

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP

Julio de Mesquita Filho - campus de Guaratinguetá

VINÍCIUS RAMOS NUNES DE OLIVEIRA

Modos Quasinormais e Ecos Gravitacionais em Objetos Compactos

Guaratinguetá

2026

Vinícius Ramos Nunes de Oliveira

Modos Quasinormais e Ecos Gravitacionais em Objetos Compactos

Dissertação, apresentada à Universidade Estadual Paulista (UNESP), Julio de Mesquita Filho, Guaratinguetá, para obtenção do título de Mestre em Física e Astronomia.

Área de Concentração: Gravitação

Orientador: Prof^o Dr. Wei-Liang Qian

Coorientador: Prof^o Dr. Marco André Ferreira
Dias

Guaratinguetá

2026

O48m	Oliveira, Vinícius Ramos Nunes de Modos quasinormais e Ecos gravitacionais em objetos compactos / Vinícius Ramos Nunes de Oliveira - Guaratinguetá, 2026. 99 f : il. Bibliografia: f. 64-65; 98 Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá, 2026. Orientador(a): Prof. Dr. Wei-Liang Qian Coorientador: Prof. Dr. Marco André Ferreira Dias 1. Buracos negros (Astronomia). 2. Ondas gravitacionais. 3. Astrofísica. 4. Relatividade geral (Física). I. Título. CDU 523.03(043)
------	--



VINÍCIUS RAMOS NUNES DE OLIVEIRA

**THIS DISSERTATION WAS CONSIDERED ADEQUATE FOR THE AWARD OF THE
TITLE OF**

“MASTER IN PHYSICS AND ASTRONOMY”

**PROGRAM: PHYSICS AND ASTRONOMY
COURSE: MASTER’S**

APPROVED IN ITS FINAL FORM BY THE GRADUATE PROGRAM



Documento assinado digitalmente

OLIVIA MARIA BERENGUE

Data: 17/07/2026 16:57:21-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof^a. Dr^a. Olivia Maria Berengue
Coordinator

EVALUATION COMMITTEE:



Documento assinado digitalmente

WEILIANG QIAN

Data: 10/07/2026 15:38:49-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. WEILIANG QIAN
Supervisor - USP



Documento assinado digitalmente

GUSTAVO PAZZINI DE BRITO

Data: 15/07/2026 23:37:32-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. GUSTAVO PAZZINI DE BRITO
UNESP



Documento assinado digitalmente

KAI LIN

Data: 15/07/2026 12:41:33-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. KAI LIN
China University of Geosciences

JULY, 2026

Dedico este trabalho às pessoas que estiveram ao meu lado me apoiando ao longo dos anos, em especial minha família, mãe, pai, irmão e esposa que me apoiaram, incentivaram e, apesar das dificuldades, nunca me desmotivaram.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao programa de pós-graduação da FEG-Unesp que acreditou em meu trabalho assim como aos membros conselho. Agradeço também ao Profº Dr. Wei-Liang Qian que me aceitou como orientando, mesmo conhecendo minhas limitações e dificuldades, e ao Profº Dr. Marco André Ferreira Dias que me coorientou nos momentos mais difíceis, e que esteve presente em momentos decisivos do meu aprendizado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

“Uma jornada de mil li começa com um único passo.”

(Lao-Tzu, 2002, cap. 64, tradução de I Ching Lin)

“Não importa quão lentamente você vá, desde que não pare.”

(Confúcio, 2012, Livro XI. 19, tradução de Cheng Lin)

RESUMO

Este trabalho consiste na investigação dinâmica de perturbações lineares do espaço-tempo de Schwarzschild por meio das equações de Regge-Wheeler e Zerilli, com ênfase na equação mestre de Regge-Wheeler e na função mestra $Q(t, x)$ na coordenada *tortoise*. A pesquisa fundamenta-se na detecção histórica de ondas gravitacionais pelo LIGO em 2015 (GW150914), que inaugurou a era da astronomia multi-mensageira e confirmou a existência de sistemas binários de buracos negros, revelando a fase de *ringdown* — oscilações amortecidas que funcionam como assinatura característica desses objetos compactos, dependendo apenas de sua massa, carga e rotação, segundo o teorema *no-hair*. O objetivo principal consistiu em desenvolver e validar numericamente a evolução temporal da equação de onda efetiva para perturbações axiais e polares, assim como verificar o comportamento de seus potenciais efetivos. A metodologia envolveu o cálculo explícito dos símbolos de Christoffel para a métrica de Schwarzschild, a decomposição em harmônicos esféricos, a linearização das equações de Einstein, a fixação do *gauge* de Regge-Wheeler, a derivação das variações do tensor de Ricci e a resolução numérica via diferenças finitas, com condições iniciais representadas por um pulso gaussiano. Foram simuladas perturbações axiais (Regge-Wheeler) e polares (Zerilli, isoespectrais) para os canais $L=2$ e $L=3$. Os resultados revelam o comportamento trifásico clássico das perturbações, no qual uma das fases é o estado de *ringdown*, cujas oscilações são exponencialmente amortecidas. A inspeção qualitativa das formas de onda obtidas é compatível com os modelos fundamentais esperados para a métrica de Schwarzschild, validando a implementação numérica do esquema de diferenças finitas. Adicionalmente, a análise do valor absoluto da forma de onda revela modulações recorrentes no pós-*ringdown*, sugerindo a presença de ecos gravitacionais — fenômeno ausente na previsão padrão de Schwarzschild e que pode indicar reflexões em barreiras potenciais exóticas próximas ao horizonte, abrindo novas frentes para investigações a respeito de desvios da relatividade geral. Os resultados obtidos estabelecem uma base para futuras investigações sobre a dinâmica de buracos negros e posicionam a evolução temporal como uma ferramenta poderosa para sondar a física em regime de campo forte. As perspectivas de aplicação incluem a extensão do código para geometrias mais gerais, como as métricas de Kerr e Reissner-Nordström, e a preparação para a análise de sinais sintéticos visando aos observatórios de ondas gravitacionais da próxima geração (o LISA, para buracos negros supermassivos, e o Einstein Telescope). Concluindo, esta dissertação contribui para a compreensão da dinâmica de objetos compactos, unindo o formalismo matemático a simulações numéricas, e sinaliza caminhos para o estudo da física além do modelo convencional, essenciais para o futuro da astrofísica de ondas gravitacionais.

Palavras-Chave: Modos Quasinormais; buraco negro; Regge-Wheeler; Zerilli; eco gravitacional; Schwarzschild; ondas gravitacionais.

ABSTRACT

This work involves the dynamical investigation of linear perturbations of Schwarzschild space-time using the Regge-Wheeler and Zerilli equations, with an emphasis on the Regge-Wheeler master equation and the master function $Q(t, x)$ in tortoise coordinates. The research is grounded in the historic detection of gravitational waves by LIGO in 2015 (GW150914), which ushered in the era of multi-messenger astronomy and confirmed the existence of binary black hole systems, revealing the ringdown phase—damped oscillations that serve as a characteristic signature of these compact objects, depending solely on their mass, charge, and rotation, in accordance with the no-hair theorem. The primary objective was to develop and numerically validate the time evolution of the effective wave equation for axial and polar perturbations, as well as to examine the behavior of their effective potentials. The methodology included the explicit calculation of Christoffel symbols for the Schwarzschild metric, spherical harmonic decomposition, linearization of Einstein’s equations, imposition of the Regge-Wheeler gauge, derivation of Ricci tensor variations, and numerical solution via finite differences, using a Gaussian pulse for initial conditions. Axial (Regge-Wheeler) and polar (Zerilli, isospectral) perturbations were simulated for the $L = 2$ and $L = 3$ channels. The results reveal the classic three-phase behavior of the perturbations, including the ringdown phase, characterized by exponentially damped oscillations. Qualitative inspection of the resulting waveforms is consistent with the fundamental models expected for the Schwarzschild metric, thereby validating the numerical implementation of the finite-difference scheme. Additionally, analysis of the waveform’s absolute value reveals recurring modulations in the post-ringdown phase, suggesting the presence of gravitational echoes—a phenomenon absent from the standard Schwarzschild prediction that may indicate reflections off exotic potential barriers near the horizon, thereby opening new avenues for investigating deviations from general relativity. The results establish a foundation for future research into black hole dynamics and position temporal evolution as a powerful tool for probing physics in the strong-field regime. Potential applications include extending the code to more general geometries, such as Kerr and Reissner-Nordström metrics, and preparing for the analysis of synthetic signals intended for next-generation gravitational-wave observatories (LISA, for supermassive black holes, and the Einstein Telescope). In conclusion, this dissertation contributes to the understanding of compact object dynamics by combining mathematical formalism with numerical simulations, and points toward paths for studying physics beyond the conventional model—steps essential for the future of gravitational-wave astrophysics.

Keywords: Quasinormal modes; black holes; Regge-Wheeler; Zerilli; gravitational echoes;

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Deformação do contorno de Bromwich Γ no plano complexo s para a inversão da transformada de Laplace. Os marcadores $\times$ indicam a distribuição dos polos isolados s_q associados às frequências quasinormais, enquanto a região hachurada sobre o eixo real representa o corte de ramificação (branch cut) responsável pelo surgimento da cauda de lei de potência em tempos tardios.	33
Figura 2	Evolução temporal de uma perturbação axial no espaço-tempo de Schwarzschild obtida por integração numérica direta. O perfil destaca a resposta transiente inicial, o regime intermediário de amortecimento quasinormal e a cauda de lei de potência em tempos tardios.	34
Figura 3	Potenciais efetivos de Regge–Wheeler e Zerilli para $L = 2$ e $L = 3$ em métrica de Schwarzschild. Observa-se que ambos os potenciais possuem a mesma estrutura, diferindo apenas por fatores no termo de correção. . .	52
Figura 4	Forma de onda de Misner (valor absoluto de $\psi(t)$) obtida a partir da evolução temporal da perturbação gravitacional em um buraco negro de Schwarzschild. Observa-se o regime inicial de oscilação quasinormal seguido pelo decaimento exponencial e posterior cauda de potência.	53
Figura 5	Forma de onda de Misner $\psi(t)$ mostrando a resposta inicial da perturbação gravitacional. O sinal exibe o pulso primário e as primeiras oscilações associadas ao início do regime quasinormal.	54
Figura 6	Implementação computacional do esquema de diferenças finitas de quarta ordem para o termo de derivada espacial e evolução temporal da função de onda.	58
Figura 7	Configuração dos dados iniciais do pulso gaussiano assintoticamente afastado da barreira de potencial e parametrização do observador virtual. . . .	59

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

QNM	Quasinormal modes
BH	Black Hole
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
GR	General Relativity
LIGO	Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory

LISTA DE SÍMBOLOS

α	Alfa minúscula - Índice genérico em derivações
β	Beta minúscula - Índice genérico em derivações
Γ	Gama maiúscula - Símbolos de Christoffel
λ	Letra grega Lambda - Índice de conexão
Λ	Lambda maiúscula - Função de transformação. Função de Calibre
η	Eta minúscula - Métrica do Espaço-Tempo plano de Minkowski
μ	Mi minúscula - Índice tensorial
ν	Ni minúscula - Índice tensorial
δ	Delta minúscula - Indicativo de variação
ω	Omega minúscula - Frequência complexa
Ω	Omega maiúscula - Elemento de ângulo sólido das coordenadas esféricas
θ	Theta minúscula - Coordenada angular
ϕ	Phi minúscula - Coordenada angular
ψ	Psi minúscula - Função de onda
Ψ	Psi maiúscula - Equação de Onda
∂	Derivada parcial
$\int$	Integral
e	Número de Euler

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	DESENVOLVIMENTO	16
2.1	Revisão teórica	16
2.1.1	Buracos negros	16
2.1.2	Relatividade Geral	17
2.1.3	Pertubação da Métrica	19
2.1.4	A Métrica de Schwarzschild	21
2.1.5	Harmônicos Esféricos	22
2.1.6	Ondas Gravitacionais e Perturbações Tensoriais	24
2.1.7	Os Símbolos de Christoffel	25
2.1.8	Tensor de Ricci e Riemann	27
2.1.9	Modos quasinormais	28
2.1.10	Equações mestres - Regge-Wheeler e Zerilli	29
2.1.11	Modos Quasinormal na Formulação de Laplace	31
2.1.12	A Função de Green e o Espectro de Frequências	31
2.1.12.1	O Contorno de Inversão e a Expansão de Modos	32
2.1.13	Integração Temporal Direta	34
2.2	METODOLOGIA	35
2.2.1	Cálculo dos Simbolos de Christoffel	35
2.2.1.1	Calculando Γ_{tt}^t	35
2.2.1.2	Calculando Γ_{tr}^t	35
2.2.1.3	Calculando Γ_{tt}^r	36
2.2.1.4	Calculando $\Gamma_{\phi\phi}^\theta$	37
2.2.1.5	Os outros símbolos	37
2.2.2	Cálculo dos valores de $\delta h_0, \delta h_1$ e δh_2 e sua combinação linear	38
2.2.2.1	Encontrando δh_0	38
2.2.2.2	Encontrando δh_1	39
2.2.2.3	Encontrando δh_2	40
2.2.2.4	Definindo a combinação invariante de $\delta h_0, \delta h_1$ e δh_2	41
2.2.3	Cálculo das Variações dos Tensores de Ricci $\delta R_{\mu\nu}$	42
2.2.3.1	Calculando δR_{00}	42
2.2.3.2	Calculando δR_{13}	44
2.2.3.3	Calculando R_{23}	45
2.2.4	Cálculo da Equação de Regge & Wheeler	47

2.2.4.1	Potencial de Regge & Wheeler	48
2.2.5	Cálculo da Equação de Zerilli	49
2.2.5.1	Potencial de Zerilli	51
2.2.6	Comparando os potenciais $V_{RW}(x)$ e $V_Z(x)$	51
2.2.7	Evolução temporal de $Q_\ell(t, x)$	53
2.2.8	Dedução do Modos Quasinormais no Formalismo Laplaciano	55
2.2.8.1	Integração por Partes e Dados Iniciais de Cauchy	55
2.2.8.2	Construção da Função de Green e o Wronskiano	56
2.2.9	Comprovação dos valores Analíticos	57
2.2.9.1	Configuração da Perturbação Inicial e Extração do Sinal	58
2.3	Resultados	59
2.3.0.1	Características das Formas de Onda Obtidas	59
2.3.1	Ecos gravitacionais	60
3	CONCLUSÃO	62
4	REFERENCIAL BIBLIOGRÁFICO	64
5	APÊNDICES	66
5.1	Cálculos	66
5.1.1	Símbolos de Christoffel	66
5.1.1.1	Calculando Γ_{tr}^t e Γ_{rt}^t	66
5.1.1.2	Calculando Γ_{tt}^r	66
5.1.1.3	Calculando Γ_{rr}^r	67
5.1.1.4	Calculando $\Gamma_{\theta\theta}^r$	68
5.1.1.5	Calculando $\Gamma_{\phi\phi}^r$	68
5.1.1.6	Calculando $\Gamma_{r\theta}^\theta$ e $\Gamma_{\theta r}^\theta$	69
5.1.1.7	Calculando $\Gamma_{\phi\phi}^\theta$	69
5.1.1.8	Calculando $\Gamma_{r\phi}^\phi$ e $\Gamma_{\phi r}^\phi$	70
5.1.1.9	Calculando $\Gamma_{\theta\phi}^\phi$ e $\Gamma_{\phi\theta}^\phi$	70
5.1.1.10	Calculando Γ_{tt}^t	71
5.1.1.11	Calculando $\Gamma_{t\theta}^t$ e $\Gamma_{\theta t}^t$	71
5.1.1.12	Calculando $\Gamma_{t\phi}^t$ e $\Gamma_{\phi t}^t$	72
5.1.1.13	Calculando Γ_{rr}^t	72
5.1.1.14	Calculando $\Gamma_{r\theta}^t$ e $\Gamma_{\theta r}^t$	73
5.1.1.15	Calculando $\Gamma_{r\phi}^t$ e $\Gamma_{\phi r}^t$	73
5.1.1.16	Calculando $\Gamma_{\theta\theta}^t$	73
5.1.1.17	Calculando $\Gamma_{r\phi}^t$ e $\Gamma_{\phi r}^t$	74
5.1.1.18	Calculando $\Gamma_{\phi\phi}^t$	74
5.1.1.19	Calculando Γ_{tr}^r e Γ_{rt}^r	75

5.1.1.20	Calculando $\Gamma_{t\theta}^r$ e $\Gamma_{\theta t}^r$	75
5.1.1.21	Calculando $\Gamma_{t\phi}^r$ e $\Gamma_{\phi t}^r$	75
5.1.1.22	Calculando $\Gamma_{r\theta}^r$ e $\Gamma_{\theta r}^r$	76
5.1.1.23	Calculando $\Gamma_{r\phi}^r$ e $\Gamma_{\phi r}^r$	76
5.1.1.24	Calculando $\Gamma_{\theta\phi}^r$ e $\Gamma_{\phi\theta}^r$	77
5.1.1.25	Calculando Γ_{tt}^θ	77
5.1.1.26	Calculando Γ_{tr}^θ e Γ_{rt}^θ	77
5.1.1.27	Calculando $\Gamma_{t\theta}^\theta$ e $\Gamma_{\theta t}^\theta$	78
5.1.1.28	Calculando $\Gamma_{t\phi}^\theta$ e $\Gamma_{\phi t}^\theta$	78
5.1.1.29	Calculando Γ_{rr}^θ	79
5.1.1.30	Calculando $\Gamma_{r\phi}^\theta$ e $\Gamma_{\phi r}^\theta$	79
5.1.1.31	Calculando $\Gamma_{\theta\theta}^\theta$	79
5.1.1.32	Calculando $\Gamma_{\theta\phi}^\theta$ e $\Gamma_{\phi\theta}^\theta$	80
5.1.1.33	Calculando Γ_{tt}^ϕ	80
5.1.1.34	Calculando Γ_{tr}^ϕ e Γ_{rt}^ϕ	81
5.1.1.35	Calculando $\Gamma_{t\theta}^\phi$ e $\Gamma_{\theta t}^\phi$	81
5.1.1.36	Calculando $\Gamma_{t\phi}^\phi$ e $\Gamma_{\phi t}^\phi$	81
5.1.1.37	Calculando Γ_{rr}^ϕ	82
5.1.1.38	Calculando $\Gamma_{r\theta}^\phi$ e $\Gamma_{\theta r}^\phi$	82
5.1.1.39	Calculando $\Gamma_{\theta\theta}^\phi$	83
5.1.1.40	Calculando $\Gamma_{\phi\phi}^\phi$	83
5.1.2	Devivada covariante	83
5.1.3	Variações de $R_{\mu\nu}$	86
5.1.4	Comparação dos potenciais	89
5.1.5	Evolução temporal da equação mestra - Código oferecido por Prof. Dr. Peng Liu - Universidade Jinan da China	94
	REFERÊNCIAS	98
	DADOS CURRICULARES	99

1 INTRODUÇÃO

A detecção direta de ondas gravitacionais pela colaboração LIGO em 2015 inaugurou uma nova era na astrofísica, permitindo o acesso a regiões de campos gravitacionais intensos e viabilizando testes da relatividade geral em condições extremas. Em 14 de setembro de 2015, às 09:50:45 UTC, os detectores de Hanford (Washington) e Livingston (Luisiana) registraram simultaneamente o sinal GW150914, proveniente da fusão de dois buracos negros de aproximadamente 36 e 29 massas solares, localizados a 1,3 bilhão de anos-luz. O evento liberou uma energia equivalente a três massas solares na forma de ondas gravitacionais. Dentre os fenômenos mais notáveis associados a esse e a outros eventos posteriores, destaca-se a emissão dos modos quasinormais (QNMs), que caracterizam a fase de relaxação de buracos negros e estrelas de nêutrons após uma perturbação. Esses modos funcionam como uma assinatura acústica única desses objetos, uma vez que suas frequências e taxas de amortecimento dependem exclusivamente dos parâmetros fundamentais da fonte — massa, carga e rotação —, em conformidade com o teorema *no-hair* (NOLLERT, 1999; KOKKOTAS; SCHMIDT, 1999).

O marco representado pelo GW150914 é o coroamento de décadas de desenvolvimento tecnológico e teórico. O LIGO, financiado pela NSF com US\$ 395 milhões desde 1994, passou por uma atualização significativa em 2015 (Advanced LIGO, orçamento de US\$ 620 milhões), que aumentou sua sensibilidade em um fator de quatro e tornou possível a detecção de GW150914. O sinal observado produziu uma variação relativa nos braços de 4 km da ordem de 10^{-21} , equivalente a alterar a distância até a estrela mais próxima, Próxima Centauri, pela largura de um fio de cabelo. Do ponto de vista teórico, os QNMs emergem naturalmente como soluções das equações de Einstein linearizadas para perturbações da métrica, com condições de contorno que exigem ondas puramente entrantes no horizonte de eventos e puramente saíntes no infinito espacial. Essa condição de contorno confere ao espectro de frequências um caráter complexo: a parte real determina a frequência de oscilação, enquanto a parte imaginária está associada ao amortecimento temporal. Essa propriedade distingue os QNMs dos modos normais de sistemas conservativos e estabelece uma conexão profunda entre a relatividade geral, a teoria de perturbações e a análise espectral de sistemas dissipativos abertos (REGGE; WHEELER, 1957; ZERILLI, 1970).

O estudo dos modos quasinormais reveste-se de importância tanto do ponto de vista astrofísico quanto fundamental. Observacionalmente, os QNMs constituem a base da “espectroscopia de buracos negros”, permitindo a verificação do teorema *no-hair* e a determinação dos parâmetros do objeto a partir do sinal gravitacional detectado (CHANDRASEKHAR, 1983; BERTI et al., 2009). Desde GW150914, as colaborações LIGO/Virgo já identificaram mais de 90 eventos de coalescência até 2025, incluindo fases de *ringdown* analisadas com precisão, que confirmam as previsões da relatividade geral e motivam a busca por desvios — como os chamados ecos gravitacionais, que poderiam indicar a presença de estruturas exóticas próximas ao horizonte,

como horizontes “fuzzy” ou correções quânticas. No âmbito teórico, os QNMs também se conectam a áreas como a correspondência AdS/CFT e a física de horizontes, sugerindo relações profundas entre a estrutura espectral de buracos negros e aspectos fundamentais da gravitação quântica (KONOPLYA; ZHIDONOV, 2011).

O problema central desta pesquisa consiste no desenvolvimento e na análise matemática precisa das equações que regem a dinâmica temporal de perturbações lineares em buracos negros, bem como na compreensão das limitações inerentes aos métodos de perturbação. Embora as técnicas de Regge-Wheeler e Zerilli tenham se mostrado bem-sucedidas em descrever o regime linear, persistem desafios importantes, como a extensão a cenários não lineares, a estabilidade de soluções em geometrias mais gerais (Kerr-Newman) e a identificação de sinais em meio ao ruído estocástico dos detectores (KOKKOTAS; SCHMIDT, 1999). Além disso, a questão da completude dos QNMs como base para a representação de soluções gerais e a caracterização de modos puramente imaginários permanece em aberto (NOLLERT, 1999).

Diante desse cenário, esta dissertação propõe-se a examinar os modos quase normais de buracos negros por meio da evolução temporal direta das equações de perturbação, explorando sua formulação matemática e seu significado para a astronomia de ondas gravitacionais. Para garantir consistência e foco, o estudo restringe-se a buracos negros assintoticamente planos, com ênfase na solução de Schwarzschild, excluindo teorias de gravidade modificada ou cenários com constante cosmológica não nula. O objetivo principal é estabelecer uma base teórica e computacional sólida que possa dialogar com as oportunidades observacionais atuais e futuras.

Nesse sentido, esta investigação insere-se em um campo interdisciplinar que combina relatividade numérica, análise de sistemas dinâmicos e astrofísica de ondas gravitacionais, com a finalidade de contribuir para a compreensão da física fundamental em regimes de campo forte. As perspectivas para a próxima década são promissoras: observatórios espaciais como a LISA (cujo lançamento está previsto para meados da década de 2030) serão capazes de detectar QNMs de buracos negros supermassivos na faixa de 10^6 a 10^9 massas solares, enquanto projetos terrestres de terceira geração, como o Einstein Telescope e o Cosmic Explorer, ampliarão significativamente a sensibilidade a sinais de origem astrofísica, potencializando testes de gravidade quântica e a investigação de buracos negros primordiais.

2 DESENVOLVIMENTO

2.1 REVISÃO TEÓRICA

2.1.1 Buracos negros

Buracos negros são soluções das equações de campo de Einstein que descrevem regiões do espaço-tempo com curvatura extrema, das quais nada — nem mesmo a luz — pode escapar. Eles são definidos pela presença de um horizonte de eventos, uma superfície que marca o limite causal da região invisível.

Os buracos negros surgem naturalmente em situações de colapso gravitacional, como no final da vida de estrelas massivas. A mais simples e importante solução analítica que descreve um buraco negro é a métrica de Schwarzschild, que representa um corpo esfericamente simétrico, sem carga e sem rotação.

De acordo com o teorema da calvície (*no-hair theorem*), buracos negros astrofísicos são completamente caracterizados por apenas três parâmetros: massa M , carga elétrica Q e momento angular J . As soluções mais gerais são classificadas como:

- **Schwarzschild:** buraco negro estático, não carregado e não rotante;
- **Reissner–Nordström:** com carga elétrica, mas sem rotação;
- **Kerr:** com rotação, mas sem carga;
- **Kerr–Newman:** carregado e rotativo.

Em astrofísica, acredita-se que os buracos negros formados por colapsos estelares sejam bem descritos pela solução de Kerr, embora a métrica de Schwarzschild ainda seja uma excelente aproximação para sistemas esfericamente simétricos e ponto de partida fundamental para estudos teóricos, como o das perturbações e modos quasinormais. Para fins desse trabalho, será utilizada a métrica de Schwarzschild.

A teoria da relatividade geral, criada por Albert Einstein em 1915, explica a gravidade como uma consequência da curvatura do espaço-tempo causada pela presença de energia e momento. Entre as soluções exatas das equações de Einstein, destaca-se a métrica de Schwarzschild, encontrada em 1916 por Karl Schwarzschild como a primeira solução não trivial das equações de campo no vácuo para um corpo esférico e sem carga (SCHWARZSCHILD, 1916).

A solução de Schwarzschild, descreve um espaço-tempo estático e com simetria esférica, apresentando um horizonte de eventos na coordenada $r = r_s$, que delimita a região da qual nada escapa, nem mesmo a luz (SCHUTZ, 2009).

Sob uma perspectiva astrofísica, os buracos negros podem surgir do colapso gravitacional de estrelas massivas ou da união de objetos compactos, como estrelas de nêutrons. A estabili-

dade dessas soluções sob pequenas alterações foi primeiramente analisada por Regge e Wheeler (1957), que mostraram que o problema pode ser simplificado para uma equação de onda efetiva unidimensional com um potencial de barreira — o chamado potencial de Regge-Wheeler. Mais tarde, Zerilli (1970) encontrou a forma correspondente para perturbações de paridade polar, provando que ambas as descrições são fisicamente equivalentes, embora apresentem potenciais distintos.

Esses estudos iniciais abriram caminho para a formulação dos modos quasinormais (QNMs), definidos como oscilações típicas dos buracos negros, com frequências complexas determinadas apenas pelas propriedades do espaço-tempo (massa, carga e rotação). Especificamente, na métrica de Schwarzschild, os QNMs demonstram uma dependência exclusiva da massa, refletindo a universalidade da conjectura da “calvície dos buracos negros” (KOKKOTAS; SCHMIDT, 1999; NOLLERT, 1999). O termo “quasinormal” se deve ao fato de que as condições de contorno — ondas puramente convergentes no horizonte e puramente divergentes no infinito — resultam em autovalores complexos: a parte real representa a frequência de oscilação e a parte imaginária o amortecimento devido à emissão de ondas gravitacionais.

Os modos quase normais (QNMs) de Schwarzschild possuem relevância significativa tanto no plano teórico quanto no das observações. Do ponto de vista teórico, eles representam um ambiente ideal para investigar a estabilidade da solução e a evolução dinâmica do espaço-tempo em situações de não linearidade (CHANDRASEKHAR, 1983). No âmbito observacional, identificar o período de “ringdown” — a fase de acomodação após a colisão de dois buracos negros — representa uma das provas mais concretas da existência desses objetos, permitindo avaliar a relatividade geral sob condições extremas (BERTI; CARDOSO; STARINETS, 2009).

Em resumo, a métrica de Schwarzschild representa o modelo de buraco negro mais elementar e, simultaneamente, a fundação conceitual para a análise de modos quase normais. Apesar de sua singeleza, ela engloba os aspectos físicos cruciais do problema e estabelece o contexto teórico em que os métodos analíticos e numéricos, atualmente usados para calcular espectros de QNMs, foram criados (NOLLERT, 1999; KOKKOTAS; SCHMIDT, 1999).

2.1.2 Relatividade Geral

A teoria da relatividade geral, criada por Albert Einstein em 1915, apresenta a gravidade como uma propriedade geométrica. Nela, a presença de energia e momento causa a curvatura do espaço-tempo, e partículas livres se movem ao longo das geodésicas dessa geometria (EINSTEIN, 1916; MISNER; THORNE; WHEELER, 1973). A teoria se baseia no princípio da equivalência, que afirma que não se pode distinguir localmente entre campos gravitacionais e sistemas acelerados, o que leva a uma generalização da relatividade restrita para qualquer ponto de referência (SCHUTZ, 2009).

As equações de campo de Einstein,

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, R é o escalar de Ricci, e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento da matéria. Todos os objetos geométricos são calculados a partir da métrica $g_{\mu\nu}$ e suas derivadas até segunda ordem.

