Universidade Estadual Paulista – UNESP
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – FEIS
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Controle Discreto com Modos Deslizantes em Sistemas Incertos com Atraso no Sinal de Controle

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista – UNESP/FEIS, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica, área de concentração em Controle e Automação.

por

Jean Marcos de Souza Ribeiro
Engenheiro Eletricista – FEIS/UNESP
Mestre em Engenharia Elétrica – FEIS/UNESP

Ilha Solteira, Agosto de 2006

Orientador: Prof. Dr. José Paulo Fernandes Garcia – FEIS/UNESP

unesp **UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Controle Discreto com Modos Deslizantes em Sistemas Incertos com Atraso no Sinal de Controle

AUTOR: JEAN MARCOS DE SOUZA RIBEIRO
ORIENTADOR: Prof. Dr. JOSE PAULO FERNANDES GARCIA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de DOUTOR em ENGENHARIA ELÉTRICA pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. JOSE PAULO FERNANDES GARCIA
DEE/ Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO M TEIXEIRA
DEE/ Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO
DEE/ Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. FUAD KASSAB JUNIOR
Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle - POLI/USP - São Paulo/SP

Prof. Dr. MARCO HENRIQUE TERRA
DEE/ Universidade de São Paulo - USP - São Carlos/SP

Data da realização: 30 de agosto de 2006.

Presidente da Comissão Examinadora
Prof. Dr. JOSE PAULO FERNANDES GARCIA

“Quando passares pelas águas, estarei contigo, e quando passares pelos rios, eles não te submergirá. Quando passares pelo fogo, não te queimarás, nem a chama arderá em ti. Pois eu sou o Senhor teu Deus o Santo de Israel, o teu Salvador... não temas!” (Isaías 43:1-2)

A Deus pelo seu imensurável amor e fidelidade, por ser minha retaguarda e meu lugar seguro e por dar sentido ao meu viver.

OFEREÇO

Aos meus pais, Ferrari e Flausina, pelo incentivo, força, apoio e, principalmente, pelo amor incondicional que me sustenta em cada momento de luta.

DEDICO

Agradecimentos

Toda minha força vem d'Ele e não teria sentido começar meus agradecimentos sem mencioná-lo: **Obrigado Deus!**

Aos meus pais que, com sabedoria e paciência, me dão força nos momentos de dificuldade, me ajudam em cada nova fase, novo passo, novo objetivo e que fazem minha vida valer a pena.

As minhas irmãs **Joice** e **Gisley**, pela força, amizade e carinho. Ao meu sobrinho Vitor que me dá ânimo só de estar por perto.

Ao meu orientador Prof. Dr. **José Paulo**, pela amizade, sabedoria, compreensão, educação, conselhos, enfim por todos anos de boa convivência, minha eterna gratidão.

A querida professora **Lizete**, que teve uma importante participação em minha formação desde os anos graduação e que acompanhou de perto todos meus passos no programa de pós-graduação, me ajudando, aconselhando e dando idéias no desenvolvimento do meu trabalho.

A minha namorada, pelo amor, paciência, apoio e força em minhas lutas.

Aos professores **Edvaldo** e **Marcelo** pelas importantes contribuições científicas e pela amizade fortalecida ao longo desses anos.

Aos técnicos **Adilson, Aderson, Chaves, Everaldo** e **Hidemassa**, que participaram sempre de todo desenvolvimento da pesquisa.

Minha gratidão também às professoras **Érica** e **Neusinha** pelas sugestões no trabalho.

A todos amigos do Laboratório de Controle e Automação da FEIS, com os quais pude compartilhar conhecimentos, idéias, boas risadas e amizades vedadeiras.

Finalmente à Capes pelo suporte financeiro e auxílios fornecidos durante a execução deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho apresenta três novas estratégias de controle discreto. O enfoque principal do trabalho foi dado ao Controle Discreto com Modos Deslizantes (CDMD) aplicados em sistemas que possuem atraso no processamento do sinal de controle. As novas estratégias de controle objetivam a elaboração de leis de fácil implementação prática e que ao mesmo tempo sejam robustas a incertezas da planta. Uma característica destas novas abordagens para controle discreto com atraso no tempo é a utilização de um Controle com Modos Deslizantes sem a necessidade de predição do sinal de controle. Os métodos de projeto propostos podem ser aplicados no controle de plantas estáveis ou instáveis com atraso no sinal de controle. Uma das estratégias foi elaborada para realizar controle apenas em sistemas discretos que não possuem atraso no sinal de controle, enquanto que as demais são utilizadas para controle em sistemas com atraso. São apresentadas simulações e resultados de implementações práticas, sobre uma planta estável de Controle Automático da Geração (CAG) e sobre um Sistema Pêndulo Invertido, que caracteriza bem uma planta instável. Os resultados comprovam a eficácia dos novos controladores.

ABSTRACT

This work presents three new strategies of discrete-time control. The main focus of the work was given to the Sliding Mode Control (SMC) applied in systems that present delay in the processing of the control sign. The new control strategies provide laws of control of easy practical implementation and that at the same time are robust to uncertainties of the plant. A characteristic of these new approaches, for discrete-time control with delay-time, is the use of a Sliding Mode Control without the need of prediction of the control signal. The proposed design methods can be applied in the control of stable or unstable plants, with delay in the control signal. One of the strategies was elaborated to accomplish control just in discrete-time system without delay-time in the control sign, while the others are used for control in systems with delay-time. Simulations and experimental results are shown on a stable plant of Automatic Generation Control (AGC) and on Inverted Pendulum System, that is an unstable plant. The results prove the controllers' effectiveness.

Lista de Figuras

2.1 A superfície deslizante é a intersecção das i-ésimas superfícies existentes. 21
2.2 Ilustração bidimensional do domínio do modo deslizante. 22
2.3 Diagrama de blocos do sistema em exemplo. 40
2.4 Controle descontínuo sem camada limite e com camada limite. 41
2.5 Trajetória dos estados e lei de controle sem usar camada limite. 41
2.6 Trajetória dos estados e lei de controle usando camada limite. 42
3.1 Diagrama de bloco descrevendo um típico sistema com atraso. 44
3.2 Diagrama de bloco descrevendo um típico sistema com atraso. 44
3.3 Estratégia de controle com preditor proposto por Smith. 45
3.4 Controle EV/MD para o sistema sem atraso - robustez. 49
3.5 Controle EV/MD para o sistema com atraso. 50
5.1 Sistema pêndulo invertido. 71
5.2 Equipamento utilizado para realização do controle sobre o sistema pêndulo invertido. 74
5.3 Representação esquemática do sistema pêndulo invertido com o dispositivo de controle 75
5.4 Representação em diagrama de blocos da simulação do pêndulo invertido utilizando CCMD. 76
5.5 CCMD realizado por um computador: simulações com período de amostragem de 0.001 seg. 76
5.6 CCMD realizado por um computador: simulações com período de amostragem de 0.065 seg. 77
5.7 Controlador contínuo emulado em um computador digital 77
5.8 CCMD realizado por um computador: resultados experimentais com período de amostragem de 0.001 seg. 78
5.9 CCMD realizado por um computador: resultados experimentais com período de amostragem de 0.01 seg. 78
5.10 Diagrama de blocos representando o procedimento para simulação do CDMD aplicado ao pêndulo invertido. 79
5.11 CDMD realizado por um computador digital: simulação com período de amostragem de 0.01 seg. 80
5.12 CDMD realizado por um computador digital: simulação com período de amostragem de 0.1 seg. 80
5.13 Controlador discreto implementado em um computador digital. 81
5.14 CDMD realizado por um computador: resultados experimentais com período de amostragem de 0.001 seg. 81
5.15 CDMD realizado por um computador: resultados experimentais com período de amostragem de 0.01 seg. 82
8.1a Planta, observador e lei de controle utilizando a estratégia CDMD-A. 98
8.1b Planta, observador e lei de controle utilizando a estratégia CDMD-B. 98
8.2 Planta do sistema de Controle de Geração. 98

8.3 Resposta do sistema com entrada atrasada h=0.15 seg e período de amostragem de 0.20 seg, utilizando o projeto contínuo convencional CEV-MD. 103

8.4 Resposta do sistema com CEV-MD, proposto no Capítulo 5 (equação 5.32), com entrada atrasada em h=0.15 seg e período de amostragem de 0.20 seg. 103

8.5 Resposta do sistema com CDMD-A, proposto no Capítulo 6 (equação 6.12), com entrada atrasada em h=0.15 seg e período de amostragem de 0.20 seg. 104

8.6 Resposta do sistema com CDMD-B, proposto no Capítulo 7 (equação 7.31), com entrada atrasada em h=0.15 seg e período de amostragem de 0.20 seg. 104

8.7 Representação em diagrama de blocos do sistema pêndulo invertido, controlado com CDMD, na presença de atraso do sinal de controle. 106

8.8 Resposta do sistema Pêndulo Invertido com CDMD, proposto no Capítulo 5 (equação 5.32), com atraso de 0.01 seg e período de amostragem de 0.06 seg. 106

8.9 Resposta do sistema Pêndulo Invertido com CDMD, proposto no Capítulo 5 (equação 5.32), com atraso de 0.04 seg e período de amostragem de 0.06 seg (instável). 107

8.10 Representação em diagrama de blocos do sistema pêndulo invertido, controlado com CDMD-A, na presença de atraso do sinal de controle. 108

8.11a Resposta do sistema Pêndulo Invertido com CDMD-A, proposto no Capítulo 6 (equação 6.12), com atraso de 0.01 seg e período de amostragem de 0.06 seg. 108

8.11b Resposta do sistema Pêndulo Invertido com CDMD-A, proposto no Capítulo 6 (equação 6.12), com atraso de 0.04 seg e período de amostragem de 0.06 seg. 109

8.12 Representação em diagrama de blocos do sistema pêndulo invertido, controlado com CDMD-B, na presença de atraso do sinal de controle e com incertezas. 110

8.13 Resposta do sistema Pêndulo Invertido com CDMD-B, proposto no Capítulo 7 (equação 7.31), com atraso de 0.01 seg e período de amostragem de 0.06 seg. 110

8.14 Resposta do sistema Pêndulo Invertido com CDMD-B, proposto no Capítulo 7 (equação 7.31), com atraso de 0.04 seg e período de amostragem de 0.06 seg. 111

8.15 Equipamento utilizado para realização da implementação prática dos controles sobre o sistema pêndulo invertido. 112

8.16 Esquema do sistema pêndulo invertido com o dispositivo de controle 113

8.17 Resposta do sistema Pêndulo Invertido com CDMD-A, com período de amostragem de 0.005 seg e atraso de 0.004 seg. Implementação através de computador. 114

8.18 Resposta do sistema Pêndulo Invertido com CDMD, com período de amostragem de 0.005 seg e atraso de 0.004 seg. Implementação através de computador. 114

8.19 Resposta do sistema Pêndulo Invertido com CDMD-A, com período de amostragem de 0.010 seg e atraso de 0.009 seg. Implementação através de computador. 115

8.20 Resposta do sistema Pêndulo Invertido com CDMD, com período de amostragem de 0.010 seg e atraso de 0.009 seg. Implementação através de computador. 115

8.21 Resposta do sistema Pêndulo Invertido com CDMD-B, com período de amostragem de 0.005 seg e atraso de 0.0025 seg. Implementação através de computador. 116

8.22 Resposta do sistema Pêndulo Invertido com CDMD-B, com período de amostragem de 0.010 seg e atraso de 0.005 seg. Implementação através de computador. 116

Lista de Símbolos e Abreviaturas

A/D	Conversor Analógico/Digital
B	Matriz de entrada
C	Matriz de saída
CAG	Controle Automático da Geração
CCMD	Controle Contínuo com Modos Deslizantes
CDMD	Controle Discreto com Modos Deslizantes
CEV	Controle com Estrutura Variável
CMD	Controle com Modos Deslizantes
D/A	Conversor Digital/Analógico
EDF	Equação Diferencial Funcional
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
EV	Estrutura Variável
FTMF	Função de Transferência de Malha Fechada
$f(t,x)$	Matriz de estados não-linear da planta
G	Planta
G_m	Modelo da Planta
grad	Gradiente
h	Atraso
K	Ganho escalar
m	Dimensão do vetor de entradas
MD	Modos Deslizantes
MIMO	Sistema com múltiplas entradas e múltiplas saídas
n	Dimensão do vetor de estados
p	Dimensão do vetor de saída
S	Ganhos da superfície de deslizamento

SAT	Sistemas com Atraso no Tempo
sgn	Função sinal
SISO	Sistema com uma entrada e uma saída
T_m	Modelo do Atraso
$u(t)$	Sinal de controle contínuo no tempo
u_{eq}	Controle equivalente
u_k	Sinal de controle discreto no tempo
$u_n^{\pm}$	Controle descontínuo
$V(t,x)$	Função de Lyapunov
$\hat{x}$	Vetor de estados estimado
$x(t)$	Estados da planta no sistema contínuo
x_k	Estados da planta no sistema discreto
y_k	Saída discreta
$y(t)$	Saída contínua
σ	Superfície de deslizamento contínua no tempo
α	Ganho escalar
Δf	Incertezas

Sumário

1. INTRODUÇÃO 13

2. CONTROLE COM ESTRUTURA VARIÁVEL E MODOS DESLIZANTES 18

2.1 Modelo do Sistema 19
2.1.1 Superfície de Deslizamento 19
2.1.2 Modos Deslizantes 20
2.1.3 Condições de Existência de um Modo Deslizante 21

2.2 O Método do Controle Equivalente 24

2.3 Redução de Ordem 26

2.4 Forma Regular 30

2.5 Projeto do Controlador 32

2.6 Sistemas Incertos e CEV/MD 35

2.7 Trepidação 38

2.8 Comentários 42

3. SISTEMAS COM ATRASO NO CONTROLE 43

3.1 Motivação e Apresentação do Problema sob o Enfoque CEV/MD 47

3.2 Comentários 50

4. OBSERVADORES DE ESTADO DE SISTEMAS INCERTOS COM ATRASO NO CONTROLE COM EV/MD 52

4.1 Projeto do Observador 55
4.1.1 Algoritmo para o Projeto do Observador Robusto 58

4.2 Comentários 60

5. UM NOVO CONTROLADOR COM MODOS DESLIZANTES DISCRETO NO TEMPO (CDMD) 61

5.1 Controle Contínuo com Modos Deslizantes (CCMD) 62
5.1.1 Projeto da Superfície de Deslizamento 63
5.1.2 Projeto da Lei de Controle Contínua 63

5.2 Nova Estratégia de Controle Discreto com Modos Deslizantes (CDMD) 65
5.2.1 Projeto da Superfície de Deslizamento 66
5.2.2 Projeto da Lei de Controle Discreta 66
5.2.3 Análise da Robustez da Estabilidade 69

5.3 O Modelo Pêndulo Invertido 71

5.4 Sistema Pêndulo Invertido com CMD 72

5.5 Simulações e Resultados Experimentais 74
5.5.1 Controle Contínuo com Modos Deslizantes (CCMD) 75
5.5.1.1 Simulações 75
5.5.1.2 Implementação prática 77
5.5.2 Controle Discreto com Modos Deslizantes (CDMD) 79
5.5.2.1 Simulações 79
5.5.2.2 Implementação prática 80
5.6 Comentários 82

