

DINÂMICA COMPLEXA E FRACTAIS

Juliana Conceição Precioso

Professora do Departamento de Matemática - Universidade Estadual Paulista
IBILCE/UNESP - Campus de São José do Rio Preto
precioso@ibilce.unesp.br

Weber Flávio Pereira

Professor do Departamento de Matemática - Universidade Estadual Paulista
IBILCE/UNESP - Campus de São José do Rio Preto
weberf@ibilce.unesp.br

Fernando Nera Lenarduzzi

Mestrando - Universidade Estadual Paulista
IBILCE/UNESP - Campus de São José do Rio Preto
ferlenarduzzi@gmail.com

Abstract

Neste artigo, trabalharemos com funções caóticas no plano complexo, dentre elas, a função quadrática $Q_c(z) = z^2 + c$, onde $z, c \in \mathbb{C}$. Desenvolveremos os resultados básicos e fundamentais da Teoria Fractal e, em seguida, apresentaremos para alguns tipos de funções complexas, os dois principais tipos de fractais dessa geometria: os Conjuntos de Julia e de Mandelbrot.

Palavras-chaves: Sistemas dinâmicos caóticos, fractais, conjuntos de Julia, conjuntos de Mandelbrot.

COMPLEX DYNAMIC AND FRACTALS

Abstract

In this article, we will work with chaotic functions in the complex plane, among them, the quadratic function $Q_c(z) = z^2 + c$, where $z, c \in \mathbb{C}$. We will develop the basic and fundamental results of the Fractal Theory and then, we will present to some types of complex functions, the two main types of fractals this geometry: the Julia's set and Mandelbrot's set.

Keywords: Chaotic dynamical systems, fractals, Julia's set, Mandelbrot's set.

1 Introdução

A Teoria do Caos ou, informalmente, a Teoria da Imprevisibilidade, pode ser representada por uma belíssima geometria, conhecida como Geometria Fractal. Essa geometria trata, dentre outras coisas, das propriedades e comportamentos de determinados objetos, chamados *fractais*, para os quais a geometria euclidiana não pode ser aplicada. Tais objetos podem ser encontrados facilmente no nosso cotidiano, por exemplo, uma folha de samambaia, um brócolis, o formato das nuvens, a superfície de uma montanha, entre outros. O surgimento dessa geometria se deu na década de 70, com os trabalhos do matemático francês Benoît Mandelbrot, que cunhou a palavra *fractal*, derivada do latim *fractus* (que significa *quebrado* ou *fraturado*), para denotar objetos cuja dimensão não era um número inteiro, e consequentemente impossíveis de serem tratados através da Geometria Euclidiana. É estranho pensarmos na existência desses objetos, pois nossa intuição está acostumada com objetos de dimensão inteira, como por exemplo, curvas (dimensão um), planos, cilindros (dimensão dois) e objetos maciços (dimensão três). Mandelbrot, nessa mesma época, ilustrou com o auxílio do computador, alguns desses objetos, porém, devido a limitação computacional da época, essa teoria caminhou a passos moderados e, somente com o avanço tecnológico, houve um progresso significativo no que diz respeito a seus conceitos e propriedades geométricas.

Dois importantes fractais, que tem um papel de destaque nessa geometria, são os *Conjuntos de Mandelbrot* e os *Conjuntos de Julia* (que na verdade deveriam chamar-se *Conjuntos de Fatou-Julia*, pois foram os dois matemáticos franceses Pierre Fatou e Gaston Julia que introduziram os processos para a obtenção dos mesmos).

O conjunto de Mandelbrot é um dos fractais mais conhecidos, batizado pelo próprio Mandelbrot. Seu surgimento se deu quando ele trabalhava com a função quadrática complexa $z = z^2 + c$ e estudava o comportamento das iteradas dessa função. Mais precisamente, Mandelbrot estava interessado em obter os valores complexos de c , para os quais a sequência das iteradas de 0 não “escapava para o infinito”. O conjunto formado por esses valores é o conjunto de Mandelbrot.

O conjunto de Julia, outro fractal muito famoso, está intimamente relacionado com o conjunto de Mandelbrot, porém seu surgimento se deu no início do século XX (o que torna-o mais velho que o conjunto de Mandelbrot), enquanto o matemático francês Gaston Julia estudava a interação de polinômios e funções racionais. A principal diferença entre o conjunto de Julia e o conjunto de Mandelbrot, é a maneira na qual a função é iterada. O conjunto de Mandelbrot é obtido iterando-se $z = z^2 + c$, com z sempre começando em 0 e variando o valor de c . Já o conjunto de Julia é obtido iterando-se $z = z^2 + c$, para um valor fixo de c e variando os valores de z . Em outras palavras, o conjunto de Mandelbrot é o espaço de parâmetros, ou o c -plano, enquanto que o conjunto de Julia é o espaço dinâmico, ou o z -plano.

Nesse trabalho, introduziremos formalmente esses dois conjuntos, descreveremos seus comportamentos e daremos exemplos dos mesmos.

2 Conceitos Preliminares

Nesta seção, introduziremos alguns conceitos, os quais servirão de alicerce para nosso trabalho.

Definição 1. A órbita de um ponto x_0 pela função F é a sequência $x_0, F(x_0), \dots, F^n(x_0), \dots$.

Definição 2. Um ponto fixo de uma função F é um ponto x_0 satisfazendo $F(x_0) = x_0$ e, mais geralmente, $F^n(x_0) = x_0$, pois

$$F^n(x_0) = F^{n-1}(F(x_0)) = F^{n-1}(x_0) = \dots = F(x_0) = x_0.$$

Consequentemente, a órbita de um ponto fixo x_0 é a sequência constante $x_0, x_0, \dots$. Pontos fixos são obtidos resolvendo-se a equação $F(x) = x$.

Definição 3. Uma órbita é chamada órbita periódica ou ciclo, de período n , se o ponto x_0 é um ponto periódico de período n , isto é, temos $F^n(x_0) = x_0$, para algum $n > 0$ e $F^k(x_0) \neq x_0$ para $k < n$.

Se x_0 for um ponto periódico de período k , então x_0 será um ponto fixo para F^k , ou seja, $F^k(x_0) = x_0$. Logo, os pontos periódicos de período k , podem ser encontrados resolvendo-se a equação $F^k(x) = x$.

Definição 4. Um ponto x_0 é chamado ponto eventualmente fixo, ou eventualmente periódico, se x_0 não é um ponto fixo ou periódico, mas algum ponto da órbita de x_0 é fixo ou periódico.

Teorema 5. (do Ponto Fixo): Suponha que $F : [a, b] \rightarrow [a, b]$ é contínua. Então existe um ponto fixo para F em $[a, b]$.

Definição 6. Suponha que x_0 é um ponto fixo de F . Então, x_0 é um ponto fixo atrator, se $|F'(x_0)| < 1$. O ponto x_0 é um ponto fixo repulsor, se $|F'(x_0)| > 1$. Finalmente, se $|F'(x_0)| = 1$, então o ponto fixo é chamado de neutro ou indiferente.

Teorema 7. (Teorema do Ponto Fixo Repulsor): Suponha que x_0 é um ponto fixo repulsor de F . Então existe um intervalo I que contém x_0 em seu interior e com as seguintes condições satisfeitas: se $x \in I$ e $x \neq x_0$, então existe um inteiro $n > 0$ tal que $F^n(x) \notin I$.

Precisaremos também de alguns tópicos de aritmética complexa. Lembre-se que $i^2 = -1$, assim definimos:

$$\begin{aligned} + &:= (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \\ \cdot &:= (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + cb)i \end{aligned}$$

Dado $z = a + bi$, o *módulo* ou *norma* de z , cuja notação é $|z|$, é dada por:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Sua representação polar é dada por

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Mais ainda, pela fórmula de Euler, quando módulo de z é igual a 1:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Assim, generalizando

$$z = re^{i\theta}.$$

Desigualdade Triangular: Se z e w são números complexos, então

- $|z + w| \leq |z| + |w|$;
- $|z - w| \geq |z| - |w|$.

Definição 8. Dado $z = a + bi$, o conjugado de z , representado por $\bar{z}$, é

$$\bar{z} = a - bi.$$

Definição 9. (Raiz Complexa e Potenciação):

$z^k = r^k(\cos(k\theta) + i\sin(k\theta))$, onde $k \in \mathbb{R}$.

3 Funções Complexas Lineares

Consideremos

$$L_\alpha(z) = \alpha z, \alpha \in \mathbb{C}$$

e analisemos o comportamento de suas órbitas.