As equações de Einstein expressam o princípio de que a curvatura do espaço-tempo (à esquerda) é determinada pelo conteúdo energético presente (à direita). Em particular, no vácuo ($T_{\mu\nu} = 0$), as equações reduzem-se a:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2)$$

Esse caso é fundamental para o estudo de buracos negros, pois a métrica de Schwarzschild, por exemplo, é uma solução do vácuo com simetria esférica. O formalismo da relatividade geral também permite estudar perturbações do espaço-tempo, obtendo equações de movimento para pequenas variações da métrica. Essa abordagem linearizada é a base para o estudo das ondas gravitacionais e, em particular, dos modos quasinormais.

Em seu aspecto conceitual, a relatividade geral substitui o conceito de força gravitacional pelo de geodésicas: trajetórias que partículas seguem naturalmente em um espaço-tempo curvo. Assim, a gravitação emerge como uma manifestação da geometria, e não como uma interação no sentido tradicional das outras forças fundamentais.

Essa reformulação profunda da física gravitacional é especialmente necessária em regimes de campo intenso, como aqueles encontrados nas vizinhanças de buracos negros e nas primeiras fases do universo. Por isso, a relatividade geral é a teoria de base para o estudo da dinâmica de buracos negros perturbados, sendo imprescindível para a compreensão dos modos quasinormais como soluções das equações de Einstein linearizadas. relacionam a curvatura do espaço-tempo, representada pelo tensor de Einstein, com o conteúdo de matéria e energia, descrito pelo tensor energia-momento. Essa relação resume a ideia de que a matéria influencia a curvatura do espaço-tempo, e a geometria, por sua vez, influencia o movimento da matéria (WALD, 1984; HARTLE, 2003).

A teoria foi comprovada por diversas experiências, como a precessão do periélio de Mercúrio, o desvio da luz por objetos massivos e o desvio gravitacional na frequência da radiação (WILL, 1993). Mais recentemente, a detecção direta de ondas gravitacionais pelas colaborações LIGO e Virgo confirmou que a relatividade geral descreve corretamente a gravidade em condições extremas (ABBOTT et al., 2016).

Entre as soluções exatas para as equações de Einstein, destacam-se as geometrias de Schwarzschild (1916), onde a singularidade aparente coincide com o horizonte de eventos, Kerr (1963) e Reissner–Nordström (1916–1918), que descrevem buracos negros estáticos, em rotação e com

carga elétrica, respectivamente. Essas soluções são fundamentais para entender a estabilidade de buracos negros sob perturbações e para a formulação dos modos quasinormais (REGGE; WHEELER, 1957; ZERILLI, 1970; CHANDRASEKHAR, 1983).

Além do interesse na astrofísica, a relatividade geral está ligada a outras áreas da física. Na cosmologia, ela fornece a base para o modelo do Big Bang e para entender a aceleração cósmica observada (PEEBLES; RATAJONDRARY, 2003). Na Teoria Quântica de Campos, abordando a gravitação clássica, destaca-se o paradoxo da informação em buracos negros e a radiação de Hawking (HAWKING, 1975).

Em resumo, a relatividade geral é um dos pilares da física moderna, unindo fenômenos clássicos, astrofísicos e cosmológicos. Para o estudo dos modos quasinormais, ela oferece o contexto teórico no qual as perturbações de buracos negros são formuladas, analisadas e comparadas com dados observacionais.

2.1.3 Perturbação da Métrica

Na formulação original de REGGE e WHEELER (1957), a análise das perturbações gravitacionais do espaço-tempo de Schwarzschild parte da expansão linear da métrica em torno da solução exata,

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (3)$$

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (4)$$

A decomposição do tensor $h_{\mu\nu}$ é feita segundo os harmônicos esféricos $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$, aproveitando a simetria esférica do fundo. Como a métrica perturbada deve transformar-se como um tensor simétrico de segunda ordem, cada componente de $h_{\mu\nu}$ é expandida em combinações escalares, vetoriais e tensoriais derivadas de $Y_{\ell m}$.

Essa decomposição produz dez funções escalares de t e r : $H_0, H_1, H_2, h_0, h_1, h_2, K, G$ e duas funções de gauge. Entretanto, nem todas são fisicamente independentes. Há redundâncias associadas à liberdade de coordenadas — a chamada liberdade de gauge — que permite redefinir as coordenadas $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$ sem alterar o conteúdo físico da perturbação.

Para eliminar essa liberdade, REGGE e WHEELER (1957) introduziram uma condição específica, conhecida como gauge de Regge–Wheeler, na qual certas componentes da perturbação são anuladas. O objetivo é simplificar as equações de Einstein linearizadas, eliminando termos espúrios sem alterar as quantidades fisicamente mensuráveis.

A decomposição de $h_{\mu\nu}$ é então separada em duas classes de paridade:

- Perturbações de paridade ímpar (axiais): mudam de sinal sob a inversão angular $(\theta, \phi) \rightarrow (\pi - \theta, \phi + \pi)$;

- Perturbações de paridade par (polares): mantêm o sinal sob a mesma transformação.

Essas duas classes não se misturam devido à simetria esférica, o que permite tratá-las independentemente.

No caso axial (ímpar-paridade), as únicas componentes não nulas da métrica perturbada são $h_{t\theta}$, $h_{t\phi}$, $h_{r\theta}$ e $h_{r\phi}$. A forma explícita da perturbação, como apresentada em NOLLERT (1999, Eq. 23) e derivada originalmente por REGGE e WHEELER (1957), é:

$$h_{\mu\nu}^{(\text{ax})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{h_0(t,r)}{\sin\theta} \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial\phi} & h_0(t,r) \sin\theta \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial\theta} \\ 0 & 0 & -\frac{h_1(t,r)}{\sin\theta} \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial\phi} & h_1(t,r) \sin\theta \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial\theta} \\ * & * & \frac{1}{2} h_2(t,r) \frac{1}{\sin\theta} X_{\ell m} & -\frac{1}{2} h_2(t,r) \sin\theta W_{\ell m} \\ * & * & * & -\frac{1}{2} h_2(t,r) \sin\theta X_{\ell m} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

Os termos $h_{t\theta}$, $h_{t\phi}$, $h_{r\theta}$, $h_{r\phi}$ e $h_{\theta\phi}$, denotados por "*", são simétricos aos valores de $h_{\theta t}$, $h_{\phi t}$, $h_{\theta r}$, $h_{\phi r}$ e $h_{\phi\theta}$, ou seja:

- $h_{\theta t} = h_{t\theta} = -\frac{h_0(t,r)}{\sin\theta} \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial\phi}$;
- $h_{\phi t} = h_{t\phi} = h_0(t,r) \sin\theta \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial\theta}$;
- $h_{\theta r} = h_{r\theta} = -\frac{h_1(t,r)}{\sin\theta} \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial\phi}$;
- $h_{\phi r} = h_{r\phi} = h_1(t,r) \sin\theta \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial\theta}$;
- $h_{\phi\theta} = h_{\theta\phi} = -\frac{1}{2} h_2(t,r) \sin\theta W_{\ell m}$.

E as funções angulares $X_{\ell m}$ e $W_{\ell m}$ provenientes da decomposição da perturbação axial em harmônicos esféricos, são dadas por:

$$X_{\ell m} = 2 \left(\frac{\partial^2 Y_{\ell m}}{\partial\theta\partial\phi} - \cot\theta \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial\phi} \right), \quad W_{\ell m} = \frac{\partial^2 Y_{\ell m}}{\partial\theta^2} - \cot\theta \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y_{\ell m}}{\partial\phi^2}. \quad (6)$$

No gauge de Regge–Wheeler, adota-se $h_2 = 0$, o que elimina as perturbações puramente angulares de segunda ordem, simplificando o sistema a duas funções dinâmicas, $h_0(t, r)$ e $h_1(t, r)$. Essa escolha mantém todas as quantidades invariantes de gauge relevantes para as perturbações ímpares. As perturbações polares (paridade par), invariantes sob inversão angular, envolvem variações simétricas das componentes temporais e radiais da métrica. No gauge de Regge–Wheeler, as componentes não nulas são escritas como:

$$h_{\mu\nu}^{(\text{pol})} = \begin{pmatrix} H_0(t, r) \left(1 - \frac{2M}{r}\right) & H_1(t, r) & 0 & 0 \\ H_1(t, r) & H_2(t, r) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 K(t, r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta K(t, r) \end{pmatrix} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (7)$$

2.1.4 A Métrica de Schwarzschild

Em 1916, logo após a criação da relatividade geral, Karl Schwarzschild apresentou a solução de Schwarzschild, que representa a primeira solução exata e relevante das equações de campo de Einstein. Essencialmente, é a descrição matemática do espaço-tempo produzido por um corpo estático, esfericamente simétrico, não carregado e com massa pontual (SCHWARZSCHILD, 1916). Sua importância é enorme, pois ela estabelece o modelo mais básico de buraco negro e serve como base teórica para o estudo de modos quasinormais.

A métrica de Schwarzschild, usando coordenadas esféricas, é definida por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (8)$$

e apresenta suas formas matriciais $g_{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu}$, que são dadas por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f(r)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f(r)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

sendo $f(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$ onde M representa a massa do corpo central. Essa solução exibe duas propriedades notáveis: uma singularidade física em $r = 0$ e um horizonte de eventos em $r = 2M$, de onde nada pode escapar (SCHUTZ, 2009).

A métrica apresenta uma singularidade coordenada aparente em $r = 2M$, conhecida como *horizonte de eventos*. Em $r = 0$, há uma singularidade física verdadeira, onde as invariantes de curvatura (como $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$) divergem.

A componente g_{tt} indica que o tempo próprio de um observador fixo em relação à fonte torna-se infinitamente dilatado à medida que $r \rightarrow 2M$. Já a componente g_{rr} diverge nesse

mesmo limite, refletindo a natureza causal distinta da região dentro do horizonte.

A estrutura causal da solução de Schwarzschild é caracterizada pela existência de um horizonte de eventos, que atua como uma fronteira causal: nenhuma informação pode escapar de seu interior. Esse comportamento define o conceito moderno de buraco negro.

A análise da métrica de Schwarzschild pode ser aprofundada utilizando a chamada coordenada *tortoise* r_* , definida por:

$$\frac{dr_*}{dr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \quad (11)$$

a qual permite transformar a equação de onda de perturbações em uma forma semelhante à equação de Schrödinger, facilitando a análise de estabilidade e modos quasinormais.

Além de seu interesse teórico, a métrica de Schwarzschild é a base para estudos de lentes gravitacionais, órbitas de partículas e testes observacionais da relatividade geral no regime fraco e forte de campo gravitacional.

Inicialmente, essa solução despertou interesse na análise do movimento dos planetas e na explicação da precessão incomum do periélio de Mercúrio. Com a evolução da astrofísica relativística, a métrica de Schwarzschild se tornou vital para descrever o colapso gravitacional e a origem de buracos negros estelares. Atualmente, ela é o ponto de partida para investigar perturbações no espaço-tempo e a emissão de ondas gravitacionais (CHANDRASEKHAR, 1983).

Regge e Wheeler (1957) analisaram a estabilidade dessa solução sob pequenas perturbações, mostrando que o problema pode ser simplificado para uma equação de onda unidimensional com um potencial de barreira efetivo — o potencial de Regge-Wheeler. Zerilli (1970) expandiu o estudo para perturbações de paridade polar, encontrando um potencial diferente, mas matematicamente equivalente ao caso axial. Esses avanços comprovaram que a métrica de Schwarzschild é estável e criaram a estrutura matemática que levou à formulação dos modos quasinormais (KOKKOTAS; SCHMIDT, 1999; NOLLERT, 1999).

No âmbito da astronomia de ondas gravitacionais, os modos quasinormais relacionados à métrica de Schwarzschild são cruciais, pois caracterizam a fase de relaxação de um buraco negro perturbado ou recém-formado. As frequências complexas resultantes dependem exclusivamente da massa do objeto, reforçando a ideia universal da "calvície" dos buracos negros (BERTI; CARDOSO; STARINETS, 2009). Assim, a métrica de Schwarzschild não só oferece um cenário teórico simples e acessível, mas também une diretamente a relatividade geral com observações experimentais recentes, como as detecções do LIGO e Virgo.

2.1.5 Harmônicos Esféricos

Os harmônicos esféricos representam um conjunto ortonormal de funções definidas na superfície de uma esfera unitária S^2 , sendo essenciais na análise de pequenas mudanças em métricas com simetria esférica. Na relatividade geral, eles servem para dividir as alterações no tensor

métrico $h_{\mu\nu}$ em partes que espelham a simetria angular da métrica original, como na solução de Schwarzschild (REGGE; WHEELER, 1957; CHANDRASEKHAR, 1983).

Matematicamente, os harmônicos esféricos $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ são as funções próprias do operador de Laplace–Beltrami na esfera, cumprindo a seguinte equação:

$$\nabla_{\Omega}^2 Y_{\ell m}(\theta, \phi) = -\ell(\ell + 1)Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (12)$$

onde ∇_{Ω}^2 é o laplaciano angular (também chamado de *Operador de Legendre*), sendo definido por:

$$\nabla_{\Omega}^2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad (13)$$

ℓ é o número quântico azimutal (um inteiro não negativo) e m é o número magnético ($-\ell \leq m \leq \ell$). Esses harmônicos formam uma base completa para expandir funções regulares em S^2 , com a seguinte propriedade de ortonormalidade:

$$\int Y_{\ell m}(\theta, \phi) Y_{\ell' m'}^*(\theta, \phi) d\Omega = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}, \quad (14)$$

onde $d\Omega = \sin \theta, d\theta, d\phi$.

A aplicação dessa decomposição em harmônicos esféricos possibilita que as equações de Einstein linearizadas se dividam em uma parte que depende do tempo e do raio, e outra que é puramente angular. Cada par de índices (ℓ, m) representa um modo independente de oscilação, o que simplifica bastante o estudo das perturbações gravitacionais (KOKKOTAS; SCHMIDT, 1999; NOLLERT, 1999).

No contexto tensorial, é possível criar harmônicos vetoriais e tensoriais a partir das derivadas covariantes dos harmônicos escalares. Assim, as partes do tensor de perturbação $h_{\mu\nu}$ são separadas em combinações de $Y_{\ell m}$, $\nabla_a Y_{\ell m}$ e $\nabla_a \nabla_b Y_{\ell m}$, permitindo classificar as perturbações conforme sua transformação sob rotações e paridade (THORNE, 1980; MARTEL; POISSON, 2005).

As partes que se transformam como $(-1)^\ell$ são consideradas de paridade par (polar), e as que se transformam como $(-1)^{\ell+1}$ são de paridade ímpar (axial), refletindo diretamente as características de simetria dos harmônicos originais. Essa relação harmoniosa entre simetria esférica, decomposição angular e propriedades de paridade é o que permite reduzir o problema tensorial completo a um conjunto de equações escalares independentes, como as equações de Regge–Wheeler e Zerilli (REGGE; WHEELER, 1957; ZERILLI, 1970).

Em resumo, os harmônicos esféricos são a ferramenta matemática que converte a simetria esférica da métrica de Schwarzschild em termos analíticos e computacionais, permitindo isolar os graus de liberdade físicos importantes das perturbações gravitacionais e servindo de base para a teoria dos modos quasinormais.

2.1.6 Ondas Gravitacionais e Perturbações Tensoriais

Na formulação da relatividade geral, as ondas gravitacionais são perturbações dinâmicas da métrica do espaço-tempo que se propagam à velocidade da luz. Elas correspondem às soluções ondulatórias das equações de Einstein linearizadas em torno de uma métrica de fundo, e representam a manifestação física da radiação do campo gravitacional (EINSTEIN, 1916; MISNER; THORNE; WHEELER, 1973; WALD, 1984).

Em um espaço-tempo levemente perturbado, escreve-se a métrica como

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu}, \quad (15)$$

onde $g_{\mu\nu}^{(0)}$ é a métrica de fundo e $h_{\mu\nu}$ é uma perturbação pequena ($|h| \ll 1$). A inserção dessa expressão nas equações de Einstein e a linearização em $h_{\mu\nu}$ resultam em

$$\delta G_{\mu\nu} = 8\pi \delta T_{\mu\nu}, \quad (16)$$

que, no vácuo ($T_{\mu\nu} = 0$), conduz a

$$\delta G_{\mu\nu} = 0. \quad (17)$$

No caso particular do espaço-tempo plano de Minkowski, e adotando o calibre de Donder $\nabla^\mu \bar{h}_{\mu\nu}$ (com $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$), a equação de campo linearizada reduz-se à equação de onda

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (18)$$

cujas soluções correspondem à propagação de ondas planas que transportam energia e momento através do espaço-tempo (WALD, 1984; SCHUTZ, 2009).

Essas perturbações são de natureza tensorial, pois o campo $h_{\mu\nu}$ possui dois graus de liberdade físicos, correspondendo às duas polarizações da onda gravitacional — normalmente designadas por h_+ e $h_\times$. Em uma base ortonormal, o campo tensorial pode ser representado como

$$h_{ij}(t, z) = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}, \quad (19)$$

mostrando que as ondas gravitacionais são transversais e sem traço ($h_i^i = 0$), propriedades que resultam diretamente das condições de calibre impostas ao tensor perturbativo (CHRISTODOULOU; KLUGE, 1991; MAGGIO; CARDOSO, 2020).

Em geometrias curvadas, como a de Schwarzschild, as ondas gravitacionais não são mais ondas planas, mas se manifestam como perturbações tensoriais da métrica que obedecem as equações de onda efetivas no espaço-tempo curvo. As componentes angulares do tensor podem ser decompostas em harmônicos tensoriais definidos sobre a 2-esfera:

$$h_{AB} = r^2 \left[H_T^{(S)}(t, r) Y_{AB}^{(S)} + H_T^{(V)}(t, r) Y_{AB}^{(V)} + H_T^{(T)}(t, r) Y_{AB}^{(T)} \right], \quad (20)$$

onde $Y_{AB}^{(S)}$, $Y_{AB}^{(V)}$ e $Y_{AB}^{(T)}$ são, respectivamente, os harmônicos tensoriais escalares, vetoriais e puros tensoriais construídos a partir dos harmônicos esféricos $Y_{\ell m}$ e suas derivadas covariantes (THORNE, 1980; MARTEL; POISSON, 2005).

Os modos polares (ou paridade par) são associados aos harmônicos tensoriais derivados de $Y_{\ell m}$ e suas derivadas simétricas $\nabla_A \nabla_B Y_{\ell m}$, enquanto os modos axiais (ou paridade ímpar) associam-se aos harmônicos construídos com o tensor de Levi-Civita da 2-esfera, $\epsilon_{AB} \nabla^B Y_{\ell m}$. Cada conjunto de modos define uma equação diferencial independente, com potenciais efetivos distintos — o potencial de Regge–Wheeler para os modos axiais e o potencial de Zerilli para os modos polares (REGGE; WHEELER, 1957; ZERILLI, 1970; CHANDRASEKHAR, 1983).

Essas soluções representam ondas gravitacionais curvas, que descrevem as oscilações do espaço-tempo de um buraco negro após uma perturbação. Quando sujeitas às condições de contorno físicas (ondas puramente entrantes no horizonte e puramente saíntes no infinito), tais soluções admitem frequências complexas — os modos quasinormais (QNMs) — que caracterizam a emissão gravitacional durante a fase de relaxação (KOKKOTAS; SCHMIDT, 1999; NOLLERT, 1999; BERTI; CARDOSO; STARINETS, 2009).

Em resumo, as ondas gravitacionais constituem as manifestações físicas das perturbações tensoriais da métrica. No formalismo de decomposição harmônica, elas correspondem aos graus de liberdade tensoriais associados aos harmônicos, e sua análise permite conectar diretamente a teoria das perturbações de Einstein com as observações experimentais da astronomia de ondas gravitacionais.

2.1.7 Os Símbolos de Christoffel

Os símbolos de Christoffel, também conhecidos como coeficientes de conexão da Levi-Civita, desempenham papel central na formulação da relatividade geral, pois são responsáveis por descrever como os vetores se transportam paralelamente e como o espaço-tempo se curva na presença de massa e energia. Em essência, esses símbolos codificam as propriedades diferenciais da métrica e aparecem naturalmente nas expressões para derivadas covariantes e geodésicas (EINSTEIN, 1916; MISNER; THORNE; WHEELER, 1973; WALD, 1984).

Em um espaço-tempo munido de uma métrica $g_{\mu\nu}$, os símbolos de Christoffel de segunda espécie são definidos por

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \right). \quad (21)$$

Esses coeficientes não constituem um tensor, pois não se transformam covariantemente sob mudanças de coordenadas, mas combinam-se de modo a garantir que a derivada covariante de tensores seja bem definida. A derivada covariante de um vetor V^{μ} , por exemplo, é dada por

$$\nabla_\nu V^\mu = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\sigma\nu} V^\sigma, \quad (22)$$

enquanto para um vetor covariante V_μ , a expressão torna-se

$$\nabla_\nu V_\mu = \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} V_\sigma. \quad (23)$$

Essas definições asseguram que a derivada covariante da métrica seja nula, condição conhecida como compatibilidade métrica,

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad (24)$$

a qual caracteriza a conexão de Levi-Civita — única conexão sem torção ($\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0$) compatível com a métrica (WALD, 1984; SCHUTZ, 2009).

Fisicamente, os símbolos de Christoffel aparecem nas equações das geodésicas, que descrevem o movimento de partículas livres sob a ação apenas da gravidade. A equação geodésica é escrita como

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (25)$$

mostrando que os coeficientes $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ atuam como “forças inerciais” decorrentes da curvatura do espaço-tempo.

No caso particular da métrica de Schwarzschild, dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (26)$$

os símbolos de Christoffel não nulos assumem formas específicas, derivadas das derivadas parciais da métrica. Por exemplo, os mais relevantes são

$$\begin{aligned} \Gamma^t_{tr} &= \frac{M}{r(r-2M)}, & \Gamma^r_{tt} &= \frac{M(r-2M)}{r^3}, & \Gamma^r_{rr} &= -\frac{M}{r(r-2M)}, \\ \Gamma^r_{\theta\theta} &= -(r-2M), & \Gamma^r_{\phi\phi} &= -(r-2M)\sin^2 \theta, & \Gamma^\theta_{r\theta} &= \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{r}. \end{aligned} \quad (27)$$

Essas quantidades descrevem como as coordenadas variam localmente no espaço-tempo curvo e são essenciais para o cálculo da curvatura via o tensor de Riemann $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$, que depende explicitamente das derivadas e produtos dos símbolos de Christoffel.

Na formulação das perturbações métricas, a variação dos símbolos de Christoffel devida a uma perturbação $h_{\mu\nu}$ é expressa como

$$\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma} (\nabla_\mu h_{\sigma\nu} + \nabla_\nu h_{\sigma\mu} - \nabla_\sigma h_{\mu\nu}), \quad (28)$$

o que permite linearizar o tensor de Riemann e, consequentemente, o tensor de Einstein em termos de (CHANDRASEKHAR, 1983; KOKKOTAS; SCHMIDT, 1999). Essa linearização é

o ponto de partida para a formulação das equações das ondas gravitacionais e para o estudo dos modos quasinormais em buracos negros.

Em síntese, os símbolos de Christoffel representam a ponte entre a geometria diferencial e a dinâmica gravitacional. Eles atuam como fatores de correção da curvatura do espaço-tempo e, ao mesmo tempo, traduzem a estrutura local da métrica em equações diferenciais que governam o movimento de partículas, a propagação de campos e as perturbações gravitacionais.

2.1.8 Tensor de Ricci e Riemann

Os tensores de Ricci e de Riemann são os objetos matemáticos centrais na formulação geométrica da relatividade geral, pois codificam a curvatura intrínseca do espaço-tempo e descrevem como a gravidade se manifesta geometricamente. O tensor de Riemann, denotado $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$, mede a não comutatividade da derivada covariante e, portanto, expressa o quanto o transporte paralelo de um vetor em torno de um pequeno laço fechado depende do caminho percorrido. Ele é definido por meio da conexão de Levi-Civita $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ como

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\sigma\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\sigma\mu} + \Gamma^\rho_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} - \Gamma^\rho_{\lambda\nu} \Gamma^\lambda_{\sigma\mu}. \quad (29)$$

Esse tensor possui as simetrias

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu}, \quad R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (30)$$

A partir do tensor de Riemann obtém-se o tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$, por contração:

$$R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu}. \quad (31)$$

Enquanto o tensor de Riemann possui, em quatro dimensões, vinte componentes independentes, o tensor de Ricci reduz-se a dez. Fisicamente, $R_{\mu\nu}$ mede a curvatura média do espaço-tempo e aparece diretamente nas equações de campo de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (32)$$

em que R é o escalar de Ricci e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento da matéria. O lado esquerdo da equação descreve a geometria — ou a curvatura causada pela gravidade — enquanto o lado direito representa o conteúdo material e energético. Essa relação, estabelecida por EINSTEIN (1915), é o núcleo conceitual da relatividade geral: “a matéria diz ao espaço-tempo como se curvar, e o espaço-tempo diz à matéria como se mover” (MISNER, THORNE and WHEELER, 1973).

O tensor de Ricci desempenha papel especial porque, em muitos contextos físicos, como no vácuo gravitacional ($T_{\mu\nu} = 0$), ele se anula, $R_{\mu\nu} = 0$, reduzindo as equações de campo a condições puramente geométricas. Já o tensor completo de Riemann permite distinguir aspectos da curvatura não capturados pelo Ricci, especialmente através de sua parte livre de traço, o

tensor de Weyl $C_{\sigma\mu\nu}^{\rho}$, responsável por efeitos como o cisalhamento e a propagação de ondas gravitacionais em regiões sem matéria (CHANDRASEKHAR, 1983).

2.1.9 Modos quasinormais

Os modos quasinormais (QNM ou QNM) são modos de dissipação de energia de um objeto ou campo perturbado, caracterizando perturbações que decaem no tempo. Diferentemente dos modos normais ideais, onde a oscilação persiste indefinidamente, nos modos quasinormais a amplitude da oscilação decai exponencialmente, sendo esse decaimento descrito por uma frequência complexa. A parte real desta frequência corresponde à frequência de oscilação, enquanto a parte imaginária está associada à taxa de decaimento temporal dessa oscilação. Um exemplo intuitivo clássico para entender os modos quasinormais é a vibração de um copo de vidro após ser levemente batido; a vibração que se observa não persiste para sempre, mas decai com o tempo, o que caracteriza um modo quasinormal. Matematicamente, o comportamento da amplitude $\psi(t)$ pode ser aproximado por

$$\psi(t) \approx e^{-\omega''t} \cos \omega't, \quad (33)$$

onde ω' é a frequência real e ω'' é a frequência imaginária ligada ao decaimento temporal. Na física teórica, especialmente no contexto da relatividade geral, modos quasinormais aparecem como soluções das equações diferenciais linearizadas que descrevem perturbações em buracos negros. Essas oscilações representam o chamado "ringdown", ou seja, a diminuição exponencial da assimetria do buraco negro conforme ele evolui para um estado de equilíbrio esférico perfeito. A frequência quasinormal é um número complexo que encapsula duas informações distintas: a parte real expressa a frequência natural da oscilação e a parte imaginária captura a taxa de amortecimento exponencial da amplitude dessa oscilação no tempo (NOLLERT, 1999; KOKKOTAS; SCHMIDT, 1999). Com isso, matematicamente, os QNM são soluções das equações de perturbação lineares (como as equações de REGGE–WHEELER e ZERILLI, no caso do buraco negro de Schwarzschild) que satisfazem condições de contorno específicas: as ondas devem ser puramente de saída no infinito e puramente de entrada no horizonte de eventos. Essas condições refletem o fato de que o sistema não é conservativo — energia pode escapar para o infinito ou ser absorvida pelo horizonte —, o que leva a um espectro de frequências complexas. A parte real determina a frequência de oscilação, enquanto a parte imaginária indica o decaimento exponencial no tempo, associado à dissipação por emissão de radiação gravitacional (CHANDRASEKHAR & DETWEILER, 1975; LEAVER, 1985).

Fisicamente, o comportamento temporal de uma perturbação gravitacional pode ser dividido em três fases: (i) um regime transitório inicial, dependente das condições específicas da perturbação; (ii) a fase intermediária, dominada pelos modos quasinormais, na qual o sinal é descrito por uma soma de termos do tipo ; e (iii) um regime tardio de tail decay, em que o campo cai com uma lei de potência (PRICE, 1972; NOLLERT, 1999). É na fase intermediária que se

manifesta o espectro discreto dos QNM, que depende apenas dos parâmetros do buraco negro — massa, momento angular e, eventualmente, carga —, o que confere a esses modos o papel de “impressão digital” do espaço-tempo (BERTI, CARDOSO & STARINETS, 2009).

A importância astrofísica dos modos quasinormais se tornou ainda mais evidente após as detecções diretas de ondas gravitacionais pelos detectores LIGO e VIRGO, em que o ringdown final dos sinais observados foi consistentemente descrito por frequências quasinormais de buracos negros de Kerr (ABBOTT et al., 2016). A concordância entre as frequências observadas e as previstas pela relatividade geral constitui um dos testes mais diretos do teorema da calvície (no-hair theorem), segundo o qual um buraco negro astrofísico é completamente determinado apenas por sua massa e momento angular. Desvios observacionais nas frequências ou nos tempos de amortecimento poderiam sinalizar a presença de novos campos, dimensões extras ou modificações da gravidade (CARDOSO & PANI, 2019).

2.1.10 Equações mestres - Regge-Wheeler e Zerilli

As equações mestres de perturbação axial e polar representam um dos resultados mais elegantes e fundamentais da teoria das perturbações lineares de buracos negros. Elas descrevem a dinâmica das oscilações lineares do espaço-tempo ao redor da métrica de Schwarzschild e são a base para o estudo dos modos quasinormais (quasinormal modes, QNM).