6. CONTROLE DISCRETO COM MODOS DESLIZANTES PARA SISTEMAS COM ATRASO NO SINAL DE CONTROLE E SEM ESTIMATIVA DAS INCERTEZAS (CDMD-A) 84

6.1 Modelo Discreto com Atraso 84
6.2 Projeto da Superfície Deslizante Discreta 86
6.3 Projeto da Lei de Controle Discreta 87
6.4 Análise da Robustez da Estabilidade 87
6.5 Comentários 89

7. CONTROLE DISCRETO COM MODOS DESLIZANTES PARA SISTEMAS SEM E COM ATRASO NO SINAL DE CONTROLE E COM ESTIMADOR DE INCERTEZAS (CDMD-B) 90

7.1 Controle Discreto com Modos Deslizantes (CDMD-B) sem atraso no sinal de controle .. 90
7.1.1 Projeto da Superfície Deslizante Discreta 91
7.1.2 Projeto da Lei de Controle Discreta 91
7.2 Controle Discreto com Modos Deslizantes (CDMD-B) com Atraso no Sinal de Controle 93
7.2.1 Projeto da Superfície Deslizante Discreta 94
7.2.2 Projeto da Lei de Controle Discreta 95
7.3 Comentários 96

8. RESULTADOS: SIMULAÇÕES DOS CONTROLES CDMD, CDMD-A E CDMD-B APLICADOS A UMA PLANTA ESTÁVEL E UMA INSTÁVEL, E IMPLEMENTAÇÕES DOS CONTROLADORES SOBRE O SISTEMA PÊNDULO INVERTIDO 97

8.1 Simulações do CDMD, CDMD-A e CDMD-B, Aplicados a uma Planta Estável: Controle Automático de Geração (CAG) com Entrada Atrasada 97
8.1.1 Sistema CAG com Projeto Contínuo Convencional CEV-MD 100
8.1.2 Sistema CAG com o Novo Projeto CDMD 101
8.1.3 Sistema CAG com o Novo Projeto CDMD-A 101
8.1.4 Sistema CAG com o Novo Projeto CDMD-B 102
8.2 Simulações do CDMD, CDMD-A e CDMD-B, Aplicados a uma Planta Instável: Modelo Pêndulo Invertido com Entrada Atrasada 105
8.2.1 Sistema Pêndulo Invertido com a Nova Estratégia CDMD 105
8.2.2 Sistema Pêndulo Invertido com a Nova Estratégia CDMD-A 107
8.2.3 Sistema Pêndulo Invertido com a Nova Estratégia CDMD-B 109
8.3 Implementações do CDMD, CDMD-A e CDMD-B, Aplicados a uma Planta Instável: Modelo Pêndulo Invertido com Entrada Atrasada 112
8.3.1 Resultado da Implementação das Estratégias CDMD e CDMD-A 113
8.3.2 Resultado da Implementação da Estratégia CDMD-B 115

9. CONCLUSÕES 117
9.1 Conclusões Gerais 117
9.2 Trabalhos Publicados 118
9.3 Sugestões de Trabalhos 119
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 120

CAPÍTULO 1

1. INTRODUÇÃO

Há algumas décadas o estudo de sistemas dinâmicos com atraso no tempo tem sido foco de considerável atenção por parte de vários pesquisadores, que se sentiram atraídos pela busca de um melhor critério para análise e solução de problemas causados pelo atraso [1,2,3]. Esta concentração de esforços, na pesquisa de soluções de problemas para sistemas com atraso no tempo, é motivada pelo fato de que o fenômeno de atraso é encontrado em vários problemas da engenharia [4], e pode ser responsável pelo comprometimento do desempenho do controlador e, até mesmo, pode levar à instabilidade todo sistema controlado.

Sistemas com Atraso no Tempo (SAT) também são chamados de sistemas com tempo morto, sistemas hereditários ou equações com argumento divergentes. Eles pertencem a uma classe de equações diferenciais funcionais (EDFs) as quais são de dimensão infinita, ao invés de equações diferenciais ordinárias (EDOs). Muitas pesquisas estão sendo feitas sobre este tema [7]. O que pode motivar esse interesse e desenvolvimento tão contínuo? Quatro pontos podem dar uma possível explicação:

i) SAT é um problema aplicado: é bem conhecido que, junto com as expectativas crescentes de desempenhos dinâmicos, engenheiros precisam dos modelos do processo que se comportam mais próximo do real possível. Muitos processos incluem fenômenos com atraso no tempo na dinâmica interna deles. Por exemplo, Kolmanovskii e Myshkis [8] e Niculescu [9] dão exemplos de atraso em biologia, química, economia, mecânica, viscoelasticidade, física, fisiologia, dinâmica de

população e também em ciências da engenharia. Além disso, atuadores, sensores, redes de campo, que normalmente são envolvidas em *loops* de realimentação, introduzem tal atraso. Assim, eles são fortemente envolvidos em áreas de comunicação e tecnologia de informação. Então, o interesse para EDF contínua crescendo em todas as áreas científicas e, especialmente, em engenharia de controle.

ii) sistemas com atraso ainda não apresentam bom desempenho a muitos controladores clássicos: pode-se pensar que a aproximação mais simples consiste no método substituir o atraso por funções de dimensões finitas. Infelizmente, ignorar efeitos que são representados adequadamente por EDFs não é uma alternativa geral: a melhor situação (atrasos constantes e conhecidos), conduz ao mesmo grau de complexidade no projeto de controle. Casos críticos (atrasos com tempo variado, por exemplo), é potencialmente desastroso em termos de estabilidade e oscilações.

iii) Propriedades do atraso também trazem resultados surpreendentes já que vários estudos mostraram que a introdução voluntária de atraso também pode beneficiar o controle [7]. Por exemplo, para EDOs: amortecimento e estabilização [61].

iv) apesar de sua complexidade, SAT freqüentemente aparecem como simples modelos de dimensão infinita na área mais complexa de equações diferenciais parciais (EDP): como mencionado em Kolmanovskii e Myshkis [8], "normalmente não é difícil mostrar que o aparecimento do atraso em uma equação diferencial resulte de alguma simplificação essencial do modelo".

Em geral, os sistemas em malha fechada, com atrasos nas malhas, estão sujeitos a mais problemas de estabilidade do que os sistemas sem atrasos. Um atraso *h* é modelado pela função de transferência e^{-hs} [11], assim a equação característica do sistema terá coeficientes que dependem do atraso, podendo levar o sistema à instabilidade. Conhecendo-se exatamente o valor do atraso e tendo-se uma planta estável, Smith [14] propôs uma técnica, com preditor, capaz de suprir os efeitos causados pelo atraso e garantir a estabilidade do sistema atrasado podendo-se assim utilizar normalmente os controladores. Controladores baseados em preditores incluem um preditor para compensar o atraso, ou, pelo menos, minimizar seu efeito. Para o

projeto de um controlador baseado em preditor, o sistema com atraso pode ser transformado em um sistema livre de atraso na malha de controle, contudo o efeito do atraso estará presente no numerador da função de transferência em malha fechada, podendo assim alterar o desempenho de sistema [15,20]. Contudo, na prática, nem sempre é possível ter-se uma planta estável com valor conhecido do atraso no tempo.

O atraso está presente em vários sistemas dinâmicos devido a: i) utilização, na planta e/ou malha de controle, de dispositivos microprocessados, que necessitam de um tempo para o processamento de informações; ii) atraso no sistema de medição das variáveis de controle do sistema, e iii) própria natureza da planta, que pode apresentar atrasos embutidos em sua função de transferência. Vários exemplos de sistemas eletrônicos, biológicos, mecânicos, químicos, podem ser dados a respeito da presença de atraso em um sistema, por exemplo, sistemas de controle industrial através de dispositivos microprocessados, computação do sinal de controle, controle via rede, fenômenos de transporte, transmissão pneumática, canais de comunicação, processos químicos e térmicos, problemas de radiação etc [2]. Nestes sistemas, a saída não começará a responder a uma entrada antes de transcorrer o tempo de atraso [21].

Durante muito tempo as pesquisas, relacionadas ao controle de sistemas com atraso, sempre geravam trabalhos que abordavam a estratégia de preditores, derivados dos preditores de Smith, na tentativa de sanar os problemas de plantas instáveis e incertezas no atraso, exemplo disso é que vários trabalhos são encontrados na literatura com o título *"A new Smith Predictor..."*. Porém as malhas de controle propostas, embora apresentem bons resultados, nem sempre são de fácil implementação, por exemplo, Lee e Lee [2]; Mondié, Garcia e Lozano [23]. Este trabalho propõe uma solução simples e factível a este problema, através de um controlador robusto, que utiliza a estratégia de Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes (CEV-MD). O CEV/MD foi primeiramente proposto e elaborado nos anos 50, na União Soviética por Utkin e outros [5,6,7]. Basicamente, sistemas CEV-MD têm como principais características: robustez na estabilidade e no desempenho diante de determinadas classes de incertezas e não linearidades [10,12]. No entanto, tais características podem não existir em sistemas com atraso no sinal de controle, caso tais atrasos não sejam

considerados durante o projeto. Neste trabalho é proposta uma solução para o problema de atraso no sinal de controle gerado por um computador digital, através de um controlador com Modos Deslizantes.

Outro problema é o projeto de controladores capazes de minimizar os efeitos das incertezas. Muitos resultados podem ser encontrados na literatura, como a abordagem pela equação de Riccati [16,17,22], por *Linear Matrix Inequalities* – LMI [24,25,26] e o método *min-max* [27]. Essas abordagens não consideram uma compensação para a entrada com atraso. Em [28] investigou-se o problema de estabilização robusta para sistemas incertos com entradas com atraso usando a teoria de controle H_∞. Em [29,30] aplica-se a teoria de modos deslizantes em sistemas incertos com atraso no estado. Nos trabalhos apresentados em [31,32,33] aplica-se CEV/MD em sistemas com atraso no controle considerando somente o caso em que há acesso pleno aos estados.

Especificamente em CEV/MD, o problema do atraso é mais evidente, uma vez que este método utiliza uma lei de controle com chaveamento de alta velocidade para conduzir e manter a trajetória dos estados de uma planta em uma superfície específica escolhida no espaço de estados (chamada de superfície de deslizamento ou superfície de chaveamento). Este chaveamento depende dos estados atuais e é executado pelo sinal de controle. Se o efeito do atraso não for minimizado, o chaveamento poderá não direcionar a trajetória do sistema para a superfície de deslizamento planejada, podendo com isto levar o sistema à instabilidade. Para evitar que os efeitos do atraso interfiram de maneira mais acintosa na estrutura de controle, este trabalho propõe a não utilização da componente chaveada da estrutura de controle (CEV), que será substituída por um controle sem descontinuidade, tratando assim de um controlador apenas em Modos Deslizantes (MD).

Neste trabalho aborda-se o projeto de MD em sistemas incertos com atraso devido à computação do sinal de controle. Além da sistematização do projeto, algumas análises são feitas considerando observadores preditivos que também utilizam EV/MD.

Do Capítulo 2 ao 4 são apresentados análises e estratégias de CEV-MD para sistemas contínuo no tempo.

No Capítulo 2, são apresentados os aspectos mais relevantes de Sistemas com Controle de Estrutura Variável e Modos Deslizantes.

No Capítulo 3, descreve-se uma introdução sobre preditores de Smith e alguns conceitos relacionados a sistemas com atraso no sinal de controle. Também, neste capítulo, apresenta-se um exemplo numérico cujos resultados obtidos em simulações ilustram a importância de se considerar os atrasos na sistemática de projeto CEV/MD.

No Capítulo 4, é apresentado um observador proposto por Spurgeon e Davies [12,38], porém com uma abordagem que leva em consideração o atraso no tempo [21,61] e utiliza a estratégia CEV/MD.

A partir do Capítulo 5 são apresentadas as novas estratégias de Controle com Modos Deslizantes (CMD), considerando processamento digital e atraso no controle, além de incertezas na planta.

No Capítulo 5, é apresentado um novo controlador discreto no tempo, que leva em consideração o processamento digital, mas não leva em conta o atraso no sinal de controle [19,52]. Simulações e resultados de implementações deste controlador também são apresentados neste capítulo.

No Capítulo 6, é apresentado também um novo controlador discreto, com modos deslizantes, que leva em consideração, além do processamento digital, também o atraso no sinal de controle [30]. No Capítulo 7 é apresentado mais um controlador discreto, cuja estratégia é compensar os efeitos do atraso no sinal de controle e incertezas da planta, através de sua estimação.

Finalmente, no Capítulo 8 são apresentados os resultados finais de simulações e implementações em laboratório das três novas estratégias de controle discreto proposto neste trabalho. São mostrados os resultados de simulações do Controle Automático da Geração (CAG) e também resultados obtidos de simulações e implementações realizadas sobre o sistema pêndulo invertido.

No Capítulo 9 são dadas as conclusões finais e sugestões para próximos trabalhos.

CAPÍTULO 2

2. CONTROLE COM ESTRUTURA VARIÁVEL E MODOS DESLIZANTES

A característica de um sistema de Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes (CEV/MD) é uma lei de controle chaveada em alta velocidade, que ocorre quando o estado do sistema cruza certas superfícies descontínuas no espaço de estados. Essas superfícies são projetadas de forma que a dinâmica dos estados obedeça a um comportamento desejado quando em deslizamento. A estrutura de controle é usualmente não-linear e resulta em um sistema com estrutura variável que pode ser considerado como uma combinação de subsistemas, cada um com uma estrutura fixa e que opera em uma região específica do espaço de estados [5].

Assim, a estratégia de CEV/MD utiliza uma lei de controle chaveada para conduzir e manter a trajetória dos estados de uma planta em uma superfície específica (chamada superfície de deslizamento ou superfície de chaveamento), ou sobre a intersecção de todas as superfícies escolhidas no espaço de estados. Quando a trajetória dos estados atinge esta superfície e nela permanece, diz-se que o sistema está na condição de deslizamento ou em modo deslizante e, nesta situação, o comportamento do sistema sofre menor influência por parte de alterações paramétricas ou de distúrbios externos, o que dá a característica robusta ao sistema controlado.

A existência de um modo deslizante requer a estabilidade da trajetória de estado para a superfície de deslizamento. Uma lei de controle chaveada deve então ser

projetada para assegurar que a trajetória de estados se dirija à superfície de deslizamento (alcançabilidade) e nela permaneça durante todo o tempo subseqüente (atratividade) [6].

Assegurar a existência de um modo deslizante na superfície de deslizamento é um caminho necessário no projeto de CEV/MD. Projetar a dinâmica da superfície é um caminho complementar do problema.

Assim, são duas as etapas principais no projeto:

(a) Projeto de uma superfície de deslizamento, tal que a dinâmica da planta, quando em deslizamento, tenha uma trajetória desejada;

(b) Desenvolvimento de uma lei de controle tal que satisfaça as condições de existência e alcançabilidade ao modo deslizante.

2.1 Modelo do Sistema

Considera-se uma classe de sistemas não-linear no vetor de estado $x(t)$ e linear no vetor controle $u(t)$, da forma [34]

$$\dot{x}(t) = \hat{f}(t,x,u) = f(t,x)+B(t,x)u(t) \tag{2.1}$$

onde o vetor de estado $x \in \Re^n$, o vetor controle $u \in \Re^m$, $f(t,x) \in \Re^n$, e $B(t,\mathrm{x}) \in \Re^{\mathrm{n\times m}}$. Além disso, cada elemento de $f(t,x)$ e $B(t,x)$ são assumidos contínuos, com derivadas contínuas e limitadas com respeito à t e x.