Note que $z = 0$ é ponto fixo de L_α . Tome $\alpha = \rho e^{i\psi}$ e seja $z_0 = re^{i\theta}$. Assim,

$$\begin{aligned} z_1 &= L_\alpha(z_0) = \rho e^{i\psi} re^{i\theta} = \rho re^{i(\psi+\theta)} \\ z_2 &= L_\alpha(z_1) = \rho e^{i\psi} \rho re^{i(\psi+\theta)} = \rho^2 re^{i(2\psi+\theta)} \\ &\vdots \\ z_n &= L_\alpha(z_{n-1}) = L_\alpha^n(z_0) = \rho^n re^{i(n\psi+\theta)} \end{aligned}$$

Existem três possibilidades:

1. Se $\rho < 1$, então $\rho^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$. Uma vez que $|e^{i(n\psi+\theta)}| = 1, \forall n$, segue que $|z_n| \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow +\infty$. Isto é, se $\rho < 1$, então todas as órbitas vão a 0.
2. Se $\rho > 1$, então o contrário acontece. Como $\rho^n \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$, segue que os pontos não nulos tendem ao infinito. Em analogia com o caso real, se $\rho < 1$, então 0 será chamado de *ponto fixo atrator* e, se $\rho > 1$, então 0 será chamado de *ponto fixo repulsor*.
3. No caso neutro, isto é, $\rho = 1$, a dinâmica é mais complicada. Existem dois subcasos dependentes do ângulo polar ψ . Escrevamos

$$\psi = 2\pi r.$$

Devemos analisar dois diferentes casos; quando r é racional e quando r é irracional.

3.1- Vamos supor primeiramente que r é racional, ou seja, $r = \frac{p}{q}$, onde $p, q \in \mathbb{Z}$. Então,

$$\begin{aligned} L_\alpha^q(re^{i\theta}) &= re^{(2\pi i \frac{p}{q})q + i\theta} \\ &= re^{2\pi ip + i\theta} \\ &= re^{i\theta} \end{aligned}$$

Dessa forma, cada ponto $z_0 \neq 0$ é periódico, com período q para L_α . Note que todos os pontos na órbita de z_0 estão no círculo com centro 0 e raio $|z_0|$, como na figura 1.

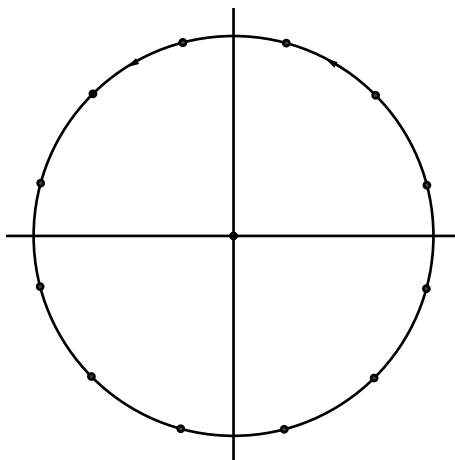


Figura 1: Dinâmica de L_α .

3.2- Quando r é irracional, a dinâmica de L_α é diferente. Não existem pontos periódicos. Para mostrar isso, vamos supor que existam pontos periódicos. Dessa forma existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $L_\alpha^k(z_0) = z_0$, ou seja, $re^{i\theta} = L_\alpha^k(re^{i\theta}) = re^{2\pi ikr + i\theta}$. Assim, obtemos $\theta + 2\pi m = i2\pi kr + \theta$, o que implica que $r = \frac{m}{k}$, que é uma contradição.

Na verdade podemos mostrar que se r for irracional e $\rho = 1$, a órbita de z_0 é um subconjunto denso do círculo de raio $|z_0|$. Este resultado é conhecido como *Teorema de Jacobi*. Para demonstrar tal resultado, devemos mostrar que a órbita de z_0 entra em qualquer subarco de raio $|z_0|$ e comprimento ε .

Para encontrar tal ponto, escolha $k > \frac{2\pi|z_0|}{\varepsilon}$. Os pontos $z_0, z_1, \dots, z_k$ pertencem a circunferência de raio $|z_0|$ e centro na origem e são todos distintos. Uma vez que o comprimento da circunferência é $2\pi|z_0|$ e $\frac{2\pi|z_0|}{k} < \varepsilon$, segue que, pelo menos dois pontos da lista de pontos z_i 's anterior, estão a uma distância menor do que ε .

Sejam z_j e z_l , $j > l$ dois desses pontos cuja distância é menor do que ε e considere a função L_α^{j-l} . Temos

$$L_\alpha^{j-l} = e^{2\pi ir(j-l)} z_0,$$

então L_α^{j-l} simplesmente rotaciona os pontos por um ângulo $2\pi r(j-l)$, pois

$$\begin{aligned} L_\alpha^{j-l}(z_l) &= L_\alpha^{j-l}(L_\alpha^l(z_0)) \\ &= L_\alpha^j(z_0) = z_j, \end{aligned}$$

ou ainda, esta função rotaciona pontos do círculo a uma distância menor do que ε .

Os pontos $L_\alpha^{j-l}(z_0), L_\alpha^{2(j-l)}(z_0), \dots, L_\alpha^{n(j-l)}(z_0), \dots$, são arrumados na circunferência de tal forma que pontos consecutivos não tenham distância maior que ε . Segue que a órbita de z_0 deve entrar em algum subarco cujo tamanho é menor que ε . Portanto, concluímos que a órbita de z_0 é densa. Assim, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 10. *Suponha $L_\alpha(z) = \alpha z$ onde $\alpha = \rho e^{2\pi i r}$.*

- 1) Se $\rho < 1$, então todas as órbitas tendem ao ponto fixo atrator 0.*
- 2) Se $\rho > 1$, então todas as órbitas tendem ao infinito, com a exceção do 0, que é um ponto fixo repulsor.*
- 3) Se $\rho = 1$, então:*
 - a) Se r é racional, todas as órbitas são periódicas.*
 - b) Se r é irracional, cada órbita é densa em um círculo centrado na origem.*

4 Cálculo de Funções Complexas

Para uma função complexa $F(z)$, definimos a derivada $F'(z)$ exatamente como no caso real:

$$F'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}.$$

Definição 11. Uma função é chamada analítica numa região R , se ela é derivável em cada ponto de R ; f é analítica num ponto z_0 se f é analítica numa região contendo z_0 .

Definição 12. Seja F uma função complexa com ponto fixo em z_0 , isto é, $F(z_0) = z_0$. Então:

1. O ponto fixo é atrator se $|F'(z_0)| < 1$.
2. O ponto fixo é repulsor se $|F'(z_0)| > 1$.
3. O ponto fixo é neutro se $|F'(z_0)| = 1$.

Observação 13.

1. Existe uma diferença significativa entre o caso complexo e o caso real. Para pontos fixos neutros, temos novas possibilidades. Não somente podemos ter $F'(z_0) = \pm 1$, como também $F'(z_0) = e^{i\theta}$. Estes tipos de pontos fixos neutros tem vizinhança cuja dinâmica pode ser extremamente complicada.
2. Estudaremos a noção de atração e repulsão para pontos periódicos de período n considerando $|(F^n)'(z_0)|$ ao invés de $|F'(z_0)|$.

Teorema 14. (do Ponto Fixo Atrator) Suponha que z_0 um ponto fixo atrator para a função complexa F . Então, existe um disco D da forma $|z - z_0| < \delta$ em z_0 , no qual a seguinte condição é satisfeita: se $z \in D$, então $F^n(z) \in D$, e mais ainda, $F^n(z) \rightarrow z_0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração. Uma vez que $|F'(z_0)| < 1$, devemos encontrar $\delta > 0$ e $\mu < 1$ tais que se $|z - z_0| < \delta$, então

$$\left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} \right| = \frac{|F(z) - F(z_0)|}{|z - z_0|} < \mu < 1.$$

O disco D será o disco de raio δ centrado em z_0 . Assim, $|F(z) - z_0| = |F(z) - F(z_0)| < \mu|z - z_0|$ em D . Daí, concluímos que $F(z)$ está mais próximo de z_0 do que z . Assim, aplicando este resultado n vezes, obtemos $|F^n(z) - z_0| < \mu^n|z - z_0|$.

Logo, quando $n \rightarrow \infty$, $F^n(z) \rightarrow z_0$. □

Teorema 15. (do Ponto Fixo Repulsor) Seja z_0 um ponto fixo repulsor para a função complexa F . Então existe um disco D da forma $|z - z_0| < \delta$, com centro em z_0 em que a seguinte condição é satisfeita: se $z \in D$ e $z \neq z_0$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $F^n(z) \notin D$.