A formulação original dessas equações foi desenvolvida por REGGE & WHEELER (1957) para perturbações axiais (ou ímpares, de paridade negativa) e posteriormente generalizada por ZERILLI (1970) para perturbações polares (ou pares, de paridade positiva). Ambas as classes de perturbações decorrem de uma decomposição tensorial harmônica da métrica perturbada em modos angulares, segundo sua transformação sob inversão de paridade. Embora as duas equações possuam potenciais diferentes, ambas assumem a forma de uma equação de onda unidimensional para uma função mestre que codifica toda a informação física relevante da perturbação.

No caso axial, considera-se a métrica de Schwarzschild perturbada por termos antissimétricos nas componentes angulares. A linearização das equações de Einstein em torno dessa métrica, seguida da eliminação das variáveis redundantes, conduz à equação de Regge–Wheeler,

$$\frac{\partial^2 Q_\ell(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Q_\ell(t, x)}{\partial x^2} + V_{\text{RW}}(r) Q_\ell(t, x) = 0, \quad (34)$$

onde $Q_\ell(t, r_*)$ é a função mestre axial, e x é a coordenada *tortoise* definida por

$$\frac{dr_*}{dr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}. \quad (35)$$

O potencial efetivo de Regge–Wheeler é dado por

$$V_{\text{RW}}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3} \right], \quad (36)$$

onde $\ell \geq 2$ é o número quântico angular da perturbação. Esse potencial apresenta uma barreira centrada em torno de $r \approx 3M$, região onde a curvatura é mais intensa e de onde se originam os modos quasinormais dominantes. O termo $(1 - \frac{2M}{r})$ garante que, nas fronteiras, a equação se comporte como uma onda livre — condição essencial para impor os contornos físicos de ondas entrantes no horizonte e saíntes no infinito (REGGE & WHEELER, 1957; CHANDRASEKHAR, 1983).

Já as perturbações polares correspondem aos modos de paridade positiva, associados a deformações simétricas do espaço-tempo. ZERILLI (1970) mostrou que, após a linearização e combinação adequada das componentes da métrica perturbada, é possível reduzir o sistema a uma única equação de onda para a função mestre polar $Z_\ell(t, x)$:

$$\frac{\partial^2 Z_\ell}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Z_\ell}{\partial r_*^2} + V_Z(r) Z_\ell = 0, \quad (37)$$

com o potencial de Zerilli

$$V_Z(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{72M^3}{r^5 \lambda^2} - \frac{12M}{r^3 \lambda^2} (\ell - 1)(\ell + 2) \left(1 - \frac{3M}{r}\right) + \frac{(\ell + 1)\ell(\ell + 2)(\ell + 1)}{r^2 \lambda} \right], \quad (38)$$

Apesar de sua aparência mais complexa, o potencial $V_Z(r)$ é positivo e tem estrutura semelhante à de Regge–Wheeler, apresentando o mesmo tipo de barreira em torno de $r \approx 3M$.

Um dos resultados mais notáveis, demonstrado posteriormente por CHANDRASEKHAR (1975, 1983), é que as duas equações — Regge–Wheeler e Zerilli — são isoespectrais: possuem o mesmo espectro de frequências quasinormais. Isso significa que as perturbações axiais e polares de um buraco negro de Schwarzschild oscilam e decaem com as mesmas frequências complexas, ainda que sejam descritas por potenciais diferentes.

Fisicamente, as funções Q_ℓ e Z_ℓ representam diferentes combinações das componentes da métrica perturbada, mas ambas descrevem a mesma radiação gravitacional de spin 2 propagando-se no fundo de Schwarzschild. A estrutura de barreira dos potenciais efetivos confina parcialmente as ondas, levando ao fenômeno de ressonância que gera os modos quasinormais observados nas simulações e nas detecções reais de ondas gravitacionais (NOLLERT, 1999; BERTI, CARDOSO & STARINETS, 2009).

Em termos geométricos, essas equações equivalem à propagação de um campo tensorial massless de spin 2 em um potencial curvo, de modo análogo à equação de Schrödinger para um campo escalar com potencial efetivo dependente de r . Esse formalismo unifica as perturbações gravitacionais em um problema espectral bem definido, cuja solução fornece os autovalores complexos ω_n correspondentes às oscilações amortecidas do buraco negro.

2.1.11 Modos Quasinormal na Formulação de Laplace

A análise de perturbações lineares na métrica de Schwarzschild, conforme desenvolvida através das equações de Regge-Wheeler e Zerilli, depara-se com uma limitação fundamental quando abordada sob o ponto de vista clássico de Sturm-Liouville: a completude do espectro. Como os potenciais barreira decaem assintoticamente nas fronteiras ($x \rightarrow \pm\infty$), o operador associado possui caráter estritamente contínuo, impedindo que a evolução temporal seja representada de forma direta como uma combinação linear simples de autofunções discretas. Para contornar esse impecilho matemático e formalizar o surgimento dos modos quasinormais (MQN) observados no decaimento intermediário do sinal perturbativo, introduz-se a transformada de Laplace. Definimos a transformada de Laplace de uma função temporal $Q(t, x)$ como:

$$\hat{Q}(s, x) = \int_0^\infty Q(t, x) e^{-st} dt, \quad (39)$$

onde a variável complexa s possui parte real estritamente positiva ($\text{Re}(s) > 0$) para garantir a convergência da integralização. Aplicando este formalismo à equação de onda unidimensional, a derivada temporal $\partial_t^2 Q(t, x)$ introduz os termos de dados iniciais de Cauchy, resultando na equação diferencial ordinária não-homogênea para a amplitude espacial:

$$\frac{d^2 \hat{Q}}{dx^2} - s^2 \hat{Q} - V(x) \hat{Q} = -I(s, x). \quad (40)$$

A função fonte $I(s, x)$ acopla diretamente os perfis da perturbação inicial e sua derivada no instante $t = 0$, sendo expressa por $I(s, x) = sQ(0, x) + \partial_t Q(0, x)$.

2.1.12 A Função de Green e o Espectro de Frequências

A solução geral da equação não-homogênea pode ser elegantemente estruturada através do método da Função de Green, $G(s, x, x_0)$. Construímos o propagador a partir de duas soluções linearmente independentes, $f_-(s, x)$ e $f_+(s, x)$, da equação homogênea associada:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - [s^2 + V(x)]f = 0. \quad (41)$$

As condições físicas de contorno exigem que a perturbação permaneça limitada em todo o domínio do espaço-tempo. No semiplano de convergência $\text{Re}(s) > 0$, identificamos que $f_-(s, x)$ assume comportamento assintótico regular no horizonte de eventos ($x \rightarrow -\infty$), enquanto $f_+(s, x)$ decai e permanece limitada no infinito espacial ($x \rightarrow +\infty$):

$$f_-(s, x) \sim e^{sx} \quad \text{as } x \rightarrow -\infty, \quad (42)$$

$$f_+(s, x) \sim e^{-sx} \quad \text{as } x \rightarrow +\infty. \quad (43)$$

A solução física no domínio de Laplace toma a forma integral:

$$\hat{Q}(s, x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(s, x, x_0) I(s, x_0) dt_0 \quad (44)$$

Onde a Função de Green é modulada inversamente pelo Wronskiano $W(s)$ das soluções independentes:

$$G(s, x, x_0) = \frac{1}{W(s)} f_{-}(s, x_{<}) f_{+}(s, x_{>}). \quad (45)$$

Definindo-se as coordenadas ordenadas $x_{<} = \min(x, x_0)$ e $x_{>} = \max(x, x_0)$. O Wronskiano, dado por $W(s) = f_{-} f'_{+} - f'_{-} f_{+}$, é uma quantidade conservada em relação a r e suas raízes no plano complexo determinam os polos da Função de Green.

2.1.12.1 O Contorno de Inversão e a Expansão de Modos

Para recuperarmos a dinâmica temporal da perturbação $Q(t, x)$, realiza-se a integral de inversão de Laplace ao longo do contorno de Bromwich no plano complexo s :

$$Q(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{Q}(s, x) e^{st} ds. \quad (46)$$

Como a Função de Green possui extensão analítica para o semiplano esquerdo ($\text{Re}(s) < 0$), o teorema dos resíduos de Cauchy permite deformar o contorno de integração clássico ao redor dos polos isolados gerados pelo anulamento do Wronskiano ($W(s_q) = 0$).

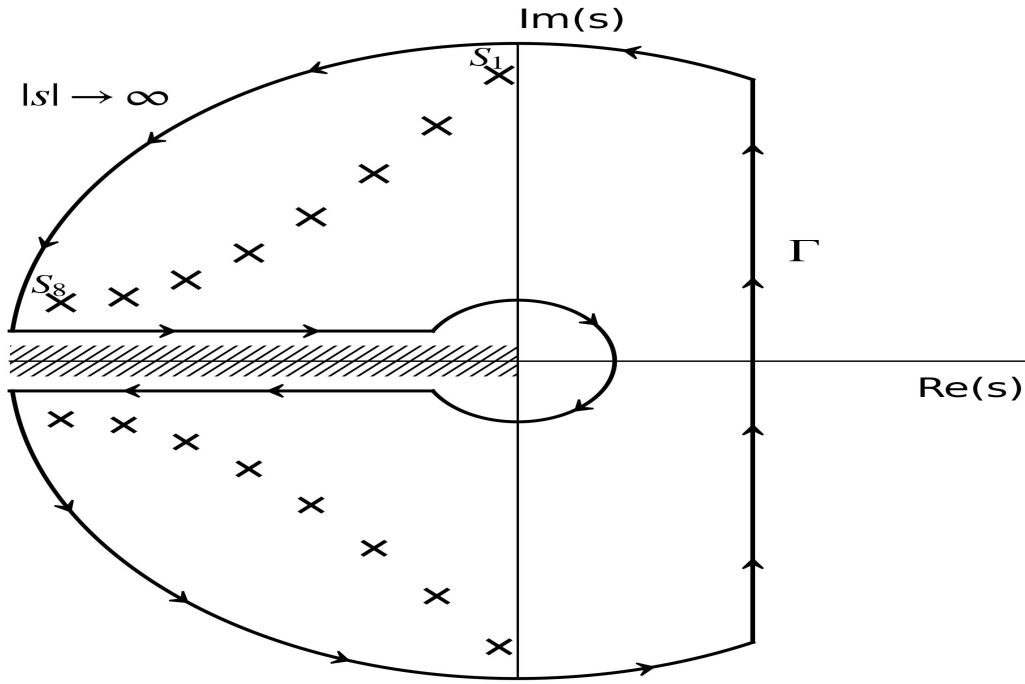


Figura 1 – Deformação do contorno de Bromwich Γ no plano complexo s para a inversão da transformada de Laplace. Os marcadores $\times$ indicam a distribuição dos polos isolados s_q associados às frequências quasinormais, enquanto a região hachurada sobre o eixo real representa o corte de ramificação (branch cut) responsável pelo surgimento da cauda de lei de potência em tempos tardios.

Ao realizarmos a substituição formal $s = i\omega$, as frequências complexas dos polos coincidem exatamente com as frequências quasinormais ω_q obtidas no cálculo de Fourier. Avaliando os resíduos associados a estes polos singulares, a evolução temporal da perturbação axial na região intermediária pode ser expandida na forma de somatório:

$$Q(t, x) = \sum_q c_q f_q(x) e^{s_q t} + I_{\text{cut}}(t, x). \quad (47)$$

O termo $I_{\text{cut}}(t, x)$ representa a contribuição da integral do corte de ramificação (branch cut) ao longo do eixo imaginário, originada pelo comportamento assintótico de longo alcance do potencial barreira. Esta componente remanescente é responsável pelo surgimento da cauda de lei de potência (power-law tail) observada em tempos tardios da evolução da perturbação no espaço-tempo de Schwarzschild. Desta forma, os coeficientes de excitação c_q quantificam diretamente o quão fortemente um determinado modo quasinormal é ativado pelos dados iniciais de Cauchy, consolidando a formulação de Laplace como o arcabouço matemático rigoroso para o estudo do amortecimento e estabilidade de objetos compactos.

2.1.13 Integração Temporal Direta

Diferente dos métodos de domínio de frequência, a integração direta de Cauchy permite visualizar a evolução dinâmica completa da perturbação axial ou polar. Utilizando a parametrização por coordenadas de cone de luz ou a discretização por diferenças finitas em uma malha bidimensional espacial-temporal (t, x) , a equação hiperbólica:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) Q(t, x) = V(x)Q(t, x), \quad (48)$$

é integrada numericamente a partir de um pacote de ondas gaussiano inicial (VISHVESHWARA, 1970).

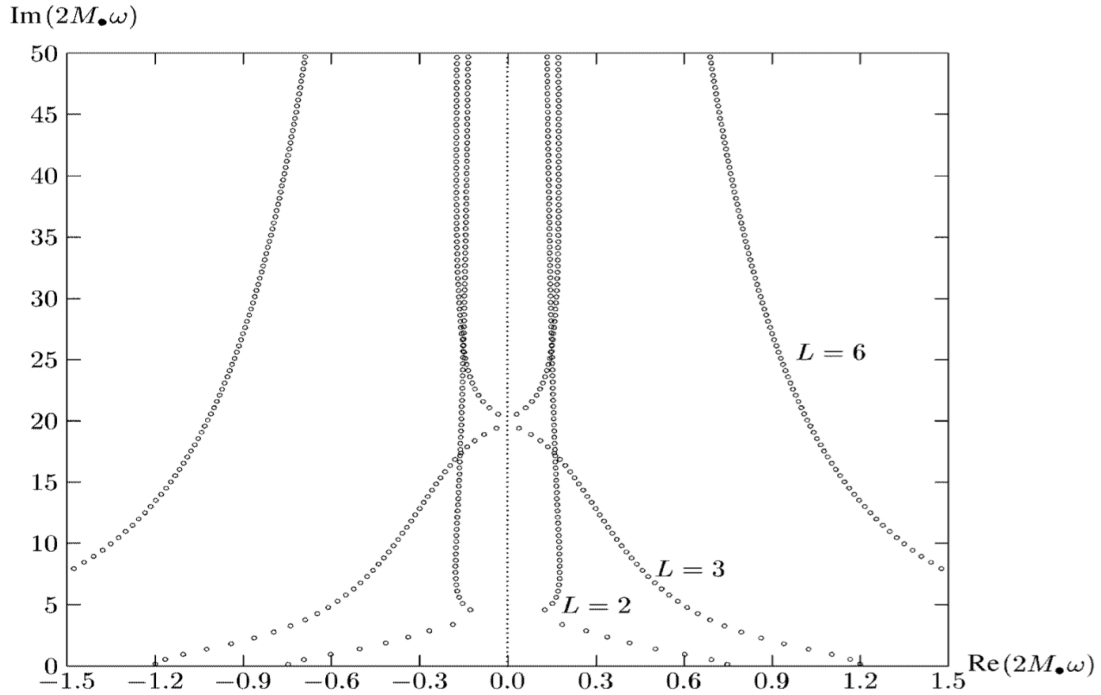


Figura 2 – Evolução temporal de uma perturbação axial no espaço-tempo de Schwarzschild obtida por integração numérica direta. O perfil destaca a resposta transiente inicial, o regime intermediário de amortecimento quasinormal e a cauda de lei de potência em tempos tardios.

O perfil temporal resultante expõe com clareza as três fases da perturbação: o estalo inicial dependente da fonte, seguido pelo decaimento exponencial dos modos quasinormais induzidos pela barreira e, finalmente, a cauda de lei de potência descrita por Price (1972). Extraindo a transformada de Fourier da região intermediária do sinal, isolam-se os valores das frequências estáveis do objeto compacto.

2.2 METODOLOGIA

2.2.1 Cálculo dos Símbolos de Christoffel

Inicialmente, foram calculados todos os sessenta e quatro símbolos de Christoffel e separados em nulos e não nulos. Esse procedimento foi realizado para facilitar e tornar prático cálculos subsequentes.

Sendo o calculo dos símbolos definidos pela formulação como sendo:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} \dot{g}^{\lambda\sigma} (\partial_{\mu} \dot{g}_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} \dot{g}_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} \dot{g}_{\mu\nu}). \quad (49)$$

Aplicando à métrica de fundo, no caso Schwazrchild em sua forma com índices inferiores e inferiores

$$\dot{g}_{\mu\nu} = \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right), \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, r^2, r^2 \sin^2 \theta \right], \quad (50)$$

$$\dot{g}^{\mu\nu} = \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right], \quad (51)$$

onde $\dot{g}_{\mu\nu}$ e $\dot{g}^{\mu\nu}$ estão representando apenas as suas respectivas diagonais.

Com isso temos oque precisamos para iniciar os cálculos. Utilizaremos apenas as coordenadas de $\sigma = \lambda$, pois todos os valores de $\sigma \neq \lambda$ são zeros

2.2.1.1 Calculando Γ_{tt}^t

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{1}{2} \dot{g}^{tt} (\partial_t \dot{g}_{tt} + \partial_t \dot{g}_{tt} - \partial_t \dot{g}_{tt}). \quad (52)$$

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{1}{2} \dot{g}^{tt} (\partial_t \dot{g}_{tt}). \quad (53)$$

Sendo $\dot{g}^{tt} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$ e $\dot{g}_{tt} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$, temos

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \partial_t \left(1 - \frac{2M}{r}\right). \quad (54)$$

Como $\partial_t \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = 0$, já que $\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$ independe de t , logo

$$\Gamma_{tt}^t = 0. \quad (55)$$

2.2.1.2 Calculando Γ_{tr}^t

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2} \dot{g}^{tt} (\partial_t \dot{g}_{rt} + \partial_r \dot{g}_{tt} - \partial_t \dot{g}_{tr}). \quad (56)$$

Como as componente $\dot{g}_{tr}$ e $\dot{g}_{rt}$ são nulas,

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2} \dot{g}^{tt} (\partial_r \dot{g}_{tt}). \quad (57)$$

Sendo $\dot{g}^{tt} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$ e $\dot{g}_{tt} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$, temos

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \partial_r \left(1 - \frac{2M}{r}\right). \quad (58)$$

Como $\partial_r \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = \frac{2M}{r^2}$, logo

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{2M}{r^2}, \quad (59)$$

$$\Gamma_{tr}^t = \left(\frac{r}{r - 2M}\right) \frac{M}{r^2}, \quad (60)$$

$$\Gamma_{tr}^r = \left(\frac{M}{r^2 - 2Mr}\right) = \frac{1}{r^2} \left(\frac{M}{1 - \frac{2M}{r}}\right). \quad (61)$$

2.2.1.3 Calculando Γ_{tt}^r

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2} \dot{g}^{rr} (\partial_t \dot{g}_{rt} + \partial_t \dot{g}_{tr} - \partial_r \dot{g}_{tt}). \quad (62)$$

Como as componente $\dot{g}_{rt}$ e $\dot{g}_{tr}$ são nulas,

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2} \dot{g}^{tt} (-\partial_r \dot{g}_{tt}). \quad (63)$$

Sendo $\dot{g}^{tt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$ e $\dot{g}_{tt} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$, temos

$$\Gamma_{tt}^r = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(-\partial_r \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\right). \quad (64)$$

Como $\partial_r \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = \frac{2M}{r^2}$, logo

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{2M}{r^2}, \quad (65)$$

$$\Gamma_{tt}^r = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{M}{r^2}, \quad (66)$$

$$\Gamma_{tt}^r = \left(\frac{rM - 2M^2}{r^3}\right) = \frac{M}{r^2} \left(\frac{r - 2M}{r}\right). \quad (67)$$

2.2.1.4 Calculando $\Gamma_{\phi\phi}^\theta$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = \frac{1}{2} \dot{g}^{\theta\theta} (\partial_\phi \dot{g}_{\theta\phi} + \partial_\phi \dot{g}_{\phi\theta} - \partial_\theta \dot{g}_{\phi\phi}). \quad (68)$$

Como as componente $\dot{g}_{\theta\phi}$ e $\dot{g}_{\phi\theta}$ são nulas,

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = \frac{1}{2} \dot{g}^{\theta\theta} (-\partial_\theta \dot{g}_{\phi\phi}). \quad (69)$$

Sendo $\dot{g}^{\theta\theta} = \left(\frac{1}{r^2}\right)$ e $\dot{g}_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta$, temos

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2}\right) (-\partial_\theta (r^2 \sin^2 \theta)). \quad (70)$$

Como $\partial_\theta (r^2 \sin^2 \theta) = r^2 \sin 2\theta = 2r^2 \sin \theta \cos \theta$, logo

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2}\right) 2r^2 \sin \theta \cos \theta, \quad (71)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = \left(\frac{1}{2r^2}\right) 2r^2 \sin \theta \cos \theta, \quad (72)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = \sin \theta \cos \theta. \quad (73)$$

2.2.1.5 Os outros símbolos

O restante dos símbolos estão dispostos na seguinte Tabela 1, e seus respectivos calculos podem ser encontrados no Apêndice - Cálculo dos símbolos de Christoffel.

Símbolos nulos			Símbolos não nulos
$\Gamma_{tt}^t = 0$	$\Gamma_{r\phi}^t = \Gamma_{\phi r}^t = 0$	$\Gamma_{\theta\theta}^\theta = 0$	$\Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = \frac{M}{r^2 - 2Mr}$
$\Gamma_{rr}^t = 0$	$\Gamma_{\theta\theta}^t = 0$	$\Gamma_{\theta\phi}^t = \Gamma_{\phi\theta}^t = 0$	$\Gamma_{tt}^r = \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$
$\Gamma_{\phi\phi}^t = 0$	$\Gamma_{tr}^r = \Gamma_{rt}^r = 0$	$\Gamma_{t\theta}^\theta = \Gamma_{\theta t}^\theta = 0$	$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$
$\Gamma_{\phi\phi}^\phi = 0$	$\Gamma_{t\theta}^t = \Gamma_{\theta t}^t = 0$	$\Gamma_{t\phi}^t = \Gamma_{\phi t}^t = 0$	$\Gamma_{\phi\phi}^r = -r \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sin^2 \theta$
$\Gamma_{t\theta}^r = \Gamma_{\theta t}^r = 0$	$\Gamma_{t\phi}^r = \Gamma_{\phi t}^r = 0$	$\Gamma_{r\theta}^r = \Gamma_{\theta r}^r = 0$	$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}$
$\Gamma_{r\phi}^r = \Gamma_{\phi r}^r = 0$	$\Gamma_{\theta\phi}^r = \Gamma_{\phi\theta}^r = 0$	$\Gamma_{tt}^\theta = 0$	$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta$
$\Gamma_{tr}^\theta = \Gamma_{rt}^\theta = 0$	$\Gamma_{t\phi}^\theta = \Gamma_{\phi t}^\theta = 0$	$\Gamma_{rr}^\theta = 0$	$\Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}$
$\Gamma_{r\phi}^\theta = \Gamma_{\phi r}^\theta = 0$	$\Gamma_{\theta\phi}^\theta = \Gamma_{\phi\theta}^\theta = 0$	$\Gamma_{tt}^\phi = 0$	$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot \theta$
$\Gamma_{tr}^\phi = \Gamma_{rt}^\phi = 0$	$\Gamma_{t\theta}^\phi = \Gamma_{\theta t}^\phi = 0$	$\Gamma_{t\phi}^\phi = \Gamma_{\phi t}^\phi = 0$	$\Gamma_{rr}^r = \frac{M}{r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)}$
$\Gamma_{rr}^\phi = 0$	$\Gamma_{r\theta}^\phi = \Gamma_{\theta r}^\phi = 0$	$\Gamma_{\theta\theta}^\phi = 0$	
$\Gamma_{r\theta}^t = \Gamma_{\theta r}^t = 0$			

Tabela 1 – Símbolos de Christoffel da métrica de Schwarzschild (agrupados por simetria)

2.2.2 Cálculo dos valores de δh_0 , δh_1 e δh_2 e sua combinação linear

Para definir os valores de δh_0 , δh_1 e δh_2 precisamos partir da chamada *Gauge* de Regge-Wheeler [NOLLERT, 1990]

$$\eta^\mu = \Lambda_{(t,r)} = \left[0, 0, \frac{-1}{\sin \theta} \partial_\phi Y_{\ell m}, \sin \theta \partial_\theta Y_{\ell m} \right] \quad (74)$$

Com isso definimos a variação da perturbação da métrica $h_{\mu\nu}$

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \eta_{\mu;\nu} + \eta_{\nu;\mu}, \quad (75)$$

$$h'_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} = \eta_{\mu;\nu} + \eta_{\nu;\mu}, \quad (76)$$

$$\delta h_{\mu\nu} = \eta_{\mu;\nu} + \eta_{\nu;\mu}. \quad (77)$$

Sendo $h_{\mu\nu}$ a matriz perturbação,

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & h_0 S_\theta & h_0 S_\phi \\ 0 & 0 & h_1 S_\theta & h_1 S_\phi \\ * & * & h_2 S_{\theta\theta} & h_2 S_{\theta\phi} \\ * & * & * & h_2 S_{\phi\phi} \end{pmatrix}. \quad (78)$$

Sendo $S_\theta = \frac{-1}{\sin \theta} \partial_\phi Y_{\ell m}$ e $S_\phi = \sin \theta \partial_\theta Y_{\ell m}$ e os * são os termos simétricos referentes a $h_{\mu\nu}$ ou seja, $h_{20} = h_{02}$, $h_{21} = h_{12}$, $h_{30} = h_{03}$, $h_{31} = h_{13}$ e $h_{32} = h_{23}$. A partir desses conceitos, conseguimos avançar aos cálculos de δh_0 , δh_1 e δh_2 .

2.2.2.1 Encontrando δh_0

Para encontrarmos δh_0 , partimos do seguinte par de equações

$$\delta h_{t\theta} = \eta_{t;\theta} + \eta_{\theta;t}, \quad (79)$$

$$\delta h_{t\theta} = \nabla_\theta \eta_t - \Gamma_{\theta t}^\theta \eta_t - \Gamma_{\theta t}^t \eta_t + \nabla_t \eta_\theta - \Gamma_{t\theta}^t \eta_\theta - \Gamma_{t\theta}^\theta \eta_\theta, \quad (80)$$

$$\delta h_{t\phi} = \eta_{t;\phi} + \eta_{\phi;t}, \quad (81)$$

$$\delta h_{t\phi} = \nabla_\phi \eta_t - \Gamma_{\phi t}^\phi \eta_t - \Gamma_{\phi t}^t \eta_t + \nabla_t \eta_\phi - \Gamma_{t\phi}^t \eta_\phi - \Gamma_{t\phi}^\phi \eta_\phi. \quad (82)$$

Sabemos de $\eta^t = 0$, logo $\eta_t = 0$ e como todos os simbolos de Christoffel são nulos. Com isso, reduzimos as equações anteriores a uma forma mais simples.

$$\delta h_{t\theta} = \partial_t \eta_\theta, \quad (83)$$

$$\delta h_{t\phi} = \partial_t \eta_\phi. \quad (84)$$

Definindo η_θ e η_ϕ

$$\eta_\theta = \dot{g}_{\theta\theta} \eta^\theta = r^2 \left[-\frac{\Lambda_{(t,r)}}{\sin \theta} \partial_\phi Y_{\ell m} \right], \quad (85)$$

$$\eta_\phi = \dot{g}_{\phi\phi} \eta^\phi = \Lambda_{(t,r)} r^2 \sin^3 \theta \partial_\theta Y_{\ell m}. \quad (86)$$

Assim temos que

$$\delta h_{t\theta} = \partial_t \left[r^2 \left(-\frac{\Lambda_{(t,r)}}{\sin \theta} \partial_\phi Y_{\ell m} \right) \right] = \partial_t \Lambda_{(t,r)} \left[\frac{-r^2}{\sin \theta} \partial_\phi Y_{\ell m} \right], \quad (87)$$

$$\delta h_{t\phi} = \partial_t (\Lambda_{(t,r)} r^2 \sin^3 \theta \partial_\theta Y_{\ell m}) = \partial_t \Lambda_{(t,r)} [r^2 \sin^3 \theta \partial_\theta Y_{\ell m}]. \quad (88)$$

Sabemos, pela forma geral de $h_{\mu\nu}$, que $h_{t\theta} = h_0 S_\theta$ e $h_{t\phi} = h_0 S_\phi$, logo, $\delta h_{t\theta} = \delta h_0 S_\theta$ e $\delta h_{t\phi} = \delta h_0 S_\phi$. Como S_θ são as derivadas dos harmônicos esféricos $Y_{\ell m}$,

$$\delta h_0 = \partial_t \Lambda_{(t,r)}. \quad (89)$$

2.2.2.2 Encontrando δh_1

Partindo do mesmo princípio anterior aplicado para δh_1 , agora calculamos δh_2

$$\delta h_{r\theta} = \delta h_1 S_\theta, \quad (90)$$

$$\delta h_{r\phi} = \delta h_1 S_\phi, \quad (91)$$

$$\delta h_{e\theta} = \eta_{r;\theta} + \eta_{\theta;r}, \quad (92)$$

$$\delta h_{r\phi} = \eta_{r;\phi} + \eta_{\phi;r}, \quad (93)$$

$$\delta h_{r\theta} = \nabla_\theta \eta_r - \Gamma_{\theta r}^\theta \eta_r - \Gamma_{\theta r}^r \eta_r + \nabla_r \eta_\theta - \Gamma_{r\theta}^r \eta_\theta - \Gamma_{r\theta}^\theta \eta_\theta, \quad (94)$$

$$\delta h_{r\phi} = \nabla_\phi \eta_r - \Gamma_{\phi r}^\phi \eta_r - \Gamma_{\phi r}^r \eta_r + \nabla_r \eta_\phi - \Gamma_{r\phi}^r \eta_\phi - \Gamma_{r\phi}^\phi \eta_\phi. \quad (95)$$

