

Tânia Maria Machado de Carvalho

ANÁLISE DAS PROPRIEDADES DE FUNÇÕES
QUE SATISFAZEM AS RELAÇÕES
GENERALIZADAS DE CAUCHY-RIEMANN



1910001267



unesp



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DE COMPUTAÇÃO E ESTATÍSTICA

**ANÁLISE DAS PROPRIEDADES DE FUNÇÕES
QUE SATISFAZEM AS RELAÇÕES
GENERALIZADAS DE CAUCHY-RIEMANN**

Tânia Maria Machado de Carvalho

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada

MAP-080

Rua Cristovão Colombo, 2265
15054-000 - São José do Rio Preto - SP - Brasil
Telefone: (017) 221-2444
Fax: (017) 221-2445



Análise das propriedades de funções que satisfazem as relações generalizadas de Cauchy-Riemann

Tânia M. Machado de Carvalho

Dissertação a ser apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto, São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. José Márcio Machado



São José do Rio Preto

Novembro de 2003



453:51
C331a

10104011

Carvalho, Tânia Maria Machado de.

Análise das propriedades de funções que satisfazem as relações generalizadas de Cauchy-Riemann/ Tânia Maria Machado de Carvalho – São José do Rio Preto : [s.n.], 2003
82 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: José Márcio Machado
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Física matemática. 2. Quatérnios - Análise. 3. Cauchy-Riemann – Relações Generalizadas. I. Machado, José Márcio. II. Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 501

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. José Márcio Machado, pela orientação deste trabalho, incentivo e confiança.

Ao Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto, pela orientação, incentivo e confiança.

A todos os professores do DOCE, por contribuir em minha formação na Medicina.

Ao professor Dr. Hygino Rogneres Domingues, pela contribuição em minha formação acadêmica, pelo exemplo e pelo incentivo.

A todos os funcionários da UNESP, que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

A todos os amigos de pós-graduação: Antenor, Jandson, Cassius, Andréia e Jânior, Fábio, Gilber, Milena, Sônia e "Vanessa".

Ao meu esposo e companheiro pelo apoio, carinho e paciência.

Aos meus filhos pelo carinho e compreensão.

Aos meus pais.

A todos meus amigos.

Um agradecimento muito especial à minha sogra, D. Dulce, cujo apoio, amizade e compreensão tornaram viável a realização deste trabalho.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

A Deus, por tudo.

Aos meus filhos e
esposo,
Dedico

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. José Márcio Machado, pela orientação deste trabalho, incentivo e confiança.

Ao Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto, pela atenção, incentivo e confiança.

A todos os professores do DCCE, por contribuir em minha formação acadêmica.

Ao professor Dr. Hygino Hugueros Domingues, pela contribuição em minha formação acadêmica, pelo exemplo e pelo incentivo.

A todos os funcionários da UNESP, que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

A todos os amigos de pós-graduação, em especial, Antenor, Janilson, Cassius, Andréa e Júnior, Fábio, Gleber, Milena, Sônia e "Vanessas".

Ao meu esposo e companheiro pelo apoio, carinho e paciência.

Aos meus filhos pelo carinho e compreensão.

Aos meus pais.

A toda minha família.

Um agradecimento muito especial à minha sogra, D. Dulce, cujo apoio, amizade e compreensão tornaram viável a realização deste trabalho.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

A Deus, por tudo.



Resumo

O conceito de fatoração de métricas em fatores quaterniônicos foi recentemente desenvolvido, e está diretamente relacionado com o operador Ω , apresentado nas referências [15] e [45]. O objetivo de nossa dissertação é mostrar que este conceito pode ser utilizado para gerar uma classe de operadores Γ_i , $i = 1, 2, \dots, 8$, satisfazendo a propriedade $\Gamma_i \bar{\Gamma}_i = \bar{\Gamma}_i \Gamma_i = \nabla^2$ (ou Δ_4), a qual inclui o operador Γ da teoria de Fueter. Pretende-se mostrar também que, os sistemas de equações diferenciais parciais gerados pelas equações $\Gamma_i w = 0$, podem ser vistos como um caso particular do sistema mais geral, gerado por $\Omega w = 0$. Vamos designar as soluções w desse sistema, por *funções para-regulares*, em analogia ao caso especial das funções regulares da teoria de Fueter. Serão apresentadas ainda, algumas aplicações, tais como a obtenção de *EDPs* hiperbólicas de interesse, como as equações de Campo escalar, e a equação da onda espacial, através do produto $\Omega \bar{\Omega}$, além da fatoração da métrica de Minkowski em fatores quaterniônicos.

Keywords: Quaternions, Cauchy-Riemann conditions, regularity.

Palavras-chave: Quatérnios, equações de Cauchy-Riemann, regularidade.



Sumário

Abstract

Introdução

The concept of metric factorization (in quaternionic factors) was recently developed, and it is directly related to the Ω operator, presented in the references [15] e [45]. In this dissertation it is shown that this concept may be used to generate a class of operators Γ_i , $i = 1, 2, \dots, 8$, satisfying the property $\Gamma_i \bar{\Gamma}_i = \bar{\Gamma}_i \Gamma_i = \nabla^2$ (or Δ_4), which includes the Γ operator of the Fueter theory. It is also shown, that the differential partial systems generated from operators Γ_i , applied in quaternionic function w , such as $\Gamma_i w = 0$, are special cases of the more general systems of differential partial equations, generate from $\Omega w = 0$. We will designate the solutions w as *regular-like functions*, in analogy with the particular case of regular functions of the Fueter theory. Some applications, such as, the construction of *Klein-Gordon operator* and the *spacial wave equation*, through the product $\Omega \bar{\Omega}$ and a *factorization of the Minkowski metric* are also presented.

Keywords: Quatérnios, Cauchy-Riemann equations, regularity.

2 Análise quaternionica

2.1 Conexões Algebricas

2.2 Teoria da Fatoração

2.2.1 Notação vetorial

2.2.2 Injeção em $\mathbb{H}$

2.2.3 Representação matricial

2.2.4 Funções em $\mathbb{H}$

2.2.5 Funções regulares

2.2.6 Teorema de Cauchy para quatérnios

2.2.7 Fórmulas integrais de Cauchy-Pueter



Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Conceitos Básicos	3
1.2 Funções complexas	5
1.3 Funções analíticas	8
1.4 Critérios de analiticidade	14
1.5 Integração Complexa	14
1.5.1 Integral de linha	14
1.5.2 Independência de caminhos	16
1.6 Desenvolvimento de Laurent	21
1.7 Funções Harmônicas	23
1.8 Transformações conformes	24
1.9 Equações de Beltrami	27
2 Análise quaterniônica	29
2.1 Conceitos Algébricos	29
2.2 Teoria de Fueter	31
2.2.1 Notação vetorial	31
2.2.2 Imersão em $\mathbb{C}_{e_j}$	31
2.2.3 Representação matricial	32
2.2.4 Funções em $\mathbb{H}$	33
2.2.5 Funções regulares	34
2.2.6 Teorema de Gauss para quatérnios	36
2.2.7 Fórmulas integrais de Cauchy-Fueter	38



2.3	Métodos construtivos e “MB approach”	39
2.3.1	Transformações conformes em quatérnios	40
2.3.2	Relacionando o operador $\bar{\Gamma}$ com a derivada quaterniônica	41
2.4	Métricas riemanianas	44
2.4.1	Sistemas do tipo Beltrami	48
3	Resultados	50
3.1	Classificação	50
3.2	Relações de conformidade	55
3.3	Funções que satisfazem as relações de conformidade	58
3.4	Generalização	59
4	Aplicações	66
4.1	Fatoração da métrica de Minkowski	66
4.1.1	Fatoração através do formalismo vierbein	66
4.2	Operador de Klein-Gordon	69
4.3	Equação da onda	70
	Conclusão	73
	Referências Bibliográficas	74



Introdução

Os números quatérnios surgiram no século *XIX*, por obra do físico irlandês Willian Rowan Hamilton. Hamilton percebendo que os números complexos podiam ser pensados como entidades orientadas no plano, tentou estender essa idéia para três dimensões, passando do número binário $a + bi$ para triplas ordenadas $a + bi + cj$. Hamilton trabalhou obstinadamente nesse sentido por cerca de dez anos, sem sucesso, quando finalmente percebeu que suas dificuldades seriam superadas se abandonasse o conceito de comutatividade da multiplicação e, ao invés de triplas, usasse quádruplas. Da mesma forma que Lobachevsky criou uma nova geometria, consistente em si mesma, abandonando o postulado das paralelas de Euclides, Hamilton criou uma nova álgebra, consistente em si mesma, abandonando o postulado da comutatividade da multiplicação. Surgia assim a álgebra dos quatérnios, que, embora generalizasse o conceito de números complexos, não possuía a estrutura de um corpo, e sim de um anel, que no decorrer de nossa dissertação será designado por *ℍ*.

O surgimento dos números quatérnios gerou grande polêmica entre a comunidade científica da época, e devido a isso, não houve grandes avanços nesse sentido até por volta de 1930, quando Rudolf Fueter [26] começou a desenvolver os fundamentos de uma análise quaterniônica, como um análogo da já bem estruturada análise complexa. O trabalho de Fueter desenvolveu consistentes similaridades com conceitos clássicos da teoria de uma variável complexa, tais como, teorema de Cauchy, fórmulas integrais de Cauchy, expansão de Laurent, etc. Estas similaridades têm sido alvo de discussão de importantes nomes, como Sudbery [52] e Deavours [20]. No entanto a teoria de Fueter revela também algumas inconsistências, como por exemplo, a forma como analiticidade e regularidade são relacionadas. Uma outra inconsistência deve-se ao fato de Fueter não haver estabelecido qualquer relação entre funções quaterniônicas regulares e transformações conformes. Esta conexão ficou a cargo dos matemáticos Machado e Borges [44]. Autores como Cerejeiras et all [17], Erikson Bique [24], Machado e Borges, entre outros, têm tentado complementar e estender essa teoria.



Na ref [44] Machado e Borges introduzem noções de diferenciabilidade quaterniônica (à esquerda e à direita), bem como, uma generalização das equações de Cauchy-Riemann em quatro dimensões, via conceito de integrabilidade de caminhos independentes, numa variedade diferenciável, posteriormente chamado de “MB approach”. Na referência [45] Machado e Borges estabelecem o conceito de fatoração de métricas riemanianas, em fatores quaterniônicos, o que acredita-se deverá num futuro próximo viabilizar o desenvolvimento de sólidos elementos para uma teoria analítica hipercomplexa.

Organizamos a presente dissertação de forma a dar condições para que o leitor relembre conceitos necessários ao bom entendimento do texto (capítulo 2) e familiarize-se com as extensões quaterniônicas da teoria complexa, sob diversos pontos de vista, no intuito de criar uma visão global sobre o assunto, ressaltando os principais tópicos (capítulo 3). Por motivo de brevidade omitiremos uma boa parte das demonstrações, especialmente quando estas estiverem relacionadas a conceitos matemáticos clássicos ou estiverem além do propósito de nosso trabalho. O capítulo 4 é, na nossa opinião o mais importante, uma vez que nele apresentamos alguns resultados novos por nós obtidos, os quais julgamos de relevante importância. Neste capítulo apresentamos oito possíveis fatorações (e seus conjugados quaterniônicos) para a métrica euclidiana canônica, cada qual gerando um sistema homogêneo de equações diferenciais parciais, um dos quais é o sistema gerado pela equação $\Gamma w = 0$, o qual define o conceito de regularidade à esquerda da teoria de Fueter, mostrando assim que o operador de Fueter é um caso especial de um operador mais geral Ω . Ainda neste capítulo enunciamos e demonstramos um teorema no qual provamos que o produto $\Omega\bar{\Omega}$, generaliza o conceito de operador quadriarmônico, e demonstramos também que este operador pode ser obtido de um operador mais geral $\Omega_G\bar{\Omega}_G$, o qual é um operador quaterniônico envolvendo coeficientes imaginários puros (complexos).

O capítulo 5 é uma consequência desses novos resultados, no qual são obtidos o operador de Klein-Gordon e a equação da onda espacial, através da generalização $\Omega_G\bar{\Omega}_G$ do operador $\Omega\bar{\Omega}$. Ainda neste capítulo uma fatoração da métrica de Minkowski em fatores quaterniônicos, é apresentada.

Definição 1.1.3 O conjunto resultante da união do conjunto Ω com suas imagens de fronteira é denotado a partir de Ω .

Definição 1.1.4 Os conjuntos Ω e suas imagens, os pontos de suas partes são pontos interiores



Capítulo 1

Preliminares

Antes de adentrar pormenorizadamente ao tema de nossa dissertação, serão feitas na sequência desta seção, uma série de definições, as quais julgamos necessárias para um bom entendimento do texto. Boa parte das demonstrações são apresentadas em detalhes.

1.1 Conceitos Básicos

Definição 1.1.1 Seja D um conjunto e $z \in D$. Denotamos por vizinhança de z a todo conjunto aberto que contenha z .

Definição 1.1.2 z é chamado um ponto interior de D , se possui uma vizinhança inteiramente consistida de pontos de D .

Definição 1.1.3 Um ponto de fronteira z de um conjunto $A \subset D$ é um ponto de D tal que, cada vizinhança do ponto z contém pontos pertencentes a A e pontos não pertencentes a A ; e a fronteira de A é o conjunto de todos os pontos de fronteira de A .

Definição 1.1.4 Um conjunto D é dito fechado se ele contém todos os seus pontos de fronteira.

Definição 1.1.5 O conjunto resultante da união do conjunto D com seus pontos de fronteira é denominado o fecho de D .

Definição 1.1.6 Um conjunto é dito aberto, se todos os seus pontos são pontos interiores.



Definição 1.1.7 Um conjunto aberto D é chamado conexo, se quaisquer dois pontos de D podem ser “ligados” por uma linha poligonal, cujos pontos pertencem a D .

Definição 1.1.8 Um conjunto fechado D é chamado conexo, se é impossível decompor-lo em dois subconjuntos abertos A e B , disjuntos, não vazios, tal que $A \cup B \equiv D$.

Definição 1.1.9 Um conjunto aberto conexo é denominado um domínio.

Definição 1.1.10 Um caminho ligando os pontos x e y em um espaço X é uma aplicação contínua $\phi : [a, b] \rightarrow X$, $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $\phi(a) = x$ e $\phi(b) = y$.

Definição 1.1.11 Um caminho suave em uma região R é uma aplicação $\phi : [a, b] \rightarrow R$ com derivada contínua em $[a, b]$.

Definição 1.1.12 Um caminho suave por partes em uma região R é uma coleção finita de caminhos suaves $\Gamma_i[a_i, b_i] \rightarrow R$, $i = 1, 2, \dots, n$, satisfazendo: $\Gamma_i(b_i) = \Gamma_{i+1}(a_{i+1})$

Definição 1.1.13 Se D é um domínio e sua fronteira consiste de n subconjuntos conexos, então D é n -conexo. Em particular um domínio simplesmente conexo (1-conexo) tem uma fronteira que consiste de um conjunto conexo (como por exemplo, uma curva ou um ponto).

Observação: Um domínio n -conexo pode ser visto como um domínio simplesmente conexo no qual foram feitas $n-1$ aberturas.

Definição 1.1.14 Seja $z = z(t)$ uma curva cujos pontos são ordenados no intervalo $[a, b]$. Denominamos $z(a)$ e $z(b)$ pontos inicial e final de $z(t)$, respectivamente.

Definição 1.1.15 Uma curva é chamada fechada se os pontos final e inicial coincidem.

Definição 1.1.16 Uma curva é denominada simples se $z(t)$ toma valores diferentes para cada valor de $t \in [a, b]$. Isto é, se a curva não se intercepta, exceto eventualmente, no ponto inicial (final), no caso da curva fechada.

Definição 1.1.17 Seja Γ uma curva contínua arbitrária tal que um número arbitrário de pontos de Γ possam ser ligados por uma linha poligonal (em ordem de sucessão ao longo da



curva). Dizemos que Γ é retificável se o conjunto de comprimentos das linhas poligonais, assim obtidas, é limitado. Isto é

$$\sup \sum_{k=1}^n |z(t_k) - z(t_{k-1})| < \infty. \quad (1.1.1)$$

Nesse caso $\sup \sum_{k=1}^n |z(t_k) - z(t_{k-1})|$ é chamado o comprimento da curva.

Definição 1.1.18 Um espaço de Hausdorff é um espaço topológico D tal que, para quaisquer elementos $x, y \in D$ existe uma vizinhança U de x e V de y tal que $U \cap V = \emptyset$

Definição 1.1.19 Um homeomorfismo é uma transformação $T : D \mapsto Y$, contínua, cuja inversa também é contínua.

Definição 1.1.20 Seja D um espaço topológico de Hausdorff. Dizemos que D é uma variedade (ou uma $\mathbb{C}^0$ variedade, ou um espaço localmente Euclidiano) de dimensão n , se, cada ponto $x \in D$ possui uma vizinhança aberta que é homeomorfa a um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.1.21 Uma variedade diferenciável de classe $\mathbb{C}^k$ e dimensão n , é definida como sendo um espaço topológico D e uma família de aplicações biunívocas $x_\alpha : U_\alpha \mapsto D$ de abertos $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, tais que:

- a) U cobre D (ou $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = D$) ;
- b) Para todo par α, β , com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = M \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(M)$ e $x_\beta^{-1}(M)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$, e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ são diferenciáveis de classe $\mathbb{C}^K$.

1.2 Funções complexas

Seja D um conjunto contido no plano complexo. Seja f uma lei que faz corresponder a cada elemento z de D , um único número complexo. Dizemos então que f é uma função (definida no conjunto D) da variável complexa z e D é o domínio de definição da função $f(z)$.

Desde que um número complexo é escrito na forma $z = x + iy$, $f(z)$ define uma transformação de um número complexo z em um número complexo $f(z)$.

Podemos escrever $f(z) = u + iv$, onde

$$u = u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy) \text{ e,}$$

$$v = v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy),$$

são funções das variáveis reais x e y .



Definição 1.2.1 A função $f(z)$ definida no conjunto D é dita contínua no ponto $\xi \in \bar{D}$, se para qualquer $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, $|z - \xi| < \delta$ implica $|f(z) - f(\xi)| < \epsilon$, para todo $z \in D$.

Definição 1.2.2 A função $f(z)$ é contínua em D se é contínua em cada ponto $z \in D$.

Definição 1.2.3 Seja D_f o domínio (complexo) da função f . Dizemos que f tem limite L se, dado $\epsilon > 0$, arbitrário, existe $\delta > 0$, tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \epsilon \quad (z \rightarrow z_0, \quad z \in D_f). \quad (1.2.2)$$

Teorema 1.2.1 Seja D_f o domínio (complexo) da função $f(z) = u + iv$, então

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L, \quad L = A + iB, \quad (1.2.3)$$

se e somente se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} u(x, y) = A \quad e \quad \lim_{z \rightarrow z_0} v(x, y) = B \quad (1.2.4)$$

Da definição (1.2.3), temos

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |(u + iv) - (A + iB)| < \epsilon, \quad (z \rightarrow z_0, \quad z \in D_f). \quad (1.2.5)$$

Consequentemente,

$$|u - A| \leq |(u + iv) - (A + iB)| \quad e \quad |v - B| \leq |(u + iv) - (A + iB)|, \quad (1.2.6)$$

o que nos leva a

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |u(x, y) - A| < \epsilon \quad e \quad |v(x, y) - B| < \epsilon, \quad (z \rightarrow z_0, \quad z \in D_f). \quad (1.2.7)$$

Isto satisfaz (1.2.4), o que prova a necessidade.

Por outro lado, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |z - z_0| < \delta$ implica $|u(x, y) - A| < \frac{\epsilon}{2}$ e $|v(x, y) - B| < \frac{\epsilon}{2}$.

Pela desigualdade do triângulo

$$|f - L| \leq |u - A| + |v - B|. \quad (1.2.8)$$

Daí,

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \quad (z \rightarrow z_0, \quad z \in D_f). \quad (1.2.9)$$

Fica assim demonstrada a suficiência.



Corolário 1.2.1 Uma função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é contínua no ponto z_0 se e somente se $u(x, y)$ e $v(x, y)$ forem contínuas em z_0 .

Definição 1.2.4 Uma função da variável complexa $f(z)$, definida numa vizinhança do ponto ϱ é diferenciável em ϱ se existe o limite

$$\lim_{z \rightarrow \varrho} \frac{f(z) - f(\varrho)}{z - \varrho} = f'(\varrho). \quad (1.2.10)$$

ou

$$f(z) - f(\varrho) - (z - \varrho)f'(\varrho) = o(|z - \varrho|), \quad (z \rightarrow \varrho). \quad (1.2.11)$$

Dizemos que $f'(\varrho)$ é a derivada da função $f(z)$ no ponto ϱ

Definição 1.2.5 Se f é diferenciável em todo ponto de seu domínio, então f é diferenciável.

Teorema 1.2.2 Sejam $f(z)$ e $g(z)$ duas funções complexas num domínio X , se ambas as funções possuem limites finitos com $z \rightarrow z_0$, então vale a propriedade,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z). \quad (1.2.12)$$

Demonstração: Para a demonstração do teorema, vamos supor que f e g possuem limites finitos L_1 e L_2 , respectivamente. Então existem $\delta' > 0$ e $\delta'' > 0$ tais que,

$$\begin{aligned} z \in D_f \quad & 0 < |z - z_0| < \delta' \Rightarrow |f(z) - L_1| < \frac{\epsilon}{2}, \\ z \in D_g \quad & 0 < |z - z_0| < \delta' \Rightarrow |g(z) - L_2| < \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

Tomando $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$, e $z \in D_f \cap D_g$, certamente $0 < |z - z_0| < \delta$,

e

$$|f(z) + g(z) - (L_1 + L_2)| = |[f(z) - L_1] + [g(z) - L_2]| \leq |f(z) - L_1| + |g(z) - L_2| < \epsilon$$

As Propriedades enunciadas a seguir seguem da definição de diferenciabilidade.

Propriedade 1.2.1 Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um conjunto não vazio. Se $f(z)$ e $g(z)$ são duas funções diferenciáveis no ponto ϱ então valem as propriedades

- i) $(f + g)' = f' + g'$,
- ii) $(fg)' = f'g + fg'$,
- iii) Se $F(z) = \frac{f(z)}{g(z)} \implies F' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$; $g(z) \neq 0$,
- iv) Se $f(z)$ é diferenciável no ponto ϱ e $\varphi(z)$ é diferenciável no ponto $\tilde{\varrho} = f(\varrho)$, então $F(z) = \varphi(f(z))$ também é diferenciável no ponto ϱ e $F'(\varrho) = \varphi'(f(\varrho))f'(\varrho)$.

1.3 Funções analíticas

Se $f(z)$ é uma função complexa tal que $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, em geral a diferenciabilidade de $f(z)$ não equivale à diferenciabilidade de $u(x, y)$ e $v(x, y)$. Uma condição adicional é ainda necessária.

Definição 1.3.1 *Seja D um domínio. Se $f(z)$ é diferenciável em cada ponto de D , então $f(z)$ é analítica em D .*

Se a função $f(z) = u + iv$ é diferenciável no ponto $z = x + iy$, então

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h}, \tag{1.3.14}$$

independentemente do modo como h tende a zero. Em particular, podemos fazer h tender a zero tanto pelo eixo das abscissas (valores reais), quanto pelo eixo imaginário (valores imaginários).