Demonstração. Análoga a do teorema anterior. □

Princípio da Aplicação de Fronteira: Suponha que R é um conjunto fechado no plano e $Q_c(z) = z^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$. Se z_0 é um ponto interior de R , então $Q_c(z_0)$ é um ponto interior de $Q_c(R)$.

Observação 16. O princípio é obedecido por qualquer função analítica.

Exemplo 17. Suponha $z_0 \neq 0$, $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ e $r_1 < r_0 < r_2$ e $\theta_1 < \theta_0 < \theta_2$. Considere a região W dada por:

$$W = \{re^{i\theta}; r_1 < r_0 < r_2 \text{ e } \theta_1 < \theta_0 < \theta_2\}.$$

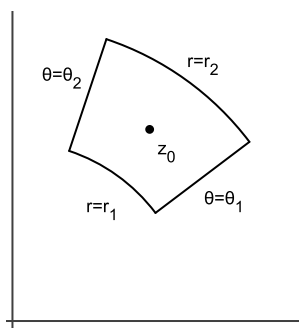


Figura 2: Região W .

Note que z_0 está contido na região W . Em especial, se $z_0 = 0$, a região é uma seção de um pequeno disco centrado em 0. A função $Q_0(z) = z^2$, leva a região W na região $Q_0(W)$ dada por:

$$Q_0(W) = \{re^{i\theta}; r_1^2 < r < r_2^2 \text{ e } 2\theta_1 < \theta < 2\theta_2\}.$$

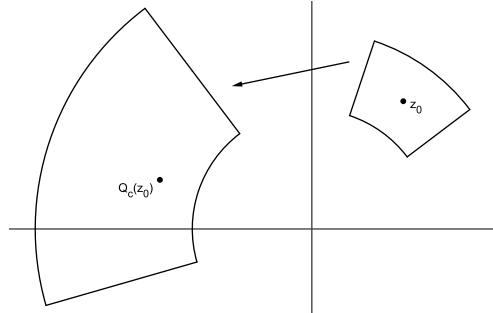


Figura 3: Q_0 rotaciona e expande a região W .

No caso $c \neq 0$, Q_c leva regiões do tipo W em regiões, as quais são translações de $Q_0(W)$ pelo número complexo c .

5 Conjunto de Julia

Um conjunto de Julia é um conjunto de pontos, gerados pela iteração de uma função complexa do tipo $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, onde $\mathbb{C}$ representa o conjunto dos números complexos. Na verdade, o correto seria conjuntos de Fatou-Julia, pois foram os dois matemáticos franceses Pierre Fatou e Gaston Julia que introduziram os métodos iterativos no estudo de sistemas dinâmicos para a implementação da geometria fractal.

Veremos que o conjunto de Julia é o lugar onde todo comportamento caótico de uma função complexa ocorre. Neste ponto, recomendamos aos leitores não familiarizados com os conceitos de sistemas caóticos, uma leitura preliminar de [PRECIOSO et al. - 2009]. A seguir, consideraremos $Q_c(z) = z^2 + c$, onde z e c são números complexos.

6 A Dinâmica da Função Quadrática

Sejam $Q_0(z) = z^2$ e $z_0 = re^{i\theta}$. A órbita de z_0 é dada por:

$$\begin{aligned} z_0 &= re^{i\theta} \\ z_1 &= r^2 e^{i2\theta} \\ z_2 &= r^4 e^{i4\theta} \\ &\vdots \\ z_n &= r^{2^n} e^{i2^n \theta} \end{aligned}$$

Temos 3 casos:

1. Se $r < 1$, então $r^{2^n} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Isto é, $|Q_0^n(z_0)| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Observe que $Q_0(0) = 0$, ou seja, 0 é ponto fixo de Q_0 e $Q'_0(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{Q_0(z) - Q_0(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{z} = 0$. Logo $z = 0$ é ponto fixo atrator.
2. Se $r > 1$, então $|Q_0^n(z_0)| \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$.
3. Se $r = 1$, então quando $|z_0| = 1$, $|Q_0(z_0)| = 1$. Daí, Q_0 mantém todas as imagens de pontos do círculo unitário no círculo unitário.

No círculo unitário, a aplicação quadrática equivale a aplicação de duplicação. Dado $z_0 = e^{i\theta}$ no círculo unitário, temos $Q_0(z_0) = e^{i2\theta}$, então Q_0 simplesmente dobra o argumento θ . Como no caso real, isto significa que Q_0 é caótica no círculo unitário (ver [PRECIOSO et al. - 2009]). Vamos mostrar que os pontos cuja norma é 1 são caóticos.

Para mostrar que os pontos periódicos são densos, devemos produzir um ponto periódico em qualquer arco da forma $\theta_1 < \theta < \theta_2$, isto é, precisamos encontrar n e θ , tais que

$$Q_0^n(e^{i\theta}) = e^{i\theta}, \quad \theta_1 < \theta < \theta_2.$$

Mas $Q_0^n(e^{i\theta}) = e^{i2^n\theta}$, o que implica que $e^{i2^n\theta} = e^{i\theta}$, ou seja, $2^n\theta = \theta + 2k\pi$, para algum k, n . Assim,

$$\theta = \frac{2k\pi}{2^n - 1}, \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Se fixarmos n e tomarmos k , tal que $0 \leq k < 2^n - 1$, então os números complexos com argumentos $\frac{2k\pi}{2^n - 1}$ estão distribuídos uniformemente ao longo do círculo unitário com comprimento de arco $\frac{2\pi}{2^n - 1}$ entre pontos consecutivos, isto segue do fato que estes pontos são as $(2^n - 1)$'s raízes da unidade.

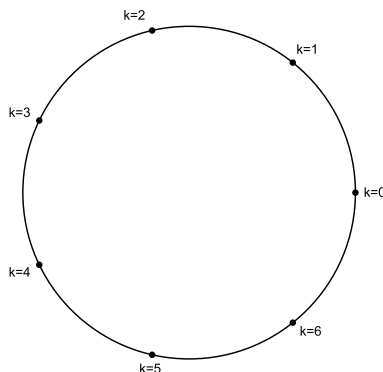


Figura 4: Pontos no círculo unitário com argumentos $\theta = \frac{2k\pi}{2^3 - 1}$.

Agora, a escolha de n , tal que

$$\frac{2\pi}{2^n - 1} < \theta_2 - \theta_1$$

garante a existência de pelo menos um ponto com argumento $\frac{2k\pi}{2^n - 1}$ entre θ_1 e θ_2 . Como n foi obtido resolvendo a equação $Q_0^n(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$, segue que z_0 é um ponto periódico de período n .

Mostremos agora a transitividade. Qualquer arco com $\theta_1 < \theta < \theta_2$, no círculo unitário tem comprimento aumentado pela Q_0^n por um fator de 2^n . Isto significa que podemos escolher n suficientemente grande, para que a imagem do arco com $\theta_1 < \theta < \theta_2$, sob Q_0^n , cubra todo o círculo.

Isto também mostra a dependência sensitiva, uma vez que podemos encontrar pontos próximos que são eventualmente levados em pontos diametralmente opostos no círculo. Esta análise pode ser resumida no seguinte resultado:

Teorema 18. *A aplicação quadrática $Q_0(z) = z^2$ é caótica no círculo unitário. Se $|z| < 1$, então $|Q_0^n(z)| \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$ e se $|z| > 1$, então $|Q_0^n(z)| \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$.*

A aplicação quadrática é extremamente sensitiva às condições iniciais no seguinte sentido. Seja z_0 um ponto no círculo unitário, dada qualquer bola aberta com centro em z_0 sempre conseguimos encontrar

$$W = \{re^{i\theta}; r_1 < r < r_2 \text{ e } \theta_1 < \theta < \theta_2\},$$

com $r_1 < 1 < r_2$, contido na bola.

A imagem de W é dada por

$$Q_0(W) = \{re^{i\theta}; r_1^2 < r < r_2^2 \text{ e } 2\theta_1 < \theta < 2\theta_2\}.$$

Uma vez que $r_1 < 1 < r_2$, segue que $r_1^2 < r_1 < r < r_2 < r_2^2$. Assim, a região abrangida por $Q_0(W)$ é maior que a de W . Continuando este processo veremos que $Q_0^n(W)$ cresce conforme n cresce.