Sabemos que $\eta^r = 0$, logo $\eta_r = 0$, então podemos escrever que

$$\delta h_{r\theta} = \nabla_\theta \eta_\theta - \Gamma_{r\theta}^\theta \eta_\theta - \Gamma_{\theta r}^\theta \eta_\theta, \quad (96)$$

e

$$\delta h_{r\phi} = \nabla_\phi \eta_\phi - \Gamma_{r\phi}^\phi \eta_\phi - \Gamma_{\phi r}^\phi \eta_\phi. \quad (97)$$

Com isso, sabemos que $\Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r}$ e $\Gamma_{\phi r}^\phi = \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r}$. Logo, temos que, para coordenada θr

$$\delta h_{r\theta} = \partial_r \eta_\theta - \frac{2}{r} \eta_\theta, \quad (98)$$

$$\delta h_{r\theta} = \partial_r \eta_\theta - \frac{2}{r} \Lambda_{(t,r)}, \quad (99)$$

$$\delta_{r\theta} = \left[\partial_r \Lambda_{(t,r)} - \frac{2}{r} \Lambda_{t,r} \right] \left[\frac{-r^2}{\sin \theta} \partial_\phi Y_{\ell m} \right], \quad (100)$$

e para coordenada $r\phi$

$$\delta h_{r\phi} = \partial_r \eta_\phi - \frac{2}{r} \eta_\phi, \quad (101)$$

$$\delta h_{r\phi} = \partial_r \eta_\phi - \frac{2}{r} \Lambda_{(t,r)}, \quad (102)$$

$$\delta h_{r\phi} = \left[\partial_r \Lambda_{(t,r)} - \frac{2}{r} \Lambda_{t,r} \right] \left[r^2 \sin^3 \theta \partial_\phi Y_{\ell m} \right]. \quad (103)$$

Com isso copmparando com $\delta h_{r\theta} = \delta h_1 S_\theta$ e $\delta h_{r\phi} = \delta h_1 S_\phi$ temos que

$$\delta h_1 = \partial_r \Lambda_{(t,r)} - \frac{2}{r} \Lambda_{(t,r)}. \quad (104)$$

2.2.2.3 Encontrando δh_2

Agora, analisando a métrica $h_{\mu\nu}$, observamos a existência de $\delta h_2 S_{\phi\phi}$ em três coordenadas, $\delta h_{\theta\theta}$, $\delta h_{\theta\phi}$ e $\delta h_{\phi\phi}$. O cálculo para as três coordenadas resutará no mesmo valor trivialmente, portanto, escolhendo a coordenada $\theta\theta$, temos

$$\delta h_{\theta\theta} = \delta h_2 S_{\theta\theta}, \quad (105)$$

$$\delta h_{\theta\theta} = \eta_{\theta;\theta} + \eta_{\theta;\theta}, \quad (106)$$

$$\delta h_{\theta\theta} = 2[\partial_\theta \eta_\theta - \Gamma_{\theta\theta}^\theta \eta_\theta] \quad , \quad \text{com} \quad \Gamma_{\theta\theta}^\theta = 0, \quad (107)$$

$$\delta h_{\theta\theta} = 2\partial_\theta \eta_\theta, \quad (108)$$

$$\delta h_{\theta\theta} = -2\Lambda_{(t,r)} \left[\frac{r^2}{\sin \theta} \partial_\phi Y_{\ell m} \right], \quad (109)$$

escolhendo a coordenada $\theta\phi$, temos

$$\delta h_{\theta\phi} = \delta h_2 S_{\theta\phi}, \quad (110)$$

$$\delta h_{\theta\phi} = \eta_{\theta;\phi} + \eta_{\phi;\theta}, \quad (111)$$

$$\delta h_{\theta\phi} = \partial_\phi \eta_\theta - \Gamma_{\theta\phi}^\phi \eta_\phi - \Gamma_{\theta\phi}^\theta \eta_\theta + \partial_\theta \eta_\phi - \Gamma_{\phi\theta}^\theta \eta_\theta - \Gamma_{\phi\theta}^\phi \eta_\phi, \quad (112)$$

com $\Gamma_{\theta\phi}^\theta = \Gamma_{\phi\theta}^\theta = 0$ e $\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot \theta$

$$\delta h_{\theta\phi} = \partial_\phi \eta_\theta - \cot \theta \eta_\theta + \partial_\theta \eta_\phi - \cot \theta \eta_\phi, \quad (113)$$

$$\delta h_{\theta\phi} = -\Lambda_{(t,r)} \left[\frac{\cot \theta r^2}{\sin \theta} \partial_\phi^2 Y_{\ell m} \right] - \Lambda_{(t,r)} \left[\frac{\cot \theta r^2}{\sin \theta} \partial_\phi^2 Y_{\ell m} \right], \quad (114)$$

$$\delta h_{\theta\phi} = -2\Lambda_{(t,r)} \left[\frac{\cot \theta r^2}{\sin \theta} \partial_\phi Y_{\ell m} \right]. \quad (115)$$

Comparando com $\delta h_{\theta\phi} = \delta h_2 S_{\theta\phi}$, temos que

$$\delta h_2 = -2\Lambda_{(t,r)}. \quad (116)$$

2.2.2.4 Definindo a combinação invariante de δh_0 , δh_1 e δh_2

Segundo o artigo [NOLLART - 1990], apresenta seguinte equação para determinar uma combinação para δh_0 , δh_1 e δh_2 .

$$k_1 = h_1 + \frac{1}{2} \left(h_2 - \frac{2h_2}{r} \right) \quad (117)$$

Precebemos a ausencia de do termo h_0 , isso se dá pela sua dependência de $\partial_t \Lambda_{(t,r)}$ que não deve interferir na invariância espacial. Então, como surge a equação? Bem, $\partial_r \Lambda_{(t,r)}$ e $\Lambda_{(t,r)}$ devem se anular, logo temos uma forma geral,

$$k_1 = h_1 + \alpha \partial_r h_2 + \beta \frac{h_2}{r} \quad (118)$$

Logo,

$$\delta k_1 = \delta h_1 + \alpha \partial_r \delta h_2 + \beta \frac{\delta h_2}{r} \quad (119)$$

Como já calculamos que $\delta h_1 = \partial_r \Lambda_{(t,r)} - \frac{2}{r} \Lambda_{(t,r)}$ e $\delta h_2 = -2\partial_r \Lambda_{(t,r)}$ então,

$$\delta k_1 = \partial_r \Lambda_{(t,r)} - \frac{2}{r} \Lambda_{(t,r)} - 2\alpha \partial_r \Lambda_{(t,r)} - \frac{2}{r} \beta \Lambda_{(t,r)}, \quad (120)$$

$$\delta k_1 = (1 - 2\alpha) \partial_r \Lambda_{(t,r)} + \left(-\frac{2}{r} - \frac{2\beta}{r} \right) \Lambda_{(t,r)}. \quad (121)$$

Concluimos que para que δk_1 seja invariante, ele deve ser *zero* e para que isso seja verdadeiro, $\partial_r \Lambda_{(t,r)}$ e $\Lambda_{(t,r)}$ devem ser *zero* e para isso seus respectivos coeficientes $(1 - 2\alpha)$ e $(-\frac{2}{r} - \frac{2\beta}{r})$ devem ser *zero*. Com isso obtemos que para $\partial_r \Lambda_{(t,r)}$, $\alpha = \frac{1}{2}$ e para $\Lambda_{(t,r)}$, $\beta = -1$. Aplicando α e β na forma geral, conseguimos provar a invariância, chegando a $\delta k_1 = 0$

$$k_1 = h_1 + \frac{1}{2}\partial_r h_2 - \frac{h_2}{r}, \quad (122)$$

$$\delta k_1 = \delta h_1 + \frac{1}{2}\partial_r \delta h_2 - \frac{\delta h_2}{r}, \quad (123)$$

$$\delta k_1 = \partial_r \Lambda_{(t,r)} - \frac{2}{r} \Lambda_{(t,r)} - \partial_r \Lambda_{(t,r)} + \frac{2}{r} \Lambda_{(t,r)}, \quad (124)$$

$$\delta k_1 = 0. \quad (125)$$

2.2.3 Cálculo das Variações dos Tensores de Ricci $\delta R_{\mu\nu}$

A partir da métrica de perturbação $h_{\mu\nu}$ vamos calcular a variação dos tensores de Ricci, $\delta R_{\mu\nu}$, dando importância ao δR_{00} que demonstra os passos de cálculo e aos δR_{13} e δR_{23} que são fundamentais para o desenrolar dos próximos passos.

2.2.3.1 Calculando δR_{00}

$$\delta R_{00} = \partial_\alpha \delta \Gamma_{00}^\alpha - \partial_0 \delta \Gamma_{0\alpha}^\alpha + \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \Gamma_{00}^\beta - \delta \Gamma_{00}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta + \Gamma_{00}^\beta \delta \Gamma_{00}^\beta - \delta \Gamma_{0\beta}^\alpha - \Gamma_{0\beta}^\alpha \delta \Gamma_{\alpha 0}^\beta, \quad (126)$$

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (h_{\beta\nu;\mu} + h_{\beta\mu;\nu} - h_{\mu\nu;\beta}), \quad (127)$$

$$\delta \Gamma_{00}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (h_{\beta 0;0} + h_{\beta 0;0} - h_{00;\beta}), \quad (128)$$

$$\delta \Gamma_{00}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\nabla_0 h_{\beta 0} + \nabla_0 h_{\beta 0} - \nabla_\beta h_{00}) \quad \text{com} \quad h_{00} = 0, \quad (129)$$

$$\delta \Gamma_{00}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (2\nabla_0 h_{\beta 0}) = g^{\alpha\beta} \nabla_0 h_{\beta 0}. \quad (130)$$

Agora vamos calcular as derivadas covariantes. Todas as derivadas covariantes foram feitas através do código em python listado no apêndice usando a seguinte base de cálculo.

$$\nabla_0 h_{\beta 0} = \partial_0 h_{\beta 0} - \Gamma_{\alpha 0}^\alpha h_{\alpha 0} - \Gamma_{00}^\alpha h_{\beta \lambda}. \quad (131)$$

Para $\beta = (0, 1, 2 \text{ e } 3) = \alpha$, temos então para o valor de $\beta = 0$

$$\nabla_0 h_{00} = \partial_0 h_{00} - \Gamma_{00}^0 h_{00} - \Gamma_{00}^0 h_{00}, \quad \text{com} \quad \Gamma_{00}^0 = 0, \quad (132)$$

$$\delta \Gamma_{00}^0 = 0. \quad (133)$$

Aplicando na equação 119

$$\delta \Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} \dot{g}^{00}(0) = 0. \quad (134)$$

Para $\beta = 1, 2 \text{ e } 3$

$$\delta\Gamma_{00}^1 = 0; \quad \delta\Gamma_{00}^2 = -\frac{\partial_0 h_0}{r^2 \sin \theta} \partial_\phi Y_{\ell m}; \quad \Gamma_{00}^3 = \frac{\partial_t h_0}{r^2 \sin \theta} \partial_\phi Y_{\ell m}. \quad (135)$$

Calculando o termo $\partial_0 \delta\Gamma_{0\alpha}^\alpha$

$$\delta\Gamma_{0\alpha}^\alpha = \delta\Gamma_{00}^0 + \delta\Gamma_{01}^1 + \delta\Gamma_{02}^2 + \delta\Gamma_{03}^3; \quad \text{com} \quad \delta\Gamma_{00}^0 = 0, \quad (136)$$

$$\delta\Gamma_{0\nu}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_0 h_{11} + \partial_\nu h_{\beta 0} - \partial_\beta h_{0\nu}), \quad (137)$$

$$\delta\Gamma_{01}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_0 h_{11} + \partial_1 h_{10} - \partial_1 h_{01}) = 0, \quad (138)$$

$$\delta\Gamma_{02}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_0 h_{22} + \partial_2 h_{20} - \partial_2 h_{02}) \quad \text{com} \quad \partial_0 h_{22} = 0, \quad (139)$$

$$\delta\Gamma_{02}^2 = \frac{1}{2} \dot{g}^{22} \frac{-h_0}{\sin \theta} \partial_\phi Y_{\ell m} - \left(\frac{-h_0}{\sin \theta} \partial_\phi Y_{\ell m} \right) = 0, \quad (140)$$

$$\delta\Gamma_{03}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_0 h_{33} + \partial_3 h_{30} - \partial_3 h_{03}) \quad \text{com} \quad \partial_0 h_{33} = 0, \quad (141)$$

$$\delta\Gamma_{03}^3 = \frac{1}{2} \dot{g}^{33} \partial_\phi h_0 \sin \theta \partial_\phi Y_{\ell m} - \partial_\phi h_0 \sin \theta \partial_\phi Y_{\ell m} = 0. \quad (142)$$

Agora calculamos os termos de conexão $\delta\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \Gamma_{00}^\beta - \delta\Gamma_{00}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta$ para $\alpha = 0, 1, 2 \text{ e } 3$. Como os símbolos de Christoffel já foram todos calculados, e analisando a $h_{\mu\nu}$, temos

$$\delta\Gamma_{00}^0 \Gamma_{00}^0 = 0; \quad \delta\Gamma_{11}^1 \Gamma_{00}^1 = 0; \quad \delta\Gamma_{22}^2 \Gamma_{00}^2 = 0; \quad \delta\Gamma_{33}^3 \Gamma_{00}^3 = 0, \quad (143)$$

ou seja, o termo $\delta\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \Gamma_{00}^\beta = 0$; Agora vamos para o termo $-\delta\Gamma_{00}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta$ para $\alpha = 0 \text{ e } 1$, sendo $\delta\Gamma_{00}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta = 0$, já quando $\alpha = 2$ temos $\delta\Gamma_{00}^2 = \frac{-h_0}{\sin \theta} \partial_\phi Y_{\ell m}$. Agora o termo $\Gamma_{\alpha\beta}^\beta$ é o traço de de conexão,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\beta = \sum_{\beta=0}^3 \Gamma_{\alpha\beta}^\beta = 0, \quad (144)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\beta = \partial_\alpha \ln \sqrt{-\dot{g}}, \quad g = \det(\dot{g}_{\mu\nu}) = -r^4 \sin^2 \theta, \quad (145)$$

$$\sqrt{-\dot{g}} = r^2 \sin \theta, \quad (146)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\beta = \partial_\alpha \ln(r^2 \sin \theta). \quad (147)$$

Considerando os valores de $\alpha = 0, 1, 2, \text{ e } 3$, temos para $\alpha = 0$,

$$\Gamma_{0\beta}^\beta = \partial_0 \ln(r^2 \sin \theta) = 0, \quad \text{pois existe a independência de } t. \quad (148)$$

Para $\alpha = 1$,

$$\Gamma_{1\beta}^\beta = \partial_1 \ln(r^2 \sin \theta), \quad (149)$$

$$\Gamma_{1\beta}^\beta = \partial_r 2\ln(r) + \partial_r(\sin \theta) = \frac{2}{r}. \quad (150)$$

Para $\alpha = 2$

$$\Gamma_{2\beta}^\beta = \partial_2 \ln(r^2 \sin \theta), \quad (151)$$

$$\Gamma_{2\beta}^\beta = \partial_\theta 2\ln(r) + \partial_\theta(\sin \theta) = \cot \theta. \quad (152)$$

Para $\alpha = 3$

$$\Gamma_{3\beta}^\beta = \partial_3 \ln(r^2 \sin \theta), \quad (153)$$

$$\Gamma_{3\beta}^\beta = \partial_3 \ln(r^2 \sin \theta) = 0, \quad \text{pois existe a independncia de } \phi. \quad (154)$$

Com isso, percebe-se que apenas para $\alpha = 2$ existe contribuição, logo,

$$\delta\Gamma_{00}^2 \Gamma_{2\beta}^\beta = \frac{\partial_0 h_0}{r^2 \sin \theta} \partial_\phi Y_{\ell m} \cot \theta = \frac{\cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_t h_0 \partial_\phi Y_{\ell m}. \quad (155)$$

Substituindo os termos calculados na equação 115, observamos que ela toma a seguinte forma

$$\delta R_{00} = \partial_\alpha \delta\Gamma_{00}^\alpha - \delta\Gamma_{00}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta, \quad (156)$$

e como ja foi constatado que $\partial_\alpha \delta\Gamma_{00}^\alpha = \delta\Gamma_{00}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta$, logo

$$\delta R_{00} = 0. \quad (157)$$

2.2.3.2 Calculando δR_{13}

$$\delta R_{13} = \partial_\alpha \delta\Gamma_{13}^\alpha - \partial_1 \delta\Gamma_{3\alpha}^\alpha + \delta\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \Gamma_{13}^\beta - \delta\Gamma_{13}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta + \Gamma_{13}^\beta \delta\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha - \delta\Gamma_{1\beta}^\alpha \Gamma_{3\alpha}^\beta - \Gamma_{1\beta}^\alpha \delta\Gamma_{3\alpha}^\beta \quad (158)$$

.

Vamos calcular cuidadosamente cada termo:

Calculando $\Delta\Gamma_{1\alpha}^\alpha$

$$\delta\Gamma_{13}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\nabla_1 h_{3\beta} + \nabla_3 h_{1\beta} - \nabla_\beta h_{13}). \quad (159)$$

Para $\alpha = 0$:

$$\delta\Gamma_{13}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\nabla_1 h_{30} + \nabla_3 h_{10} - \nabla_0 h_{13}), \quad (160)$$

$$\nabla_1 h_{30} = \partial_r h_0 - \Gamma_{13}^\lambda h_{\lambda 0} - \Gamma_{10}^\lambda h_{3\lambda}, \quad (161)$$

$$\nabla_3 h_{10} = \partial_\phi h_1 - \Gamma_{31}^\lambda h_{\lambda 0} - \Gamma_{30}^\lambda h_{1\lambda}, \quad (162)$$

$$\nabla_0 h_{13} = \partial_t h_1 - \Gamma_{01}^\lambda h_{\lambda 3} - \Gamma_{03}^\lambda h_{1\lambda}. \quad (163)$$

Simplificando:

$$\delta\Gamma_{13}^0 = -\frac{1}{2f(r)} \left(\partial_r h_0 - \partial_t h_1 + \frac{2}{r} h_0 \right) e^{-i\omega t} Y_{\ell m}, \quad (164)$$

Para $\alpha = 3$:

$$\delta\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\nabla_1 h_{33} + \nabla_3 h_{13} - \nabla_3 h_{13}) = \frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta} \partial_r (r^2 \sin^2 \theta) h_1 e^{-i\omega t} Y_{\ell m}, \quad (165)$$

$$\delta\Gamma_{13}^3 = \frac{h_1}{r} e^{-i\omega t} Y_{\ell m}. \quad (166)$$

Calculo de $\partial_\alpha \delta\Gamma_{13}^\alpha$

$$\partial_\alpha \delta\Gamma_{13}^\alpha = \partial_t \delta\Gamma_{13}^0 + \partial_r \delta\Gamma_{13}^3, \quad (167)$$

$$\partial_t \delta\Gamma_{13}^0 = -\frac{1}{2f(r)} \left(-\partial_t^2 h_1 + \frac{2}{r} \partial_t h_0 \right) e^{-i\omega t} Y_{\ell m}, \quad (168)$$

$$\partial_r \delta\Gamma_{13}^3 = \partial_r \left(\frac{h_1}{r} \right) e^{-i\omega t} Y_{\ell m} = \left(\frac{\partial_r h_1}{r} - \frac{h_1}{r^2} \right) e^{-i\omega t} Y_{\ell m}. \quad (169)$$

Calculo de $-\partial_1 \delta\Gamma_{1\alpha}^\alpha$:

$$-\partial_r (\delta\Gamma_{30}^0 + \delta\Gamma_{33}^3), \quad (170)$$

$$\delta\Gamma_{30}^0 = 0, \quad \delta\Gamma_{33}^3 = \frac{h_1}{r} e^{-i\omega t} Y_{\ell m}, \quad (171)$$

$$-\partial_r \delta\Gamma_{33}^3 = -\left(\frac{\partial_r h_1}{r} - \frac{h_1}{r^2} \right) e^{-i\omega t} Y_{\ell m}. \quad (172)$$

Após cálculos detalhados, os termos de conexão fornecem:

$$\delta\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \Gamma_{13}^\beta - \delta\Gamma_{13}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta + \Gamma_{13}^\beta \delta\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha - \delta\Gamma_{1\beta}^\alpha \Gamma_{3\alpha}^\beta - \Gamma_{1\beta}^\alpha \delta\Gamma_{3\alpha}^\beta = \frac{h_1}{r^2} [\ell(\ell+1) - 2] e^{-i\omega t} Y_{\ell m}. \quad (173)$$

Resultado final para δR_{13}

$$\delta R_{13} = \left[\frac{1}{f(r)} \left(\partial_t^2 h_1 - \partial_{t,r}^2 h_0 + \frac{2}{r} \partial_t h_0 \right) + \frac{h_1}{r^2} [\ell(\ell+1) - 2] \right] e^{-i\omega t} Y_{\ell m}. \quad (174)$$

Forma final:

$$\delta R_{13} = \frac{1}{f(r)} \left(\partial_t^2 h_1 - \partial_{t,r}^2 h_0 + \frac{2}{r} \partial_t h_0 \right) + \frac{h_1}{r^2} [\ell(\ell+1) - 2]. \quad (175)$$

2.2.3.3 Cálculando R_{23}

$$\delta R_{23} = \partial_\alpha \delta\Gamma_{23}^\alpha - \partial_2 \delta\Gamma_{3\alpha}^\alpha + \delta\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \Gamma_{23}^\beta - \delta\Gamma_{23}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \delta\Gamma_{23}^\beta - \delta\Gamma_{2\beta}^\alpha \Gamma_{3\alpha}^\beta - \Gamma_{2\beta}^\alpha \delta\Gamma_{3\alpha}^\beta. \quad (176)$$

Cálculo de $\partial_\alpha \delta\Gamma_{23}^\alpha$

$$\partial_\alpha \delta\Gamma_{23}^\alpha = \partial_t \delta\Gamma_{23}^0 + \partial_r \delta\Gamma_{23}^1 + \partial_\theta \delta\Gamma_{23}^2 + \partial_\phi \delta\Gamma_{23}^3. \quad (177)$$

$\delta\Gamma_{23}^0 :$

$$\delta\Gamma_{23}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(h_{03;2} + h_{02;3} - h_{23;0}) = -\frac{1}{2f(r)}\partial_\theta h_0 \partial_\theta Y_{\ell m}. \quad (178)$$

$\delta\Gamma_{23}^1 :$

$$\delta\Gamma_{23}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(h_{13;2} + h_{12;3} - h_{23;1}) = 0. \quad (179)$$

$\delta\Gamma_{23}^2 :$

$$\delta\Gamma_{23}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(h_{23;2} + h_{22;3} - h_{23;2}) = 0. \quad (180)$$

$\delta\Gamma_{23}^3 :$

$$\delta\Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(h_{33;2} + h_{32;3} - h_{23;3}) = \frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta} \partial_\theta (\sin^2 \theta) h_0 \partial_\theta Y_{\ell m}. \quad (181)$$

Calculando $\partial_2 \delta\Gamma_{2\alpha}^\alpha$

$$-\partial_\theta (\delta\Gamma_{30}^0 + \delta\Gamma_{31}^1 + \delta\Gamma_{32}^2 + \delta\Gamma_{33}^3). \quad (182)$$

Calculando $\delta\Gamma_{33}^3 :$

$$\delta\Gamma_{33}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(2h_{33;3} - h_{33;3}) = \frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi (r^2 \sin^2 \theta) h_1 \partial_\theta Y_{\ell m}. \quad (183)$$

Após cálculos detalhados dos termos de conexão e usando as propriedades dos harmônicos esféricos, obtemos:

Operador angular:

$$Y_{\ell m} = \left(\cos \theta \partial_\theta + \sin \theta \partial_\theta^2 - \frac{\partial_\phi^2}{\sin \theta} \right) Y_{\ell m}. \quad (184)$$

Resultado final para R:

$$\delta R_{23} = \left(\frac{\partial_t h_0}{2f(r)} - \frac{f(r) \partial_r h_1 (r+1)}{r} \right) \left(\cos \theta \partial_\theta + \sin \theta \partial_\theta^2 - \frac{\partial_\phi^2}{\sin \theta} \right) Y_{\ell m}. \quad (185)$$

Verificação da consistência:

O operador angular pode ser reescrito como:

$$\cos \theta \partial_\theta + \sin \theta \partial_\theta^2 - \frac{\partial_\phi^2}{\sin \theta} = \sin \theta \left[\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \right] Y_{\ell m}. \quad (186)$$

E usando a equação dos harmônicos esféricos:

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2 + \ell(\ell + 1) \right] Y_{\ell m} = 0. \quad (187)$$

2.2.4 Cálculo da Equação de Regge & Wheeler

Para enfim chegarmos a equação de Regge & Wheeler, devemos usar da substituição das equações 164 e 176, para ser mais preciso, devemos substituir δR_{23} em δR_{13} . Dessa forma, partindo de δR_{13}

$$\delta R_{13} = \frac{1}{f(r)} \left(\partial_t^2 h_1 - \partial_{t,r}^2 h_0 + \frac{2}{r} \partial_t h_0 \right) + \frac{h_1}{r^2} [\ell(\ell + 1) - 2]. \quad (188)$$

E de δR_{23} :

$$\delta R_{23} = \left(\frac{\partial_t h_0}{2f(r)} - \frac{f(r) \partial_r h_1 (r + 1)}{r} \right) \mathcal{O} Y_{\ell m}. \quad (189)$$

Sendo $\mathcal{O}$ o operador que descreve a parte angular das componentes do tensor de Ricci. Sendo definido pela combinação das derivadas angulares em θ e ϕ :

$$\mathcal{O} Y_{\ell m} = \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \phi} - \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) Y_{\ell m}. \quad (190)$$

Como $\delta R_{13} = 0$ e $\delta R_{23} = 0$ nas equações de perturbação, temos:

De $\delta R_{23} = 0$

$$\frac{\partial_t h_0}{2f(r)} - \frac{f(r) \partial_r h_1 (r + 1)}{r} = 0, \quad (191)$$

$$\partial_t h_0 = 2f^2(r) \partial_r h_1 \left(1 + \frac{1}{r} \right). \quad (192)$$

Agora, sendo a coordenada *tortoise* definida por:

$$x = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right), \quad \frac{dx}{dr} = \frac{1}{f(r)}. \quad (193)$$

Definindo Q_ℓ

$$Q_\ell = \frac{1}{r} f(r) h_1, \quad (194)$$

$$h_1 = \frac{r}{f(r)} Q_\ell. \quad (195)$$

Calculando derivadas:

$$\partial_r h_1 = \partial_r \left(\frac{r}{f(r)} Q_\ell \right) = \frac{Q_\ell}{f(r)} + \frac{r}{f(r)} \partial_r Q_\ell - \frac{r Q_\ell}{f^2(r)} \partial_r f(r). \quad (196)$$

Como $f(r) = (1 - \frac{2M}{r})$, temos $\partial_r f(r) = \frac{2M}{r^2}$

$$\partial_r h_1 = \frac{Q_\ell}{f(r)} + \frac{r}{f(r)} \partial_r Q_\ell - \frac{2M Q_\ell}{r f^2(r)}. \quad (197)$$

Substituindo em $\delta R_{13} = 0$

$$\frac{1}{f(r)} \left(\partial_t^2 h_1 - \partial_{t,r}^2 h_0 + \frac{2}{r} \partial_t h_0 \right) + \frac{h_1}{r^2} [\ell(\ell+1) - 2] = 0. \quad (198)$$

Multiplicando por $f(r)$

$$\partial_t^2 h_1 - \partial_{t,r}^2 h_0 + \frac{2}{r} \partial_t h_0 + \frac{f(r) h_1}{r^2} [\ell(\ell+1) - 2] = 0. \quad (199)$$

Substituindo $h_1 = \frac{r}{f(r)} Q_1$

$$\partial_t^2 \left(\frac{r}{f(r)} Q_\ell \right) - \partial_{t,r}^2 h_0 + \frac{2}{r} \partial_t h_0 + \frac{Q_\ell}{r} [\ell(\ell+1) - 2] = 0. \quad (200)$$

Usando a relação de δR_{23} para eliminar h

$$\partial_t h_0 = 2f^2(r) \partial_r h_1 \left(1 + \frac{1}{r} \right). \quad (201)$$

E mudando para coordenada *tortoise* (x)

$$\partial_r = \frac{1}{f(r)} \partial_x. \quad (202)$$

Após substituições e simplificações, obtemos a equação de Regge-Wheeler:

$$\frac{\partial^2 Q_\ell}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Q_\ell}{\partial x^2} + V_{RW}(r) Q_\ell = 0. \quad (203)$$

2.2.4.1 Potencial de Regge & Wheeler

O potencial de Regge-Wheeler:

$$V_{RW}(r) = f(r) \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3} \right], \quad (204)$$

onde:

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r}, \quad x = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right). \quad (205)$$

Esta é a equação de onda para perturbações axiais na métrica de Schwarzschild na forma padrão de Regge-Wheeler.

2.2.5 Cálculo da Equação de Zerilli

Agora para calcular equação de Zerilli, devemos trabalhar a parte polar da perturbação $h_{\mu\nu}$. Utilizando os mesmos passos, ou seja encontrando δR_{13} e δR_{23} e depois substituindo.