2.1.1 Superfície de Deslizamento

A superfície de deslizamento ou superfície de chaveamento $\sigma(x)=0$ é um espaço fechado (n-m) dimensional em R^n, determinado pela intersecção de m superfícies de chaveamento de dimensão (n-m). As superfícies de chaveamento são

projetadas tal que o sistema, restrito a superfície $\sigma(x) = 0$, tenha comportamento desejado.

Seja a superfície de deslizamento definida por

$$\{ x(t) \mid \sigma\ (x(t)) = 0\ \}. \tag{2.2}$$

Cada entrada $u_i(t)$ do controle chaveado $u(t) \in \Re^m$ tem a forma

$$u_i(t, x) = \begin{cases} u_i^+(t, x) \text{ com } \sigma_i(x(t)) > 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad ,i = 1, \cdots, m \\ u_i^-(t, x) \text{ com } \sigma_i(x(t)) < 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

onde $\{ x(t) \mid \sigma_i\ (x(t)) = 0 \}$ é a i-ésima superfície de deslizamento associada com a superfície de deslizamento (2.2) de dimensão (*n*-*m*).

As superfícies de deslizamento são projetadas tais que a resposta do sistema restrito à $\{ x(t) \mid \sigma\ (x(t)) = 0\ \}$ tenha o comportamento desejado.

Considera-se neste trabalho, a superfície de deslizamento da forma

$$\{ x(t) \mid \sigma\ (x(t)) = S\, x(t) = 0\ \}\ , \tag{2.4}$$

em que S é chamada matriz da superfície de deslizamento, sendo $S \in \Re^{m x n}$.

Por simplicidade, a notação utilizada para designar a superfície de deslizamento será

$$\sigma\,(x(t)) = Sx(t) = 0\,. \tag{2.5}$$

2.1.2 Modos Deslizantes

Depois de projetada a superfície de deslizamento desejada, o próximo aspecto importante de CEV/MD é garantir a existência de um modo deslizante. Um modo deslizante existe se na vizinhança da superfície de deslizamento, $\sigma(x(t)) = 0$, a tangente ou vetor velocidade da trajetória de estado sempre está direcionado para superfície de deslizamento. Conseqüentemente, se a trajetória do estado intercepta a

superfície de deslizamento, o valor da trajetória de estado ou "ponto representativo" se mantém dentro de uma vizinhança ε de $\{x/\sigma(x)=0\}$. Se o modo deslizante existe em $\sigma(x)=0$, então $\sigma(x)$ é chamado superfície de deslizamento. Como visto na Figura 2.1, o modo deslizante não pode existir na i-ésima superfície deslizante $\sigma_i(x)=0$ separadamente, mas somente na intersecção de todas superfícies.

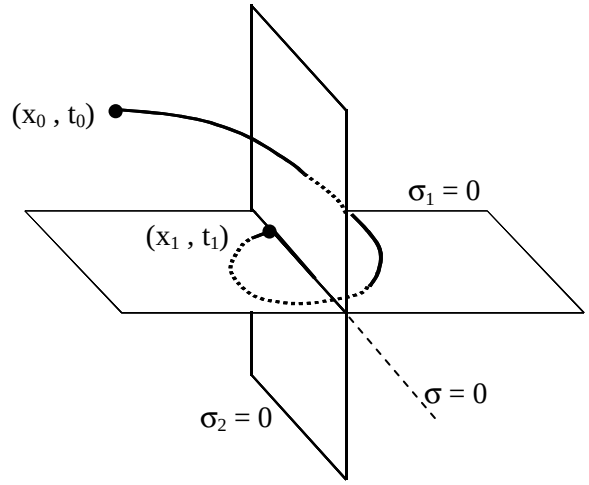

Figura 2.1 – A superfície deslizante é a intersecção das i-ésimas superfícies existentes.

Um modo deslizante ideal existe somente quando a trajetória de estado $x(t)$ da planta controlada satisfaz $\sigma(x(t))=0$ para todo $t \geq t_0$, para algum t_0. Isto requer chaveamentos infinitamente rápidos. Em sistemas reais, todas as funções com controle chaveados tem imperfeições tais como retardamento, histereses, etc., que forçam os deslizamentos ocorrerem em uma freqüência finita. A trajetória de estado então oscila em uma certa vizinhança da superfície de deslizamento. Esta oscilação é chamada trepidação. Portanto, o modo deslizante real não ocorre sobre as superfícies descontínuas, mas dentro de uma camada limite [5,6].

2.1.3 Condições de Existência de um Modo Deslizante

A existência de um modo deslizante requer estabilidade da trajetória para a superfície de deslizamento $\sigma(x(t))=0$, ou no mínimo para uma vizinhança desta, ou

seja, os estados devem aproximar-se da superfície assintoticamente. A maior vizinhança é chamada a região de atração. Geometricamente, o vetor tangente ou derivada no tempo do vetor de estado, deverá apontar para a superfície de deslizamento, na região de atração.

O problema de existência assemelha-se a um problema de estabilidade generalizada, então o segundo método de Lyapunov fornece um conjunto natural para a análise. Assim, a estabilidade para a superfície de deslizamento requer a seleção de uma função de Lyapunov generalizada $V(t,x)$ que é definida positiva e tem uma derivada negativa em relação ao tempo, na região de atração [34].

Definição 1: Um domínio D no espaço fechado $\sigma = 0$ é um domínio de modo deslizante se para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que qualquer movimento iniciado dentro de uma vizinhança δ de dimensão n de D pode deixar a vizinhança ε de dimensão n de D somente através da vizinhança ε de dimensão n da fronteira de D (Figura 2.2).

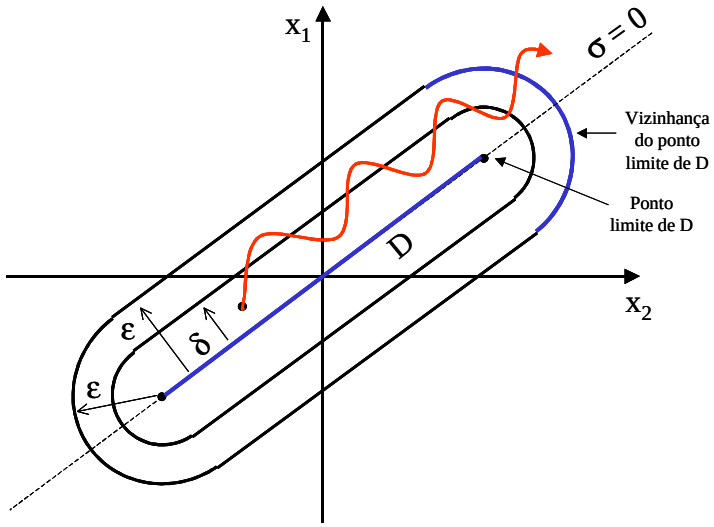

Figura 2.2 - Ilustração bidimensional do domínio do modo deslizante.

Teorema 2.1: Para o domínio D, de dimensão $(n-m)$ ser o domínio de um modo deslizante, é suficiente que, para $\Omega \supset \mathrm{D}$, de dimensão n, exista uma função $V(t,x,\sigma)$

diferenciável com respeito a todos os seus argumentos, satisfazendo as seguintes condições [5]:

(a) $V(t,x,\sigma)$ é definida positiva em relação à σ, isto é, $V(t,x,\sigma) > 0$ com $\sigma \neq 0$ e t, x arbitrários, $V(t,x,0) = 0$; e na esfera $\|\sigma\| = \rho$ para todo $x \in \Omega$ e algum t, tem-se:

$$\text{i)} \inf_{\|\sigma\|=\rho} V(t, x, \sigma) = h_p, \; h_p > 0 \tag{2.6}$$

$$\text{ii)} \sup_{\|\sigma\|=\rho} V(t, x, \sigma) = H_p, H_\rho > 0 \tag{2.7}$$

onde h_p e H_p dependem de ρ ($h_p \neq 0$ se $\rho \neq 0$).

(b) A derivada em relação ao tempo de $V(t,x,\sigma)$ para o sistema (2.1) tem um supremo negativo para todo $x \in \Omega$, exceto para x na superfície de deslizamento onde o controle na entrada não está definido, e por isso a derivada de $V(t,x,\sigma)$ não existe.

Nota 2.1: Um modo deslizante é globalmente alcançado se o domínio de atração é todo o espaço de estados. De outra forma o domínio de atração é um subconjunto do espaço de estado.

Considere o sistema de equação (2.1), com a notação

$$\dot{x}(t) = f(t, x, u) \tag{2.8}$$

e a seguinte estratégia geral de controle

$$u = \begin{cases} u^+(t, x) & \text{se} \quad \sigma(x) > 0 \\ u^-(t, x) & \text{se} \quad \sigma(x) < 0 \end{cases}. \tag{2.9}$$

De acordo com [35], as trajetórias de estado do sistema (2.8), com controle (2.9), na condição de deslizamento, $\sigma(x(t)) = 0$, são as soluções da equação

$$\dot{x}(t) = \alpha f^+ + (1-\alpha) f^- = f^0, \; 0 \leq \alpha \leq 1$$

onde $f^+ = f(t, x, u^+), \; f^- = f(t, x, u^-)$.

Resolvendo a equação $\left\langle \text{grad}\sigma, \text{f}^{0} \right\rangle = 0$ para α tem-se

$$\alpha = \frac{\left\langle \text{grad}\sigma, \text{f}^{-} \right\rangle}{\left\langle \text{grad}\sigma, (\text{f}^{-} - \text{f}^{+}) \right\rangle}.$$

Sendo:

(a) $\left\langle \text{grad}\sigma, \left(\text{f}^{-} - \text{f}^{+}\right) \right\rangle > 0$, e

(b) $\left\langle \text{grad}\sigma, \text{f}^{+} \right\rangle \leq 0$ e $\left\langle \text{grad}\sigma, \text{f}^{-} \right\rangle \geq 0$, em que a notação, $\left\langle \text{a}, \text{b} \right\rangle$, denota o produto interno entre a e b, também escrito como a.b, e $\text{grad}\,\sigma$ o gradiente de $\sigma(\text{x})$.

Assim, pode-se concluir que, a solução de (2.8) com controle (2.9) existe e é unicamente definida em $\sigma(\text{x(t)}) = 0$ [35]. Nota-se também que esta técnica pode ser usada para determinar o comportamento da planta no modo deslizante [34, 35].

O método de Filippov [35] apresentado resumidamente acima é uma técnica que torna possível a determinação do movimento de um sistema num modo deslizante. f^{0} representa a velocidade "média", $\dot{x}$, da trajetória de estado restrita à superfície de deslizamento. Uma outra técnica mais simples é o método do controle equivalente descrito a seguir.

2.2 O Método do Controle Equivalente

O método do controle equivalente [5, 34] é utilizado para determinar o movimento do sistema restrito à superfície de deslizamento $\sigma(\text{x(t)}) = 0$. Suponha que em t_0, a trajetória de estado da planta intercepta a superfície de deslizamento e um modo deslizante existe para $t \geq t_0$. A existência de um modo deslizante ideal implica que $\dot{\sigma}(x(t)) = 0$ e $\sigma(\text{x(t)}) = 0$ para todo $t \geq t_0$.

Diferenciando $\sigma(x) = 0,$ em relação à t, tem-se

$$\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] \dot{x} = 0 .$$

Substituindo $\dot{x}$ por (2.1), tem-se

$$\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] \dot{x} = \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] \left[f(t, x) + B(t, x)\, u_{eq} \right] = 0 \qquad (2.10)$$

onde u_{eq} é chamado de controle equivalente e é solução da equação (2.10).

Para calcular u_{eq}, assume-se que o produto matricial $\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] B(t, x)$ é não singular para todo t e x. Então,

$$u_{eq} = -\left[\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] B(t, x) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(t, x) . \qquad (2.11)$$

Após a substituição deste u_{eq} em (2.1), a equação resultante descreve o comportamento do sistema restrito à superfície de deslizamento, desde que a condição inicial $x(t_0)$ satisfaz $\sigma(x(t_0)) = 0$.

Assim, dado $\sigma(x(t_0)) = 0$, a dinâmica do sistema sobre a superfície de deslizamento para $t \geq t_0$, é dada por

$$\dot{x} = \left[I - B(t, x) \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} B(t, x) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] f(t, x) . \qquad (2.12)$$

Supondo que a superfície de deslizamento é linear e é dada por $\sigma(x(t)) = Sx(t) = 0,$ então $\frac{\partial \sigma}{\partial x} = S$, e (2.12) reduz-se a

$$\dot{x} = \left[I - B(t, x) \left[S\, B(t, x) \right]^{-1} S \right] f(t, x) . \qquad (2.13)$$

Observe que (2.12), juntamente com a restrição $\sigma(x) = 0$ determina o movimento do sistema sobre a superfície de deslizamento. Então, o movimento do

sistema (2.1), restrito à superfície de deslizamento, será governado por um conjunto de equações de ordem reduzida.

Algumas aplicações de controle requerem uma superfície de deslizamento variando no tempo: $\sigma(t, \mathrm{x}) = 0$. Neste caso, $\dot{\sigma}(t, x) = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)\dot{x}$ e o controle equivalente toma a forma

$$u_{eq} = -\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} B(t, x)\right]^{-1}\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} f(t, x) + \frac{\partial \sigma}{\partial t}\right]. \qquad (2.14)$$

2.3 Redução de Ordem

Por simplicidade, será estudado o caso em que a superfície de chaveamento é linear, $\sigma(x) = S\,x = 0$. Como mencionado anteriormente, em um modo deslizante, o sistema equivalente deve satisfazer não somente a dinâmica de estado de dimensão *n*, mas também as *m* equações algébricas, $\sigma(x) = 0$. Estas restrições reduzem a dinâmica do sistema de um modelo de *n-ésima* ordem para um modelo de *(n-m)-ésima* ordem.

Suponha que o sistema não-linear (2.1) é restrito à superfície de deslizamento (2.4), isto é, $\sigma(x(t)) = Sx(t) = 0$, com o sistema dinâmico dado por (2.13), então, é possível resolver m variáveis de estado, em termos das $(n-m)$ variáveis de estado, se o posto de $[S] = m$.

Se o posto $[S] = m$, implica que $\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right] B(t, x)$ é não singular para todo t e x.

Para obter a solução, resolve-se para as *m* variáveis de estado $(\mathrm{x}_{\mathrm{n-m+1}}, \cdots, \mathrm{x}_{\mathrm{n}})$ em termos das $(n-m)$ variáveis de estado que permanecem. Substituindo estas relações nas $(n-m)$ equações de (2.13) e nas equações correspondendo a *m* variáveis de estado, o sistema resultante de ordem $(n-m)$ descreve o sistema equivalente com condição inicial satisfazendo $\sigma(\mathrm{x}) = 0$.

