

Antonio Luís Venezuela

Superfícies Mínimas em Relatividade Geral



1910000802



Superfícies Mínimas em Relatividade Geral

Antonio Luís Venezuela

*Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências,
Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual
Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São
José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a
obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada
- Área de Concentração: Matemática Aplicada.*

Orientador
Prof. Dr. Wladimir Seixas



802/98

São José do Rio Preto
1998



Resumo

A utilização do formalismo de superfícies mínimas já é conhecida e utilizada em relatividade geral. Neste trabalho mostramos que as equações de campo de Einstein-Maxwell para um fluido perfeito carregado axialmente simétrico rotacionando rigidamente são equivalentes às equações de Euler-Lagrange de uma superfície mínima num espaço riemanniano 6-dimensional. Uma introdução à teoria da relatividade geral e ao formalismo de superfícies mínimas, ambas via princípio variacional, é também exposta.



Abstract

The utilization of the minimal surfaces formalism is well known in general relativity. In this work we show that the Einstein-Maxwell fields describing a charged perfect fluid with axially symmetric rotating rigidity are equivalent to the Euler-Lagrange equations of a minimal surface in a six-dimensional Riemannian space. An introduction to the theory of relativity and to the minimal surfaces formalism, both via variational principal, is also discussed.



Agradecimentos

Ao meu orientador, Wladimir Seixas, pelo apoio, formação, dedicação e importantes conselhos durante o meu mestrado.

Ao professor, Manoel Ferreira Borges Neto, pela minha formação na área de Relatividade Geral e a seus conselhos amigáveis a começar da graduação.

Aos meus pais, Francisco e Ana, à minha sogra Idalva e o sogro (em memória) Antônio, pela afetuosa maneira que sempre acreditaram em mim.

Particularmente, agradeço à minha esposa Mara, que, a todo instante, sempre caminhou ao meu lado, incentivando-me e apoiando-me.

Para Mara



Agradecimentos

Ao meu orientador, Wladimir Seixas, pelo apoio, formação, dedicação e importantes conselhos durante o meu mestrado.

Ao professor, Manoel Ferreira Borges Neto, pela minha formação na área de Relatividade Geral e a seus conselhos amigos a começar da graduação.

Aos meus pais, Francisco e Ana, à minha sogra Idalva e sogro (em memória) Antônio, pela afetuosa maneira que sempre acreditaram em mim.

Particularmente, agradeço à minha esposa Mara, que, a todo instante, sempre caminhou ao meu lado, incentivando-me e apoiando-me.

1	Introdução	1
2	Superfícies Mínimas	28
2.1	Subvariedades	28
2.2	Princípio variacional e superfícies mínimas	29
2.3	Superfícies Isotrópicas	41
3	Equações de Einstein-Maxwell para Fluidos Carregados	44
3.1	Tensor eletromagnético	44
3.2	Tensor energia momentum	45
3.3	Fluidos perfeitos	48
3.4	Vetor de Killing	50
3.5	Equações de campo de Einstein-Maxwell	53
4	Campos de Einsten-Maxwell como superfícies mínimas	58
4.1	Redução da lagrangeana tridimensional para uma lagrangeana bidimensional	58



Índice

Introdução	1
1 Pré-requisitos	5
1.1 Variedades diferenciáveis e tensores	5
1.2 Formas diferenciáveis e conexão afim	9
1.3 Variedade pseudo-riemanniana, torção e curvatura	15
1.4 Equações de campo de Einstein	19
1.5 Formalismo tétrada	21
2 Superfícies Mínimas	28
2.1 Subvariedades	28
2.2 Princípio variacional e superfícies mínimas	29
2.3 Superfícies Isotrópicas	41
3 Equações de Einstein-Maxwell para Fluidos Carregados	44
3.1 Tensor eletromagnético	44
3.2 Tensor energia momentum	46
3.3 Fluidos perfeitos	48
3.4 Vetor de Killing	50
3.5 Equações de campo de Einstein-Maxwell	53
4 Campos de Einstein-Maxwell como superfícies mínimas	58
4.1 Redução da lagrangeana tridimensional para uma lagrangeana bidimensional	58



4.2 Campos estacionários axialmente simétricos tipo vácuo como superfícies mínimas	65
Conclusão	68
Referências Bibliográficas	70

A Teoria da Relatividade Geral tem como característica fundamental a descrição do campo gravitacional através de uma geometria intrínseca. Para sua formulação que data de 1913, foram fornecidos a Einstein pelo matemático Marcel Grossmann, conhecimentos básicos da geometria riemanniana.

Lançando mão destes argumentos, Einstein passou a descrever a física do campo gravitacional, ou seja, a gravitação, através de concepções geométricas onde os conceitos riemannianos são munidos de significado físico. O comportamento do campo gravitacional fica definido por um sistema de equações diferenciais e derivadas parciais não lineares e, em alguns casos, não homogêneo. Este sistema de equações conhecido como equações de Einstein é de caráter tensorial e tem como solução a descrição da geometria de uma variedade pseudo-riemanniana: o espaço-tempo físico.

A não linearidade das equações implica na impossibilidade de se obter uma solução geral para as equações de Einstein. Por exemplo, elas não satisfazem o princípio da superposição, ou seja, não podemos descrever configurações complicadas em termos de configurações simples. O desenvolvimento de diversas técnicas como por exemplo, a classificação de Petrov e vetores de Killing, levaram ao longo dos anos ao descobrimento de novas soluções particulares ditas soluções exatas. As técnicas e sistemáticas seguidas na obtenção de soluções exatas foram resumidas no livro de Kramer e outros - "*Exact solutions of Einstein's field equations*" nos anos 80 [1].

A pesquisa para determinar soluções exatas das equações de Einstein adquiriu, de certa forma, um ponto de vista positivista onde a teoria física é um modelo matemático e, desta maneira, não existe uma necessidade de que este

Introdução

A Teoria da Relatividade Geral tem como característica fundamental a descrição do campo gravitacional através de uma geometria intrínseca. Para sua formulação que data de 1915, foram fornecidos a Einstein pelo matemático Marcel Grossmann, conhecimentos básicos da geometria riemanniana.

Lançando mão destes argumentos, Einstein passou a descrever a física do campo gravitacional, ou seja, a gravitação, através de concepções geométricas onde os conceitos riemannianos são munidos de significado físico. O comportamento do campo gravitacional fica definido por um sistema de equações diferenciais a derivadas parciais não lineares e, em alguns casos, não homogêneo. Este sistema de equações conhecido como equações de Einstein é de caráter tensorial e tem como solução a descrição da geometria de uma variedade pseudo-riemanniana: o espaço-tempo físico.

A não linearidade das equações implica na impossibilidade de se obter uma solução geral para as equações de Einstein. Por exemplo, elas não satisfazem o princípio da superposição, ou seja, não podemos descrever configurações complicadas em termos de configurações simples. O desenvolvimento de diversas técnicas como por exemplo, a classificação de Petrov e vetores de Killing, levaram ao longo dos anos ao descobrimento de novas soluções particulares ditas soluções exatas. As técnicas e sistemáticas seguidas na obtenção de soluções exatas foram resumidas no livro de Kramer, e outros – *“Exact solutions of Einstein’s field equations”* nos anos 80 [1].

A pesquisa para determinar soluções exatas das equações de Einstein adquiriu, de certa forma, um ponto de vista positivista onde a teoria física é um modelo matemático e, desta maneira, não existe uma necessidade de que este



corresponda a uma realidade física. Isto implica que existem poucas soluções que realmente correspondem a uma realidade física. Uma das razões é o fato de que equações diferenciais parciais admitem uma classe muito grande de soluções e, em muitos casos, de natureza patológica. Outro ponto importante é a inexistência de soluções exatas que descrevam, por exemplo, sistema de n -corpos e fontes de radiação [2]. Uma maneira de selecionar soluções de interesse físico seria impor condições de contorno ou condições iniciais.

Esta preocupação com a comprovação física se deve ao aumento de observações astronômicas no início dos anos 60. O descobrimento de novos objetos tais como: quasares, pulsares e fontes compactas de raio X indicam a existência de campos gravitacionais extremamente fortes. Estes campos só podem ser descritos pela relatividade geral. A teoria da relatividade geral prevê ainda a existência de ondas gravitacionais e de objetos hipotéticos de grande densidade, os chamados buracos negros.

Uma classe importante de soluções exatas é constituída pelas métricas axialmente simétricas estacionárias. A razão principal é que estas modelam o campo gerado pela rotação (independente do tempo) de uma estrela constituída de um fluido perfeito. Tanto a estrela, como o campo ao redor desta, possuem simetria axial com respeito ao eixo de rotação que passa pelo centro da estrela. Apesar de uma grande classe de soluções que descrevem campos gravitacionais axialmente simétricos estacionários do tipo vácuo terem sido encontradas e estudadas ao longo dos últimos anos, nenhuma solução que descreva o campo gravitacional de um corpo em rotação uniforme foi determinada. A principal razão está no fato que as equações de Einstein para campos interiores são extremamente complicadas. Uma tentativa de uma melhor compreensão deste problema foi dada por Neugebauer e Herlt [3] em um artigo publicado em 1984 na *Classical and Quantum Gravity*. Partindo do fato de que campos do tipo vácuo podem ser vistos como superfícies mínimas em um espaço riemanniano, distinto do espaço-tempo, os autores mostram que tal propriedade pode ser estendida para campos interiores. O objetivo principal é o de caracterizar o problema de campos interior e exterior de corpos em rotação uniforme através



de uma linguagem geométrica independente: cálculos em superfícies mínimas.

A utilização do formalismo de superfícies mínimas já é conhecido e utilizado em relatividade geral. Seu maior exemplo está na conjectura de Geroch ou da massa positiva. Em uma das suas formulações esta diz: “Sobre o espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$ consideremos uma métrica riemanniana, a qual é plana fora de um conjunto compacto. Se o escalar de curvatura é maior ou igual a zero, então a métrica é plana” [4].

A palavra *mínima* está relacionada com o seguinte problema proposto por J. Lagrange em 1760: “Dada uma curva fechada C , encontrar a superfície de área mínima que tenha esta curva como fronteira”. Este problema foi apresentado como exemplo de um método, por ele desenvolvido, que consistia em encontrar curvas e superfícies que minimizassem certas quantidades, tais como, área, comprimento, energia, etc... Em 1744 o matemático Leonhard Euler obteve o mesmo resultado, mas seu método era muito tedioso.

Entre 1843 e 1869 o físico belga A. F. Plateau estudou sistematicamente a geometria das películas e bolhas de sabão¹. Mostrou que, pelas leis da tensão superficial, a película de sabão forma uma superfície estável, isto é, sob pequenas deformações a película sempre se torna maior. Tornou-se um desafio para os matemáticos da época obter uma prova dos resultados experimentais de Plateau. Assim a seguinte questão foi proposta: “Determinar a superfície mínima passando por uma dada curva fechada”, que é conhecido como *problema de Plateau*. A prova da existência da superfície do problema acima foi dada independentemente pelos matemáticos J. Douglas e T. Radó, em 1930.

Este trabalho baseia-se no artigo de Neugebauer e Herlt [3], *Einstein-Maxwell fields inside and outside rotating sources as minimal surfaces* e será dividido em três partes: relatividade geral (preliminares), superfícies mínimas e equações de Einstein-Maxwell. É um texto básico e essencial para aqueles que pretendam estudar a interessante propriedade dos campos gravitacionais do tipo vácuo, podendo assim, descrever as soluções de Schwarzschild interior e exterior a partir de equações que definem uma superfície mínima em um

¹Uma película de sabão é formada quando mergulhamos um arame (que coincide com uma curva fechada) numa solução de sabão.



espaço riemanniano.

No capítulo 1 apresentaremos, de forma sintetizada, a geometria pseudo-riemanniana, culminando com as equações de campos de Einstein e o formalismo tétrada.

No capítulo 2 demonstraremos um importante teorema, conhecido por *princípio variacional*, e a partir dele definiremos superfícies mínimas e desenvolveremos as equações de Euler-Lagrange para um elemento de área de uma superfície e para uma lagrangeana Λ no espaço pseudo-riemanniano n -dimensional. Provaremos que os princípios variacionais para as lagrangeanas, uma dada pelo elemento de área de uma superfície e a outra por Λ , são equivalentes. Não explanaremos sobre a teoria das superfícies parametrizadas, pois é extensa e não se faz necessária no contexto deste trabalho.

Discutiremos as condições físicas básicas e nos familiarizaremos com teorias apropriadas, tais como, tensor eletromagnético, tensor energia *momentum* e fluido perfeito, no capítulo 3. Mostraremos como obter as equações de Killing e por conseguinte os campos vetoriais de Killing, pois serão usados para representar as direções de simetrias de uma variedade pseudo-riemanniana (ou riemanniana) n -dimensional. Apresentaremos um princípio variacional tridimensional, para uma lagrangeana tridimensional, de onde provêm as equações de Einstein-Maxwell para um fluido perfeito carregado.

Destinaremos o capítulo 4 à demonstração do seguinte teorema: "As equações de campo de Einstein-Maxwell para um fluido perfeito carregado simetricamente rotacionando rigidamente são equivalentes às equações de Euler-Lagrange de uma superfície mínima no espaço riemanniano 6-dimensional". Desta forma relacionaremos as distintas teorias: relatividade geral e superfícies mínimas.



Capítulo 1

Pré-requisitos

1.1 Variedades diferenciáveis e tensores

Dizemos que o conjunto V é uma *variedade diferenciável* n -dimensional se:

- (i) V é um espaço topológico;
- (ii) V está munido de uma família de pares $\{(U_\mu, \varphi_\mu)\}$, com φ_μ sendo um homeomorfismo de $U_\mu \subset V$ sobre um subconjunto aberto de U'_μ de $\mathbb{R}^n$;
- (iii) $\{U_\mu\}$ é uma família de conjuntos abertos que cobrem V , isto é, $\bigcup_\mu U_\mu = V$;
- (iv) Dados U_μ e $U_\nu \subset V$ tais que $U_\mu \cap U_\nu \neq \emptyset$, a aplicação

$$\varphi_{\mu\nu} = \varphi_\mu \circ \varphi_\nu^{-1} : \varphi_\nu(U_\mu \cap U_\nu) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi_\mu(U_\mu \cap U_\nu) \subset \mathbb{R}^n$$

é de classe C^∞ .

O par (U_μ, φ_μ) é chamado de *carta* e a família $\{(U_\mu, \varphi_\mu)\}$ de *atlas*. Para cada ponto $p \in U_\mu$ escrevemos $\varphi_\mu(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$, onde as funções x^α , $\alpha = 1, \dots, n$ são denominadas *funções coordenadas*.

Seja f uma função da variedade V em $\mathbb{R}$. Dizemos que f é diferenciável se a função:

$$f \circ \varphi_\mu^{-1} : \varphi_\mu(U_\mu) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

é diferenciável para toda carta (U_μ, φ_μ) de V . Denotaremos por $\mathcal{F}(V)$ o conjunto de todas funções $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis.

A aplicação $\sigma_p: I \subset \mathbb{R} \rightarrow V$ é dita ser uma *curva diferenciável* passando por $p \in V$ se $0 \in I$ com $\sigma_p(0) = p$ e $\varphi_\mu \circ \sigma_p: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável com (U_μ, φ_μ) carta local de $\sigma_p(t)$, para $t \in I$. Podemos considerar a função $f \circ \sigma_p: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(\sigma_p(t)) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$.

Definimos o *vetor tangente* $\mathbf{X}_p$ em $\sigma_p(0) = p$ como sendo a derivada direcional de $f(\sigma_p(t))$ ao longo da curva $\sigma_p(t)$ em $t = 0$, dado por

$$\mathbf{X}_p|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(\sigma_p(t))|_{t=0}$$

O vetor tangente $\mathbf{X}_p$ satisfaz as condições:

$$\mathbf{X}_p(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha \mathbf{X}_p(f_1) + \beta \mathbf{X}_p(f_2) \quad (1.3)$$

$$\mathbf{X}_p(f_1 f_2) = f_1(p) \mathbf{X}_p(f_2) + f_2(p) \mathbf{X}_p(f_1)$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$.

Seja $C_p(V)$ o conjunto das curvas σ_p passando por $p \in V$. Como cada curva $\sigma_p \in C_p(V)$ determina um vetor tangente $\mathbf{X}_p$, podemos construir o conjunto $T_p(V)$ dos vetores tangentes $\mathbf{X}_p$ no ponto p . Definindo, para todo $\mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_p \in T_p(V)$:

$$(\mathbf{X}_p + \mathbf{Y}_p)(f) = \mathbf{X}_p(f) + \mathbf{Y}_p(f) \quad (\text{soma de vetores}) \quad (1.4)$$

$$(\alpha \mathbf{X}_p)(f) = \alpha \mathbf{X}_p(f) \quad (\text{multiplicação de um vetor por um escalar})$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall f \in \mathcal{F}(V)$. Com esta estrutura algébrica $T_p(V)$ torna-se um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$ denominado *espaço tangente*. O conjunto $\{\partial_\mu|_p = \frac{\partial}{\partial x^\mu}|_p\}$ é uma base para $T_p(V)$ denominada *base coordenada* de $T_p(V)$. Todo vetor tangente $\mathbf{X} \in T_p(V)$ pode ser escrito como combinação linear dos elementos da base (em $p \in V$), isto é,¹

$$\mathbf{X} = X^\mu \partial_\mu \quad (1.1)$$

¹A menos que dito o contrário, utilizaremos ao longo do texto a convenção de somatório de Einstein: índices repetidos, superior e inferior, implicam na soma dos mesmos de 1 a n . O símbolo de somatório será então omitido.

O conjunto $T(V) = \bigcup_{p \in V} T_p(V)$ é chamado de *fibrado tangente*.

Um *campo vetorial* sobre V é uma aplicação $\mathbf{X} : V \rightarrow T(V)$, dada por $\mathbf{X}(p) = \mathbf{X}_p \in T_p(V)$ e $\mathcal{X}(V)$ o conjunto dos campos vetoriais sobre V . Definimos a função $\mathbf{X}f : V \rightarrow \mathbb{R}$ por $(\mathbf{X}f)(p) = \mathbf{X}_p(f)$, com $\mathbf{X} \in \mathcal{X}(V)$. Pela definição (1.1) temos

$$\mathbf{X}f = \mathbf{X}^\mu \partial_\mu f = \mathbf{X}^\mu f_{,\mu} \quad (1.2)$$

onde a vírgula irá denotar a derivada ordinária.

Seja $\omega : T_p(V) \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear dado por $\omega(\mathbf{X}_p) = \langle \omega, \mathbf{X}_p \rangle$, satisfazendo

$$\omega(\alpha \mathbf{X}_p + \beta \mathbf{Y}_p) = \alpha \omega(\mathbf{X}_p) + \beta \omega(\mathbf{Y}_p) \quad (1.3)$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall \mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_p \in T_p(V)$. $\langle, \rangle$ denota o produto interno de $\mathbb{R}$. O conjunto $T_p^*(V)$ dos funcionais lineares ω que satisfaz a condição (1.3) é chamado de *espaço dual* de $T_p(V)$. Chamamos o funcional linear ω de *1-forma*. O conjunto $\{dx^\mu\}$ é uma base de $T_p^*(V)$ chamado *base dual* de $\{\partial_\mu\}$. As bases $\{\partial_\mu\}$ e $\{dx^\mu\}$ são conhecidas por *bases canônicas* de $T_p(V)$ e $T_p^*(V)$ respectivamente.

Podemos escolher qualquer outra base de vetores $\mathbf{e}_\mu$ para o espaço tangente $T_p(V)$. A mudança de base é então dada por

$$\mathbf{e}_\mu = \Phi_\mu^\nu \partial_\nu \quad (1.4)$$

com o determinante da matriz (Φ_μ^ν) diferente de zero. A relação inversa é dada por

$$\partial_\nu = \Phi_\nu^\mu \mathbf{e}_\mu$$

com (Φ_ν^μ) sendo a inversa da matriz (Φ_μ^ν) , isto é,

$$\Phi_\mu^\nu \Phi_\nu^\alpha = \delta_\mu^\alpha$$

A notação δ_α^ν é chamada de *símbolo de Kronecker* e é definida por

$$\delta_\alpha^\nu = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \alpha = \nu \\ 0 & , \text{ se } \alpha \neq \nu \end{cases}$$

Seja a base $\{\mathbf{e}_\mu\}$ e sua base dual $\{\mathbf{e}^\nu\}$. Podemos escrever, para todos $\mathbf{X} \in T_p(V)$ e $\omega \in T_p^*(V)$,

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^\mu \mathbf{e}_\mu$$

e

$$\omega = \omega_\nu \mathbf{e}^\nu$$

respectivamente.