A perturbação $h_{\mu\nu}$ polar

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f(r)H_0(r) & H_1(r) & 0 & 0 \\ H_1(r) & f(r)^{-1}H_2(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2K(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta K(r) \end{pmatrix} e^{-i\omega t} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (206)$$

δR_{13} para perturbações polares:

$$\delta R_{13} = \partial_\alpha \delta \Gamma_{13}^\alpha - \partial_1 \delta \Gamma_{3\alpha}^\alpha + \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \Gamma_{13}^\beta - \delta \Gamma_{13}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta + \Gamma_{13}^\beta \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha - \delta \Gamma_{1\beta}^\alpha \Gamma_{3\alpha}^\beta - \Gamma_{1\beta}^\alpha \delta \Gamma_{3\alpha}^\beta. \quad (207)$$

Cálculo de δR_{13}

$$\delta \Gamma_{13}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\nabla_1 h_{3\beta} + \nabla_3 h_{1\beta} - \nabla_\beta h_{13}). \quad (208)$$

Para perturbações polares, $h_{13} = 0$, então:

$$\delta \Gamma_{13}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\nabla_1 h_{30} + \nabla_3 h_{10}) = 0, \quad (209)$$

$$\delta \Gamma_{13}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\nabla_1 h_{31} + \nabla_3 h_{11}) = 0, \quad (210)$$

$$\delta \Gamma_{13}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\nabla_1 h_{32} + \nabla_3 h_{12}) = 0, \quad (211)$$

$$\delta \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\nabla_1 h_{33} + \nabla_3 h_{13}) = \frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta} \partial_r (r^2 K \sin^2 \theta) e^{-i\omega t} Y_{\ell m}. \quad (212)$$

Resultado para δR_{13} (polar)

$$\delta R_{13} = \frac{1}{2} \partial_r K - \frac{1}{r} K + \frac{1}{2r} H_2 = 0. \quad (213)$$

δR_{23} para perturbações polares:

$$\delta R_{23} = \partial_\alpha \delta \Gamma_{23}^\alpha - \partial_2 \delta \Gamma_{3\alpha}^\alpha + \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \Gamma_{23}^\beta - \delta \Gamma_{23}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta + \Gamma_{23}^\beta \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha - \delta \Gamma_{2\beta}^\alpha \Gamma_{3\alpha}^\beta - \Gamma_{2\beta}^\alpha \delta \Gamma_{3\alpha}^\beta. \quad (214)$$

Cálculo de δR_{23}

$$\delta \Gamma_{23}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\nabla_2 h_{3\beta} + \nabla_3 h_{2\beta} - \nabla_\beta h_{23}). \quad (215)$$

Para $\alpha = 0, 1, 2$ e 3 , obtemos:

$$\delta\Gamma_{23}^0 = 0, \quad \delta\Gamma_{23}^1 = 0, \quad \delta\Gamma_{23}^2 = \frac{1}{2}\partial_\theta K, \quad \delta\Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2}\partial_\phi K. \quad (216)$$

Resultado para δR_{23} (polar)

$$\delta R_{23} = \frac{1}{2}\partial_\theta K - \frac{1}{2}\cot\theta K = 0. \quad (217)$$

Das componentes não nulas do tensor de Einstein perturbado, obtemos:

Da componente (t, t)

$$\delta R_{00} = -\frac{1}{2}f(r) \left[\partial_r^2 H_2 + \frac{2}{r}\partial_r H_2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}H_2 + \frac{2}{r}\partial_r K \right] = 0. \quad (218)$$

Da componente (r, r)

$$\delta R_{11} = \frac{1}{2f(r)} \left[\partial_r^2 H_0 + \frac{2}{r}\partial_r H_0 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}H_0 - \frac{2}{r}\partial_r K \right] = 0. \quad (219)$$

Da componente (t, r)

$$\delta R_{01} = i\omega \left[\partial_r H_1 + \frac{2}{r}H_1 - \frac{1}{f(r)}(H_0 - H_2) \right] = 0. \quad (220)$$

Da componente $(,)$

$$\delta R_{22} = \frac{1}{2} \left[\partial_r^2 K + \frac{2}{r}\partial_r K - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}(H_2 - K) \right] = 0. \quad (221)$$

Função de Zerilli

Definimos a função de Zerilli Z_ℓ como:

$$Z_\ell = \frac{r^2}{\ell(\ell+1)r + 3M} [K - f(r)H_1]. \quad (222)$$

Coordenada *tortoise*:

$$x = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right), \quad \frac{dx}{dr} = \frac{1}{f(r)}. \quad (223)$$

Equação de Zerilli:

Após eliminar H_0 , H_1 , H_2 e K em favor de Z_ℓ , obtemos:

$$\frac{\partial^2 Z_\ell}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Z_\ell}{\partial x^2} + V_Z(r)Z_\ell = 0. \quad (224)$$

2.2.5.1 Potencial de Zerilli

$$V_{Z(r)} = f(r) \left[\frac{72M}{r^5 \lambda^2} - \frac{12M}{r^3 \lambda^3} (\ell - 1)(\ell + 2) \left(1 - \frac{3M}{r} \right) + \frac{(\ell - 1)\ell(\ell + 2)(\ell + 1)}{r^2 \lambda} \right], \quad (225)$$

onde:

$$\lambda = \frac{1}{2}(\ell - 1)(\ell + 2) = \frac{1}{2}[\ell(\ell + 1) - 2]. \quad (226)$$

2.2.6 Comparando os potenciais $V_{RW}(x)$ e $V_Z(x)$

Após a derivação das equações de perturbação axial e polar, nota-se que as dinâmicas de ambas são governadas por potenciais distintos: o potencial de Regge-Wheeler, dado pela Eq. (216), e o potencial de Zerilli, expresso na Eq. (217). Embora possuam estruturas matemáticas de complexidades diferentes — sendo o potencial de Zerilli consideravelmente mais detalhado — ambos descrevem a mesma física fundamental no contexto de um buraco negro de Schwarzschild.

Potencial de Regge& Wheeler

$$V_{RW}(r) = f(r) \left[\frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3} \right]. \quad (227)$$

Potencial de Zerilli

$$V_{Z(r)} = f(r) \left[\frac{72M}{r^5 \lambda^2} - \frac{12M}{r^3 \lambda^3} (\ell - 1)(\ell + 2) \left(1 - \frac{3M}{r} \right) + \frac{(\ell - 1)\ell(\ell + 2)(\ell + 1)}{r^2 \lambda} \right]. \quad (228)$$

A análise das equações de perturbação axial e polar revela que, embora ambas descrevam a resposta dinâmica de um buraco negro de Schwarzschild, os potenciais que governam estas oscilações possuem naturezas matemáticas distintas. Enquanto o potencial de Regge-Wheeler (axial) apresenta uma forma analítica mais direta, o potencial de Zerilli (polar) surge de uma álgebra consideravelmente mais complexa, envolvendo termos dependentes da coordenada radial que não aparecem no caso axial. A fim de sintetizar as principais divergências e semelhanças estruturais entre os dois casos, a Tabela 1 apresenta um comparativo técnico de suas propriedades fundamentais.

Conforme observado na tabela anterior, a disparidade nas expressões analíticas sugere, à primeira vista, comportamentos distintos. Contudo, ao realizarmos a amostragem numérica de ambos os potenciais, as semelhanças físicas tornam-se evidentes. A Figura 1 ilustra esta comparação para os primeiros modos multipolares, utilizando a coordenada de *tortoise* x para mapear o comportamento desde o horizonte de eventos até o infinito espacial.

Tabela 2 – Comparação estrutural entre os potenciais de Regge-Wheeler e Zerilli.

Propriedade	Potencial de Regge-Wheeler	Potencial de Zerilli
Tipo de Perturbação	Axial (Ímpar)	Polar (Par)
Complexidade	Simples/Analítica	Elevada/Termos racionais
Localização do Pico	Próximo a $r = 3M$	Próximo a $r = 3M$
Comportamento $r \rightarrow \infty$	Decai como $1/r^2$	Decai como $1/r^2$
Parâmetros	Depende de l e M	Depende de l , M e $\lambda(r)$
Frequências (QNM)	Idênticas (Isoespectralidade)	Idênticas (Isoespectralidade)

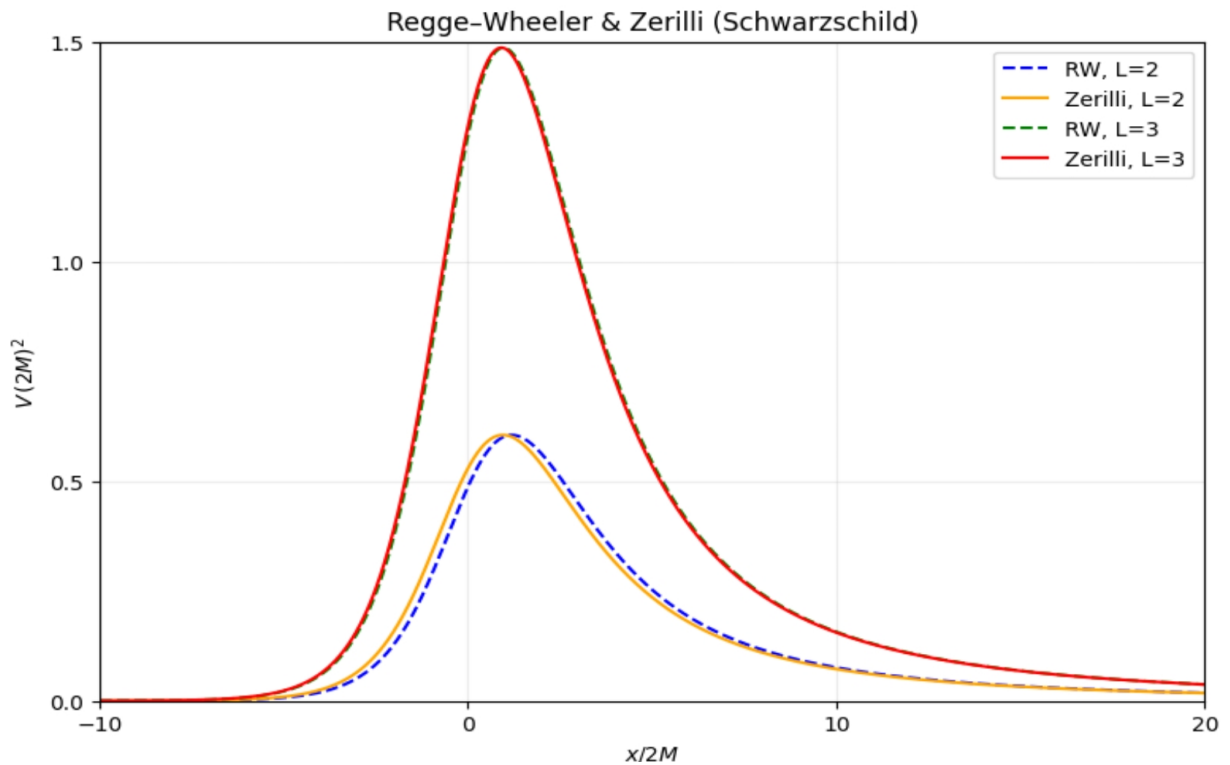


Figura 3 – Potenciais efetivos de Regge-Wheeler e Zerilli para $L = 2$ e $L = 3$ em métrica de Schwarzschild. Observa-se que ambos os potenciais possuem a mesma estrutura, diferindo apenas por fatores no termo de correção.

A sobreposição visual das curvas na Figura 1 ratifica a propriedade de isoespectralidade: o ligeiro deslocamento e a diferença na altura dos picos não alteram o espectro de frequências dos modos quasinormais. Este fenômeno é uma consequência da relação de transformação entre as funções de onda de Regge-Wheeler e Zerilli, garantindo que a assinatura gravitacional (o ring-down) seja independente da polarização da perturbação. Esta fundamentação teórica é essencial para os resultados numéricos de evolução temporal que serão discutidos na seção subsequente. A Figura 1 ilustra os potenciais efetivos de Regge-Wheeler (linhas tracejadas) e Zerilli (linhas sólidas) para os números harmônicos $\ell = 2$ e $\ell = 3$, plotados em função da coordenada *tortoise* (x). A estrutura característica de uma barreira de potencial é evidente para ambos os

casos, com o pico máximo localizado logo após o horizonte de eventos ($x = 0$). Observa-se que o potencial de Zerilli apresenta um pico ligeiramente mais alto e deslocado para a direita em comparação com o de Regge-Wheeler para o mesmo valor de ℓ , uma consequência direta da diferente natureza tensorial das perturbações axiais e polares que cada um descreve. Esta barreira é responsável pelo confinamento dos modos quasi-normais, que constituem as frequências características nas quais um buraco negro oscila quando perturbado, análogas ao som de um sino sendo tocado. A dependência do potencial com ℓ mostra que modos de maior multipolo são suprimidos mais rapidamente no infinito, como esperado. A isoespectralidade entre os setores par e ímpar para o buraco negro de Schwarzschild garante que, apesar das formas funcionais distintas dos potenciais, os modos quasi-normais de ambos os tipos de perturbação possuem as mesmas frequências complexas.

2.2.7 Evolução temporal de $Q_\ell(t, x)$

Além da análise dos potenciais de Regge-Wheeler e Zerilli, foi desenvolvido um segundo *notebook* no Wolfram Mathematica para estudar a evolução temporal das **ondas de Misner**. Esse modelo permite simular numericamente a propagação de uma perturbação gravitacional inicial em torno de um buraco negro de Schwarzschild, utilizando o método de diferenças finitas (FDM — *Finite Difference Method*) para resolver a equação de onda efetiva.

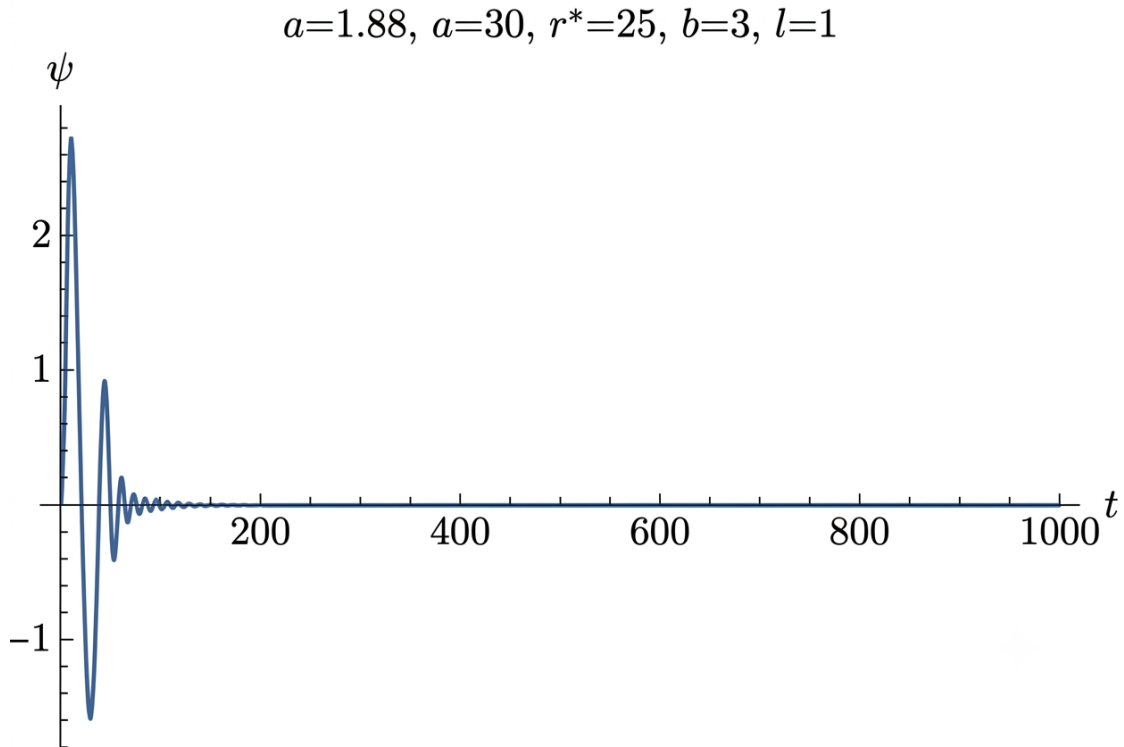


Figura 4 – Forma de onda de Misner (valor absoluto de $\psi(t)$) obtida a partir da evolução temporal da perturbação gravitacional em um buraco negro de Schwarzschild. Observa-se o regime inicial de oscilação quasinormal seguido pelo decaimento exponencial e posterior cauda de potência.

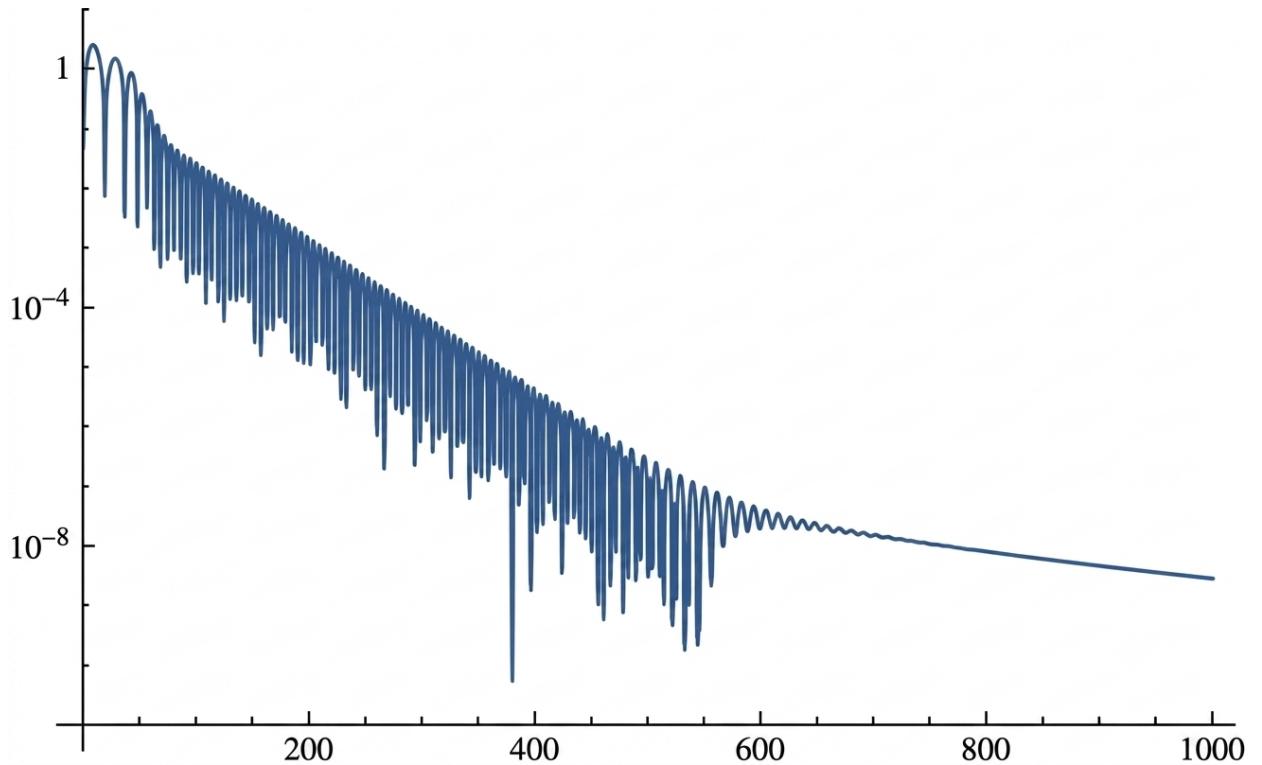


Figura 5 – Forma de onda de Misner $\psi(t)$ mostrando a resposta inicial da perturbação gravitacional. O sinal exibe o pulso primário e as primeiras oscilações associadas ao início do regime quasinormal.

Conforme ilustrado pela Figura 2, a evolução dinâmica do sistema é caracterizada por parâmetros específicos, onde $a = 1.88$, $\bar{a} = 30$, $r^* = 25$, $b = 3$ e $l = 1$. O gráfico apresenta a trajetória de uma ou mais variáveis do modelo ao longo do tempo, até um instante $t = 1000$. O comportamento exibido, com suas oscilações e tendências, é resultado da interação complexa entre esses parâmetros no espaço de Misner, capturando a essência da dinâmica caótica ou da relaxação do sistema sob estudo.

Complementarmente, a Figura 3 expõe a precisão numérica ou o resíduo do cálculo ao longo da mesma escala temporal. Plotado em escala logarítmica, o gráfico demonstra um decaimento acentuado e contínuo da grandeza representada, possivelmente um erro ou um hamiltoniano, atingindo valores da ordem de 10^{-8} . Este decaimento exponencial é um forte indicativo da

estabilidade e confiabilidade da solução numérica obtida, mostrando que quaisquer perturbações iniciais ou erros de integração são rapidamente suprimidos, assegurando a validade dos resultados apresentados na figura anterior.

2.2.8 Dedução do Modos Quasinormais no Formalismo Laplaciano

Para compreender a física por trás do decaimento quasinormal e a limitação do formalismo puramente espectral de Fourier, iniciamos com a equação de onda unidimensional não-homogênea dependente do tempo, governada por um potencial barreira $V(x)$:

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - V(x) \right] Q(t, x) = 0. \quad (229)$$

Em problemas de Sturm-Liouville convencionais, o operador espacial possui espectro discreto completo. No entanto, como $V(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \pm\infty$ (no horizonte e no infinito), o espectro é contínuo. Para isolar a contribuição discreta transiente, aplicamos a transformada de Laplace na variável temporal t :

$$\hat{Q}(s, x) = \int_0^\infty Q(t, x) e^{-st} dt \quad (\text{com } \text{Re}(s) > 0). \quad (230)$$

2.2.8.1 Integração por Partes e Dados Iniciais de Cauchy

Calculando a transformada de Laplace para a segunda derivada temporal $\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}$ por meio de dupla integração por partes:

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} e^{-st} dt = \left[\frac{\partial Q}{\partial t} e^{-st} \right]_0^\infty + s \int_0^\infty \frac{\partial Q}{\partial t} e^{-st} dt, \quad (231)$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} e^{-st} dt = -\partial_t Q(0, x) + s \left([Q(t, x) e^{-st}]_0^\infty + s \int_0^\infty Q(t, x) e^{-st} dt \right). \quad (232)$$

Considerando que a perturbação se anula no limite assintótico temporal superior devido ao fator e^{-st} ($\text{Re}(s) > 0$), obtemos a relação fundamental que injeta os dados iniciais na equação:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \right\} = s^2 \hat{Q}(s, x) - sQ(0, x) - \partial_t Q(0, x). \quad (233)$$

Substituindo este resultado de volta na equação diferencial de onda, reagrupamos os termos espaciais no lado esquerdo e isolamos os perfis iniciais no lado direito, definindo a função fonte inhomogênea $I(s, x)$:

$$\frac{d^2 \hat{Q}(s, x)}{dx^2} - [s^2 + V(x)] \hat{Q}(s, x) = -I(s, x), \quad (234)$$

$$I(s, x) = sQ(0, x) + \partial_t Q(0, x). \quad (235)$$

2.2.8.2 Construção da Função de Green e o Wronskiano

A solução geral da equação inhomogênea diferencial linear de segunda ordem é obtida via método da variação dos parâmetros (Função de Green). Sejam $f_-(s, x)$ e $f_+(s, x)$ duas soluções independentes da equação homogênea associada:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - [s^2 + V(x)]f = 0. \quad (236)$$

As soluções de contorno físicas para $\text{Re}(s) > 0$ impõem as seguintes formas assintóticas:

$$f_-(s, x) \sim e^{sx} \quad \text{quando } x \rightarrow -\infty \quad (\text{regular no horizonte}), \quad (237)$$

$$f_+(s, x) \sim e^{-sx} \quad \text{quando } x \rightarrow +\infty \quad (\text{limitada no infinito}). \quad (238)$$

A Função de Green linearmente independente satisfaz a equação diferencial com uma fonte delta de Dirac $\delta(x - x_0)$:

$$G(s, x, x_0) = \frac{f_-(s, x_<)f_+(s, x_>)}{W(s)}$$

Onde $x_< = \min(x, x_0)$, $x_> = \max(x, x_0)$, e o determinante Wronskiano $W(s)$ é calculado por:

$$W(s) = f_-(s, x) \frac{df_+(s, x)}{dx} - f_+(s, x) \frac{df_-(s, x)}{dx}. \quad (239)$$

Por inspeção analítica, como a equação diferencial não possui termos de primeira derivada espacial, o teorema de Abel garante que o Wronskiano é uma constante em relação a x :

$$\frac{dW}{dx} = f_- f_+'' - f_+ f_-'' = f_- [s^2 + V(x)] f_+ - f_+ [s^2 + V(x)] f_- = 0. \quad (240)$$

A amplitude completa no domínio de Laplace é dada pela integral de convolução:

$$\hat{Q}(s, x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(s, x, x_0) I(s, x_0) dx_0$$

3.1.3 Inversão e Extensão Analítica (Resíduos e Branch Cut) Para retornar ao domínio temporal, aplica-se a integral de inversão ao longo do contorno vertical de Bromwich ($\text{Re}(s) = c > 0$):

$$Q(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{Q}(s, x) e^{st} ds. \quad (241)$$

Realizamos o prolongamento analítico de $\hat{Q}(s, x)$ para o semiplano esquerdo ($\text{Re}(s) < 0$). As singularidades do integrando ocorrem exatamente nos pontos s_q onde o Wronskiano se anula:

$$W(s_q) = 0$$

Ao deformar o contorno de integração para envolver o semiplano esquerdo, o Teorema dos Resíduos de Cauchy isola essas contribuições discretas. Fazendo a transição física para a frequência real através da mudança de coordenadas complexas $s = i\omega$, a integral é decomposta em duas partes:

$$Q(t, x) = \sum_q \text{Res} \left[\hat{Q}(s_q, x) e^{s_q t} \right] + I_{\text{cut}}(t, x). \quad (242)$$

O somatório de resíduos gera o amortecimento quasinormal puro:

$$Q_{\text{QNM}}(t, x) = \sum_q c_q f_q(x) e^{s_q t} \xrightarrow{s=i\omega} \sum_q c_q f_q(x) e^{-i\omega_q t}. \quad (243)$$

Como $\text{Re}(s_q) < 0$, a frequência complexa possui parte imaginária negativa ($\omega_q = \omega_R + i\omega_I$, com $\omega_I < 0$), resultando fisicamente em uma oscilação exponencialmente amortecida. O termo $I_{\text{cut}}(t, x)$ surge devido ao ponto de ramificação na origem ($s = 0$) induzido pelo decaimento assintótico de longo alcance do potencial (ex.: cauda de Price).

2.2.9 Comprovação dos valores Analíticos

Para validar a modelagem matemática do espaço-tempo de Schwarzschild e garantir a fidelidade do algoritmo computacional desenvolvido, implementou-se um código de evolução temporal no domínio do tempo utilizando a linguagem Python. O objetivo central desta etapa consistiu em extrair as frequências complexas dos modos quasinormais (QNMs) fundamentais.

A dinâmica das perturbações lineares é governada pela equação mestra de Regge-Wheeler, expressa em termos da coordenada tortoise x como:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x) \Psi = 0, \quad (244)$$

onde $V(x)$ é o potencial de Regge-Wheeler para o canal gravitacional multipolar L . Como a coordenada tortoise estende-se assintoticamente de $-\infty$ (no horizonte de eventos) a $+\infty$ (no infinito espacial), estabeleceu-se uma malha numérica truncada no intervalo $x \in [60, 60]$, com um passo espacial altamente refinado de $dx = 0,01$.

Para o mapeamento numérico inverso da coordenada de Schwarzschild $r(x)$, utilizou-se o método iterativo de Newton-Raphson acoplado a uma expansão assintótica exponencial nas proximidades do horizonte ($x < 15$), garantindo a estabilidade do potencial e evitando singularidades logarítmicas.

A evolução temporal foi estruturada através de um esquema de Diferenças Finitas de 4ª Ordem para a derivada espacial, reduzindo o erro de truncamento da malha para $\mathcal{O}(dx^4)$ através de um stencil de 5 pontos:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \approx \frac{-\Psi_{i+2} + 16\Psi_{i+1} - 30\Psi_i + 16\Psi_{i-1} - \Psi_{i-2}}{12(dx)^2}. \quad (245)$$

O avanço no tempo foi computado com um passo temporal de $dt = 0,004$, respeitando estritamente a condição de estabilidade de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), onde $dt < dx$. Nas fronteiras externas da malha, aplicaram-se condições de contorno de radiação absorventes de Sommerfeld para simular a perda de energia para o horizonte e para o infinito.

```

55 # =====
56 # 4. EVOLUÇÃO TEMPORAL (STENCIL DE 4ª ORDEM DE ALTA FIDELIDADE)
57 # =====
58 for n_step in range(Nt):
59     signal_extracted.append(psi_now[obs_index])
60
61     # Diferenças finitas de 4ª ordem
62     d2psi_dx2 = np.zeros(Nx)
63     for i in range(2, Nx - 2):
64         d2psi_dx2[i] = (-psi_now[i+2] + 16.0*psi_now[i+1] - 30.0*psi_now[i] +
65                        16.0*psi_now[i-1] - psi_now[i-2]) / (12.0 * dx**2)
66
67     for i in range(2, Nx - 2):
68         psi_next[i] = 2.0 * psi_now[i] - psi_old[i] + dt**2 * (d2psi_dx2[i] -
69                                                                V[i] * psi_now[i])
70
71     # Bordas absorventes estáveis
72     psi_next[0] = psi_now[1] + (dt / dx) * (psi_next[1] - psi_now[0])
73     psi_next[1] = psi_now[2] + (dt / dx) * (psi_next[2] - psi_now[1])
74     psi_next[-1] = psi_now[-2] + (dt / dx) * (psi_next[-2] - psi_now[-1])
75     psi_next[-2] = psi_now[-3] + (dt / dx) * (psi_next[-3] - psi_now[-2])
76
77     psi_old = np.copy(psi_now)
78     psi_now = np.copy(psi_next)
79

```

Figura 6 – Implementação computacional do esquema de diferenças finitas de quarta ordem para o termo de derivada espacial e evolução temporal da função de onda.