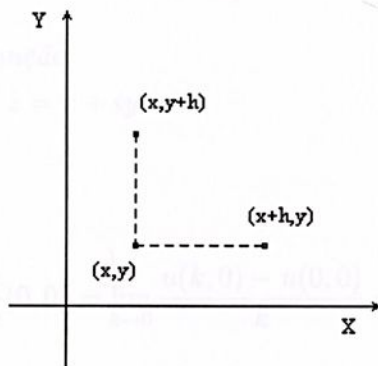


Figura 1:

Dessa forma

$$f'(z) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x+k, y) - u(x, y) + i[v(x+k, y) - v(x, y)]}{k}, \quad (1.3.15)$$

e

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, y+t) - u(x, y) + i[v(x, y+t) - v(x, y)]}{it}, \quad (1.3.16)$$

Desde que o limite (1.3.14) exista, pelo teorema (1.2.2),

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x+k, y) - u(x, y)}{k} + i \lim_{k \rightarrow 0} \frac{[v(x+k, y) - v(x, y)]}{k}, \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.3.17)$$

e

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[v(x, y+t) - v(x, y)]}{t} - i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, y+t) - u(x, y)}{t}, \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1.3.18)$$

Igualando as partes reais e imaginárias nas expressões 1.3.17 e 1.3.18, obtemos as equações ,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.3.19)$$

A satisfação destas equações, as quais são conhecidas como *equações de Cauchy-Riemann*, é uma condição necessária, porém não suficiente, para a existência da derivada de f , como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 1.3.1 tomando a função

$$f(z) = \sqrt{|xy|} + i0 = u + iv, \quad z = x + iy.$$

$$u = \sqrt{|xy|} \quad e \quad v = i0.$$

O que nos leva a,

$$u(k, 0) = \sqrt{k \cdot 0} = 0 \quad e$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(k, 0) - u(0, 0)}{k} = 0. \quad (1.3.20)$$

De forma análoga

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(0, t) - u(0, 0)}{t} = 0. \quad (1.3.21)$$

Certamente, as relações (1.3.23) são satisfeitas, mas no entanto, para $z = 0$ e $h = re^{i\theta}$, temos

$x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, daí

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{|\cos\theta \sin\theta|}}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \frac{|\sin 2\theta|^{\frac{1}{2}}}{2} = f'_\theta(0), \quad (1.3.22)$$

onde f'_θ é a derivada direcional.

Uma vez que f'_θ depende do ângulo θ , $f'(0)$ não existe. Portanto f satisfaz as equações de Cauchy-Riemann, mas não é diferenciável em $z = 0$, não sendo portanto, analítica em $\mathbb{C}$.

Teorema 1.3.1 *Seja $f(z)$ uma função da variável complexa $z = x + iy$. Para que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ seja diferenciável no ponto $\varrho = \xi + i\eta$, é necessário e suficiente que as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sejam diferenciáveis no ponto (ξ, η) e suas derivadas parciais neste ponto satisfaçam as relações*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.3.23)$$

Demonstração : Para provar a necessidade vamos usar o fato que $f(z)$ é diferenciável no ponto ϱ . então pela definição (1.2.4)

$$f(z) - f(\varrho) = (z - \varrho)f'(\varrho) + o(|z - \varrho|), \quad (z \rightarrow \varrho). \quad (1.3.24)$$

onde $f(z) = o(\varphi(z))$ significa que $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{\varphi(z)} = 0$, $z \in D$.
denotando,

$$f'(\varrho) = \phi + i\psi, \quad (1.3.25)$$

então,

$$\begin{aligned} f(x + iy) - f(\xi + i\eta) &= [(x + iy) - (\xi + i\eta)]f'(\xi + i\eta) + o(\vartheta) \\ &= [(x + iy) - (\xi + i\eta)](\phi + i\psi) + o(\vartheta) \\ &= (x + iy)\phi + i(x + iy)\psi - (\xi + i\eta)\phi - i(\xi + i\eta)\psi + o(\vartheta) \end{aligned} \quad (1.3.26)$$

onde $\vartheta = (|z - \xi|)$ denota a distância entre os pontos (x, y) e (ξ, η) .

Portanto,

$$\begin{aligned} u(x, y) + iv(x, y) - [u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta)] &= \phi x + iy\phi + i\psi x - \psi y \\ &\quad - \xi\phi - i\eta\phi - i\xi\psi + \eta\psi + o(\vartheta). \end{aligned} \quad (1.3.27)$$

Separando as partes real e imaginária,

$$u(x, y) - u(\xi, \eta) = \phi(x - \xi) - \psi(y - \eta) + o(\vartheta) \quad (1.3.28)$$

e

$$v(x, y) - v(\xi, \eta) = \phi(y - \eta) + \psi(x - \xi) + o(\vartheta). \quad (1.3.29)$$

Fazendo x tender a ξ , obtemos

$$u(x, y) - u(\xi, \eta) = -\psi(y - \eta) + o|y - \eta|$$

e

$$v(x, y) - v(\xi, \eta) = \phi(y - \eta) + o|y - \eta|. \quad (1.3.30)$$

Por outro lado, Fazendo y tender a η , obtemos

$$u(x, y) - u(\xi, \eta) = \phi(x - \xi) + o|x - \xi|$$

e

$$v(x, y) - v(\xi, \eta) = \psi(x - \xi) + o|x - \xi|. \quad (1.3.31)$$

Concluimos então que $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são ambas diferenciáveis e, por (1.3.30) e (1.3.31) temos, $\phi = u'_x = v'_y$, $\psi = v'_x = -u'_y$

Para provar a suficiência vamos supor que $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são diferenciáveis e satisfazem as relações de Cauchy-Riemann.

Denominando,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \phi \quad e \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \psi, \quad (1.3.32)$$

e substituindo em (1.3.28) e (1.3.29), obtemos

$$u(x, y) - u(\xi, \eta) - (x - \xi) \frac{\partial u}{\partial x} + (y - \eta) \frac{\partial v}{\partial x} = o(\vartheta). \quad (1.3.33)$$

e

$$v(x, y) - v(\xi, \eta) - (y - \eta) \frac{\partial u}{\partial x} - (x - \xi) \frac{\partial v}{\partial x} = o(\vartheta). \quad (1.3.34)$$

e as equações

$$u(x, y) + iv(x, y) - [u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta)] - \frac{\partial u}{\partial x}(x - \xi - i(y - \eta)) + \frac{\partial v}{\partial x}(y - \eta - i(x - \xi)) = o(\vartheta). \quad (1.3.35)$$

Ou

$$u(x, y) + iv(x, y) - [u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta)] - \frac{\partial u}{\partial x}(x - \xi - i(y - \eta)) - i \frac{\partial v}{\partial x}(x - \xi - i(y - \eta)) = o(\vartheta). \quad (1.3.36)$$

são obtidas multiplicando-se (1.3.34) por i e somando as equações (1.3.33) e (1.3.34). Isso nos leva a,

$$u(x, y) + iv(x, y) - [u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta)] - [x - \xi - i(y - \eta)]\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}\right) = o(\vartheta). \quad (1.3.37)$$

que é exatamente a equação (1.2.11), dada por

$$f(z) - f(\varrho) - (z - \varrho)f'(\varrho) = o(|z - \varrho|), \quad (z \rightarrow \varrho). \quad (1.3.38)$$

Assim, $f(z)$ é diferenciável no ponto ϱ .

Resultado 1.3.1 Seja D um domínio. Se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = w(u, v)$, é diferenciável em D e $f'(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z}$, então somando (1.3.17) e (1.3.18),

$$2 \frac{\partial f(z)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.3.39)$$

ou,

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]. \quad (1.3.40)$$

Resultado 1.3.2 Vamos definir os operadores,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (1.3.41)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (1.3.42)$$

De forma que

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right] w = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right] (u + iv) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right] = \frac{\partial f(z)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.3.43)$$

Vamos dar a seguir uma segunda definição de função analítica.

Definição 1.3.2 Uma função $f(z)$ ($z = x + iy$), é dita regular (analítica, holomorfa ou monógena) no ponto ξ , se f pode ser representada por uma série de potência

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - \xi)^n, \quad (1.3.44)$$

convergente numa vizinhança do ponto ξ , tal que $|z - \xi| < r$, ($r > 0$).

Definição 1.3.3 Dizemos que uma função $f(z)$ da variável complexa $z = x + iy$ é analítica (regular) no ponto $z = \infty$ se $f(\frac{1}{z})$ for regular no ponto $\xi = 0$. Neste caso $f(\frac{1}{z}) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \dots$ numa vizinhança de $\xi = 0$, que é equivalente a $f(\frac{1}{z}) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$ numa vizinhança de $z = \infty$. Isto significa que $f(z)$ é analítica no infinito se $f(z)$ pode ser desenvolvida em série de potências de $\frac{1}{z}$ “numa vizinhança do infinito”.

Teorema 1.3.2 Uma função que é analítica no ponto ξ é diferenciável em ξ .

Demonstração :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - \xi)^n = c_0 + c_1(z - \xi) + c_2(z - \xi)^2 + \dots \quad |z - \xi| < r \quad (1.3.45)$$

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - \xi)^n = c_0 + c_1(\xi - \xi) + c_2(\xi - \xi)^2 + \dots = c_0. \quad (1.3.46)$$

Assim,

$$\frac{f(z) - f(\xi)}{z - \xi} = c_1 + c_2(z - \xi) + c_3(z - \xi)^2 \dots \quad |z - \xi| < r, \quad (1.3.47)$$

portanto,

$$\lim_{z \rightarrow \xi} \frac{f(z) - f(\xi)}{z - \xi} = \lim_{z \rightarrow \xi} [c_1 + c_2(z - \xi) + c_3(z - \xi)^2 \dots] = c_1. \quad (1.3.48)$$

Pela definição (1.2.4) f é diferenciável no ponto ξ .

Teorema 1.3.3 Sejam $u(x, y)$ e $v(x, y)$ funções reais com derivadas parciais contínuas num domínio D . Então $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica em D se e somente se, as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas em D .

Demonstração : A suficiência advém do fato de u e v terem derivadas parciais contínuas, o que significa que ambas são diferenciáveis em todo o domínio D , e, desde que ambas satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, temos que f é diferenciável, e portanto analítica. (def. 1.3.1).

A necessidade é consequência direta da analiticidade, que implica diferenciabilidade e consequentemente, a satisfação das equações de Cauchy-Riemann.

1.4 Critérios de analiticidade

Vamos enunciar alguns critérios de analiticidade, lembrando no entanto, que esses critérios só são válidos em domínios complexos.

- A soma e o produto de um número finito de funções analíticas no ponto ξ são funções analíticas nesse ponto.
- O quociente de duas funções analíticas no ponto ξ é também uma função analítica neste ponto (desde que a função esteja definida no ponto).
- Se a função $f(z)$ é analítica no ponto ξ , e a função $f(w)$ é analítica no ponto $f(\xi)$, então a função $\gamma(z) = F(f(z))$ é analítica em ξ .

1.5 Integração Complexa

1.5.1 Integral de linha

Seja Γ um curva retificável e $f(z)$ uma função contínua da variável complexa $z = z(t)$, $t \in [a, b]$. Chamamos de integral à soma

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) \quad (1.5.49)$$

onde $\xi_k = z(t'_k)$ é um ponto qualquer da curva Γ no intervalo $(z_k - z_{k-1})$, e cada ponto da curva $z_k(t_k)$ são escolhidos de tal forma que z_{k-1} precede z_k , z_0 coincidindo com o ponto inicial e z_n coincidindo com o ponto final.

Se o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) = \max_k |z_k - z_{k-1}| \rightarrow 0 \quad (1.5.50)$$



existe e é independente da escolha dos pontos z_k e ξ_k , então denominamos esse limite por integral da função $f(z)$ ao longo da curva Γ , e denotamos

$$\int_{\Gamma} f(z) dz. \quad (1.5.51)$$

Expressando a integral da função $f(z) = u + iv$ ($z = x + iy$), ao longo da curva Γ , temos

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} u dx - v dy + i \int_{\Gamma} v dx + u dy \quad (1.5.52)$$

Teorema 1.5.1 *Se $f(z)$ é contínua em Γ , então a integral de $f(z)$ ao longo de Γ existe.*

Observação 1.5.1 *Se tomarmos a integral ao longo da curva Γ na direção oposta, o sinal da integral muda de acordo com a mudança de sinal de $z_k - z_{k-1}$. Assim se tomarmos*

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) |z_k - z_{k-1}|, \quad (1.5.53)$$

então o limite se torna invariante sob a mudança de direção ao longo da curva e a integral correspondente é dada por,

$$\int_{\Gamma} f(z) |dz| = \int_{\Gamma} u ds + i \int_{\Gamma} v ds, \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (1.5.54)$$

Se a curva é suave por partes e retificável, então

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \quad (1.5.55)$$

onde $z = z(t)$ é uma função paramétrica do parâmetro t . Desde que

$f(z) = u + iv$ e $dz = dx + idy$, então

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} (u dx - v dy) + i(v dx + u dy) \quad (1.5.56)$$

que pode ser escrito na forma

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} p dx + q dy, \quad p = u + iv \quad e \quad q = -v + iu. \quad (1.5.57)$$



1.5.2 Independência de caminhos

O conceito de independência de caminhos integráveis será muito utilizado no desenvolvimento de nosso trabalho, portanto faremos a seguir várias definições enfocando conceitos concernentes.

Definição 1.5.1 Dizemos que uma integral é independente do caminho se ela depende unicamente dos pontos final e inicial da curva.

Assim

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} p dx + q dy \quad (1.5.58)$$

Definição 1.5.2 Se uma expressão do tipo $p dx + q dy$ pode ser escrita na forma,

$$dm(x, y) = \frac{\partial m}{\partial x} dx + \frac{\partial m}{\partial y} dy, \quad p = \frac{\partial m}{\partial x} \quad e \quad q = \frac{\partial m}{\partial y} \quad (1.5.59)$$

dizemos que dm é uma diferencial exata.

Teorema 1.5.2 A integral de linha

$$\int_{\Gamma_1} p dx + q dy, \quad (1.5.60)$$

definida num domínio D , é independente do caminho dado se e somente se, existe uma função $m(x, y)$ em D , tal que

$$\frac{\partial m}{\partial x} = p \quad e \quad \frac{\partial m}{\partial y} = q. \quad (1.5.61)$$

Demonstração : Vamos provar a suficiência, supondo que as igualdades em (1.5.61) sejam satisfeitas. Substituindo (1.5.61) em (1.5.60) e escrevendo na forma paramétrica, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} p dx + q dy &= \int_{\Gamma_1} \frac{\partial m}{\partial x} dx + \frac{\partial m}{\partial y} dy = \int_a^b \frac{\partial m}{\partial x} x'(t) dt + \int_a^b \frac{\partial m}{\partial y} y'(t) dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial m}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial m}{\partial y} y'(t) \right] dt \end{aligned} \quad (1.5.62)$$

$$= \int_a^b \left[\frac{d}{dt} m[x(t), y(t)] \right] dt = m[x(b), y(b)] - m[x(a), y(a)]. \quad (1.5.63)$$

Portanto (1.5.60) depende somente dos pontos a e b .

Vamos, por questão de brevidade omitir a recíproca, que pode ser encontrada na referência [25].

Teorema 1.5.3 (Teorema de Cauchy) *Seja D um domínio simplesmente conexo e seja $f(z)$ uma função analítica em D , então*

$$\oint f(z)dz = 0 \quad (1.5.64)$$

para todo contorno fechado C contido em D .

Demonstração : Seja $f(z) = u + iv$. Como, por hipótese f é analítica em D , então f é continuamente diferenciável em D . Pelo teorema (1.2.2) valem as relações:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.5.65)$$

Pelo teorema de Green em coordenadas retangulares, se D é um domínio interior à curva C , então

$$\begin{aligned} \oint_C f(z)dz &= \oint_C [udx - vdy] + i \oint_C [vdx + udy] \\ &= - \int \int_{\tau} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \int \int_{\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned} \quad (1.5.66)$$

Aplicando as relações (1.5.65) verificamos que a equação (1.5.66) é igual a zero. portanto a equação (1.5.64) é válida.

O teorema 1.5.3 é equivalente ao teorema abaixo.

Teorema 1.5.4 *Seja D um domínio simplesmente conexo, e $f(z)$ uma função analítica em D . Então a integral de $f(z)$ ao longo de um contorno ligando o ponto z a um ponto z_0 de D , depende unicamente de z e z_0 , e não do contorno de integração.*

De fato,

supondo que o teorema 1.5.3 seja verdadeiro e C_1 e C_2 tenham o mesmo sentido, então $C_1 + (-C_2)$ é um contorno fechado γ (Figura 2).

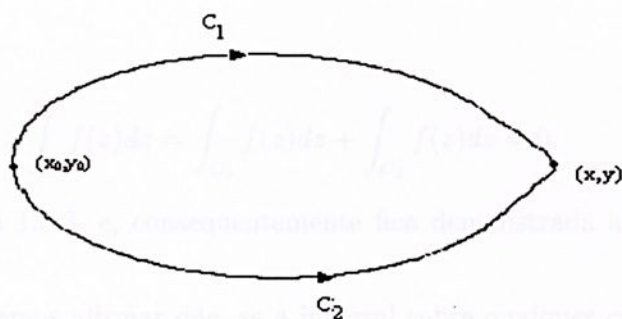


Figura 2:

Pelo teorema 1.5.3,

$$0 = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz, \quad (1.5.67)$$

portanto,

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz. \quad (1.5.68)$$

Desta forma a integral $\int_{\gamma} f(z) dz$ não depende do caminho de integração.

Por outro lado, suponha que o teorema 1.5.5 seja verdadeiro, e C seja um contorno fechado em D . Assim, para quaisquer dois pontos $z_1 \neq z_2 \in C$, o contorno fechado C fica dividido em dois caminhos c_1 e C_2 , ambos direcionados no mesmo sentido (Figura3).

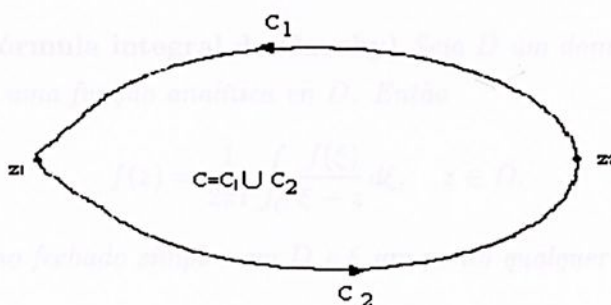


Figura 3:

Pelo teorema 1.5.5

$$\int_{C_1} f(z) dz = - \int_{C_2} f(z) dz, \quad (1.5.69)$$

logo,

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = 0. \quad (1.5.70)$$

Isso prova o teorema 1.5.3, e, conseqüentemente fica demonstrada a equivalência entre os dois teoremas.

Nesse ponto podemos afirmar que, se a integral sobre qualquer curva fechada é igual a zero, significa que essa integral não depende do caminho dado e vice-versa.

Teorema 1.5.5 *Sejam f uma função analítica numa região R e C um contorno fechado cujo interior está totalmente contido em R , exceto eventualmente regiões $R_1, R_2, \dots, R_n$ interiores a $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ respectivamente, sendo $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ contornos fechados (tais que C_i não intercepte C_j , $i \neq j$), totalmente contidos no interior de C . Então*

$$f(z) = \int_{C_0} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \dots + \int_{C_n} f(z)dz. \quad (1.5.71)$$

Desde que os contornos tenham todos a mesma orientação.

Enunciamos aqui o teorema 1.5.5 porque ele nos será útil na demonstração do teorema a seguir (**Fórmula integral de Cauchy**), o qual é muito importante no estudo das funções analíticas. No entanto, omitiremos a demonstração, já que esta envolve conceitos topológicos que não estão no contexto deste trabalho. Vide [46].

Teorema 1.5.6 (Fórmula integral de Cauchy) *Seja D um domínio (fechado) simplesmente conexo e $f(z)$ uma função analítica em D . Então*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in D. \quad (1.5.72)$$

onde C é um contorno fechado simples em D e ξ um ponto qualquer no interior de C

Demonstração : Desde que ξ é um ponto interior de C , podemos definir uma vizinhança fechada de z , a qual não contém pontos de C . Seja C_δ tal que

$$C_\delta = \{\xi \in D : |\xi - z| = \delta\} \quad (1.5.73)$$

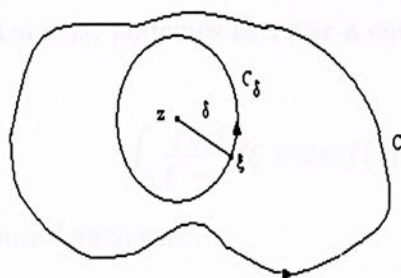


Figura 4:

Do teorema 1.5.5 temos

$$\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \oint_{C_\delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (1.5.74)$$

Escrevendo

$$f(\xi) = f(\xi) + f(z) - f(z). \quad (1.5.75)$$

Substituindo em (1.5.74),

$$\begin{aligned} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= \int_{C_\delta} \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi + \int_{C_\delta} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \\ &= f(z) \int_{C_\delta} \frac{d\xi}{\xi - z} + \int_{C_\delta} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi. \end{aligned} \quad (1.5.76)$$

Fazendo $\xi - z = re^{i\theta}$, então $d\xi = d(\xi - z) = rie^{i\theta} d\theta$. Um cálculo direto nos dá,

$$\int_{C_\delta} \frac{d\xi}{\xi - z} = 2\pi i. \quad (1.5.77)$$

Além disso, temos da continuidade de f que, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existe $\delta > 0$ tal que $|\xi - z| \leq \delta \Rightarrow |f(\xi) - f(z)| < \epsilon$

Assim,

$$\left| \int_{C_\delta} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \right| \leq \int_{C_\delta} \frac{|f(\xi) - f(z)|}{|\xi - z|} |d\xi| \leq \frac{\epsilon}{\delta} \int_{C_\delta} |d\xi| = 2\pi\epsilon. \quad (1.5.78)$$

Isto significa que quando $\delta \rightarrow 0$, a segunda integral à direita da igualdade em (1.5.76) também tende a zero. Ou seja, podemos escrever a equação (1.5.76) na forma,

$$\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 2\pi i f(z). \quad (1.5.79)$$

Que é o que pretendíamos demonstrar.

Teorema 1.5.7 *Sejam D, C , e z nas condições do teorema 1.5.6. Então para cada n inteiro positivo, $f^{(n)}(z)$ existe e é analítica em D .*

A demonstração do teorema 1.5.7 é feita por indução finita utilizando a derivação sob o sinal da integração, como a seguir.

Pelo teorema 1.5.6 temos,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (1.5.80)$$

Usando a derivação sob o sinal da integração temos

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi, \quad (1.5.81)$$

derivando mais uma vez,

$$f''(z) = 2! \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} d\xi, \quad (1.5.82)$$

derivando mais uma vez,

$$f^{(3)}(z) = 3! \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^4} d\xi. \quad (1.5.83)$$

generalizando,

$$f^{(n)}(z) = n! \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{(n+1)}} d\xi. \quad (1.5.84)$$

Este teorema é uma consequência do teorema 1.5.6 e uma demonstração rigorosa é encontrada em [25].