Exemplo 2.1: Para esclarecer o procedimento acima, considere o sistema

$$\dot{x} = A(t,x)\,x(t) + B\,u(t)\text{, sendo que}$$

$$A(t,x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{11}(t,x) & a_{12}(t,) & a_{13}(t,x) & a_{14}(t,x) & a_{15}(t,x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{21}(t,x) & a_{22}(t,x) & a_{23}(t,x) & a_{24}(t,x) & a_{25}(t,x) \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assume-se que a terceira e quinta linhas de $A(t,x)$ têm elementos não-lineares variantes no tempo e são limitados. O método de controle equivalente leva ao seguinte dinâmica, conforme (2.13).

$$\dot{x} \;=\; \left[\, I - B\left[\, S\,B\right]^{-1} S\,\right] A(t,\,x)\;x(t)$$

dado $\sigma\big(x(t_0)\big) = 0$ para qualquer t_0.

Se os parâmetros da superfície de chaveamento linear são dados por:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \end{bmatrix}$$

então

$$SB = \begin{bmatrix} S_{13} & S_{15} \\ S_{23} & S_{25} \end{bmatrix}$$

Para simplificar o exemplo, escolhe-se $S_{13}\,S_{25} - S_{15}\,S_{23} = 1$. Especificamente, escolhe-se $S_{13} = 2$, $S_{15} = S_{23} = S_{25} = 1$. Assim,

$$\big(SB\big)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} S_{25} & -S_{15} \\ -S_{23} & S_{13} \end{bmatrix}}{S_{13}\,S_{25} - S_{15}\,S_{23}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

O que leva à seguinte equação,

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & S_{21} - S_{11} & S_{22} - S_{12} & 0 & S_{24} - S_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & S_{11} - 2S_{21} & S_{12} - 2S_{22} & 0 & S_{14} - 2S_{24} \end{bmatrix} x(t)$$

sujeito a $\sigma(x) = 0$.

De $\sigma(x) = 0$ resulta que

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Observa-se da equação, que a principal vantagem do controle com estrutura variável é a eliminação da influência dos parâmetros da planta quando o sistema está sobre a superfície de deslizamento.

Obs.: Isso é válido desde que os parâmetros estejam casados, ou seja, possam ser compensados pelas entradas do sistema.

Resolvendo a equação acima para x_3 e x_5.

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

O sistema linear invariante no tempo equivalente de ordem reduzida é dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ S_{21} - S_{11} & S_{22} - S_{12} & S_{24} - S_{14} \\ S_{11} - 2S_{21} & S_{12} - 2S_{22} & S_{14} - 2S_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix}$$

sendo que $\tilde{x}_1 = x_1$, $\tilde{x}_2 = x_2$, $\tilde{x}_3 = x_4$.

Um exemplo de como o projeto de controle pode ser realizado é o seguinte: suponha que uma limitação de projeto exige que o sistema equivalente tenha os seguintes pólos {-1, -2, -3}, resultando na equação caracterísitica desejada.

$$\pi_A(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$$

A equação característica do sistema equivalente é

$$\pi_A(\lambda) = \lambda^3 + (S_{12} - S_{22} + 2S_{24} - S_{14})\lambda^2 + (S_{12}S_{24} - S_{14}S_{22} + S_{11} - S_{21})\lambda + (S_{11}S_{24} - S_{14}S_{21})$$

Os coeficientes de potências semelhantes de λ produzem o conjunto de equações

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & S_{24} & -S_{22} & -1 & 0 & 0 \\ S_{24} & 0 & 0 & -S_{14} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{14} \\ S_{21} \\ S_{22} \\ S_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Uma solução que realiza o objetivo do projeto de controle é:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1.833 & 2 & -6 & 1 \\ 1 & 1.833 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Concluindo, o sistema equivalente de ordem reduzida com os autovalores desejados é $\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x}$, sendo que,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ -1 & -1.833 & -6 \end{bmatrix}$$

A facilidade na resolução deste exemplo se deve ao fato de que a dinâmica do sistema original foi dado na forma canônica de *Luenberger*. Os sistemas que não estão nesta forma freqüentemente exigem uma transformação para uma forma mais geral denominada forma regular.

2.4 Forma Regular

Suponha que a planta dinâmica (2.1) tenha a seguinte forma regular

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x) \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x) + B_2(t, x)u \end{cases} \tag{2.15}$$

onde $x_1 \in \Re^{n-m}$ e $x_2 \in \Re^m$. Assume-se que $B_2(t, x)$ seja uma função matricial, $m \times m$, não singular.

Assume-se uma superfície de deslizamento linear da forma

$$\sigma(x) = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0, \tag{2.16}$$

com $S_1 \in \Re^{m \times (n-m)}$ e $S_2 \in \Re^{m \times m}$ não singular.

Então, no modo deslizante

$$x_2 = - S_2^{-1} S_1 x_1 \tag{2.17}$$

e

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x) = f_1\left(t, x_1, - S_2^{-1} S_1 x_1\right) \tag{2.18}$$

Observe que se f_1 tem uma estrutura linear do tipo $\dot{x}_1 = f_1(t, x) = A_{11}x_1 + A_{12} x_2$ então a dinâmica de ordem reduzida fica,

$$\dot{x}_1 = \left[A_{11} - A_{12} S_2^{-1} S_1 \right] x_1 \tag{2.19}$$

que tem a estrutura de malha fechada "$A_{11} + A_{12}F$" com $F = - S_2^{-1}S_1$. Se o par (A_{11}, A_{12}) é controlável, então é possível calcular F tal que $A_{11} + A_{12} F$ proporcione a característica dinâmica desejada. Tendo encontrado F, pode-se calcular $\begin{bmatrix} S_1 & S_2 \end{bmatrix}$ tal que $F = - S_2^{-1} S_1$. Assim, completa-se o projeto da superfície de deslizamento.

Para o caso de uma superfície de deslizamento não-linear da forma

$$\sigma(x) = \sigma_1 (x_1) + S_2 x_2 = 0 \tag{2.20}$$

que é linear em x_2 e não-linear em x_1, a dinâmica de ordem reduzida do sistema (2.15) num modo deslizante terá a forma

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x) = f_1\left(t, x_1, -S_2^{-1}\sigma_1(x_1)\right). \tag{2.21}$$

Nota 2.2: Para transformar o sistema dinâmico (2.1) para a forma regular (2.15), considera-se o caso de uma superfície de deslizamento linear (2.16) e uma transformação invariante no tempo, linear e não singular $z = T\,x$. Derivando z em relação a t, vem

$$\dot{z} = T\,\dot{x} = T\,f(t, x) + T\,B(t, x)\,u. \tag{2.22}$$

Se

$$T\,B = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

então, na nova coordenada, a dinâmica da planta (2.1) é:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \hat{f}_1(t, z) \\ \dot{z}_2 = \hat{f}_2(t, z) + \hat{B}_2(t, z)\,u \end{cases}. \tag{2.24}$$

Logo, num modo deslizante a dinâmica de ordem reduzida é, por (2.18), dada por

$$\dot{z}_1 = \hat{f}_1(t, z_1, -\hat{S}_2^{-1}\hat{S}_1 z_1) \tag{2.25}$$

onde $\begin{bmatrix} \hat{S}_1 & \hat{S}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \end{bmatrix} T^{-1}$.

Nota 2.3: Para transformar o sistema dinâmico (2.1) para a forma regular (2.15), considera-se o caso de uma superfície de deslizamento linear (2.16) e não existindo uma transformação linear tal que (2.23) seja satisfeita, então primeiro deve-se recorrer a uma transformação não-linear da forma

$$z = T(t, x) = \begin{bmatrix} T_1(t, x) \\ T_2(t, x) \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

onde

(a) $T(\cdot,\cdot):\Re\times\Re^n \to \Re^n$ é uma função diferenciável cuja inversa é também diferenciável,

(b) $T_1(\cdot,\cdot):\Re\times\Re^n \to \Re^{n-m}$ e

$T_2(\cdot,\cdot):\Re\times\Re^n \to \Re^m$.

Diferenciando z em (2.26) em relação a t, tem-se

$$\dot{z} = \frac{\partial T}{\partial x}(t,x)\,\dot{x} + \frac{\partial T}{\partial t}(t,x). \tag{2.27}$$

Substituindo (2.1) em (2.27) vem

$$\dot{z} = \frac{\partial T}{\partial x} f(t,x) + \frac{\partial T}{\partial x} B(t,x)\,u(t) + \frac{\partial T}{\partial t}. \tag{2.28}$$

Se a transformação tem a propriedade

$$\frac{\partial T}{\partial x} B(t,x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial T_1}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial T_2}{\partial x} \end{bmatrix} B(t,x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{B}_2(t,x) \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

então nas novas coordenadas, as equações descrevendo o sistema (2.1) são:

$$\dot{z}_1 = \frac{\partial T_1}{\partial x} f\left(t, \tilde{T}(t,z)\right) + \frac{\partial T_1}{\partial t} \triangleq \hat{f}_1(t,z)$$

$$\dot{z}_2 = \frac{\partial T_2}{\partial x} f\left(t, \tilde{T}(t,z)\right) + \frac{\partial T_2}{\partial t}\left(t, \tilde{T}(t,z)\right) + \frac{\partial T_2}{\partial x} B\left(t, \tilde{T}(t,z)\right) u \triangleq \hat{f}_2(t,z) + \hat{B}_2(t,z)\,u\,. \tag{2.30}$$

2.5 Projeto do Controlador

No projeto de controle, o objetivo é a obtenção de uma lei de controle tal que satisfaça as condições de existência e alcançabilidade ao modo deslizante. A suposição é que a superfície de deslizamento já tenha sido projetada.

Em geral, o controle é um vetor m dimensional que tem a estrutura da forma

$$u_i = \begin{cases} u_i^+ (t, x) \text{ para } \sigma_i (x) > 0 \\ u_i^- (t, x) \text{ para } \sigma_i (x) < 0 \end{cases} \tag{2.31}$$

onde $\sigma(x) = [\, \sigma_1(x), \cdots, \sigma_m(x) \,]^T = 0$.

Uma estrutura muito utilizada para o controle (2.31) é

$$u_i = u_{ieq} + u_{in} \tag{2.32}$$

onde u_{ieq} é a i-ésima componente do controle equivalente u_{eq} (que é contínuo) e onde u_{in} é a parte descontínua ou parte chaveada do controle u_n.

Para o sistema (2.1), com um controlador tendo a estrutura (2.32), tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(x) &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \left[f(t, x) + B(t, x) \left(u_{eq} + u_n \right) \right] \\ &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} \left[f(t, x) + B(t, x) u_{eq} \right] + \frac{\partial \sigma}{\partial x} B(t, x) u_n \\ &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} B(t, x) u_n \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, assume-se que $\frac{\partial \sigma}{\partial x} B(t, x) = I$, sendo I a matriz identidade. Então $\dot{\sigma}(x) = u_n$. Esta condição permite uma fácil verificação das condições suficientes para a existência e alcançabilidade de um modo deslizante, isto é, condições que satisfazem a condição de Lyapunov $\sigma_i \dot{\sigma}_i < 0$ quando $\sigma_i(x) \neq 0$. A seguir, relacionam-se algumas possibilidades de estruturas com controle descontínuo u_n.

(a) Função sinal com ganhos constantes:

$$u_{in}(x) = \begin{cases} \alpha_i \operatorname{sgn} (\sigma_i (x)), & \sigma_i(x) \neq 0, \quad \alpha_i(\cdot) < 0 \\ 0 & \sigma_i(x) = 0 \end{cases} . \tag{2.33}$$

Observe que este controle satisfará as condições suficientes para a existência de um modo deslizante, pois

$$\sigma_i \dot{\sigma}_i \;=\; \alpha_i \sigma_i(x)\ \mathrm{sgn}\big(\sigma_i(x)\big) \;<\; 0 \ \text{ se } \sigma_i(x) \;\neq\; 0\,.$$

(b) Função sinal com ganhos dependentes do estado:

$$u_{in}(x) = \begin{cases} \alpha_{\mathrm{i}}(\mathrm{x})\,\mathrm{sgn}\,(\sigma_i\ (\mathrm{x})), & \sigma_{\mathrm{i}}(\mathrm{x}) \neq 0,\ \alpha_{\mathrm{i}}(\cdot) < 0 \\ 0 & \sigma_{\mathrm{i}}(\mathrm{x}) = 0 \end{cases} . \qquad (2.34)$$

Logo,

$$\sigma_i \dot{\sigma}_i = \alpha_i(x)\sigma_i(\mathrm{x})\,\mathrm{sgn}\,(\sigma_i(\mathrm{x})) < 0 \quad \text{se} \quad \sigma_i(\mathrm{x}) \neq 0\,.$$

(c) Malha fechada com ganhos chaveados:

$$u_{in}(x) = \psi\,\mathrm{x}; \quad \psi = \big[\,\psi_{\mathrm{ij}}\,\big], \quad \psi_{\mathrm{ij}} = \begin{cases} \alpha_{ij}, & \sigma_{\mathrm{i}}\mathrm{x}_{\mathrm{j}} > 0 \\ \beta_{ij}, & \sigma_{\mathrm{i}}\mathrm{x}_{\mathrm{j}} < 0 \end{cases} \qquad (2.35)$$

com $\alpha_{\mathrm{ij}} < 0$ e $\beta_{\mathrm{ij}} > 0$.

Logo,

$$\sigma_{\mathrm{i}}\dot{\sigma}_{\mathrm{i}} = \sigma_{\mathrm{i}}\left(\psi_{\mathrm{i1}}\mathrm{x}_1 + \psi_{\mathrm{i2}}\mathrm{x}_2 + \cdots + \psi_{\mathrm{in}}\mathrm{x}_{\mathrm{n}}\right) < 0\,.$$

(d) Malha fechada linear e contínua

$$\mathrm{u}_{\mathrm{in}}(\mathrm{x}) = \alpha_{\mathrm{i}}\sigma_i(\mathrm{x}) \quad \text{e} \quad \alpha_{\mathrm{i}} < 0\,. \qquad (2.36)$$

A condição para a existência de um modo deslizante é

$$\sigma_i \dot{\sigma}_i \;= \alpha_i \sigma_i^2(\mathrm{x}) < 0$$

ou de forma mais geral

$$u_n(x) \;=\; \text{-}L\ \sigma(x)$$

onde $L \in \Re^{m\times m}$ é uma matriz constante definida positiva. A condição para a existência de um modo deslizante é facilmente vista

$$\sigma^T(x)\,\dot{\sigma}(x) = -\sigma^T(x)\,L\,\sigma(x) < 0, \quad \text{se } \sigma(x) \neq 0.$$

(e) Vetor unitário não-linear com fator de escala

$$u_n(x) = \rho \frac{\sigma(x)}{\| \sigma(x) \|}, \quad \rho < 0\,. \tag{2.37}$$

A condição de existência é

$$\sigma^T(x)\,\dot{\sigma}(x) = \| \sigma(x) \|\ \rho < 0, \quad \text{se } \sigma(x) \neq 0.$$

2.6 Sistemas Incertos e CEV/MD

Aqui a proposta é a apresentação da teoria de Controle com Estrutura Variável (CEV) para sistemas incertos e uma discussão sobre trepidação. Uma bo1a parte da literatura tem surgido nos anos recentes interessada na determinação da estabilidade de sistemas tendo parâmetros incertos dentro de limites conhecidos. Tais estratégias de controle são baseadas no segundo método de Lyapunov. A motivação para pesquisar sistemas incertos está no fato de que a representação matemática de sistemas reais na maioria das vezes não é fiel. Assim, pode-se ter não só incertezas paramétricas como também incertezas na própria modelagem do sistema real.