Definimos a 1-forma df por

$$df(\mathbf{X}) = \langle df, \mathbf{X} \rangle = \mathbf{X}f$$

com $f \in \mathcal{F}(V)$. Assim temos

$$df(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^\mu f_{,\mu}$$

Seja o produto cartesiano

$$\begin{aligned} \Pi_s^r &= \underbrace{T_p(V) \times \dots \times T_p(V)}_{r \text{ - vezes}} \times \underbrace{T_p^*(V) \times \dots \times T_p^*(V)}_{s \text{ - vezes}} \\ &= (T_p(V))^r \times (T_p^*(V))^s \end{aligned}$$

Um *tensor do tipo (r, s)* é uma função $\mathbf{T} : \Pi_s^r \rightarrow \mathbb{R}$ linear em cada um de seus argumentos. Seja $T_s^r(V)$ o conjunto dos tensores do tipo (r, s) definido em $p \in V$, o qual é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

O *produto tensorial* dos tensores $\mathbf{M} \in T_s^r(V)$ e $\mathbf{N} \in T_v^u(V)$ é um tensor $\mathbf{M} \otimes \mathbf{N} \in T_{s+v}^{r+u}(V)$, sendo

$$\mathbf{M} \otimes \mathbf{N} : (T_p(V))^{r+u} \times (T_p^*(V))^{s+v} \rightarrow \mathbb{R},$$

definido por:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \otimes \mathbf{N}(v_1, \dots, v_{r+u}, \tau^1, \dots, \tau^{s+v}) = \\ \mathbf{M}(v_1, \dots, v_r, \tau^1, \dots, \tau^s) \cdot \mathbf{N}(v_{r+1}, \dots, v_{r+u}, \tau^{s+1}, \dots, \tau^{s+v}) \end{aligned}$$

O tensor $\mathbf{M} \in T_s^r(V)$ pode ser escrito como

$$\mathbf{M} = M_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r} \delta_{\mu_1 \dots \mu_r}^{\nu_1 \dots \nu_s}$$

com $M_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r}$ sendo as suas componentes e $\delta_{\mu_1 \dots \mu_r}^{\nu_1 \dots \nu_s} = e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_r} \otimes e^{\nu_1} \otimes \dots \otimes e^{\nu_s}$ a base de $T_s^r(V)$. $T_s^r(V)$ é denominado de *espaço tensorial*. Chamamos $\mu_1 \dots \mu_r$ e $\nu_1 \dots \nu_s$ de *índices contravariantes* e *covariantes* do tensor M respectivamente.

Um tensor é dito ser *simétrico* nos i -ésimos e j -ésimos índices covariantes (contravariantes) se as componentes permanecem inalteradas quando estes índices são trocados, com respeito a qualquer base. Um tensor é dito ser *anti-simétrico* nos i -ésimos e j -ésimos índices covariantes (contravariantes) se as componentes mudam de sinal quando estes índices são trocados com respeito a qualquer base.

O tensor $T \in T_s^0(V)$ é dito ser *totalmente simétrico* se e somente se

$$T_{\mu_1 \dots \mu_i \dots \mu_j \dots \mu_s} = T_{\mu_1 \dots \mu_j \dots \mu_i \dots \mu_s}$$

para quaisquer índices i e j . Analogamente, $T \in T_s^0(V)$ é denominado *totalmente anti-simétrico* se e somente se

$$T_{\mu_1 \dots \mu_i \dots \mu_j \dots \mu_s} = -T_{\mu_1 \dots \mu_j \dots \mu_i \dots \mu_s}$$

para quaisquer índices i e j .

Um *campo tensorial* do tipo (r, s) sobre $U \subset V$ é uma aplicação X que associa, a cada ponto $p \in U$, um tensor de $T_s^r(V)$.

1.2 Formas diferenciáveis e conexão afim

Uma *forma diferencial de ordem s* , ou *s -forma*, é um tensor totalmente anti-simétrico do tipo $(0, s)$.

Seja P_s o conjunto das permutações do conjunto $I_s = \{1, 2, \dots, s\}$. Definimos o produto cunha $\wedge$ de s 1-formas pelo produto tensorial totalmente anti-simétrico

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_s} = \sum_{Q \in P_s} \text{sinal}(Q) dx^{i_{Q(1)}} \otimes dx^{i_{Q(2)}} \otimes \dots \otimes dx^{i_{Q(s)}}$$

com

$$\text{sinal}(Q) = \begin{cases} 1 & \text{se o número de permutações é par} \\ -1 & \text{se o número de permutações é ímpar} \end{cases}$$

Temos as seguintes propriedades

- (i) $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_s} = \text{sign}(Q) dx^{i_{Q(1)}} \wedge \dots \wedge dx^{i_{Q(s)}}$;
- (ii) $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_s}$ é linear em cada dx^{i_j} , $j = 1, \dots, s$.

Denotamos por $\bigwedge^s(T_p(V))^*$ o espaço vetorial das s -formas em $p \in V$ e o conjunto das s -formas $\{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_s}\}$ é uma base de $\bigwedge^s(T_p(V))^*$. Assim para todo $\omega \in \bigwedge^s(T_p(V))^*$ podemos escrever

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_s} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_s}$$

Sejam $\omega^1, \omega^2 \in \bigwedge^s(T_p(V))^*$ dados por

$$\omega^1 = \omega_{i_1 \dots i_s}^1 dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_s}$$

e

$$\omega^2 = \omega_{i_1 \dots i_s}^2 dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_s}$$

Assim

$$\omega^1 + \omega^2 = (\omega_{i_1 \dots i_s}^1 + \omega_{i_1 \dots i_s}^2) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_s}$$

Expandimos $\omega \in \bigwedge^s(T_p(V))^*$ na seguinte forma

$$\omega = \frac{1}{s!} \omega_{[i_1 \dots i_s]} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_s} \quad (1.5)$$

sendo que $[]$ irá denotar a anti-simetrização dos índices. Por exemplo,

$$\omega_{[ij]} = \omega_{ij} - \omega_{ji}$$

Sejam $\omega^1 \in \bigwedge^r(T_p(V))^*$ e $\omega^2 \in \bigwedge^s(T_p(V))^*$ dados na base coordenada por

$$\omega^1 = \frac{1}{r!} \omega_{i_1 \dots i_r}^1 dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

e

$$\omega^2 = \frac{1}{s!} \omega_{j_1 \dots j_s}^2 dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s}$$

respectivamente. O *produto exterior* entre ω^1 e ω^2 é uma $(r+s)$ -forma dada por

$$\omega^1 \wedge \omega^2(X_1, \dots, X_r, X_{r+1}, \dots, X_{r+s}) = \sum_{Q \in P_{r+s}} \frac{1}{r!s!} \text{ sinal}(Q) \omega^1(X_{Q_{[1]}}, \dots, X_{Q_{[r]}}) \cdot \omega^2(X_{Q_{[r+1]}}, \dots, X_{Q_{[r+s]}})$$

Tem-se assim que $\omega^1 \wedge \omega^2 \in \bigwedge^{r+s}(T_p(V))^*$.

Definimos a *diferencial exterior* de $\omega \in \bigwedge^s(T_p(V))^*$ como

$$d\omega = (d\omega_{i_1 \dots i_s}) \wedge (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_s})$$

Desta forma, $d\omega$ é uma $(s+1)$ -forma.

A aplicação $[\cdot, \cdot]: \mathcal{X}(V) \times \mathcal{X}(V) \rightarrow \mathcal{X}(V)$ dada por $[\mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_p] = \mathbf{X}_p \mathbf{Y}_p - \mathbf{Y}_p \mathbf{X}_p$ é denominada *parênteses de Lie*. Definimos a atuação de $[\mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_p]$ para, todo $f \in \mathcal{X}(V)$, por

$$[\mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_p](f) = \mathbf{X}_p(\mathbf{Y}_p(f)) - \mathbf{Y}_p(\mathbf{X}_p(f)) \quad (1.10)$$

Considerando os parênteses de Lie como diferenciação, $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ é chamado *derivada de Lie* de $\mathbf{Y}$ na direção $\mathbf{X}$ e é denotada por

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \quad (1.11)$$

A derivada de Lie satisfaz as seguintes regras:

(i) Para campos escalares $f \in \mathcal{F}(V)$ temos

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}f = \mathbf{X}f = df(\mathbf{X}) \quad (1.6)$$

(ii) Para campos tensoriais $\mathbf{T} \in T_s^r(V)$ e $\mathbf{S} \in S_v^u(V)$ temos

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mathbf{T} \otimes \mathbf{S}) = (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{T}) \otimes \mathbf{S} + \mathbf{T} \otimes (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{S}), \quad (1.7)$$

isto é, satisfaz a regra de Liebniz.

Podemos obter o seguinte resultado [5]

$$d\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{2} (\mathbf{X}\langle\omega, \mathbf{Y}\rangle - \mathbf{Y}\langle\omega, \mathbf{X}\rangle - \langle\omega, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]\rangle) \quad (1.8)$$

com ω uma 1-forma e $X, Y \in T_p(V)$.

Chamamos de *conexão afim* a aplicação $\nabla: \mathcal{X}(V) \times \mathcal{X}(V) \rightarrow \mathcal{X}(V)$ que satisfaz as seguintes condições:

- i) $\nabla_X(\alpha Y + \beta Z) = \alpha \nabla_X Y + \beta \nabla_X Z$
- ii) $\nabla_{(f_1 X + f_2 Y)} Z = f_1 \nabla_X Z + f_2 \nabla_Y Z$
- iii) $\nabla_X f_1 Y = (X f_1) Y + f_1 \nabla_X Y$

(1.9)

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall f_1, f_2 \in \mathcal{F}(V)$ e $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$. Chamamos $\nabla_X Y$ de *derivada covariante* de Y na direção de X . A derivada covariante de uma função $f \in \mathcal{F}(V)$ na direção do elemento da base ∂_μ coincide com a derivada parcial, isto é,

$$\nabla_{\partial_\mu} f = \nabla_\mu f = \partial_\mu f$$

Seja $Y = Y^\mu e_\mu$ e usando a condição iii) de (1.9) temos

$$\nabla_X(Y) = (XY^\mu) e_\mu + Y^\mu \nabla_X e_\mu \quad (1.10)$$

Considerando $Y = e_\mu$ temos que $\nabla_X e_\mu$ é um campo tensorial do tipo $(1, 0)$, logo podemos escrever

$$\nabla_X e_\mu = \omega_\mu^\nu(X) e_\nu \quad (1.11)$$

onde ω_μ^ν são 1-formas chamadas *conexão de Cartan*. Substituindo (1.11) em (1.10) obtemos

$$\nabla_X Y = X(Y^\mu) e_\mu + Y^\mu \omega_\mu^\nu(X) e_\nu$$

Definimos em termos dos índices a seguinte expressão

$$(\nabla_X Y)^\mu = X(Y^\mu) + Y^\nu \omega_\nu^\mu(X) \quad (1.12)$$

Considerando agora $X = e_\alpha$ e aplicando em (1.11) obteremos

$$\nabla_{e_\alpha} e_\mu = \omega_\mu^\nu(e_\alpha) e_\nu \quad (1.13)$$

Assim definimos a 1-forma aplicada na base $\{e_\alpha\}$ por

$$(\omega_\mu^\nu)_\alpha = \omega_\mu^\nu(e_\alpha) \quad (1.14)$$

Em particular, tomando $\mathbf{X} = \partial_\alpha$ e aplicando na equação (1.12) obtemos

$$(\nabla_\alpha \mathbf{Y})^\mu = \partial_\alpha Y^\mu + Y^\nu \omega_\nu^\mu(\partial_\alpha) \quad (1.18)$$

No caso onde usamos a derivada covariante de um campo vetorial $\mathbf{Y} \in T_p(V)$ na direção dos elementos da base $\{\partial_\alpha\}$ temos a seguinte notação

$$\Gamma_{\nu\alpha}^\mu \equiv \omega_\nu^\mu(\partial_\alpha) \quad (1.19)$$

Assim escrevemos

$$\mathbf{Y}_{;\alpha}^\mu = \mathbf{Y}^\mu_{,\alpha} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \mathbf{Y}^\nu \quad (1.15)$$

onde o ponto e vírgula e a vírgula representam a derivada covariante e a derivada ordinária respectivamente.

A derivada covariante da 1-forma Ω aplicada em $\mathbf{Y} \in T_p(V)$ na direção de $\mathbf{X} \in T_p(V)$ segue a regra de Leibniz para derivadas de primeira ordem, ou seja,

$$\nabla_{\mathbf{X}}(\Omega(\mathbf{Y})) = (\nabla_{\mathbf{X}}\Omega)(\mathbf{Y}) + \Omega(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})$$

Em termos das bases locais $\{\mathbf{e}_\mu\}$ e $\{\mathbf{e}^\nu\}$ escrevemos

$$(\nabla_{\mathbf{X}}\Omega)_\mu = \mathbf{X}\Omega_\mu - \Omega_\nu \omega_\mu^\nu(\mathbf{X}) \quad (1.21)$$

isto é, (1.20) e (1.21), diremos que $\mathbf{Y} \in T_p(V)$ é transportado paralelamente

$$\nabla_{\mathbf{X}}\Omega = [\mathbf{X}\Omega_\mu - \Omega_\nu \omega_\mu^\nu(\mathbf{X})]\mathbf{e}^\mu \quad (1.22)$$

Em particular, tomando $\Omega = \mathbf{e}^\mu$ temos

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{e}^\mu = -\omega_\nu^\mu(\mathbf{X})\mathbf{e}^\nu \quad (1.23)$$

Estas equações mostram que temos n^2 1-formas ω_μ^ν suficientes para determinarmos as derivadas covariantes de Ω .

Analogamente a (1.15), podemos escrever

$$\Omega_{\mu;\alpha} = \Omega_{\mu,\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^\nu \Omega_\nu \quad (1.16)$$

Aplicando a 1-forma $df = \mathbf{X}^\mu f_{,\mu}$ obtemos

$$f_{;\mu;\alpha} = f_{\mu,\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^\nu f_{,\nu} \quad (1.17)$$

Permutando entre si os índices μ e α temos

$$f_{,\alpha;\mu} = f_{,\alpha,\mu} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu} f_{,\nu} \quad (1.18)$$

Fazendo a subtração membro a membro de (1.17) por (1.18) obtemos

$$f_{,\mu;\alpha} - f_{,\alpha;\mu} = -(\Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu}) f_{,\nu}$$

Denotamos por

$$\mathbf{T}_{\mu\alpha}^{\nu} = -(\Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu}) \quad (1.19)$$

as componentes de um tensor do tipo (1,2) chamado de *tensor torção*.

Seja $\mathbf{Y} \in T_p(V)$ e consideremos sua variação $\delta\mathbf{Y}$ ao longo da curva σ_p sobre V . A passagem de $\mathbf{Y}$ para $\delta\mathbf{Y}$ causa um deslocamento ao longo da curva σ_p , resultando um incremento δt em t (parâmetro de σ_p). No sistema de coordenadas locais $\delta\mathbf{Y}$ é dado por

$$(\delta\mathbf{Y})^{\mu} = \mathbf{Y}_{,\nu}^{\mu} \frac{dx^{\nu}(\sigma_p(t))}{dt} \delta t \quad (1.20)$$

Na geometria euclidiana e em coordenadas cartesianas dizemos que $\mathbf{Y}$ é *transportado paralelamente* ao longo da curva σ_p se

$$\delta\mathbf{Y} = 0 \quad (1.21)$$

Seja uma variedade diferenciável V munida da conexão afim ∇ . Analogamente à (1.20) e (1.21), diremos que $\mathbf{Y} \in T_p(V)$ é transportado paralelamente ao longo da curva σ_p se

$$(\mathcal{D}\mathbf{Y})^{\mu} = \mathbf{Y}_{,\nu}^{\mu} \frac{dx^{\nu}(\sigma_p(t))}{dt} \delta t = 0 \quad (1.22)$$

Usando a equação (1.15) temos

$$(\mathbf{Y}_{,\nu}^{\mu} + \Gamma_{\nu\alpha}^{\mu} \mathbf{Y}^{\alpha}) \frac{dx^{\nu}(\sigma_p(t))}{dt} \delta t = 0 \quad (1.23)$$

Seja a componente do vetor tangente à curva σ_p dada por

$$\mathbf{Y}^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}(\sigma_p(t))}{dt}$$

Considerando a reparametrização $s = s(t)$ de σ_p , a equação (1.23) será escrita como

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{ds^2} + \Gamma_{\nu\alpha}^{\mu} \frac{dx^{\nu}}{ds} \frac{dx^{\alpha}}{ds} = 0 \quad (1.24)$$

A curva σ_p é chamada de *geodésica* se satisfaz a equação (1.24).

1.3 Variedade pseudo-riemanniana, torção e curvatura

Uma *métrica pseudo-riemanniana* g sobre V é um campo tensorial do tipo $(2,0)$ que satisfaz

$$(i) \quad g_p(\mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_p) = g_p(\mathbf{Y}_p, \mathbf{X}_p), \quad \forall \mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_p \in T_p(V)$$

$$(ii) \quad \text{Se } \forall \mathbf{X}_p \in T_p(V), g_p(\mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_p) = 0, \implies \mathbf{Y}_p = 0$$

Vemos que g_p é uma forma bilinear não degenerada e simétrica. Se uma variedade V admite uma métrica pseudo-riemanniana, o par (V, g) é chamado *variedade pseudo-riemanniana*.

O vetor $\mathbf{X}_p \in T_p(V)$ é então classificado em:

$$(i) \quad \text{tipo espaço, se } g(\mathbf{X}_p, \mathbf{X}_p) > 0 \text{ ou } \mathbf{X}_p = 0.$$

$$(ii) \quad \text{nulo, se } g(\mathbf{X}_p, \mathbf{X}_p) = 0 \text{ e } \mathbf{X}_p \neq 0.$$

$$(iii) \quad \text{tipo tempo, se } g(\mathbf{X}_p, \mathbf{X}_p) < 0$$

Chamamos de *cone de luz* o conjunto de todos os vetores nulos de $T_p(V)$.

Uma importante noção referente ao tensor métrico é sua assinatura. Seja $(g_{\mu\nu})$ uma matriz diagonalizável. A *assinatura* é definida como a diferença do número de autovalores que são positivos pelo número de autovalores que são negativos. Uma *métrica lorentziana* (ou *minkowskiana*) é aquela em que a assinatura é $\pm(n-2)$, onde o sinal positivo ou negativo é adotado por convenção. Neste caso a assinatura é dita ser *lorentziana*.

Seja V uma variedade pseudo-riemanniana n -dimensional. Em termos das coordenadas locais escrevemos

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (1.25)$$

com $g_{\mu\nu} = g(\partial_\mu, \partial_\nu)$ sendo as componentes da métrica. Temos ainda que $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. A matriz $(g^{\mu\nu})$ é a inversa de $(g_{\mu\nu})$. Assim,

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\alpha} = \delta_\mu^\alpha \quad (1.26)$$

com δ_μ^α sendo o *símbolo de Kronecker*. A equação (1.26) nos permite tomar $g^{\mu\nu}$ como sendo as componentes do campo tensorial g^{-1} do tipo $(0, 2)$, cuja representação na base $(\partial_\mu \otimes \partial_\nu)$ é dada por

$$g^{-1} = g^{\mu\nu} \partial_\mu \otimes \partial_\nu$$

Dado o tensor T do tipo (r, s) , podemos contraí-lo com respeito a algum dos índices do tensor métrico (ou sua inversa), para obtermos os tensores $g \otimes T$ e $g^{-1} \otimes T$ do tipo $(r-1, s+1)$ e $(r+1, s-1)$ respectivamente. Em particular, seja o tensor T do tipo $(3, 4)$. As componentes dos respectivos tensores contraídos são escritas como

$$g_{\mu\alpha_3} T^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}_{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4} = T^{\alpha_1 \alpha_2}_{\mu \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4}$$

$$g^{\mu\beta_4} T^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}_{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4} = T^{\mu \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}_{\mu \beta_1 \beta_2 \beta_3}$$

Assim o tensor métrico fornece o isomorfismo entre os tensores definidos em V , ou seja, “sobe” e “desce” índices.