1.6 Desenvolvimento de Laurent

O desenvolvimento de uma função em série de potências de $z - z_0$ (z_0 podendo ser ou não um ponto de singularidade de f) que inclua termos com potências negativas de z é conhecido como desenvolvimento (ou série) de Laurent e é uma generalização da série de Taylor.

Teorema 1.6.1 *Seja f uma função univalente e regular numa região anular M tal que $r < |z - z_0| < R$, então para cada ponto z nessa região podemos representar a função $f(z)$ pela expansão,*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (1.6.85)$$

onde os coeficientes são dados por,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad (1.6.86)$$

e C é um contorno fechado contido em $r < |z - z_0| < R$ envolvendo z_0 uma vez no sentido positivo.

A demonstração pormenorizada pode ser encontrada em [34].

A série (1.6.85) é denominada série de Laurent para $f(z)$. A parte

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ é chamada a parte analítica (regular) de $f(z)$ e a parte formada por $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$ é chamada a parte principal ($n > 0$).

Definição 1.6.1 *Um ponto singular $z_0 \in \mathbb{C}$ é um ponto isolado (ou singularidade isolada) de uma função f , se existe uma vizinhança de z_0 na qual f é univalente e analítica, exceto em z_0 .*

Definição 1.6.2 *Uma singularidade isolada z_0 de $f(z)$ é dita*

1. *Removível, quando existir um número complexo c tal que a função*

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq z_0 \\ c, & z = z_0 \end{cases} \quad (1.6.87)$$

é analítica em um disco centrado em z_0 . Em outras palavras, se em (1.6.85)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} = 0, \quad (1.6.88)$$

então a soma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ define uma função analítica (def. 1.3.2) para $0 < |z - z_0| < r$. Nesse caso podemos definir $f(z_0) = c$.

2. *Pólo (de ordem m), quando existir um inteiro positivo m tal que $a_{-m} \neq 0$ e $a_{-n} = 0$ para $n > m$, tal que (1.6.85) tome a forma*

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots a_1(z - z_0) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad a_{-m} \neq 0. \quad (1.6.89)$$

Isto é, a expressão (1.6.89) tem um número finito de potências negativas.

3. *Essencial, quando não for removível nem pólo.*

1.7 Funções Harmônicas

Definição 1.7.1 *Seja $f(x, y)$ uma função numa região R em $\mathbb{C}$. Se f possui derivadas parciais até segunda ordem, as quais satisfazem a equação diferencial parcial*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad (1.7.90)$$

então f é denominada função harmônica e a equação (1.7.90) é conhecida como equação de Laplace.

Se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica em uma região simplesmente conexa R , então valem as relações de Cauchy-Riemann, e

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (1.7.91)$$

Derivando ambas as expressões com relação a x e y respectivamente e somando as derivadas parciais em u e v separadamente verificamos que u e v são harmônicas. Ou seja, as partes real e imaginária de uma função f analítica numa região R são também funções harmônicas nessa mesma região e, nesse caso, dizemos que v é uma função conjugada de u .

Teorema 1.7.1 *Uma condição necessária e suficiente para que a função*

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ seja analítica em uma região R , é que v seja uma função harmônica conjugada de u em R .

Demonstração : A necessidade é imediata da analiticidade de f .

Para provar a suficiência devemos garantir que existe uma função $v(x, y)$ de forma que a função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ seja analítica em R . Supondo que v seja a harmônica conjugada de u , então valem as equações (1.7.91) e vale a igualdade,

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy. \quad (1.7.92)$$



Fixando arbitrariamente um ponto $z_0 = (x_0, y_0)$ e integrando a equação (1.7.92) obtemos que,

$$v(x, y) = v_0 + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad (1.7.93)$$

onde $v_0 = v(x_0, y_0)$. Aplicando o teorema de Green e usando o fato de que u é harmônica, chegamos à igualdade,

$$\oint_C -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = \int \int_{\sigma} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy = 0, \quad (1.7.94)$$

onde C é um contorno fechado em R e σ o interior de C . Assim,

$$\oint_C -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = 0. \quad (1.7.95)$$

Isto significa que dv é uma diferencial exata, e consequentemente a integral em (1.7.93) independe do caminho de integração. Desta forma a função $v(x, y)$ possui derivadas parciais contínuas em R . Logo, u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann.

Garantimos, portanto a existência de uma função v (que é determinada pela função u , a menos da constante v_0), tal que $f = u + iv$ é analítica em R , o que prova a suficiência.

1.8 Transformações conformes

Seria interessante abordar vários tipos de transformações envolvendo funções de uma variável complexa, porém isso estenderia o texto além daquilo a que ele se propõe. Limitaremos-nos a fazer uma breve introdução às transformações conformes. Recomendariamos para um estudo mais aprofundado, a referência [4].

Definição 1.8.1 Denominamos arco (contínuo) ao conjunto de pontos do plano complexo,

$$C = \{z(t) = x(t) + iy(t)\}, \quad t \in [a, b] \quad (1.8.96)$$

onde $x = x(t)$ e $y = y(t)$ são funções contínuas do parâmetro t .

Definição 1.8.2 Se a derivada $z'(t)$ existe, é contínua e diferente de zero em $[a, b]$, então o arco definido em (def. 1.8.1) é denominado arco suave.

Definição 1.8.3 Sejam C e C' dois arcos suaves em $[a, b]$, definimos o ângulo entre C e C' em um ponto $z_0 \in D$, como o ângulo formado pelos vetores tangentes a C e C' neste ponto.



É comum pensar numa função complexa $f(z) = f(x + iy) = u + iv = w$, como uma transformação de um plano complexo z em outro plano complexo $w = f(z)$. Dizemos que o plano z é o domínio de validade da função f e o plano w , a imagem de z por f . Se fixarmos um ponto z_0 no plano z tal que exista um arco suave C passando através de z_0 , cuja representação paramétrica é dada por $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b]$, é fácil verificar que $w(t) = f(z(t))$ é a representação paramétrica da imagem de C . Denominemos por I_c essa representação. Seja D o domínio de C . Vamos supor que f seja analítica em D , então f é analítica em z_0 e, portanto, I_c é também um arco suave, o que nos permite escrever,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = f'(z) \frac{\partial z}{\partial t} \quad (1.8.97)$$

Vamos mostrar que essa transformação do plano z no plano w define uma “rotação” entre as tangentes a C e I_c nos pontos z_0 e $w_0 = f(z_0)$, e o ângulo dessa rotação é dado por

$$\theta_0 = \arg f'(z_0) \quad (1.8.98)$$

onde $\frac{\partial z}{\partial t}$ e $\frac{\partial w}{\partial t}$ representam as respectivas tangentes mencionadas acima. Desde que f é analítica em z_0 e $w_0 = f(z_0)$, temos

$$\left[\frac{\partial w}{\partial t} \right]_{w=w_0} = f'(z_0) \left[\frac{\partial z}{\partial t} \right]_{z=z_0}. \quad (1.8.99)$$

escrevendo a equação (1.8.99) em coordenadas polares,

$$\rho_0 e^{i\Phi_0} = \omega_0 e^{i(\sigma_0 + \theta_0)} \quad (1.8.100)$$

onde,

$$\rho_0 e^{i\Phi_0} = \left[\frac{\partial w}{\partial t} \right]_{w=w_0}, \quad \omega_0 e^{i\sigma_0} = \left[\frac{\partial z}{\partial t} \right]_{z=z_0}, \quad e^{i\theta_0} = f'(z_0), \quad (1.8.101)$$

disso resulta que,

$$\Phi_0 = \sigma_0 + \theta_0 = \sigma_0 + \arg f'(z_0). \quad (1.8.102)$$

Donde se conclui que:

Teorema 1.8.1 Se $f(z)$ é uma função analítica em z_0 tal que $f'(z_0) \neq 0$, então a transformação $w = f(z)$ define uma rotação de um ângulo $\theta = \arg f'(z_0)$, da tangente em z_0 a qualquer arco suave C do plano z .

Definição 1.8.4 Uma transformação que preserva a grandeza e direção dos ângulos entre quaisquer dois arcos suaves, passando por um ponto específico é denominada uma transformação conforme.

Definição 1.8.5 Uma transformação que preserva a grandeza mas não o sentido de cada ângulo, é chamada uma transformação isogonal.

Teorema 1.8.2 Sejam f uma função analítica no ponto $z = x + iy$, tal que $f'(z) \neq 0$. Então a transformação $w = f(z)$ é uma transformação conforme.

Demonstração : Temos do teorema anterior que, se f é analítica em z_0 e $f'(z_0) \neq 0$, a reta tangente (direcionada) a C em z_0 é rotacionada de um ângulo $\theta_0 = \arg f'(z_0)$, por meio da transformação $w = f(z)$. Portanto se C e C' são dois arcos suaves passando pelo ponto z_0 , e, σ_0 e σ'_0 os ângulos de inclinação dos respectivos arcos tangentes nesse ponto, temos que

$$\Phi_0 = \sigma_0 + \theta_0 \quad (1.8.103)$$

e

$$\Phi'_0 = \sigma'_0 + \theta_0. \quad (1.8.104)$$

Daí,

$$\sigma_0 - \sigma'_0 = \Phi_0 - \Phi'_0. \quad (1.8.105)$$

Isto significa que o ângulo $\sigma_0 - \sigma'_0$ entre C e C' é o mesmo em grandeza e direção que o ângulo $\Phi_0 - \Phi'_0$ entre I_c e I'_c . Desde que z_0 é arbitrário, a transformação $w = f(z)$ preserva o ângulo (em grandeza e direção) entre quaisquer duas curvas suaves passando por z_0 .

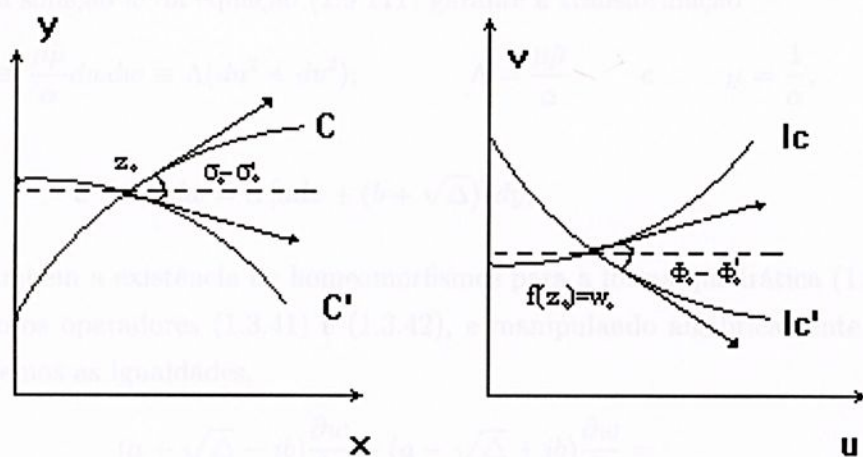


Figura 5:

1.9 Equações de Beltrami

Dada a primeira forma diferencial,

$$F \equiv a(x, y)dx^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dy^2; \quad \Delta = ac - b^2 > 0, \quad (1.9.106)$$

é válida a igualdade,

$$aF = [adx + (b + i\sqrt{\Delta})dy][adx + (b - i\sqrt{\Delta})dy]. \quad (1.9.107)$$

Seja $z = x + iy$ uma variável complexa, tal que as funções $\alpha(z)$ e $w = u(x, y) + iv(x, y)$ satisfazem a equação,

$$dw = \alpha[adx + (b + i\sqrt{\Delta})dy]. \quad (1.9.108)$$

Derivando parcialmente com relação a x e y respectivamente, obtemos as igualdades,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \alpha a; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = (b + i\sqrt{\Delta}), \quad (1.9.109)$$

e portanto,

$$a(b + i\sqrt{\Delta})\alpha(z) - a\alpha(z)(b + i\sqrt{\Delta}) = 0, \quad (1.9.110)$$

nos leva a

$$a \frac{\partial w}{\partial y} - (b + i\sqrt{\Delta}) \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (1.9.111)$$

Desta forma a solução w da equação (1.9.111) garante a transformação

$$F \equiv \frac{\mu \bar{\mu}}{\alpha} dw d\bar{w} \equiv \Lambda(du^2 + dv^2); \quad \Lambda = \frac{\mu \bar{\mu}}{\alpha} \quad e \quad \mu = \frac{1}{\alpha}, \quad (1.9.112)$$

onde

$$\alpha = \alpha(z) \quad e \quad dw = \alpha [adx + (b + \sqrt{\Delta})] dy,$$

garantindo também a existência de homeomorfismos para a forma quadrática (1.9.106).

Utilizando os operadores (1.3.41) e (1.3.42), e manipulando algébricamente a equação (1.9.111), obtemos as igualdades,

$$\begin{aligned} (a + \sqrt{\Delta} - ib) \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - (a - \sqrt{\Delta} + ib) \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \\ i \left[a \frac{\partial w}{\partial y} - (b + i\sqrt{\Delta}) \frac{\partial w}{\partial x} \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.9.113)$$



Podemos escrever a equação (1.9.113) na forma,

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = q(z) \frac{\partial w}{\partial z}; \quad q(z) = \frac{a - \sqrt{\Delta} + ib}{a + \sqrt{\Delta} - ib}. \quad (1.9.114)$$

As equações dadas em (1.9.114) são conhecidas como equações de Beltrami, as quais são equivalentes ao sistema,

$$\sqrt{\Delta} \frac{\partial u}{\partial x} - a \frac{\partial v}{\partial y} + b \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \sqrt{\Delta} \frac{\partial u}{\partial y} - b \frac{\partial v}{\partial y} + c \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (1.9.115)$$

Para uma métrica euclidiana, com $a = c = 1$ e $b = 0$, leva ao resultado

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0, \quad (1.9.116)$$

e é fácil verificar que o resultado (1.9.116) implica nas equações de Cauchy-Riemann (1.3.23).

Desta forma fica claro que os homeomorfismos de (1.9.106) são soluções univalentes de (1.9.115). Tais soluções são conhecidas como funções analíticas generalizadas ou pseudo-analíticas. Soluções para $q(z) = \mu(z) \neq 0$ (métricas Riemannianas em geral), são conhecidas por funções μ -conformes [3]. Portanto se w é uma função μ -conforme e $\mu(z)$ é mensurável, com $\|\mu\|_\infty < 1$, então diz-se que w é uma função quase conforme. Para maiores detalhes recomendamos o livro do autor Vekua [55].

Capítulo 2

Introdução à análise quaterniônica

O objetivo deste capítulo é traçar paralelos entre alguns conceitos da teoria de funções de uma variável complexa e a teoria de funções de uma variável quaterniônica.

2.1 Conceitos Algébricos

Definição 2.1.1 Um grupo G é um conjunto de objetos, munidos de uma operação $.$, tal que, para quaisquer elementos $a, b, c \in G$, as seguintes propriedades se verificam;

1. $(a.b).c = a.(b.c)$.
2. $\exists e \in G$ tal que para qualquer $a \in G$ implica que $a.e = e.a = a$.
3. $\exists a^{-1}$ tal que $a.a^{-1} = a^{-1}.a = e, \forall a \in G$.

Definição 2.1.2 Um grupo é dito Abelian se $a.b = b.a, \forall a, b \in G$.

Definição 2.1.3 Um corpo K é um conjunto munido de duas operações $+$ (adição) e $.$ (multiplicação), tal que, para quaisquer elementos a, b e $c \in K$, as propriedades abaixo se verificam,

1. K é um grupo abeliano com respeito à adição, onde, 0 é o elemento identidade.
2. A multiplicação é distributiva com respeito à adição.
3. $K - \{0\}$ é um grupo abeliano com respeito à multiplicação, com elemento identidade igual a 1 .



Definição 2.1.4 Um anel R é um grupo abeliano, aditivo, onde uma segunda lei de composição, a multiplicação, é definida pelas leis distributivas:

$$(x + y)z = xz + yz; \quad z(x + y) = zx + zy, \quad \forall x, y, z \in R$$

Definição 2.1.5 Uma álgebra A , sobre um corpo k é um anel, com uma multiplicação bilinear, isto é,

$\forall x, y, z \in A$ e $\alpha \in K$, tem-se,

$$1. (x + y)z = xz + yz; \quad z(x + y) = zx + zy.$$

$$2. \alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y).$$

Observação: Se a propriedade $(xy)z = x(yz), \forall x, y, z \in R$ (ou A), onde R é um anel sobre a álgebra A , então R é um anel associativo e A é uma álgebra associativa. Além disso, se as equações $ax = b$ e $xa = b$ sempre têm solução para qualquer a diferente de zero, dizemos então que a álgebra A é uma álgebra com divisão.

Um exemplo clássico de anel não comutativo com unidade é o $\mathbb{R}^4$, onde $\mathbb{R}^4 = \{(a, b, c, d) : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, com a soma usual de vetores e o produto,

$$(a, b, c, d) \cdot (e, f, g, h) = (ae - bf - cg - dh, af + be + ch - gd, ag + ec + df - hb, ag + de + bg - fc), \forall (a, b, c, d), (e, f, g, h) \in \mathbb{R}^4. \quad (2.1.1)$$

Se fizermos a identificação,

$$\begin{aligned} 1 &\longleftrightarrow (1, 0, 0, 0), \\ i &\longleftrightarrow (0, 1, 0, 0), \\ j &\longleftrightarrow (0, 0, 1, 0), \\ k &\longleftrightarrow (0, 0, 0, 1), \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

podemos facilmente verificar que $a1 + bi + cj + dk \longleftrightarrow (a, b, c, d)$.

Vamos designar por $\mathbb{H}$, ao conjunto $\mathbb{H} = \{q = a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$. $\mathbb{H}$ define, portanto, uma álgebra associativa, a qual é um anel com divisão, não comutativo sobre $\mathbb{R}$ (o corpo dos números reais).

é fácil verificar que as seguintes relações são válidas:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1; \quad ij = k; \quad jk = i; \quad ki = j. \quad (2.1.3)$$

2.2 Introdução à teoria de Fueter

2.2.1 Notação vetorial

Vamos escrever, $q = \phi + \psi$, onde $\phi \in \mathbb{R}$ e $\psi \in P$, P sendo um espaço vetorial euclidiano (tridimensional) tal que, para qualquer $\psi \in P$, ψ pode ser escrita como uma combinação linear, do tipo $x_2\mathbf{i} + x_3\mathbf{j} + x_4\mathbf{k}$, com $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ representando os versores unitários do espaço, obedecendo as regras de multiplicação (2.1.3).

Isto significa que podemos representar $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus P$.

Sejam,

$x_1 = \text{Re}(q)$ ou $sc(q)$, a parte real (escalar) de q .

$\text{Im}(q) = \text{Pu}(q)$ ou $\text{vec}(q) = x_2\mathbf{i} + x_3\mathbf{j} + x_4\mathbf{k}$, a parte pura (ou vetorial) de q .

Definimos:

- $\bar{q} = x_1 - x_2\mathbf{i} - x_3\mathbf{j} - x_4\mathbf{k}$, o conjugado de q .
- $\|q\| = |q| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{\frac{1}{2}} = (q\bar{q})^{\frac{1}{2}} = (\bar{q}q)^{\frac{1}{2}}$, a norma de q .
- $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}$, o elemento inverso (multiplicativo) de q .

De fato,

$$qq^{-1} = \frac{q\bar{q}}{\|q\|^2} = \frac{\|q\|^2}{\|q\|^2} = 1.$$

Observação: Se $\|q\| = 1$, então dizemos que q é um quaternião unitário.

Se a e b , são dois quaterniões distintos, então $\bar{ab} = \bar{b}\bar{a}$.

Sejam $q_1 = a + \mathbf{A}$ e $q_2 = b + \mathbf{B}$, aplicando o produto quaterniônico podemos verificar que

$$q_1q_2 = (a + \mathbf{A})(b + \mathbf{B}) = ab - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + a\mathbf{B} + b\mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{B}. \quad (2.2.4)$$

Onde, $ab - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ é a parte escalar, e $a\mathbf{B} + b\mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, é a parte vetorial.

2.2.2 Imersão em $\mathcal{C}_{e_j}$

Vamos nesta seção, apresentar uma outra forma de representar um elemento q de $\mathbb{H}$.

Seja $q = q_1 + \mathbf{e}_1q_2$, onde $q_1 = x_0 + \mathbf{e}_2x_2$, $q_2 = x_1 + \mathbf{e}_2x_3$ e $\mathbf{e}_1$ tem as mesmas propriedades do elemento “imaginário”¹ $\mathbf{i}$.

¹ Aqui as aspas devem-se ao fato que o produto $\mathbf{i}\mathbf{i} \neq -1$, onde $\mathbf{i}$ é a componente imaginária complexa.

2. Definimos o produto, quaterniônicas

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 &= -\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 &= -\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 &= -\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Tomando q_1 e $q_2 \in \mathcal{C} \cong \mathcal{C}_{\mathbf{e}_2}$, podemos estabelecer a correspondência $\mathbb{H} = \mathcal{C}_{\mathbf{e}_2} \oplus \mathbf{e}_1 \mathcal{C}_{\mathbf{e}_2}$.

2.2.3 Representação matricial

É bem conhecido [13] que o anel dos quaternions é isomorfo a um subconjunto M do espaço das matrizes 4×4 , sob a transformação

$$F: \mathbb{H} \mapsto M \quad (2.2.6)$$

$$q \mapsto \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix} = F(q) \quad (2.2.7)$$

Onde $q \in \mathbb{H} = a + \mathbf{i}b + \mathbf{j}c + \mathbf{k}d$.

De fato, associando

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{i} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{j} &\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{k} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

podemos escrever,

$$q = 1 \cdot a + \mathbf{i} \cdot b + \mathbf{j} \cdot c + \mathbf{k} \cdot d, \quad \text{e além disso, } \mathbf{ij} = \mathbf{k}, \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \mathbf{ki} = \mathbf{j}.$$

2.2.4 Funções quaterniônicas

Por definição uma função quaterniônica $w : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ é dada por,

$$w = f(q) = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + \mathbf{i}f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) + \mathbf{j}f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) + \mathbf{k}f_4(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad (2.2.9)$$

onde $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ são as unidades quaterniônicas e cada $f_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, é uma função coordenada real, com $q \in \mathbb{H}$.