Em algum momento o ângulo polar θ de $Q_0^n(W)$ excede 2π . Logo, para n suficientemente grande teremos

$$r_1^{2^n} < r < r_2^{2^n}.$$

Mais ainda, aplicações de Q_0 mostram que o raio interno de $Q_0^n(W)$ tende a 0, enquanto o raio externo tende ao infinito. Assim, obtemos

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} Q_0^n(W) = \mathbb{C} - \{0\}.$$

Isto é, as órbitas dos pontos em W alcançam qualquer ponto de $\mathbb{C}$, exceto o 0 que é ponto fixo. Esta é a dependência sensível extrema: a uma proximidade arbitrária de qualquer ponto do círculo unitário, existe um ponto, cuja órbita, inclui qualquer outro ponto do plano, exceto a origem.

Definição 19. A órbita de z sob Q_c é limitada, se existe k , tal que $|Q_c^n(z)| < k$, para todo n . Caso contrário, a órbita não é limitada.

Exemplo 20. No caso Q_0 , somente os pontos interiores e no círculo unitário, tem órbitas limitadas.

Definição 21. A órbita de z sob Q_c é supersensível, se qualquer bola aberta B centrada em z tem a seguinte propriedade: $\bigcup_{n=0}^{\infty} Q_c^n(B)$ é todo $\mathbb{C}$, com a exceção de no máximo um ponto.

Exemplo 22. No caso Q_0 , os pontos do círculo unitário tem órbitas supersensíveis.

Definição 23. O conjunto de Julia preenchido de Q_c é o conjunto de pontos cujas órbitas são limitadas. O Conjunto de Julia de Q_c é a fronteira do conjunto de Julia preenchido.

Notação: O conjunto de Julia preenchido é denotado por K_c e o conjunto de Julia por J_c .

Exemplo 24. No caso Q_0 , obtemos $K_0 = \{z; |z| \leq 1\}$ e $J_0 = \{z; |z| = 1\}$. Note que os pontos em J_0 são aqueles nos quais as órbitas são supersensíveis e que Q_0 é caótica em J_0 .

7 A Função Quadrática Caótica

Teorema 25. A função quadrática $Q_{-2}(z) = z^2 - 2$ em $\mathbb{C} - [-2, 2]$ é conjugada da função quadrática $Q_0(z) = z^2$ em $\{z; |z| > 1\}$. Consequentemente, se z não pertence ao intervalo fechado $[-2, 2]$, então a órbita de z sob Q_{-2} tende ao infinito.

Demonstração. Considere a função $H(z) = z + \frac{1}{z}$ definida na região $R = \{z; |z| > 1\}$. H é injetora em R , pois se $H(z) = H(w)$ segue que

$$z + \frac{1}{z} = w + \frac{1}{w}$$

então

$$z = w, \text{ ou } zw = 1.$$

Agora observe que, se $|z| > 1$ e $zw = 1$, então temos que $|w| = \frac{1}{|z|} < 1$, ou seja, $w \notin R$. Portanto, H é injetora em R .

Também, H leva R em $\mathbb{C} - [-2, 2]$. Para ver isso, escolhemos $w \in \mathbb{C} - [-2, 2]$ e resolvemos $H(z) = w$ para obter

$$z_{\pm} = \frac{w \pm \sqrt{w^2 - 4}}{2}.$$

Como $z_+ z_- = 1$, segue que z_+ ou z_- está em R , ou ambos estão na circunferência unitária. Neste último caso, podemos perceber que $w = H(z_+) = H(z_-) \in [-2, 2]$.

Logo, H é bijetora em $\mathbb{C} - [-2, 2]$. Finalmente,

$$\begin{aligned} H(Q_0(z)) &= z^2 + \frac{1}{z^2} \\ &= z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} - 2 \\ &= \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 \\ &= Q_{-2}(H(z)), \quad \forall z \end{aligned}$$

Portanto Q_{-2} em $\mathbb{C} - [-2, 2]$ é conjugação de Q_0 em R . Uma vez que todas as órbitas de Q_0 tendem ao infinito em R , segue que todas as órbitas de Q_{-2} tendem ao infinito em $\mathbb{C} - [-2, 2]$. Isto completa a prova. $\square$

Corolário 26. $J_{-2} = K_{-2} = [-2, 2]$.

Demonstração. O Conjunto de Julia preenchido é o intervalo $[-2, 2]$ na reta real. Sua fronteira no plano de Argand-Gauss é ele próprio, logo $J_{-2} = K_{-2}$. $\square$

Usando a conjugação H , também podemos ver que a órbita de todo ponto em J_{-2} é supersensitiva. Mais ainda, se considerarmos a imagem inversa de qualquer bola aberta sobre um ponto em J_{-2} sob H , sabemos que a função Q_0 leva este conjunto em todo o plano. Então, via conjugação, o mesmo acontece com Q_{-2} .

8 O Conjunto de Cantor

Nesta seção, consideraremos a função $Q_c(z) = z^2 + c$, quando $|c| > 2$. Lembremos que, para a função quadrática real $Q_c(x) = x^2 + c$, se $c < -2$, então existe um conjunto de Cantor invariante, no qual Q_c é caótico (ver [PRECIOSO et al. - 2009]). Por outro lado, quando $c > 2$, todas as órbitas de Q_c na reta, são muito fáceis de entender, pois tendem ao infinito. Veremos que há algo semelhante no plano complexo.

Teorema 27. *Suponha $|c| > 2$. Então $J_c = K_c$ é um conjunto de Cantor. Mais ainda, a aplicação Q_c , quando restrita a J_c , é conjugada da aplicação de mudança em dois símbolos.*

A demonstração deste teorema será omitida, uma vez que envolve tópicos avançados de análise complexa. No entanto, mostraremos como funciona a construção do conjunto de Cantor no plano complexo.

Nossa primeira observação é que o Conjunto de Julia preenchido de Q_c , quando $|c| > 2$, está inteiramente contido no disco $|z| < |c|$.

Teorema 28. (O Critério de Escape) *Suponha $|z| \geq |c| > 2$. Então, temos $|Q_c^n(z)| \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Pela desigualdade triangular, temos:

$$\begin{aligned}|Q_c(z)| &\geq |z|^2 - |c| \\ &\geq |z|^2 - |z| \\ &= |z|(|z| - 1).\end{aligned}$$

Como $|z| > 2$, existe $\lambda > 0$, tal que $|z| - 1 > 1 + \lambda$. Consequentemente,

$$|Q_c(z)| > (1 + \lambda)|z|.$$

Em particular, $|Q_c(z)| > |z|$ e, portanto, aplicando repetidamente o argumento acima, obtemos

$$|Q_c^n(z)| > (1 + \lambda)^n |z|.$$

Assim, as órbitas de z tendem ao infinito e isto completa a demonstração. $\square$

Corolário 29. *Suponha $|c| > 2$. Então a órbita de 0 escapa para o infinito sob Q_c .*

Demonstração. Note que, se $|c| > 2$, então $|Q_c(0)| = |c| > 2$. Logo, a órbita de 0, o ponto crítico, necessariamente escapa para o infinito. $\square$

Podemos então, refinar o critério de escape.

Corolário 30. *Suponha $|z| > \max\{|c|, 2\}$. Então, $|Q_c^n(z)| > (1 + \lambda)^n |z|$ e $|Q_c^n(z)| \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$.*

Note que se $|Q_c^k(z)| > \max\{|c|, 2\}$, para algum $k \geq 0$, então podemos aplicar o corolário anterior a Q_c^k para obter o seguinte resultado.

Corolário 31. *Suponha que para algum $k \geq 0$ temos $|Q_c^k(z)| > \max\{|c|, 2\}$. Então $|Q_c^{k+1}| > (1 + \lambda)|Q_c^k(z)|$ e $|Q_c^n(z)| \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$.*

Este corolário nos dá um algoritmo para computar o conjunto de Julia preenchido de Q_c para qualquer c . Dado um ponto z satisfazendo $|z| \leq |c|$, computamos a órbita de z . Se, para algum n , $Q_c^n(z)$ sai do círculo de raio $\max\{|c|, 2\}$, garantimos que sua órbita escapa e, portanto, z não está no conjunto de Julia preenchido. Por outro lado, se $|Q_c^n(z)|$ nunca excede esta fronteira, então, por definição, z está em K_c .

Vamos voltar a nossa atenção para o caso $|c| > 2$. Seja D o disco fechado $\{z : |z| \leq |c|\}$. O conjunto de Julia preenchido de Q_c é dado por $\bigcap_{n \geq 0} Q_c^{-n}(D)$, onde $Q_c^{-n}(D)$ é a pré-imagem de D sob Q_c^n , isto é,

$$Q_c^{-n}(D) = \{z : Q_c^n(z) \in D\}.$$

Isto deve-se ao fato que, se $z \notin \bigcap_{n \geq 0} Q_c^{-n}(D)$, então $\exists k \geq 0$, tal que $Q_c^k(z) \notin D$ e, portanto, pelo Corolário 31, a órbita de z tende ao infinito. Portanto, basta entender a intersecção infinita $\bigcap_{n \geq 0} Q_c^{-n}(D)$, para entender K_c .