Algumas vezes a notação ds^2 será usada no lugar de g para representar o tensor métrico. Neste caso podemos escrever a equação (1.25) como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.27)$$

onde omitimos o símbolo do produto tensorial entre dx^μ e dx^ν . A notação da equação (1.27), conhecida como *elemento de linha*, expressa o sentido intuitivo de uma métrica como a representação do “quadrado da distância infinitesimal”.

Um difeomorfismo $\phi : V \rightarrow V$ é uma *isometria* se

$$g_p = g_{\phi(p)}$$

Isto é,

$$g_p(X, Y) = g_{\phi(p)}(\phi_*(X), \phi_*(Y))$$

com $X, Y \in T_p(V)$ e a aplicação $\phi_* : T_p(V) \rightarrow T_{\phi(p)}(V)$. Em termos das coordenadas locais temos

$$g_{\sigma\rho}(p) = g_{\mu\nu}(\phi(p)) \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\rho} \quad (1.28)$$

onde x^σ são as coordenadas de $p \in V$ e $\tilde{x}^\mu$ as coordenadas de $\phi(p)$.

Suponhamos que a métrica $\mathbf{g}_{\mu\nu}$ seja *covariantemente constante*, ou seja, se $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_p(V)$ são transportados paralelamente ao longo de qualquer curva sobre V , então o produto interno entre $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ permanece constante sob transporte paralelo. No sistema de coordenadas locais temos que

$$(\nabla_\mu \mathbf{g})_{\nu\alpha} = 0 \quad (1.29)$$

Se (1.29) é satisfeita, ∇ é chamada de *conexão métrica*.

Desenvolvendo a conexão métrica obtemos

$$(\nabla_\mu \mathbf{g})_{\nu\alpha} = \partial_\mu \mathbf{g}_{\nu\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^\beta \mathbf{g}_{\beta\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \mathbf{g}_{\beta\nu}$$

Concluimos que

$$\partial_\mu \mathbf{g}_{\nu\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^\beta \mathbf{g}_{\beta\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \mathbf{g}_{\beta\nu} = 0 \quad (1.30)$$

Fazendo a permutação cíclica dos índices μ, ν, α obteremos as expressões

$$\partial_\alpha \mathbf{g}_{\mu\nu} - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta \mathbf{g}_{\beta\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^\beta \mathbf{g}_{\beta\mu} = 0 \quad (1.31)$$

e

$$\partial_\nu \mathbf{g}_{\alpha\mu} - \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \mathbf{g}_{\beta\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\beta \mathbf{g}_{\beta\alpha} = 0 \quad (1.32)$$

Fazendo a adição de (1.31) e (1.32) e subtraindo (1.30) membro a membro, multiplicando ambos os lados por $g^{\sigma\rho}$ e somando em ρ produzimos

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} \mathbf{g}^{\sigma\rho} (\partial_\nu \mathbf{g}_{\mu\rho} + \partial_\mu \mathbf{g}_{\nu\rho} - \partial_\rho \mathbf{g}_{\mu\nu}) \quad (1.33)$$

Chamamos $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ de *símbolos de Christoffel*. Definimos

$$\Gamma_{\alpha\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\beta \mathbf{g}_{\beta\alpha} \quad (1.34)$$

Definimos os seguintes tensores:

(i) *tensor torção*: $\mathbf{T} : \mathcal{X}(V) \times \mathcal{X}(V) \rightarrow \mathcal{X}(V)$ por:

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \quad (1.35)$$

(ii) *tensor curvatura de Riemann*: $\mathbf{R} : \mathcal{X}(V) \times \mathcal{X}(V) \times \mathcal{X}(V) \rightarrow \mathcal{X}(V)$ por:

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = \nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} - \nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}\mathbf{Z}$$

Os tensores $\mathbf{T}$ e $\mathbf{R}$ são lineares em cada um de seus argumentos. Usando as equações (1.8), (1.12) e (1.19) obtemos

$$\Omega^\mu = \frac{1}{2}\mathbf{T}^\mu = dx^\mu + \omega_\nu^\mu \wedge dx^\nu \quad (1.35)$$

e

$$\Omega_\nu^\mu = d\omega_\nu^\mu + \omega_\alpha^\mu \wedge \omega_\nu^\alpha \quad (1.40)$$

Estas expressões são conhecidas como *primeira e segunda equações de estrutura de Cartan* respectivamente.

Se a torção é nula, temos que

$$dx^\mu + \omega_\nu^\mu \wedge dx^\nu = 0$$

Através da equação (1.19) podemos concluir que

$$\Gamma_{\mu\alpha}^\nu = \Gamma_{\alpha\mu}^\nu \quad (1.36)$$

As componentes do tensor de Riemann, com respeito às bases canônicas, são dadas por

$$\mathbf{R}_{\rho\mu\nu}^\theta = \partial_\nu \Gamma_{\rho\mu}^\theta - \partial_\mu \Gamma_{\rho\nu}^\theta + \Gamma_{\mu\rho}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\theta - \Gamma_{\nu\rho}^\eta \Gamma_{\mu\eta}^\theta \quad (1.37)$$

e satisfazem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \mathbf{R}_{\rho\mu\nu}^\theta = -\mathbf{R}_{\rho\nu\mu}^\theta \\ \text{ii)} \quad & \mathbf{R}_{\rho\mu\nu}^\theta + \mathbf{R}_{\mu\nu\rho}^\theta + \mathbf{R}_{\nu\rho\mu}^\theta = 0 \end{aligned} \quad (1.38)$$

onde ii) é conhecida como *identidade cíclica*. Seja,

$$\mathbf{R}_{\sigma\rho\mu\nu} = g_{\sigma\theta} \mathbf{R}_{\rho\mu\nu}^\theta$$

temos uma outra propriedade

$$\text{iii)} \quad \mathbf{R}_{\sigma\rho\mu\nu} = \mathbf{R}_{\nu\mu\rho\sigma} \quad (1.39)$$



Assim concluímos que o número de componentes independentes do tensor de Riemann é $n^2(n^2 - 1)/12$, com n sendo a dimensão da variedade pseudo-riemanniana V .

Contraindo o tensor de Riemann em relação ao segundo (ou terceiro) índice covariante, obtemos o *tensor de Ricci*, ou seja,

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}$$

O *escalar de curvatura* R é definido por

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (1.40)$$

1.4 Equações de campo de Einstein

Um *espaço-tempo* relativista é uma variedade pseudo-riemanniana (V, g) quadridimensional com assinatura lorentziana.

A idéia básica da teoria da gravitação de Einstein é geometrizar o campo gravitacional, isto é, aplicando as propriedades do campo gravitacional sobre propriedades de um espaço pseudo-riemanniano.

Os campos gravitacionais são produzidos por matéria. Perguntamos: “a partir do cálculo da distribuição de matéria, como ficam as propriedades do espaço pseudo-riemanniano?”. Obviamente não podemos derivar a teoria da gravitação de Einstein das leis fundamentais clássicas. Podemos estabelecer os seguintes requisitos a respeito das equações de campo:

- (i) São equações tensoriais, as quais são equações diferenciais parciais de segunda ordem não lineares da métrica $g_{\mu\nu}$.
- (ii) Nos limites apropriados, utilizamos a equação de Poisson da teoria da gravitação newtoniana

$$\Delta U = 4\pi G \mu$$

com U , G e μ sendo o potencial, a constante gravitacional e a densidade de massa respectivamente. Assim o tensor energia *momentum* $T^{\mu\nu}$ na

relatividade restrita é análogo à densidade de massa. Este tensor é a causa dos campos gravitacionais.

(iii) Se $T^{\mu\nu}$ é nulo, então o *espaço é plano*.

Representamos I_M e I_G como sendo a ação da matéria e do campo gravitacional respectivamente. Define-se [6, 7]

$$I_M \equiv \int \Upsilon \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4$$

e

$$I_G \equiv \frac{1}{16\pi G} \int R \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4$$

com R sendo o escalar de curvatura, $\Upsilon = \Upsilon(x^\mu, x^\mu_{,\nu})$, g o determinante do tensor métrico e G uma constante.

Aplicamos a $I = I_M + I_G$ o *princípio de ação estacionária*, ou seja, $\delta I = 0$ e ficamos com

$$\delta I_M + \delta I_G = 0 \quad (1.41)$$

Pelo princípio variacional obtemos os seguintes resultados

$$\delta I_M = -\frac{1}{2} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 \quad (1.42)$$

e

$$\delta I_G = \frac{1}{16\pi G} \int (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 \quad (1.43)$$

com $\delta g^{\mu\nu}$ uma variação infinitesimal de $g^{\mu\nu}$. Logo por (1.41) temos que

$$\int \left(\frac{1}{8\pi G} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) - T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 = 0$$

Concluimos que

$$\frac{1}{8\pi G} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) - T_{\mu\nu} = 0$$

Assim

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (1.44)$$



Definindo

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (1.45)$$

logo

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (1.46)$$

As expressões (1.45) e (1.46) são chamadas de *tensor de Einstein* e *equações de campo de Einstein* respectivamente.

A equação (1.44) nos diz como a curvatura do espaço (representado por $R_{\mu\nu}$) é afetada pela distribuição de matéria (representado por $T_{\mu\nu}$). Pelo princípio de conservação de energia e *momentum* (será visto no capítulo 3) temos

$$G_{;\nu}^{\mu\nu} = 8\pi G T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$$

Assim a divergência covariante do tensor de Einstein é identicamente nula.

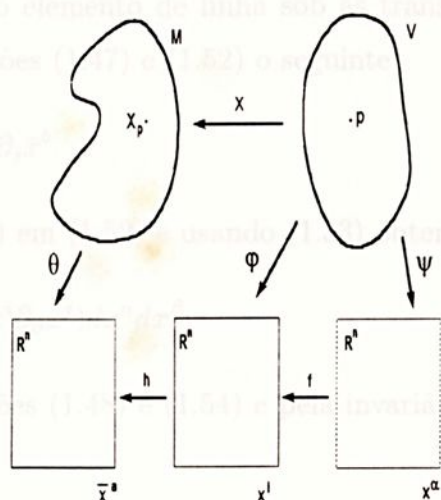
1.5 Formalismo tétrada

Seja V um espaço-tempo com elemento de linha

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \quad (1.47)$$

e x^k o seu sistema de coordenadas. Considerando um outro sistema de coordenadas x^α , o elemento de linha de V é dado por

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \quad (1.48)$$



Pela teoria das variedades diferenciáveis, existe um difeomorfismo f que associa a cada $x^\alpha \in \mathbb{R}^n$ um elemento $x^i \in \mathbb{R}^n$.

O princípio de equivalência [6] nos garante que podemos escolher um sistema de coordenadas $\bar{x}^a$ localmente inercial, para todo $p \in V$, em que a matéria satisfaz as leis da relatividade restrita², sendo o elemento de linha dado por

$$d\bar{s}^2 = \eta_{ab} d\bar{x}^a d\bar{x}^b \quad (1.49)$$

A escolha é feita de tal forma que o sistema de coordenadas $\bar{x}^a$ dependa de x^i , isto é, existe um difeomorfismo h que associa a cada elemento x^i um elemento $\bar{x}^a$.

Diferenciando $\bar{x}^a$ e x^i obtemos

$$d\bar{x}^a = \partial_i \bar{x}^a dx^i \quad (1.50)$$

e

$$dx^i = \partial_\alpha x^i dx^\alpha \quad (1.51)$$

Substituindo (1.50) em (1.49) temos

$$d\bar{s}^2 = (\eta_{ab} \partial_i \bar{x}^a \partial_j \bar{x}^b) dx^i dx^j \quad (1.52)$$

²O ambiente da relatividade restrita é um contínuo, chamado *espaço de Minkowski* e denotado por M , cujas componentes do tensor métrico é dada por $(\eta_{ab}) = \text{diag}(\eta_{ab}) = (1 \ 1 \ 1 \ -1)$.

Pela invariância do elemento de linha sob as transformações de Lorentz [6], obtemos das equações (1.47) e (1.52) o seguinte

$$g_{ij} = \eta_{ab} \partial_i \bar{x}^a \partial_j \bar{x}^b \quad (1.53)$$

Substituindo (1.51) em (1.52) e usando (1.53) obtemos

$$d\bar{s}^2 = (g_{ij} \partial_\alpha x^i \partial_\beta x^j) dx^\alpha dx^\beta \quad (1.54)$$

Tomando as equações (1.48) e (1.54) e pela invariância do elemento de linha, obtemos

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = g_{ij} \partial_\alpha x^i \partial_\beta x^j \quad (1.55)$$

Definimos $e_\alpha^i = \partial_\alpha x^i$ e o chamamos de *tétrada* (ou *vierbein*). Logo podemos escrever

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = g_{ij} e_\alpha^i e_\beta^j \quad (1.56)$$

com $\alpha, \beta, i, j = 1, 2, 3, 4$.

Coincidindo o sistema de coordenadas x^α com o sistema de coordenadas localmente inercial $\bar{x}^a$ temos que $\tilde{g}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$, logo

$$\eta_{\alpha\beta} = g_{ij} e_\alpha^i e_\beta^j \quad (1.57)$$

As letras gregas indicam os índices tétradas e as letras latinas minúsculas indicam os índices tensoriais. Com isso, a cada ponto do espaço-tempo V , estabelecemos uma base $\{e_\alpha^i\}$ de quatro vetores contravariantes.

Como a aplicação h é um difeomorfismo, podemos tomar h^{-1} no desenvolvimento acima e obtemos $e_j^\beta = \partial_j x^\beta$. Assim (e_j^β) é a matriz inversa de (e_β^j) com

$$e_\alpha^i e_i^\beta = \delta_\alpha^\beta$$

e

$$e_\alpha^i e_j^\alpha = \delta_j^i$$

Pela equação (1.56) podemos definir

$$\mathbf{e}_{\alpha j} \equiv \mathbf{g}_{ij} \mathbf{e}_{\alpha}^i \quad (1.58)$$

Assim podemos escrever

$$\tilde{\mathbf{g}}_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_{\alpha j} \mathbf{e}_{\beta}^j \quad (1.59)$$

Seja $(\tilde{\mathbf{g}}^{\alpha\beta})$ a matriz inversa de $(\tilde{\mathbf{g}}_{\alpha\beta})$, então

$$\tilde{\mathbf{g}}^{\alpha\beta} \tilde{\mathbf{g}}_{\alpha\mu} = \delta_{\mu}^{\beta}$$

Temos as seguintes propriedades

$$\text{i) } \mathbf{e}_{\beta i} = \tilde{\mathbf{g}}_{\alpha\beta} \mathbf{e}_i^{\alpha}$$

$$\text{ii) } \mathbf{e}_i^{\beta} = \tilde{\mathbf{g}}^{\alpha\beta} \mathbf{e}_{\alpha i}$$

$$\text{iii) } \mathbf{e}_{\alpha i} \mathbf{e}_j^{\alpha} = \mathbf{g}_{ij}$$

A partir da propriedade iii) temos

$$\mathbf{e}_{\alpha i} (\mathbf{g}^{jk} \mathbf{e}_j^{\alpha}) = \delta_i^k$$

Definindo

$$\mathbf{e}^{\alpha k} \equiv \mathbf{g}^{jk} \mathbf{e}_j^{\alpha} \quad (1.61)$$

podemos obter as propriedades

$$\text{iv) } \mathbf{e}_{\alpha i} \mathbf{e}^{\alpha k} = \delta_i^k$$

$$\text{v) } \mathbf{e}_{\alpha i} \mathbf{e}^{\beta i} = \delta_{\alpha}^{\beta}$$

Concluimos que as métricas $\tilde{\mathbf{g}}_{\alpha\beta}$ e $\mathbf{g}_{ij}$ “sobem” e “descem” índices tétradas e tensoriais respectivamente.

Sejam os campos tensoriais definidos por

$$\mathbf{T}_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_{\alpha}^i \mathbf{e}_{\beta}^j \mathbf{T}_{ij} \quad (1.63)$$

e sistema de coordenadas ortogonais $(z^r, w^r, v^r, u^r/c)$, construímos os vetores

$$T_{ij} = e_i^\alpha e_j^\beta T_{\alpha\beta}$$

Projetando os campos tensoriais sobre o referencial tétrada temos as seguintes propriedades

$$\text{vi) } T_{\alpha\beta} = e_\alpha^i T_{i\beta}$$

$$\text{vii) } T_{ij} = e_i^\alpha T_{\alpha j}$$

Podemos identificar os vetores tétradas com a base de vetores do sistema de coordenadas localmente inercial do espaço de Minkowski, no ponto p envolvido, o qual denotaremos por

$$\begin{cases} z^r = e_1^r \\ w^r = e_2^r \\ v^r = e_3^r \\ \frac{u^r}{c} = e_4^r \end{cases} \quad (1.60)$$

com c sendo uma constante, $\tilde{g}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$, $(z^r, w^r, v^r, u^r/c)$ um sistema de coordenadas ortonormais e $r = 1, 2, 3, 4$. Usando a equação (1.57) podemos escrever

$$g_{ij} = \eta_{\alpha\beta} e_i^\alpha e_j^\beta \quad (1.61)$$

“Descendo” o índice tensorial de (1.60) através da métrica g_{ij} e usando a propriedade i) obtemos

$$e_r^\alpha = \eta^{\alpha\beta} e_{\beta r} \quad (1.62)$$

Com a ajuda de (1.62) a métrica (1.61) do espaço-tempo V pode ser escrita como

$$g_{ij} = z_i z_j + w_i w_j + v_i v_j - \frac{1}{c^2} u_i u_j \quad (1.63)$$

Um caso especial é o uso de vetores nulos como vetores tétradas e esta identificação é conhecida como *formalismo de Newman-Penrose*. A partir do

sistema de coordenadas ortonormais $(z^r, w^r, v^r, u^r/c)$, construímos os vetores nulos como segue

$$\begin{cases} k^r = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{u^r}{c} + v^r \right) \\ l^r = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{u^r}{c} - v^r \right) \\ t^r = \frac{1}{\sqrt{2}} (z^r + iw^r) \\ \bar{t}^r = \frac{1}{\sqrt{2}} (z^r - iw^r) \end{cases} \quad (1.64)$$

com t^r e $\bar{t}^r$ um complexo e seu conjugado. Relacionamos os vetores nulos com a base tétrada da seguinte forma

$$\begin{cases} \bar{t}^r = \mathbf{e}_1^r \\ t^r = \mathbf{e}_2^r \\ k^r = \mathbf{e}_3^r \\ l^r = \mathbf{e}_4^r \end{cases} \quad (1.65)$$

onde $\mathbf{e}_\alpha^r$ não são os mesmos de (1.60).

Na equação (1.63) multiplicamos u^j membro a membro e como $(z^r, w^r, v^r, u^r/c)$ é uma base ortonormal, obtemos

$$\frac{1}{c^2} u^j u_j = -1$$

Tomando a equação (1.59), construímos a seguinte matriz

$$(\tilde{\mathbf{g}}_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim $\tilde{\mathbf{g}}_{\alpha\beta} = \tilde{\mathbf{g}}^{\alpha\beta}$ e pela propriedade i) produzimos

$$\mathbf{e}_j^\alpha = \tilde{\mathbf{g}}^{\alpha\beta} \mathbf{e}_{\beta j}$$

Podemos obter as seguintes relações

$$\begin{cases} \mathbf{e}_j^1 = \mathbf{e}_{2j} = t_j \\ \mathbf{e}_j^2 = \mathbf{e}_{1j} = \bar{t}_j \\ \mathbf{e}_j^3 = -\mathbf{e}_{4j} = -l_j \\ \mathbf{e}_j^4 = -\mathbf{e}_{3j} = -k_j \end{cases}$$

Usando a equação (1.56) podemos escrever

$$g_{ij} = \tilde{g}_{\alpha\beta} e_i^\alpha e_j^\beta$$

Concluimos que o tensor métrico do espaço-tempo V tem a forma

$$g_{ij} = t_i \bar{t}_j + \bar{t}_i t_j - l_i k_j - k_i l_j$$

Superfícies Mínimas

2.1 Subvariedades

Sejam V e W variedades diferenciáveis de dimensões n e m , respectivamente, com $m \leq n$ e as aplicações $\phi: W \rightarrow V$ e $\phi_*: T_p(W) \rightarrow T_{\phi(p)}(V)$ diferenciáveis. Dizemos que ϕ é uma *imersão* de W sobre V se ϕ_* é injetora. ϕ é dito ser um *mergulho* se ϕ é um homeomorfismo e uma imersão. A imagem $\phi(W) = S$ é uma *subvariedade* de V se ϕ é um mergulho. Se $m = 2$ chamamos S de *superfície mergulhada* em V .