Seja o seguinte sistema incerto

$$\dot{x}(t) = \{ (f(t, x(t)) + \Delta f(t, x(t), r(t))\} + [\, B(t, x(t)) + \Delta B(t, x(t), r(t))\,]\, u(t) \tag{2.38}$$

onde $\Delta f(t, x(t), r(t))$, $\Delta B(t, x(t), r(t))$ e $r(t)$ são funções de parâmetros incertos cujos valores pertencem a algum conjunto fechado e limitado.

Nota 2.4: Um sistema é chamado robusto se a propriedade de interesse do sistema permanece em uma região limitada em face de uma classe de perturbações limitada [5].

Definição 2.1: As parcelas de incertezas Δf e ΔB que encontram-se na imagem de $B(t,x)$ para todos valores de *t* e *x* são chamadas incertezas casadas [10].

Considerando que todas as incertezas são do tipo casadas, é possível representá-las em um único vetor $e(t,x(t),r(t),u(t))$. Então o sistema (2.38) pode ser representado por

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) + B(t,x)u + B(t,x)\,e(t,x,r,u) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}. \tag{2.39}$$

Considere a seguinte estrutura de controle para o sistema (2.39)

$$u = u_{eq} + u_n \tag{2.40}$$

onde u_{eq} é o controle equivalente assumindo todas incertezas e(t, x, r, u) nulas e u_n é parte não-linear do controle projetado sem desconsiderar as incertezas. Considerando $\sigma(t,x) = 0$, tem-se

$$u_{eq} = -\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} B\right]^{-1}\left[\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} f\right] \tag{2.41}$$

assumindo que $\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} B\right]$ é não singular e que $e(t,x,r,u) = 0$. Agora, é necessário considerar as incertezas na planta e desenvolver uma expressão para u_n. Para isto, assume-se que

$$\| e(t,x,r,u) \| \le \rho(t,x) \tag{2.42}$$

onde $\rho(t,x)$ é uma função escalar com valores não negativos. Também, introduz-se a função com valores escalares

$$\hat{\rho}(t,x) = \alpha + \rho(t,x) \tag{2.43}$$

onde $\alpha > 0$.

Antes de especificar a estrutura do controle, escolhe-se a função de Lyapunov generalizada,

$$V(t, x) = \frac{1}{2} \sigma^T (t, x)\, \sigma (t,x)\,. \tag{2.44}$$

Para assegurar a existência de um modo deslizante e atratividade para a superfície, é suficiente escolher um controle com estrutura variável tal que

$$\frac{dV}{dt}(t, x) = \dot{V} = \sigma^T \dot{\sigma} < 0 \tag{2.45}$$

enquanto $\sigma(t, x) \neq 0$ onde

$$\dot{\sigma}(t, x) = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x}\, \dot{x}\,. \tag{2.46}$$

Utilizando a lei de controle

$$u(t, x) = u_{eq} + u_n = u_{eq} - \frac{B^T (t, x)\ grad(V(t, x))}{\left\| B^T (t, x)\ grad(V(t, x)) \right\|}\ \hat{\rho}(t, x) \tag{2.47}$$

quando $\sigma(t, x) \neq 0$, com

$$\text{grad}(V(t, x)) = \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x}(t, x) \right]^T \sigma (t, x) \tag{2.48}$$

sendo $\text{grad}(V(t, x))$ o gradiente da função de Lyapunov (2.44) generalizada, é garantida a atratividade para a superfície de deslizamento.

De fato, diferenciando a equação (2.44) em relação ao tempo, tem-se

$$\dot{V} = \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial x} (f + Bu + Be) . \qquad (2.49)$$

Substituindo (2.47) em (2.49), vem

$$\dot{V} = \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial x} f - \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial x} f - \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial x} -$$

$$\left\| B^{\mathrm{T}} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \mathrm{x}} \right)^{\mathrm{T}} \sigma \right\| \rho + \sigma^{\mathrm{T}} \frac{\partial \sigma}{\partial \mathrm{x}} B e \leq -\alpha \left\| B^{\mathrm{T}} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \mathrm{x}} \right)^{\mathrm{T}} \sigma \right\| < 0 . \qquad (2.50)$$

2.7 Trepidação

Os controladores EV desenvolvidos garantem o comportamento desejado do sistema em malha fechada. Estes controladores, porém, exigem um mecanismo de chaveamento infinitamente rápido (no caso ideal) o que não é possível no caso real. Devido ao chaveamento finito, a trajetória do sistema sobre a superfície de deslizamento oscila, esta oscilação é denominada trepidação (*chattering*). As componentes de alta freqüência da trepidação são indesejáveis, pois podem excitar dinâmicas de alta freqüência não modeladas da planta, resultando em instabilidades não previsíveis.

Uma solução para esse problema consiste em introduzir no controlador uma camada limite, ou seja, permitir que a trajetória do sistema permaneça sobre uma região ao redor da superfície de deslizamento e não restritamente sobre essa superfície.

Define-se o conjunto

$$\{x / \|\sigma\| \leq \varepsilon, \ \ \varepsilon > 0\}$$

como a chamada Camada Limite de espessura 2ε. Considere a lei de controle:

$$u = \begin{cases} u_{eq} - \dfrac{B^T \left[\dfrac{\partial \sigma}{\partial x}(t,x)\right]^T \sigma(t,x)}{\left\| B^T \left[\dfrac{\partial \sigma}{\partial x}(t,x)\right]^T \sigma(t,x) \right\|_2} \hat{\rho}, & \text{se } \|\sigma\| \geq \varepsilon \\ u_{eq} + p, & \text{se } \|\sigma\| < \varepsilon \end{cases}$$

onde u_{eq} é dado por,

$$u_{eq} = -\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} B\right]^{-1} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} f\right]$$

e sendo $p = p(t, x)$ qualquer função contínua tal que

$$p(t,x) = -\frac{B^T \left[\dfrac{\partial \sigma}{\partial x}(t,x)\right]^T \sigma(t,x)}{\left\| B^T \left[\dfrac{\partial \sigma}{\partial x}(t,x)\right]^T \right\| \varepsilon} \hat{\rho}$$

toda vez que $\|\sigma\| = \varepsilon$ e $\|p\| = \hat{\rho}$. Este controle garante atratividade para a camada limite e no interior da camada limite, oferece uma aproximação contínua para a ação de controle descontínuo de

$$u(t,x) = u_{eq} + u_n = u_{eq} - \frac{B^T(t,x)\left[\dfrac{\partial \sigma}{\partial x}(t,x)\right]^T \sigma(t,x)}{\left\| B^T(t,x)\left[\dfrac{\partial \sigma}{\partial x}(t,x)\right]^T \sigma(t,x) \right\|} \hat{\rho}(t,x)$$

Uma outra lei de controle com camada limite é dada por [36]

$$u(t,x) = u_{eq} + u_N = u_{eq} - \hat{\rho}(t,x)\frac{\sigma}{\|\sigma\| + \varepsilon}$$

Exemplo 2.2: Para ilustrar o efeito da camada limite sobre a lei de controle de um CEV, é mostrado o comportamento de um sistema de segunda ordem utilizando uma lei de controle sem camada limite e uma lei de controle utilizando a camada limite. A planta utilizada tem a seguinte equação,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

cujo comportamento desejado está sobre a seguinte superfície de deslizamento

$$\sigma(x) = x_1 + x_2 = 0$$

e cuja a lei de controle é

$$u(t, x) = u_{eq} + u_N$$

sendo que $u_{eq} = -x_2$,

o controle descontínuo é $u_N = -\dfrac{\sigma}{|\sigma|}$

ou $u_N = -\dfrac{\sigma}{|\sigma| + 0.01}$

Para este sistema temos o seguinte diagrama de blocos, conforme mostra a Figura 2.3.

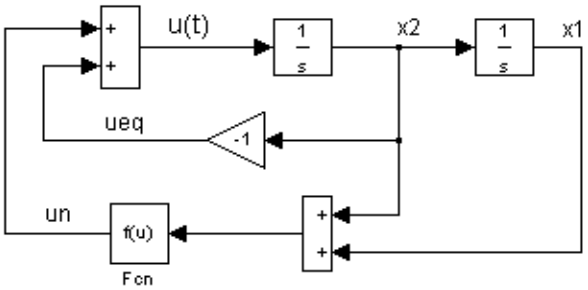

Figura 2.3 - Diagrama de blocos do sistema.

Este sistema foi simulado no *Matlab with Simulink 5.3*, e os resultados alcançados são mostrados nas figuras a seguir.

A Figura 2.4 mostra como atua a lei de controle variando o valor da superfície, onde se nota que o controle, sem camada limite, atua abruptamente quando a superfície muda de sinal, enquanto que no caso em que se aplica lei com camada limite o controle atua suavemente na mudança de sinal da superfície.

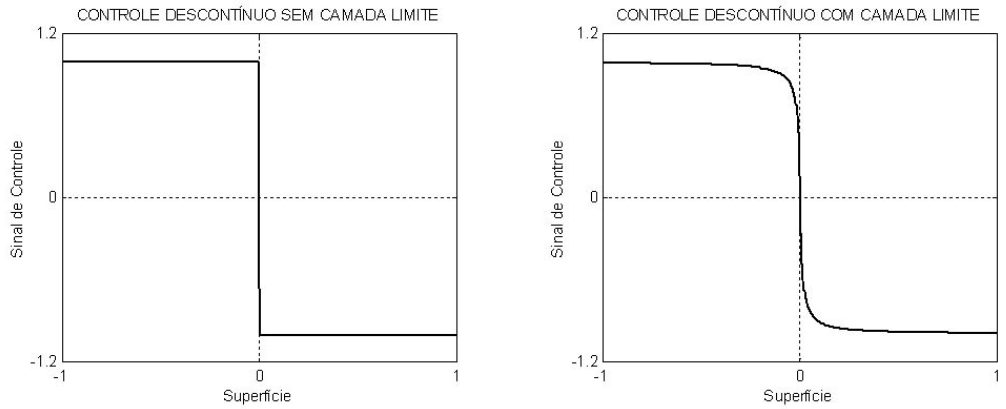

Figura 2.4 - Controle descontínuo sem camada limite e com camada limite.

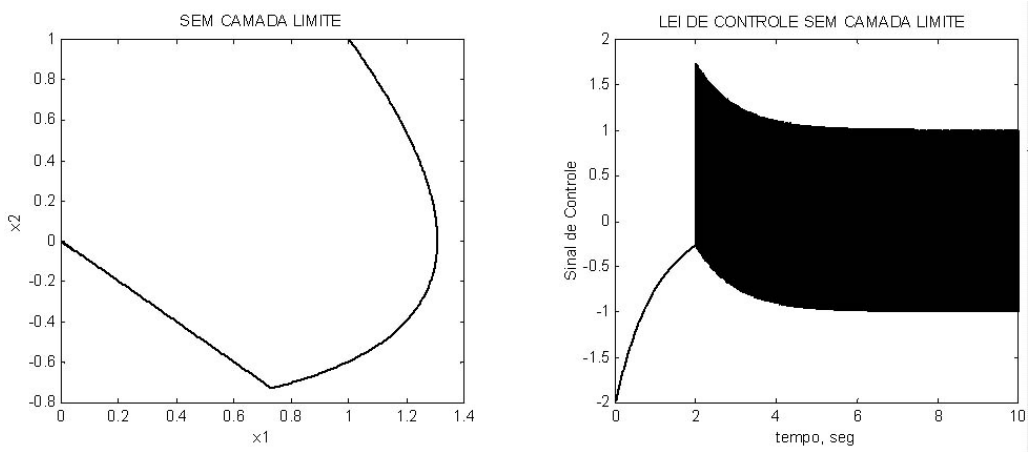

Figura 2.5 - Trajetória dos estados e lei de controle sem usar camada limite.

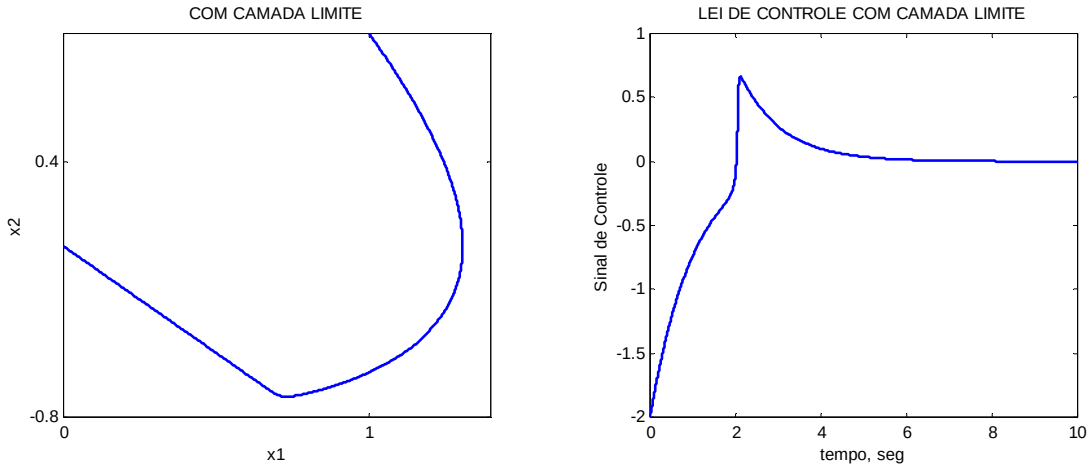

Figura 2.6 - Trajetória dos estados e lei de controle usando camada limite.

Comparando Figura 2.5 e 2.6 observa-se que o controle *u* com a camada limite do sistema pode ser considerado como o valor médio do controle *u* sem a camada limite. Uma outra observação é que o sistema atinge a superfície de deslizamento de forma suave quando usado um controle com camada limite. Porém é importante ressaltar que a trajetória do sistema estará restrita a uma região ao redor da superfície de deslizamento.

2.8 Comentários

Neste capítulo foram apresentados alguns aspectos que envolvem os Sistemas Incertos com Controle de Estrutura Variável e Modos Deslizantes.

O enfoque dado pressupõe o acesso a todos os estados, uma vez que a superfície de deslizamento é definida como função dos mesmos. Na maioria dos sistemas reais, entretanto, tem-se acesso somente à saída da planta. Desta forma, existem abordagens que utilizam compensadores para compor a superfície de deslizamento a partir da saída da planta [36,37].

Em particular, pode-se projetar observadores de estado, também por estrutura variável e modos deslizantes [38]. Tais observadores conservam as vantagens de robustez e bom desempenho diante de incertezas. Esta abordagem será detalhada no Capítulo 4, onde considera-se também sistemas com atraso no controle.

CAPÍTULO 3

3. SISTEMAS COM ATRASO NO CONTROLE

O atraso no tempo ocorre freqüentemente em vários sistemas físicos como: químico, biológico, mecânico e eletrônico [59]. Na literatura é comum a apresentação de teorias de controle que desprezam o atraso devido as dificuldades associadas a análise destes projetos.