Para isso, tomemos C denotando o círculo de raio $|c|$, centrado na origem. Note que C é a fronteira de D . A primeira questão é: como é $Q_c^{-1}(C)$? Obtemos este conjunto, subtraindo c de todo ponto em C . Isto tem o efeito de translação do círculo de centro na origem para o círculo de centro em $-c$. Depois extraímos a raiz quadrada de todos os pontos deste novo círculo o que nos fornece uma curva “oito”, ver figura 5. Note que $Q_c^{-1}(z)$ está completamente contida no interior de D , pois já sabemos que qualquer ponto sobre ou fora de C é levado longe da origem por Q_c . Pelo princípio da aplicação de fronteira, $Q_c^{-1}(D)$ é precisamente a figura oito, junto com seus dois “lóbulos” interiores que denotaremos por I_0 e I_1 . Note que I_0 e I_1 são simétricos em relação a origem e que Q_c leva cada um deles de volta em D de maneira bijetora.

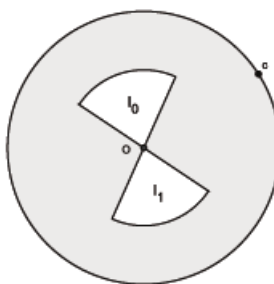


Figura 5: Construção de I_0 e I_1 .

Como Q_c é injetora em I_0 e I_1 , e $Q_c^{-1}(C)$ está contida no interior de D , segue que $Q_c^{-2}(C)$ é um par de figuras oito menores, uma contida em I_0 e a outra contida em I_1 . Novamente, utilizando o princípio da aplicação de fronteira, obtemos que $Q_c^{-2}(D)$ consiste de duas figuras oito juntamente com seus quatro lóbulos. Definimos:

$$\begin{aligned} I_{00} &= \{z \in I_0 / Q_c(z) \in I_0\} \\ I_{01} &= \{z \in I_0 / Q_c(z) \in I_1\} \\ I_{10} &= \{z \in I_1 / Q_c(z) \in I_0\} \\ I_{11} &= \{z \in I_1 / Q_c(z) \in I_1\} \end{aligned}$$

Assim, $Q_c^{-2}(D)$ é constituída por uma figura oito em I_0 juntamente com seus lóbulos I_{00} e I_{01} e por outra figura oito em I_1 com lóbulos I_{10} e I_{11} , veja figura 6.

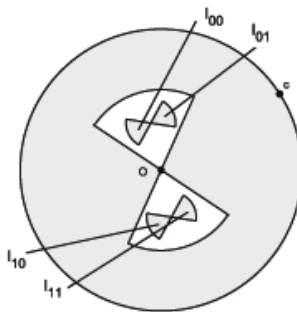


Figura 6: Construção de I_{00} , I_{01} , I_{10} e I_{11} .

Observe que $Q_c^{-n}(D)$ consiste de 2^{n-1} figuras oito com 2^n lóbulos limitados por estas curvas. Seja $s_0 s_1 \dots s_n$ uma sequência de 0's e 1's. Definimos

$$I_{s_0 s_1 \dots s_n} = \{z \in D / z \in I_{s_0}, Q_c(z) \in I_{s_1}, \dots, Q_c^n(z) \in I_{s_n}\}.$$

Utilizando-se argumentos similares àqueles aplicados na demonstração do teorema da Conjugação (ver [PRECIOSO et al. - 2009]), é possível mostrar que $I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ é fechado e está contido no interior de $I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}}$. Assim, os $I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ formam uma intersecção de conjuntos fechados,

$$\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \dots s_n},$$

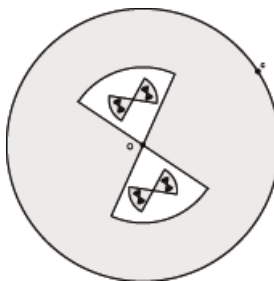
a qual é não vazia. Daí, se $z \in \bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \dots s_n}$, então $Q_c^k(z) \in D$ para todo k .

Portanto, $z \in K_c$. Uma interseção infinita das figuras oito e seus lóbulos é dada por $\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ e é chamada uma componente de K_c . Note que quaisquer duas componentes de K_c são necessariamente disjuntas.

Por outro lado, qualquer $z \in K_c$ está em alguma destas componentes, conseqüentemente, podemos associar uma sequência de 0's e 1's para tal z via

$$S(z) = s_0 s_1 s_2 \dots, \text{ desde que } z \in \bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \dots s_n}.$$

Esta sequência é conhecida como sequência espaço em dois símbolos e mostramos que existe uma correspondência natural entre ela e as componentes de K_c . De fato, pode-se mostrar que esta correspondência na verdade é contínua. Um fato mais difícil de ser demonstrado é que cada uma destas componentes é de fato um único ponto. Isto pode ser demonstrado usando técnicas mais sofisticadas de análise complexa, e será omitido. A idéia básica por trás disto é que o conjunto de Julia preenchido é a intersecção de todas as curvas oito e seus lóbulos.



Observação 32.

1. Aceitando o fato que qualquer componente de K_c é um ponto, quando $|c| > 2$, obtemos que $K_c = J_c$.
2. Q_c é também extremamente sensível às condições iniciais no seu conjunto de Julia, quando $|c| > 2$. Dado $z \in K_c$ e uma pequena bola com z em seu interior, podemos escolher k suficientemente grande tal que o lóbulo $I_{s_0 s_1 \dots s_k}$ contendo z está também contido nesta bola. Mas então, Q_c^l aplica este lóbulo em todo o disco D e iterações subsequentes expandem D . Finalmente, qualquer ponto no plano está na imagem deste lóbulo sob uma iterada de ordem suficientemente alta de Q_c . Assim Q_c é supersensitiva em J_c .
3. Note que para $|c| > 2$ a órbita de 0 tende ao infinito.

Usando o critério de escape, podemos encontrar vários conjuntos de Julia preenchidos; suas formas variam de acordo com o valor de c . Os conjuntos de Julia preenchidos apresentam a

auto-similaridade, uma característica fractal. As figuras 7 e 8 representam alguns exemplos do conjunto de Julia preenchido para Q_c para diferentes valores de c .

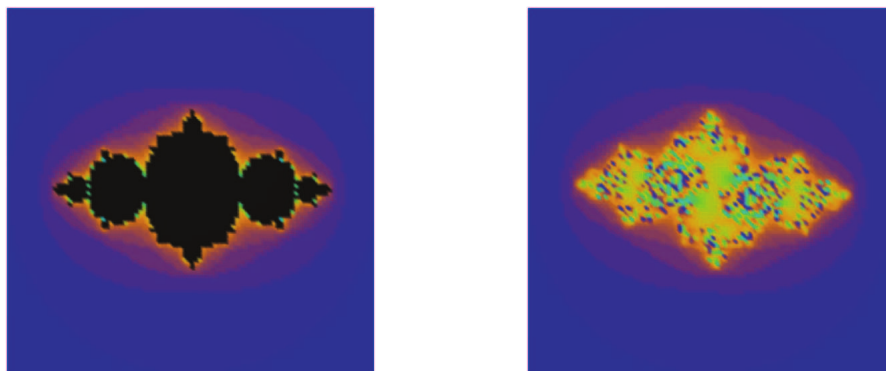


Figura 7: Conjunto de Julia preenchido para $c = -0.75$ e $c = -0.75 + 0.1i$.

Também podemos observar, que para certos valores de c , J_c parece ser apenas alguns pontos isolados e para outros, J_c parece ser uma peça única.

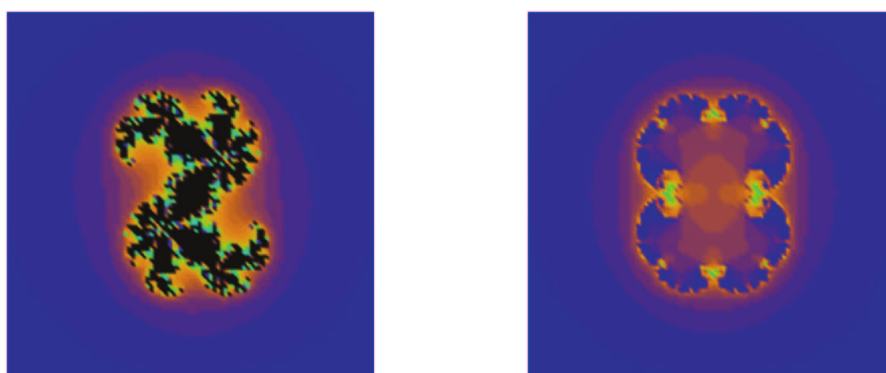


Figura 8: Conjunto de Julia preenchido para $c = 0.360284 + 0.100376i$ e $c = -0.255$.