Sejam (U, ϕ) uma carta local de W e (E, ψ) uma carta local de V , cujos sistemas de coordenadas são x^i e x^μ , respectivamente. Então, localmente, a subvariedade S de V pode ser representada como [8]

$$x^\mu = x^\mu(x^i) \quad (2.1)$$

com $i = 1, 2, \dots, m$ e $\mu = 1, 2, \dots, n$.

Suponhamos que (V, G) seja uma variedade pseudo-riemanniana, então a subvariedade S também é uma variedade pseudo-riemanniana com a métrica¹ g dada por [8]

$$g(X, Y) = G(X, Y)$$

¹Devemos nos atentar a esta mudança de notação, tendo em vista o capítulo 4, isto é, G e g são as métricas da variedade V e da subvariedade S respectivamente. Neste contexto G_α são os componentes do tensor métrico e e_α os de tensor de Einstein.

com $X, Y \in \mathcal{V}(S)$. Em termos das coordenadas locais, para $p \in S$, temos

$$g_{ij}(p) = G_{\mu\nu}(\phi(p)) \frac{\partial x^\mu}{\partial x^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^j} \quad (2.2)$$

com $i, j = 1, 2, \dots, m$ e $\mu, \nu = 1, 2, \dots, n$. A métrica pseudo-riemanniana g

Capítulo 2

Superfícies Mínimas

2.1 Subvariedades

Sejam V e W variedades diferenciáveis de dimensões n e m , respectivamente, com $m \leq n$ e as aplicações $\phi : W \rightarrow V$ e $\phi_* : T_p(W) \rightarrow T_{\phi(p)}(V)$ diferenciáveis. Dizemos que ϕ é uma *imersão* de W sobre V se ϕ_* é injetora. ϕ é dito ser um *mergulho* se ϕ é um homeomorfismo e uma imersão. A imagem $\phi(W) = S$ é uma *subvariedade* de V se ϕ é um mergulho. Se $m = 2$ chamamos S de *superfície mergulhada* em V .

Sejam (U, ψ) uma carta local de S e $(\tilde{U}, \tilde{\psi})$ uma carta local de V , cujos sistemas de coordenadas são x^i e $\tilde{x}^\mu$, respectivamente. Então, localmente, a subvariedade S de V pode ser representada como [8]

$$\tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu(x^i) \quad (2.1)$$

com $i = 1, 2, \dots, m$ e $\mu = 1, 2, \dots, n$.

Suponhamos que (V, G) seja uma variedade pseudo-riemanniana, então a subvariedade S também é uma variedade pseudo-riemanniana com a métrica¹ g dada por [8]

$$g(X, Y) = G(X, Y)$$

¹Devemos nos atentar a esta mudança de notação, tendo em vista o capítulo 1, isto é, G e g são as métricas da variedade V e da subvariedade S respectivamente. Neste contexto $G_{\mu\nu}$ são as componentes do tensor métrico e não do tensor de Einstein.

com $X, Y \in \mathcal{X}(S)$. Em termos das coordenadas locais, para $p \in S$, temos

$$\mathbf{g}_{ij}(p) = \mathbf{G}_{\mu\nu}(\phi(p)) \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^j} \quad (2.2)$$

com $i, j = 1, 2, \dots, m$ e $\mu, \nu = 1, 2, \dots, n$. A métrica pseudo-riemanniana $\mathbf{g}$ é chamada *métrica induzida* sobre S .

Denotaremos os elementos de linha da variedade pseudo-riemanniana V e da subvariedade pseudo-riemanniana S por

$$dS^2 = \mathbf{G}_{\mu\nu} d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu \quad (2.3)$$

e

$$ds^2 = \mathbf{g}_{ij} dx^i dx^j \quad (2.4)$$

respectivamente. Os índices gregos e latinos minúsculos estão associados aos índices das coordenadas da variedade V e a subvariedade S respectivamente.

2.2 Princípio variacional e superfícies mínimas

Sejam V uma variedade pseudo-riemanniana n -dimensional, S uma superfície mergulhada em V , C uma curva fechada, simples e suave por partes contida em S e Σ_2 uma região de uma carta de S limitada por C .

Teorema 2.1 Se $\tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu(x^1, x^2)$ satisfaz a condição de contorno $\tilde{x}^\mu(x^1, x^2) = \tilde{x}_0^\mu(x^1, x^2)$ sobre C e produz um mínimo para

$$I = \int_{\Sigma_2} L(\tilde{x}^\mu, \tilde{x}_{,A}^\mu) dx^1 dx^2$$

então é necessário e suficiente que L satisfaça as seguintes equações

$$\frac{\partial}{\partial x^A} \left(\frac{\partial L}{\partial \tilde{x}_{,A}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial \tilde{x}^\mu} = 0$$

para $A = 1, 2$ e $\mu = 1, \dots, n$. L é chamado de *lagrangeana*²

²em homenagem à J.L. Lagrange (1736-1813)

Prova: Convenientemente representaremos a superfície mergulhada S por

$$y^\mu = \tilde{x}^\mu(x^1, x^2)$$

Seja a integral

$$I = \int_{\Sigma_2} L(y^\mu, y^\mu_{,A}) dx^1 dx^2$$

com $A = 1, 2$ e $\mu = 1, 2, \dots, n$, a qual é estendida sobre Σ_2 . L é uma função dos y^μ e suas primeiras derivadas $y^\mu_{,A}$

Seja $\omega^\mu(x^1, x^2)$ um conjunto arbitrário de n funções tal que

$$\omega^\mu = 0, \quad \text{para } C \quad (2.5)$$

Seja $\bar{S}$ uma outra superfície mergulhada em V , contendo a dada curva C e vizinhança S definida por

$$\bar{y}^\mu = \tilde{x}^\mu + \epsilon \omega^\mu$$

ϵ é um infinitesimal e $\bar{y}^\mu(x^1, x^2) = \tilde{x}_0^\mu(x^1, x^2)$ sobre C .

Sejam $L = L(\bar{y}^\mu, \bar{y}^\mu_{,A})$ e $L = L(P + \epsilon H)$, com $P = (\tilde{x}^\mu, \tilde{x}^\mu_{,A})$, $\epsilon H = (\epsilon \omega^\mu, \epsilon \omega^\mu_{,A})$ e $\nabla = (\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu}, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu_{,A}})$. Expandindo L pelo teorema de Taylor temos

$$L(P + \epsilon H) = L(P) + \langle \epsilon H, \nabla \rangle L(P) + \varrho$$

com ϱ envolvendo termos de ordem maior e igual a dois em ϵ . Como ϵ é infinitesimal, podemos negligenciar ϱ . Com isso ficamos com

$$L(P + \epsilon H) = L(P) + \langle \epsilon H, \nabla \rangle L(P) \quad (2.6)$$

Assim

$$\begin{aligned} \langle \epsilon H, \nabla \rangle L(P) &= (\epsilon \omega^\mu \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu} + \epsilon \omega^\mu_{,A} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu_{,A}}) L(P) \\ &= \epsilon \omega^\mu \frac{\partial L(P)}{\partial \tilde{x}^\mu} + \epsilon \omega^\mu_{,A} \frac{\partial L(P)}{\partial \tilde{x}^\mu_{,A}} \end{aligned}$$

Substituindo em (2.6) obteremos

$$L(P + \epsilon H) = L(P) + \epsilon \omega^\mu \frac{\partial L(P)}{\partial \tilde{x}^\mu} + \epsilon \omega^\mu{}_{,A} \frac{\partial L(P)}{\partial \tilde{x}^\mu{}_{,A}}$$

Integrando a equação acima, estendida sobre as regiões Σ_2 de S e $\bar{\Sigma}_2$ de $\bar{S}$ temos

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\Sigma}_2} L(P + \epsilon H) dx^1 dx^2 &= \int_{\Sigma_2} L(P) dx^1 dx^2 + \\ &+ \int_{\Sigma_2} \left(\epsilon \omega^\mu \frac{\partial L(P)}{\partial \tilde{x}^\mu} + \epsilon \omega^\mu{}_{,A} \frac{\partial L(P)}{\partial \tilde{x}^\mu{}_{,A}} \right) dx^1 dx^2 \end{aligned}$$

Assim

$$\bar{I} = I + \epsilon \int_{\Sigma_2} \left(\omega^\mu \frac{\partial L}{\partial \tilde{x}^\mu} \right) dx^1 dx^2 + \epsilon \int_{\Sigma_2} \left(\omega^\mu{}_{,A} \frac{\partial L}{\partial \tilde{x}^\mu{}_{,A}} \right) dx^1 dx^2$$

Passando I para o primeiro membro e chamando $\delta I = \bar{I} - I$ temos

$$\delta I = \epsilon \int_{\Sigma_2} \omega^\mu \frac{\partial L}{\partial \tilde{x}^\mu} dx^1 dx^2 + \epsilon \int_{\Sigma_2} \omega^\mu{}_{,A} \frac{\partial L}{\partial \tilde{x}^\mu{}_{,A}} dx^1 dx^2 \quad (2.7)$$

Para desenvolvermos a equação (2.7), faremos uso do teorema de Green que afirma o seguinte

$$\oint_C M dx^1 + N dx^2 = \int_{\Sigma_2} \left(\frac{\partial N}{\partial x^1} - \frac{\partial M}{\partial x^2} \right) dx^1 dx^2 \quad (2.8)$$

com $M = M(x^1, x^2)$ e $N = N(x^1, x^2)$ funções de classe C^1 . Chamando

$$\begin{aligned} M &= -\omega^\mu \frac{\partial L}{\partial \tilde{x}^\mu{}_{,1}} \\ N &= \omega^\mu \frac{\partial L}{\partial \tilde{x}^\mu{}_{,2}} \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial x^1} &= -\frac{\partial \omega^\mu}{\partial x^1} \frac{\partial L}{\partial \tilde{x}^\mu{}_{,1}} - \omega^\mu \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\partial L}{\partial \tilde{x}^\mu{}_{,1}} \right) \\ \frac{\partial N}{\partial x^2} &= \frac{\partial \omega^\mu}{\partial x^2} \frac{\partial L}{\partial \tilde{x}^\mu{}_{,2}} + \omega^\mu \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \tilde{x}^\mu{}_{,2}} \right) \end{aligned}$$

Substituindo estas equações em (2.8), usando a notação de Einstein e a condição (2.5), obteremos

$$\int_{\Sigma_2} \omega^\mu{}_{,A} \frac{\partial L}{\partial \tilde{x}^\mu{}_{,A}} dx^1 dx^2 = - \int_{\Sigma_2} \omega^\mu \frac{\partial}{\partial x^A} \left(\frac{\partial L}{\partial \tilde{x}^\mu{}_{,A}} \right) dx^1 dx^2 \quad (2.12)$$

Substituindo esta equação em (2.7) teremos

$$\delta I = \epsilon \int_{\Sigma_2} \omega^\mu \frac{\partial L}{\partial \tilde{x}^\mu} dx^1 dx^2 - \epsilon \int_{\Sigma_2} \omega^\mu \frac{\partial}{\partial x^A} \left(\frac{\partial L}{\partial \tilde{x}^\mu{}_{,A}} \right) dx^1 dx^2$$

Usando novamente a condição (2.5) obteremos

$$\delta I = 0 \quad (2.9)$$

Neste caso, a integral I é chamada de *estacionária*. Como ϵ é infinitesimal, logo

$$\int_{\Sigma_2} \omega^\mu \left[\frac{\partial L}{\partial \tilde{x}^\mu} - \frac{\partial}{\partial x^A} \left(\frac{\partial L}{\partial \tilde{x}^\mu{}_{,A}} \right) \right] dx^1 dx^2 = 0$$

Para que a integral I seja estacionária, é necessário e suficiente que L seja uma função tal que

$$\frac{\partial L}{\partial \tilde{x}^\mu} - \frac{\partial}{\partial x^A} \left(\frac{\partial L}{\partial \tilde{x}^\mu{}_{,A}} \right) = 0 \quad (2.10)$$

com $A = 1, 2$ e $\mu = 1, \dots, n$, as quais são denominadas *equações de Euler-Lagrange*. ■

Definição 2.1 A superfície S é *mínima* se, para toda curva fechada C , a integral I é estacionária, isto é, $\delta I = 0$.

Por definição, sabemos que a *área* de uma região Σ_2 da superfície S é dada por

$$A(\Sigma_2) = \int_{\Sigma_2} \sqrt{g} dx^1 dx^2 \quad (2.11)$$

com g sendo o determinante do tensor métrico $\mathbf{g}_{AB}$ da superfície S .

Supondo que S seja uma superfície mínima (isto é, $\delta A(\Sigma_2) = 0$) pelo teorema (2.1) é necessário e suficiente que a lagrangeana $\sqrt{g}$ satisfaça as equações de Euler-Lagrange, ou seja,

$$\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \tilde{x}^\mu} - \frac{\partial}{\partial x^A} \left(\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \tilde{x}^{\mu, A}} \right) = 0 \quad (2.12)$$

para $A = 1, 2$ e $\mu = 1, \dots, n$.

Para calcularmos as equações (2.12), necessitaremos de alguns resultados desenvolvidos abaixo, sendo que a prova dos três primeiros são encontradas em [9].

$$\text{R 2.1} \quad \frac{\partial \mathbf{g}_{AD}}{\partial x^C} = \Gamma_{ACD} + \Gamma_{DCA}$$

$$\text{R 2.2} \quad \frac{\partial \mathbf{G}_{\mu\alpha}}{\partial \tilde{x}^\nu} = \Gamma_{\mu\nu\alpha} + \Gamma_{\alpha\nu\mu}$$

$$\text{R 2.3} \quad \frac{\partial \mathbf{g}^{AD}}{\partial x^C} = -(\mathbf{g}^{AB} \Gamma_{CB}^D + \mathbf{g}^{DB} \Gamma_{CB}^A)$$

$$\text{R 2.4} \quad \frac{\partial g}{\partial \mathbf{g}_{AB}} = g^{AB} g$$

Prova: Sabemos que $g = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$. Calculando

$$\frac{\partial g}{\partial g_{11}} = g_{22} \quad \frac{\partial g}{\partial g_{22}} = g_{11} \quad \frac{\partial g}{\partial g_{12}} = -g_{21} \quad \frac{\partial g}{\partial g_{21}} = -g_{12} \quad (2.13)$$

Observando os elementos da matriz (g^{AB}) inversa de (g_{AB}) concluímos que

$$g_{11} = g g^{22} \quad g_{22} = g g^{11} \quad g_{12} = g g^{21} \quad g_{21} = g g^{12}$$

Substituindo-as nas equações (2.13) obteremos o resultado desejado. ■

$$\text{R 2.5} \quad \frac{\partial \mathbf{g}_{AB}}{\partial \mathbf{G}_{\mu\nu}} = \tilde{x}^{\mu, A} \tilde{x}^{\nu, B}$$

Prova: Por (2.2) a métrica induzida $\mathbf{g}_{AB}$ é localmente escrita como

$$\mathbf{g}_{AB} = \mathbf{G}_{\theta\beta} \tilde{x}^{\theta, A} \tilde{x}^{\beta, B} \quad (2.14)$$

Observamos que $\tilde{x}^\alpha{}_{,C}$ não depende explicitamente de $G_{\mu\nu}$, isto é ,

$$\frac{\partial \tilde{x}^\alpha{}_{,C}}{\partial G_{\mu\nu}} = 0 \quad (2.15)$$

Temos também que

$$\frac{\partial G_{\theta\beta}}{\partial G_{\mu\nu}} = \delta_\mu^\theta \delta_\nu^\beta \quad (2.16)$$

Logo

$$\frac{\partial g_{AB}}{\partial G_{\mu\nu}} = \frac{\partial G_{\theta\beta}}{\partial G_{\mu\nu}} \tilde{x}^\theta{}_{,A} \tilde{x}^\beta{}_{,B} = \tilde{x}^\mu{}_{,A} \tilde{x}^\nu{}_{,B}$$

■

R 2.6 $\frac{\partial}{\partial x^A} \sqrt{g} = \sqrt{g} \Gamma_{AD}^D$

Prova: Desenvolvendo

$$\frac{\partial}{\partial x^A} \sqrt{g} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial g}{\partial x^A} \quad (2.17)$$

Derivando

$$g^{AB} g_{BC} = \delta_C^A \quad (2.18)$$

em relação a x^D , obteremos

$$g^{AB} \frac{\partial g_{BC}}{\partial x^D} = -g_{BC} \frac{\partial g_{AB}}{\partial x^D} \quad (2.19)$$

Fazendo

$$\frac{\partial g}{\partial x^A} = \frac{\partial g}{\partial g_{BC}} \frac{\partial g_{BC}}{\partial x^A} \quad (2.20)$$

Substituindo em (2.20) os resultados (R 2.1) e (R 2.4) e a equação (2.19) produziremos

$$\frac{\partial g}{\partial x^A} = 2g \Gamma_{AD}^D \quad (2.21)$$

O resultado desejado é obtido substituindo a equação (2.21) em (2.17).

■

$$\mathbf{R\ 2.7} \quad \frac{\partial G_{\alpha\mu}}{\partial x^A} = (\Gamma_{\alpha\theta\mu} + \Gamma_{\mu\theta\alpha})\tilde{x}^\theta{}_{,A}$$

Prova: Fazendo

$$\frac{\partial G_{\alpha\mu}}{\partial x^A} = \frac{\partial G_{\alpha\mu}}{\partial \tilde{x}^\theta} \tilde{x}^\theta{}_{,A}$$

Usando o resultado (**R 2.2**), facilmente concluiremos o resultado. ■

Desenvolveremos as duas parcelas das equações (2.12) separadamente. Iniciaremos pela primeira parcela, isto é ,

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\alpha} \sqrt{g} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial g}{\partial g_{AB}} \frac{\partial g_{AB}}{\partial G_{\mu\nu}} \frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial \tilde{x}^\alpha}$$

Substituindo os resultados (**R 2.2**), (**R 2.4**) e (**R 2.5**) na equação acima teremos

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\alpha} \sqrt{g} = \frac{\sqrt{g}}{2} (g^{AB} \tilde{x}^\mu{}_{,A} \tilde{x}^\nu{}_{,B} \Gamma_{\mu\alpha\nu} + g^{AB} \tilde{x}^\mu{}_{,A} \tilde{x}^\nu{}_{,B} \Gamma_{\nu\alpha\mu})$$

Nesta equação trocando entre si os índices μ e ν , A e B na primeira parcela obteremos

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\alpha} \sqrt{g} = \sqrt{g} g^{AB} \tilde{x}^\mu{}_{,A} \tilde{x}^\nu{}_{,B} \Gamma_{\nu\alpha\mu} \quad (2.22)$$

Desenvolvendo a segunda parcela da equação (2.12) teremos

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu{}_{,A}} \sqrt{g} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial g}{\partial g_{BC}} \frac{\partial g_{BC}}{\partial \tilde{x}^\alpha{}_{,A}}$$

Usando o resultado (**R 2.4**) e as equações (2.15) e (2.16) na equação acima produziremos

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\alpha{}_{,A}} \sqrt{g} = \frac{\sqrt{g}}{2} (g^{AC} G_{\alpha\nu} \tilde{x}^\nu{}_{,C} + g^{CA} G_{\mu\alpha} \tilde{x}^\mu{}_{,B})$$

Renomeando na primeira parcela os índices C por B e ν por μ teremos

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu{}_{,A}} \sqrt{g} = \sqrt{g} g^{AB} G_{\alpha\mu} \tilde{x}^\mu{}_{,B} \quad (2.23)$$

Derivando a equação (2.23) em relação a x^A obteremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^A} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\alpha{}_{,A}} \sqrt{g} \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x^A} \sqrt{g} \right) g^{AB} G_{\alpha\mu} \tilde{x}^\mu{}_{,B} + \frac{\partial g^{AB}}{\partial x^A} \sqrt{g} G_{\alpha\mu} \tilde{x}^\mu{}_{,B} + \\ &+ \frac{\partial G_{\alpha\mu}}{\partial x^A} \sqrt{g} g^{AB} \tilde{x}^\mu{}_{,B} + \frac{\partial \tilde{x}^\mu{}_{,B}}{\partial x^A} \sqrt{g} g^{AB} G_{\alpha\mu} \end{aligned}$$