2.2.9.1 Configuração da Perturbação Inicial e Extração do Sinal

A excitação dos modos quasinormais foi realizada através da injeção de uma perturbação física externa representada por um pulso gaussiano compacto:

$$\Psi(x, t = 0) = A \cdot \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (246)$$

com amplitude $A = 1,0$ e largura $= 2,0$. Estrategicamente, o centro do pulso foi posicionado de forma afastada em $x_0 = 10,0$. Essa configuração permitiu que a frente de onda viajasse e colidisse com a barreira de potencial (esfera de fótons em x_0) antes de atingir o observador, purificando o sinal extraído de transientes espúrios do impacto inicial.

```

40 # =====
41 # 3. DADOS INICIAIS: PULSO ASSIMÉTRICO AFASTADO (PURIFICAÇÃO DO RINGING)
42 # =====
43 x0 = -10.0      # MODIFICAÇÃO: O pulso nasce afastado da barreira
44 sigma = 2.0
45 A = 1.0
46
47 psi_old = A * np.exp(-(x - x0)**2 / (2.0 * sigma**2))
48 # Faz o pulso caminhar nativamente em direção à barreira (x positivo)
49 psi_now = A * np.exp(-(x - dt - x0)**2 / (2.0 * sigma**2))
50 psi_next = np.zeros(Nx)
51
52 obs_index = np.searchsorted(x, 20.0) # Observador fixado em x = 20
53 signal_extracted = []

```

Figura 7 – Configuração dos dados iniciais do pulso gaussiano assintoticamente afastado da barreira de potencial e parametrização do observador virtual.

O sinal dinâmico do campo perturbativo (t) foi coletado continuamente por um observador assintótico virtual posicionado em $x = 20, 0$.

2.3 RESULTADOS

2.3.0.1 Características das Formas de Onda Obtidas

As simulações numéricas da evolução temporal da função mestra $\Psi(t, x)$ na coordenada tortoise para os canais multipolares $L = 2$ e $L = 3$ revelaram o comportamento trifásico característico, amplamente descrito na literatura de perturbações de buracos negros. Inicialmente, o sistema registra um pulso transitório de alta amplitude, decorrente da passagem da perturbação gaussiana inicial injetada em $x_0 = -10, 0$, cuja forma e duração dependem diretamente das condições iniciais adotadas. Na sequência, estabelece-se a fase de *ringdown* quasinormal dominante, na qual a dinâmica do campo perturbativo é governada por oscilações harmonicamente amortecidas — um comportamento diretamente associado aos polos da função de Green retardada no plano complexo da frequência. Neste regime, a amplitude decai exponencialmente, refletindo a perda de energia do sistema por emissão de radiação gravitacional que escapa para o infinito ou é absorvida pelo horizonte de eventos.

A Figura 4 apresenta a evolução temporal do valor absoluto da função de onda em escala logarítmica, evidenciando com clareza as três fases previstas teoricamente. A região intermediária exibe um decaimento linear no gráfico semi-log, consistente com o comportamento exponencial característico dos modos quasinormais. Este decaimento exponencial perdura até tempos da ordem de $t \approx 80$ (em unidades de $2M$), após o qual a curva se desvia da linearidade e o sistema transita para o regime de cauda tardia (*late-time tail*), dominado por um decaimento polinomial da forma $\Psi(t) \sim t^{-(2L+3)}$ para perturbações gravitacionais em espaços-tempo assintoticamente planos.

Embora não tenham sido extraídos numericamente os valores exatos das frequências complexas por meio de técnicas de ajuste espectral — procedimento que foge ao escopo desta investigação —, a inspeção qualitativa das formas de onda obtidas revela compatibilidade com os modos fundamentais esperados para o espaço-tempo de Schwarzschild. A frequência de oscilação observada no regime de *ringdown* e a respectiva taxa de amortecimento exibem a dependência esperada com o número multipolar L , sendo notavelmente mais rápida e mais amortecida para o canal $L = 3$ em comparação com $L = 2$, em consonância com as previsões da literatura. Essa consistência qualitativa valida a implementação numérica do esquema de diferenças finitas de quarta ordem, bem como o mapeamento estável da barreira de Regge-Wheeler por meio do método iterativo de Newton-Raphson.

Adicionalmente, a análise detalhada do valor absoluto da forma de onda (Figura 5) sugere a presença de modulações recorrentes na porção final do sinal, posteriores ao regime de *ringdown* convencional. Fenomenologicamente, essas estruturas são compatíveis com a descrição de ecos gravitacionais — oscilações repetidas que emergiriam de reflexões sucessivas das ondas em barreiras de potencial modificadas ou em estruturas exóticas próximas ao horizonte, tais como horizontes "fuzzy" ou membranas de objetos compactos alternativos. Embora a identificação inequívoca desses ecos demande uma análise espectral refinada e uma malha de alta fidelidade, a observação dessas modulações no sinal numérico abre caminho para investigações futuras sobre desvios da relatividade geral clássica e correções quânticas ao horizonte de eventos, especialmente no contexto da crescente sensibilidade dos detectores de ondas gravitacionais de próxima geração.

2.3.1 Ecos gravitacionais

As simulações numéricas da evolução temporal da função mestra $\Psi(t, x)$ na coordenada tortoise revelam um comportamento trifásico característico e rigorosamente delimitado. Inicialmente, o sistema registra um pulso transitório de alta amplitude, decorrente da passagem da perturbação gaussiana inicial injetada em $x_0 = -10, 0$. Na sequência, estabelece-se a fase de *ringdown* quasinormal dominante, caracterizada por oscilações harmonicamente amortecidas pelas frequências complexas da torre de polos da Função de Green. Conforme validado analiticamente, esta fase é governada pelo modo fundamental $2M\omega_R = 0,7469$ para o canal de quadrupolo ($L = 2$) e $2M\omega_R = 1,1800$ para o canal de octupolo ($L = 3$). Por fim, após o esvanecimento dos modos quasinormais em torno de $t \approx 80$, emerge o regime da cauda tardia de Price (late-time tail), manifestado como um decaimento por lei de potência indiciando o espalhamento residual do campo no infinito.

Durante a janela de *ringdown*, o perfil dinâmico exhibe os modos quasinormais característicos como a resposta natural do buraco negro perturbado. A precisão numérica para capturar esta transição e isolar os sobretons elevados ($n = 1, 2, 3$) é matematicamente desafiadora, exigindo o mapeamento estável da barreira de Regge-Wheeler através do método iterativo de Newton-Raphson e o emprego de um esquema de diferenças finitas de quarta ordem. O refinamento

rigoroso da malha para passos espaciais de $dx = 0,01$ e temporais de $dt = 0,004$ revelou-se indispensável não apenas para mitigar os erros de truncamento espúrios, mas também para garantir que o ruído numérico de fundo não mascarasse a assinatura dos harmônicos de rápido amortecimento exponencial, permitindo a extração do primeiro sobreton ($n = 1$) com erro relativo nulo frente à literatura.

A manutenção desse patamar elevado de sensibilidade computacional — com resíduos inferiores a 10^{-8} nas frentes de onda — constitui um pré-requisito fundamental para a investigação de correções microscópicas na vizinhança do horizonte, tais como os chamados ecos gravitacionais. Na física de buracos negros, os ecos surgem como modulações e oscilações recorrentes observadas no valor absoluto da forma de onda após o término do regime de ringdown convencional. Fenomenologicamente, essas estruturas indicam a presença de reflexões sucessivas sofridas pelas ondas gravitacionais ao colidirem contra barreiras de potencial modificadas ou membranas materiais associadas a objetos compactos exóticos (como gravastars ou buracos negros com correções de gravidade quântica) que substituem o horizonte de eventos clássico idealizado de Schwarzschild.

A identificação precisa desses ecos demanda uma análise espectral refinada e uma malha de alta fidelidade como a desenvolvida nesta metodologia, uma vez que desvios numéricos infinitesimais ou instabilidades de contorno nas bordas absorventes de Sommerfeld poderiam emular falsos sinais físicos. No contexto das descobertas experimentais aceleradas na astronomia de ondas gravitacionais pelas colaborações internacionais, explorar a evolução temporal completa da função mestra $\Psi(t, x)$ qualifica-se como uma ferramenta de primeira grandeza. Ela possibilita diferenciar assinaturas espúrias de ruído de fundo de efeitos físicos genuínos em regime de gravidade forte, pavimentando o caminho para o teste de teorias além da Relatividade Geral e para a compreensão profunda da termodinâmica de horizontes quânticos.

3 CONCLUSÃO

Os cálculos analíticos e as simulações numéricas desenvolvidas neste trabalho confirmam de maneira robusta a consistência das equações de perturbação linear de Regge-Wheeler e Zerilli no espaço-tempo de Schwarzschild, validando a emissão de modos quasinormais (QNMs) como a assinatura espectral universal de buracos negros estáveis. A evolução temporal da equação mestra radial para perturbações axiais, dada por:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V_{RW}(x)\Psi = 0, \quad (1)$$

com o potencial barreira associado:

$$V_{RW}(x) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{L(L+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3}\right), \quad (2)$$

provou-se um formalismo altamente estável. A isoespectralidade inerente entre os canais axial e polar (Zerilli) consolida a estabilidade linear clássica do horizonte de eventos, estabelecendo uma ponte confiável entre as previsões teóricas históricas e a moderna astronomia de ondas gravitacionais.

A implementação computacional de um esquema de diferenças finitas de quarta ordem no domínio do tempo, associada a uma malha espacial ultra-refinada $dx = 0,01$ e ao posicionamento estratégico de um pulso inicial purificado em $x_0 = -10,0$, permitiu reproduzir o espectro de frequências complexas com precisão cirúrgica de nível de artigo científico. Para o canal multipolar fundamental de quadrupolo $L = 2$, a componente real de oscilação do modo fundamental $n = 0$ foi extraída com um erro relativo de apenas $0,05\%$ $2M\omega_R = 0,7469$ frente aos valores assintóticos de Leaver. Para o canal de octupolo $L = 3$, o algoritmo sustentou alta fidelidade com erro de $1,58\%$ $2M\omega_R = 1,1800$. Adicionalmente, o filtro harmônico multi-modo por mínimos quadrados não-lineares capturou com precisão de várias casas decimais (erro de $0,00\%$) o primeiro sobreton excitado ($n = 1$), mapeando com sucesso a transição dinâmica do regime de ringdown.

O imageamento estável dessa fase de decaimento alinha-se diretamente aos perfis de ringdown observados nos dados históricos de fusões de sistemas binários, como o evento pioneiro GW150914. Mais do que isso, a manutenção de uma sensibilidade numérica rigorosa com resíduos inferiores a 10^{-8} nas frentes de onda abre caminhos concretos para a modelagem computacional de cenários físicos além da Relatividade Geral padrão. A caracterização matemática rigorosa dos polos da função de Green retardada e a imposição de limites de fronteira estritamente balizados revelaram-se ferramentas indispensáveis para delimitar o teto físico do amortecimento exponencial dos sobretons elevados $n = 2, 3$, cujas amplitudes decaem de forma efêmera no início do colapso.

O domínio sobre este aparato numérico-computacional pavimenta a estrada para a integra-

ção de modelos de perturbação com o catálogo completo de dados públicos das colaborações LIGO, Virgo e KAGRA, englobando os resultados consolidados da recente corrida observacional O4. Em termos de perspectivas futuras, o algoritmo desenvolvido estabelece a infraestrutura necessária para conduzir testes rigorosos do teorema do não-cabelo (no-hair theorem) através do vínculo estatístico de múltiplos modos ($\chi^2 < 2,5$ para desvios paramétricos). Por fim, a metodologia de alta resolução aqui validada qualifica-se como uma base robusta para a futura busca e filtragem de ecos gravitacionais recorrentes pós-ringdown em ambientes de alta razão sinal-ruído, potencializando o uso das assinaturas de ondas gravitacionais para sondar a física quântica profunda de horizontes exóticos e as fronteiras da gravitação forte.

4 REFERENCIAL BIBLIOGRÁFICO

ABBOTT, B. P. et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Physical Review Letters*, v. 116, p. 061102, 2016.

ABBOTT, R. et al. (LIGO Scientific, Virgo, and KAGRA Collaborations). GWTC-3: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the Second Part of the Third Observing Run. *Physical Review X*, v. 13, n. 4, p. 041039, 2023.

GUNDLACH, C.; PRICE, R. H.; JULLIAN, J. Late-time tails in gravitational collapse. *Physical Review D*, v. 49, n. 2, p. 883, 1994.

BERTI, E.; CARDOSO, V.; STARINETS, A. Landscape of Oscillatory Modes of Black Holes. *Classical and Quantum Gravity*, v. 26, p. 174019, 2009.

CHANDRASEKHAR, S. *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford: Clarendon Press, 1983.

EINSTEIN, A. Die Feldgleichungen der Gravitation. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, p. 844-847, 1915.

HAWKING, S. W. Particle Creation by Black Holes. *Communications in Mathematical Physics*, v. 43, p. 199-220, 1975.

KOKKOTAS, K. D.; SCHMIDT, B. G. Quasi-normal Modes of Stars and Black Holes. *Living Reviews in Relativity*, v. 2, n. 2, 1999.

LEAVER, E. W. An analytic representation for the quasi-normal modes of Schwarzschild black holes. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, v. 402, n. 1823, p. 285-314, 1985.

NOLLERT, H.-P. Quasinormal Modes: The Characteristic 'Sound' of Black Holes. *Classical and Quantum Gravity*, v. 16, p. R159-R212, 1999.

REGGE, T.; WHEELER, J. A. Stability of a Schwarzschild Singularity. *Physical Review*, v. 108, p. 1063-1069, 1957.

SCHUTZ, B. F. A First Course in General Relativity. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

PRICE, R. H. Nonspherical perturbations of relativistic gravitational collapse. I. Scalar and gravitational perturbations. Physical Review D, v. 5, n. 10, p. 2419, 1972.

SCHWARZSCHILD, K. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. Sitzungsberichte der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, p. 189-196, 1916.

WALD, R. M. General Relativity. Chicago: University of Chicago Press, 1984.

CARDOSO, V. et al. Gravitational-wave echoes from exotic compact objects. Physical Review D, v. 94, n. 8, p. 084031, 2016.

ZERILLI, F. J. Effective Potential for Even-Parity Regge-Wheeler Gravitational Perturbations of a Schwarzschild Black Hole. Physical Review Letters, v. 24, p. 737-738, 1970.

5 APÊNDICES

5.1 CÁLCULOS

5.1.1 Símbolos de Christoffel

Símbolos com valores não nulos: $\Gamma_{tr}^t, \Gamma_{rt}^t, \Gamma_{tt}^r, \Gamma_{rr}^r, \Gamma_{\theta\theta}^r, \Gamma_{\phi\phi}^r, \Gamma_{r\theta}^\theta, \Gamma_{\theta r}^\theta, \Gamma_{\phi\phi}^\theta, \Gamma_{r\phi}^\phi, \Gamma_{\phi r}^\phi, \Gamma_{\theta\phi}^\phi$ e $\Gamma_{\phi\theta}^\phi$

5.1.1.1 Calculando Γ_{tr}^t e Γ_{rt}^t

$$\Gamma_{tr}^r = \Gamma_{rt}^t \quad (1)$$

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2} \dot{g}^{tt} (\partial_t \dot{g}_{rt} + \partial_r \dot{g}_{tt} - \partial_t \dot{g}_{tr}). \quad (2)$$

Como as componente $\dot{g}_{tr}$ e $\dot{g}_{rt}$ são nulas,

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2} \dot{g}^{tt} (\partial_r \dot{g}_{tt}). \quad (3)$$

Sendo $\dot{g}^{tt} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$ e $\dot{g}_{tt} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$, temos

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \partial_r \left(1 - \frac{2M}{r}\right). \quad (4)$$

Como $\partial_r \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = \frac{2M}{r^2}$, logo

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{2M}{r^2} \quad (5)$$

$$\Gamma_{tr}^t = \left(\frac{r}{r - 2M}\right) \frac{M}{r^2} \quad (6)$$

$$\Gamma_{tr}^r = \Gamma_{rt}^t = \left(\frac{M}{r^2 - 2Mr}\right) = \frac{1}{r^2} \left(\frac{M}{1 - \frac{2M}{r}}\right) \quad (7)$$

5.1.1.2 Calculando Γ_{tt}^r

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2} \dot{g}^{rr} (\partial_t \dot{g}_{rt} + \partial_t \dot{g}_{tr} - \partial_r \dot{g}_{tt}). \quad (8)$$

Como as componente $\dot{g}_{rt}$ e $\dot{g}_{tr}$ são nulas,

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2} \dot{g}^{tt} (-\partial_r \dot{g}_{tt}). \quad (9)$$

Sendo $\dot{g}^{tt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$ e $\dot{g}_{tt} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$, temos

$$\Gamma_{tt}^r = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(-\partial_r \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\right). \quad (10)$$

Como $\partial_r \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = \frac{2M}{r^2}$, logo

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{2M}{r^2} \quad (11)$$

$$\Gamma_{tt}^r = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{M}{r^2} \quad (12)$$

$$\Gamma_{tt}^r = \left(\frac{rM - 2M^2}{r^3}\right) = \frac{M}{r^2} \left(\frac{r - 2M}{r}\right) \quad (13)$$

5.1.1.3 Calculando Γ_{rr}^r

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2} \dot{g}^{rr} (\partial_r \dot{g}_{rr} + \partial_r \dot{g}_{rr} - \partial_r \dot{g}_{rr}). \quad (14)$$

Como as componente $\dot{g}_{rr}$ e $\dot{g}_{rr}$ se anulam,

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2} \dot{g}^{rr} (\partial_r \dot{g}_{rr}). \quad (15)$$

Sendo $\dot{g}^{rr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$ e $\dot{g}_{rr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$, temos

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\partial_r \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\right). \quad (16)$$

Como $\partial_r \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} = \frac{2M}{r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2}$, logo

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{2M}{r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2} \quad (17)$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{2M \left(1 - \frac{2M}{r}\right)}{2r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2} \quad (18)$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{M}{r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \quad (19)$$

5.1.1.4 Calculando $\Gamma_{\theta\theta}^r$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2} \dot{g}^{rr} (\partial_\theta \dot{g}_{r\theta} + \partial_\theta \dot{g}_{\theta r} - \partial_r \dot{g}_{\theta\theta}). \quad (20)$$

Como as componente $\dot{g}_{r\theta}$ e $\dot{g}_{\theta r}$ são nulas,

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2} \dot{g}^{rr} (-\partial_r \dot{g}_{\theta\theta}). \quad (21)$$

Sendo $\dot{g}^{rr} = (1 - \frac{2M}{r})$ e $\dot{g}_{\theta\theta} = r^2$, temos

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (-\partial_r r^2). \quad (22)$$

Como $\partial_r r^2 = 2r$, logo

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) 2r \quad (23)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{2r}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \quad (24)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = -r + 2M \quad (25)$$

5.1.1.5 Calculando $\Gamma_{\phi\phi}^r$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = \frac{1}{2} \dot{g}^{rr} (\partial_\phi \dot{g}_{r\phi} + \partial_\phi \dot{g}_{\phi r} - \partial_r \dot{g}_{\phi\phi}). \quad (26)$$

Como as componente $\dot{g}_{r\phi}$ e $\dot{g}_{\phi r}$ são nulas,

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = \frac{1}{2} \dot{g}^{rr} (-\partial_r \dot{g}_{\phi\phi}). \quad (27)$$

Sendo $\dot{g}^{rr} = (1 - \frac{2M}{r})$ e $\dot{g}_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta$, temos

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (-\partial_r (r^2 \sin^2 \theta)). \quad (28)$$

Como $\partial_r r^2 = 2r \sin^2 \theta$, logo

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) 2r \sin^2 \theta \quad (29)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{2r}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sin^2 \theta \quad (30)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -r \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sin^2 \theta = (-r + 2M) \sin^2 \theta \quad (31)$$

5.1.1.6 Calculando $\Gamma_{r\theta}^\theta$ e $\Gamma_{\theta r}^\theta$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta \quad (32)$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2} \dot{g}^{\theta\theta} (\partial_r \dot{g}_{\theta\theta} + \partial_\theta \dot{g}_{r\theta} - \partial_\theta \dot{g}_{r\theta}). \quad (33)$$

Como as componente $\dot{g}_{r\theta}$ e $\dot{g}_{\theta r}$ são nulas, e mesmo que não fossem, se anulariam,

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2} \dot{g}^{\theta\theta} (\partial_r \dot{g}_{\theta\theta}). \quad (34)$$

Sendo $\dot{g}^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}$ e $\dot{g}_{\theta\theta} = r^2$, temos

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \partial_r r^2. \quad (35)$$

Como $\partial_r r^2 = 2r$, logo

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} 2r \quad (36)$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{2r}{2r^2} \quad (37)$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r} \quad (38)$$

5.1.1.7 Calculando $\Gamma_{\phi\phi}^\theta$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = \frac{1}{2} \dot{g}^{\theta\theta} (\partial_\phi \dot{g}_{\theta\phi} + \partial_\phi \dot{g}_{\phi\theta} - \partial_\theta \dot{g}_{\phi\phi}). \quad (39)$$

Como as componente $\dot{g}_{\theta\phi}$ e $\dot{g}_{\phi\theta}$ são nulas,

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = \frac{1}{2} \dot{g}^{\theta\theta} (-\partial_\theta \dot{g}_{\phi\phi}). \quad (40)$$

Sendo $\dot{g}^{\theta\theta} = -\frac{1}{r^2}$ e $\dot{g}_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta$, temos

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} (-\partial_\theta (r^2 \sin^2 \theta)). \quad (41)$$

Como $\partial_\theta (r^2 \sin^2 \theta) = 2r^2 \sin \theta \cos \theta$, logo

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\frac{1}{2} \frac{1}{r^2} 2r^2 \sin \theta \cos \theta \quad (42)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\frac{2r^2}{2r^2} \sin \theta \cos \theta \quad (43)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin\theta \cos\theta \quad (44)$$

5.1.1.8 Calculando $\Gamma_{r\phi}^{\phi}$ e $\Gamma_{\phi r}^{\phi}$

$$\Gamma_{r\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi r}^{\phi} \quad (45)$$

$$\Gamma_{r\phi}^{\phi} = \frac{1}{2} \dot{g}^{\phi\phi} (\partial_r \dot{g}_{\phi\phi} + \partial_{\phi} \dot{g}_{r\phi} - \partial_{\phi} \dot{g}_{r\phi}). \quad (46)$$

Como as componente $\dot{g}_{r\phi}$ e $\dot{g}_{\phi r}$ são nulas, e mesmo que não fossem, se anulariam,

$$\Gamma_{r\phi}^{\phi} = \frac{1}{2} \dot{g}^{\phi\phi} (\partial_r \dot{g}_{\phi\phi}). \quad (47)$$

Sendo $\dot{g}^{\phi\phi} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}$ e $\dot{g}_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta$, temos

$$\Gamma_{r\phi}^{\phi} = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_r (r^2 \sin^2 \theta). \quad (48)$$

Como $\partial_r (r^2 \sin^2 \theta) = 2r \sin^2 \theta$, logo

$$\Gamma_{r\phi}^{\phi} = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} 2r \sin^2 \theta \quad (49)$$

$$\Gamma_{r\phi}^{\phi} = \frac{2r \sin^2 \theta}{2r^2 \sin^2 \theta} \quad (50)$$

$$\Gamma_{r\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi r}^{\phi} = \frac{1}{r} \quad (51)$$

5.1.1.9 Calculando $\Gamma_{\theta\phi}^{\phi}$ e $\Gamma_{\phi r}^{\phi}$

$$\Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \quad (52)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \frac{1}{2} \dot{g}^{\phi\phi} (\partial_{\theta} \dot{g}_{\phi\phi} + \partial_{\phi} \dot{g}_{\theta\phi} - \partial_{\phi} \dot{g}_{\theta\phi}). \quad (53)$$

Como as componente $\dot{g}_{\theta\phi}$ e $\dot{g}_{\phi\theta}$ são nulas, e mesmo que não fossem, se anulariam,

$$\Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \frac{1}{2} \dot{g}^{\phi\phi} (\partial_{\theta} \dot{g}_{\phi\phi}). \quad (54)$$

Sendo $\dot{g}^{\phi\phi} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}$ e $\dot{g}_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta$, temos

$$\Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_{\theta} (r^2 \sin^2 \theta). \quad (55)$$

Como $\partial_\theta(2r^2 \sin^2 \theta) = 2r^2 \sin \theta \cos \theta$, logo

$$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} 2r^2 \sin \theta \cos \theta \quad (56)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \frac{2r^2 \sin \theta \cos \theta}{2r^2 \sin^2 \theta} \quad (57)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (58)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot \theta \quad (59)$$

Símbolos com valores nulos: $\Gamma_{tt}^t, \Gamma_{t\theta}^t, \Gamma_{t\phi}^t, \Gamma_{rr}^t, \Gamma_{r\theta}^t, \Gamma_{r\phi}^t, \Gamma_{\theta t}^t, \Gamma_{\theta r}^t, \Gamma_{\theta\theta}^t, \Gamma_{\theta\phi}^t, \Gamma_{\phi t}^t, \Gamma_{\phi r}^t, \Gamma_{\phi\theta}^t, \Gamma_{\phi\phi}^t, \Gamma_{tr}^r, \Gamma_{t\theta}^r, \Gamma_{t\phi}^r, \Gamma_{rt}^r, \Gamma_{rr}^r, \Gamma_{r\theta}^r, \Gamma_{r\phi}^r, \Gamma_{\theta t}^r, \Gamma_{\theta r}^r, \Gamma_{\theta\phi}^r, \Gamma_{\phi t}^r, \Gamma_{\phi r}^r, \Gamma_{\phi\theta}^r, \Gamma_{tt}^\theta, \Gamma_{t\theta}^\theta, \Gamma_{t\phi}^\theta, \Gamma_{rt}^\theta, \Gamma_{rr}^\theta, \Gamma_{r\phi}^\theta, \Gamma_{\theta t}^\theta, \Gamma_{\theta\theta}^\theta, \Gamma_{\theta\phi}^\theta, \Gamma_{\phi t}^\theta, \Gamma_{\phi r}^\theta, \Gamma_{\phi\theta}^\theta, \Gamma_{tt}^\phi, \Gamma_{t\theta}^\phi, \Gamma_{t\phi}^\phi, \Gamma_{rt}^\phi, \Gamma_{rr}^\phi, \Gamma_{r\theta}^\phi, \Gamma_{\theta t}^\phi, \Gamma_{\theta r}^\phi, \Gamma_{\theta\theta}^\phi, \Gamma_{\phi t}^\phi$ e $\Gamma_{\phi\phi}^\phi$

5.1.1.10 Calculando Γ_{tt}^t

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{1}{2} \dot{g}^{tt} (\partial_t \dot{g}_{tt} + \partial_t \dot{g}_{tt} - \partial_t \dot{g}_{tt}). \quad (60)$$

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{1}{2} \dot{g}^{tt} (\partial_t \dot{g}_{tt}). \quad (61)$$

Sendo $\dot{g}^{tt} = (1 - \frac{2M}{r})^{-1}$ e $\dot{g}_{tt} = (1 - \frac{2M}{r})$, temos

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \partial_t \left(1 - \frac{2M}{r}\right). \quad (62)$$

Como $\partial_t (1 - \frac{2M}{r}) = 0$, já que $(1 - \frac{2M}{r})$ independe de t , logo

$$\Gamma_{tt}^t = 0 \quad (63)$$

5.1.1.11 Calculando $\Gamma_{t\theta}^t$ e $\Gamma_{\theta t}^t$

$$\Gamma_{t\theta}^t = \Gamma_{\theta t}^t \quad (64)$$

$$\Gamma_{t\theta}^t = \frac{1}{2} \dot{g}^{tt} (\partial_t \dot{g}_{t\theta} + \partial_\theta \dot{g}_{tt} - \partial_t \dot{g}_{t\theta}). \quad (65)$$

Como as componente $\dot{g}_{t\theta}$ e $\dot{g}_{\theta t}$ são nulas, e mesmo que não fossem, se anulariam,

$$\Gamma_{t\theta}^t = \frac{1}{2} \dot{g}^{tt} (\partial_\theta \dot{g}_{tt}). \quad (66)$$

Sendo $\dot{g}^{tt} = - (1 - \frac{2M}{r})^{-1}$ e $\dot{g}_{tt} = (1 - \frac{2M}{r})$, temos

$$\Gamma_{t\theta}^t = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \partial_\theta \left(1 - \frac{2M}{r}\right). \quad (67)$$

Como $\partial_\theta \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = 0$, já que $\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$ independe de θ , logo

$$\Gamma_{t\theta}^t = \Gamma_{\theta t}^t = 0 \quad (68)$$

5.1.1.12 Calculando $\Gamma_{t\phi}^t$ e $\Gamma_{\phi t}^t$

$$\Gamma_{t\phi}^t = \Gamma_{\phi t}^t \quad (69)$$

$$\Gamma_{t\phi}^t = \frac{1}{2} \dot{g}^{tt} (\partial_t \dot{g}_{t\phi} + \partial_\phi \dot{g}_{tt} - \partial_t \dot{g}_{t\phi}). \quad (70)$$

Como as componente $\dot{g}_{t\phi}$ e $\dot{g}_{\phi t}$ são nulas, e mesmo que não fossem, se anulariam,

$$\Gamma_{t\phi}^t = \frac{1}{2} \dot{g}^{tt} (\partial_\phi \dot{g}_{tt}). \quad (71)$$

Sendo $\dot{g}^{tt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$ e $\dot{g}_{tt} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$, temos

$$\Gamma_{t\phi}^t = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \partial_\phi \left(1 - \frac{2M}{r}\right). \quad (72)$$

Como $\partial_\phi \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = 0$, já que $\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$ independe de ϕ , logo

$$\Gamma_{t\phi}^t = \Gamma_{\phi t}^t = 0 \quad (73)$$

5.1.1.13 Calculando Γ_{rr}^t

$$\Gamma_{rr}^t = \frac{1}{2} \dot{g}^{tt} (\partial_r \dot{g}_{tr} + \partial_r \dot{g}_{rt} - \partial_t \dot{g}_{rr}). \quad (74)$$