9 A Dicotomia Fundamental

Podemos notar, que os conjuntos de Julia preenchidos, aparentemente estão em uma das seguintes classes: aqueles que são conexos e aqueles que são totalmente desconexos. Aparentemente não há um caso intermediário: ou K_c consiste de um pedaço conexo ou de infinitos pedaços. Na realidade, este é um dos resultados fundamentais da dinâmica complexa.

Teorema 33. (A Dicotomia Fundamental) *Seja $Q_c(z) = z^2 + c$. Então:*

- i) A órbita do ponto crítico 0 escapa para o infinito, neste caso K_c consiste de infinitas componentes disjuntas, ou*
- ii) A órbita do ponto crítico 0 é limitada, e neste caso K_c é conexo.*

Já mostramos que se $|c| > 2$, então a órbita de 0 escapa para o infinito e K_c consiste de infinitas componentes, K_c é o conjunto de Cantor e a dinâmica de Q_c em K_c é conjugada da aplicação de mudança. Assim, consideramos aqui o caso em que $|c| \leq 2$. Note que existe uma boa razão para separar os dois casos. Já vimos que K_{-2} é o intervalo $[-2, 2]$ o qual é conexo e a órbita de 0 sob Q_{-2} é eventualmente fixa. Portanto, $|c| = 2$ é exatamente o maior valor para o qual K_c deve ser conexo.

Lembre-se que é o critério de escape que nos dá condições suficientes para uma órbita escapar, quando $|c| \leq 2$: se $|Q_c^n(0)| > 2$ para algum n , então a órbita de 0 tende ao infinito. Para provar a dicotomia fundamental, vamos primeiramente supor que $|Q_c^n(0)| \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ para algum c com $|c| \leq 2$. Então existe uma primeira iteração k , para o qual $|Q_c^k(0)| > 2$. Seja $\rho = |Q_c^k(0)|$ e considere o círculo de raio ρ , C_ρ , centrado na origem. A aplicação quadrática Q_c aplica pontos do círculo no círculo de raio ρ^2 , centrado em c no plano.

No entanto, pelo corolário 31, do critério de escape, sabemos que as órbitas de todos os pontos em C_ρ escapam para o infinito e, mais ainda, a imagem do círculo fica no exterior do disco $|z| \leq \rho$. Seja $D_\rho = \{z : |z| \leq \rho\}$. O círculo $Q_c(C_\rho)$ envolve C_ρ , como mostrado a seguir, na figura 9, uma vez que o centro deste círculo satisfaz $|c| \leq 2 < \rho$. Pelo Princípio da Aplicação de Fronteira, o interior de D_ρ é levado no interior de $Q_c(D_\rho)$. Temos então, uma situação similar a do caso do conjunto de Cantor.

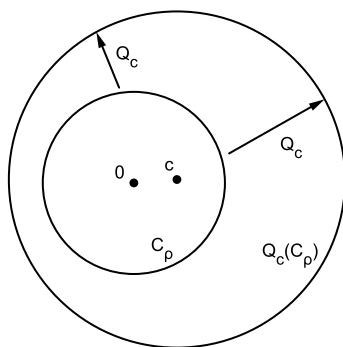


Figura 9: O caso onde a órbita de 0 escapa.

Considere agora $Q_c^{-1}(D_\rho)$. O conjunto $Q_c^{-1}(D_\rho)$ está completamente contido no interior de D_ρ , uma vez que, C_ρ é levada para fora de D_ρ . Mais ainda, 0 pertence a $Q_c^{-1}(D_\rho)$ uma vez que $Q_c(0) = c$ e $|c| < \rho$. Consequentemente, $Q_c^{-1}(D_\rho)$ é limitado por uma curva simples fechada.

Uma vez que k é o menor inteiro para o qual $Q_c^k(0) \in C_\rho$, segue que podemos repetir o argumento acima $k - 1$ vezes. Encontramos

$$Q_c^{-(k-1)}(D_\rho) \subset \dots \subset Q_c^{-1}(D_\rho) \subset D_\rho,$$

com $Q_c^{-j}(D_\rho)$ contido no interior de $Q_c^{-(j-1)}(D_\rho)$, para $j = 1, \dots, k-1$. Mais ainda, $Q_c^{-j}(D_\rho)$ é limitado por uma curva fechada simples que é levada por Q_c a fronteira de $Q_c^{-j+1}(D_\rho)$, como mostrado na figura 10.

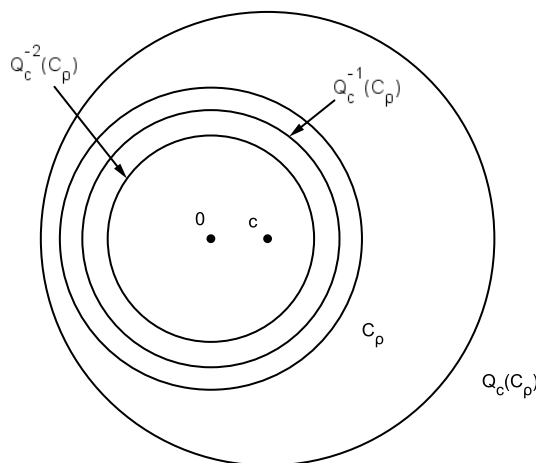


Figura 10: $Q_c^{-(k-1)}(D_\rho) \subset \dots \subset Q_c^{-1}(D_\rho) \subset D_\rho$.

Na k -ésima iteração há uma mudança de comportamento. O ponto crítico 0 agora pertence a $Q_c^{-k}(D_\rho)$. Uma vez que $Q_c^k(0) \in C_\rho$, segue que 0 está na fronteira de $Q_c^{-k}(D_\rho)$. Assim, a fronteira de $Q_c^{-k}(D_\rho)$ é uma figura oito, e cada um dos dois lóbulos no interior desta curva são levados de maneira injetora por Q_c , em todo o interior de $Q_c^{-k+1}(D_\rho)$.

Dessa forma, vemos que a pré-imagem de D_ρ está precisamente nos dois lóbulos, quando 0 está na fronteira de $Q_c^{-k}(D_\rho)$.

O argumento agora é similar ao da seção anterior. O conjunto $Q_c^{-k-1}(D_\rho)$ consiste de um par de figuras oito e seus lóbulos estão no interior do conjunto $Q_c^{-k}(D_\rho)$. Em geral, $Q_c^{-k-n}(D_\rho)$ consiste de 2^n figuras oito disjuntas e seus lóbulos, então vemos que o conjunto de Julia preenchido decompõe-se infinitamente em infinitas componentes disjuntas, quando a órbita de 0 escapa. Isto prova a parte i) da Dicotomia Fundamental.

A única outra possibilidade é $Q_c^k(0)$ nunca pertença ao exterior do círculo de raio 2. Nesse caso, para qualquer $\rho > 2$, $Q_c^{-k}(D_\rho)$ está sempre em uma região conexa limitada por uma curva simples fechada. Pela Propriedade de Conectividade, $\bigcap_{n \geq 0} Q_c^{-n}(D_\rho)$ é um conjunto conexo. Como sempre, este é o conjunto de Julia preenchido e isto completa a demonstração.

10 O Conjunto de Mandelbrot

A Dicotomia Fundamental indica que existem apenas dois tipos básicos de Conjunto de Julia preenchido para Q_c , aqueles que são conexos e aqueles que consistem de infinitas

componentes conexas. Mais ainda, a órbita do 0 determina em qual dos casos o conjunto se enquadra.

Definição 34. O Conjunto de Mandelbrot $\mathcal{M}$, consiste de todos os valores de c , para os quais o Conjunto de Julia preenchido K_c é conexo. Equivalentemente,

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : |Q_c^n(0)| \not\rightarrow \infty\}.$$

É importante perceber que $\mathcal{M}$ é um subconjunto do c -plano e não do plano dinâmico, onde moram os conjuntos de Julia.