Considere um simples exemplo de projeto onde o sistema $G = \frac{K}{\tau s + 1}$ está em malha fechada realimentado com ganho unitário. Sua Função de Transferência em Malha Fechada (FTMF) será

$$\frac{Y(S)}{R(S)} = \frac{K}{\tau s + 1 + K}$$

É simples observar que neste caso a escolha de um ganho $K > -1$ é suficiente para estabilizar o sistema em malha fechada. Contudo, se um atraso na forma e^{-sh}, sendo h o valor do atraso, for introduzido no caminho direto da sistema G, a estabilidade, usando a escolha do K anterior, não garante a estabilidade, pois a nova FTMF é

$$\frac{Y(S)}{R(S)} = \frac{K e^{-sh}}{\tau s + 1 + K e^{-sh}},$$

fazendo com que a solução de K para estabilizar este sistema não seja óbvia. A exponencial no numerador não é preocupante, pois pode ser considerada como um distúrbio ou algo que compromete apenas o desempenho do sistema. Contudo, a

componente exponencial presente no denominador é o que dificulta o calculo do ganho *K*. Algumas técnicas de aproximação são utilizadas para o termo e^{-sh}: expansão em série de Taylor, aproximação Pade, transformação equivalente digital no domínio z [59], entre outras. Porém, essas aproximações geram resultados divergentes e não precisos.

Assim, Smith [14] apresentou um algoritmo com preditor cujo objetivo era eliminar os efeitos do atraso na equação característica do sistema em malha fechada garantindo assim uma melhor realização da malha de controle.

Para ilustrar o desenvolvimento de Smith utiliza-se o diagrama de bloco, considerando o atraso na saída da malha

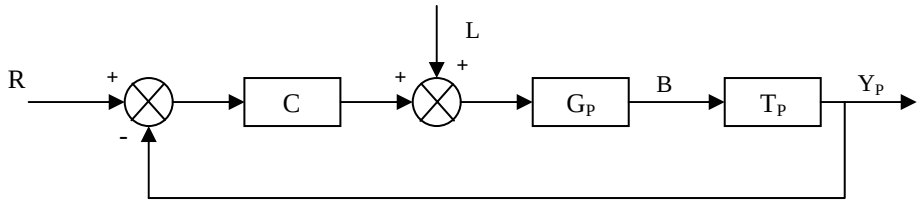

Figura 3.1 – Diagrama de bloco descrevendo um típico sistema com atraso.

onde, no domínio da freqüência, R representa a entrada, C o controlador, L os distúrbios, G_P a dinâmica da planta, T_P o atraso e Y_P a saída do sistema. Para um sistema simples de primeira ordem $G_P = \frac{K_P}{\tau_P s + 1}$ com atraso puro $T_P = e^{-s h_p}$, pode-se obter dois sistemas subdivididos entre um sistema livre de atraso e um puramente com atraso, desde que a variável fictícia B pudesse ser acessada como na Figura 3.2.

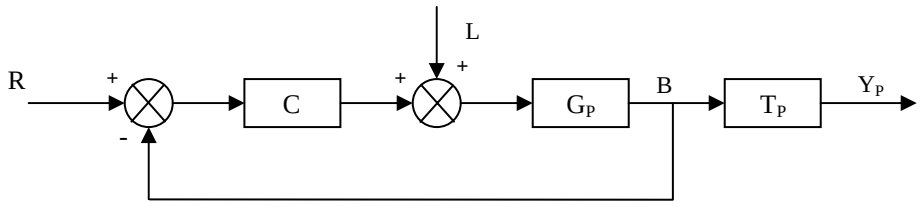

Figura 3.2 – Diagrama de bloco descrevendo um típico sistema com atraso.

Nesta condição o atraso T_P é movido para fora da malha de controle e o sinal Y_P será o mesmo sinal de B, porém com o atraso. Portanto a estabilidade do sistema é garantida, pois a equação característica deste sistema não depende do atraso. Contudo

esta realização não é possível, pois este atraso é distribuído e não se pode acessar a variável B antes do efeito do atraso.

Smith [14] propôs uma solução para este problema tendo-se como objetivo eliminar a influência do atraso na equação característica do sistema em malha fechada. Um modelo do preditor de Smith é descrito em diagrama de blocos do sistema abaixo [59]

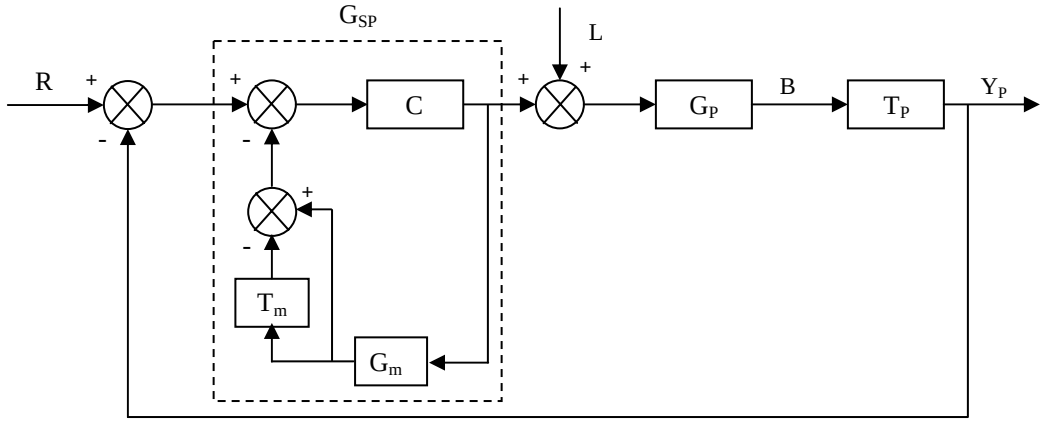

Figura 3.3 – Estratégia de controle com preditor proposto por Smith.

A parte pontilhada G_{SP} é o preditor, $G_m = \dfrac{Km}{\tau_m s + 1}$ é o modelo da planta e $T_m = e^{-s h_m}$ é o modelo do atraso.

A FTMF, considerando L=0, do sistema apresentado na Figura 3.3 é

$$\frac{Y_P(s)}{R(s)} = \frac{C G_P T_P}{1 + C G_m - C G_m T_m + C G_P T_P}$$

Se o modelo da planta e do atraso descrevem fielmente a planta real, ou seja, $G_m = G_P$ e $T_m = T_P$, a FTMF se reduz a

$$\frac{Y_P(s)}{R(s)} = \frac{C G_P T_P}{1 + C G_m}$$

mostrando que os efeitos do atraso no tempo são removidos do denominador da função de transferência e conseqüentemente facilitando a metodologia de projeto para o controlador C. Contudo, sabe-se que na realização desse procedimento é praticamente

impossível garantir que $G_m = G_P$ e $T_m = T_P$, sendo assim, esta metodologia proposta por Smith não é a mais viável a ser utilizada na implementação de controladores para sistemas com atraso no tempo, a não ser que junto ao preditor proposto por Smith exista um bom sistema adaptativo para compensar as diferenças entre a planta real e o modelo.

Por este motivo, neste trabalho é utilizado um novo conceito de análise e projeto de controle, utilizando um Controlador em Modos Deslizantes, onde o atraso é compensado na escolha adequada da superfície deslizante.

Pode-se considerar que existem dois tipos de atrasos em processos: atrasos de transferência e atrasos de transporte. Em termos práticos, o atraso de transferência é conseqüência dos efeitos combinados devido à propriedade que têm partes de um processo em armazenar energia ou material e à propriedade de partes que têm em resistir à transferência de energia ou material. O atraso de transporte é o intervalo de tempo relacionado com o transporte de massa ou energia de um ponto a outro do processo e durante o qual a perturbação ainda não chegou ao ponto observado [6].

Estes atrasos de transporte, também chamados tempo morto, atraso puro, *dead time*, *time delay*, ocorrem quando há um fenômeno de transporte de material ou energia ou há, por exemplo, um cálculo matemático no dispositivo de controle que ocasiona um atraso na resposta.

No caso de um sistema com uma entrada e uma saída, se este contiver atraso de transporte puro, a equação que o descreve é dada por

$$y(t) = u(t - \tau) \tag{3.1}$$

sendo $y(t)$ sua saída, $u(t)$ o sinal de entrada e τ o tempo de atraso.

Em termos de sistemas descritos no espaço de estados, pode-se ter atrasos nos estados e/ou no controle. Sua descrição é, genericamente, dada por [27, 28]

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{p} A_i x_i(t - r_i) + \sum_{j=1}^{q} B_j u(t - r_j) \tag{3.2}$$

onde r_i e r_j são atrasos fixos, para $1 \le i \le p$, $1 \le j \le q$, $x \in \Re^n$, $u \in \Re^m$, A_i *e* B_i de dimensões apropriadas.

Sistemas com uma entrada e atraso no controle, na notação (3.2), ficam

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t-h)\,. \tag{3.3}$$

A presença de atrasos nos sistemas tem como conseqüência maior dificuldade no projeto dos controladores sob o ponto de vista de se obter robustez e estabilidade.

A seguir serão apresentadas algumas considerações que envolvem o problema de CEV/MD aplicado a sistemas incertos com atraso no controle.

3.1 Motivação e Apresentação do Problema sob o Enfoque CEV/MD

Considere um sistema com incertezas e com acesso pleno aos estados,

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(t, x(t)) \\ x \in \Re^n,\ u \in \Re^m\end{gathered} \tag{3.4}$$

onde $f(t, x(t))$ representa as não linearidades e incertezas do sistema.

Apresenta-se, através de um exemplo numérico, um projeto CEV/MD que torna o sistema (3.4) robusto em relação às incertezas. Mostra-se também, que considerando o mesmo sistema (3.4) incluindo um atraso no controle, o mesmo não apresenta robustez.

Em [5], é proposta a lei de controle EV/MD da forma:

$$u(t) = u_{eq} + u_{NL} = Lx\big(x(t) + \rho(\| x \|, \max \| f(t, x(t)) \|)\big)\frac{Nx(t)}{\| Mx(t) \| + \delta} \tag{3.5}$$

sendo *L*, *M* e *N* matrizes constantes; $\rho(x)$ o ganho da parte não-linear que depende de $\| f(t, x(t)) \|$, todos definidos em [5]. δ é um escalar constante para evitar a trepidação [36].

No trabalho apresentado em [5], usando a lei de controle (3.5), é demonstrada a robustez do sistema (3.4) em relação às incertezas e não linearidades casadas [4] e são feitas análises a respeito da influência das incertezas não casadas na dinâmica em modo deslizante.

A seguir, será dado um exemplo numérico, em que procura-se mostrar que o sistema (3.4), com a lei de controle (3.5), é robusto em relação às incertezas, mas que não é robusto quando há atraso no controle.

Exemplo 3.1: Seja o sistema linear dado pela planta nominal

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$x \in \Re^3,\ u \in \Re^1$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} -0.277 & -32.98 & -5.432 \\ 0.365 & -0.319 & -9.49 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Projetando um controlador EV/MD, com lei de controle (3.5), conforme [5], e realizando as simulações para o sistema nominal, obtém-se as respostas no tempo mostradas na Figura 3.4. Nesta figura, foram superpostas as respostas do sistema nominal e não-nominal, com o mesmo controlador EV/MD (3.5). Os valores da matriz A_1 fora das condições nominais consideradas no projeto do controle original, são

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4.277 & -50.000 & -5.432 \\ 0.365 & -1.319 & -9.49 \\ 0 & 0 & -5.000 \end{bmatrix}.$$

Os parâmetros do projeto CEV/MD são:

$\rho = 0.1$

$L = \begin{bmatrix} -0.58 & -7.96 & 17.09 \end{bmatrix}$

$N = \begin{bmatrix} 0.1 & -1 & 0.1 \end{bmatrix}$

$M = \begin{bmatrix} -0.1 & 1 & -0.1 \end{bmatrix}$

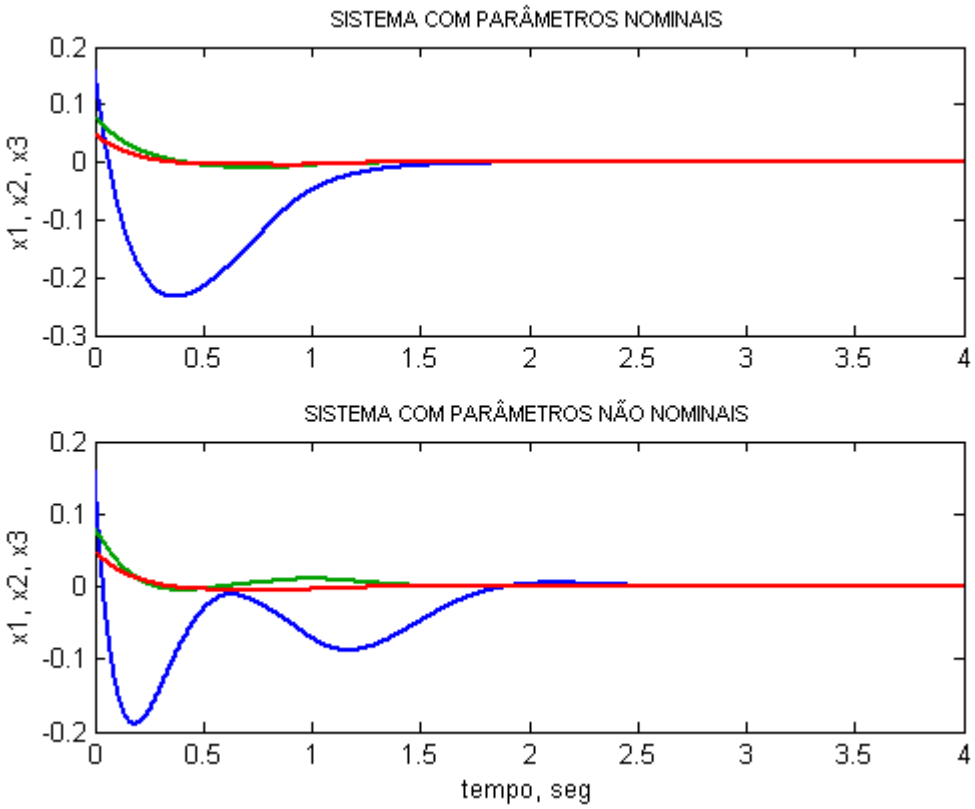

Figura 3.4 - Controle EV/MD para o sistema sem atraso - robustez.

Pode-se notar que o sistema manteve-se estável tanto para o caso em que considera-se os parâmetros nominais de projeto, como para a situação em que o sistema apresenta parâmetros com valores numéricos fora de suas condições nominais.

Numa terceira simulação, manteve-se o mesmo controle com EV/MD (3.5), as mesmas matrizes nominais A e B, e considera-se um atraso no controle, tal que o sistema tem a forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t-\tau)$$
$$x \in \Re^3,\ u \in \Re^1$$

com τ sendo o atraso no controle considerado constante e igual a 0.02 segundos.

Os resultados gráficos são mostrados na Figura 3.5. Pode-se notar que este pequeno atraso levou o sistema à instabilidade e que portanto, o controlador com EV/MD (3.5) não manteve a estabilidade para esta situação.