Substituindo os resultados (R 2.3), (R 2.6) e (R 2.7) ficaremos com

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^A} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu, A} \sqrt{g} \right) = & \sqrt{g} (\Gamma_{AD}^D \mathbf{g}^{AB} \mathbf{G}_{\alpha\mu} \tilde{x}^\mu, B - \Gamma_{CA}^B \mathbf{g}^{CA} \mathbf{G}_{\alpha\mu} \tilde{x}^\mu, B - \\ & - \Gamma_{CA}^A \mathbf{g}^{CB} \mathbf{G}_{\alpha\mu} \tilde{x}^\mu, B + \Gamma_{\alpha\theta\mu} \mathbf{g}^{AB} \tilde{x}^\theta, A \tilde{x}^\mu, B + \\ & + \Gamma_{\mu\theta\alpha} \mathbf{g}^{AB} \tilde{x}^\theta, A \tilde{x}^\mu, B + \mathbf{g}^{AB} \mathbf{G}_{\alpha\mu} \tilde{x}^\mu, BA) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Renomeando entre si os índices C e A na terceira parcela da equação (2.24) e em seguida trocamos C por D para obtermos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^A} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\alpha, A} \sqrt{g} \right) = & \sqrt{g} \mathbf{g}^{AB} ((\Gamma_{\alpha\theta\mu} + \Gamma_{\mu\theta\alpha}) \tilde{x}^\theta, A \tilde{x}^\mu, B + \mathbf{G}_{\alpha\mu} \tilde{x}^\mu, AB) - \\ & - \sqrt{g} \mathbf{g}^{CA} \Gamma_{CA}^B \mathbf{G}_{\alpha\mu} \tilde{x}^\mu, B \end{aligned} \quad (2.25)$$

Substituindo as equações (2.22) e (2.25) em (2.12) produzimos

$$\Gamma_{\mu\theta}^\beta \tilde{x}^\theta, A \tilde{x}^\mu, B \mathbf{g}^{AB} + \mathbf{g}^{AB} (\tilde{x}^\beta, AB - \Gamma_{AB}^C \tilde{x}^\beta, C) = 0$$

Usando a equação (1.16) ficamos com

$$\Gamma_{\mu\theta}^\beta \tilde{x}^\theta, A \tilde{x}^\mu, B \mathbf{g}^{AB} + \mathbf{g}^{AB} (\tilde{x}^\beta, A)_{;B} = 0 \quad (2.26)$$

Considerando o resultado (1.29) podemos obter o seguinte

$$(g^{AB} \tilde{x}^\beta, A)_{;B} = g^{AB} (\tilde{x}^\beta, A)_{;B}$$

Definindo $\tilde{x}^{\beta, B} \equiv g^{AB} \tilde{x}^\beta, A$ a equação (2.26) poderá ser escrita como

$$(\tilde{x}^{\beta, B})_{;B} + \Gamma_{\mu\theta}^\beta \tilde{x}^\theta, A \tilde{x}^\mu, B \mathbf{g}^{AB} = 0 \quad (2.27)$$

Portanto estas são as equações de Euler-Lagrange para a lagrangeana $\sqrt{g}$.

Em [9] está definida a *curvatura média* H envolvendo a equação (2.26). Com isso temos o seguinte resultado: *Para que S seja uma superfície mínima é necessário e suficiente que a curvatura média H seja zero.*

Sejam a métrica γ_{AB} e o princípio variacional

$$\delta \left(\int_{\Sigma_2} \Lambda dx^1 dx^2 \right) = 0 \quad (2.28)$$

onde a lagrangeana é dada por

$$\Lambda = \gamma^{\frac{1}{2}} \mathbf{G}_{\mu\nu}(\tilde{x}) \tilde{x}^\mu, A \tilde{x}^\nu, B \gamma^{AB} \quad (2.29)$$

com γ^{AB} e γ sendo as componentes contravariantes e o determinante do campo tensorial γ_{AB} respectivamente. Observamos que Λ independe explicitamente das coordenadas x^C .

Sejam as equações de Euler-Lagrange para a lagrangeana Λ

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \tilde{x}^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^C} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \tilde{x}^\alpha{}_{,C}} \right) = 0 \quad (2.30)$$

Desenvolvendo a primeira parcela temos

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \tilde{x}^\alpha} = \gamma^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathbf{G}_{\mu\nu}}{\partial \mathbf{G}_{\theta\rho}} \tilde{x}^\mu{}_{,A} \tilde{x}^\nu{}_{,B} \gamma^{AB} \mathbf{G}_{\theta\rho,\alpha} \quad (2.31)$$

Utilizando a equação (2.16) e o resultado (R 2.2) obteremos

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \tilde{x}^\alpha} = \gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{x}^\theta{}_{,A} \tilde{x}^\rho{}_{,B} \gamma^{AB} (\Gamma_{\theta\alpha\rho} + \Gamma_{\rho\alpha\theta})$$

“Subindo” índice nos símbolos de Christoffel através da componente métrica $\mathbf{G}_{\alpha\mu}$ e trocando o índice B por C ficaremos com

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \tilde{x}^\alpha} = 2\gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{x}^\theta{}_{,A} \tilde{x}^\rho{}_{,C} \gamma^{AC} \mathbf{G}_{\alpha\mu} \Gamma_{\theta\rho}^\mu \quad (2.31)$$

Desenvolvendo a segunda parcela de (2.30) obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x^C} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \tilde{x}^\alpha{}_{,C}} \right) = \frac{\partial}{\partial x^C} \left(\gamma^{\frac{1}{2}} \mathbf{G}_{\mu\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\mu{}_{,A}}{\partial \tilde{x}^\alpha{}_{,C}} \tilde{x}^\nu{}_{,B} \gamma^{AB} + \gamma^{\frac{1}{2}} \mathbf{G}_{\mu\nu} \tilde{x}^\mu{}_{,A} \frac{\partial \tilde{x}^\nu{}_{,B}}{\partial \tilde{x}^\alpha{}_{,C}} \gamma^{AB} \right)$$

Daí podemos obter

$$\frac{\partial}{\partial x^C} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \tilde{x}^\alpha{}_{,C}} \right) = \frac{\partial}{\partial x^C} \left(2\gamma^{\frac{1}{2}} \mathbf{G}_{\mu\alpha} \tilde{x}^\mu{}_{,A} \gamma^{AC} \right)$$

Desenvolvendo a derivada com relação a x^C e usando o resultado (R 2.7) obteremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^C} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \tilde{x}^\alpha{}_{,C}} \right) &= 2\gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{x}^\mu{}_{,A} \gamma^{AC} (\Gamma_{\mu\rho\alpha} + \Gamma_{\alpha\rho\mu}) \tilde{x}^\rho{}_{,C} + \\ &+ 2 \left(\frac{\gamma^{-\frac{1}{2}}}{2} \mathbf{G}_{\mu\alpha} \tilde{x}^\mu{}_{,A} \gamma^{AC} + \gamma^{\frac{1}{2}} \mathbf{G}_{\mu\alpha} (\tilde{x}^\mu{}_{,A})_{,C} \gamma^{AC} + \gamma^{\frac{1}{2}} \mathbf{G}_{\mu\alpha} \tilde{x}^\mu{}_{,A} \gamma^{AC}_{,C} \right) \end{aligned}$$

“Subindo” índice nos símbolos de Christoffel através de $\mathbf{G}_{\lambda\alpha}$ produziremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^C} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \tilde{x}^\alpha{}_{,C}} \right) &= 4\gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{x}^\mu{}_{,A} \tilde{x}^\rho{}_{,C} \gamma^{AC} \mathbf{G}_{\lambda\alpha} \Gamma_{\mu\rho}^\lambda + \\ &+ 2\gamma^{\frac{1}{2}} \mathbf{G}_{\mu\alpha} \left(\frac{\gamma^{-1}}{2} \tilde{x}^\mu{}_{,A} \gamma^{AC} + (\tilde{x}^\mu{}_{,A})_{,C} \gamma^{AC} + \tilde{x}^\mu{}_{,A} \gamma^{AC}_{,C} \right) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Substituindo as equações (2.31) e (2.32) em (2.30) ficaremos com

$$\begin{aligned} & - 2\gamma^{\frac{1}{2}} \mathbf{G}_{\mu\alpha} \Gamma_{\theta\rho}^{\mu} \tilde{x}^{\theta},{}_A \tilde{x}^{\rho},{}_C \gamma^{AC} - \\ & - 2\gamma^{\frac{1}{2}} \mathbf{G}_{\mu\alpha} \left(\frac{\gamma^{-1}}{2} \tilde{x}^{\mu},{}_A \gamma^{AC} + (\tilde{x}^{\mu},{}_A),{}_C \gamma^{AC} + \tilde{x}^{\mu},{}_A \gamma^{AC},{}_C \right) = 0 \end{aligned}$$

Podemos escrever esta equação na seguinte forma

$$\begin{aligned} & \gamma^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma^{-\frac{1}{2}}}{2} \tilde{x}^{\mu},{}_A \gamma^{AC} + \gamma^{\frac{1}{2}} (\tilde{x}^{\mu},{}_A),{}_C \gamma^{AC} + \gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{x}^{\mu},{}_A \gamma^{AC},{}_C \right) + \\ & + \Gamma_{\theta\rho}^{\mu} \tilde{x}^{\theta},{}_A \tilde{x}^{\rho},{}_C \gamma^{AC} = 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Pela regra da derivada do produto concluímos de (2.33) que as equações de Euler-Lagrange para a lagrangeana Λ são dadas na forma

$$\gamma^{-\frac{1}{2}} \left(\gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{x}^{\mu},{}_A \gamma^{AB} \right),{}_B + \Gamma_{\theta\rho}^{\mu} \tilde{x}^{\theta},{}_A \tilde{x}^{\rho},{}_B \gamma^{AB} = 0 \quad (2.34)$$

Podemos escrever a lagrangeana (2.29) da seguinte forma

$$\Lambda = \gamma^{\frac{1}{2}} \mathbf{g}_{AB} \gamma^{AB} \quad (2.35)$$

Como

$$\mathbf{g}_{AB} \mathbf{g}^{AB} = 2 \quad (2.36)$$

logo podemos escrever

$$\gamma^{AB} = \frac{\gamma^{-\frac{1}{2}}}{2} \mathbf{g}^{AB} \Lambda \quad (2.37)$$

Assim γ_{AB} é proporcional a $\mathbf{g}_{AB}$.

Lema 2.1 Os princípios variacionais

$$\delta \left(\int_{\Sigma_2} \Lambda dx^1 dx^2 \right) = 0$$

e

$$\delta \left(\int_{\Sigma_2} \sqrt{g} dx^1 dx^2 \right) = 0$$

são equivalentes.

Prova: Suponhamos que

$$\delta \left(\int_{\Sigma_2} \Lambda dx^1 dx^2 \right) = 0$$

Então pelo teorema (2.1) temos que Λ deve satisfazer as equações de Euler-Lagrange (2.34). Substituindo em (2.34) a equação (2.37) obtemos

$$(\tilde{x}^\mu,{}_A \mathbf{g}^{AB} \Lambda),_B + \Gamma_{\theta\rho}^\mu \tilde{x}^\theta,{}_A \tilde{x}^\rho,{}_B \mathbf{g}^{AB} \Lambda = 0$$

Desenvolvendo a derivada na primeira parcela temos

$$[(\tilde{x}^\mu,{}_A),_B \mathbf{g}^{AB} + \tilde{x}^\mu,{}_A (\mathbf{g}^{AB}),_B] + \Gamma_{\theta\rho}^\mu \tilde{x}^\theta,{}_A \tilde{x}^\rho,{}_B \mathbf{g}^{AB} = 0$$

Usando a equação (2.36) e o resultado (R 2.3) ficaremos com

$$\begin{aligned} & (\tilde{x}^\mu,{}_A),_B \mathbf{g}^{AB} - \left(\frac{1}{2} \mathbf{g}^{BC} \mathbf{g}_{BC} \right) \mathbf{g}^{AC} \Gamma_{BC}^B \tilde{x}^\mu,{}_A - \\ & - \left(\frac{1}{2} \mathbf{g}^{AC} \mathbf{g}_{AC} \right) \mathbf{g}^{BC} \Gamma_{BC}^A \tilde{x}^\mu,{}_A + \Gamma_{\theta\rho}^\mu \tilde{x}^\theta,{}_A \tilde{x}^\rho,{}_B \mathbf{g}^{AB} = 0 \end{aligned}$$

Daí temos que

$$[(\tilde{x}^\mu,{}_A),_B - \Gamma_{AB}^A \tilde{x}^\mu,{}_A] \mathbf{g}^{AB} + \Gamma_{\theta\rho}^\mu \tilde{x}^\theta,{}_A \tilde{x}^\rho,{}_B \mathbf{g}^{AB} = 0$$

Assim

$$(\tilde{x}^\mu,{}_A),_B \mathbf{g}^{AB} + \Gamma_{\theta\rho}^\mu \tilde{x}^\theta,{}_A \tilde{x}^\rho,{}_B \mathbf{g}^{AB} = 0 \quad (2.38)$$

Concluimos que (2.38) são as equações de Euler-Lagrange para a lagrangeana $\sqrt{g}$, então pelo teorema (2.1) temos que

$$\delta \left(\int_{\Sigma_2} \sqrt{g} dx^1 dx^2 \right) = 0$$

Para provarmos a recíproca basta fazermos a demonstração acima no sentido contrário.

Portanto os dois princípios variacionais são equivalentes. ■

Definição 2.2 Sejam $\bar{g}$ e g métricas sobre a subvariedade riemanniana S .

Chamamos $\bar{g}$ de *conformemente relacionada* a g se

$$\bar{g}_p = e^{2\lambda(p)} g_p$$

com $\lambda \in \mathcal{F}(V)$. Em termos das coordenadas temos

$$\bar{g}_{AB} = e^{2\lambda(p)} g_{AB}$$

Propriedade 2.1 As equações (2.34) são invariantes sob transformações conformes da métrica γ_{AB}

Prova: Sejam

$$\bar{\gamma}^{AB} = e^{2\lambda} \gamma^{AB} \quad (2.39)$$

e

$$\bar{\gamma} = e^{4\lambda} \gamma \quad (2.40)$$

com $\bar{\gamma}$ e γ os determinantes das matrizes $(\bar{\gamma}_{AB})$ e (γ_{AB}) respectivamente.

Consideremos a equação

$$(\bar{\gamma})^{-\frac{1}{2}} (\bar{\gamma}^{\frac{1}{2}} \tilde{x}^\mu{}_{,A} \bar{\gamma}^{AB})_{,B} + \Gamma_{\theta\rho}^\mu \tilde{x}^\theta{}_{,A} \tilde{x}^\rho{}_{,B} \bar{\gamma}^{AB} = 0$$

Substituindo nesta as equações (2.39) e (2.40) temos que

$$e^{2\lambda} \gamma^{-\frac{1}{2}} \left(e^{4\lambda} \gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{x}^\mu{}_{,A} \gamma^{AB} \right)_{,B} + e^{2\lambda} \Gamma_{\theta\rho}^\mu \tilde{x}^\theta{}_{,A} \tilde{x}^\rho{}_{,B} \gamma^{AB} = 0$$

Portanto

$$\gamma^{-\frac{1}{2}} \left(\gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{x}^\mu{}_{,A} \gamma^{AB} \right)_{,B} + \Gamma_{\theta\rho}^\mu \tilde{x}^\theta{}_{,A} \tilde{x}^\rho{}_{,B} \gamma^{AB} = 0 \quad (2.41)$$

■

Se $\{x^a\}$ for uma família de superfícies mínimas em V , podemos definir os vetores da seguinte forma

$$x^a(x) = x^a|_x \quad e \quad x^a(x) = x^a|_x \quad (2.42)$$

2.3 Superfícies Isotrópicas

Na equação (2.27) estão envolvidas expressões quadráticas em $\tilde{x}^\mu_{,A}$ que tornam sua solução trabalhosa. Nesta seção simplificaremos estas equações para obtermos uma interessante conexão entre as superfícies mínimas e a relatividade geral.

Chamamos S de *superfície isotrópica* se a métrica $\mathbf{g}$ satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{cases} \mathbf{g}_{uv} = 0, & \text{se } u = v \\ \mathbf{g}_{uv} \neq 0, & \text{se } u \neq v \end{cases} \quad (2.41)$$

com $u, v = 1, 2$ e $\{x^u\}$ de *sistema de coordenadas isotrópicas*.

Usando as coordenadas isotrópicas podemos escrever as equações (2.27) e (1.16) como seguem

$$(\tilde{x}^\beta_{,u})_{;v} + \Gamma_{\rho\theta}^\beta \tilde{x}^\rho_{,u} \tilde{x}^\theta_{,v} = 0 \quad (2.42)$$

$$(\tilde{x}^\beta_{,u})_{;v} = (\tilde{x}^\beta_{,u})_{,v} - \Gamma_{uv}^C \tilde{x}^\beta_{,C} \quad (2.43)$$

respectivamente, com $C = 1, 2$. Usando os símbolos de Christoffel (1.33) e as condições (2.41) obtemos

$$\Gamma_{uv}^C \tilde{x}^\beta_{,C} = 0$$

Substituindo este resultado em (2.43) temos

$$(\tilde{x}^\beta_{,u})_{;v} = (\tilde{x}^\beta_{,u})_{,v}$$

Assim as equações (2.42) serão dadas por

$$(\tilde{x}^\beta_{,u})_{,v} + \Gamma_{\rho\theta}^\beta \tilde{x}^\rho_{,u} \tilde{x}^\theta_{,v} = 0 \quad (2.44)$$

Se existe uma família de superfícies mínimas em V , podemos definir n vetores da seguinte forma

$$z^\beta(\tilde{x}) := \tilde{x}^\beta_{,u} \quad \text{e} \quad w^\beta(\tilde{x}) := \tilde{x}^\beta_{,v} \quad (2.45)$$

Logo escrevemos (2.44) nas seguintes formas

$$z^{\beta}_{,v} + \Gamma^{\beta}_{\rho\theta} z^{\rho} w^{\theta} = 0 \quad (2.46)$$

$$w^{\beta}_{,u} + \Gamma^{\beta}_{\rho\theta} z^{\rho} w^{\theta} = 0 \quad (2.47)$$

Façamos o seguinte cálculo

$$z^{\beta}_{,\theta} w^{\theta} = \left(\frac{\partial \tilde{x}^{\beta}}{\partial x^u} \right)_{,\theta} \frac{\partial \tilde{x}^{\theta}}{\partial x^v} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{\theta}} \left(\frac{\partial \tilde{x}^{\beta}}{\partial x^u} \right) \frac{\partial \tilde{x}^{\theta}}{\partial x^v}$$

Usando a regra da cadeia concluímos que

$$z^{\beta}_{,\theta} w^{\theta} = \frac{\partial}{\partial x^v} \left(\frac{\partial \tilde{x}^{\beta}}{\partial x^u} \right) = (\tilde{x}^{\beta}_{,u})_{,v} = z^{\beta}_{,v}$$

Substituindo em (2.46) obtemos

$$z^{\beta}_{,\theta} w^{\theta} + \Gamma^{\beta}_{\rho\theta} z^{\rho} w^{\theta} = 0$$

Assim

$$(z^{\beta}_{,\theta} + \Gamma^{\beta}_{\rho\theta} z^{\rho}) w^{\theta} = 0$$

Usando (1.15) temos que

$$z^{\beta}_{,\theta} w^{\theta} = 0 \quad (2.48)$$

De maneira análoga, podemos obter das equações (2.47) o seguinte resultado

$$w^{\beta}_{;\rho} z^{\rho} = 0 \quad (2.49)$$

Portanto escrevemos as equações de Euler-Lagrange (2.44) em termos das coordenadas isotrópicas na forma (2.48) ou (2.49).

Sendo V um espaço-tempo podemos resgatar toda teoria do formalismo tétrada. Para isto basta fazermos as seguintes identificações³

$$\mathbf{e}_u^{\alpha} = z^{\alpha} \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_v^{\beta} = w^{\beta} \quad (2.50)$$

³As letras gregas indicaram os índices tensoriais e u, v os índices tétradas.

