3229-5388 ramais 5466

Apêndice

E

Código OpenBUGS

Código OpenBUGS para a estimação dos parâmetros do Modelo Logístico Unidimensional de três parâmetros.

```
model
{
for (j in 1 : N) {
for (i in 1 : T) {
p[j, i] <- c[i]+((1-c[i])/(1+exp(-a[i] *( theta[j] - b[i]))))
u[j, i] ~ dbern(p[j, i])
}
theta[j] ~ dnorm(0, 1)
hab[j]<- theta[j]*50+250
}
# Priors
for (i in 1 : T) {
a[i] ~ dlnorm(0, 2)
b[i]~dnorm(0,0.5)
c[i]~ dbeta(6,16)
}
}


Data:  list(N= 351, T=32,
          u=structure(.Data = c(
1,0,0,0, NA,0,1,0,1,0,1,1,1,NA,1,1,0,1,1,0,0,1,1,1,0,0,1,NA,0,0,0,1,
0,0,1,0, NA,0,1,1,1,1,1,1,1,NA,1,1,0,1,0,0,1,0,1,0,0,0,0,NA,1,0,1,0,
0,0,0,0,NA,0,1,1,0,1,1,1,0,NA,1,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,0,1,NA,1,1,0,1,
0,1,0,0,NA,0,1,1,1,1,1,0,0,NA,1,1,1,0,1,1,0,1,1,1,0,0,0,NA,0,0,0,1,
...
1,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,0,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,
1,0,0,1,0,1,1,1,1,1,1,1,1,0,1,1,0,1,1,1,0,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0),
.Dim = c(351,32)) )
```

Anexo

1

Matriz de Referência de Matemática da Prova Brasil

Matriz de Referência de Matemática: Tema e seus Descritores - 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental

As matrizes de matemática estão estruturadas por anos e séries avaliadas. Para cada um deles são definidos os descritores que indicam uma determinada habilidade que deve ter sido desenvolvida nessa fase de ensino. Os descritores não contemplam todos os objetivos de ensino, mas apenas aquele considerados mais relevantes e possíveis de serem mensurados em uma prova para, com isso, obter informações que forneçam uma visão real do ensino. Esses descritores são agrupados por temas que relacionam um conjunto de objetivos educacionais.

Tema I. Espaço e Forma

Descritor	**8ª/9º EF**
Identificar a localização/movimentação de objeto em mapas, croquis e outras representações gráficas	D1
Identificar propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais e tridimensionais, relacionando-as com as suas planificações	D2
Identificar propriedades de triângulos pela comparação de medidas de lados e ângulos	D3
Identificar relação entre quadriláteros por meio de suas propriedades	D4
Reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados, do perímetro, da área em ampliação e/ou redução de figuras poligonais usando malhas quadriculadas	D5
Reconhecer ângulos como mudança de direção ou giros, identificando ângulos retos e não-retos	D6
Reconhecer que as imagens de uma figura construída por uma transformação homotética são semelhantes, identificando propriedades e/ou medidas que se modificam ou não se alteram	D7
Resolver problema utilizando propriedades dos polígonos (soma de seus ângulos internos, número de diagonais, cálculo da medida de cada ângulo interno nos polígonos regulares)	D8

(continuação)

Descritor	**8ª/9º EF**
Interpretar informações apresentadas por meio de coordenadas cartesianas	D9
Utilizar relações métricas do triângulo retângulo para resolver problemas significativos	D10
Reconhecer círculo/circunferência, seus elementos e algumas de suas relações	D11

Temas II. Grandezas e Medidas

Descritor	**8ª/9º EF**
Resolver problema envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas	D12
Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas	D13
Resolver problema envolvendo noções de volume	D14
Resolver problema utilizando relações entre diferentes unidades de medida	D15