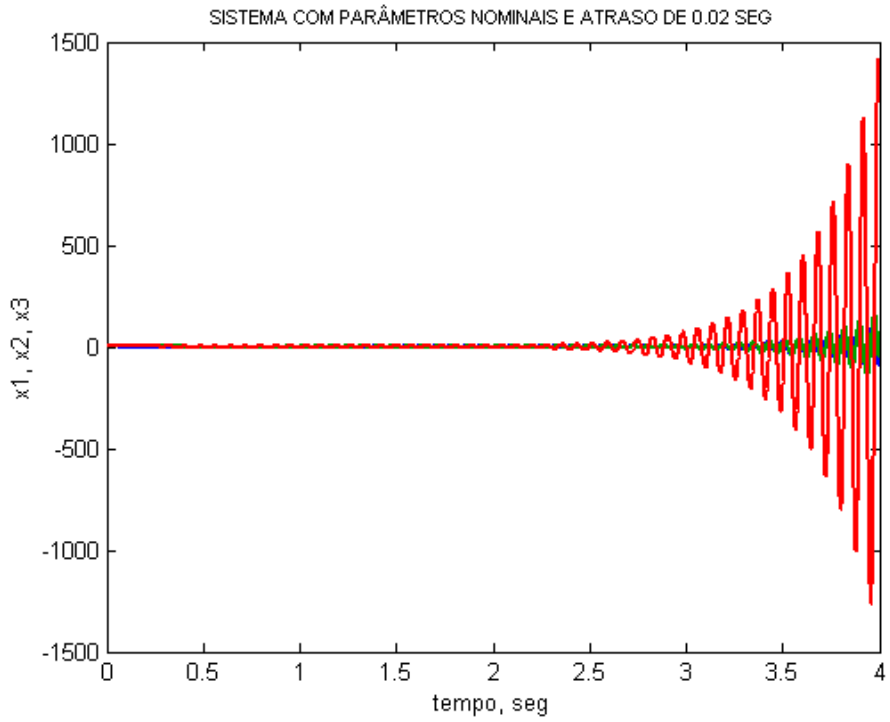

Figura 3.5 - Controle EV/MD para o sistema com atraso de 0.02 segundos.

Este exemplo deixa evidente que a não consideração de atrasos no projeto CEV/MD poderá tornar o sistema instável, mesmo que estes atrasos sejam numericamente pequenos.

3.2 Comentários

Na maioria dos sistemas reais existem atrasos. Sob o ponto de vista de controle, a presença destes atrasos pode influenciar negativamente no que diz respeito ao desempenho do sistema, caso não sejam levados em consideração no projeto de controle.

No projeto de controle por modos deslizantes, são feitas várias considerações para determinar o controlador com Estrutura Variável tal que minimize a influência das incertezas e perturbações. Com estas incertezas e perturbações limitadas, a lei de controle normalmente consegue conduzir o sistema à estabilidade, desde que este não apresente atraso no controle.

No entanto, como visto no Exemplo 3.1, um “pequeno” atraso no controle poderá implicar em instabilidade do sistema, quando este atraso não for levado em consideração no projeto CEV/MD.

No Capítulo 4, a seguir, aborda-se a questão do atraso no projeto de um observador com CEV/MD, proposto em [21,60]. Neste trabalho, este observador será utilizado para estimar os estados que serão utilizados na malha de controle discreto do sistema CAG, verificando assim sua eficiência mesmo na presença de atraso no sinal de controle.

CAPÍTULO 4

4. OBSERVADORES DE ESTADO DE SISTEMAS INCERTOS COM ATRASO NO CONTROLE COM EV/MD

O acesso pleno aos estados de um sistema para aplicações de estratégias de controle nem sempre é possível, por isso o estudo de observadores que estimem com eficiência os valores dos estados sempre foi de grande importância. Edwards e Spurgeon [38] propuseram um observador muito eficiente utilizando a estratégia EV/MD. Baseado neste observador, Garcia [21,60] propôs uma nova solução para o observador com MD, porém, que leva em consideração o atraso proveniente da computação do sinal de controle.

Neste capítulo, portanto, será apresentado um observador para uma planta que apresenta atraso no controle e acesso somente à saída [21,60]. Assim, para compor a superfície de deslizamento e a lei CEV/MD, utilizou-se um observador, também com EV/MD, como apresentado esquematicamente na Figura 4.1.

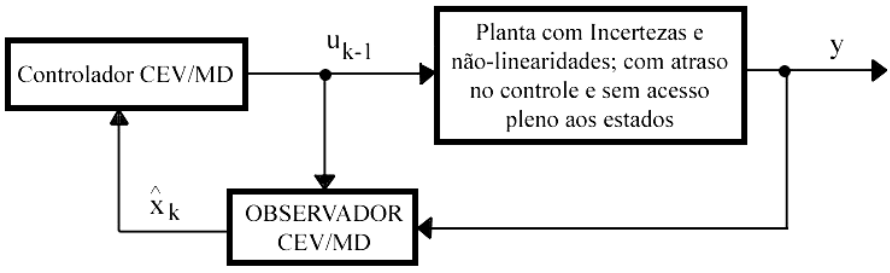

Figura 4.1 - Esquema para o projeto.

Seja o sistema incerto com atraso na entrada

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t-h) + f(t, x(t), u(t-h)) \\ y(t) &= C\,x(t) \\ x(0) &= x_0\,,\; u_t(\theta) = u(t+\theta),\; u_0 = \Psi(\theta),\; -h \le \theta \le 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde $x \in \Re^n$, $u \in \Re^m$, $y \in \Re^p$ e $0 \le h < \infty$ são os vetores de estado, a entrada e o atraso conhecido, respectivamente, e $A \in \Re^{n\times n}$, $B \in \Re^{n\times m}$ e $C \in \Re^{p\times n}$ são matrizes constantes onde $m \le p < n$. A função $f(t, x(t), u(t-h))$ representa as incertezas e não linearidades do sistema; $\Psi(\theta) \in C([-h, 0], \Re^m)$. Assume-se que (A, B) é controlável e (A, C) é observável com $posto(B) = m$, $posto(C) = p$ e que os estados não estão disponíveis para realimentação.

A função desconhecida $f(\cdot,\cdot,\cdot) : \Re_+ \times \Re^n \times \Re^m \to \Re^n$, que representa as incertezas e não linearidades do sistema, satisfazendo

$$f(t, x(t), u(t-h)) = B\,\xi(t, x(t), u(t-h))$$

onde $\xi(\cdot,\cdot,\cdot) : \Re_+ \times \Re^n \times \Re^m \to \Re^m$ é uma função desconhecida que satisfaz

$$\left\| \xi(t, x(t), u(t-h)) \right\| \le \rho,\;\; \forall\, x \in \Re^n, u \in \Re^m,\; t \ge 0\,.$$

É também assumido que existe um $G \in \Re^{n\times p}$ tal que $A_0 = A - GC$ tenha autovalores estáveis e que existe um par de Lyapunov (P, Q) para A_0 tal que a restrição estrutural $C^T F^T = PB$ seja satisfeita para algum $F \in \Re^{m\times p}$.

Em adição, sem perda de generalidade assume-se que $C = [\,0 \quad I_p\,]$.

Lema 4.1: Seja o sistema (A_0, B, C) com A_0 estável, e seja uma transformação não singular T, que leva o sistema (A_0, B, C) em $(\tilde{A}_0, \tilde{B}, \tilde{C})$. Então, se P é a matriz de Lyapunov para A_o que satisfaz a restrição $C^T F^T = PB$ então a matriz $\tilde{P} = (T^{-1})^T P\, T^{-1}$ é a matriz de Lyapunov de $\tilde{A}_0$ que satisfaz a restrição $\tilde{C}^T F^T = \tilde{P}\,\tilde{B}$ [38].

Lema 4.2: Seja A_0 uma matriz estável decomposta como

$$A_0 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

onde $A_{11} \in \Re^{(n-p)\times(n-p)}$ e $A_{22} \in \Re^{p\times p}$. Suponha que P seja a matriz de Lyapunov para A_0 que tem a forma diagonal em blocos dada por

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$$

onde $P_1 \in \Re^{(n-p)\times(n-p)}$ e $P_2 \in \Re^{p\times p}$. Então as sub-matrizes A_{11} e A_{22} possuem autovalores estáveis [38].

Proposição 4.1: Seja o sistema (A_0, B, C) para o qual existe o par (P, F) relacionado ao observador proposto em [43]. Então existe uma transformação não singular T tal que a tripla com respeito as novas coordenadas $(\overline{A}_0, \overline{B}, \overline{C})$ possui as seguintes propriedades:

$$(\text{i})\quad \overline{A}_0 = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} \end{bmatrix}$$

onde $\overline{A}_{11} \in \Re^{(n-p)\times(n-p)}$, $\overline{A}_{22} \in \Re^{p\times p}$ e ambas são estáveis.

$$(\text{ii})\quad \overline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ P_{22}^{*} F^{T} \end{bmatrix} \text{ onde } P_{22}^{*} \in \Re^{p\times p} \text{ com } P_{22}^{*} = (P_{22}^{*})^{T} > 0$$

$$(\text{iii})\quad \overline{C} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix}$$

(iv) a matriz de Lyapunov $\overline{P} = (T^{-1})^{T} P T^{-1}$ tem a forma diagonal em blocos dada por

$$\begin{bmatrix} \overline{P}_1 & 0 \\ 0 & \overline{P}_2 \end{bmatrix}$$

onde as matrizes $\overline{P}_1 \in \Re^{(n-p)\times(n-p)}$ e $\overline{P}_2 \in \Re^{p\times p}$ [38].

Suponha que a matriz B seja escrita como

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

onde $B_1 \in \Re^{(n-p)\times m}$, $B_2 \in \Re^{p\times m}$.

Considere o problema de resolver a equação matricial

$$B_1 + T_{12}B_2 = 0 \tag{4.2}$$

para $T_{12} \in \Re^{(n-p)\times p}$.

Lema 4.3: Se existe um observador tal que o erro decai assintoticamente para sistemas do tipo (4.1), então existe uma transformação $T_{12} \in \Re^{(n-p)\times p}$ tal que $B_1 + T_{12}B_2 = 0$ [38].

Lema 4.4: Uma matriz $T_{12} \in \Re^{(n-p)\times p}$ satisfazendo $B_1 + T_{12}B_2 = 0$ existe se, e somente se, $rank(B_2) = m$ [38].

Proposição 4.3: Existe um observador robusto, tal que o erro decai assintoticamente se, e somente se, $(\overline{A}_{11}, \overline{A}_m)$ é detectável [38].

Corolário 4.1: Quando $m = p$, um observador robusto existe se, e somente se, $\overline{A}_{11}$ é estável [38].

4.1 Projeto do Observador

Considere o sistema dado em (4.1) e suponha que exista uma mudança de coordenadas com respeito a uma matriz não singular T_1 tal que o sistema possa ser escrito como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_{11}\, x_1(t) + A_{12}\, y(t) \\ \dot{y}(t) &= A_{21}\, x_1(t) + A_{22}\, y(t) + B_2 u(t-h) + B_2\, \xi(t, x(t), u(t-h)) \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde $x_1 \in \Re^{(n-p)}$, $y \in \Re^{p}$, a matriz A_{11} tem autovalores estáveis e

$$T_1 A T_1^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},\ T_1 B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

com $A_{11} \in \Re^{(n-p)\times(n-p)}$, $A_{12} \in \Re^{(n-p)\times p}$, $A_{21} \in \Re^{p\times(n-p)}$, $A_{22} \in \Re^{p\times p}$, $B_2 \in \Re^{p\times p}$.

Considere agora o observador da forma

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = A_{11}\, \hat{x}_1(t) + A_{12}\, \hat{y}(t) - A_{12}\, e_y \\ \dot{\hat{y}}(t) = A_{21}\, \hat{x}_1(t) + A_{22}\, \hat{y}(t) + B_2\, u(t-h) - \\ \qquad\qquad (A_{22} - A_{22}^s)\, e_y + \| F \|\, P_2^{-1}\, v \end{cases} \tag{4.4}$$

onde $F^T = P_2\, B_2$, $P_2 \in \Re^{p\times p}$ é uma matriz definida positiva e simétrica , A_{11} é estável, A_{22}^s é uma matriz qualquer estável. Seja os erros dos estados estimados definidos por $e_1(t) = \hat{x}_1(t) - x_1(t)$ e $e_y(t) = \hat{y}(t) - y(t)$. O vetor v é definido por

$$v = \begin{cases} -\rho_1 \dfrac{e_y}{\| e_y \|} & , \quad e_y \neq 0 \\ 0 & , \quad e_y = 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

com $\rho_1 > 0$.

Através de alguns cálculos, chega-se a:

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = A_{11}\, e_1(t) \\ \dot{e}_y(t) = A_{21}\, e_1(t) + A_{22}^s\, e_y(t) + \| F \| P_2^{-1}\, v - B_2\, \xi(t, x(t), u(t-h)) \end{cases} \tag{4.6}$$

Teorema 4.1: Existe uma família de matrizes definidas positivas e simétricas P_2 , tais que a dinâmica do erro dada pela equação (4.6) é assintoticamente estável.

Prova:

A prova é similar a apresentada em [38], com a diferença de que o observador considerado aqui possui um atraso h na entrada.

Sejam $Q_1 \in \Re^{(n-p)\times(n-p)}$ e $Q_2 \in \Re^{p\times p}$, matrizes de projeto definidas positivas e simétricas e define-se $P_2 \in \Re^{p\times p}$ como a única solução definida positiva e simétrica da equação de Lyapunov

$$P_2\ A_{22}^s + (A_{22}^s)^T P_2 = -Q_2 .$$

Define-se

$$Q_3 = A_{21}^T P_2 Q_2^{-1} P_2 A_{21} + Q_1$$

e nota-se que $Q_3 = Q_3^T$ e Q_3 é definida positiva.

Seja $P_1 \in \Re^{(n-p)\times(n-p)}$ a única solução definida positiva e simétrica da equação de Lyapunov

$$P_1 A_{11} + A_{11}^T P_1 = -Q_3 .$$

Considera-se

$$V(e_1, e_y) = e_1^T P_1\ e_1 + e_y^T P_2\ e_y \tag{4.7}$$

como uma candidata a função de Lyapunov. Derivando (4.7), vem

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_1, e_y) = &-e_1^T Q_3 e_1 + e_1^T A_{21}^T P_2 e_y + e_y^T P_2 A_{21} e_1 - \\ &e_y^T Q_2 e_y + 2\, e_y^T \left\| F \right\| v - 2\, e_y^T P_2 B_2 \xi \end{aligned} \tag{4.8}$$

Note que

$$\begin{aligned} &(e_y - Q_2^{-1} P_2 A_{21}\, e_1)^T Q_2 (e_y - Q_2^{-1} P_2 A_{21} e_1) \\ &= e_y^T Q_2 e_y - e_1^T A_{21}^T P_2 e_y - e_y^T P_2 A_{21} e_1 + e_1^T A_{21}^T P_2 Q_2^{-1} P_2 A_{21} e_1 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Substituindo (4.9) em (4.8) e escrevendo $\tilde{e}_y$ no lugar de $(e_y - Q_2^{-1} P_2 A_{21} e_1)$, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_1, e_y) = &-e_1^T Q_3 e_1 + e_1^T (A_{21}^T P_2 Q_2^{-1} P_2 A_{21}) e_1 \\ &- \tilde{e}_y^T Q_2 \tilde{e}_y + 2\, e_y^T \left\| F \right\| v - 2 e_y^T P_2 B_2 \xi \end{aligned}$$

$$\dot{V}(e_1, e_y) \le -e_1^T Q_1 e_1 - \tilde{e}_y^T Q_2 \tilde{e}_y .$$

Logo, $\dot{V}(e_1, e_y) < 0$ para $(e_1, e_y) \neq 0$. Então, $(e_1, e_y) \to 0$ assintoticamente.