Para simplificar a notação vamos identificar as unidades quaterniônicas $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ com i_1, i_2, i_3 e i_4 , respectivamente. Podemos então escrever,

$$w = f(q) = \sum_{r=1}^4 f_r i_r, \quad r = 1, 2, 3, 4. \quad (2.2.10)$$

Vamos denominar $w^{(h)}$ como sendo a função obtida derivando-se parcialmente as funções coordenadas f_r em relação a uma dada componente x_h , de forma que,

$$w^{(h)} = \sum_{r=1}^4 f_r^{(h)} i_r = \sum_{(r)} \frac{\partial f_r}{\partial x_h} i_r, \quad r, h = 1, 2, 3, 4. \quad (2.2.11)$$

Dados dois quatérnios constantes a e b , e duas funções w e f , valem as propriedades

1. $(w + f)^{(h)} = w^{(h)} + f^{(h)}.$
2. $(awb)^{(h)} = aw^{(h)}b.$
3. $(wf)^{(h)} = w^{(h)}f + wf^{(h)}.$
4. $(w^{-1})^{(h)} = -w^{-1}w^{(h)}w^{-1}$

Demonstração de (4):

$$(1)^{(h)} = (ww^{-1})^{(h)} = w^{(h)}w^{-1} + w(w^{-1})^{(h)},$$

$$0 = w^{(h)}w^{-1} + w(w^{-1})^{(h)},$$

multiplicando ambos os lados por w^{-1} ,

$$0 = w^{-1}w^{(h)}w^{-1} + w^{-1}w(w^{-1})^{(h)},$$

consequentemente,

$$(w^{-1})^{(h)} = -w^{-1}w^{(h)}w^{-1}$$

2.2.5 Funções regulares

Definição 2.2.1 Seja $f(q) \in \mathbb{C}^2$, então, $w = f(q) = \sum_{(r)} f_r i_r$, é dita regular à esquerda se

$$\sum_{(r)} w^{(r)} i_r = 0. \quad (2.2.12)$$

Analogamente,

Definição 2.2.2 Seja $f(q) \in \mathbb{C}^2$, então, $w = f(q) = \sum_{(r)} i_r f_r$, é dita regular à direita se

$$\sum_{(r)} i_r w^{(r)} = 0. \quad (2.2.13)$$

Desde que,

$$w^{(r)} = \sum_{(l)} f_l^{(r)} i_l, \quad (2.2.14)$$

então, se w é regular à esquerda, temos

$$\sum_{(r)} w^{(r)} i_r = \sum_{(r)} \left(\sum_{(l)} f_l^{(r)} i_l \right) i_r = \sum_{(r)} \left(\sum_{(l)} \frac{\partial f_l}{\partial x_r} i_l \right) i_r = 0, \quad (2.2.15)$$

Abrindo a soma (2.2.15) e igualando a zero, obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais lineares, parciais, homogêneas de primeira ordem,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial u^2} + \frac{\partial w_2}{\partial u^1} - \frac{\partial w_3}{\partial u^4} + \frac{\partial w_4}{\partial u^3} &= 0, \\ \frac{\partial w_1}{\partial u^1} - \frac{\partial w_2}{\partial u^2} - \frac{\partial w_3}{\partial u^3} - \frac{\partial w_4}{\partial u^4} &= 0, \\ \frac{\partial w_3}{\partial u^1} + \frac{\partial w_2}{\partial u^4} + \frac{\partial w_1}{\partial u^3} - \frac{\partial w_4}{\partial u^2} &= 0, \\ \frac{\partial w_4}{\partial u^1} + \frac{\partial w_1}{\partial u^4} - \frac{\partial w_2}{\partial u^3} + \frac{\partial w_3}{\partial u^2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Analogamente, para

$$\sum_{(r)} i_r w^{(r)} = 0, \quad (2.2.17)$$

obtemos o sistema,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial u^2} + \frac{\partial w_2}{\partial u^1} + \frac{\partial w_3}{\partial u^4} - \frac{\partial w_4}{\partial u^3} &= 0, \\ \frac{\partial w_1}{\partial u^1} - \frac{\partial w_2}{\partial u^2} - \frac{\partial w_3}{\partial u^3} - \frac{\partial w_4}{\partial u^4} &= 0, \\ \frac{\partial w_3}{\partial u^1} - \frac{\partial w_2}{\partial u^4} + \frac{\partial w_1}{\partial u^3} + \frac{\partial w_4}{\partial u^2} &= 0, \\ \frac{\partial w_4}{\partial u^1} + \frac{\partial w_1}{\partial u^4} + \frac{\partial w_2}{\partial u^3} - \frac{\partial w_3}{\partial u^2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.18)$$



Vamos definir um operador Γ , tal que,

$$\Gamma = \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial x_3} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial x_4}. \quad (2.2.19)$$

Desta forma as definições de regularidade à esquerda e à direita em um ponto q de D podem ser escritas como $\Gamma f(q) = 0$ e $f(q)\Gamma = 0$, respectivamente.

O operador Γ é chamado de operador gradiente quaterniônico, devido à identificação,

$$\Gamma = \frac{\partial}{\partial x_1} + \nabla, \quad (2.2.20)$$

onde ∇ é o operador gradiente.

Da mesma forma, definimos o operador gradiente conjugado (quaterniônico), como sendo o operador,

$$\bar{\Gamma} = \frac{\partial}{\partial x_1} - \nabla. \quad (2.2.21)$$

A regularidade à direita e à esquerda em $\bar{q}$ é definida de maneira análoga em D . Assim,

- f é regular à esquerda em $\bar{q}$ se $\bar{\Gamma}f = 0$.
- f é regular à direita em $\bar{q}$ se $f\bar{\Gamma} = 0$.

Podemos definir uma função quaterniônica

$$w = \phi + \psi, \quad (2.2.22)$$

neste caso, a equação (2.2.4) nos diz que,

$$\Gamma w = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \nabla \right) (\phi + \psi) = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} - \nabla \cdot \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \nabla \phi + \nabla \times \psi. \quad (2.2.23)$$

Baseado nesses resultados, podemos enunciar os seguintes teoremas:

Teorema 2.2.1 *A função $F = \phi + \psi$ é regular à esquerda em um domínio D , simplesmente conexo, de $\mathbb{R}^4$ se e somente se,*

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \nabla \cdot \psi \quad e \quad \nabla \phi = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \nabla \times \psi. \quad (2.2.24)$$

A demonstração é imediata do fato que, se uma expressão quaterniônica é nula, então as partes escalar e vetorial são nulas, separadamente.

Teorema 2.2.2 Dada uma função quaterniônica $w(f)$, tal que $\Gamma w = 0$ (ou $w\Gamma = 0$), então suas componentes coordenadas f_r são soluções da equação,

$$\sum_{(l)} \frac{\partial^2 f_r}{\partial x_l^2} = \Delta_4 f_r = 0, \quad r = 1, 2, 3, 4, \quad (2.2.25)$$

onde $\Delta_4 f$ denota o Laplaciano (quadridimensional) de f .

Demonstração : Sejam ,

$$\sum_{(r)} w^{(r)} i_r = 0 \quad e \quad \sum_{(r)} i_r w^{(r)} = 0, \quad (2.2.26)$$

as definições de regularidade à esquerda e regularidade à direita, respectivamente.

Diferenciando com relação a x_l e multiplicando por $\bar{i}_h$ (à direita e esquerda respectivamente) e somando temos,

$$\sum_{(r,l)} w^{(rl)} i_r \bar{i}_l = 0 \quad e \quad \sum_{(r,l)} \bar{i}_l i_r w^{(rl)} = 0, \quad (2.2.27)$$

mas, para $r \neq l$, temos $i_r \bar{i}_l + i_l \bar{i}_r = 0$ e $i_r \bar{i}_r = 1$,

assim,

$$\sum_r w^{(rr)} = \Delta_4 w = 0 \Rightarrow \Delta f_r = 0, \quad r = 1, 2, 3, 4. \quad (2.2.28)$$

2.2.6 Teorema de Gauss para quatérnios

Teorema 2.2.3 Seja $F = \phi + \psi$ uma função da variável quaterniônica $q = w + \mathbf{r}$, onde $\mathbf{r} = ix + jy + kz$, então com o produto quaterniônico, temos

$$\int_{\partial\sigma} (d\mathbf{Q})\mathbf{F} = \int_{\sigma} \Gamma \mathbf{F} dV. \quad (2.2.29)$$

Esta equação é a forma quaterniônica do teorema da divergência de Gauss.

Demonstração: Sejam,

$$d\mathbf{Q} = dQ_1 + idQ_2 + jdQ_3 + kdQ_4 \quad (2.2.30)$$

e

$$\mathbf{F} \rightarrow \begin{bmatrix} \phi & \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ -\psi_1 & \phi & -\psi_3 & \psi_2 \\ -\psi_2 & \psi_3 & \phi & -\psi_1 \\ -\psi_3 & -\psi_2 & \psi_1 & \phi \end{bmatrix} \equiv M \quad (2.2.31)$$

Podemos construir um vetor linha,

$$[dq] = (dQ_0, dQ_1, dQ_2, dQ_3), \quad (2.2.32)$$

de forma que $[dq]$ tem as mesmas componentes que o quatérnio dQ . Assim o produto $[dq]M$ é um vetor linha com as mesmas componentes do produto de quatérnios $(dQ)F$, e é dado por,

$$[dq]M = \begin{bmatrix} \phi dQ_0 - \psi_1 dQ_1 - \psi_2 dQ_2 - \psi_3 dQ_3 \\ \psi_1 dQ_0 + \phi dQ_1 + \psi_3 dQ_2 - \psi_2 dQ_3 \\ \psi_2 dQ_0 - \psi_3 dQ_1 + \phi dQ_2 + \psi_1 dQ_3 \\ \psi_3 dQ_0 + \psi_2 dQ_1 - \psi_1 dQ_2 + \phi dQ_3 \end{bmatrix}^T \quad (2.2.33)$$

Integrando e Aplicando o teorema de Gauss para 4 dimensões ², a cada componente, temos

$$\int_{\partial\sigma} [dq]M = \int_{\partial\sigma} \left\{ \begin{bmatrix} \phi dQ_0 - \psi_1 dQ_1 - \psi_2 dQ_2 - \psi_3 dQ_3 \\ \psi_1 dQ_0 + \phi dQ_1 + \psi_3 dQ_2 - \psi_2 dQ_3 \\ \psi_2 dQ_0 - \psi_3 dQ_1 + \phi dQ_2 + \psi_1 dQ_3 \\ \psi_3 dQ_0 + \psi_2 dQ_1 - \psi_1 dQ_2 + \phi dQ_3 \end{bmatrix}^T \right\} = \quad (2.2.36)$$

$$= \int_{\partial\sigma} (dQ)F = \int_{\sigma} \text{div}(M)dV. \quad (2.2.37)$$

Portanto,

$$\int_{\partial\sigma} (dQ)F = \int_{\sigma} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial w} - \frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \frac{\partial\psi_2}{\partial y} - \frac{\partial\psi_3}{\partial z} \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial w} + \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\psi_3}{\partial y} - \frac{\partial\psi_2}{\partial z} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial w} - \frac{\partial\psi_3}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\psi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial\psi_3}{\partial w} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{bmatrix}^T \right\} dV. \quad (2.2.38)$$

é fácil verificar que o integrando de 2.2.38 é um vetor linha com as mesmas componentes do quatérnio $\Gamma F = (\frac{\partial}{\partial w} + \nabla)(\phi + \psi)$.

Vale portanto a igualdade (2.2.29).

²O teorema de Gauss para n dimensões é dado por:

$$\int \int \int \cdots \int_D \left[\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\alpha_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial\alpha_n}{\partial x_n} \right] dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \quad (2.2.34)$$

$$\int \int \int \cdots \int_S [\alpha_1 dQ_1 + \alpha_2 dQ_2 + \cdots + \alpha_n dQ_n]. \quad (2.2.35)$$

Observação: Resultado análogo pode ser encontrado para FT.

Teorema 2.2.4 *Seja $F(q)$ uma função regular à direita (à esquerda) em um domínio D , então para qualquer hipersuperfície fechada $\partial\sigma$ em D ,*

$$\int_{\partial\sigma} F dQ = 0 \quad \left(\int_{\partial\sigma} dQ F = 0 \right). \quad (2.2.39)$$

Corolário 2.2.1 *Se $F(q)$ é regular à direita em D , e $G(q)$ é regular à esquerda em D , então para qualquer hipersuperfície fechada $\partial\sigma$ em D ,*

$$\int_{\partial\sigma} F dQ G = 0. \quad (2.2.40)$$

O resultado (2.2.40) pode ser considerado como o análogo do teorema da integral de Cauchy para quatérnios.

2.2.7 Fórmulas integrais de Cauchy-Fueter

Em duas dimensões a fórmula integral de Cauchy expressa o valor de uma função analítica em um ponto interior de um contorno fechado, em termos da integral de seus valores ao longo do contorno. Vamos agora enunciar um resultado análogo, porém mais “complexo”, para funções de quatérnios regulares em q .

Teorema 2.2.5 *Seja $\partial\sigma$ uma hipersuperfície fechada de $\mathbb{R}^4$ contendo o ponto q_0 . Então,*

$$\int_{\partial\sigma} \Delta_4(q - q_0)^n dQ = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 8\pi^2, & n = -1 \end{cases} \quad (2.2.41)$$

Teorema 2.2.6 *Seja $F(q)$ uma função regular em D . Se $\partial\sigma$ é uma hipersuperfície em D , envolvendo q_0 , então,*

$$F_{q_0} = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\partial\sigma} F(q) dQ \Delta(q - q_0)^{-1}. \quad (2.2.42)$$

O resultado (2.2.42) é o análogo quaterniônico da fórmula integral de Cauchy.

As demonstrações desses dois teoremas podem ser encontradas nas referências [20] e [26].

2.3 Métodos construtivos e “MB approach”

Vamos nessa seção enunciar quatro teoremas, cujas demonstrações podem ser encontradas na referência [42], que nos permitirão visualizar os conceitos de diferenciabilidade à esquerda e à direita, geometricamente, utilizando o conceito de integrabilidade de caminhos independentes em um domínio simplesmente conexo.

Teorema 2.3.1 *Seja $q = u_1 + iu_2 + ju_3 + ku_4 \in \mathbb{H}$. Para qualquer par de pontos a e b e qualquer caminho ligando-os em um subdomínio simplesmente conexo de um espaço qudridimensional, a integral $\int_a^b dqf$ sobre o anel dos quatérnios ($\mathbb{H}$), é independente do caminho dado se e somente se, existe uma função $G = G_1 + iG_2 + jG_3 + kG_4$, tal que $\int_a^b dqf = G(b) - G(a)$ e suas derivadas parciais satisfazem as seguintes relações:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial u^1} &= \frac{\partial G_2}{\partial u^2} = \frac{\partial G_3}{\partial u^3} = \frac{\partial G_4}{\partial u^4}, \\ \frac{\partial G_2}{\partial u^1} &= -\frac{\partial G_1}{\partial u^2} = \frac{\partial G_3}{\partial u^4} = -\frac{\partial G_4}{\partial u^3}, \\ \frac{\partial G_3}{\partial u^1} &= -\frac{\partial G_1}{\partial u^3} = -\frac{\partial G_2}{\partial u^4} = \frac{\partial G_4}{\partial u^2}, \\ \frac{\partial G_4}{\partial u^1} &= -\frac{\partial G_1}{\partial u^4} = \frac{\partial G_2}{\partial u^3} = -\frac{\partial G_3}{\partial u^2}. \end{aligned} \quad (2.3.43)$$

Teorema 2.3.2 *Seja $q = u_1 + iu_2 + ju_3 + ku_4 \in \mathbb{H}$. Para qualquer par de pontos a e b e qualquer caminho ligando-os em um subdomínio simplesmente conexo de um espaço qudridimensional, a integral $\int_a^b fdq$ sobre o anel dos quatérnios ($\mathbb{H}$), é independente do caminho dado se e somente se, existe uma função $F = F_1 + iF_2 + jF_3 + kF_4$, tal que $\int_a^b fdq = F(b) - F(a)$ e suas derivadas parciais satisfazem as seguintes relações:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial u^1} &= \frac{\partial F_2}{\partial u^2} = \frac{\partial F_3}{\partial u^3} = \frac{\partial F_4}{\partial u^4}, \\ \frac{\partial F_2}{\partial u^1} &= -\frac{\partial F_1}{\partial u^2} = \frac{\partial F_3}{\partial u^4} = -\frac{\partial F_4}{\partial u^3}, \\ \frac{\partial F_3}{\partial u^1} &= -\frac{\partial F_1}{\partial u^3} = -\frac{\partial F_2}{\partial u^4} = \frac{\partial F_4}{\partial u^2}, \\ \frac{\partial F_4}{\partial u^1} &= -\frac{\partial F_1}{\partial u^4} = \frac{\partial F_2}{\partial u^3} = -\frac{\partial F_3}{\partial u^2}. \end{aligned} \quad (2.3.44)$$

Teorema 2.3.3 *Dada uma função $f(q)$ sobre o anel $\mathbb{H}$ dos quatérnios, com apropriadas funções coordenadas diferenciáveis satisfazendo as relações do teorema (2.3.2) e a função*

$h(q)$ definida em termos de $f(q)$ por,

$$h(q) = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial u^1} + \frac{\partial f_2}{\partial u^2} + \frac{\partial f_3}{\partial u^3} + \frac{\partial f_4}{\partial u^4} \right) + \right. \\ \mathbf{i} \left(\frac{\partial f_2}{\partial u^1} - \frac{\partial f_1}{\partial u^2} - \frac{\partial f_3}{\partial u^4} + \frac{\partial f_4}{\partial u^3} \right) + \\ \mathbf{j} \left(\frac{\partial f_3}{\partial u^1} - \frac{\partial f_1}{\partial u^3} + \frac{\partial f_2}{\partial u^4} - \frac{\partial f_4}{\partial u^2} \right) + \\ \left. \mathbf{k} \left(\frac{\partial f_4}{\partial u^1} - \frac{\partial f_1}{\partial u^4} - \frac{\partial f_2}{\partial u^3} + \frac{\partial f_3}{\partial u^2} \right) \right], \quad (2.3.45)$$

então $\int h(q) dq = f(q)$, e assim $h(q)$ deve ser tratada formalmente, como a derivada quaterniônica à esquerda de $f(q)$, e será denotada por,

$$h(q) = \frac{df_l(q)}{dq}. \quad (2.3.46)$$

Teorema 2.3.4 Dada uma função $f(q)$ sobre o anel $\mathbb{H}$ dos quatérnios, com apropriadas funções coordenadas diferenciáveis satisfazendo as relações do teorema (2.3.1) e a função $g(q)$ definida em termos de $f(q)$ por,

$$g(q) = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial g_1}{\partial u^1} + \frac{\partial g_2}{\partial u^2} + \frac{\partial g_3}{\partial u^3} + \frac{\partial g_4}{\partial u^4} \right) + \right. \\ \mathbf{i} \left(\frac{\partial g_2}{\partial u^1} - \frac{\partial g_1}{\partial u^2} + \frac{\partial g_3}{\partial u^4} - \frac{\partial g_4}{\partial u^3} \right) + \\ \mathbf{j} \left(\frac{\partial g_3}{\partial u^1} - \frac{\partial g_1}{\partial u^3} - \frac{\partial g_2}{\partial u^4} + \frac{\partial g_4}{\partial u^2} \right) + \\ \left. \mathbf{k} \left(\frac{\partial g_4}{\partial u^1} - \frac{\partial g_1}{\partial u^4} + \frac{\partial g_2}{\partial u^3} - \frac{\partial g_3}{\partial u^2} \right) \right], \quad (2.3.47)$$

então $\int dq g(q) = f(q)$, e assim $g(q)$ deve ser tratada formalmente, como a derivada quaterniônica à direita de $f(q)$, e será denotada por,

$$g(q) = \frac{df_r(q)}{dq}. \quad (2.3.48)$$

2.3.1 Transformações conformes em quatérnios

As relações (2.3.43) e (2.3.44) exercem em $\mathbb{H}$ um papel análogo ao das relações de Cauchy-Riemann em $\mathbb{C}$, e além disso já foi demonstrado em [37] e [44] que estas relações induzem transformações conformes num espaço euclidiano quadridimensional. Vamos enunciar o seguinte teorema, cuja demonstração se encontra nas duas referências citadas acima.

Teorema 2.3.5 *Sejam F e G duas superfícies quadridimensionais dadas por, $F(x, y, z, w) = 0$ e $G(x, y, z, w) = 0$, definidas sobre um espaço real euclidiano quadridimensional, e o conjunto de transformações de coordenadas,*

$$\xi = \Phi(x, y, z, w); \quad \eta = \Psi(x, y, z, w); \quad \mu = \chi(x, y, z, w); \quad \nu = \Gamma(x, y, z, w), \quad (2.3.49)$$

tal que as relações (2.3.43) se aplicam, então este conjunto de transformações de coordenadas definem uma transformação conforme.

Podemos interpretar o teorema (2.3.5) da seguinte forma:

Dados os vetores gradiente para os subespaços $F(x, y, z, w) = 0$ e $G(x, y, z, w) = 0$, em um ponto q de D , arbitrário, as transformações acima definidas preservam o ângulo entre estes vetores.

2.3.2 Relacionando o operador $\bar{\Gamma}$ com a derivada quaterniônica

Vamos considerar uma função coordenada $f : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, tal que,

$f(u^1, u^2, u^3, u^4) = f_1(u^1, u^2, u^3, u^4) + \mathbf{i}f_2(u^1, u^2, u^3, u^4) + \mathbf{j}f_3(u^1, u^2, u^3, u^4) + \mathbf{k}f_4(u^1, u^2, u^3, u^4)$, com $f_i : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}$, pelo menos duas vezes diferenciável (no sentido usual).

Aplicando o operador (2.2.21) sobre a função f , obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}f = & \left(\frac{\partial f_1}{\partial u^1} + \frac{\partial f_2}{\partial u^2} + \frac{\partial f_3}{\partial u^3} + \frac{\partial f_4}{\partial u^4} \right) + \\ & \mathbf{i} \left(\frac{\partial f_2}{\partial u^1} - \frac{\partial f_1}{\partial u^2} - \frac{\partial f_3}{\partial u^4} + \frac{\partial f_4}{\partial u^3} \right) + \\ & \mathbf{j} \left(\frac{\partial f_3}{\partial u^1} - \frac{\partial f_1}{\partial u^3} + \frac{\partial f_2}{\partial u^4} - \frac{\partial f_4}{\partial u^2} \right) + \\ & \mathbf{k} \left(\frac{\partial f_4}{\partial u^1} - \frac{\partial f_1}{\partial u^4} - \frac{\partial f_2}{\partial u^3} + \frac{\partial f_3}{\partial u^2} \right) = 4g(q). \end{aligned} \quad (2.3.50)$$

e

$$\begin{aligned} f\bar{\Gamma} = & \left(\frac{\partial g_1}{\partial u^1} + \frac{\partial g_2}{\partial u^2} + \frac{\partial g_3}{\partial u^3} + \frac{\partial g_4}{\partial u^4} \right) + \\ & \mathbf{i} \left(\frac{\partial g_2}{\partial u^1} - \frac{\partial g_1}{\partial u^2} + \frac{\partial g_3}{\partial u^4} - \frac{\partial g_4}{\partial u^3} \right) + \\ & \mathbf{j} \left(\frac{\partial g_3}{\partial u^1} - \frac{\partial g_1}{\partial u^3} - \frac{\partial g_2}{\partial u^4} + \frac{\partial g_4}{\partial u^2} \right) + \\ & \mathbf{k} \left(\frac{\partial g_4}{\partial u^1} - \frac{\partial g_1}{\partial u^4} + \frac{\partial g_2}{\partial u^3} - \frac{\partial g_3}{\partial u^2} \right) = 4h(q). \end{aligned} \quad (2.3.51)$$

Onde $h(q)$ e $g(q)$ são as derivadas quaterniônicas à esquerda e à direita respectivamente. Lembrando que

$$\Gamma\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}\Gamma = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial(u^j)^2} = \Delta_4, \quad (2.3.52)$$

vamos demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 2.3.6 *Sejam f e w duas funções quaterniônicas arbitrárias, cujas funções coordenadas são funções reais, e sejam h e g duas funções arbitrárias satisfazendo,*

$$h = \bar{\Gamma}f \quad , \quad g = w\bar{\Gamma}. \quad (2.3.53)$$

Se h e g são funções regulares à esquerda e à direita, respectivamente, então f e w são soluções das equações quadriharmônicas,

$$\Delta_4 f = 0 \quad , \quad \Delta_4 w = 0, \quad (2.3.54)$$

respectivamente.