Tomando a equação (1.58) podemos definir

$$z_\beta = e_{u\beta} = G_{\alpha\beta} e_u^\alpha \quad (2.51)$$

$$w_\alpha = e_{v\alpha} = G_{\alpha\beta} e_v^\beta \quad (2.52)$$

com $G_{\alpha\beta}$ a métrica de V .

Tendo em vista as equações (1.59) escrevemos

$$g_{uu} = e_u^\alpha e_{u\alpha} = z^\alpha z_\alpha$$

$$g_{vv} = e_v^\beta e_{v\beta} = w^\beta w_\beta$$

Pelas condições (2.41) concluímos que

$$z^\alpha z_\alpha = 0$$

$$w^\beta w_\beta = 0$$

Logo z^α e w^β são vetores nulos e podemos relacioná-los aos vetores nulos (1.65) do formalismo tétrada. Com isso temos uma interessante conexão entre as superfícies mínimas (2.48) e (2.49) e o formalismo de Newman-Penrose.

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi k \rho$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{B} = 4\pi k \vec{J}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$

(3.1)

com $\partial_t \vec{B} = \frac{d\vec{B}}{dt}$, $\vec{E}$ o campo elétrico, $\vec{B}$ o campo magnético, ρ a densidade volumétrica de corrente e k , k constantes. As equações (3.1) são conhecidas como lei de Coulomb, ausência de monopólo magnético, lei de Ampère e lei de Faraday respectivamente e descrevem a eletricidade e o magnetismo. Na lei de Ampère supõe-se que o movimento da corrente seja estacionário, isto é, toma-se a equação da continuidade

$$\frac{d\rho}{dt} - \nabla_x J(x) = 0,$$

com $\frac{d\rho}{dt} = 0$. Já na lei de Faraday usamos correntes não estacionárias. Com isso temos uma incompatibilidade entre as leis de Ampère e Faraday. Para resolver este problema, J. C. Maxwell em 1860 determinou um campo vetorial

Capítulo 3

Equações de Einstein-Maxwell para Fluidos Carregados

3.1 Tensor eletromagnético

Sejam as equações fundamentais do eletromagnetismo

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi k\rho \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = 4\pi \tilde{k} \vec{J} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \end{cases} \quad (3.1)$$

com $\partial_t \vec{B} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\vec{E}$ o campo elétrico, $\vec{B}$ o campo magnético, ρ a densidade volumétrica de corrente e $k, \tilde{k}$ constantes. As equações (3.1) são conhecidas como lei de Coulomb, ausência de monopólo magnético, lei de Ampère e lei de Faraday respectivamente e descrevem a eletricidade e o magnetismo. Na lei de Ampère supõe-se que o movimento da corrente seja estacionário, isto é, toma-se a equação da continuidade

$$\frac{d\rho}{dt} - \nabla_x J(x) = 0,$$

com $\frac{d\rho}{dt} = 0$. Já na lei de Faraday usamos correntes não estacionárias. Com isso temos uma incompatibilidade entre as leis de Ampère e Faraday. Para resolver este problema, J.C. Maxwell em 1860 determinou um campo vetorial

$\vec{D} = (\nabla\phi + \partial_t\vec{A})$, chamado de *vetor deslocamento* e dado por $\text{div } \vec{D} = \rho$, com $\vec{A}$ o *potencial vetor* e ϕ o *potencial escalar*. Assim podemos incluir a equação da continuidade na lei de Ampère sem considerar que a variação de ρ em relação ao tempo seja nula. Introduzindo o *vetor indução magnética* expresso pelo produto vetorial $\vec{H} = \nabla \times \vec{A}$, dado por $\vec{B} = 4\pi\bar{k}\vec{H}$, com $\bar{k}$ constante, obteremos $\text{div } \vec{H} = 0$. Reescrevemos as equações (3.1) da seguinte forma

$$\begin{cases} \text{div } \vec{D} = \rho \\ \text{div } \vec{H} = 0 \\ \text{rot } \vec{H} = \bar{k}\partial_t\vec{D} + \tilde{k}\vec{J} \\ \text{rot } \vec{D} = -k\partial_t\vec{H} \end{cases} \quad (3.2)$$

com k , $\bar{k}$ e $\tilde{k}$ constantes. Estas são equações vetoriais em $\mathbb{R}^3$ e são chamadas de *equações de Maxwell*.

Dividiremos as equações de Maxwell (3.2) em dois grupos:

(a) Equações não homogêneas

$$\begin{cases} \text{div } \vec{D} = \rho \\ \text{rot } \vec{H} = \bar{k}\partial_t\vec{D} + \tilde{k}\vec{J} \end{cases}$$

(b) Equações homogêneas

$$\begin{cases} \text{div } \vec{H} = 0 \\ \text{rot } \vec{D} = -k\partial_t\vec{H} \end{cases}$$

Em termos das coordenadas, $\vec{H}$ e $\vec{D}$ são escritos como

$$D_i = -\partial_i\phi - \partial_t A_i$$

$$H_i = \partial_j A_k - \partial_k A_j$$

com $i, j, k = 1, 2, 3$ e cíclicos. Definimos o quadrivetor potencial como

$$\vec{A} = (A^1, A^2, A^3, -\phi)$$

Seja a matriz

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & D_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & D_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & D_3 \\ -D_1 & -D_2 & -D_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

com $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ e $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$. Chamamos $(F_{\mu\nu})$ de *tensor covariante de Maxwell* (ou *tensor eletromagnético*)

Podemos escrever

$$D_i = F_{i4}$$

$$H_i = \varepsilon_{ijk} F_{jk}$$

com ε_{ijk} sendo o *símbolo de Levi-Civita* tridimensional, isto é ,

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & , \quad \text{se } i, j, k \text{ é permutação par de } \{1, 2, 3\}; \\ -1 & , \quad \text{se } i, j, k \text{ é permutação ímpar de } \{1, 2, 3\}; \\ 0 & , \quad \text{qualquer outro caso.} \end{cases} \quad (3.5)$$

Assim as equações de Maxwell, homogêneas e não homogêneas, podem ser escritas na forma

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \\ \varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

com $\varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma}$ o símbolo de Levi-Civita quadridimensional.

3.2 Tensor energia momentum

Suponhamos que temos uma distribuição de matéria, cuja velocidade v^μ , $\mu = 1, 2, 3, 4$, varia continuamente de um ponto para qualquer outro ponto de sua vizinhança. Temos o seguinte resultado:

$$\mathbf{R} \ 3.1 \quad v^\nu v^\mu_{;\alpha} = 0$$

Prova: Sabemos que

$$G_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = 1$$

Derivando covariantemente temos

$$(G_{\mu\nu}v^\mu v^\nu)_{;\alpha} = 0 \implies G_{\mu\nu}(v^\mu_{;\alpha}v^\nu + v^\mu v^\nu_{;\alpha}) = 0$$

Assim

$$2G_{\mu\nu}v^\nu v^\mu_{;\alpha} = 0$$

Com isso obtemos o resultado. ■

Introduzindo o campo escalar ρ , tal que o campo de vetores ρv^μ determina¹ $\rho v^4\sqrt{g}$ e $\rho v^a\sqrt{g}$, os quais são a densidade e fluxo de matéria respectivamente, com $a = 1, 2, 3$ e g o determinante do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ [10].

A condição para conservação da matéria é dada por

$$(\rho v^\mu)_{;\mu} = 0 \quad (3.5)$$

A matéria que estamos considerando tem densidade de energia $\rho v^4 v^4 \sqrt{g}$, fluxo de energia $\rho v^4 v^b \sqrt{g}$, densidade de *momentum* $\rho v^a v^4 \sqrt{g}$ e fluxo de *momentum* $\rho v^a v^b \sqrt{g}$, para $a, b = 1, 2, 3$.

Seja

$$T^{\mu\nu} = \rho v^\mu v^\nu$$

Assim $T^{\mu\nu}\sqrt{g}$ fornece a densidade e fluxo de energia e *momentum*. Chamamos $T^{\mu\nu}$ de *tensor energia momentum*, o qual é simétrico. Derivando-o covariantemente temos

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = (\rho v^\mu v^\nu)_{;\nu} = (\rho v^\nu)_{;\nu} v^\mu + \rho v^\nu v^\mu_{;\nu}$$

e usando (R 3.1) e a condição (3.5), concluímos que

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad (3.6)$$

As equações (3.6) são conhecidas como *princípio de conservação da energia e momentum*.

¹Analogamente como J^μ determina a densidade e fluxo de corrente elétrica.

3.3 Fluidos perfeitos

Iniciaremos com um importante preceito conhecido por *princípio copernicano*, ou seja, é a suposição de que não ocupamos uma posição privilegiada no espaço-tempo. Assim localmente podemos supor a existência de um único campo de vetores representando a velocidade média da matéria (ou alguma partícula composta de matéria) em cada ponto do espaço-tempo V . Definimos o *vetor velocidade média* (*4-velocidade* ou *quadri-velocidade*) por

$$u^\alpha u_\alpha = -1$$

Em termos das coordenadas locais a quadri-velocidade toma a forma

$$u^\alpha = \delta_\alpha^4$$

Uma divisão do espaço-tempo V em tempo e espaço é determinada, em cada ponto, por u^α .

Definimos o *tensor projeção* por

$$h_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta \quad (3.7)$$

com $G_{\alpha\beta}$ o tensor métrico de V e $h_{\alpha\beta}$ é a *métrica espacial* para observadores sem movimento e com a quadri-velocidade u^α . Assim podemos escrever o elemento de linha como

$$dS^2 = h_{ab} d\tilde{x}^a d\tilde{x}^b - dt^2$$

com $a, b = 1, 2, 3$ e t representando o tempo. Utilizaremos h^{ab} e u^α para decompor qualquer tensor nas partes espacial e temporal, em particular o tensor energia *momentum* $T_{\alpha\beta}$. Podemos escrever a seguinte decomposição do tensor energia *momentum*

$$T_{\alpha\beta} = \mu u_\alpha u_\beta + q_\beta u_\alpha + q_\alpha u_\beta + \pi_{\alpha\beta} + p h_{\alpha\beta} \quad (3.8)$$

com μ , q_β , $\pi_{\alpha\beta}$ e p representando a densidade de energia, fluxo de energia, pressão anisotrópica e pressão isotrópica respectivamente.

A derivada covariante é então decomposta em

$$(u_\alpha)_{;\beta} = \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\theta h_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} - \dot{u}_\alpha u_\beta \quad (3.9)$$

com $\sigma_{\alpha\beta}$, θ , $\omega_{\alpha\beta}$ e $\dot{u}_\alpha$ sendo o *shear*, expansão, vorticidade e vetor aceleração respectivamente, os quais são quantidades cinemáticas. Para compreender estes efeitos e quantidades fisicamente, consideremos uma esfera com fluido de partículas carregadas durante o transcorrer de um pequeno incremento do tempo próprio² $d\tau$, tomando $d\tau^2 = 0$ no centro da esfera, temos que:

- (a) a atuação de θ transforma uma esfera de fluido em uma similar esfera de volume diferente, mas com mesma orientação.
- (b) a atuação de $\sigma_{\alpha\beta}$ distorce a esfera, deixando seu volume constante e as direções dos eixos principais do *shear* inalteradas.
- (c) a atuação de ω_α dá uma rotação rígida, deixando uma direção (o eixo de rotação) fixado.

Dividiremos a equação de conservação de energia e *momentum* (3.6) em tempo e espaço, isto é ,

$$u_\alpha T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$$

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} h_{\alpha\nu} = 0$$

Usando as decomposições (3.8) e (3.9) teremos

$$\dot{\mu} + (\mu + p)\theta + \pi^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} + \dot{u}_\alpha q^\alpha + q_{;\alpha}^\alpha = 0 \quad (3.10)$$

$$(\mu + p)\dot{u}_\nu + h_\nu^\alpha(p_{;\beta} + (\pi_\beta^\alpha)_{;\alpha} + \dot{q}_\beta) + (\omega_\nu^\lambda + \sigma_\nu^\lambda + \frac{4}{3}\theta h_\nu^\lambda)q_\lambda = 0 \quad (3.11)$$

Um *fluido perfeito* é caracterizado pelo anulamento do fluxo de energia e da pressão anisotrópica, isto é ,

$$q_\alpha = \pi_{\alpha\beta} = 0$$

²O tempo próprio $d\tau$ é definido por $d\tau^2 = dx^2 - dt^2 = \eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ e é invariante sob transformações de Lorentz. Esta é uma propriedade fundamental da relatividade restrita [6].

Assim o tensor energia *momentum* para um fluido perfeito é dado por

$$T_{\alpha\beta} = \mu u_\alpha u_\beta + p h_{\alpha\beta} \quad (3.12)$$

As equações de conservação de energia e *momentum* para um fluido perfeito são escritas como

$$\dot{\mu} + (\mu + p)\theta = 0 \quad (3.13)$$

$$(\mu + p)\dot{u}_\nu + h_\nu^\alpha p_{;\alpha} = 0 \quad (3.14)$$

3.4 Vetor de Killing

Sejam (V, G) uma variedade pseudo-riemanniana n -dimensional, $X \in \mathcal{X}(V)$ e $\sigma(t, p_0)$ uma curva em V que passa por $p_0 \in V$, com $t \in I \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $\sigma(t, p_0)$ é uma *curva integral* de X , se o vetor tangente em $\sigma(t, p_0)$ é o próprio campo tensorial X . Neste caso denotaremos o campo vetorial por

$$\frac{d\sigma}{dt} = X|_\sigma$$

Em termos das coordenadas locais temos

$$\frac{d\tilde{x}^\mu}{dt} = X^\mu|_\sigma$$

Seja a aplicação $\sigma : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ chamada de *fluxo* gerado pelo campo vetorial X . O fluxo $\sigma(t, p)$ nos conta onde estará uma partícula em V no instante t , que passou pelo ponto p . Fixando $t \in \mathbb{R}$, o fluxo σ é um difeomorfismo, denotado por $\sigma_t : V \longrightarrow V$ e forma um grupo comutativo chamado *grupo das transformações de 1-parâmetro*. Fixando $p \in V$ a aplicação $\sigma_t(p) : \mathbb{R} \longrightarrow V$ é uma curva chamada *órbita* de σ_t . Desta forma associamos σ_t a um campo vetorial. Sob a atuação de σ_ϵ , sendo ϵ infinitesimal, podemos encontrar o ponto

$$\sigma_\epsilon(p) = \bar{p} = p + \epsilon X \quad (3.15)$$

e em termos das coordenadas locais temos

$$\bar{x}^\mu = \tilde{x}^\mu + \epsilon X^\mu \quad (3.16)$$



Com isso temos um deslocamento infinitesimal ϵX em p gerado por X . Se este deslocamento infinitesimal é uma isometria, X é chamado de *campo vetorial de Killing*.

Sendo σ_ϵ uma isometria e usando a equação (1.28) escrevemos

$$G_{\mu\nu}(p) = G_{\alpha\beta}(\sigma_\epsilon(p)) \partial_\mu(\tilde{x}^\alpha + \epsilon X^\alpha) \partial_\nu(\tilde{x}^\beta + \epsilon X^\beta) \quad (3.17)$$

Negligenciando os termos de segunda ordem em ϵ no desenvolvimento da equação (3.17) temos

$$G_{\mu\nu}(p) = G_{\alpha\beta}(\sigma_\epsilon(p)) (\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta + \epsilon \delta_\mu^\alpha \partial_\nu X^\beta + \epsilon \delta_\nu^\beta \partial_\mu X^\alpha) \quad (3.18)$$

Usando o teorema de Taylor para $G_{\mu\nu}$ no ponto $p + \epsilon X$ e negligenciando os termos maiores e iguais à segunda ordem em ϵ , obtemos

$$G_{\mu\nu}(p + \epsilon X) = G_{\mu\nu}(p) + \epsilon (\langle X, \nabla \rangle G_{\mu\nu})(p)$$

Sejam $X = (X^\mu)$ e $\nabla = (\partial_\mu)$, logo

$$G_{\mu\nu}(p + \epsilon X) = G_{\mu\nu}(p) + \epsilon X^\theta \partial_\theta G_{\mu\nu}(p) \quad (3.19)$$

Tendo em vista o ponto dado em (3.15), substituindo a equação (3.19) em (3.18) e negligenciando os termos de segunda ordem em ϵ , obtemos

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \epsilon G_{\mu\beta} \partial_\nu X^\beta + \epsilon G_{\alpha\nu} \partial_\mu X^\alpha + \epsilon X^\theta \partial_\theta G_{\mu\nu}$$

Concluimos que

$$G_{\mu\beta} \partial_\nu X^\beta + G_{\alpha\nu} \partial_\mu X^\alpha + X^\theta \partial_\theta G_{\mu\nu} = 0 \quad (3.20)$$

Esta equação é chamada de *equação de Killing*.

Podemos reescrever a equação de Killing (3.20) em termos das derivadas covariantes das componentes do campo vetorial X . Desenvolveremos as derivadas de $X_\mu = G_{\mu\nu} X^\nu$ da seguinte forma

$$\partial_\nu X_\mu = \partial_\nu (G_{\mu\beta} X^\beta) = X^\beta \partial_\nu G_{\mu\beta} + G_{\mu\beta} \partial_\nu X^\beta$$

$$\partial_\mu X_\nu = \partial_\mu (G_{\alpha\nu} X^\alpha) = X^\alpha \partial_\mu G_{\alpha\nu} + G_{\alpha\nu} \partial_\mu X^\alpha$$

Assim

$$G_{\mu\beta}\partial_\nu X^\beta = \partial_\nu X_\mu - X^\beta\partial_\nu G_{\mu\beta}$$

$$G_{\alpha\nu}\partial_\mu X^\alpha = \partial_\mu X_\nu - X^\alpha\partial_\mu G_{\alpha\nu}$$

Substituindo-as na equação (3.20) obtemos

$$\partial_\nu X_\mu + \partial_\mu X_\nu - X^\theta(\partial_\nu G_{\mu\theta} + \partial_\mu G_{\theta\nu} - \partial_\theta G_{\mu\nu}) = 0$$

Usando (1.33) obtemos

$$(\partial_\nu X_\mu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha X_\alpha) + (\partial_\mu X_\nu - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha X_\alpha) = 0$$

Aplicando-as na equação (1.16) podemos escrever a seguinte equação

$$(X_\mu)_{;\nu} + (X_\nu)_{;\mu} = 0 \quad (3.21)$$

Os vetores $X \in \mathcal{X}(\mathcal{V})$ que são soluções da equação (3.21) são chamados *vetores de Killing*.

A derivada de Lie do tensor métrico, com respeito ao campo de vetores $X \in T_p(V)$, pode ser escrita na forma [11]

$$(\mathcal{L}_X G)_{\mu\nu} = (X_\mu)_{;\nu} + (X_\nu)_{;\mu}$$

Pela equação (3.21) temos

$$(\mathcal{L}_X G)_{\mu\nu} = 0 \quad (3.22)$$

Assim a geometria local não mudará quando temos um movimento ao longo de σ_ϵ . Neste sentido os campos vetoriais de Killing representam as direções de simetrias de uma variedade pseudo-riemanniano n -dimensional.

Um espaço-tempo é chamado *estacionário* se existe um grupo de transformações de 1-parâmetro σ_t , onde as órbitas são curvas tipo tempo. Este grupo de isometrias expressa as “simetrias de translações do tempo” do espaço-tempo. Equivalentemente, um espaço-tempo é estacionário se possui um vetor de Killing tipo tempo, denotado por ξ^μ , ou seja,

$$\xi^\mu \xi_\mu < 0 \quad (3.23)$$

Um espaço-tempo é chamado de *estático* se é estacionário e existir uma hipersuperfície³ que é ortogonal às órbitas das isometrias.

Chamamos um espaço-tempo de *axialmente simétrico* se existe um grupo de transformações de 1-parâmetro de isometrias χ_κ , cujas órbitas são curvas fechadas tipo espaço. Isto implica na existência de um campo de vetores de Killing tipo espaço ψ^μ . O espaço-tempo é dito ser *axialmente simétrico estacionário* se σ_t e χ_κ comutam, ou seja,

$$\sigma_t \circ \chi_\kappa = \chi_\kappa \circ \sigma_t \quad (3.24)$$

Assim as rotações comutam com as translações. A condição (3.24) é equivalente à comutação dos campos vetoriais de Killing ξ^μ e ψ^μ .