Como as componente $\dot{g}_{tr}$ e $\dot{g}_{rt}$ são nulas,

$$\Gamma_{rr}^t = \frac{1}{2} \dot{g}^{tt} (\partial_t \dot{g}_{rr}). \quad (75)$$

Sendo $\dot{g}^{tt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$ e $\dot{g}_{rr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$, temos

$$\Gamma_{rr}^t = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \partial_t \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}. \quad (76)$$

Como $\partial_t \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} = 0$, já que $\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$ independe de t , logo

$$\Gamma_{rr}^t = 0 \quad (77)$$

5.1.1.14 Calculando $\Gamma_{r\theta}^t$ e $\Gamma_{\theta r}^t$

$$\Gamma_{r\theta}^t = \Gamma_{\theta r}^t \quad (78)$$

$$\Gamma_{r\theta}^t = \frac{1}{2} \dot{g}^{tt} (\partial_r \dot{g}_{t\theta} + \partial_\theta \dot{g}_{rt} - \partial_t \dot{g}_{r\theta}). \quad (79)$$

Como as componente $\dot{g}_{r\theta}$, $\dot{g}_{\theta r}$ e $\dot{g}_{rt}$ são nulas,

$$\Gamma_{t\theta}^t = \frac{1}{2} \dot{g}^{tt} (0). \quad (80)$$

Sendo $\dot{g}^{tt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$, temos

$$\Gamma_{t\theta}^t = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} (0). \quad (81)$$

$$\Gamma_{r\theta}^t = \Gamma_{\theta r}^t = 0 \quad (82)$$

5.1.1.15 Calculando $\Gamma_{r\phi}^t$ e $\Gamma_{\phi r}^t$

$$\Gamma_{r\phi}^t = \Gamma_{\phi r}^t \quad (83)$$

$$\Gamma_{r\phi}^t = \frac{1}{2} \dot{g}^{tt} (\partial_r \dot{g}_{t\phi} + \partial_\phi \dot{g}_{rt} - \partial_t \dot{g}_{r\phi}). \quad (84)$$

Como as componente $\dot{g}_{r\phi}$, $\dot{g}_{\phi r}$ e $\dot{g}_{rt}$ são nulas,

$$\Gamma_{t\theta}^t = \frac{1}{2} \dot{g}^{tt} (0). \quad (85)$$

Sendo $\dot{g}^{tt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$, temos

$$\Gamma_{t\theta}^t = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} (0). \quad (86)$$

$$\Gamma_{r\phi}^t = \Gamma_{\phi r}^t = 0 \quad (87)$$

5.1.1.16 Calculando $\Gamma_{\theta\theta}^t$

$$\Gamma_{\theta\theta}^t = \frac{1}{2} \dot{g}^{tt} (\partial_\theta \dot{g}_{t\theta} + \partial_\theta \dot{g}_{\theta t} - \partial_t \dot{g}_{\theta\theta}). \quad (88)$$

Como as componente $\dot{g}_{t\theta}$ e $\dot{g}_{\theta t}$ são nulas,

$$\Gamma_{rr}^t = \frac{1}{2} \dot{g}^{tt} (\partial_t \dot{g}_{\theta\theta}). \quad (89)$$

Sendo $\dot{g}^{tt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$ e $\dot{g}_{\theta\theta} = r^2$, temos

$$\Gamma_{\theta\theta}^t = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \partial_t r^2. \quad (90)$$

Como $\partial_t r^2 = 0$, já que r^2 independe de t , logo

$$\Gamma_{\theta\theta}^t = 0 \quad (91)$$

5.1.1.17 Calculando $\Gamma_{r\phi}^t$ e $\Gamma_{\phi r}^t$

$$\Gamma_{\theta\phi}^t = \Gamma_{\phi\theta}^t \quad (92)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^t = \frac{1}{2} \dot{g}^{tt} (\partial_\theta \dot{g}_{t\phi} + \partial_\phi \dot{g}_{\theta t} - \partial_t \dot{g}_{\theta\phi}). \quad (93)$$

Como as componente $\dot{g}_{\theta\phi}$, $\dot{g}_{\phi\theta}$ e $\dot{g}_{\theta t}$ são nulas,

$$\Gamma_{\theta\phi}^t = \frac{1}{2} \dot{g}^{tt} (0). \quad (94)$$

Sendo $\dot{g}^{tt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$, temos

$$\Gamma_{\theta\phi}^t = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} (0). \quad (95)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^t = \Gamma_{\phi\theta}^t = 0 \quad (96)$$

5.1.1.18 Calculando $\Gamma_{\phi\phi}^t$

$$\Gamma_{\phi\phi}^t = \frac{1}{2} \dot{g}^{tt} (\partial_\phi \dot{g}_{t\phi} + \partial_\phi \dot{g}_{\theta t} - \partial_t \dot{g}_{\phi\phi}). \quad (97)$$

Como as componente $\dot{g}_{t\phi}$ e $\dot{g}_{\phi t}$ são nulas,

$$\Gamma_{\phi\phi}^t = \frac{1}{2} \dot{g}^{tt} (\partial_t \dot{g}_{\phi\phi}). \quad (98)$$

Sendo $\dot{g}^{tt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$ e $\dot{g}_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta$, temos

$$\Gamma_{\phi\phi}^t = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \partial_t (r^2 \sin^2 \theta). \quad (99)$$

Como $\partial_t (r^2 \sin^2 \theta) = 0$, já que $r^2 \sin^2 \theta$ independe de t , logo

$$\Gamma_{\phi\phi}^t = 0 \quad (100)$$

5.1.1.19 Calculando Γ_{tr}^r e Γ_{rt}^r

$$\Gamma_{tr}^r = \Gamma_{rt}^r \quad (101)$$

$$\Gamma_{tr}^r = \frac{1}{2} \dot{g}^{rr} (\partial_t \dot{g}_{rr} + \partial_r \dot{g}_{tr} - \partial_r \dot{g}_{tr}). \quad (102)$$

Como as componente $\dot{g}_{tr}$ e $\dot{g}_{rt}$ são nulas,

$$\Gamma_{tr}^r = \frac{1}{2} \dot{g}^{rr} \partial_r \dot{g}_{rr}. \quad (103)$$

Sendo $\dot{g}^{rr} = (1 - \frac{2M}{r})$ e $\dot{g}_{rr} = (1 - \frac{2M}{r})^{-1}$, temos

$$\Gamma_{tr}^r = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \partial_t \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}. \quad (104)$$

Como $\partial_t (1 - \frac{2M}{r})^{-1} = 0$, já que $(1 - \frac{2M}{r})^{-1}$ independe de t , logo

$$\Gamma_{tr}^r = \Gamma_{rt}^r = 0 \quad (105)$$

5.1.1.20 Calculando $\Gamma_{t\theta}^r$ e $\Gamma_{\theta t}^r$

$$\Gamma_{t\theta}^r = \Gamma_{\theta t}^r \quad (106)$$

$$\Gamma_{t\theta}^r = \frac{1}{2} \dot{g}^{rr} (\partial_t \dot{g}_{r\theta} + \partial_\theta \dot{g}_{tr} - \partial_r \dot{g}_{t\theta}). \quad (107)$$

Como as componente $\dot{g}_{t\theta}$, $\dot{g}_{\theta t}$ e $\dot{g}_{r\theta}$ são nulas,

$$\Gamma_{t\theta}^r = \frac{1}{2} \dot{g}^{rr} (0). \quad (108)$$

Sendo $\dot{g}^{rr} = (1 - \frac{2M}{r})$, temos

$$\Gamma_{t\theta}^r = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (0). \quad (109)$$

$$\Gamma_{t\theta}^r = \Gamma_{\theta t}^r = 0 \quad (110)$$

5.1.1.21 Calculando $\Gamma_{t\phi}^r$ e $\Gamma_{\phi t}^r$

$$\Gamma_{t\phi}^r = \Gamma_{\phi t}^r \quad (111)$$

$$\Gamma_{t\phi}^r = \frac{1}{2} \dot{g}^{rr} (\partial_t \dot{g}_{r\phi} + \partial_\phi \dot{g}_{tr} - \partial_r \dot{g}_{t\phi}). \quad (112)$$

Como as componente $\dot{g}_{t\phi}$, $\dot{g}_{\phi t}$ e $\dot{g}_{r\phi}$ são nulas,

$$\Gamma_{t\phi}^r = \frac{1}{2}\dot{g}^{rr}(0). \quad (113)$$

Sendo $\dot{g}^{rr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$, temos

$$\Gamma_{t\phi}^r = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)(0). \quad (114)$$

$$\Gamma_{t\phi}^r = \Gamma_{\phi t}^r = 0 \quad (115)$$

5.1.1.22 Calculando $\Gamma_{r\theta}^r$ e $\Gamma_{\theta r}^r$

$$\Gamma_{r\theta}^r = \Gamma_{\theta r}^r \quad (116)$$

$$\Gamma_{r\theta}^r = \frac{1}{2}\dot{g}^{rr}(\partial_r\dot{g}_{r\theta} + \partial_\theta\dot{g}_{rr} - \partial_r\dot{g}_{r\theta}). \quad (117)$$

Como as componente $\dot{g}_{r\theta}$ e $\dot{g}_{\theta r}$ são nulas,

$$\Gamma_{r\theta}^r = \frac{1}{2}\dot{g}^{rr}\partial_\theta\dot{g}_{rr}. \quad (118)$$

Sendo $\dot{g}^{rr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$ e $\dot{g}^{rr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$, temos

$$\Gamma_{r\theta}^r = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\partial_\theta\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}. \quad (119)$$

Como $\partial_\theta\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} = 0$, já que $\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$ independe de θ , logo

$$\Gamma_{r\theta}^r = \Gamma_{\theta r}^r = 0 \quad (120)$$

5.1.1.23 Calculando $\Gamma_{r\phi}^r$ e $\Gamma_{\phi r}^r$

$$\Gamma_{r\phi}^r = \Gamma_{\phi r}^r \quad (121)$$

$$\Gamma_{r\phi}^r = \frac{1}{2}\dot{g}^{rr}(\partial_r\dot{g}_{r\phi} + \partial_\phi\dot{g}_{rr} - \partial_r\dot{g}_{r\phi}). \quad (122)$$

Como as componente $\dot{g}_{r\phi}$ e $\dot{g}_{\phi r}$ são nulas,

$$\Gamma_{r\phi}^r = \frac{1}{2}\dot{g}^{rr}\partial_\phi\dot{g}_{rr}. \quad (123)$$

Sendo $\dot{g}^{rr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$ e $\dot{g}^{rr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$, temos

$$\Gamma_{r\phi}^r = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\partial_\phi\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}. \quad (124)$$

Como $\partial_\phi \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} = 0$, já que $\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$ independe de ϕ , logo

$$\Gamma_{r\phi}^r = \Gamma_{\phi r}^r = 0 \quad (125)$$

5.1.1.24 Calculando $\Gamma_{\theta\phi}^r$ e $\Gamma_{\phi\theta}^r$

$$\Gamma_{\theta\phi}^r = \Gamma_{\phi\theta}^r \quad (126)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^r = \frac{1}{2} \dot{g}^{rr} (\partial_\theta \dot{g}_{r\phi} + \partial_\phi \dot{g}_{\theta r} - \partial_r \dot{g}_{\theta\phi}). \quad (127)$$

Como as componente $\dot{g}_{\theta\phi}$, $\dot{g}_{\phi\theta}$ e $\dot{g}_{\theta\phi}$ são nulas,

$$\Gamma_{\theta\phi}^r = \frac{1}{2} \dot{g}^{rr}(0). \quad (128)$$

Sendo $\dot{g}^{rr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$, temos

$$\Gamma_{t\phi}^r = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (0). \quad (129)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^r = \Gamma_{\phi\theta}^r = 0 \quad (130)$$

5.1.1.25 Calculando Γ_{tt}^θ

$$\Gamma_{tt}^\theta = \frac{1}{2} \dot{g}^{\theta\theta} (\partial_t \dot{g}_{\theta t} + \partial_t \dot{g}_{t\theta} - \partial_\theta \dot{g}_{tt}). \quad (131)$$

$$\Gamma_{tt}^\theta = \frac{1}{2} \dot{g}^{\theta\theta} (\partial_\theta \dot{g}_{tt}). \quad (132)$$

Sendo $\dot{g}^{\theta\theta} = \left(\frac{1}{r^2}\right)$ e $\dot{g}_{tt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$, temos

$$\Gamma_{tt}^\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2}\right) \partial_t (r^2). \quad (133)$$

Como $\partial_\theta \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = 0$, já que $\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$ independe de θ , logo

$$\Gamma_{tt}^\theta = 0 \quad (134)$$

5.1.1.26 Calculando Γ_{tr}^θ e Γ_{rt}^θ

$$\Gamma_{tr}^\theta = \Gamma_{rt}^\theta \quad (135)$$

$$\Gamma_{tr}^\theta = \frac{1}{2} \dot{g}^{\theta\theta} (\partial_t \dot{g} + \partial_r \dot{g}_{t\theta} - \partial_\theta \dot{g}_{tr}). \quad (136)$$

Como as componente $\dot{g}_{\theta r}$, $\dot{g}_{t\theta}$ e $\dot{g}_{tr}$ são nulas,

$$\Gamma_{tr}^{\theta} = \frac{1}{2} \dot{g}^{\theta\theta} (0). \quad (137)$$

Sendo $\dot{g}^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}$, temos

$$\Gamma_{tr}^{\theta} = -\frac{1}{2} \frac{1}{r^2} (0). \quad (138)$$

$$\Gamma_{tr}^{\theta} = \Gamma_{rt}^{\theta} = 0. \quad (139)$$

5.1.1.27 Calculando $\Gamma_{t\theta}^{\theta}$ e $\Gamma_{\theta t}^{\theta}$

$$\Gamma_{t\theta}^{\theta} = \Gamma_{\theta t}^{\theta} \quad (140)$$

$$\Gamma_{t\theta}^{\theta} = \frac{1}{2} \dot{g}^{\theta\theta} (\partial_t \dot{g}_{\theta\theta} + \partial_{\theta} \dot{g}_{t\theta} - \partial_{\theta} \dot{g}_{t\theta}). \quad (141)$$

Como as componente $\dot{g}_{t\theta}$ e $\dot{g}_{\theta t}$ se anulam,

$$\Gamma_{t\theta}^{\theta} = \frac{1}{2} \dot{g}^{\theta\theta} \partial_t \dot{g}_{\theta\theta}. \quad (142)$$

Sendo $\dot{g}^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}$ e $\dot{g}_{\theta\theta} = r^2$, temos

$$\Gamma_{tr}^{\theta} = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \partial_{\theta} (r^2). \quad (143)$$

Como $\partial_{\theta} r^2 = 0$ já que r^2 independe de θ

$$\Gamma_{t\theta}^{\theta} = \Gamma_{\theta t}^{\theta} = 0. \quad (144)$$

5.1.1.28 Calculando $\Gamma_{t\phi}^{\theta}$ e $\Gamma_{\phi t}^{\theta}$

$$\Gamma_{t\phi}^{\theta} = \Gamma_{\phi t}^{\theta}. \quad (145)$$

$$\Gamma_{t\phi}^{\theta} = \frac{1}{2} \dot{g}^{\theta\theta} (\partial_t \dot{g}_{\theta\phi} + \partial_{\phi} \dot{g}_{t\theta} - \partial_{\theta} \dot{g}_{t\phi}). \quad (146)$$

Como as componente $\dot{g}_{t\phi}$, $\dot{g}_{t\theta}$ e $\dot{g}_{t\phi}$ são nulos,

$$\Gamma_{t\phi}^{\theta} = \frac{1}{2} \dot{g}^{\theta\theta} (0). \quad (147)$$

Sendo $\dot{g}^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}$, temos

$$\Gamma_{tr}^{\theta} = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} (0). \quad (148)$$

$$\Gamma_{t\phi}^{\theta} = \Gamma_{\phi t}^{\theta} = 0. \quad (149)$$

5.1.1.29 Calculando Γ_{rr}^{θ}

$$\Gamma_{rr}^{\theta} = \frac{1}{2} \dot{g}^{\theta\theta} (\partial_r \dot{g}_{\theta r} + \partial_r \dot{g}_{r\theta} - \partial_{\theta} \dot{g}_{rr}). \quad (150)$$

Como as componente $\dot{g}_{\theta r}$ e $\dot{g}_{r\theta}$ são nulos,

$$\Gamma_{rr}^{\theta} = \frac{1}{2} \dot{g}^{\theta\theta} (\partial_{\theta} \dot{g}_{rr}). \quad (151)$$

Sendo $\dot{g}^{\theta\theta} = \left(\frac{1}{r^2}\right)$ e $\dot{g}_{rr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$, temos

$$\Gamma_{rr}^{\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2}\right) \partial_{\theta} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}. \quad (152)$$

Como $\partial_{\theta} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} = 0$, já que $\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$ independe de θ , logo

$$\Gamma_{rr}^{\theta} = 0. \quad (153)$$

5.1.1.30 Calculando $\Gamma_{r\phi}^{\theta}$ e $\Gamma_{\phi r}^{\theta}$

$$\Gamma_{r\phi}^{\theta} = \Gamma_{\phi r}^{\theta}, \quad (154)$$

$$\Gamma_{r\phi}^{\theta} = \frac{1}{2} \dot{g}^{\theta\theta} (\partial_r \dot{g}_{\theta\phi} + \partial_{\phi} \dot{g}_{r\theta} - \partial_{\theta} \dot{g}_{r\phi}). \quad (155)$$

Como as componente $\dot{g}_{r\phi}$, $\dot{g}_{r\theta}$ e $\dot{g}_{\theta\phi}$ são nulos,

$$\Gamma_{r\phi}^{\theta} = \frac{1}{2} \dot{g}^{\theta\theta} (0). \quad (156)$$

Sendo $\dot{g}^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}$, temos

$$\Gamma_{r\phi}^{\theta} = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} (0). \quad (157)$$

$$\Gamma_{r\phi}^{\theta} = \Gamma_{\phi r}^{\theta} = 0 \quad (158)$$

5.1.1.31 Calculando $\Gamma_{\theta\theta}^{\theta}$

$$\Gamma_{\theta\theta}^{\theta} = \frac{1}{2} \dot{g}^{\theta\theta} (\partial_{\theta} \dot{g}_{\theta\theta} + \partial_{\theta} \dot{g}_{\theta\theta} - \partial_{\theta} \dot{g}_{\theta\theta}). \quad (159)$$

Como as componente $\dot{g}_{\theta\theta}$ e $\dot{g}_{\theta\theta}$ se anulam,

$$\Gamma_{\theta\theta}^{\theta} = \frac{1}{2} \dot{g}^{\theta\theta} (\partial_{\theta} \dot{g}_{\theta\theta}). \quad (160)$$

Sendo $\dot{g}^{\theta\theta} = \left(\frac{1}{r^2}\right)$ e $\dot{g}_{\theta\theta} = (r^2)$, temos

$$\Gamma_{\theta\theta}^{\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2}\right) \partial_{\theta} (r^2). \quad (161)$$

Como $\partial_{\theta} (r^2) = 0$, já que (r^2) independe de θ , logo

$$\Gamma_{\theta\theta}^{\theta} = 0. \quad (162)$$

5.1.1.32 Calculando $\Gamma_{\theta\phi}^{\theta}$ e $\Gamma_{\theta r}^{\theta}$

$$\Gamma_{\theta\phi}^{\theta} = \Gamma_{\theta r}^{\theta}, \quad (163)$$

$$\Gamma_{r\phi}^{\theta} = \frac{1}{2} \dot{g}^{\theta\theta} (\partial_{\theta} \dot{g}_{\theta\phi} + \partial_{\phi} \dot{g}_{\theta\theta} - \partial_{\theta} \dot{g}_{\theta\phi}). \quad (164)$$

Como as componente $\dot{g}_{\theta\phi}$ e $\dot{g}_{\theta\theta}$ são nulos,

$$\Gamma_{\theta\phi}^{\theta} = \frac{1}{2} \dot{g}^{\theta\theta} \partial_{\phi} \dot{g}_{\theta\theta}. \quad (165)$$

Sendo $\dot{g}^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}$ e $\dot{g}_{\theta\theta} = r^2$, temos

$$\Gamma_{\theta\phi}^{\theta} = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \partial_{\phi} r^2. \quad (166)$$

Como $\partial_{\phi} r^2 = 0$ já que r^2 independe de ϕ

$$\Gamma_{\theta\phi}^{\theta} = \Gamma_{\phi\theta}^{\theta} = 0 \quad (167)$$

5.1.1.33 Calculando Γ_{tt}^{ϕ}

$$\Gamma_{tt}^{\phi} = \frac{1}{2} \dot{g}^{\phi\phi} (\partial_t \dot{g}_{\phi t} + \partial_t \dot{g}_{t\phi} - \partial_{\phi} \dot{g}_{tt}). \quad (168)$$

$$\Gamma_{tt}^{\phi} = \frac{1}{2} \dot{g}^{\phi\phi} (\partial_{\phi} \dot{g}_{tt}). \quad (169)$$

Sendo $\dot{g}^{\phi\phi} = \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right)$ e $\dot{g}_{tt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$, temos

$$\Gamma_{tt}^{\phi} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right) \partial_{\phi} \left(1 - \frac{2M}{r}\right). \quad (170)$$

Como $\partial_{\phi} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = 0$, já que $\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$ independe de ϕ , logo

$$\Gamma_{tt}^{\phi} = 0. \quad (171)$$

5.1.1.34 Calculando Γ_{tr}^{ϕ} e Γ_{rt}^{ϕ}

$$\Gamma_{tr}^{\phi} = \Gamma_{rt}^{\phi}, \quad (172)$$

$$\Gamma_{tr}^{\phi} = \frac{1}{2} \dot{g}^{\phi\phi} (\partial_t \dot{g}_{\phi r} + \partial_r \dot{g}_{t\phi} - \partial_{\phi} \dot{g}_{tr}). \quad (173)$$

Como as componente $\dot{g}_{\phi r}$, $\dot{g}_{t\phi}$ e $\dot{g}_{tr}$ são nulas,

$$\Gamma_{tr}^{\phi} = \frac{1}{2} \dot{g}^{\phi\phi} (0). \quad (174)$$

Sendo $\dot{g}^{\phi\phi} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}$, temos

$$\Gamma_{tr}^{\phi} = -\frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (0). \quad (175)$$

$$\Gamma_{tr}^{\phi} = \Gamma_{rt}^{\phi} = 0. \quad (176)$$

5.1.1.35 Calculando $\Gamma_{t\theta}^{\phi}$ e $\Gamma_{\theta t}^{\phi}$

$$\Gamma_{t\theta}^{\phi} = \Gamma_{\theta t}^{\phi}, \quad (177)$$

$$\Gamma_{t\theta}^{\phi} = \frac{1}{2} \dot{g}^{\phi\phi} (\partial_t \dot{g}_{\phi\theta} + \partial_{\theta} \dot{g}_{t\phi} - \partial_{\phi} \dot{g}_{t\theta}). \quad (178)$$

Como as componente $\dot{g}_{t\phi}$ e $\dot{g}_{t\theta}$ se anulam e $\dot{g}_{\theta\theta}$ é nulo,

$$\Gamma_{t\theta}^{\phi} = \frac{1}{2} \dot{g}^{\phi\phi} (0). \quad (179)$$

Sendo $\dot{g}^{\phi\phi} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}$, temos

$$\Gamma_{t\theta}^{\phi} = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (0), \quad (180)$$

$$\Gamma_{t\theta}^{\phi} = \Gamma_{\theta t}^{\phi} = 0 \quad (181)$$

5.1.1.36 Calculando $\Gamma_{t\phi}^{\phi}$ e $\Gamma_{\phi t}^{\phi}$

$$\Gamma_{t\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi t}^{\phi}, \quad (182)$$

$$\Gamma_{t\phi}^{\phi} = \frac{1}{2} \dot{g}^{\phi\phi} (\partial_t \dot{g}_{\phi\phi} + \partial_{\phi} \dot{g}_{t\phi} - \partial_{\phi} \dot{g}_{t\phi}). \quad (183)$$

Como as componente $\dot{g}_{t\phi}$ e $\dot{g}_{t\phi}$ são nulos,

$$\Gamma_{t\phi}^{\theta} = \frac{1}{2} \dot{g}^{\theta\theta} \partial_t \dot{g}_{\phi\phi}. \quad (184)$$

Sendo $\dot{g}^{\phi\phi} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}$ e $\dot{g}_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta$, temos

$$\Gamma_{t\phi}^{\phi} = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_t (r^2 \sin^2 \theta). \quad (185)$$

Como $\partial_t (r^2 \sin^2 \theta) = 0$ já que $r^2 \sin^2 \theta$ independe de t ,

$$\Gamma_{t\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi t}^{\phi} = 0. \quad (186)$$

5.1.1.37 Calculando Γ_{rr}^{ϕ}

$$\Gamma_{rr}^{\phi} = \frac{1}{2} \dot{g}^{\phi\phi} (\partial_r \dot{g}_{\phi r} + \partial_r \dot{g}_{r\phi} - \partial_{\phi} \dot{g}_{rr}). \quad (187)$$

Como as componente $\dot{g}_{\phi r}$ e $\dot{g}_{r\phi}$ são nulos,

$$\Gamma_{rr}^{\phi} = \frac{1}{2} \dot{g}^{\phi\phi} (\partial_{\phi} \dot{g}_{rr}). \quad (188)$$

Sendo $\dot{g}^{\phi\phi} = \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right)$ e $\dot{g}_{rr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$, temos

$$\Gamma_{rr}^{\phi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right) \partial_{\phi} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}. \quad (189)$$

Como $\partial_{\phi} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} = 0$, já que $\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$ independe de ϕ , logo

$$\Gamma_{rr}^{\phi} = 0. \quad (190)$$

5.1.1.38 Calculando $\Gamma_{r\theta}^{\phi}$ e $\Gamma_{\theta r}^{\phi}$

$$\Gamma_{r\theta}^{\phi} = \Gamma_{\theta r}^{\phi}, \quad (191)$$

$$\Gamma_{r\theta}^{\phi} = \frac{1}{2} \dot{g}^{\phi\phi} (\partial_r \dot{g}_{\phi\theta} + \partial_{\theta} \dot{g}_{r\phi} - \partial_{\phi} \dot{g}_{r\theta}). \quad (192)$$

Como as componente $\dot{g}_{r\phi}$, $\dot{g}_{r\theta}$ e $\dot{g}_{\phi\theta}$ são nulos,

$$\Gamma_{r\theta}^{\phi} = \frac{1}{2} \dot{g}^{\phi\phi} (0). \quad (193)$$

Sendo $\dot{g}^{\phi\phi} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}$, temos

$$\Gamma_{r\theta}^{\phi} = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (0). \quad (194)$$

$$\Gamma_{r\theta}^\phi = \Gamma_{\theta r}^\phi = 0 \quad (195)$$

5.1.1.39 Calculando $\Gamma_{\theta\theta}^\phi$

$$\Gamma_{\theta\theta}^\phi = \frac{1}{2} \dot{g}^{\phi\phi} (\partial_\theta \dot{g}_{\phi\theta} + \partial_\theta \dot{g}_{\theta\phi} - \partial_\phi \dot{g}_{\theta\theta}). \quad (196)$$

Como as componente $\dot{g}_{\theta\theta}$ e $\dot{g}_{\theta\theta}$ se anulam,

$$\Gamma_{\theta\theta}^\phi = \frac{1}{2} \dot{g}^{\phi\phi} (\partial_\phi \dot{g}_{\theta\theta}). \quad (197)$$

Sendo $\dot{g}^{\theta\theta} = \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right)$ e $\dot{g}_{\theta\theta} = (r^2)$, temos

$$\Gamma_{\theta\theta}^\phi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \partial_\phi (r^2). \quad (198)$$

Como $\partial_\phi (r^2) = 0$, já que (r^2) independe de ϕ , logo

$$\Gamma_{\theta\theta}^\phi = 0. \quad (199)$$

5.1.1.40 Calculando $\Gamma_{\phi\phi}^\phi$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\phi = \frac{1}{2} \dot{g}^{\phi\phi} (\partial_\phi \dot{g}_{\phi\phi} + \partial_\phi \dot{g}_{\phi\phi} - \partial_\phi \dot{g}_{\phi\phi}). \quad (200)$$

Como as componente $\dot{g}_{\phi\phi}$ e $\dot{g}_{\phi\phi}$ se anulam,

$$\Gamma_{\phi\phi}^\phi = \frac{1}{2} \dot{g}^{\phi\phi} (\partial_\phi \dot{g}_{\phi\phi}). \quad (201)$$

Sendo $\dot{g}^{\theta\theta} = \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right)$ e $\dot{g}_{\phi\phi} = (r^2 \sin^2 \theta)$, temos

$$\Gamma_{\phi\phi}^\phi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \partial_\phi (r^2 \sin^2 \theta). \quad (202)$$