Demonstração: Desde que $h = \bar{\Gamma}f$ e $g = w\bar{\Gamma}$, então

$$\Gamma h = \Gamma(\bar{\Gamma}f) = \bar{\Gamma}(\Gamma f) = \Delta_4 f = 0 \quad (2.3.55)$$

e

$$g\Gamma = (w\bar{\Gamma})\Gamma = (w\Gamma)\bar{\Gamma} = \Delta_4 f = 0. \quad (2.3.56)$$

Corolário 2.3.1 *Seja f uma função quaterniônica arbitrária com funções coordenadas reais. Se $f(q)$ é quadriharmônica, então $\bar{\Gamma}f$ é regular à esquerda em D , e $f\bar{\Gamma}$ é regular à direita em D . Além disso Γf e $f\Gamma$ são regulares à esquerda e à direita, respectivamente, em $\bar{D}$.*

Demonstração: $\Delta_4 f = 0$ implica que $\Gamma\bar{\Gamma}f = \bar{\Gamma}\Gamma f = f\bar{\Gamma}\Gamma = f\Gamma\bar{\Gamma} = 0$.

Corolário 2.3.2 *Seja f uma função quaterniônica quadriharmônica, regular à direita, com funções coordenadas reais, arbitrária, então $\bar{\Gamma}f$ é regular.*

Demonstração: Por hipótese $f\Gamma = 0 \Rightarrow \bar{\Gamma}f\Gamma = 0$,

daí, $\bar{\Gamma}f$ é regular à direita.

Também,

$$f\Gamma\bar{\Gamma} = \Gamma\bar{\Gamma}f = 0,$$

daí, $\bar{\Gamma}f$ é regular à esquerda.

Logo, $\bar{\Gamma}f$ é regular.

Corolário 2.3.3 *Seja f uma função quaterniônica quadriharmônica, regular à esquerda, com funções coordenadas reais, arbitrária, então $f\bar{\Gamma}$ é regular.*

Demonstração: Por hipótese $\Gamma f = 0 \Rightarrow \Gamma f\bar{\Gamma} = 0$,

daí, $f\bar{\Gamma}$ é regular à direita.

por outro lado,

$$\Gamma\bar{\Gamma}f = \bar{\Gamma}\Gamma f = f\bar{\Gamma}\Gamma = 0,$$

daí, $f\bar{\Gamma}$ é regular à esquerda.

Logo, $f\bar{\Gamma}$ é regular.

Os corolários acima fornecem-nos uma fórmula para a construção de funções regulares à esquerda, regulares à direita e também funções simplesmente regulares, da seguinte Maneira:

Aplicando o operador $\bar{\Gamma}$ à esquerda de uma função f quadriharmônica, obtemos uma função $g = \bar{\Gamma}f$, regular à esquerda. De forma análoga, aplicando o operador $\bar{\Gamma}$ à direita da função f , tal que f é quadriharmônica, obtemos uma função $g = f\bar{\Gamma}$, regular à direita.

Exemplo 2.3.1 *Dados,*

$$q = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4, \quad (2.3.57)$$

e

$$f = \frac{\bar{q}}{-2|q|^2}, \quad (2.3.58)$$

onde f é uma solução (fundamental) do operador quadriharmônico.

Aplicando o operador $\bar{\Gamma}$ à função f , obtemos uma função g tal que,

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}f = g = \frac{\partial f}{\partial x_1} - \Delta f = & \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} + \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \right] \\ & + i \left[-\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_3}{\partial x_4} - \frac{\partial f_4}{\partial x_3} \right] \\ & + j \left[-\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_2}{\partial x_4} + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f_4}{\partial x_2} \right] \\ & + k \left[-\frac{\partial f_1}{\partial x_4} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_2} + \frac{\partial f_4}{\partial x_1} \right]\end{aligned}\quad (2.3.59)$$

portanto,

$$\begin{aligned}g = & \frac{-3x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}{-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^3} + i \frac{8x_1x_2}{-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^3} \\ & + j \frac{8x_1x_3}{-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^3} + k \frac{8x_1x_4}{-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^3},\end{aligned}\quad (2.3.60)$$

$$e \Gamma g = \Gamma \bar{\Gamma} f = 0$$

Observação: A função g é uma função regular. Isto é devido ao fato de que a f em (2.3.58) é regular, isto é $f\Gamma = 0$ e $f\bar{\Gamma} = 0$, e pelo corolário (2.3.2), $f\bar{\Gamma}\Gamma = 0$.

2.4 Funções quaterniônicas e métricas riemanianas quadridimensionais

As teorias de funções pseudo analíticas ou funções analíticas generalizadas e transformações quase conformes são hoje teorias bem estruturadas na análise complexa. A discussão a fundo destes assuntos, está além do objetivo de nosso trabalho. Sugerimos as referências [3] e [55]. Uma extensão n -dimensional destas teorias pode ser encontrada em [40], [54] e [27], entre outros. Uma teoria de funções quase-conformes em $\mathbb{R}^n$ tem sido desenvolvida por Heinonem [32] e Heinonem e Koskela [33], e baseia-se em conceitos da teoria de medidas e integração, e no cálculo de formas diferenciais. No contexto da análise quaterniônica, Cerejeiras et All [17] demonstraram a existência de soluções homeomorfas locais para funções quaterniônicas, as quais estão relacionadas à solução das equações quaterniônicas de Beltrami.

Os autores Machado e Borges, introduziram na referência [45], uma teoria paralela, na qual é estabelecido o homeomorfismo,

$$\Lambda \left(\sum_{i=1}^4 dw_i dw_i \right) = ds^2 = \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta, \quad (2.4.61)$$

$$\Lambda = (\mu \bar{\mu})^{-1} > 0, \quad (2.4.62)$$

para métricas riemanianas³ (ou pseudo-riemanianas) em $\mathbb{R}^4$. A existência de tal homeomorfismo está relacionada à solubilidade de equações diferenciais quaterniônicas, as quais formam sistemas (generalizados) do tipo Beltrami. Machado e Borges introduziram ainda, o conceito de fatoração (em fatores quaterniônicos) de métricas riemanianas [45], conceito este estreitamente relacionado com os assuntos anteriormente citados.

Vamos, portanto, fazer uma breve introdução desse conceito.

Dada a forma diferencial,

$$ds^2 = G_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta, \quad (2.4.63)$$

ou

$$ds^2 = G_{11} du^1 du^1 + G_{22} du^2 du^2 + G_{33} du^3 du^3 + G_{44} du^4 du^4 + 2\{G_{12} du^1 du^2 + G_{13} du^1 du^3 + G_{14} du^1 du^4 + G_{23} du^2 du^3 + G_{24} du^2 du^4 + G_{34} du^3 du^4\}. \quad (2.4.64)$$

Vamos supor que possamos escrever a forma acima como um produto de fatores quaterniônicos do tipo,

$$ds^2 = (Adu^1 + Bdu^2 + Cdu^3 + Ddu^4)(\bar{A}du^1 + \bar{B}du^2 + \bar{C}du^3 + \bar{D}du^4), \quad (2.4.65)$$

onde A, B, C e D são tipo,

³Uma métrica riemaniana, em uma variedade diferenciável M , é uma lei que faz corresponder a cada ponto $p \in M$, uma forma bilinear, simétrica, positiva definida (produto interno), em $T_p M$ (espaço tangente a M no ponto p), de forma que, se $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $x(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, 0, \dots, 1, \dots, 0, 0)$, então, $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_q = g_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U , independentemente da escolha do sistema de coordenadas. Um espaço é denominado riemaniano se ds^2 é tal que:

$ds^2 = 0$; se $dx^i = 0$, e $ds^2 > 0$; se $dx^i \neq 0$.

$$Q = Q_1 + iQ_2 + jQ_3 + kQ_4, \quad (2.4.66)$$

$$\bar{Q} = Q_1 - iQ_2 - jQ_3 - kQ_4, \quad (2.4.67)$$

e cada Q_i é função das variáveis u^1, u^2, u^3 e u^4 .

Efetando o produto quaterniônico (2.4.65) e comparando com (2.4.64), é fácil ver que,

$$\begin{aligned} A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 &= G_{11}, \\ B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 + B_4^2 &= G_{22}, \\ C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 &= G_{33}, \\ D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + D_4^2 &= G_{44}, \\ A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + A_4B_4 &= G_{12}, \\ A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3 + A_4C_4 &= G_{13}, \\ A_1D_1 + A_2D_2 + A_3D_3 + A_4D_4 &= G_{14}, \\ B_1C_1 + B_2C_2 + B_3C_3 + B_4C_4 &= G_{23}, \\ B_1D_1 + B_2D_2 + B_3D_3 + B_4D_4 &= G_{24}, \\ C_1D_1 + C_2D_2 + C_3D_3 + C_4D_4 &= G_{34}, \end{aligned} \quad (2.4.68)$$

O sistema (2.4.68) é indeterminado, mas, no entanto, para a métrica euclidiana canônica, temos

$$ds^2 = g_{11}du^1du^1 + g_{22}du^2du^2 + g_{33}du^3du^3 + g_{44}du^4du^4, \quad (2.4.69)$$

o que nos dá uma possível (mas não única) fatoração do tipo,

$$A_1^2 = g_{11}, \quad B_2^2 = g_{22}, \quad C_3^2 = g_{33}, \quad D_4^2 = g_{44}, \quad (2.4.70)$$

e todos os outros coeficientes nulos.

Tomando uma função quaterniônica,

$$w = w_1 + iw_2 + jw_3 + kw_4, \quad (2.4.71)$$

de forma que cada w_i é uma função coordenada das variáveis reais u^1, u^2, u^3 e u^4 , e tomando também um fator de integração quaterniônica (à direita),

$$\mu = \mu_1 + i\mu_2 + j\mu_3 + k\mu_4, \quad (2.4.72)$$



de maneira que a diferencial dw satisfaz,

$$dw = (\sqrt{g_{11}}du^1 + \mathbf{i}\sqrt{g_{22}}du^2 + \mathbf{j}\sqrt{g_{33}}du^3 + \mathbf{k}\sqrt{g_{44}}du^4)\mu. \quad (2.4.73)$$

Desta forma, temos

$$dw d\bar{w} = d\bar{w} dw = \bar{\mu} ds^2 \mu = \bar{\mu} \mu ds^2. \quad (2.4.74)$$

Desde que a expressão (2.4.74) estabelece uma relação de equivalência entre duas primeiras formas diferenciais, se μ é um quatérnio constante, então w define uma aplicação conforme [3].

Podemos escrever as condições para a existência de tais relações homeomorfas na forma,

$$\Lambda dw d\bar{w} = \Lambda \left(\sum_{i=1}^4 dw_i dw_i \right) = ds^2, \quad (2.4.75)$$

$$\Lambda = (\mu \bar{\mu})^{-1}. \quad (2.4.76)$$

Da equação (2.4.73), temos,

$$\frac{\partial w}{\partial u^1} = \sqrt{g_{11}} \mu, \quad \frac{\partial w}{\partial u^2} = \sqrt{g_{22}} \mu \mathbf{i}, \quad \frac{\partial w}{\partial u^3} = \sqrt{g_{33}} \mu \mathbf{j}, \quad \frac{\partial w}{\partial u^4} = \sqrt{g_{44}} \mu \mathbf{k}, \quad (2.4.77)$$

mas,

$$\frac{\partial w}{\partial u^r} = \frac{\partial w_1}{\partial u^r} + \frac{\partial w_2}{\partial u^r} \mathbf{i} + \frac{\partial w_3}{\partial u^r} \mathbf{j} + \frac{\partial w_4}{\partial u^r} \mathbf{k}, \quad (2.4.78)$$

o que nos leva ao sistema ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u^1} &= \frac{\partial w_1}{\partial u^1} + \frac{\partial w_2}{\partial u^1} \mathbf{i} + \frac{\partial w_3}{\partial u^1} \mathbf{j} + \frac{\partial w_4}{\partial u^1} \mathbf{k} = \sqrt{g_{11}} (\mu_1 + \mathbf{i}\mu_2 + \mathbf{j}\mu_3 + \mathbf{k}\mu_4), \\ \frac{\partial w}{\partial u^2} &= \frac{\partial w_1}{\partial u^2} + \frac{\partial w_2}{\partial u^2} \mathbf{i} + \frac{\partial w_3}{\partial u^2} \mathbf{j} + \frac{\partial w_4}{\partial u^2} \mathbf{k} = \sqrt{g_{22}} \mathbf{i} (\mu_1 + \mathbf{i}\mu_2 + \mathbf{j}\mu_3 + \mathbf{k}\mu_4), \\ \frac{\partial w}{\partial u^3} &= \frac{\partial w_1}{\partial u^3} + \frac{\partial w_2}{\partial u^3} \mathbf{i} + \frac{\partial w_3}{\partial u^3} \mathbf{j} + \frac{\partial w_4}{\partial u^3} \mathbf{k} = \sqrt{g_{33}} \mathbf{j} (\mu_1 + \mathbf{i}\mu_2 + \mathbf{j}\mu_3 + \mathbf{k}\mu_4), \\ \frac{\partial w}{\partial u^4} &= \frac{\partial w_1}{\partial u^4} + \frac{\partial w_2}{\partial u^4} \mathbf{i} + \frac{\partial w_3}{\partial u^4} \mathbf{j} + \frac{\partial w_4}{\partial u^4} \mathbf{k} = \sqrt{g_{44}} \mathbf{k} (\mu_1 + \mathbf{i}\mu_2 + \mathbf{j}\mu_3 + \mathbf{k}\mu_4). \end{aligned} \quad (2.4.79)$$

Esse sistema resulta no seguinte conjunto de condições:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial w_1}{\partial u^1} &= \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial w_2}{\partial u^2} = \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial w_3}{\partial u^3} = \frac{1}{\sqrt{g_{44}}} \frac{\partial w_4}{\partial u^4}, \\ \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial w_2}{\partial u^1} &= -\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial w_1}{\partial u^2} = \frac{1}{\sqrt{g_{44}}} \frac{\partial w_3}{\partial u^4} = -\frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial w_4}{\partial u^3}, \\ \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial w_3}{\partial u^1} &= -\frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial w_1}{\partial u^3} = -\frac{1}{\sqrt{g_{44}}} \frac{\partial w_2}{\partial u^4} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial w_4}{\partial u^2}, \\ \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial w_4}{\partial u^1} &= -\frac{1}{\sqrt{g_{44}}} \frac{\partial w_1}{\partial u^4} = \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial w_2}{\partial u^3} = -\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial w_3}{\partial u^2}. \end{aligned} \quad (2.4.80)$$

Através de procedimento análogo, para um fator de integração à esquerda, geramos o conjunto de relações:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial w_1}{\partial u^1} &= \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial w_2}{\partial u^2} = \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial w_3}{\partial u^3} = \frac{1}{\sqrt{g_{44}}} \frac{\partial w_4}{\partial u^4}, \\
 \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial w_2}{\partial u^1} &= -\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial w_1}{\partial u^2} = -\frac{1}{\sqrt{g_{44}}} \frac{\partial w_3}{\partial u^4} = \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial w_4}{\partial u^3}, \\
 \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial w_3}{\partial u^1} &= -\frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial w_1}{\partial u^3} = \frac{1}{\sqrt{g_{44}}} \frac{\partial w_2}{\partial u^4} = -\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial w_4}{\partial u^2}, \\
 \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial w_4}{\partial u^1} &= -\frac{1}{\sqrt{g_{44}}} \frac{\partial w_1}{\partial u^4} = -\frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial w_2}{\partial u^3} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial w_3}{\partial u^2}.
 \end{aligned} \tag{2.4.81}$$

Na referência [45] está demonstrado que este processo pode ser estendido para métricas riemanianas que não estejam na forma canônica.

Demonstra-se também na referência [28], que se atribuímos os valores 1 ou -1 aos coeficientes da equação (2.4.70), os respectivos conjuntos de relações obtidos em (2.4.80) e (2.4.81), induzem transformações conformes num espaço euclidiano quadridimensional.

É fácil verificar ainda que para a métrica euclidiana canônica, temos

$\sqrt{g_{11}} = \sqrt{g_{22}} = \sqrt{g_{33}} = \sqrt{g_{44}} = 1$, e os sistemas (2.4.80) e (2.4.81) reduzem-se aos sistemas (2.3.43) e (2.3.44).

2.4.1 Sistemas do tipo Beltrami

Supondo que μ seja uma função escalar, pura, das coordenadas u^1, u^2, u^3 e u^4 , tal que, a equação (2.4.73) seja satisfeita, nesse caso, as igualdades (2.4.77) são válidas. Assim,

$$\frac{\partial w}{\partial u^1} = A_1 \mu, \quad \frac{\partial w}{\partial u^2} = B_2 \mu \mathbf{i}, \quad \frac{\partial w}{\partial u^3} = C_3 \mu \mathbf{j}, \quad \frac{\partial w}{\partial u^4} = D_4 \mu \mathbf{k}. \tag{2.4.82}$$

Subtraindo de ambos os lados, em cada uma das equações (2.4.82) a expressão à direita da igualdade e multiplicando-as respectivamente por $\frac{\partial w}{\partial u^2}, \frac{\partial w}{\partial u^1}, \frac{\partial w}{\partial u^4}, \frac{\partial w}{\partial u^3}$, obtemos o resultado,

$$\Omega w = B_2 \mathbf{i} \frac{\partial w}{\partial u^1} - A_1 \frac{\partial w}{\partial u^2} + C_3 \mathbf{j} \frac{\partial w}{\partial u^4} + D_4 \mathbf{k} \frac{\partial w}{\partial u^3} \tag{2.4.83}$$

Desde que $w = w_1 + w_2\mathbf{i} + w_3\mathbf{j} + w_4\mathbf{k}$, temos

$$\begin{aligned}\Omega w = & -[A_1 \frac{\partial w_1}{\partial u^2} + B_2 \frac{\partial w_2}{\partial u^1} + C_3 \frac{\partial w_3}{\partial u^4} + D_4 \frac{\partial w_4}{\partial u^3}] + \\ & \mathbf{i}[-A_1 \frac{\partial w_2}{\partial u^2} + B_2 \frac{\partial w_1}{\partial u^1} + C_3 \frac{\partial w_4}{\partial u^4} - D_4 \frac{\partial w_3}{\partial u^3}] + \\ & \mathbf{j}[-A_1 \frac{\partial w_3}{\partial u^2} - B_2 \frac{\partial w_4}{\partial u^1} + C_3 \frac{\partial w_1}{\partial u^4} + D_4 \frac{\partial w_2}{\partial u^3}] + \\ & \mathbf{k}[-A_1 \frac{\partial w_4}{\partial u^2} + B_2 \frac{\partial w_3}{\partial u^1} - C_3 \frac{\partial w_2}{\partial u^4} + D_4 \frac{\partial w_1}{\partial u^3}],\end{aligned}\quad (2.4.84)$$

o que nos leva ao sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned}A_1 \frac{\partial w_1}{\partial u^2} + B_2 \frac{\partial w_2}{\partial u^1} + C_3 \frac{\partial w_3}{\partial u^4} + D_4 \frac{\partial w_4}{\partial u^3} &= 0, \\ -A_1 \frac{\partial w_2}{\partial u^2} + B_2 \frac{\partial w_1}{\partial u^1} + C_3 \frac{\partial w_4}{\partial u^4} - D_4 \frac{\partial w_3}{\partial u^3} &= 0, \\ -A_1 \frac{\partial w_4}{\partial u^2} + B_2 \frac{\partial w_3}{\partial u^1} - C_3 \frac{\partial w_2}{\partial u^4} + D_4 \frac{\partial w_1}{\partial u^3} &= 0, \\ A_1 \frac{\partial w_3}{\partial u^2} + B_2 \frac{\partial w_4}{\partial u^1} - C_3 \frac{\partial w_1}{\partial u^4} - D_4 \frac{\partial w_2}{\partial u^3} &= 0,\end{aligned}\quad (2.4.85)$$

que, para a escolha $A_1 = B_2 = D_4 = 1$ e $C_3 = -1$, corresponde à definição (2.2.16) de regularidade à esquerda de Fueter, $\Gamma w = 0$. Isso mostra que a regularidade à esquerda (ou à direita) da teoria de Fueter é um caso especial desta teoria mais geral, e que, cada função regular à esquerda (ou à direita) da teoria de Fueter realiza o homeomorfismo (2.4.75) para uma certa função escalar μ , tal que $\mu = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$.

O sistema (2.4.85) pode ser considerado uma generalização, em quatro dimensões, do sistema bi-dimensional de Beltrami (1.9.114).

Capítulo 3

Novos resultados em análise quaterniônica

3.1 Classificação das possíveis fatorações da métrica euclidiana em fatores quaterniônicos

Neste capítulo pretendemos expor alguns resultados por nós obtidos, os quais são consequência da teoria estudada no capítulo anterior.

Em primeiro lugar vamos classificar as possíveis fatorações da métrica Euclidiana.

Vimos em (2.4.70) que ,

$$\sum_{i=1}^4 A_i^2 = G_{11}, \quad \sum_{i=1}^4 B_i^2 = G_{22}, \quad \sum_{i=1}^4 C_i^2 = G_{33}, \quad \sum_{i=1}^4 D_i^2 = G_{44}, \quad (3.1.1)$$

Vimos também em (2.4.69) que a expressão,

$$ds^2 = g_{11}du^1du^1 + g_{22}du^2du^2 + g_{33}du^3du^3 + g_{44}du^4du^4, \quad (3.1.2)$$

pode ser fatorada em fatores quaterniônicos, tais que

$$ds^2 = (Adu^1 + Bdu^2 + Cdu^3 + Ddu^4) \cdot (\bar{A}du^1 + \bar{B}du^2 + \bar{C}du^3 + \bar{D}du^4), \quad (3.1.3)$$

onde o ponto denota o produto quaterniônico.