O critério de escape também nos dá um algoritmo para computar o Conjunto de Mandelbrot. Consideremos uma rede retangular no c -plano. Como sabemos, $\mathcal{M}$ está contido no círculo de raio 2 centrado na origem, então assumiremos que nossa rede está contida no quadrado centrado na origem e com lado 4. Para cada ponto c nessa rede, computamos a correspondente órbita de 0 sob Q_c e verificamos se a órbita é limitada. Se a órbita não escapa, então nosso ponto original está em $\mathcal{M}$ e, portanto, colorimos o ponto de preto, se a órbita escapa então deixamos o ponto em branco.

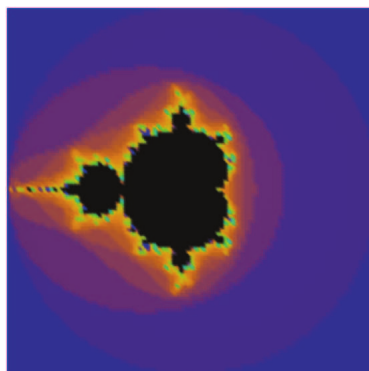


Figura 11: O conjunto de Mandelbrot.

Vamos entender o que significa a imagem deste conjunto, (ver figura 11). Suponha que Q_c tem um ponto periódico atrator de algum período. Então, toda a bacia de atração deste ponto está em K_c , e, portanto, o conjunto de Julia preenchido não é um conjunto de Cantor, assim c está em $\mathcal{M}$. O problema é a sua localização.

Para responder isto, vamos primeiramente determinar o conjunto de valores de c , para os quais Q_c tem um ponto fixo atrator ou neutro. Denotaremos este conjunto por C_1 . Seja z_c o correspondente ponto fixo por Q_c , quando $c \in C_1$. Então z_c deve satisfazer o seguinte par de equações:

$$\begin{cases} Q_c(z) = z^2 + c = z \\ |Q'_c(z)| = |2z| \leq 1. \end{cases}$$

A segunda equação diz que z_c está sob ou dentro do disco limitado pelo círculo de raio $\frac{1}{2}$. Neste círculo, $|Q'_c(z_c)| = 1$, então z_c é um ponto fixo neutro. Se escrevermos este círculo como $z = \frac{1}{2}e^{i\theta}$, então pela primeira equação obtemos os valores de c para os quais Q_c tem um ponto fixo neutro na curva dada por

$$c = \zeta(\theta) = \frac{1}{2}e^{i\theta} - \frac{1}{4}e^{2i\theta}.$$

Esta curva é o cardióide. Ele é a fronteira da maior região negra da figura 13. O interior desta região é o conjunto dos valores de c para os quais Q_c tem um ponto fixo atrator.

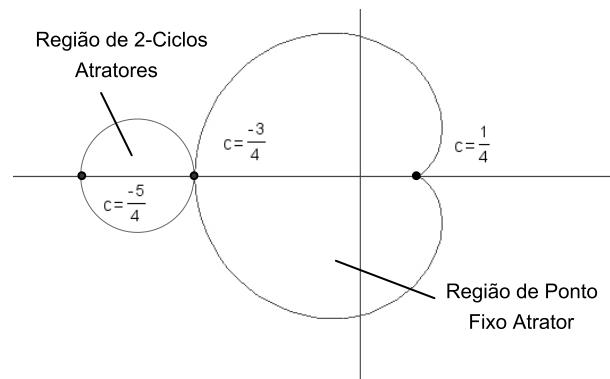


Figura 12: As regiões C_1 e C_2 .

Note que a fronteira de C_1 encontra o eixo real em dois pontos, $c = \frac{1}{4}$, o ponto da Bifurcação Sela-Nó, e $c = -\frac{3}{4}$, o ponto da Bifurcação de Duplicação de Período, quando $\theta = 0$ e π , respectivamente. Note também, que se $c = \zeta(\theta)$ está nessa curva, então $Q'_c(z_c) = e^{i\theta}$.

Proposição 35. (O Cardióide Principal) A Região C_1 é limitada pelo cardióide que é dado por

$$\zeta(\theta) = \frac{1}{2}e^{i\theta} - \frac{1}{4}e^{2i\theta}.$$

Para os valores de c que estão no interior desta região, Q_c tem um ponto fixo atrator. Para os valores de c na fronteira da região, Q_c tem um ponto fixo neutro. Mais ainda, quando θ cresce de 0 a 2π , a derivada de $Q'_{\zeta(\theta)}$ no ponto fixo neutro percorre uma vez o círculo unitário.

Agora voltemos nossa atenção para a região C_2 , na qual Q_c tem um ciclo atrator ou neutro de período 2.

Proposição 36. (O Bulbo de Período 2) A região C_2 é limitada pelo círculo dado por $|c + 1| = \frac{1}{4}$, o círculo de raio $\frac{1}{4}$ centrado em -1 . Mais ainda, quando c atravessa o círculo, a derivada $(Q_c^2)'$ no 2-ciclo percorre uma vez o círculo unitário.

Aplicando a mesma análise à todo o Conjunto de Mandelbrot conseguimos determinar as formas dos Conjuntos de Julia preenchidos. A figura abaixo sumariza toda a análise:

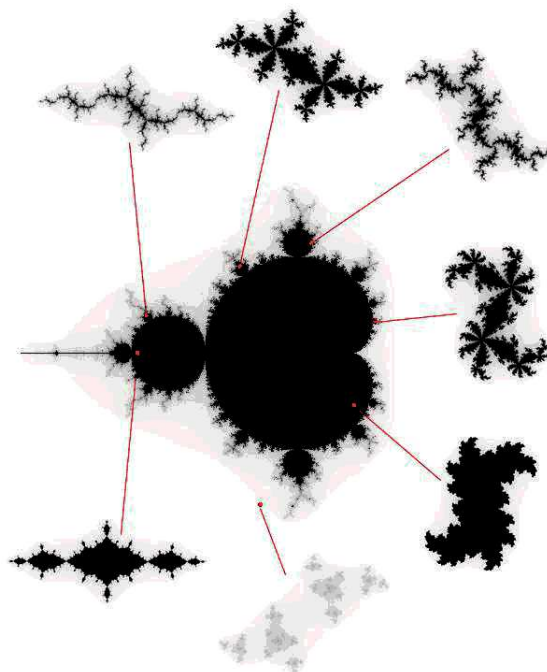


Figura 13: Conjunto de Mandelbrot e as respectivas formas dos Conjuntos de Julia.

A seguir, apresentaremos algumas noções sobre critérios de escape de algumas funções.

11 O Três-Pontas (Tricorn)

Definimos

$$A_c(z) = \bar{z}^2 + 2.$$

O ponto crítico para A_c é 0, uma vez que $c = A_c(0)$ tem somente uma pré-imagem, enquanto qualquer outro ponto $w \in \mathbb{C}$ tem duas pré-imagens.

O conjunto de Julia preenchido e o Conjunto de Julia para A_c são definidos de forma análoga ao que foi feito para Q_c e, usando argumentos similares aos usados anteriormente, mostra-se que A_c é conexo ou totalmente desconexo, dependendo da órbita do 0, ou seja, se ela é limitada ou se escapa para o infinito. Analogamente plotamos o conjunto de Mandelbrot.

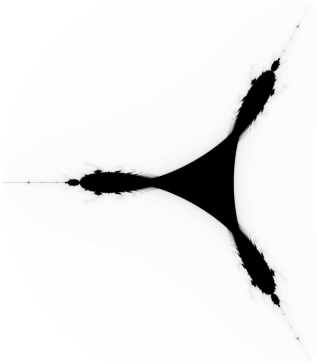


Figura 14: Conjunto de Mandelbrot da função Tricorn.

12 Cúbicas

O estudo de polinômios cúbicos é mais complexo. A razão principal é a existência de dois pontos críticos. Isto significa que temos muitos outros fenômenos que podem acontecer. Diferentemente do caso da aplicação quadrática, temos 3 possibilidades: ambas as órbitas dos pontos críticos escapam ou são limitadas ou a órbita de um ponto crítico escapa e a do outro é limitada.

Qualquer polinômio cúbico é conjugado a um polinômio cúbico especial da forma

$$C_{a,b}(z) = z^3 + az + b,$$

onde $a, b \in \mathbb{C}$.

Para plotar o conjunto de Julia preenchido da cúbica, precisamos de um critério de escape. Consideremos

$$|z| > \max(|b|, \sqrt{|a|+2}).$$

Usando a desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned} |C_{a,b}(z)| &= |z^3 + az + b| \\ &\geq |z|^3 - |az + b| \\ &\geq |z|^3 - |a||z| - |b| \\ &> |z|^3 - |a||z| - |z| \\ &= |z|(|z|^2 - (|a| + 1)) \\ &> \lambda|z|, \end{aligned}$$

para algum $\lambda > 1$. Assim, aplicando esta desigualdade n vezes, obtemos

$$|C_{a,b}^n(z)| > \lambda^n |z|.$$

Portanto, $|C_{a,b}^n(z)| \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$.