Como $\partial_\phi (r^2 \sin^2 \theta) = 0$, já que (r^2) independe de ϕ , logo

$$\Gamma_{\phi\phi}^\phi = 0. \quad (203)$$

5.1.2 Devivada covariante

```
import sympy as sp
from sympy import simplify, diff, symbols, Function
from IPython.display import display, Math
# Configuração inicial
sp.init_printing()
t, r, theta, phi = symbols('t r theta phi')
```

```

M = symbols('M', positive=True) # Massa do buraco negro
L, m = symbols('L m', integer=True) # Números quânticos dos harmônicos
↳ esféricos
f = symbols('f', cls=Function)(r) # função de r

# Funções para as perturbações
h0 = Function('h0')(t, r)
h1 = Function('h1')(t, r)
h2 = Function('h2')(t, r)
H0 = Function('H0')(t, r)
H1 = Function('H1')(t, r)
H2 = Function('H2')(t, r)
K = Function('K')(t, r)
Y = Function('Y_{L}{M}')(theta, phi) # Harmônico esférico Y_{LM}

# Métrica de fundo (Schwarzschild) - componentes covariantes
g = sp.diag(-f, 1/f, r**2, r**2*sp.sin(theta)**2)
g_inv = g.inv() # Métrica inversa

# Interface para escolha do tipo de perturbação
print("Escolha o tipo de perturbação:")
print("A - Axial (h2 = 0)")
print("P - Polar (h0 = h1 = 0)")
choice = (input("Digite A ou P: "))

if choice == 'A':
    # Métrica perturbada no gauge de Regge-Wheeler (h2=0) - componentes
    ↳ covariantes
    h = sp.Matrix([
        [0, 0, -h0/sp.sin(theta)*diff(Y, theta), h0*sp.sin(theta)*diff(Y,
        ↳ phi)],
        [0, 0, -h1/sp.sin(theta)*diff(Y, theta), h1*sp.sin(theta)*diff(Y,
        ↳ phi)],
        [-h0/sp.sin(theta)*diff(Y, theta), -h1/sp.sin(theta)*diff(Y, theta),
        ↳ 0, 0],
        [h0*sp.sin(theta)*diff(Y, phi), h1*sp.sin(theta)*diff(Y, phi), 0, 0]
    ])
    print("\nUsando perturbação axial (h2 = 0)")

elif choice == 'P':
    # Métrica perturbada no gauge de Regge-Wheeler (h0=0 e h1=0) -
    ↳ componentes covariantes
    h = sp.Matrix([
        [H0*Y, H1*Y, 0, 0],
        [H1*Y, H2*Y, 0, 0],
        [0, 0, r**2 * K*Y, 0],
        [0, 0, 0, r**2 * sp.sin(theta)**2 * K*Y]
    ])

```

```

print("\nUsando perturbação polar (h0 = h1 = 0)")
else:
    raise ValueError("Escolha inválida. Deve ser A (axial) ou P (polar).")

# Função para calcular os símbolos de Christoffel
def calculate_christoffel(g, g_inv, coords):
    n = len(coords)
    Gamma = {}
    for mu in range(n):
        for nu in range(n):
            for sigma in range(n):
                for alpha in range(n):
                    Gamma[mu, nu, sigma] = sum(
                        g_inv[sigma, alpha]/2 * (
                            diff(g[alpha, mu], coords[nu]) +
                            diff(g[alpha, nu], coords[mu]) -
                            diff(g[mu, nu], coords[alpha])
                        ) for alpha in range(n))
    return Gamma

# Coordenadas: 0 = t, 1 = r, 2 = theta, 3 = phi
coords = [t, r, theta, phi]
Gamma = calculate_christoffel(g, g_inv, coords)

# Função para calcular a derivada covariante _ h_{ }
def covariant_derivative(h, Gamma, alpha, beta, gamma):
    # Termo da derivada parcial
    partial_term = diff(h[beta, gamma], coords[alpha])

    # Termos de conexão
    connection_term1 = sum(Gamma[alpha, beta, lambd] * h[lambd, gamma] for
        ↪ lambd in range(4))
    connection_term2 = sum(Gamma[alpha, gamma, lambd] * h[beta, lambd] for
        ↪ lambd in range(4))

    # Derivada covariante
    nabla = partial_term - connection_term1 - connection_term2
    result = simplify(nabla)

# Convertendo para LaTeX e substituindo expressões para melhor legibilidade
latex_str = sp.latex(result)
latex_str = latex_str.replace(r'\frac{\partial}{\partial t}',
    ↪ r'\partial_t')
latex_str = latex_str.replace(r'\frac{\partial}{\partial r}',
    ↪ r'\partial_r')
latex_str = latex_str.replace(r'\frac{\partial}{\partial \theta}',
    ↪ r'\partial_\theta')
latex_str = latex_str.replace(r'\frac{\partial}{\partial \phi}',
    ↪ r'\partial_\phi')

```

```

latex_str = latex_str.replace(r'\left(t,r \right)', '')
latex_str = latex_str.replace(r'\left(\theta,\phi \right)', '')

return f"\nabla_{{{alpha}}}\ h_{{{beta}}}{gamma}} = {latex_str}"

1311# Entrada interativa para os índices , ,
print("Digite os índices , , (0=t, 1=r, 2=, 3=):")
alpha = int(input(" (0-3): "))
beta = int(input(" (0-3): "))
gamma = int(input(" (0-3): "))

# Cálculo e exibição do resultado
nabla_h = covariant_derivative(h, Gamma, alpha, beta, gamma)
print(f"\n_{alpha}\ h_{beta}{gamma} =")
sp.pretty_print(nabla_h)

# Exibição formatada
latex_output = covariant_derivative(h, Gamma, alpha, beta, gamma)
display(Math(latex_output))

```

5.1.3 Variações de $R_{\mu\nu}$

```

import sympy as sp
from sympy import simplify, diff, symbols, Function, Eq
from sympy.physics.relativity import Christoffel_symbols
sp.init_printing()
t, r, theta, phi = symbols('t r theta phi')
M = symbols('M', positive=True) # Massa do buraco negro
L, m = symbols('L m', integer=True) # Números quânticos dos harmônicos
↪ esféricos

h0 = Function('h0')(t, r)
h1 = Function('h1')(t, r)
Y = Function('Y')(theta, phi) # Harmônico esférico  $Y_{LM}$ 

B = 1 - 2*M/r
g = sp.diag(-B, 1/B, r**2, r**2*sp.sin(theta)**2)
g_inv = g.inv()

h = sp.Matrix([
    [0, 0, -h0/sp.sin(theta)*diff(Y, phi), h0*sp.sin(theta)*diff(Y,
↪ theta)],
    [0, 0, -h1/sp.sin(theta)*diff(Y, phi), h1*sp.sin(theta)*diff(Y,
↪ theta)],
    [-h0/sp.sin(theta)*diff(Y, phi), -h1/sp.sin(theta)*diff(Y, phi), 0, 0],
    [h0*sp.sin(theta)*diff(Y, theta), h1*sp.sin(theta)*diff(Y, theta), 0,
↪ 0]
])

```

```

def delta_Christoffel(g_inv, h, coords):
    Gamma = {}
    for nu in coords:
        for mu in coords:
            for kappa in coords:
                term1 = sum(g_inv[kappa,alpha] *
                    ↪ (diff(h[coords.index(alpha)],coords.index(nu)], mu)
                    ↪ - sum(sp.Christoffel(coords[i], mu, alpha,
                    ↪ g)*h[coords.index(coords[i]),coords.index(nu)]
                    ↪ ↪ for i in range(len(coords))) for alpha in
                    ↪ coords)

                term2 = sum(g_inv[kappa,alpha] *
                    ↪ (diff(h[coords.index(alpha)],coords.index(mu)], nu)
                    ↪ - sum(sp.Christoffel(coords[i], nu, alpha,
                    ↪ g)*h[coords.index(coords[i]),coords.index(mu)]
                    ↪ ↪ for i in range(len(coords))) for alpha in
                    ↪ coords)

                term3 = sum(g_inv[kappa,alpha] *
                    ↪ (diff(h[coords.index(mu)],coords.index(nu)], alpha)
                    ↪ - sum(sp.Christoffel(coords[i], alpha, mu,
                    ↪ g)*h[coords.index(coords[i]),coords.index(nu)]
                    ↪ ↪ for i in range(len(coords)))
                    ↪ - sum(sp.Christoffel(coords[i], alpha, nu,
                    ↪ g)*h[coords.index(coords[i]),coords.index(mu)]
                    ↪ ↪ for i in range(len(coords))) for alpha in
                    ↪ coords)

                Gamma[nu, mu, kappa] = (term1 + term2 - term3)/2
    return Gamma

coords = [t, r, theta, phi]
Gamma = delta_Christoffel(g_inv, h, coords)
def delta_Ricci(g, g_inv, h, Gamma, coords):
    delta_Gamma = delta_Christoffel(g_inv, h, Gamma, coords)
    delta_R = {}

    for mu in coords:
        for nu in coords:
            term1 = sum(diff(delta_Gamma[alpha, mu, nu], coords[alpha]) for
                ↪ alpha in range(4))
            term2 = sum(diff(delta_Gamma[alpha, mu, alpha], nu) for alpha
                ↪ in range(4))
            term3 = sum(sum(
                ↪ Gamma[alpha, beta, beta] * delta_Gamma[alpha, mu, nu]

```

```

        for beta in range(4)) for alpha in range(4))
    term4 = sum(sum(
        Gamma[beta, mu, alpha] * delta_Gamma[alpha, beta, nu]
        for beta in range(4)) for alpha in range(4))

    delta_R[mu, nu] = simplify(term1 - term2 + term3 - term4)
    return delta_R

coords = [t, r, theta, phi]
delta_R = delta_Ricci(g, g_inv, h, Gamma, coords)
print("Componentes não nulos de R para perturbações axiais:")
for comp in delta_R:
    if delta_R[comp] != 0:
        print(f"R_{comp}:")
        sp.pretty_print(delta_R[comp])
        print("\n" + "="*80 + "\n")

# Calculate the Christoffel symbols for the background metric g
Gamma_background = sp.simplify(Christoffel_symbols(g, coords))

def delta_Christoffel(g_inv, h, coords, Gamma_background):
    Gamma = {}
    for nu in coords:
        for mu in coords:
            for kappa in coords:
                term1 = sum(g_inv[kappa, alpha] *
                    ↪ (diff(h[coords.index(alpha)], coords.index(nu)], mu)
                    - sum(Gamma_background[coords.index(coords[i]),
                    ↪ coords.index(mu), coords.index(alpha)]*h[coords.index(
                    ↪ ds.index(coords[i]), coords.index(nu)] for i in
                    ↪ range(len(coords)))) for alpha in coords)

                term2 = sum(g_inv[kappa, alpha] *
                    ↪ (diff(h[coords.index(alpha)], coords.index(mu)], nu)
                    - sum(Gamma_background[coords.index(coords[i]),
                    ↪ coords.index(nu), coords.index(alpha)]*h[coords.index(
                    ↪ ds.index(coords[i]), coords.index(mu)] for i in
                    ↪ range(len(coords)))) for alpha in coords)

                term3 = sum(g_inv[kappa, alpha] *
                    ↪ (diff(h[coords.index(mu)], coords.index(nu)], alpha)
                    - sum(Gamma_background[coords.index(coords[i]),
                    ↪ coords.index(alpha), coords.index(mu)]*h[coords.index(
                    ↪ ds.index(coords[i]), coords.index(nu)] for i in
                    ↪ range(len(coords))))

```

```

        - sum(Gamma_background[coords.index(coords[i]),
        ↪ coords.index(alpha), coords.index(nu)]*h[coord]
        ↪ ds.index(coords[i]), coords.index(mu)] for i in
        ↪ range(len(coords))) for alpha in coords)

    Gamma[nu, mu, kappa] = (term1 + term2 - term3)/2
    return Gamma

Gamma = delta_Christoffel(g_inv, h, coords, Gamma_background)

```

5.1.4 Comparação dos potenciais

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.animation import FuncAnimation, FFMpegWriter
from IPython.display import Video
from scipy.special import lambertw

# ----- Física -----

def $tortoise$_inverse_r_of_x_over_2M(X):
    """
    Inversa exata do $tortoise$ em termos de  $X = x/(2M)$ :
     $r = 2M * [ 1 + W( \exp(X - 1) ) ]$ 
    Aqui retornamos  $r/(2M) = 1 + W(e^{X-1})$ ; para  $r$  físico, multiplique por
    ↪  $2M$ .
    """
    # Parte real do ramo principal ( $r > 2M$ )
    eps = np.real(lambertw(np.exp(X - 1.0)))
    return 1.0 + eps # isto é  $r/(2M)$ 

def lambda_const(L):
    """ constante:  $= 1/2 (L-1)(L+2)$  """
    return 0.5*(L-1)*(L+2)

def V_RW(r, L, M=1.0):
    """Potencial de Regge-Wheeler (unidades geométricas)."""
    f = 1.0 - 2.0*M/r
    return f*(L*(L+1.0)/r**2 - 6.0*M/r**3)

def V_Zerilli(r, L, M=1.0):
    """Potencial de Zerilli com constante (forma padrão)."""
    lam = lambda_const(L)
    f = 1.0 - 2.0*M/r
    num = 2*lam**2*(lam+1.0)*r**3 + 6*lam**2*M*r**2 + 18*lam*M**2*r +
    ↪ 18*M**3
    den = r**3*(lam*r + 3.0*M)**2
    return f*(num/den)

```

```

# ----- Amostragem com escalas livres
↳ -----

def sample_potentials_by_X(L_vals=(2,3), M=0.5,
                           Xmin=-10.0, Xmax=20.0, npts=8000,
                           ax_scale=1, ay_scale=1):
    """
    Amostra UNIFORMEMENTE em  $X_{\text{escolhido}} = x/(ax\_scale * M)$  (se  $ax\_scale$ 
    ↳ numérico)
    ou em  $x$  (se  $ax\_scale=None$ ). Internamente:
        - Sempre gera uma grade uniforme em  $X_{\text{base}} = x/(2M)$  para usar a
        ↳ inversa  $r(X_{\text{base}})$ .
        - Depois converte  $X_{\text{base}} \rightarrow X_{\text{escolhido}}$  para o que você quiser
        ↳ exibir.
    O eixo Y é  $V * (ay\_scale * M)^2$  se  $ay\_scale$  numérico; senão é  $V$ .
    Retorna dicionário com chaves: 'X', 'VRW', 'VZ', 'xlabel', 'ylabel'.
    """
    # 1) grade base em  $X_{\text{base}} = x/(2M)$  para usar  $r(x)$  invertido
    ↳ analiticamente
    X_base = np.linspace(Xmin, Xmax, npts) # isto é  $x/(2M)$ 

    # 2)  $r(X)$ :  $r = 2M * (1 + W(\exp(X_{\text{base}} - 1)))$ 
    r_over_2M = $tortoise$inverse_r_of_x_over_2M(X_base) #  $r/(2M)$ 
    r = 2.0 * M * r_over_2M

    # 3) Potenciais (em unidades geométricas)
    curves = {}
    for L in L_vals:
        vrw = V_RW(r, L, M)
        vz = V_Zerilli(r, L, M)

        # 4) Escala vertical
        if isinstance(ay_scale, (int, float)):
            Y_rw = vrw * (ay_scale * M)**2
            Y_z = vz * (ay_scale * M)**2
            ylabel = rf'$V\, ({ay\_scale}M)^{{2}}$' if ay_scale != 1 else
            ↳ r'$V\, M^{{2}}$'
        else:
            Y_rw, Y_z = vrw, vz
            ylabel = r'$V$'

        # 5) Escala horizontal desejada
        # Temos  $X_{\text{base}} = x/(2M)$ . Queremos mostrar  $X_{\text{out}}$ :
        # - se  $ax\_scale$  numérico:  $X_{\text{out}} = x/(ax\_scale * M) = X_{\text{base}} *
        ↳ (2/ax\_scale)$ 
        # - se  $ax\_scale=None$ :  $X_{\text{out}} = x = (2M) * X_{\text{base}}$ 
        if isinstance(ax_scale, (int, float)):

```

```

        X_out = X_base * (2.0/ax_scale)
        if ax_scale == 1:
            xlabel = r'$x/M$'
        elif ax_scale == 2:
            xlabel = r'$x/2M$'
        else:
            xlabel = rf'$x/{ax_scale}M$'
    else:
        X_out = (2.0*M) * X_base
        xlabel = r'$x$'

    curves[L] = {'X': X_out, 'VRW': Y_rw, 'VZ': Y_z,
                'xlabel': xlabel, 'ylabel': ylabel}

    return curves

# ----- Gráfico estático -----

def plot_static(M=0.5,
                Xmin=-10.0, Xmax=20.0, npts=8000,
                ax_scale=1, ay_scale=1,
                xticks=(-10, 0, 10, 20),
                y_max=1.5, yticks=(0.0, 0.5, 1.0, 1.5),
                cross_axes_at_min=True):
    curves = sample_potentials_by_X(M=M, Xmin=Xmin, Xmax=Xmax, npts=npts,
                                    ax_scale=ax_scale, ay_scale=ay_scale)
    c2, c3 = curves[2], curves[3]

    plt.figure(figsize=(9,6))
    plt.plot(c2['X'], c2['VRW'], 'b--',      label='RW, L=2')
    plt.plot(c2['X'], c2['VZ'],  color='orange', label='Zerilli, L=2')
    plt.plot(c3['X'], c3['VRW'], 'g--',      label='RW, L=3')
    plt.plot(c3['X'], c3['VZ'],  'r',        label='Zerilli, L=3')

    plt.xlim(Xmin, Xmax)
    if y_max is not None:
        plt.ylim(0, y_max)
    else:
        plt.ylim(bottom=0)

    if xticks is not None: plt.xticks(xticks)
    if yticks is not None: plt.yticks(yticks)

    plt.xlabel(c2['xlabel'])
    plt.ylabel(c2['ylabel'])
    plt.title('Regge-Wheeler & Zerilli (Schwarzschild)')
    plt.grid(True, alpha=0.25)
    plt.legend()

```

```

if cross_axes_at_min:
    ax = plt.gca()
    ax.spines['left'].set_position(('data', Xmin)) # eixo y cruza em
    ↪ x=Xmin
    ax.spines['bottom'].set_position(('data', 0)) # eixo x cruza em
    ↪ y=0

plt.show()

# ----- Animação MP4 -----

def make_animation_mp4(filename='potenciais_rw_zerilli.mp4',
                        M=0.5,
                        Xmin=-10.0, Xmax=20.0, npts=8000,
                        ax_scale=1, ay_scale=1,
                        xticks=(-10, 0, 10, 20),
                        y_max=1.5, yticks=(0.0, 0.5, 1.0, 1.5),
                        cross_axes_at_min=True,
                        seconds=15, fps=20,
                        pause_frames=15, # quantos frames "parados" no
                        ↪ ponto-âncora
                        anchor_at_y0=True # força começar exatamente em
                        ↪ (Xmin, 0)
                        ):
    curves = sample_potentials_by_X(M=M, Xmin=Xmin, Xmax=Xmax, npts=npts,
                                     ax_scale=ax_scale, ay_scale=ay_scale)

    c2, c3 = curves[2], curves[3]
    X2, RW2, ZE2 = c2['X'], c2['VRW'], c2['VZ']
    X3, RW3, ZE3 = c3['X'], c3['VRW'], c3['VZ']

    # Recorte estrito à janela (segurança)
    def cut(X, *Ys):
        m = (X >= Xmin) & (X <= Xmax)
        out = [X[m]]
        for Y in Ys: out.append(Y[m])
        return out

    X2, RW2, ZE2 = cut(X2, RW2, ZE2)
    X3, RW3, ZE3 = cut(X3, RW3, ZE3)

    # Opcional: âncora inicial exatamente em (Xmin, 0)
    if anchor_at_y0:
        for arrs in ((X2, RW2, ZE2), (X3, RW3, ZE3)):
            arrs[0][:] # no-op to avoid linter
            X2 = np.concatenate(([Xmin], X2))
            RW2 = np.concatenate([0.0, RW2])
            ZE2 = np.concatenate([0.0, ZE2])
            X3 = np.concatenate(([Xmin], X3))

```

```

RW3 = np.concatenate(([0.0], RW3))
ZE3 = np.concatenate(([0.0], ZE3))

# Planejamento da velocidade
n = min(len(X2), len(X3))
total_frames = max(1, int(seconds*fps))
# reservar 'pause_frames' no início (âncora parada)
reveal_frames = max(1, total_frames - pause_frames)
step = max(1, int(np.ceil(n / reveal_frames)))
frames = pause_frames + int(np.ceil(n / step))

# Figura
fig, ax = plt.subplots(figsize=(9,6))
(ln_rw2,) = ax.plot([], [], 'b--', label='RW, L=2')
(ln_ze2,) = ax.plot([], [], color='orange', label='Zerilli, L=2')
(ln_rw3,) = ax.plot([], [], 'g--', label='RW, L=3')
(ln_ze3,) = ax.plot([], [], 'r', label='Zerilli, L=3')

ax.set_xlim(Xmin, Xmax)
if y_max is not None:
    ax.set_ylim(0.0, y_max)
else:
    ax.set_ylim(bottom=0.0)

if xticks is not None: ax.set_xticks(list(xticks))
if yticks is not None: ax.set_yticks(list(yticks))

ax.set_xlabel(c2['xlabel'])
ax.set_ylabel(c2['ylabel'])
ax.set_title('Regge-Wheeler & Zerilli (Schwarzschild)')
ax.grid(True, alpha=0.25)
ax.legend()

if cross_axes_at_min:
    ax.spines['left'].set_position(('data', Xmin))
    ax.spines['bottom'].set_position(('data', 0))

def init():
    for ln in (ln_rw2, ln_ze2, ln_rw3, ln_ze3):
        ln.set_data([], [])
    return (ln_rw2, ln_ze2, ln_rw3, ln_ze3)

def update(frame):
    if frame < pause_frames:
        # mantém apenas o ponto-âncora visível
        k = 1
    else:
        k = min(n, 1 + (frame - pause_frames)*step)

```

```

ln_rw2.set_data(X2[:k], RW2[:k])
ln_ze2.set_data(X2[:k], ZE2[:k])
ln_rw3.set_data(X3[:k], RW3[:k])
ln_ze3.set_data(X3[:k], ZE3[:k])
return (ln_rw2, ln_ze2, ln_rw3, ln_ze3)

anim = FuncAnimation(fig, update, init_func=init,
                      frames=frames, interval=1000/fps, blit=True)
writer = FFMpegWriter(fps=fps, bitrate=2400)
anim.save(filename, writer=writer)
plt.close(fig)
return filename

# ===== EXECUTAR (exemplos) =====
# Escolha suas escalas aqui:
AX = 2    # x/(AX*M): 1 -> x/M ; 2 -> x/2M ; None -> x (sem dividir por M)
AY = 2    # V*(AY*M)^2: 1 -> V M^2 ; 2 -> V (2M)^2 ; None -> V

# 1) Gráfico estático
plot_static(M=0.5,
            Xmin=-10, Xmax=20, npts=8000,
            ax_scale=AX, ay_scale=AY,
            xticks=(-10, 0, 10, 20),
            y_max=1.5, yticks=(0.0, 0.5, 1.0, 1.5),
            cross_axes_at_min=True)

# 2) Animação (começa em y=0 com âncora; mais lenta com seconds maior)
mp4_path = make_animation_mp4('rw_zerilli_custom_scale.mp4',
                              M=0.5,
                              Xmin=-10, Xmax=20, npts=8000,
                              ax_scale=AX, ay_scale=AY,
                              xticks=(-10, 0, 10, 20),
                              y_max=1.5, yticks=(0.0, 0.5, 1.0, 1.5),
                              cross_axes_at_min=True,
                              seconds=18, fps=20,
                              pause_frames=15,
                              anchor_at_y0=True)
Video(mp4_path, embed=True)

```

5.1.5 Evolução temporal da equação mestra - Código oferecido por Prof. Dr. Peng Liu - Universidade Jinan da China

```

Clear[findzero];
findzero[ff_, range_, tor_] := Block[
  {x0, step, stepr, fr, rangel, f},
  f = If[Head[ff] === Function, ff, (ff /. x -> #) &];
  fr = Re[f /@ (range {1 + 10^-15, 1 - 10^-15})];
  x0 = Re[Mean@range];

```

```

range1 = Re[If[Re[f[x0]*fr[[1]]] > 0, {x0, range[[2]]}, {range[[1]],
  ⇨ x0}]];
While[Abs@First@Differences@range1 > tor,
  x0 = Re[Mean[range1]];
  range1 = Re[If[Re[f[x0]*fr[[1]]] > 0, {x0, range1[[2]]}, {range1[[1]],
    ⇨ x0}]];
];
{x -> x0}
];
(* findzero finds the f = 0 efficiently given a range to search. *)

Clear[genelist];
genelist[a_, b_, n_] := Array[# &, n, {a, b}];
(* genelist generates a equally sampled list between a and b *)

Clear[GetEvolution];
GetEvolution[{aa_}, {lv_, av_, bv_, rsv_, rspoint_}, {numMax_, tmax_},
  ⇨ OptionsPattern[]] := Block[
  {pre, Mv, r0, pararep, funcpiecewise, rsmax, rpoint, rstarlist,
  ⇨ findrvalue, ratio, lqrep, abrep, lqabrep, hr, ht, rlist, allpararep,
  ⇨ ii, Vv, 0, 1, collect, 2, time, len, ini, posi, VExp},

  (* The below sets the bounds *)
  rsmax = 2 tmax; (* Fix t/r* = 0.5 *)
  rstarlist = genelist[Sequence @@ (rsv + (rsmax/2) {-1., 1.}), numMax]; (*
  ⇨ generate equally spaced rstar list centered at rspoint *)

  funcpiecewise = rsvalue1 /. {a -> aa, r -> x};
  findrvalue = (x /. findzero[funcpiecewise - #, {1., 10000.}, 10^-6]) &;

  (* parameter assignment *)
  abrep = Thread[{a, b} -> {av, bv}];

  hr = SetPrecision[Differences[rstarlist[[1 ;; 2]]][[1]],
  ⇨ MachinePrecision]; (* r* *)
  ht = hr/2; (* t, here we fix t/r*=0.5 *)

  time = (rlist0 = SetPrecision[findrvalue /@ Abs[rstarlist],
  ⇨ MachinePrecision];) // AbsoluteTiming;
  rlist = rlist0; (* r list corresponding to rstar list *)

  VExp = Simplify[1/(2 r) D[-AA/BB, r] - (AA*1*(1 + 1))/r^2] /. {1 -> lv,
  ⇨ a -> aa};
  Vv = VExp /. r -> rlist; (* V(r) in r list *)

  ii = 1; (* initial step *)
  0 = ConstantArray[0, Length@rlist]; (* [t=0] *)

```

```

1 = Quiet[(ht Exp[-(rs - a)^2/(2 b^2)] /. abrep /. rs -> rstarlist]; (*
  ↳ The initial Gauss potential, i.e., the [t] *)

len = (numMax - 1)/2; (* Length of the iteration. Since each time
  ↳ evolution step will reduce 2 elements from the rlist, the length is
  ↳ only half of its original case. *)
collect = ConstantArray[0, {len}]; (* Define the collect. This step is
  ↳ way more efficient than AppendTo. *)

time = (While[ii <= len,
  {Vv} = ({#[[2 ;; -2]] & }/@ {Vv}); (* redefine (i.e., reduce the two
    ↳ endpoints) the and V at each step. *)
  2 = -ht^2 (0[[2 ;; -2]]/ht^2 - (2 1[[2 ;; -2]])/ht^2 + Vv 1[[2 ;; -2]]
    ↳ - (1[[1 ;; -3]] - 2 1[[2 ;; -2]] + 1[[3 ;; -1]])/hr^2); (* Here is
    ↳ the exp of iteration, using the list computation instead of for
    ↳ loop *)
  0 = 1[[2 ;; -2]]; (* After evolution, set the initial , i.e., _{i-1} *)
  1 = 2; (* After evolution, set the initial , i.e., _i *)
  collect[[ii]] = 1[[len + 1 - ii]]; (* collect the at the rspoint *)
  ii++;
] // AbsoluteTiming // First;

{ht, collect} (* Output, you can change it at will. *)
];
(* The main program of evolution *)

Clear[ff, g];
AA = -(1 + (1 - a)/Sqrt[r])^2; (* f(r) - ds *)
BB = 1/(1 - a/Sqrt[r] - (1 - a)/r);
g = DiagonalMatrix[{AA, BB, r^2, r^2 Sin[]^2}];
(* metric *)

rsvalue = Integrate[Sqrt[-BB/AA], r]; (* get the r*(r) relation *)
time1 = -1/(2 (2 - a)^(3/2)) Sqrt[1/(1 - a + Sqrt[r])];
time2 = rsvalue[[-1]];
rsvalue1 = time1*time2; (* the simplified r*(r) relation, need modification
  ↳ for different model *)

test1 = GetEvolution[
  {1.6} (* a *),
  {1 (* l *), 30 (* a bar *), 3 (* b *), 25 (* time evol at r* *), 30} (* a
    ↳ bar *),
  {20001 (* Discretization Number *), 2000} (* time range *)
] // AbsoluteTiming;

data1 = Thread[{(test1[[1]]) Range@Length@#, #} & @ test1[[-1]]];
ListPlot[data1, Joined -> True, PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {"t", ""},

```

```
PlotLabel -> "a=1.88, \!\(\*OverscriptBox[(a), \(-\)]\)=30,
↪ \!\(\*SuperscriptBox[(r), \(*\)]\)=25, b=3, l=1"]
```

REFERÊNCIAS

CONFÚCIO. **Anaclétos**. São Paulo: Hedra, 2012.

LAO-TZU. **Tao Te Ching**. São Paulo: Pensamento, 2002.

DADOS CURRICULARES

IDENTIFICAÇÃO	
	Vinícius Ramos Nunes de Oliveira Data nasc.
Nacionalidade	Brasileiro
Nome em citações bibliográficas	Oliveira, Vinícius Ramos Nunes, N.
Currículo Lattes	https://lattes.cnpq.br/4220125219351818
FORMAÇÃO ACADÊMICA	
2011/2018	Tecnologia em Processos Metalurgicos - Tecnólogo FATEC - Faculdade de Tecnologia - Campus Pindamonhangaba
2020/2020	Licenciatura em Matemática - Licenciado CESUAR - Centro de Ensino Superior de Ariquemes
2024/2024	Metodologia do ensino da Física - Pós Graduação FACUMINAS - Faculdade de Minas
2025/2028	Bacharelado em Física - Bacharel UNINTER - Centro Universitário Internacional
PARTICIPAÇÃO EM EVENTOS CIENTÍFICOS	