Parte do nosso trabalho consistiu em verificar quantas e quais são as possíveis fatorações



para métricas euclidianas. Verificamos assim que o conjunto de equações (2.4.68) fornece-nos um total de $4!$ (24) possíveis fatorações, as quais são todas do tipo,

$$A_p^2 = G_{11}, \quad B_q^2 = G_{22}, \quad C_r^2 = G_{33}, \quad D_s^2 = G_{44}, \quad (3.1.4)$$

onde p, q, r e s assumem os valores 1, 2, 3 e 4 de tal maneira que

$$p \neq q, r, s; \quad q \neq p, r, s; \quad r \neq p, q, s; \quad s \neq r, p, q.$$

Sob tais condições o conjunto de equações (2.4.82) será dado por,

$$\frac{\partial w}{\partial u^1} = \alpha A_p; \quad \frac{\partial w}{\partial u^2} = \alpha B_q \mathbf{i}; \quad \frac{\partial w}{\partial u^3} = \alpha C_r \mathbf{j}; \quad \frac{\partial w}{\partial u^4} = \alpha D_s \mathbf{k}. \quad (3.1.5)$$

O que nos leva ao sistema de equações,

$$\frac{\partial w}{\partial u^1} - \alpha A_p = 0, \quad (3.1.6)$$

$$\frac{\partial w}{\partial u^2} - \alpha B_q \mathbf{i} = 0, \quad (3.1.7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial u^3} - \alpha C_r \mathbf{j} = 0, \quad (3.1.8)$$

$$\frac{\partial w}{\partial u^4} - \alpha D_s \mathbf{k} = 0. \quad (3.1.9)$$

Pré-multiplicando as equações (3.1.6), (3.1.7), (3.1.8) e (3.1.9) por $\frac{\partial w}{\partial u^2}$, $\frac{\partial w}{\partial u^1}$, $\frac{\partial w}{\partial u^4}$ e $\frac{\partial w}{\partial u^3}$, respectivamente e somando-as, obtemos

$$\begin{aligned} & \alpha B_q \mathbf{i} \frac{\partial w}{\partial u^1} - \alpha B_q \mathbf{i} \alpha A_p + \alpha A_p \frac{\partial w}{\partial u^2} - \alpha A_p \alpha B_q \mathbf{i} + \\ & \alpha D_s \mathbf{k} \frac{\partial w}{\partial u^3} - \alpha D_s \mathbf{k} \alpha C_r \mathbf{j} + \alpha C_r \mathbf{j} \frac{\partial w}{\partial u^4} - \alpha C_r \mathbf{j} \alpha D_s \mathbf{k} = 0. \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Desde que, $\mathbf{kj} = -\mathbf{i}$ e $\mathbf{jk} = \mathbf{i}$, a equação 3.1.10 pode ser escrita como,

$$B_q \mathbf{i} \frac{\partial w}{\partial u^1} - A_p \frac{\partial w}{\partial u^2} + \alpha D_s \mathbf{k} \frac{\partial w}{\partial u^3} + C_r \mathbf{j} \frac{\partial w}{\partial u^4} = 0, \quad (3.1.11)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & B_q \mathbf{i} \left(\frac{\partial w_1}{\partial u^1} + \mathbf{i} \frac{\partial w_2}{\partial u^1} + \mathbf{j} \frac{\partial w_3}{\partial u^1} + \mathbf{k} \frac{\partial w_4}{\partial u^1} \right) \\ & - A_p \left(\frac{\partial w_1}{\partial u^1} + \mathbf{i} \frac{\partial w_2}{\partial u^1} + \mathbf{j} \frac{\partial w_3}{\partial u^1} + \mathbf{k} \frac{\partial w_4}{\partial u^1} \right) \\ & + C_r \mathbf{j} \left(\frac{\partial w_1}{\partial u^1} + \mathbf{i} \frac{\partial w_2}{\partial u^1} + \mathbf{j} \frac{\partial w_3}{\partial u^1} + \mathbf{k} \frac{\partial w_4}{\partial u^1} \right) \\ & + D_s \mathbf{k} \left(\frac{\partial w_1}{\partial u^1} + \mathbf{i} \frac{\partial w_2}{\partial u^1} + \mathbf{j} \frac{\partial w_3}{\partial u^1} + \mathbf{k} \frac{\partial w_4}{\partial u^1} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Aplicando as regras de multiplicação para quatérnios, vamos obter a equação abaixo, a qual nomearemos Ωw ,

$$\begin{aligned}\Omega w = & A_p \frac{\partial w_1}{\partial u^2} + B_q \mathbf{i} \frac{\partial w_2}{\partial u^1} + C_r \mathbf{j} \frac{\partial w_3}{\partial u^4} + D_s \mathbf{k} \frac{\partial w_4}{\partial u^3} \\ & - A_p \frac{\partial w_2}{\partial u^2} + B_q \mathbf{i} \frac{\partial w_1}{\partial u^1} + C_r \mathbf{j} \frac{\partial w_4}{\partial u^4} - D_s \mathbf{k} \frac{\partial w_3}{\partial u^3} \\ & - A_p \frac{\partial w_4}{\partial u^2} + B_q \mathbf{i} \frac{\partial w_3}{\partial u^1} - C_r \mathbf{j} \frac{\partial w_2}{\partial u^4} + D_s \mathbf{k} \frac{\partial w_1}{\partial u^3} \\ & A_p \frac{\partial w_3}{\partial u^2} + B_q \mathbf{i} \frac{\partial w_4}{\partial u^1} - C_r \mathbf{j} \frac{\partial w_1}{\partial u^4} - D_s \mathbf{k} \frac{\partial w_2}{\partial u^3} = 0.\end{aligned}\quad (3.1.13)$$

A partir daí, podemos gerar o seguinte sistema homogêneo de equações diferenciais parciais,

$$A_p \frac{\partial w_1}{\partial u^2} + B_q \frac{\partial w_2}{\partial u^1} + C_r \frac{\partial w_3}{\partial u^4} + D_s \frac{\partial w_4}{\partial u^3} = 0, \quad (3.1.14)$$

$$-A_p \frac{\partial w_2}{\partial u^2} + B_q \frac{\partial w_1}{\partial u^1} + C_r \frac{\partial w_4}{\partial u^4} - D_s \frac{\partial w_3}{\partial u^3} = 0, \quad (3.1.15)$$

$$-A_p \frac{\partial w_4}{\partial u^2} + B_q \frac{\partial w_3}{\partial u^1} - C_r \frac{\partial w_2}{\partial u^4} + D_s \frac{\partial w_1}{\partial u^3} = 0, \quad (3.1.16)$$

$$A_p \frac{\partial w_3}{\partial u^2} + B_q \frac{\partial w_4}{\partial u^1} - C_r \frac{\partial w_1}{\partial u^4} - D_s \frac{\partial w_2}{\partial u^3} = 0. \quad (3.1.17)$$

Atribuindo valores 1 e -1 para os coeficientes A_p , B_q , C_r e D_s , vamos obter para a métrica euclidiana canônica, 8 conjuntos de fatores distintos. Assim, para

$A_p = B_q = D_s = 1$, $C_r = -1$, temos

$$\Gamma_1 w = \Gamma w = \frac{\partial w}{\partial u^1} + \mathbf{i} \frac{\partial w}{\partial u^2} + \mathbf{j} \frac{\partial w}{\partial u^3} + \mathbf{k} \frac{\partial w}{\partial u^4} = 0 \quad (3.1.18)$$

ou,

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_2}{\partial u^1} + \frac{\partial w_1}{\partial u^2} - \frac{\partial w_3}{\partial u^4} + \frac{\partial w_4}{\partial u^3} &= 0, \\ \frac{\partial w_1}{\partial u^1} - \frac{\partial w_2}{\partial u^2} - \frac{\partial w_3}{\partial u^3} - \frac{\partial w_4}{\partial u^4} &= 0, \\ \frac{\partial w_3}{\partial u^1} + \frac{\partial w_1}{\partial u^3} + \frac{\partial w_2}{\partial u^4} - \frac{\partial w_4}{\partial u^2} &= 0, \\ \frac{\partial w_4}{\partial u^1} + \frac{\partial w_1}{\partial u^4} - \frac{\partial w_2}{\partial u^3} + \frac{\partial w_3}{\partial u^2} &= 0.\end{aligned}\quad (3.1.19)$$

Observação: Note que $\Gamma_1 w = \Gamma w$ da teoria de Fueter.

Para,

$$A_p = B_q = D_s = C_r = 1,$$

$$\Gamma_2 w = \frac{\partial w}{\partial u^1} + i \frac{\partial w}{\partial u^2} + j \frac{\partial w}{\partial u^3} - k \frac{\partial w}{\partial u^4} = 0 \quad (3.1.20)$$

ou,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_2}{\partial u^1} + \frac{\partial w_1}{\partial u^2} + \frac{\partial w_3}{\partial u^4} + \frac{\partial w_4}{\partial u^3} &= 0, \\ \frac{\partial w_1}{\partial u^1} - \frac{\partial w_2}{\partial u^2} - \frac{\partial w_3}{\partial u^3} + \frac{\partial w_4}{\partial u^4} &= 0, \\ \frac{\partial w_3}{\partial u^1} + \frac{\partial w_1}{\partial u^3} - \frac{\partial w_2}{\partial u^4} - \frac{\partial w_4}{\partial u^2} &= 0, \\ \frac{\partial w_4}{\partial u^1} - \frac{\partial w_1}{\partial u^4} - \frac{\partial w_2}{\partial u^3} + \frac{\partial w_3}{\partial u^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

Para ,

$$A_p = B_q = C_r = 1, D_s = -1,$$

$$\Gamma_3 w = \frac{\partial w}{\partial u^1} + i \frac{\partial w}{\partial u^2} - j \frac{\partial w}{\partial u^3} - k \frac{\partial w}{\partial u^4} = 0 \quad (3.1.22)$$

ou,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_2}{\partial u^1} + \frac{\partial w_1}{\partial u^2} + \frac{\partial w_3}{\partial u^4} - \frac{\partial w_4}{\partial u^3} &= 0, \\ \frac{\partial w_1}{\partial u^1} - \frac{\partial w_2}{\partial u^2} + \frac{\partial w_3}{\partial u^3} + \frac{\partial w_4}{\partial u^4} &= 0, \\ \frac{\partial w_3}{\partial u^1} - \frac{\partial w_1}{\partial u^3} - \frac{\partial w_2}{\partial u^4} - \frac{\partial w_4}{\partial u^2} &= 0, \\ \frac{\partial w_4}{\partial u^1} - \frac{\partial w_1}{\partial u^4} + \frac{\partial w_2}{\partial u^3} + \frac{\partial w_3}{\partial u^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

Para ,

$$C_r = B_q = D_s = 1, A_p = -1,$$

$$\Gamma_4 w = \frac{\partial w}{\partial u^1} - i \frac{\partial w}{\partial u^2} + j \frac{\partial w}{\partial u^3} - k \frac{\partial w}{\partial u^4} = 0 \quad (3.1.24)$$

ou,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_2}{\partial u^1} - \frac{\partial w_1}{\partial u^2} + \frac{\partial w_3}{\partial u^4} + \frac{\partial w_4}{\partial u^3} &= 0, \\ \frac{\partial w_1}{\partial u^1} + \frac{\partial w_2}{\partial u^2} - \frac{\partial w_3}{\partial u^3} + \frac{\partial w_4}{\partial u^4} &= 0, \\ \frac{\partial w_3}{\partial u^1} + \frac{\partial w_1}{\partial u^3} - \frac{\partial w_2}{\partial u^4} + \frac{\partial w_4}{\partial u^2} &= 0, \\ \frac{\partial w_4}{\partial u^1} - \frac{\partial w_1}{\partial u^4} - \frac{\partial w_2}{\partial u^3} - \frac{\partial w_3}{\partial u^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

Para ,

$$A_p = B_q = 1, C_r = D_s = -1,$$

$$\Gamma_5 w \frac{\partial w}{\partial u^1} + i \frac{\partial w}{\partial u^2} - j \frac{\partial w}{\partial u^3} + k \frac{\partial w}{\partial u^4} = 0 \quad (3.1.26)$$

ou,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_2}{\partial u^1} + \frac{\partial w_1}{\partial u^2} - \frac{\partial w_3}{\partial u^4} - \frac{\partial w_4}{\partial u^3} &= 0, \\ \frac{\partial w_1}{\partial u^1} - \frac{\partial w_2}{\partial u^2} + \frac{\partial w_3}{\partial u^3} - \frac{\partial w_4}{\partial u^4} &= 0, \\ \frac{\partial w_3}{\partial u^1} - \frac{\partial w_1}{\partial u^3} + \frac{\partial w_2}{\partial u^4} - \frac{\partial w_4}{\partial u^2} &= 0, \\ \frac{\partial w_4}{\partial u^1} + \frac{\partial w_1}{\partial u^4} + \frac{\partial w_2}{\partial u^3} + \frac{\partial w_3}{\partial u^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

Para ,

$$D_s = B_q = 1, C_r = A_p = -1,$$

$$\Gamma_6 w = \frac{\partial w}{\partial u^1} - i \frac{\partial w}{\partial u^2} + j \frac{\partial w}{\partial u^3} + k \frac{\partial w}{\partial u^4} = 0 \quad (3.1.28)$$

ou,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_2}{\partial u^1} - \frac{\partial w_1}{\partial u^2} - \frac{\partial w_3}{\partial u^4} + \frac{\partial w_4}{\partial u^3} &= 0, \\ \frac{\partial w_1}{\partial u^1} + \frac{\partial w_2}{\partial u^2} - \frac{\partial w_3}{\partial u^3} - \frac{\partial w_4}{\partial u^4} &= 0, \\ \frac{\partial w_3}{\partial u^1} + \frac{\partial w_1}{\partial u^3} + \frac{\partial w_2}{\partial u^4} + \frac{\partial w_4}{\partial u^2} &= 0, \\ \frac{\partial w_4}{\partial u^1} + \frac{\partial w_1}{\partial u^4} - \frac{\partial w_2}{\partial u^3} - \frac{\partial w_3}{\partial u^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

Para ,

$$B_q = 1, C_r = A_p = D_s = -1$$

$$\Gamma_7 w = \frac{\partial w}{\partial u^1} - i \frac{\partial w}{\partial u^2} - j \frac{\partial w}{\partial u^3} + k \frac{\partial w}{\partial u^4} = 0 \quad (3.1.30)$$

ou,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_2}{\partial u^1} - \frac{\partial w_1}{\partial u^2} - \frac{\partial w_3}{\partial u^4} - \frac{\partial w_4}{\partial u^3} &= 0, \\ \frac{\partial w_1}{\partial u^1} + \frac{\partial w_2}{\partial u^2} + \frac{\partial w_3}{\partial u^3} - \frac{\partial w_4}{\partial u^4} &= 0, \\ \frac{\partial w_3}{\partial u^1} - \frac{\partial w_1}{\partial u^3} + \frac{\partial w_2}{\partial u^4} + \frac{\partial w_4}{\partial u^2} &= 0, \\ \frac{\partial w_4}{\partial u^1} + \frac{\partial w_1}{\partial u^4} + \frac{\partial w_2}{\partial u^3} - \frac{\partial w_3}{\partial u^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

Para ,

$$B_q = C_r = 1, A_p = D_s = -1$$

$$\Gamma_8 w = \frac{\partial w}{\partial u^1} - \mathbf{i} \frac{\partial w}{\partial u^2} - \mathbf{j} \frac{\partial w}{\partial u^3} - \mathbf{k} \frac{\partial w}{\partial u^4} = 0 \quad (3.1.32)$$

ou,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_2}{\partial u^1} - \frac{\partial w_1}{\partial u^2} + \frac{\partial w_3}{\partial u^4} - \frac{\partial w_4}{\partial u^3} &= 0, \\ \frac{\partial w_1}{\partial u^1} + \frac{\partial w_2}{\partial u^2} + \frac{\partial w_3}{\partial u^3} + \frac{\partial w_4}{\partial u^4} &= 0, \\ \frac{\partial w_3}{\partial u^1} - \frac{\partial w_1}{\partial u^3} - \frac{\partial w_2}{\partial u^4} + \frac{\partial w_4}{\partial u^2} &= 0, \\ \frac{\partial w_4}{\partial u^1} - \frac{\partial w_1}{\partial u^4} + \frac{\partial w_2}{\partial u^3} - \frac{\partial w_3}{\partial u^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.33)$$

Se compararmos os sistemas de equações (3.1.19) e (2.2.16), verificaremos que ambos são equivalentes. Note que, na teoria de Fueter, o sistema (2.2.16) é gerado por $\Gamma w = 0$ (condição de regularidade à esquerda). Podemos afirmar portanto que, a regularidade à esquerda da teoria de Fueter ($\Gamma w = 0$) é um caso especial de $\Omega w = 0$.

Comparando os oito sistemas de equações acima, verificamos as igualdades:

$$\Gamma_1 w = \bar{\Gamma}_8 w, \quad \Gamma_2 w = \bar{\Gamma}_7 w, \quad \Gamma_3 w = \bar{\Gamma}_6 w, \quad \Gamma_4 w = \bar{\Gamma}_5 w. \quad (3.1.34)$$

Assim como o operador de Fueter (Γ_1), todos os operadores Γ_i , $i = 2, 3, \dots, 8$, satisfazem a relação $\Gamma_i \bar{\Gamma}_i = \Delta_4$. É importante notar que, se tomarmos $u^3 = u^4 = 0$, os sistemas de equações gerados por $\Gamma_1 w, \Gamma_2 w, \Gamma_3 w$ e $\Gamma_5 w$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em duas dimensões.

Procedimento análogo para um fator de integração à direita, determina outros oito sistemas, os quais designaremos $w\Gamma_i$, $i = 1, 2, \dots, 8$, com $w\Gamma_1 = w\Gamma$ da teoria de Fueter.

3.2 Relações de conformidade

No capítulo anterior, vimos que é possível estabelecer relações homeomorfas entre $ds^2 = G_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$ e $\Lambda dw\bar{w}$, ($\Lambda = (\mu\bar{\mu})^{-1}$), gerando o conjunto de equações (2.4.80). Vimos também, na seção anterior, que para uma métrica euclidiana podemos obter oito conjuntos de fatores métricos atribuindo valores 1 e -1 às variáveis A_p, B_q, C_r e D_s .



Substituindo cada um desses conjuntos de fatores em (2.4.80) (lembrando que $A_p^2 = g_{11}$, $B_q^2 = g_{22}$, $C_r^2 = g_{33}$ e $D_s^2 = g_{44}$), vamos, como se espera, obter oito conjuntos de relações, distintos entre si. Um desses conjuntos de relações é (2.3.43), que é obtido para os valores $A_p = B_q = D_s = 1$ e $C_r = -1$, o qual, como já vimos, define relações de conformidade num espaço euclidiano quadridimensional. Procedendo de forma análoga, vamos atribuir valores 1 e -1 para os coeficientes A_p , B_q , C_r e D_s .

Assim, para

$$A_p = B_q = D_s = C_r = 1,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial u^1} &= \frac{\partial w_2}{\partial u^2} = \frac{\partial w_3}{\partial u^3} = \frac{\partial w_4}{\partial u^4}, \\ \frac{\partial w_2}{\partial u^1} &= -\frac{\partial w_1}{\partial u^2} = \frac{\partial w_3}{\partial u^4} = -\frac{\partial w_4}{\partial u^3}, \\ \frac{\partial w_3}{\partial u^1} &= -\frac{\partial w_1}{\partial u^3} = -\frac{\partial w_2}{\partial u^4} = \frac{\partial w_4}{\partial u^2}, \\ \frac{\partial w_4}{\partial u^1} &= -\frac{\partial w_1}{\partial u^4} = \frac{\partial w_2}{\partial u^3} = -\frac{\partial w_3}{\partial u^2}. \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

Para

$$A_p = B_q = D_s = 1 \text{ e } C_r = -1,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial u^1} &= \frac{\partial w_2}{\partial u^2} = -\frac{\partial w_3}{\partial u^3} = \frac{\partial w_4}{\partial u^4}, \\ \frac{\partial w_2}{\partial u^1} &= -\frac{\partial w_1}{\partial u^2} = \frac{\partial w_3}{\partial u^4} = \frac{\partial w_4}{\partial u^3}, \\ \frac{\partial w_3}{\partial u^1} &= \frac{\partial w_1}{\partial u^3} = -\frac{\partial w_2}{\partial u^4} = \frac{\partial w_4}{\partial u^2}, \\ \frac{\partial w_4}{\partial u^1} &= -\frac{\partial w_1}{\partial u^4} = -\frac{\partial w_2}{\partial u^3} = -\frac{\partial w_3}{\partial u^2}. \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

Para ,

$$A_p = B_q = C_r = 1, D_s = -1,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial u^1} &= \frac{\partial w_2}{\partial u^2} = \frac{\partial w_3}{\partial u^3} = -\frac{\partial w_4}{\partial u^4}, \\ \frac{\partial w_2}{\partial u^1} &= -\frac{\partial w_1}{\partial u^2} = -\frac{\partial w_3}{\partial u^4} = -\frac{\partial w_4}{\partial u^3}, \\ \frac{\partial w_3}{\partial u^1} &= -\frac{\partial w_1}{\partial u^3} = \frac{\partial w_2}{\partial u^4} = \frac{\partial w_4}{\partial u^2}, \\ \frac{\partial w_4}{\partial u^1} &= \frac{\partial w_1}{\partial u^4} = \frac{\partial w_2}{\partial u^3} = -\frac{\partial w_3}{\partial u^2}. \end{aligned} \quad (3.2.37)$$



Para ,

$$C_r = B_q = D_s = 1, A_p = -1,$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial w_1}{\partial u^1} &= \frac{\partial w_2}{\partial u^2} = \frac{\partial w_3}{\partial u^3} = \frac{\partial w_4}{\partial u^4}, \\ -\frac{\partial w_2}{\partial u^1} &= -\frac{\partial w_1}{\partial u^2} = \frac{\partial w_3}{\partial u^4} = -\frac{\partial w_4}{\partial u^3}, \\ -\frac{\partial w_3}{\partial u^1} &= -\frac{\partial w_1}{\partial u^3} = -\frac{\partial w_2}{\partial u^4} = \frac{\partial w_4}{\partial u^2}, \\ -\frac{\partial w_4}{\partial u^1} &= -\frac{\partial w_1}{\partial u^4} = \frac{\partial w_2}{\partial u^3} = -\frac{\partial w_3}{\partial u^2}. \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

Para ,

$$A_p = B_q = 1, C_r = D_s = -1,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial u^1} &= \frac{\partial w_2}{\partial u^2} = -\frac{\partial w_3}{\partial u^3} = -\frac{\partial w_4}{\partial u^4}, \\ \frac{\partial w_2}{\partial u^1} &= -\frac{\partial w_1}{\partial u^2} = -\frac{\partial w_3}{\partial u^4} = \frac{\partial w_4}{\partial u^3}, \\ \frac{\partial w_3}{\partial u^1} &= \frac{\partial w_1}{\partial u^3} = \frac{\partial w_2}{\partial u^4} = \frac{\partial w_4}{\partial u^2}, \\ \frac{\partial w_4}{\partial u^1} &= \frac{\partial w_1}{\partial u^4} = -\frac{\partial w_2}{\partial u^3} = -\frac{\partial w_3}{\partial u^2}. \end{aligned} \quad (3.2.39)$$

Para ,

$$D_s = B_q = 1, C_r = A_p = -1,$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial w_1}{\partial u^1} &= \frac{\partial w_2}{\partial u^2} = -\frac{\partial w_3}{\partial u^3} = \frac{\partial w_4}{\partial u^4}, \\ -\frac{\partial w_2}{\partial u^1} &= -\frac{\partial w_1}{\partial u^2} = \frac{\partial w_3}{\partial u^4} = \frac{\partial w_4}{\partial u^3}, \\ -\frac{\partial w_3}{\partial u^1} &= \frac{\partial w_1}{\partial u^3} = -\frac{\partial w_2}{\partial u^4} = \frac{\partial w_4}{\partial u^2}, \\ -\frac{\partial w_4}{\partial u^1} &= -\frac{\partial w_1}{\partial u^4} = -\frac{\partial w_2}{\partial u^3} = -\frac{\partial w_3}{\partial u^2}. \end{aligned} \quad (3.2.40)$$

Para ,

$$B_q = 1, C_r = A_p = D_s = -1,$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial w_1}{\partial u^1} &= \frac{\partial w_2}{\partial u^2} = -\frac{\partial w_3}{\partial u^3} = -\frac{\partial w_4}{\partial u^4}, \\ -\frac{\partial w_2}{\partial u^1} &= -\frac{\partial w_1}{\partial u^2} = -\frac{\partial w_3}{\partial u^4} = \frac{\partial w_4}{\partial u^3}, \\ -\frac{\partial w_3}{\partial u^1} &= \frac{\partial w_1}{\partial u^3} = \frac{\partial w_2}{\partial u^4} = \frac{\partial w_4}{\partial u^2}, \\ -\frac{\partial w_4}{\partial u^1} &= \frac{\partial w_1}{\partial u^4} = -\frac{\partial w_2}{\partial u^3} = -\frac{\partial w_3}{\partial u^2}. \end{aligned} \quad (3.2.41)$$

Para ,

$$B_q = C_r = 1, A_p = D_s = -1,$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial w_1}{\partial u^1} &= \frac{\partial w_2}{\partial u^2} = \frac{\partial w_3}{\partial u^3} = -\frac{\partial w_4}{\partial u^4}, \\ -\frac{\partial w_2}{\partial u^1} &= -\frac{\partial w_1}{\partial u^2} = -\frac{\partial w_3}{\partial u^4} = -\frac{\partial w_4}{\partial u^3}, \\ -\frac{\partial w_3}{\partial u^1} &= -\frac{\partial w_1}{\partial u^3} = \frac{\partial w_2}{\partial u^4} = \frac{\partial w_4}{\partial u^2}, \\ -\frac{\partial w_4}{\partial u^1} &= \frac{\partial w_1}{\partial u^4} = \frac{\partial w_2}{\partial u^3} = -\frac{\partial w_3}{\partial u^2}. \end{aligned} \quad (3.2.42)$$

É possível provar que cada um desses conjuntos define relações de conformidade [28].