A comutatividade de ξ^μ e ψ^μ implica que podemos escolher as coordenadas

$$(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3 = \kappa, \tilde{x}^4 = t) \quad (3.25)$$

para que ambas sejam coordenadas dos campos de vetores

$$\psi^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial \kappa} \right)^\mu \quad \xi^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\mu \quad (3.26)$$

3.5 Equações de campo de Einstein-Maxwell

Seja o espaço-tempo V e chamamos o tensor totalmente anti-simétrico do tipo $(0, 2)$, ou 2-forma, de *bivetor* dado por

$$X = X_{\mu\nu} d\tilde{x}^\mu \wedge d\tilde{x}^\nu \quad (3.27)$$

Definimos em termos dos índices o *bivetor dual*⁴ $\tilde{X}$ por

$$\tilde{X}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\theta\rho} X^{\theta\rho} \quad (3.28)$$

com $\varepsilon_{\mu\nu\theta\rho}$ sendo o símbolo de Levi-Civita quadridimensional. Definimos o *bivetor complexo*

$$X^*_{\mu\nu} = X_{\mu\nu} + i\tilde{X}_{\mu\nu} \quad (3.29)$$

³Genericamente, uma hipersuperfície é definida como sendo uma subvariedade de $(n-1)$ dimensões.

⁴Os conceitos de bivetor dual e base dual são diferentes.

O bivetor complexo $X_{\mu\nu}^*$ é auto-dual, isto é, $(X_{\mu\nu}^*)^\sim = -i\tilde{X}_{\mu\nu}$. Por esta razão o chamamos de *bivetor auto-dual complexo*. Definimos a projeção do bivetor auto-dual complexo sobre a quadri-velocidade u^ν por

$$X_\mu = X_{\mu\nu}^* u^\nu \quad (3.28)$$

Em virtude da ortogonalidade temos que

$$X_\mu u^\mu = 0$$

Consideremos que o espaço-tempo V admita campos vetoriais de Killing não nulos, assim

$$F \equiv \xi^\mu \xi_\mu \neq 0$$

Suponhamos que um fluido perfeito carregado tenha movimento constante e a quadri-velocidade u^μ paralela ao vetor de Killing tipo tempo ξ^μ

$$u^\mu \equiv (-F)^{-\frac{1}{2}} \xi^\mu \quad (3.29)$$

Suponhamos que a derivada de Lie do tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$ com respeito à ξ^μ seja nula,

$$\mathcal{L}_\xi F_{\mu\nu} = 0 \quad (3.30)$$

Usando (3.29) podemos escrever o tensor projeção (3.7) da seguinte forma

$$h_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - F^{-1} \xi_\mu \xi_\nu \quad (3.31)$$

com $G_{\mu\nu}$ a métrica do espaço-tempo.

Definimos $\phi_{,\mu}$ como sendo a projeção do bivetor auto-dual complexo eletromagnético $F_{\mu\nu}^*$ sobre o vetor de Killing tipo tempo ξ^ν , ou seja,

$$\phi_{,\mu} = \xi^\nu F_{\mu\nu}^* \quad (3.32)$$

Usando (3.27) obtemos

$$\phi_{,\mu} = \xi^\nu \left(F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} i \varepsilon_{\mu\nu\theta\rho} F^{\theta\rho} \right) \quad (3.33)$$

onde a vírgula denota a derivada parcial com respeito às coordenadas $\tilde{x}^\alpha$.

Chamamos ϕ de *potencial eletromagnético complexo*.

Seja o bivector auto-dual complexo $K_{\mu\nu}^*$ definido por [1]

$$K_{\mu\nu}^* = -2(\xi_\mu^*)_{;\nu} - \chi_0 \bar{\phi} F_{\mu\nu}^* \quad (3.34)$$

onde $\bar{\phi}$ denota o complexo conjugado de ϕ e χ_0 é a constante gravitacional.

Definimos $\Theta_{,\nu}$ como sendo a projeção do bivector auto-dual complexo $K_{\mu\nu}^*$ sobre o vetor de Killing tipo tempo ξ^ν , isto é ,

$$\Theta_{,\nu} = \xi^\mu K_{\mu\nu}^*$$

Logo

$$\begin{aligned} \Theta_{,\nu} &= \xi^\mu [-2(\xi_\mu^*)_{;\nu} - \chi_0 \bar{\phi} F_{\mu\nu}^*] \\ &= -2\xi^\mu (\xi_\mu^*)_{;\nu} - \chi_0 \bar{\phi} \xi^\mu F_{\mu\nu}^* \end{aligned}$$

Substituindo a equação (3.32) teremos

$$\Theta_{,\nu} = -2\xi^\mu (\xi_\mu^*)_{;\nu} - \chi_0 \bar{\phi} \phi_{,\nu} \quad (3.35)$$

Usando as definições (3.26) e (3.27) obtemos

$$(\xi_\mu^*)_{;\nu} = (\xi_\mu)_{,\nu} + \frac{1}{2} i \varepsilon_{\mu\nu\theta\rho} (\xi^\theta)^{;\rho} \quad (3.36)$$

Substituindo a equação (3.36) em (3.35) produzimos

$$\Theta_{,\nu} = -2\xi^\mu \left[(\xi_\mu)_{,\nu} + \frac{1}{2} i \varepsilon_{\mu\nu\theta\rho} (\xi^\theta)^{;\rho} \right] - \chi_0 \bar{\phi} \phi_{,\nu} \quad (3.37)$$

onde a vírgula e o ponto e vírgula denotam as derivadas parciais e covariantes, respectivamente, com respeito às coordenadas $\tilde{x}^\alpha$. Chamamos Θ de *potencial gravitacional complexo*, o qual é também conhecido por *potencial de Ernst*.

Sejam as seguintes equações [1]

$$F = -\xi^\alpha \xi_\alpha = \frac{1}{2} (\Theta + \bar{\Theta} + \chi_0 \bar{\phi} \phi) \quad (3.38)$$

e

$$\chi = \frac{1}{2} (\phi + \bar{\phi}) \quad (3.39)$$

Podemos associar um sistema de coordenadas ortonormais x^μ em cada ponto p de uma curva κ no espaço-tempo V que é chamado de *referencial móvel*⁵. Neste caso as coordenadas se movem com a partícula sobre a curva.

Associaremos a quadri-velocidade u^μ ao referencial móvel de tal forma que $u^4 = x^4 = t$. Como a quadri-velocidade é paralela ao vetor de Killing tipo tempo temos que $\xi^\mu = (-F)^{\frac{1}{2}} \delta_4^\mu$, com δ_ν^μ sendo o símbolo de Kronecker. Esta transformação de coordenadas ($\tilde{x} \rightarrow x$) garante que todos os campos dependem somente das coordenadas espaciais x^a , $a = 1, 2, 3$. O elemento de linha do espaço-tempo toma a forma [1]

$$dS^2 = F^{-1} h_{ab} dx^a dx^b - F(dt + F^{-\frac{1}{2}} \xi_a dx^a) \quad (3.40)$$

Seja a métrica (3.31) no referencial móvel

$$h_{ab} = G_{ab} - F^{-1} \xi_a \xi_b$$

Introduzimos o potencial escalar φ^μ , $\mu = 1, \dots, n$, tal que as equações de Euler-Lagrange são exatamente as equações de campo de um princípio variacional com a lagrangeana dada na forma [1]

$$L = \sqrt{h} (R + g_{\mu\nu} (\varphi^{\cdot 3}) h^{ab} \varphi_{,a}^\mu \varphi_{,b}^\nu) \quad (3.41)$$

com h e R sendo o determinante e o escalar de curvatura com respeito à h_{ab} respectivamente e $g_{\mu\nu}$ o tensor métrico de um espaço riemanniano n -dimensional e chamado de *espaço potencial n -dimensional* de coordenadas⁶ φ^i , cujo elemento de linha será [1]

$$dS^2 = g(\varphi^\beta) d\varphi^\mu d\varphi^\nu \quad (3.42)$$

As equações de Einstein e de Einstein-Maxwell para campos estacionários são encontradas em [1].

⁵Análogo ao *triedro móvel* do espaço euclidiano E^3 .

⁶A definição do espaço potencial é análoga ao *espaço de fase* estudado na mecânica clássica.

Teorema 3.1 Para equações de campos de Einstein-Maxwell de um fluido perfeito sem carga, existe um conjunto $(\phi, \Theta, \mathbf{h}_{ab})$, tal que estas equações seguem de um princípio variacional com a lagrangeana dada por [1]

$$L = \sqrt{h} \left[R + \frac{1}{2} F^{-2} \mathbf{h}^{ab} (\Theta_{,a} + \chi_0 \bar{\phi} \phi_{,a}) (\Theta_{,b} + \chi_0 \bar{\phi} \phi_{,b}) - \chi_0 F^{-1} \mathbf{h}^{ab} \phi_{,a} \bar{\phi}_{,b} \right] \quad (3.43)$$

As equações de campo de Einstein-Maxwell para um fluido perfeito carregado seguem do princípio variacional tridimensional [3]

$$\delta \left(\int_{\Sigma_3} L_3 dx^1 dx^2 dx^3 \right) = 0 \quad (3.44)$$

com a lagrangeana tridimensional dada por

$$L_3 = \sqrt{h_3} \left[R_3 + \frac{1}{2} F^{-2} \mathbf{h}^{ab} (\Theta_{,a} + \chi_0 \bar{\phi} \phi_{,a}) (\Theta_{,b} + \chi_0 \bar{\phi} \phi_{,b}) - \chi_0 F^{-1} \mathbf{h}^{ab} \phi_{,a} \bar{\phi}_{,b} - 2\chi_0 F^{-1} p(F, \chi) \right] \quad (3.45)$$

com Σ_3 sendo uma região tridimensional de um espaço riemanniano n -dimensional, $p = p(F, \chi)$ a pressão hidroestática, R o escalar de curvatura e h_3 o determinante com respeito à métrica tridimensional $\mathbf{h}_{ab}$. A pressão hidroestática $p = p(F, \chi)$ é um potencial (termodinâmica) nas variáveis F e χ , isto é, contém informações completas do estado hidrodinâmico do fluido carregado. Usando as equações de conservação de energia e *momentum* para um fluido perfeito carregado, obteremos as seguintes equações de estado

$$\begin{cases} \mu = \mu(F, \chi) = -p - 2F \frac{\partial p}{\partial F} \\ \sigma = \sigma(F, \chi) = F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial p}{\partial \chi} \end{cases} \quad (3.46)$$

com μ e σ sendo as densidades de energia e de carga respectivamente. Medindo experimentalmente as equações de estado $\mu = \mu(F, \chi)$ e $\sigma = \sigma(F, \chi)$, obtemos $p = p(F, \chi)$ pela integração das equações (3.46).

sendo os coeficientes métricos $F = F(x^1, x^2)$, $h_{AB} = h_{AB}(x^1, x^2)$ e $\omega = \omega(x^1, x^2)$ independentes das coordenadas $x^3 = \kappa$ e $x^4 = t$.

Comparando os elementos da linha (3.40) e (4.1) temos a seguinte matriz simétrica

Capítulo 4

Campos de Einstein-Maxwell como superfícies mínimas

4.1 Redução da lagrangeana tridimensional para uma lagrangeana bidimensional

Seja o princípio variacional (3.44) para um fluido perfeito carregado com a lagrangeana L_3 dada pela equação (3.45) e Σ_3 uma região tridimensional num espaço riemanniano n -dimensional.

Obteremos a lagrangeana bidimensional L_2 a partir de L_3 e a relacionaremos com a lagrangeana Λ dada pela equação (2.29).

Suponhamos que o fluido perfeito carregado esteja rotacionando rigidamente com simetria em uma das coordenadas espaciais do referencial móvel, por exemplo, $x^3 = \kappa$. Esta simetria adicional pode ser descrita pelo vetor de Killing tipo espaço ψ^a e tendo assim que $\psi^a = \delta_3^a$, $a = 1, 2, 3$. Os potenciais Θ e ϕ independem da coordenada $x^3 = \kappa$. Se as translações comutam com as rotações, isto é, os campos vetoriais de Killing ξ^μ e ψ^μ comutam, então, pela condição (3.24), V é um espaço-tempo axialmente simétrico estacionário. O elemento de linha (3.40) nas coordenadas x^1 e x^2 do referencial móvel toma a forma (Lewis 1932, Papapetrou 1953)

$$dS^2 = F^{-1}(h_{AB}dx^A dx^B + W^2 d\kappa^2) - F(dt + \omega d\kappa)^2 \quad (4.1)$$

sendo os coeficientes métricos $F = F(x^1, x^2)$, h_{AB} , $W = W(x^1, x^2)$ e $\omega = \omega(x^1, x^2)$ independentes das coordenadas ¹ $x^3 = \kappa$ e $x^4 = t$.

Comparando os elementos de linha (3.40) e (4.1) temos a seguinte matriz simétrica

$$(h_{ab}) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & 0 \\ h_{21} & h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & h_{33} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Com

$$W = h_{33}^{\frac{1}{2}} \quad (4.2)$$

e

$$F\omega^2 = F^{-1}(\xi_3)^2 \implies \omega = F^{-1}\xi_3$$

Assim temos

$$h_3 = h_{33}h_2$$

Denotando por h_3 e h_2 os determinantes das matrizes (h_{ab}) e (h_{AB}) respectivamente e utilizando a relação (4.2) obtemos

$$h_3 = h_{33}h_2 \implies h_3 = W^2h_2 \quad (4.3)$$

Na lagrangeana L_3 temos o escalar de curvatura R_3 , com respeito à métrica h_{ab} , e o estudaremos considerando a simetria adicional $x^3 = \kappa$.

R 4.1 Escrevemos as componentes do tensor de Ricci na forma

$$2R_{cb} = R_{cab}^a - R_{cba}^a$$

Prova: Considerando $\omega \in \wedge^2(T_p(V))^*$ e usando a expressão (1.5), temos que

$$\omega = \frac{1}{2}(\omega_{ab} - \omega_{ba})dx^a \wedge dx^b$$

¹Consideramos os índices latinos minúsculos de 1 até 3 e os latinos maiúsculos de 1 até 2.

Em particular, escrevemos

$$\mathbf{R}_c^a = \frac{1}{2}(\mathbf{R}_{cab}^a - \mathbf{R}_{cba}^a) dx^a \wedge dx^b \quad (4.4)$$

Usando a propriedade (1.38) do tensor de Riemann, obtemos

$$\mathbf{R}_c^a = \mathbf{R}_{cb} dx^a \wedge dx^b \quad (4.5)$$

Substituindo a equação (4.5) na (4.4), temos

$$[\mathbf{R}_{cb} - \frac{1}{2}(\mathbf{R}_{cab}^a - \mathbf{R}_{cba}^a)] dx^a \wedge dx^b = 0$$

Como $\{dx^a \wedge dx^b\}$ é uma base de $\bigwedge^2(T_p(V))^*$, concluímos o resultado.

■

Escrevemos o escalar de curvatura tridimensional como segue

$$R_3 = h^{cb} \mathbf{R}_{cb} \implies 2R_3 = h^{cb} 2\mathbf{R}_{cb}$$

Usando o resultado (R 4.1), ficamos com

$$2R_3 = h^{cb} \mathbf{R}_{cab}^a - h^{cb} \mathbf{R}_{cba}^a$$

Expandindo-a obtemos

$$\begin{aligned} 2R_3 &= [(h^{CB} \mathbf{R}_{CAB}^A + h^{CB} \mathbf{R}_{C3B}^3) + (h^{33} \mathbf{R}_{3A3}^A + h^{33} \mathbf{R}_{333}^3)] - \\ &- [(h^{CB} \mathbf{R}_{CBA}^A + h^{CB} \mathbf{R}_{CB3}^3) + (h^{33} \mathbf{R}_{33A}^A + h^{33} \mathbf{R}_{333}^3)] \end{aligned}$$

Usando a propriedade (1.38) do tensor de Riemann, teremos

$$R_3 = h^{CB} \mathbf{R}_{CB} + h^{CB} \mathbf{R}_{C3B}^3 + h^{33} \mathbf{R}_{33} \quad (4.6)$$

com (h^{AB}) a inversa da matriz (h_{AB}) .

Desenvolveremos a equação (4.6) por partes e para isso necessitaremos dos resultados abaixo, considerando a matriz (h^{ab}) a inversa da matriz (h_{ab}) e a equação (4.3).

$$h^{33} = \frac{h_2}{h_3} = W^{-2} \quad (4.7)$$

$$\Gamma_{3B}^A = 0 \quad (4.8)$$

$$\Gamma_{33}^A = -WW^{,A} \quad (4.9)$$

$$\Gamma_{3A}^3 = W^{-1}W_{,A} \quad (4.10)$$

$$\Gamma_{33}^3 = 0 \quad (4.11)$$

$$(\Gamma_{a3}^a)_{,3} = 0 \quad (4.12)$$

$$(\Gamma_{33}^a)_{,a} = (\Gamma_{33}^A)_{,A} = -W_{,A}W^{,A} - WW_{,A}^{,A} \quad (4.13)$$

$$(\Gamma_{3A}^3)_{,B} = W^{-1}[-W^{-1}W_{,B}W_{,A} + (W_{,A})_{,B}] \quad (4.14)$$

R 4.2 $h^{CB}R_{CB} = -2K$ sendo K a curvatura gaussiana.

Prova: Seja o escalar de curvatura, com respeito à métrica h_{CB} ,

$$R_2 \equiv h^{CB}R_{CB}$$

Assim

$$R_2 = h^{CB}h^{AD}R_{CADB} \quad (4.15)$$

Usando as propriedades (1.38) e (1.39) do tensor de Riemann, obtemos as seguintes componentes

$$\begin{cases} R_{1221} = -R_{1212} \\ R_{2121} = R_{1212} \\ R_{2112} = -R_{1212} \end{cases} \quad (4.16)$$

com R_{1212} sendo a única componente independente. Substituindo as componentes (4.16) no desenvolvimento da equação (4.15) temos

$$R_2 = -2(h^{11}h^{22} - h^{12}h^{21})R_{1212} = -2\frac{R_{1212}}{h_2} \quad (4.17)$$

Definimos a *curvatura gaussiana* por [9]

$$K = \frac{R_{1212}}{h_2}$$

e a substituindo na equação (4.17), concluímos o resultado. ■

$$\mathbf{R 4.3} \quad h^{CB} \mathbf{R}_{C3B}^3 = W^{-1} W_{;B}^{,B}$$

Prova:

$$h^{CB} \mathbf{R}_{C3B}^3 = h^{CB} [(\Gamma_{C3}^3)_{,B} - (\Gamma_{CB}^3)_{,3} + \Gamma_{3C}^d \Gamma_{Bd}^3 - \Gamma_{BC}^d \Gamma_{3d}^3] \quad (4.18)$$

Escrevemos a seguinte expressão

$$\Gamma_{3C}^d \Gamma_{Bd}^3 - \Gamma_{BC}^d \Gamma_{3d}^3 = (\Gamma_{3C}^A \Gamma_{BA}^3 + \Gamma_{3C}^3 \Gamma_{B3}^3) - (\Gamma_{BC}^A \Gamma_{3A}^3 + \Gamma_{BC}^3 \Gamma_{33}^3)$$

Usando os resultados (4.8), (4.10) e (4.11) produzimos

$$\Gamma_{3C}^d \Gamma_{Bd}^3 - \Gamma_{BC}^d \Gamma_{3d}^3 = W^{-1} (W^{-1} W_{,B} W_{,C} - \Gamma_{BC}^A W_{,A}) \quad (4.19)$$

Substituindo a expressão (4.19) em (4.18) e usando os resultados (4.12) e (4.14), temos

$$h^{CB} \mathbf{R}_{C3B}^3 = h^{CB} [W^{-1} (-W^{-1} W_{,B} W_{,C} + (W_{,C})_{,B}) + W^{-1} (W_{,B} W_{,C} - \Gamma_{BC}^A W_{,A})]$$

Assim

$$h^{CB} \mathbf{R}_{C3B}^3 = h^{CB} [W^{-1} ((W_{,C})_{,B} - \Gamma_{BC}^A W_{,A})]$$

Usando a derivada covariante (1.16), concluimos facilmente o resultado. ■

$$\mathbf{R 4.4} \quad h^{33} \mathbf{R}_{33} = W^{-1} W_{;A}^{,A}$$

Prova:

$$h^{33} \mathbf{R}_{33} = h^{33} [(\Gamma_{a3}^a)_{,3} - (\Gamma_{33}^a)_{,a} + \Gamma_{3f}^a \Gamma_{a3}^f - \Gamma_{af}^a \Gamma_{33}^f] \quad (4.20)$$