Teorema 37. (*O Critério de Escape para Cúbicas*) Seja $C_{a,b}(z) = z^3 + az + b$. Suponha

$$|z| > \max(|b|, \sqrt{|a| + 2}),$$

para algum n . Então, a órbita de z escapa para o infinito.

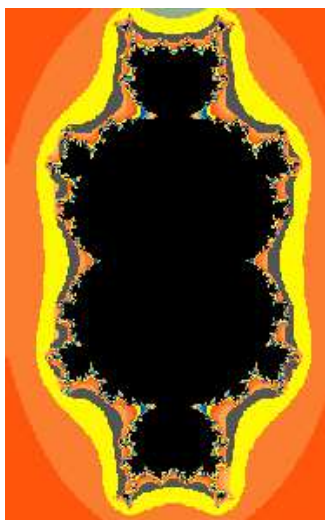


Figura 15: Conjunto de Mandelbrot para a cúbica.

13 Funções Exponenciais

Definição 38. A função exponencial complexa e^z é definida por

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \operatorname{sen}(y)),$$

onde $z = x + iy$.

Note que a exponencial é $2\pi i$ -periódica, uma vez que

$$\begin{aligned} e^{x+iy+2\pi i} &= e^x (\cos(y + 2\pi) + i \operatorname{sen}(y + 2\pi)) \\ &= e^x (\cos(y) + i \operatorname{sen}(y)) \\ &= e^{x+iy}. \end{aligned}$$

Mais ainda, a função complexa leva a reta vertical $x = c$ no círculo de raio e^c , pois

$$|e^{c+iy}| = |e^c(\cos(y) + i\operatorname{sen}(y))| = e^c.$$

Similarmente, a exponencial leva a reta horizontal $y = b$ em uma reta partindo da origem, que forma um ângulo $\theta = b$ com o eixo real, pois

$$e^{x+ib} = e^x(\cos(b) + i\operatorname{sen}(b)).$$

Existe uma diferença fundamental entre o conjunto de Julia preenchido da função exponencial e das aplicações quadráticas: não temos mais critério de escape. Por exemplo, considere o meio-plano esquerdo dado por

$$H = \{x + iy : x \leq c\}.$$

De nossas observações anteriores, qualquer ponto de H é levado pela exponencial dentro do círculo de raio e^c centrado em 0. Assim, os pontos distantes da origem no meio plano esquerdo movem-se para muito perto da origem depois de uma iteração. Contudo, há um critério de escape aproximado que pode ser usado para descrever o conjunto das órbitas que escapam. Se a parte real de z é grande, digamos $z = x + iy$, com $x > 50$, então

$$|e^z| = |e^x e^{iy}| = e^x > e^{50}.$$

que é muito grande. Porém, não é verdade que toda a órbita que atinge o meio-plano $x > 50$ finalmente escapa. Pode ser mostrado que quase sempre existe um ponto próximo de um dos que escapa cuja órbita não escapa. Não entraremos em detalhes, para não fugir dos propósitos deste trabalho.

Teorema 39. (*O Critério de Escape Aproximado para Exponenciais*) Suponha $E_\lambda(z) = \lambda e^z$. Se a parte real de $E_\lambda^n(z)$ excede 50, então dizemos que a órbita de z escapa.



Figura 16: Conjunto de Julia preenchido para $(1 + 2i)e^z$.

14 Funções Trigonômétricas

As funções trigonométricas complexas são definidas como a combinação linear das exponenciais complexas da seguinte forma:

$$S_{\lambda}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) = \frac{\lambda}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

$$C_{\lambda}(z) = \lambda \cos(z) = \frac{\lambda}{2}(e^{iz} + e^{-iz}).$$

O que nos motiva a definir tais funções é a Fórmula de Euler:

$$\begin{cases} e^{i\theta} &= \cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta) \\ e^{-i\theta} &= \cos(\theta) - i\operatorname{sen}(\theta) \end{cases}.$$

Somando as duas equações, obtemos

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}),$$

o que nos leva a definição do cosseno. A subtração das duas equações nos leva ao seno.

Como na exponencial, não há um critério “absoluto” de escape. No entanto, podemos encontrar um critério aproximado. Suponha $\operatorname{Im}(z) < -50$. Então, se $z = x + iy$,

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen}(z)| &= \frac{1}{2}|e^{iz} - e^{-iz}| \\ &= \frac{1}{2}|e^{-y}e^{ix} - e^ye^{-ix}| \\ &\geq \frac{1}{2}(|e^{-y}||e^{ix}| - |e^y||e^{-ix}|) \\ &= \frac{1}{2}(e^{-y} - e^y). \end{aligned}$$

Assim, se $\operatorname{Im}(z) < -50$, o módulo da imagem de z é bem grande, uma vez que e^{-y} é grande enquanto e^y é pequeno. Argumentos semelhantes funcionam quando $\operatorname{Im}(z) > 50$.

Como no caso da exponencial complexa, não é verdade que pontos que satisfazem $|\operatorname{Im}(z)| > 50$ tem órbitas que necessariamente vão para o infinito, mas é conhecido que pontos vizinhos tem esta propriedade (pelo menos para $\operatorname{sen}(z)$ e $\cos(z)$).

Teorema 40. *(O Critério de Escape Aproximado para Funções Trigonômétricas)*
Seja $S_{\lambda}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$. Se $|\operatorname{Im}(z)| > 50$, então dizemos que a órbita de z escapa.

Há um critério similar para $C_{\lambda}(z) = \lambda \cos(z)$.

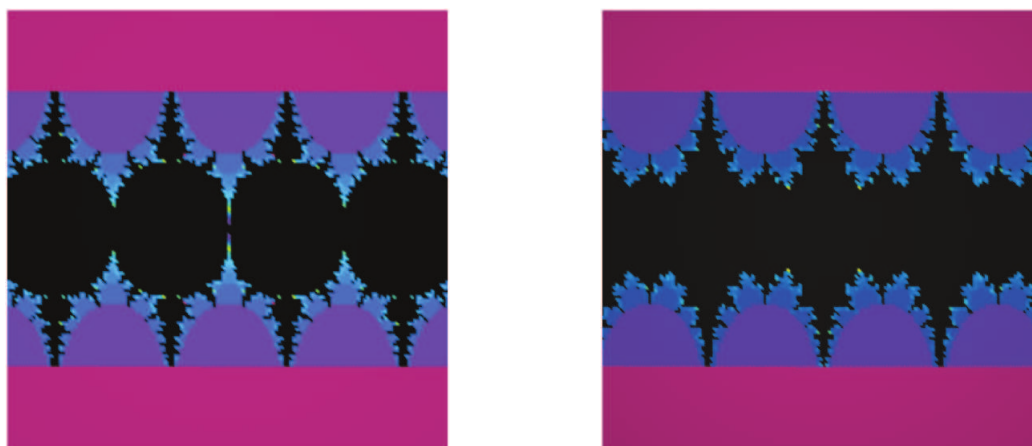


Figura 17: Conjunto de Julia preenchido do $\text{sen}(z)$ e do $\text{cos}(z)$.

Referências

- [ÁVILA-1990] ÁVILA, Geraldo. *Variáveis Complexas e Aplicações*, LTC: Livros Técnicos e Científicos Edt., 1990.
- [DEVANEY-1992] DEVANEY, Robert L. **A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment**, Addison-Wesley Publishing Company, 1992.
- [DEVANEY-1990] DEVANEY, Robert L. **Chaos, Fractals, and Dynamics: Computer Experiments in Mathematics**, Addison-Wesley Publishing Company, 1990.
- [DEVANEY-1994] DEVANEY, Robert L. **An Introduction to Chaotic Dynamical Systems**, Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [GUIDORIZZI-1997] GUIDORIZZI, Hamilton L., **Um curso de cálculo**, Vol I e II, LTC Editora, 1997.
- [LIMA-1982] LIMA, Elon L., **Um curso de Análise**, Vol I, Rio de Janeiro, IMPA, CNPq, 1982.
- [PRECIOSO et al. - 2009] PRECIOSO, Juliana C., LEONARDUZZI, Fernando N., MORITA, Ana M.M. **Caos e Fractais**, E-xacta Revista Científica do Departamento de Ciências Exatas e Tecnologia da Uni-BH, Vol II, no. 03, 2009.