3.3 Funções que satisfazem as relações de conformidade

Teorema 3.3.1 *Seja w uma função quaterniônica das coordenadas u^1, u^2, u^3, u^4 . Se w satisfaz as relações (3.2.36), então w é regular à esquerda no sentido de Fueter.*

Demonstração:

$$\Gamma w = \left(\frac{\partial}{\partial u^1} + \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial u^2} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial u^3} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial u^4} \right) w \quad (3.3.43)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial w_1}{\partial u^1} - \frac{\partial w_2}{\partial u^2} - \frac{\partial w_3}{\partial u^3} - \frac{\partial w_4}{\partial u^4} \\ &+ \mathbf{i} \left[\frac{\partial w_2}{\partial u^1} + \frac{\partial w_1}{\partial u^2} - \frac{\partial w_3}{\partial u^4} + \frac{\partial w_4}{\partial u^3} \right] \\ &+ \mathbf{j} \left[\frac{\partial w_3}{\partial u^1} + \frac{\partial w_1}{\partial u^3} + \frac{\partial w_2}{\partial u^4} - \frac{\partial w_4}{\partial u^2} \right] \\ &+ \mathbf{k} \left[\frac{\partial w_4}{\partial u^1} + \frac{\partial w_1}{\partial u^4} - \frac{\partial w_2}{\partial u^3} + \frac{\partial w_3}{\partial u^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.3.44)$$

Substituindo as relações (3.2.36), obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma w = & \frac{\partial w_1}{\partial u^1} - \frac{\partial w_1}{\partial u^1} + \frac{\partial w_1}{\partial u^1} - \frac{\partial w_1}{\partial u^1} \\ & + i \left[\frac{\partial w_2}{\partial u^1} - \frac{\partial w_2}{\partial u^1} - \frac{\partial w_2}{\partial u^1} + \frac{\partial w_2}{\partial u^1} \right] \\ & + j \left[\frac{\partial w_3}{\partial u^1} + \frac{\partial w_3}{\partial u^1} - \frac{\partial w_3}{\partial u^1} - \frac{\partial w_3}{\partial u^1} \right] \\ & + k \left[\frac{\partial w_4}{\partial u^1} - \frac{\partial w_4}{\partial u^1} + \frac{\partial w_4}{\partial u^1} - \frac{\partial w_4}{\partial u^1} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.3.45)$$

A recíproca nem sempre é verdadeira, o exemplo (2.3.1) é a contra-prova.

Teorema 3.3.2 *De forma análoga, para cada w satisfazendo qualquer uma das relações explicitadas na seção anterior [(3.2.35), (3.2.36), (3.2.37), (3.2.38), (3.2.39), (3.2.40), (3.2.41), (3.2.42)], existe um operador Γ_i , ($i = 1, 2, \dots, 8$), tal que $\Gamma_i w = 0$.*

As demonstrações para cada caso são análogas à demonstração do teorema 3.3.1.

3.4 Generalização

Neste ponto estamos aptos a enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3.4.1 *Dada uma função f , solução da equação*

$$\left[B_q \frac{\partial}{\partial u^1} \left(B_q \frac{\partial}{\partial u^1} \right) + A_p \frac{\partial}{\partial u^2} \left(A_p \frac{\partial}{\partial u^2} \right) + C_r \frac{\partial}{\partial u^4} \left(C_r \frac{\partial}{\partial u^4} \right) + D_s \frac{\partial}{\partial u^3} \left(D_s \frac{\partial}{\partial u^3} \right) \right] f = 0,$$

existe uma função quaterniônica g satisfazendo $g = \bar{\Omega} f$, tal que $\Omega g = 0$, sendo Ω o operador

$$\Omega = B_q i \frac{\partial}{\partial u^1} - A_p \frac{\partial}{\partial u^2} + C_r j \frac{\partial}{\partial u^4} + D_s k \frac{\partial}{\partial u^3}, \quad (3.4.46)$$

e sendo os fatores métricos A_p, B_q, C_r e D_s constantes ou funções das coordenadas obedecendo as relações de dependência

$$A_p = A_p(u^2), \quad B_q = B_q(u^1), \quad C_r = C_r(u^4), \quad D_s = D_s(u^3).$$

Demonstração: Dada a fatoração quaterniônica descrita em (2.4.65) para uma métrica riemaniana canônica, supõe-se que exista uma transformação w para $\mu = \alpha$, onde α é uma função escalar, pura, das coordenadas. Assim

$$dw = (\sqrt{g_{11}} du^1 + \sqrt{g_{22}} du^2 \mathbf{i} + \sqrt{g_{33}} du^3 \mathbf{j} + \sqrt{g_{44}} du^4 \mathbf{k}) \alpha, \quad (3.4.47)$$

com,

$$\frac{\partial w}{\partial u^1} = \alpha A_p, \quad \frac{\partial w}{\partial u^2} = \alpha B_q \mathbf{i}, \quad \frac{\partial w}{\partial u^3} = \alpha C_r \mathbf{j}, \quad \frac{\partial w}{\partial u^4} = \alpha D_s \mathbf{k}. \quad (3.4.48)$$

Portanto,

$$B_q \mathbf{i} \frac{\partial w}{\partial u^1} - A_p \frac{\partial w}{\partial u^2} + C_r \mathbf{j} \frac{\partial w}{\partial u^4} + D_s \mathbf{k} \frac{\partial w}{\partial u^3} = 0, \quad (3.4.49)$$

e das definições

$$\begin{aligned} \Omega &= B_q \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial u^1} - A_p \frac{\partial}{\partial u^2} + C_r \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial u^4} + D_s \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial u^3}, \\ \bar{\Omega} &= -B_q \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial u^1} - A_p \frac{\partial}{\partial u^2} - C_r \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial u^4} - D_s \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial u^3}, \end{aligned} \quad (3.4.50)$$

obtem-se as equações,

$$\begin{aligned} \Omega \bar{\Omega} &= B_q \frac{\partial}{\partial u^1} \left(B_q \frac{\partial}{\partial u^1} \right) + A_p \frac{\partial}{\partial u^2} \left(A_p \frac{\partial}{\partial u^2} \right) + C_r \frac{\partial}{\partial u^4} \left(C_r \frac{\partial}{\partial u^4} \right) + D_s \frac{\partial}{\partial u^3} \left(D_s \frac{\partial}{\partial u^3} \right) + \\ &\quad \mathbf{i} \left\{ A_p \frac{\partial B_q}{\partial u^2} \frac{\partial}{\partial u^1} - B_q \frac{\partial A_p}{\partial u^1} \frac{\partial}{\partial u^2} - C_r \frac{\partial D_s}{\partial u^4} \frac{\partial}{\partial u^3} + D_s \frac{\partial C_r}{\partial u^3} \frac{\partial}{\partial u^4} \right\} + \\ &\quad \mathbf{j} \left\{ A_p \frac{\partial C_r}{\partial u^2} \frac{\partial}{\partial u^4} + B_q \frac{\partial D_s}{\partial u^1} \frac{\partial}{\partial u^3} - C_r \frac{\partial A_p}{\partial u^4} \frac{\partial}{\partial u^2} - D_s \frac{\partial B_q}{\partial u^3} \frac{\partial}{\partial u^1} \right\} + \\ &\quad \mathbf{k} \left\{ A_p \frac{\partial D_s}{\partial u^2} \frac{\partial}{\partial u^3} - B_q \frac{\partial C_r}{\partial u^1} \frac{\partial}{\partial u^4} + C_r \frac{\partial B_q}{\partial u^4} \frac{\partial}{\partial u^1} - D_s \frac{\partial A_p}{\partial u^3} \frac{\partial}{\partial u^2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.4.51)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} \Omega &= B_q \frac{\partial}{\partial u^1} \left(B_q \frac{\partial}{\partial u^1} \right) + A_p \frac{\partial}{\partial u^2} \left(A_p \frac{\partial}{\partial u^2} \right) + C_r \frac{\partial}{\partial u^4} \left(C_r \frac{\partial}{\partial u^4} \right) + D_s \frac{\partial}{\partial u^3} \left(D_s \frac{\partial}{\partial u^3} \right) + \\ &\quad \mathbf{i} \left\{ -A_p \frac{\partial B_q}{\partial u^2} \frac{\partial}{\partial u^1} + B_q \frac{\partial A_p}{\partial u^1} \frac{\partial}{\partial u^2} - C_r \frac{\partial D_s}{\partial u^4} \frac{\partial}{\partial u^3} + D_s \frac{\partial C_r}{\partial u^3} \frac{\partial}{\partial u^4} \right\} + \\ &\quad \mathbf{j} \left\{ -A_p \frac{\partial C_r}{\partial u^2} \frac{\partial}{\partial u^4} + B_q \frac{\partial D_s}{\partial u^1} \frac{\partial}{\partial u^3} + C_r \frac{\partial A_p}{\partial u^4} \frac{\partial}{\partial u^2} - D_s \frac{\partial B_q}{\partial u^3} \frac{\partial}{\partial u^1} \right\} + \\ &\quad \mathbf{k} \left\{ -A_p \frac{\partial D_s}{\partial u^2} \frac{\partial}{\partial u^3} - B_q \frac{\partial C_r}{\partial u^1} \frac{\partial}{\partial u^4} + C_r \frac{\partial B_q}{\partial u^4} \frac{\partial}{\partial u^1} + D_s \frac{\partial A_p}{\partial u^3} \frac{\partial}{\partial u^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.4.52)$$

Quando os coeficientes A_p, B_q, C_r e D_s são constantes ou funções das coordenadas, a condição

$$\Omega\bar{\Omega} = \bar{\Omega}\Omega = B_q \frac{\partial}{\partial u^1} \left(B_q \frac{\partial}{\partial u^1} \right) + A_p \frac{\partial}{\partial u^2} \left(A_p \frac{\partial}{\partial u^2} \right) + C_r \frac{\partial}{\partial u^4} \left(C_r \frac{\partial}{\partial u^4} \right) + D_s \frac{\partial}{\partial u^3} \left(D_s \frac{\partial}{\partial u^3} \right), \quad (3.4.53)$$

é válida sempre que

$$A_p = A_p(u^2), \quad B_q = B_q(u^1), \quad C_r = C_r(u^4), \quad D_s = D_s(u^3). \quad (3.4.54)$$

A equação (3.4.53) pode ser vista neste caso, como uma generalização do operador quadri-harmônico.

Vamos denominar as funções que satisfazem a equação $\Omega f = 0$, por funções *para-regulares*, tendo em vista a similaridade com as equações que satisfazem a regularidade à esquerda da teoria de Fueter.

Desde que, para uma métrica euclidiana canônica quadridimensional, os fatores métricos são dados por 1 e -1 , a equação (3.4.53) se reduz nesse caso, ao operador quadri-harmônico usual, $\Omega\bar{\Omega} = \bar{\Omega}\Omega = \nabla^2$ (ou Δ_4).

Um fato extremamente importante a ser lembrado, é que, a regularidade à esquerda (direita) da teoria de Fueter, não inclui funções simples, tais como a função identidade, ou polinômios na variável q . É fácil verificar, no entanto, que a função identidade $f(q) = u^1 + iu^2 + ju^3 + ku^4$, é solução dos sistemas de equações (3.1.21), (3.1.27), (3.1.29), além disso, para $n \geq 2$, polinômios quaterniônicos q^n satisfazem,

$$\lim_{u_4 \rightarrow 0} (\Gamma_2(q^n)) = 0. \quad (3.4.55)$$

Polinômios de q sem a componente u_4 são chamados polinômios reduzidos de quatérnios, e podem ser relacionados (Erikson Bique e Leutwiler, [24]) com a métrica de Poincaré em três dimensões. Talvez, um trabalho interessante a ser desenvolvido, seria a discussão das consequências e aplicações desse fato.

Vamos considerar no teorema a seguir, não mais apenas quatérnios com coeficientes reais, e sim quatérnios onde um dos coeficientes é complexo, ou mais precisamente, imaginário puro.

Teorema 3.4.2 *Seja $G_r = i^n C_r$, $i = \sqrt{-1}$. Então dada uma função f , solução da equação*

$$\left[B_q \frac{\partial}{\partial u^1} \left(B_q \frac{\partial}{\partial u^1} \right) + A_p \frac{\partial}{\partial u^2} \left(A_p \frac{\partial}{\partial u^2} \right) + D_s \frac{\partial}{\partial u^3} \left(D_s \frac{\partial}{\partial u^3} \right) + G_r \frac{\partial}{\partial u^4} \left(G_r \frac{\partial}{\partial u^4} \right) \right] f = 0,$$

existe uma função quaterniônica h satisfazendo $h = \bar{\Omega}_G f$, tal que $\Omega_G h = 0$, sendo Ω_G o operador

$$\Omega_G = B_q \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial u^1} - A_p \frac{\partial}{\partial u^2} + D_s \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial u^3} + G_r \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial u^4},$$

e sendo os fatores métricos A_p, B_q, C_r e D_s constantes ou funções das coordenadas obedecendo as relações de dependência,

$$A_p = A_p(u^2), \quad B_q = B_q(u^1), \quad C_r = C_r(u^4), \quad D_s = D_s(u^3).$$

Demonstração: Dada a fatoração quaterniônica descrita em (2.4.65) para uma métrica pseudo-riemaniana, supõe-se que exista uma transformação w para $\mu = \alpha$, onde α é uma função escalar, pura, das coordenadas. Assim

$$dw = (\sqrt{g_{11}} du^1 + \sqrt{g_{22}} du^2 \mathbf{i} + \sqrt{g_{33}} du^3 i^n \mathbf{j} + \sqrt{g_{44}} du^4 \mathbf{k}) \alpha, \quad (3.4.56)$$

com,

$$\frac{\partial w}{\partial u^1} = \alpha A_p, \quad \frac{\partial w}{\partial u^2} = \alpha B_q \mathbf{i}, \quad \frac{\partial w}{\partial u^3} = \alpha i^n C_r \mathbf{j} = \alpha G_r \mathbf{k}, \quad \frac{\partial w}{\partial u^4} = \alpha D_s \mathbf{k}. \quad (3.4.57)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} B_q \mathbf{i} \frac{\partial w}{\partial u^1} - A_p \frac{\partial w}{\partial u^2} + i^n C_r \mathbf{j} \frac{\partial w}{\partial u^4} + D_s \mathbf{k} \frac{\partial w}{\partial u^3} = \\ B_q \mathbf{i} \frac{\partial w}{\partial u^1} - A_p \frac{\partial w}{\partial u^2} + G_r \mathbf{j} \frac{\partial w}{\partial u^4} + D_s \mathbf{k} \frac{\partial w}{\partial u^3} = 0, \end{aligned} \quad (3.4.58)$$

e das definições

$$\begin{aligned} \Omega_G &= B_q \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial u^1} - A_p \frac{\partial}{\partial u^2} + G_r \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial u^4} + D_s \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial u^3}, \\ \bar{\Omega}_G &= -B_q \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial u^1} - A_p \frac{\partial}{\partial u^2} - G_r \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial u^4} - D_s \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial u^3}, \end{aligned} \quad (3.4.59)$$



obtem-se as equações,

$$\begin{aligned} \Omega_G \bar{\Omega}_G = & B_q \frac{\partial}{\partial u^1} \left(B_q \frac{\partial}{\partial u^1} \right) + A_p \frac{\partial}{\partial u^2} \left(A_p \frac{\partial}{\partial u^2} \right) + G_r \frac{\partial}{\partial u^4} \left(G_r \frac{\partial}{\partial u^4} \right) + D_s \frac{\partial}{\partial u^3} \left(D_s \frac{\partial}{\partial u^3} \right) + \\ & \text{i} \left\{ A_p \frac{\partial B_q}{\partial u^2} \frac{\partial}{\partial u^1} - B_q \frac{\partial A_p}{\partial u^1} \frac{\partial}{\partial u^2} - G_r \frac{\partial D_s}{\partial u^4} \frac{\partial}{\partial u^3} + D_s \frac{\partial G_r}{\partial u^3} \frac{\partial}{\partial u^4} \right\} + \\ & \text{j} \left\{ A_p \frac{\partial G_r}{\partial u^2} \frac{\partial}{\partial u^4} + B_q \frac{\partial D_s}{\partial u^1} \frac{\partial}{\partial u^3} - G_r \frac{\partial A_p}{\partial u^4} \frac{\partial}{\partial u^2} - D_s \frac{\partial B_q}{\partial u^3} \frac{\partial}{\partial u^1} \right\} + \\ & \text{k} \left\{ A_p \frac{\partial D_s}{\partial u^2} \frac{\partial}{\partial u^3} - B_q \frac{\partial G_r}{\partial u^1} \frac{\partial}{\partial u^4} + G_r \frac{\partial B_q}{\partial u^4} \frac{\partial}{\partial u^1} - D_s \frac{\partial A_p}{\partial u^3} \frac{\partial}{\partial u^2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.4.60)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_G \Omega_G = & B_q \frac{\partial}{\partial u^1} \left(B_q \frac{\partial}{\partial u^1} \right) + A_p \frac{\partial}{\partial u^2} \left(A_p \frac{\partial}{\partial u^2} \right) + G_r \frac{\partial}{\partial u^4} \left(G_r \frac{\partial}{\partial u^4} \right) + D_s \frac{\partial}{\partial u^3} \left(D_s \frac{\partial}{\partial u^3} \right) + \\ & \text{i} \left\{ -A_p \frac{\partial B_q}{\partial u^2} \frac{\partial}{\partial u^1} + B_q \frac{\partial A_p}{\partial u^1} \frac{\partial}{\partial u^2} - G_r \frac{\partial D_s}{\partial u^4} \frac{\partial}{\partial u^3} + D_s \frac{\partial G_r}{\partial u^3} \frac{\partial}{\partial u^4} \right\} + \\ & \text{j} \left\{ -A_p \frac{\partial G_r}{\partial u^2} \frac{\partial}{\partial u^4} + B_q \frac{\partial D_s}{\partial u^1} \frac{\partial}{\partial u^3} + G_r \frac{\partial A_p}{\partial u^4} \frac{\partial}{\partial u^2} - D_s \frac{\partial B_q}{\partial u^3} \frac{\partial}{\partial u^1} \right\} + \\ & \text{k} \left\{ -A_p \frac{\partial D_s}{\partial u^2} \frac{\partial}{\partial u^3} - B_q \frac{\partial G_r}{\partial u^1} \frac{\partial}{\partial u^4} + G_r \frac{\partial B_q}{\partial u^4} \frac{\partial}{\partial u^1} + D_s \frac{\partial A_p}{\partial u^3} \frac{\partial}{\partial u^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.4.61)$$

Quando os coeficientes A_p, B_q, D_s e G_r são constantes ou funções das coordenadas, a condição

$$\begin{aligned} \Omega_G \bar{\Omega}_G = \bar{\Omega}_G \Omega_G = & B_q \frac{\partial}{\partial u^1} \left(B_q \frac{\partial}{\partial u^1} \right) + A_p \frac{\partial}{\partial u^2} \left(A_p \frac{\partial}{\partial u^2} \right) + \\ & D_s \frac{\partial}{\partial u^3} \left(D_s \frac{\partial}{\partial u^3} \right) + i^n C_r \frac{\partial}{\partial u^4} \left(i^n C_r \frac{\partial}{\partial u^4} \right), \end{aligned} \quad (3.4.62)$$

é válida sempre que

$$A_p = A_p(u^2), \quad B_q = B_q(u^1), \quad C_r = C_r(u^4), \quad D_s = D_s(u^3), \quad (3.4.63)$$

o que encerra a prova.

Resultado 3.4.1

Para n par, a equação (3.4.62) pode ser vista como uma generalização do operador quadri-harmônico,

$$\nabla^2 = \Omega_{i^n} \bar{\Omega}_{i^n} = \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{\partial}{\partial u^1} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{\partial}{\partial u^2} \right) + \frac{\partial}{\partial u^3} \left(\frac{\partial}{\partial u^3} \right) + \frac{\partial}{\partial u^4} \left(\frac{\partial}{\partial u^4} \right). \quad (3.4.64)$$

Resultado 3.4.2

Para n ímpar, a equação (3.4.62) pode ser vista como uma generalização do operador,

$$\square = \Omega_{i^n} \bar{\Omega}_{i^n} = \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{\partial}{\partial u^1} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{\partial}{\partial u^2} \right) + \frac{\partial}{\partial u^3} \left(\frac{\partial}{\partial u^3} \right) - \frac{\partial}{\partial u^4} \left(\frac{\partial}{\partial u^4} \right). \quad (3.4.65)$$

Ambos os operadores são obtidos tomando-se os fatores $A_p = \pm 1, B_q = \pm 1, C_r = \pm 1$, e $D_s = \pm 1$.