Temas III. Números e Operações/Álgebra e Funções

Descritor	**8ª/9º EF**
Identificar a localização de números inteiros na reta numérica	D16
Identificar a localização de números racionais na reta numérica	D17
Efetuar cálculos com números inteiros, envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação)	D18
Resolver problema com numéros naturais, envolvendo diferentes significados das operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação)	D19
Resolver problema com números inteiros envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação)	D20
Reconhecer as diferentes representações de um número racional	D21
Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados	D22
Identificar frações equivalentes	D23
Reconhecer as representações decimais dos números racionais como uma extensão do sistema de numeração decimal, identificando a existência de ”ordens” como décimos, centésimos e milésimos	D24
Efetuar cálculos que envolvam operações com números racionais (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação)	D25
Resolver problema com números racionais envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação)	D26
Efetuar cálculos simples com valores aproximados de radicais	D27
Resolver problema que envolva porcentagem	D28

(continuação)

Descritor	8ª/9º EF
Resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas	D29
Calcular o valor numérico de uma expressão algébrica	D30
Resolver problema que envolva equação do 2º grau	D31
Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras (padrões)	D32
Identificar uma equação ou inequação do 1º grau que expressa um problema	D33
Identificar um sistema de equações do 1º grau que expressa um problema	D34
Identificar a relação entre as representações algébrica e geométrica de um sistema de equações do 1º grau	D35

Temas IV. Tratamento da Informação

Descritor	8ª/9º EF
Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos	D36
Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa	D37

Anexo 2

Matriz de Referência de Matemática do SAEB

Matriz de Referência de Matemática: Tema e seus Descritores - 3ª série do Ensino Médio

As matrizes de matemática estão estruturadas por anos e séries avaliadas. Para cada um deles, são definidos os descritores que indicam uma determinada habilidade que deve ter sido desenvolvida nessa fase de ensino. Esses descritores são agrupados por temas que relacionam um conjunto de objetivos educacionais.

Tema I. Espaço e Forma

Descritor	**3º EM**
Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade	D1
Reconhecer aplicações das relações métricas do triângulo retângulo em um problema que envolva figuras planas ou espaciais	D2
Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas	D3
Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema	D4
Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente)	D5
Identificar a localização dos pontos no plano cartesiano	D6
Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta	D7
Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação	D8
Relacionar a determinação do ponto de intersecção de duas ou mais retas com a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas	D9
Reconhecer, dentre as equações do 2º grau com duas incógnitas, as que representam circunferências	D10

Tema II. Grandezas e Medidas

Descritor	**3º EM**
Resolver problema envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas	D11
Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas	D12
Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera)	D13

Tema III. Números e Operações/Álgebras e Funções

Descritor	**3º EM**
Identificar a localização de números reais na reta numérica	D14
Resolver problema que envolva variações proporcional, direta ou inversa, entre grandezas	D15
Resolver problema que envolva porcentagem	D16
Resolver problema envolvendo equação do 2º grau	D17
Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela	D18
Resolver problema envolvendo uma função do 1º grau	D19
Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos	D20
Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em texto	D21
Resolver problema envolvendo P.A.P.G. da a fórmula do termo geral	D22
Reconhecer o gráfico de uma função polinomial de 1º grau por meio de seus coeficientes	D23
Reconhecer a representação algébrica de uma função polinomial do 1º grau dado o seu gráfico	D24
Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo no gráfico de uma função polinomial do 2º grau	D25
Relacionar as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do 1º grau	D26
Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial	D27
Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica, reconhecendo-a como inversa da função exponencial	D28
Resolver problema que envolva função exponencial	D29
Identificar gráficos de funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente), reconhecendo suas propriedades	D30
Determinar a solução de um sistema linear, associando-o a uma matriz	D31
Resolver problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutações simples, arranjo simples e/ou combinações simples	D32
calcular a probabilidade de um evento	D33

Tema IV. Tratamento da Informação

Descritor	**3º EM**
Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos	D34
Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vive-versa	D35