Escrevemos as seguintes expressões

$$\Gamma_{3f}^a \Gamma_{a3}^f = \Gamma_{3B}^A \Gamma_{A3}^B + \Gamma_{33}^A \Gamma_{A3}^3 + \Gamma_{3B}^3 \Gamma_{33}^B + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{33}^3 \quad (4.21)$$

e

$$\Gamma_{af}^a \Gamma_{33}^f = \Gamma_{AB}^A \Gamma_{33}^B + \Gamma_{A3}^A \Gamma_{33}^3 + \Gamma_{3B}^3 \Gamma_{33}^B + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{33}^3 \quad (4.22)$$

Subtraindo a expressão (4.21) da (4.22) temos

$$\Gamma_{3f}^a \Gamma_{a3}^f - \Gamma_{af}^a \Gamma_{33}^f = \Gamma_{AB}^A \Gamma_{33}^B + \Gamma_{A3}^A \Gamma_{33}^3 - \Gamma_{AB}^A \Gamma_{33}^B - \Gamma_{A3}^A \Gamma_{33}^3 \quad (4.23)$$

Substituindo os resultados (4.8), (4.9), (4.10) e (4.11) na expressão (4.23) obtemos

$$\Gamma_{3f}^a \Gamma_{a3}^f - \Gamma_{af}^a \Gamma_{33}^f = -W_{,A}^A W_{,A} + W \Gamma_{AB}^A W^{,B} \quad (4.24)$$

Substituindo os resultados (4.7), (4.12), (4.13) e (4.24) na equação (4.20) produzimos

$$h^{33} R_{33} = W^{-1} (W_{,A}^A + \Gamma_{AB}^A W^{,B}) \quad (4.25)$$

Usando a derivada covariante (1.15), concluímos o resultado. ■

Substituindo os resultados (R 4.2), (R 4.3) e (R 4.4) na equação (4.6), obtemos

$$R_3 = -2K + 2W^{-1} W_{,A}^A \quad (4.26)$$

Introduzimos a seguinte notação

$$e^{-2\alpha} = W_{,A} W_{,B} h^{AB} = W_{,A} W^{,A} \quad (4.27)$$

Assim

$$e^{2\alpha} W_{,A} W_{,B} h^{AB} = 1 \quad (4.28)$$

Introduzindo a relação [3]

$$K = -\alpha_{,A}^A - (e^{2\alpha} W_{,B}^B W^{,A})_{,A} \quad (4.29)$$

Substituindo a equação (4.29) em (4.26) e esta multiplicada por $\sqrt{h_3}$ obtemos

$$\sqrt{h_3} R_3 = 2\sqrt{h_3} [\alpha_{,A}^A - (e^{2\alpha} W_{,B}^B W^{,A})_{,A} + W^{-1} W_{,A}^A] \quad (4.30)$$

Usando (4.3) no segundo membro ficamos com

$$\sqrt{h_3}R_3 = \sqrt{h_2}[2W\alpha_{;A}^A + 2W(e^{2\alpha}W_{;B}^BW^{,A})_{;A} + 2W_{;A}^A] \quad (4.30)$$

Definimos a seguinte quantidade

$$D^A = 2(W\alpha^{,A} + W e^{2\alpha}W_{;B}^BW^{,A})$$

Calculando a derivada covariante de D^A e tendo em vista a equação (4.30) produzimos

$$2W\alpha_{;A}^A + 2W(e^{2\alpha}W_{;B}^BW^{,A})_{;A} = D_{;A}^A - 2W_{;A}\alpha^{,A} - 2W_{;A}(e^{2\alpha}W_{;B}^BW^{,A})$$

Substituindo-a na equação (4.30) obtemos

$$\sqrt{h_3}R_3 = \sqrt{h_2}[2W_{;A}^A + D_{;A}^A - 2W_{;A}(e^{2\alpha}W_{;B}^BW^{,A}) - 2W_{;A}\alpha^{,A}] \quad (4.31)$$

Substituindo a equação (4.28) na primeira parcela do segundo membro da (4.31) ficamos com

$$\sqrt{h_3}R_3 = \sqrt{h_2}[2e^{2\alpha}W_{;B}^BW^{,B}W_{;A}^AW^{,A} + D_{;A}^A - 2W_{;A}(e^{2\alpha}W_{;B}^BW^{,A}) - 2W_{;A}\alpha^{,A}]$$

Como $W = W(x^1, x^2)$ é uma função escalar, assim $W_{;A} = W_{,A}$. Portanto

$$\sqrt{h_3}R_3 = \sqrt{h_2}D_{;A}^A - \sqrt{h_2}2W_{,A}\alpha^{,A}$$

Se negligenciarmos a divergência $\sqrt{h_2}D_{;A}^A$ concluímos que

$$\sqrt{h_3}R_3 = -2\sqrt{h_2}W_{,A}\alpha_{,B}h^{AB} \quad (4.32)$$

Como todos os campos independem da coordenada x^3 , escrevemos a lagrangeana (3.45) como

$$L_2 = \sqrt{h_3}R_3 + \sqrt{h_3} \left[\frac{1}{2}F^{-2}h^{AB}(\Theta_{,A} + \chi_0\bar{\phi}\phi_{,A})(\Theta_{,B} + \chi_0\phi\bar{\phi}_{,B}) - \chi_0F^{-1}h^{AB}\phi_{,A}\bar{\phi}_{,B} - 2\chi_0F^{-1}p(F, \chi) \right] \quad (4.33)$$

Substituindo os resultados (4.3) e (4.32) na equação (4.33) e multiplicando-a por (4.28) na última parcela, obtemos

$$\begin{aligned} L_2 = & -2\sqrt{h_2}h^{AB}W_{,A}\alpha_{,B} \\ & + W\sqrt{h_2} \left[\frac{1}{2}F^{-2}h^{AB}(\Theta_{,A} + \chi_0\bar{\phi}\phi_{,A})(\Theta_{,B} + \chi_0\phi\bar{\phi}_{,B}) \right. \\ & \left. - \chi_0F^{-1}h^{AB}\phi_{,A}\bar{\phi}_{,B} - 2\chi_0F^{-1}p(F, \chi)e^{2\alpha}h^{AB}W_{,A}W_{,B} \right] \end{aligned} \quad (4.34)$$

com L_2 sendo a lagrangeana bidimensional. Concluimos que

$$L_2 = \sqrt{h_2} h^{AB} \left[-2\alpha_{,A} W_{,B} + \frac{1}{2} W F^{-2} (\Theta_{,A} + \chi_0 \bar{\phi} \phi_{,A}) (\bar{\Theta}_{,A} + \chi_0 \phi \bar{\phi}_{,B}) - \chi_0 W F^{-1} \phi_{,A} \bar{\phi}_{,B} - 2\chi_0 W F^{-1} p \epsilon^{2\alpha} W_{,A} W_{,B} \right] \quad (4.35)$$

Assim reduzimos a lagrangeana L_3 para L_2 , usando a simetria adicional $x^3 = \kappa$. Portanto, as equações de campo de Einstein-Maxwell para um fluido perfeito carregado simetricamente rotacionando rigidamente seguem do princípio variacional

$$\delta \left(\int_{\Sigma_2} L_2 dx^1 dx^2 \right) = 0 \quad (4.36)$$

com a lagrangeana bidimensional L_2 e Σ_2 uma região bidimensional de um espaço riemanniano n -dimensional.

4.2 Campos estacionários axialmente simétricos tipo vácuo como superfícies mínimas

Relacionaremos as duas teorias observando as lagrangeanas L_2 e Λ .

Sabemos que os campos W , Θ , $\bar{\Theta}$, ϕ e $\bar{\phi}$ dependem das coordenadas x^1 e x^2 do referencial móvel. Na equação (4.27) temos que α depende somente de h_{AB} e $W_{,A}$, assim podemos considerá-lo como um campo também dependente das coordenadas x^1 e x^2 .

Como vimos no final da seção 3.5, definimos o *espaço riemanniano 6-dimensional* de métrica $g_{\mu\nu}$ e coordenadas $(\varphi^\mu) = (\alpha, W, \Theta, \bar{\Theta}, \phi, \bar{\phi})$. Desta maneira, as equações de campo de Einstein-Maxwell para um fluido perfeito carregado simetricamente rotacionando rigidamente seguem do princípio variacional (4.36) com a lagrangeana (4.35) e Σ_2 uma região bidimensional do espaço riemanniano 6-dimensional.

Expandindo a lagrangeana bidimensional obtemos

$$\begin{aligned}
 L_2 = & \sqrt{h_2} h^{AB} \left[(-2)\alpha_{,A} W_{,B} + \left(\frac{1}{2} W F^{-2} \right) \Theta_{,A} \bar{\Theta}_{,B} + \right. \\
 & + \left(\frac{1}{2} W F^{-2} \chi_0 \phi \right) \Theta_{,A} \bar{\phi}_{,B} + \left(\frac{1}{2} W F^{-2} \chi_0 \bar{\phi} \right) \phi_{,A} \bar{\Theta}_{,B} + \\
 & + \left(\frac{1}{2} W F^{-2} \chi_0^2 \phi \bar{\phi} \right) \phi_{,A} \bar{\phi}_{,B} - (\chi_0 W F^{-1}) \phi_{,A} \bar{\phi}_{,B} - \\
 & \left. - (2\chi_0 W F^{-1} p e^{2\alpha}) W_{,A} W_{,B} \right] \quad (4.37)
 \end{aligned}$$

Temos que L_2 é um caso particular da lagrangeana (3.41), devido a simetria adicional $x^3 = \kappa$. As componentes do tensor métrico do espaço riemanniano 6-dimensional são dadas por

$$\begin{cases}
 g_{12} = -2 \\
 g_{22} = -2\chi_0 W F^{-1} p e^{2\alpha} \\
 g_{34} = \frac{1}{2} W F^{-2} \\
 g_{36} = \frac{1}{2} W F^{-2} \chi_0 \phi \\
 g_{45} = \frac{1}{2} W F^{-2} \chi_0 \bar{\phi} \\
 g_{56} = \frac{1}{2} W F^{-2} \chi_0^2 \phi \bar{\phi} - \chi_0 W F^{-1}
 \end{cases}$$

Escrevemos a lagrangeana (4.37) como

$$\begin{aligned}
 L_2 = & \sqrt{h_2} h^{AB} (g_{12} \varphi^1_{,A} \varphi^2_{,B} + g_{22} \varphi^2_{,A} \varphi^2_{,B} + g_{34} \varphi^3_{,A} \varphi^4_{,B} \\
 & + g_{36} \varphi^3_{,A} \varphi^6_{,B} + g_{45} \varphi^4_{,A} \varphi^5_{,B} + g_{56} \varphi^5_{,A} \varphi^6_{,B}) \quad (4.38)
 \end{aligned}$$

Retomando o princípio variacional (2.28)

$$\delta \left(\int_{\Sigma_2} \Lambda dx^1 dx^2 \right) = 0 \quad (4.39)$$

com Σ_2 uma região bidimensional de um espaço riemanniano 6-dimensional.

A lagrangeana (2.29) será escrita como

$$\Lambda = \gamma^{\frac{1}{2}} \gamma^{AB} g_{\mu\nu} \varphi^\mu_{,A} \varphi^\nu_{,B} \quad (4.40)$$

com $\mu, \nu = 1, \dots, 6$ e $A, B = 1, 2$.

Pelo lema (2.1) temos que os princípios variacionais (4.39) e

$$\delta \left(\int_{\Sigma_2} \sqrt{g} dx^1 dx^2 \right) = 0 \quad (4.41)$$

são equivalentes. Usando a definição (2.1), a superfície S mergulhada no espaço riemanniano 6-dimensional é mínima. Portanto, temos que as equações de Euler-Lagrange provêm do princípio variacional (4.41), com a lagrangeana $\sqrt{g}$ e Σ_2 a região de uma superfície mínima S mergulhada no espaço riemanniano 6-dimensional.

Se $h_{AB} = \gamma_{AB}$, então a lagrangeana bidimensional (4.38) é um caso particular da lagrangeana (4.40). Considerando a lagrangeana (4.38) no princípio variacional bidimensional (4.39) concluímos:

Teorema 4.1 *As equações de campo de Einstein-Maxwell para qualquer fluido perfeito carregado simetricamente rotacionando rigidamente são equivalentes às equações de Euler-Lagrange para uma superfície mínima no espaço riemanniano 6-dimensional.*

Escrevemos o elemento de linha do espaço riemanniano 6-dimensional como segue

$$dS^2 = g_{12}d\varphi^1d\varphi^2 + g_{22}d\varphi^2d\varphi^2 + g_{34}d\varphi^3d\varphi^4 + g_{36}d\varphi^3d\varphi^6 + \\ + g_{45}d\varphi^4d\varphi^5 + g_{56}d\varphi^5d\varphi^6$$

Logo

$$dS^2 = (-2)d\alpha dW - (-2\chi_0 W F^{-1} p e^{2\alpha})dW^2 + \left(\frac{1}{2}W F^{-2}\right) d\Theta d\bar{\Theta} + \\ + \left(\frac{1}{2}W F^{-2}\chi_0\phi\right) d\Theta d\bar{\phi} + \left(\frac{1}{2}W F^{-2}\chi_0\phi\right) d\bar{\Theta} d\phi + \\ + \left(\frac{1}{2}W F^{-2}\chi_0^2\phi\bar{\phi}\right) d\phi d\bar{\phi} - (\chi_0 W F^{-1})d\phi d\bar{\phi} \quad (4.42)$$

Sabemos que $|z_1|^2 = z_1\bar{z}_1$, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ e $\overline{\bar{z}_1} = z_1$, para todo z_1 e z_2 complexos, onde a barra denota o complexo conjugado. Escrevemos (4.42) na forma simplificada

$$dS^2 = -2d\alpha dW + \frac{1}{2}W F^{-2} |d\Theta + \chi_0\bar{\phi}d\phi|^2 - \chi_0 W F^{-1} |d\phi|^2 - \\ - 2\chi_0 W F^{-1} p e^{2\alpha} dW^2 \quad (4.43)$$

Conclusão

No capítulo 2, através das equações (2.48) e (2.49), escrevemos as equações de Euler-Lagrange em termos das coordenadas isotrópicas. Obtivemos assim uma interessante conexão entre superfícies mínimas e o formalismo de Newman-Penrose.

Consideramos, na seção 3.5, que o espaço-tempo V admitia campos vectoriais de Killing não nulos. Supomos que o fluido perfeito carregado tinha movimento constante e quadri-velocidade u^μ , associada ao referencial móvel, era paralela ao vetor de Killing tipo espaço ξ^μ . Assim todos os campos dependiam somente das coordenadas espaciais x^a .

Iniciamos o capítulo 4 tomando o princípio variacional (3.44), para um fluido perfeito carregado, com a lagrangeana tridimensional (3.45) e Σ_3 uma região do espaço riemanniano n -dimensional. Na seção 4.1, reduzimos a lagrangeana tridimensional L_3 para uma bidimensional L_2 . Para isso supomos que o fluido perfeito carregado estivesse rotacionando rigidamente com simetria em uma das coordenadas espaciais do referencial móvel. Esta simetria adicional pode ser descrita pelo vetor de Killing tipo espaço ψ^a . Concluimos que as equações de campo de Einstein-Maxwell para um fluido perfeito carregado simetricamente rotacionando rigidamente seguem do princípio variacional (4.36), com a lagrangeana bidimensional (4.35) e Σ_2 uma região bidimensional do espaço riemanniano n -dimensional.

Na seção 4.2, conectamos as equações de Einstein-Maxwell à teoria das superfícies mínimas, observando as lagrangeanas L_2 e Λ . No princípio variacional (4.36) supomos que Σ_2 seja uma região bidimensional do espaço riemanniano 6-dimensional e escrevemos a lagrangeana bidimensional (4.37) em termos deste



espaço. Retomamos o princípio variacional (2.28), com Σ_2 uma região bidimensional do espaço riemanniano 6-dimensional e escrevemos a lagrangeana Λ em relação à métrica e às coordenadas deste espaço. Usamos o lema (2.1) para garantirmos a equivalência entre os princípios variacionais (4.39) e (4.41). Concluimos que S é uma superfície mínima mergulhada num espaço riemanniano 6-dimensional. Vimos que a lagrangeana bidimensional (4.38) é um caso particular da lagrangeana (4.40), quando $\mathbf{h}_{AB} = \gamma_{AB}$. Finalmente, no princípio variacional bidimensional (4.39), consideramos a lagrangeana (4.38) e, portanto, vinculamos as teorias citadas acima, concluindo a demonstração do teorema (4.1).

A continuidade do estudo iniciado neste trabalho, a qual é proposta em [3], resultará nas equações das superfícies mínimas no espaço riemanniano 6-dimensional descrevendo as soluções de Schwarzschild interiores e exteriores. Esta é uma extraordinária propriedade dos campos gravitacionais para um fluido perfeito rotacionando no vácuo.

Poderão ser efetuadas futuras pesquisas sobre o problema axialmente simétrico estacionário, onde supomos simplificações na estrutura geométrica das superfícies mínimas e, neste sentido, serão interessantes as superfícies mínimas geodésicas.

- [3] Chandrasekhar, S. *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford University Press, Oxford, England (1992).
- [6] Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley and Son, Inc., New York (1972).
- [7] Landau, L. e Lifschitz, E., *Théorie du Champ*, Éditions MIR, Moscow (1966).



Referências Bibliográficas

- [1] Kramer, D., Stephani, H., Herlt, E., MacCallum, M.A.H., *Exact solutions of Einstein's Field Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, England (1980).
- [2] R. A. d'Inverno. Numerical Relativity on a transputer array. In R. A. d'Inverno, editor, *Approaches to Numerical Relativity*, pages 3–19, Cambridge University Press, Cambridge, England (1992).
- [3] Neugebauer, G. and Herlt, E., Einstein-Maxwell fields inside and outside rotating sources as minimal surfaces, *Classical and Quantum Gravity*, **1**, 695–703 (1984).
- [4] Chern, S., General Relativity and Differential Geometry, In Harry Woolf, editor, *Some Strangeness in the Proportion: A Centennial Symposium to Celebrate the Achievements of Albert Einstein*, pages 271–280, Addison-Wesley Publishing Company (1980).
- [5] Chandrasekhar, S., *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford University Press, Oxford, England (1992).
- [6] Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley and Son, Inc., New York (1972).
- [7] Landau, L. e Lifchitz, E., *Théorie du Champ*, Éditions MIR, Moscow (1966).



- [8] Chen, Bang-yen, *Geometry of Submanifolds*, Marcel Dekker, Inc., New York (1973).
- [9] Einsenhardt, L. P., *Riemannian Geometry*, Princeton University Press, Princeton (1949).
- [10] Dirac, P. A. M., *General Theory of Relativity*, Princeton University Press, Princeton (1996).
- [11] Wald, R. M., *General Relativity*, The University of Chigado Press, Chicago (1984).
- [12] Stephani, Hans, *General Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge, England (1990).
- [13] Lichnerowicz, A., *Elementos de Calculo Tensorial*, Toll, Lege.
- [14] Bishop, R. L., Goldberg, S. I., *Tensor Analysis on Manifolds*, Dover Publications, Inc. (1980).
- [15] Lawson Jr., H.G., *Lectures on Minimal Submanifolds*, Monografias de Matemática, 14. IMPA, Rio de Janeiro (1970).
- [16] Sagan, H., *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics*, Dover Publications. Inc., New York (1989).
- [17] Berger, M., Gostiaux. B., *Differential Geometry: Manifolds, Curves, and Surfaces*, Springer-Verlag, Inc., New York (1988).
- [18] Osserman, R., *A Survey of Minimal Surfaces*, Dover Publications, Inc., New York (1986).
- [19] Eisenhart, L. F., *A Treatise on the Diferential Geometry of Curves an Surfaces*, Ginn and Company, Boston (1909).
- [20] Almgren Jr., F. J., Taylor, J. E., The Geometry of Soap Films and Soap Bubbles, *Scientific American*, July, pages 82-93 (1976).



- [21] do Carmo, M. P.. *Elementos de Geometria Diferencial*, Ao Livro Técnico e Editora Universidade de Brasília, Rio de Janeiro (1971).
- [22] do Carmo, M. P.. *Superfícies Mínimas*, 16º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA (1987).
- [23] do Carmo, M. P.. *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA (1988).