Resultado 3.4.3

Seja $w(q) = q^r = (u^1 + iu^2 + ju^3 + ku^4)^r$, com $u^1, u^2, u^3, u^4 \in \mathbb{R}$ e r inteiro, então, para n ímpar,

$$\Omega_G \bar{\Omega}_G(w(q)) = \Omega_{i^n} \bar{\Omega}_{i^n}(w(q)) = \left(\frac{\partial^2}{\partial (u^1)^2} + \frac{\partial^2}{\partial (u^2)^2} + \frac{\partial^2}{\partial (u^3)^2} - \frac{\partial^2}{\partial (u^4)^2} \right) w. \quad (3.4.66)$$

Efetuada o produto quaterniônico (3.4.68), verificamos os seguintes resultados,

para $r = 1$, $\Omega_i \bar{\Omega}_i(q) = 0$,

para $r = 2$,

$$w(q) = q^2 = [(u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^3)^2 - (u^4)^2] + 2iu^1u^2 + 2ju^1u^3 + 2ku^1u^4 = q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4, \quad (3.4.67)$$

e

$$\begin{aligned}
 \Omega_i \bar{\Omega}_i(q^2) = & \left(\frac{\partial^2}{\partial(u^1)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(u^2)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(u^3)^2} - \frac{\partial^2}{\partial(u^4)^2} \right) q_1 \\
 & + i \left(\frac{\partial^2}{\partial(u^1)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(u^2)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(u^3)^2} - \frac{\partial^2}{\partial(u^4)^2} \right) q_2 \\
 & + j \left(\frac{\partial^2}{\partial(u^1)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(u^2)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(u^3)^2} - \frac{\partial^2}{\partial(u^4)^2} \right) q_3 \\
 & + k \left(\frac{\partial^2}{\partial(u^1)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(u^2)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(u^3)^2} - \frac{\partial^2}{\partial(u^4)^2} \right) q_4 = 0.
 \end{aligned} \tag{3.4.68}$$

Para $2 < r \leq 12$, $w(q) = q^r$, tem-se

$$\lim_{u^4 \rightarrow 0} \Omega_i \bar{\Omega}_i(q^r) = 0. \tag{3.4.69}$$

É muito provável que o resultado (3.4.69) seja válido para qualquer r , mas, uma vez que não obtivemos ainda uma prova rigorosa, não temos essa garantia.

4.1 Fatoração hipercomplexa da métrica de Minkowski

4.1.1 Fatoração através do formalismo vierbahn

A teoria da relatividade de Einstein foi desenvolvida sobre um espaço gerado por 3 vetores do tipo espaço e um vetor do tipo tempo, chamado espaço-tempo de Minkowski, que é uma variedade "4a" diferencial. O fato de ser um espaço "4a" implica que leis físicas da física, podem ser expressadas de uma forma mais simples nesse espaço.

A métrica no espaço de Minkowski é dada por,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{4.1.1}$$

Capítulo 4

Aplicações

Na referência [45] Machado e Borges utilizam-se de fatorações da métrica riemaniana em fatores quaterniônicos, apresentadas no capítulo 3, para fatorar a métrica de Schwarzschild, que é uma métrica amplamente utilizada na teoria da relatividade geral. Nas referências [11] e [12] Machado, Borges e Godóy apresentam a fatoração da métrica de Robertson-Walker que é uma métrica de espaços curvos.

Aqui vamos mostrar, à luz da teoria estudada no capítulo anterior, que também a métrica de Minkowski, apesar de ser uma métrica pseudo-euclidiana, pode ser fatorada em fatores quaterniônicos.

4.1 Fatoração hipercomplexa da métrica de Minkowski

4.1.1 Fatoração através do formalismo vierbein

A teoria da relatividade de Einstein foi desenvolvida sobre um espaço gerado por 3 vetores do tipo espaço e um vetor do tipo tempo, chamado espaço tempo de Minkowski, que é uma variedade 'flat' diferenciável. O fato de ser um espaço "flat" implica que leis básicas da física, podem ser expressadas de uma forma mais simples nesse espaço.

A métrica no espaço de Minkowski é dada por,

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \quad (4.1.1)$$



onde

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.1.2)$$

A equação (4.1.1) é um caso especial da equação mais geral,

$$ds^2 = g_{nm}(x^i) dx^n dx^m, \quad (4.1.3)$$

a qual pode ser interpretada como sendo o intervalo entre dois eventos ocorrendo em (x, y, z) no tempo t , e em $(x + dx, y + dy, z + dz)$ no tempo $t + dt$, respectivamente. O ângulo entre as direções dx^n e dx^m , é obtido através da expressão,

$$\cos(dx^n, d\bar{x}^m) = \frac{g_{nm} dx^n d\bar{x}^m}{\sqrt{(ds)^2 (d\bar{s})^2}}. \quad (4.1.4)$$

A expressão 4.1.4 é de grande importância, uma vez que a norma no espaço de Minkowski não é induzida pelo produto interno usual. Isto significa que não podemos calcular o cosseno de um ângulo em função da norma euclidiana usual em $\mathbb{R}^4$.

Para proceder à fatoração da métrica de Minkowski, nós vamos tomar, $x = u^1$; $y = u^2$; $z = u^3$; $t = u^4$ e $c = \lambda$, onde t é o tempo, (x, y, z) as coordenadas espaciais e c é a constante velocidade da luz.

É possível passar de um sistema de referências definido pelos vetores $\vec{e}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) sobre V_4 , para um sistema de coordenadas x^α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$), através de certos operadores B_α^i . Tais operadores são conhecidos como sendo as componentes da "vierbein" ou tetradas B^i ($i = 1, 2, 3, 4$). Onde,

$$B^i = B_\alpha^i dx^\alpha, \quad B_\alpha^i = \frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}. \quad (4.1.5)$$

Seja T_p o espaço tangente a V_4 , no ponto p . Um deslocamento em T_p , é dado por

$$d\vec{p} = dx_\alpha \partial_\alpha, \quad (4.1.6)$$

onde,

$$\partial_\alpha = B_\alpha^i \vec{e}_i; \quad \| B_\alpha^i \| = \| B_i^\alpha \|^{-1}. \quad (4.1.7)$$



É bem conhecido que para a métrica de Minkowski, η_{ij} satisfaz,

$$\eta_{ij} = 1, \quad i = j = 1, 2, 3;$$

$$\eta_{ij} = -1, \quad i = j = 4;$$

$$\eta_{ij} = 0, \quad i \neq j;$$

Assim sob a transformação de Lorentz ($SO(1, 3)$) sobre T_p em um ponto $p \in V_4$, podemos escrever,

$$ds^2 = d\vec{p}^2 = B_\alpha^i B_\beta^j dx^\alpha dx^\beta \eta_{ij}. \quad (4.1.8)$$

Comparando com a equação (4.1.3), verificamos que

$$G_{\alpha\beta} = B_\alpha^i B_\beta^j \eta_{ij}. \quad (4.1.9)$$

Desde que

$$ds^2 = G_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (4.1.10)$$

para uma métrica dada por,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2. \quad (4.1.11)$$

obtemos

$$G_{\alpha\beta} = 0, \quad \text{if } \alpha \neq \beta \quad (4.1.12)$$

e consequentemente,

$$\begin{aligned} B_1^1 B_1^1 + B_1^2 B_1^2 + B_1^3 B_1^3 - B_1^4 B_1^4 &= G_{11}, \\ B_2^1 B_2^1 + B_2^2 B_2^2 + B_2^3 B_2^3 - B_2^4 B_2^4 &= G_{22}, \\ B_3^1 B_3^1 + B_3^2 B_3^2 + B_3^3 B_3^3 - B_3^4 B_3^4 &= G_{33}, \\ B_4^1 B_4^1 + B_4^2 B_4^2 + B_4^3 B_4^3 - B_4^4 B_4^4 &= G_{44}, \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

tomando

$$B_j^i B_j^i = 0, \text{ se } i \neq j,$$

$$\text{obtemos } B_i^i B_i^i = G_{ii} \cdot \eta_{ii}.$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} B_1^1 B_1^1 &= 1; \quad G_{11} = 1 \cdot \eta_{11} \\ B_2^2 B_2^2 &= 1; \quad G_{22} = 1 \cdot \eta_{22} \\ B_3^3 B_3^3 &= 1; \quad G_{33} = 1 \cdot \eta_{33} \\ B_4^4 B_4^4 &= c^2; \quad G_{44} = c^2 \cdot \eta_{44} = -c^2. \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

Uma possível solução para uma fatoração quaterniônica é dada por,

$$\begin{aligned} P &= 1 + 0i + 0j + 0k, \\ L &= 0 + 1i + 0j + 0k, \\ Q &= 0 + 0i + 1j + 0k, \\ U &= 0 + 0i + 0j + i c k. \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

onde $i = \sqrt{-1}$ e $i \neq i$.

Assim uma fatoração da métrica de Minkowski é dada por,

$$ds^2 = (Pdx + Ldy + Qdz + Udt)(\bar{P}dx + \bar{L}dy + \bar{Q}dz + \bar{U}dt), \quad (4.1.16)$$

onde a barra denota conjugação quaterniônica.

Uma tal fatoração da métrica de Minkowski permite-nos reescrever o sistema (3.1.14), cujas soluções geram transformações homeomorfas (locais).

4.2 Operador de Klein-Gordon

De acordo com o resultado (3.4.2), substituindo o conjunto de fatores métricos

$A_p = \pm 1, B_q = \pm 1, C_r = \pm 1, D_s = \pm 1$, na equação (3.4.62), obtemos para n ímpar, o operador,

$$\begin{aligned} \Omega_i \bar{\Omega}_i &= \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{\partial}{\partial u^1} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{\partial}{\partial u^2} \right) + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial u^3} \left(\frac{\partial}{\partial u^3} \right) - \frac{\partial}{\partial u^4} \left(\frac{\partial}{\partial u^4} \right), \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

o qual é sem dúvida um caso particular do operador

$$\Omega_{\frac{i}{c}} \bar{\Omega}_{\frac{i}{c}} = \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{\partial}{\partial u^1} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{\partial}{\partial u^2} \right) + \frac{\partial}{\partial u^3} \left(\frac{\partial}{\partial u^3} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial u^4} \left(\frac{\partial}{\partial u^4} \right), \quad (4.2.18)$$

obtido atribuindo-se os valores $A_p = B_q = D_s = 1$ e $C_r = \frac{1}{c}$ aos fatores métricos.

Fazendo,

$$u^1 = x, \quad u^2 = y, \quad u^3 = z, \quad u^4 = t, \quad (4.2.19)$$

na equação (4.2.18), obtemos a equação,

$$\Omega_{\frac{i}{c}} \bar{\Omega}_{\frac{i}{c}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (4.2.20)$$

O operador (4.2.18), é equivalente, a menos do sinal, ao operador $\square = -\Omega_{\frac{i}{c}} \bar{\Omega}_{\frac{i}{c}} = -\bar{\Omega}_{\frac{i}{c}} \Omega_{\frac{i}{c}}$, com a constante c sendo a velocidade da luz e a variável t denotando o tempo. Este operador é conhecido como *operador de Klein Gordon*, o qual permite-nos escrever a equação para um campo escalar ϕ , onde ϕ é uma partícula com massa (m), na forma,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + m^2 \right) \phi = \left(\Omega_{\frac{i}{c}} \bar{\Omega}_{\frac{i}{c}} + m^2 \right) \phi = 0. \quad (4.2.21)$$

Observação : Este mesmo resultado foi obtido por Calixto [14],[6], utilizando uma “complexificação” do operador Γ , a qual denominou Γ_c , dada por,

$$\Gamma_c = i \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial z} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (4.2.22)$$

4.3 Equação da onda

Uma equação muito utilizada na física, é a equação

$$v^2 \nabla^2 U - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad (4.3.23)$$

onde,

$v = v(x, y, z, t)$, é a velocidade de fase da onda, e

$U = U(x, y, z : t)$.

Esta equação é conhecida como a equação da onda.



Suponha que tomemos $v = 1$, constante, e atribuamos os seguintes valores aos fatores métricos (2.4.70):

$A_p = B_q = C_R = D_s = 1$. Podemos então reescrever a equação (3.4.62), para n ímpar,

$$\Omega_i \bar{\Omega}_i U = \left(B_q^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_p^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D_s^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + G_r^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U = 0. \quad (4.3.24)$$

Para $v \neq 1$, constante, e $A_p = B_q = D_s = 1$ e $C_r = \frac{1}{v}$, a equação (3.4.62), toma a forma

$$v^2 \left(\Omega_i \bar{\Omega}_i \right) U = v^2 \left(B_q^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_p^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D_s^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + G_r^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U = v^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U = 0. \quad (4.3.25)$$

Observação: Analisando a equação (4.3.24) à luz do resultado (3.4.3), podemos concluir que a função identidade $f(q) = q = x_1 + i x_2 + j x_3 + k x_4$, assim como o polinômio $q^2 = (x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2) + i(2x_1x_2) + j(2x_1x_3) + k(2x_1x_4)$, são soluções da equação da onda (4.3.24) quando a velocidade de fase é igual a 1. Além disso, para $3 \leq n \leq 12$, tem-se

$$\lim_{x_4 \rightarrow 0} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} \right) (q^n) = 0. \quad (4.3.26)$$

Quando tratamos de uma EDP linear, de segunda ordem, com n variáveis independentes $x_1, x_2, \dots, x_n$, tal que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial V}{\partial x_i} + cV + d = 0, \quad (4.3.27)$$

com a_{ij} , b_i , c e d funções de x_i , ($i = 1, 2, \dots, n$), podemos classifica-la em *elíptica*, *hiperbólica*, *parabólica* ou *ultra-hiperbólica*, através dos valores dos n autovalores da matriz

$A = [a_{ij}]$. Assim, se todos os autovalores são não nulos e têm o mesmo sinal, temos uma equação *elíptica*. Se todos os autovalores são não nulos, de mesmo sinal, excetuando um deles, temos uma equação *hiperbólica*. Se pelo menos um autovalor é nulo, temos uma equação *parabólica*, e finalmente, se temos pelo menos 2 autovalores positivos e dois negativos temos uma equação *ultra-hiperbólica*.

É imediato, portanto que, a equação de Laplace é do tipo *elíptica*, e as equações de campo escalar e da onda são equações *hiperbólicas*. As equações que temos trabalhado,



neste capítulo, são em geral da forma,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}, \quad a_{ij} = 0, \text{ se } i \neq j. \tag{4.3.28}$$

Pretendemos em trabalhos futuros, analisar o comportamento de possíveis soluções de equações do tipo,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial V}{\partial x_i} + cV + d = 0, \tag{4.3.29}$$

sob a luz desta teoria.



Conclusão Bibliográficas

O meu interesse pela análise quaterniônica foi despertado pela possibilidade de generalização de conceitos da análise complexa, e ao longo da realização da presente dissertação, meu interesse por esse apaixonante assunto só veio a crescer. Muito se tem estudado, nas últimas décadas, sobre este tema. A existência de soluções (locais ou globais) para EDP_s em variedades quaterniônicas não comutativas, por exemplo tem motivado nomes como Cerejeiras [17] e Lugojan [41], entre outros a desenvolver trabalhos de extensão e aplicação da teoria de quatérnios. No campo de aplicações dos resultados da análise quaterniônica, bons exemplos são os trabalhos de Alan Rose [48], sobre o uso de quatérnios no estudo da velocidade potencial em três dimensões e o trabalho de Tsalik [53], sobre o deslocamento elástico, expressado por funções quaterniônicas.

O leitor deve ter percebido, que em nenhum momento, utilizamos a expressão *função analítica*, para funções quaterniônicas, e sim a expressão *função regular*. Essa distinção entre duas expressões que em geral possuem o mesmo significado em domínios complexos, é devido ao fato do conceito de analiticidade em quatérnios ainda não estar totalmente estabelecido, uma vez que, embaraçosamente, a própria função identidade, não é regular sob a corrente teoria quaterniônica.

Muito embora a generalização $\Omega w = 0$ do operador de Fueter seja um avanço no sentido do desenvolvimento de uma teoria de funções quaterniônicas, temos a consciência que ainda não é a generalização “ideal”, uma vez que polinômios na variável quaterniônica q , de grau maior ou igual a 2 não satisfazem as condições de “para-regularidade”. Existe uma conexão, em domínios complexos, entre equações elípticas e hiperbólicas, a qual é desenvolvida sobre o conceito de analiticidade de funções, mais precisamente, sobre o conceito de integração de caminhos independentes. Pretendemos em trabalhos futuros, tentar avaliar as implicações destes conceitos em domínios quaterniônicos. Pretendemos ainda, estudar possíveis relações entre o resultado (3.4.3) e expansão de soluções de $\Omega_G \bar{\Omega}_G$ em séries de potência.



Referências Bibliográficas

- [1] Ávila, G., *Variáveis complexas e aplicações*, Livros técnicos e científicos, Rio de Janeiro, 1990.
- [2] Bers, L., *An outline of the theory of pseudoanalytic functions*, Bulletin of the American Mathematical Society, 62 : (4), (1956), 291-331.
- [3] Bers, L., *Quasiconformal mapping with applications to differential equations*, function theory and topology, Bulletin of the American Mathematical Society, 83: (6), (1977), 1083-1099.
- [4] Bieberbach, L., *Conformal mapping*, Chelsea, New York, 1953.
- [5] Boyer, C. B., *A history of mathematics*, John Wiley, New York, 1968.
- [6] Borges M. F., Calixto, A. P.; *On a Klein- Gordon-Dirac Operator*, XXV CNMAC, Nova Friburgo, 2002.
- [7] Borges, M. F., *Bianchi identities for $N=2$, $d=5$ Super-symmetric Yang-Mills Theory on the group-manifold*, Journal of Geometry and Physics, 20: (1996), 142-146.
- [8] Borges, M. F., *Geometrical Lagrangian for a supersymmetric Yang-Mills theory on the group-manifold*, Math. Phys. Anal. Geom. 5 (2002), nº 4, 307-318.
- [9] Borges M. F., Machado J. M., Carvalho T. M. M.; *Quaternionic factorization in Minkowski space*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 8:(2) 225-235 (2003).
- [10] Borges M. F., Machado J. M., Carvalho T. M. M.; *Quaternionic tetrad-factors in Minkowski space*, XXVI CNEMAC, São José do Rio Preto, pp. 411 (2003).



- [11] Borges M. F., Machado J. M., Godoy Júnior, Antenor, *Hypercomplex tetrad-factors in Robertson-Walker space*, XXVI CNEMAC, São José do Rio Preto, pp. 414 (2003).
- [12] Borges M. F., Machado J. M., Godoy Júnior, Antenor, *Quaternionic factors and Robertson-Walker metrics*, International journal of applied maths., (2003), artigo aceito para publicação.
- [13] Burrow, M., *Representation theory of finite groups*, Academic Press, New York, 1965.
- [14] Calixto, A. P., *Operador quaterniônico de Klein-Gordon-Dirac*, Dissertação de mestrado em matemática aplicada, Unesp (IBILCE), São José do Rio Preto, 2002.
- [15] Carvalho T. M. M., Borges M. F., Machado J. M.; *Regular-like functions derived from the four dimensional Euclidean metric*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 8: (2) 237-242 (2003).
- [16] Carmo M. P., *Geometria riemanniana*, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [17] Cerejeiras, P., Gürlebeck, K., Kähler, U., Malonek, H., *A quaternionic Beltrami-type equation and existence of local homeomorphic solutions*, Zeitschrift für analysis und ihre anwendungen, 20: (1), (2001), 17-34.
- [18] Courant and Hilbert, *Methods of mathematical physics*, John Wiley, New York, 1962.
- [19] Das, A., *The special Theory of Relativity (a mathematical exposition)*, Spriger-Verlag, New York, 1993.
- [20] Deavours, C.A., *The quaternionic calculus*, Amer. math. monthly 80 (1973), 995-1008.
- [21] DE Felice, F., & C. J. S. Clarke, *Relativity on Curved Manifolds*, Cambridge University Press, U.S.A., 1990.
- [22] Dixon, Geoffrey M., *Division algebras*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1994.
- [23] E. Lord, *Tensors, relativity and cosmology*, Mc-Graw Hill publishing Co., (1976).
- [24] Eriksson-Bique S. L.; Leutwiler, H.; *On modified quaternionic analysis in R^3* , Arch. Math., 70: 228-234, (1998).
- [25] Evgrafov, M., *Analitic functions*, Dover Publication, INC., New York, 1966.



- [26] Fueter, R., *Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta\phi = 0$ und $\Delta\Delta\phi = 0$ mit vier reellen Variablen*, *Comment. Math. Helv.*, 7: 307-330 (1935).
- [27] Gehring, F. W., *Quasiconformal mappings in space*, *Bulletin of the american mathematical society*, 69: (2), (1963), 146-164.
- [28] Godoy Júnior, A., *Relações de conformidade e fatorização em quatérnios*, Dissertação de mestrado, Unesp, São José do Rio Preto, 2003.
- [29] Gonçalves, A., *Introdução à álgebra*, IMPA, Rio de Janeiro, 1978.
- [30] Guggenheimer, H. W., *Differential geometry*, Dover Publications, New York, 1963.
- [31] Hans Stephani, *General relativity*, Cambridge University Press, Cambridge, 2st edition (1990).
- [32] Heinonem, J., Koskela, P., Shanmugalingam, N., Tyson, T., *Sobolev classes of Banach space-valued functions and quasiconformal mappings*, *Journal d'analyse mathématique*, 85: (2001), 87-139.
- [33] Heinonem, J., Koskela, P., *A_∞ condition for the jacobian of a quasi-conformal mapping*, *Proceedings of the american mathematical society*, 120:(2), (1994).
- [34] Henrici, P., *Applied and complex analysis*, John Wiley, New York, 1997.
- [35] John F., *Partial differential equations*, Heidelberg: Springer- Verlag, New York, 1981.
- [36] Joyce Dominic, *Hypercomplex algebraic geometry*, *The quaterly journal of mathematics*, 1998, 129-162.
- [37] Leal, J.M., *Mapeamentos conformes em funções hipercomplexas*, Dissertação de mestrado em matemática aplicada, Unesp (IBILCE), São José do Rio Preto, 2002.
- [38] Leal, J.M., *Restrições para a conformidade em mapeamentos hipercomplexos*, XXVI CNEMAC, São José do Rio Preto, p. 417, 2003.
- [39] Lichnerovicz, A., *Elementos de cálculo tensorial*, Max Leclerc et Cie, 3^a ed. , França, 1960.
- [40] Lowener, C., *On the conformal capacity in space*, *J. math. Mech.*, 8: (1959).



- [41] Lugojan, S., *Quaternionic derivability II*, Quaternionic structures in math. and physics, SISSA-Trieste, setembro 1994, 5-9.
- [42] Machado, J. M.; Borges, M. F.; *New Remarks on the Differentiability of hypercomplex functions*, International Journal of Applied Mathematics, 8:(1) 85-101 (2002).
- [43] Machado, J. M.; Borges, M. F.; *Hypercomplex functions and Conformal mappings*, International Journal of Applied Mathematics, 9:(1) 27-38 (2002).
- [44] Machado, J. M.; Borges, M. F.; *Quaternion differential operators and Fueter analyticity*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 3:(1) 63-70 (2002).
- [45] Machado, J. M.; Borges, M. F.; *Quaternion functions and four dimensional Riemannian metrics*, Communications in Applied Analysis, (2003), aceito para publicação.
- [46] Munkres, J. R., *Topology: a first course*, Prentice Hall, Inc, Englewood Cliffs. New Jersey, 1975.
- [47] Pernas, L., *Quaternionic structures in math. and physics*, SISSA-Trieste, setembro 1994, 5-9.
- [48] Rose, A., *On the use of a complex (quaternion) velocity potencial in three dimensions*, Comment. math. helv., 24 (1950) 135-148.
- [49] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 3st edition (1987).
- [50] Stephani, H., *General Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge, 2st edition (1990).
- [51] Steven, W., *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & sons, New York, 1972.
- [52] Sudbery, A., *Quaternionic analysis*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 85: (1979), 199-225.
- [53] Tsalik A., *quaternionic representation of 3D elastic and thermoelastic boundary problems*, Mathematical methods in the applied sciences, vol. 18, 697-708, 1995.
- [54] Väisälä, J., *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings*, Lecture notes in mathematics, (229): Springer-Verlag, (1971).

- [55] Vekua, I.N., *Generalized Analytic Functions*, International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, Pergamon Press, (1962).