4.1.1 Algoritmo para o Projeto do Observador Robusto

É possível sistematizar o projeto do observador seguindo os passos dados em [38]:

Passo 0: Permute as colunas de C até $C = [C_1 \quad C_2]$ onde $C_2 \in \Re^{p \times p}$ com $\det(C_2) \neq 0$. Então use a transformação não singular

$$T_{pre} = \begin{bmatrix} I_{n-p} & 0 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix}$$

para obter as coordenadas do sistema tal que a matriz C tenha a forma $[0 \quad I_p]$.

Passo 1: Se $rank(B_2) < m$ então não existe observador robusto, logo pare. Se não, resolva a equação algébrica $B_1 + T_{12} B_2 = 0$ para T_{12} usando o Lema 4.4.

Passo 2: Usando as matrizes T_{12} e T_0 monte a transformação

$$T = \begin{bmatrix} I_{n-p} & T_{12} \\ 0 & T_0 \end{bmatrix}$$

e gere as matrizes do sistema nas novas coordenadas $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$.

Passo 3: Identifique os sub-blocos matriciais $\overline{A}_{11}$ e $\overline{A}_m$ de $\overline{A}$. Se não puder ser encontrado um $L \in \Re^{(n-p)\times(p-m)}$ para estabilizar $\overline{A}_{11} + L\,\overline{A}_m$, então não existe um observador robusto e pare. Se não, compute L.

Passo 4: Defina uma transformação não singular

$$T_* = \begin{bmatrix} I_{n-p} & L_* \\ 0 & T_0^T \end{bmatrix}$$

onde $L_* = \lfloor L \quad 0_{(n-p)\times m} \rfloor$ e compute a tripla do sistema nas novas coordenadas (A_*, B_*, C_*) .

Passo 5: O sistema agora pode ser escrito como

$$\dot{x}_1(t) = \mathrm{A}_{11}\, x_1(t) + \mathrm{A}_{12} y(t)$$
$$\dot{y}(t) = \mathrm{A}_{21}\, x_1(t) + \mathrm{A}_{22}\, y(t) + B_2\, u(t-h) + B_2\, \xi(t, x(t), u(t-h))$$

onde A_{11} é estável.

Passo 6: Seja P_2 a única solução da equação de Lyapunov para a matriz estável A_{22}^s e a matriz definida positiva e simétrica de projeto Q_2.

Seja

$$G_* = \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} - A_{22}^s \end{bmatrix}$$

onde A_{22}^s é uma matriz qualquer estável de dimensão apropriada.

Passo 7: Calcule as matrizes dos ganhos G_l e G_n , usando as coordenadas do sistema original como

$$G_l = T^{-1} T_*^{-1} G_*$$
$$G_n = \| F \| \, T^{-1} T_*^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ P_2^{-1} \end{bmatrix}$$

onde $F^T = P_2 B_2$

Passo 8: Forme o observador como

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t-h) - G_l(C\hat{x}(t) - y(t)) + G_n v$$
$$x(0) = x_0,\ u_t(\theta) = u(t+\theta),\ u_0(\theta) = \Psi(\theta),\ -h \le \theta \le 0$$

com

$$v = \begin{cases} -\rho_1 \dfrac{Ce}{\|Ce\|} & ,\ Ce \neq 0 \\ 0 & ,\ Ce = 0 \end{cases}$$

onde $e = e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$.

4.2 Comentários

Neste capítulo foi apresentado projeto de observadores com Estrutura Variável e Modos Deslizantes (EV/MD) considerando sistemas incertos, contínuos no tempo, com atraso no controle [21,38,60].

Considerou-se acesso apenas à saída do sistema incerto, com atraso na entrada. Foi apresentado um observador com Estrutura Variável e Modos Deslizantes, e incluiu-se, na entrada do mesmo, o atraso [21,60]. Com esta estrutura, é possível simular um projeto para o observador, conforme apresentado em [38], porém considerando o atraso no sinal de entrada.

A estrutura do observador aqui apresentada será utilizada para efetuar as simulações do sistema de Controle Automático da Geração, onde não tem-se acesso aos estados e, somente, as saídas da planta estão disponíveis. No Capítulo 8 são apresentados os resultados da simulação utilizando este observador [30].

CAPÍTULO 5

5. UM NOVO CONTROLADOR COM MODOS DESLIZANTES DISCRETO NO TEMPO (CDMD)

Controle com Modos Deslizantes (CMD) tem sido estudado desde início dos anos sessenta [5]. Recentemente, devido a facilidade do acesso e ao avanço na área da informática e semicondutores, várias implementações práticas de sistemas de controle têm sido efetuadas através de computadores digitais, inclusive de estratégias que utilizam modos deslizantes [44-48,52]. Sabe-se que o CMD aplicado a sistemas contínuos no tempo é robusto para uma classe de incertezas na planta [5,34,44-48]. Sua implementação através de dispositivos digitais, contudo, requer um certo período de amostragem que causa não somente *chattering* ao longo da superfície de deslizamento, mas também, possível instabilidade [49, 50]. Quando uma abordagem em tempo contínuo é usada para um controlador discreto, os conversores A/D e D/A, e também o período de amostragem, não são considerados; neste caso diz-se que a estratégia de controle digital está emulando um controle contínuo e, portanto, não tem o mesmo desempenho de um controlador digital. Assim, dependendo da dinâmica do sistema, somente para pequenos períodos de amostragem o controlador contínuo, implementado através de dispositivos digitais, terá um bom desempenho [30].

Neste capítulo, um novo CMD discreto no tempo é proposto. O controlador, discreto no tempo, propõe uma lei de controle suave, ao invés de uma chaveada, que leva em consideração os conversores e o período de amostragem. Dessa forma evita-se que, na presença de um atraso na computação dos sinais pelo dispositivo digital, a

estrutura chaveada seja influenciada pela ação deste atraso, o que poderia influenciar no desempenho e até na estabilidade do sistema. Suas principais características são a simplicidade de implementação e sua robustez em relação a determinadas classes de incertezas.

Simulações e implementações no sistema pêndulo invertido ilustram o procedimento de projeto. O sistema pêndulo invertido é montado sobre um carrinho com motor, que está sobre um trilho. A lei de controle é realizada por um computador digital, através do *software Matlab with Simulink v4.2c* e de uma interface de aquisição de dados da *Quanser Consulting*. Apresentam-se os resultados do sistema controlado utilizando ambas estratégias: contínua convencional e discreta no tempo proposta neste trabalho.

5.1 Controle Contínuo com Modos Deslizantes (CCMD)

Aqui o projeto CMD contínuo no tempo é brevemente revisado; mais detalhes podem ser verificados em [34] e no Capítulo 2 deste trabalho.

Considere um sistema linear contínuo no tempo com uma entrada e pode ser representado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde $u(t)$ é o sinal de controle, $x(t)$ é o vetor de estado n-dimensional disponível, $y(t)$ é o vetor de saída de dimensão p e $A \in \Re^{nxn}$, $B \in \Re^{nx1}$ e $C \in \Re^{pxn}$ são matrizes constantes. A superfície de deslizamento é dada por

$$S(t) = \{x(t) \mid Gx(t) = 0\} \tag{5.2}$$

onde $G \in \Re^{1xn}$ é uma matriz constante, que é projetada tal que o sistema seja estável e que os estados alcancem e permaneçam sobre a superfície deslizante.

5.1.1 Projeto da Superfície de Deslizamento

A matriz G de (5.2) é primeiramente projetada. Supõe-se que a planta descrita no sistema (5.1) tem a seguinte forma regular [34]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_{11}x_1(t) + A_{12}\,x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + bu(t) \end{aligned} \tag{5.3}$$

onde $x_1 \in \Re^{n-1}$, $x_2 \in \Re^1$ e $b \in \Re^1$. As matrizes constantes são $A_{11} \in \Re^{(n-1)\times(n-1)}$; $A_{12} \in \Re^{(n-1)\times 1}$; $A_{21} \in \Re^{1\times(n-1)}$ e $A_{22} \in \Re^{1\times 1}$.

A superfície de deslizamento é definida por:

$$S(t) = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = 0, \tag{5.4}$$

onde $G_1 \in \Re^{1\times(n-1)}$ e $G_2 \in \Re^1$ são matrizes não nulas.

Assim, a dinâmica no deslizamento, com ordem reduzida, é

$$\dot{x}_1(t) = \left[A_{11} - A_{12}\,G_2^{-1}G_1 \right] x_1(t) \tag{5.5}$$

A dinâmica de deslizamento (5.5) tem a estrutura de realimentação $A_{11} + A_{12}F$ com $F = -G_2^{-1}G_1$. Note que pode-se utilizar a técnica de alocação de pólos ou controle ótimo [51] para projetar a matriz F.

5.1.2 Projeto da Lei de Controle Contínua

Após o projeto da superfície, o próximo passo é garantir a existência do modo deslizante. Um modo deslizante existe, se em uma vizinhança da superfície deslizante $S(t) = \{x(t) \mid Gx(t) = 0\}$, a tangente ou vetor velocidade da trajetória dos estados apontam para a superfície deslizante [5,34,35]. Assim, a estabilidade da superfície deslizante requer a escolha de uma função de Lyapunov $V(t,x)$ que seja positiva definida e tenha uma derivada no tempo negativa na região de atração.

No projeto de controle em modos deslizantes, o objetivo é obter uma lei de controle tal que a trajetória dos estados alcance e permaneça sobre a superfície deslizante para todo o tempo subseqüente.

Em geral, a lei de Controle com Estrutura Variável (CEV) tem a forma

$$u(t) = \begin{cases} u^{-}(t,x) \neq 0 \text{ para } S(t) < 0 \\ u(t,x) = 0 \text{ para } S(t) = 0 \\ u^{+}(t,x) \neq 0 \text{ para } S(t) > 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

Uma estrutura freqüentemente utilizada para a lei de controle descrita em (5.6) é

$$u(t) = u_{eq}(t) + u_n^{\pm}(t) \tag{5.7}$$

onde $u_{eq}(t)$ é o controle equivalente e $u_n^{\pm}(t)$ é o controle chaveado.

Para o modo deslizante, a lei de controle equivalente deve satisfazer a condição

$$\dot{S}(t) = G\dot{x}(t) = GAx(t) + GBu_{eq}(t) = 0\,. \tag{5.8}$$

De (5.8) segue que

$$\begin{aligned} u_{eq}(t) &= F_{eq}x(t) \\ F_{eq} &= -(GB)^{-1}GA \end{aligned} \tag{5.9}$$

onde o produto matricial GB é assumido não nulo. Agora, a lei de controle $u_n^{\pm}(t)$ é projetada. Suponha que

$$S(t) = Gx(t)\ ,\ S \in \Re \text{ e } G \in \Re^{1xn} \tag{5.10}$$

e a candidata a função de Lyapunov seja

$$V(t) = \frac{1}{2}S^2(t)\,. \tag{5.11}$$

Assim, a condição de existência para o modo deslizante é satisfeita se

$$\dot{V}(t) = S(t)\dot{S}(t) < 0, \text{ para } s(t) \neq 0 \tag{5.12}$$

Para o sistema descrito em (5.1), com um controlador (5.7), segue que

$$\dot{S}(t) = G[Ax(t) + B(u_{eq}(t) + u_n{}^{\pm}(t))] \tag{5.13}$$

Substituindo a equação 5.9 na equação 5.13 tem-se

$$\dot{S}(t) = GBu_n^{\pm}(t). \tag{5.14}$$

Supondo que $GB = 1$, então $\dot{S}(t) = u_n^{\pm}$. Uma lei de controle que satisfaz a condição (5.12) é

$$u_n^{\pm}(t) = \rho \frac{S(t)}{\|S(t)\|}, \quad \rho < 0. \tag{5.15}$$

$$u(t) = u_{eq}(t) + u_n^{\pm}(t) = -\left[(GB)^{-1}GAx(t) - \rho \frac{S(t)}{\|S(t)\|} \right]. \tag{5.16}$$

5.2 Nova Estratégia de Controle Discreto com Modos Deslizantes (CDMD)

Neste item será apresentada uma nova estratégia CDMD cujos principais objetivos são simplicidade de implementação e robustez em relação a uma classe de incertezas.

Considere um sistema discreto MIMO representado por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi x_k + \Gamma u_k \\ y_k &= C x_k \end{aligned}, \tag{5.17}$$

onde $x_k \in \Re^n$, $y_k \in \Re^p$ são os sinais amostrados e $u_k \in \Re^m$ é o vetor de controle discreto no tempo. As matrizes constantes são $\Phi \in \Re^{nxn}$, $\Gamma \in \Re^{nxm}$ e $C \in \Re^{pxn}$.

A superfície deslizante discreta no tempo S_k pode ser dada por

$$S_k = G x_k. \tag{5.18}$$

onde $S_k \in \Re^m$ e $G \in \Re^{mxn}$ é uma matriz constante, projetada de forma que o sistema seja assintoticamente estável quando este entra na condição de deslizamento. A lei de controle (5.7) é realizada por um computador digital. O controle é gerado em cada instante de amostragem kΔ, onde Δ é o período de amostragem. Com um controlador digital, a i-ésima entrada de controle $u_i(t)$ tem valor constante entre os instantes de amostragens

$$u_i(t) = u_{ik} = u_{ik}^{eq} + u_{ik}^{\pm} \qquad k\Delta \le t < (k+1)\Delta \ , \tag{5.19}$$

onde u_{ik}^{eq} é a i-ésima componente do vetor de controle equivalente discreto e $u_{ik}^{\pm}$ é a i-ésima componente do vetor de controle $u_k^{\pm} \in \Re^m$.

5.2.1 Projeto da Superfície de Deslizamento

Uma lei de controle equivalente para o sistema (5.17) para todo *k* é obtida de $S_{k+1} = S_k$. Então

$$\begin{aligned} u_k^{eq} &= F_{eq} x_k \\ F_{eq} &= -(G\Gamma)^{-1} G(\Phi - I) \end{aligned} \tag{5.20}$$

onde *G* é uma matriz constante, projetada tal que o sistema em modo deslizante

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= [\Phi - \Gamma(G\Gamma)^{-1} G(\Phi - I)] x_k \\ Gx_k &= 0 \end{aligned} \tag{5.21}$$

seja estável.

5.2.2 Projeto da Lei de Controle Discreta

Agora, a lei de controle $u_k^{\pm}(t)$, que leva os estados para o modo deslizante, é projetada. Supondo a seguinte candidata a função de Lyapunov

$$V_k = \frac{1}{2} S_k^T S_k . \tag{5.22}$$

Para garantir a condição de existência para a superfície de deslizamento discreta, impõe-se que

$$V_{k+1} < V_k , \text{ para } \|S_k\| \neq 0. \tag{5.23}$$

Substituindo (5.22) em (5.23), a condição de existência para a superfície deslizante é

$$\frac{1}{2} S_{k+1}^T S_{k+1} < \frac{1}{2} S_k^T S_k , \ \|S_k\| \neq 0 . \tag{5.24}$$

Considerando que

$$\begin{aligned} \Delta S_{k+1} &= S_{k+1} - S_k = G x_{k+1} - G x_k \\ \Delta S_{k+1} &= G(\phi x_k + \Gamma u_k) - G x_k \end{aligned} \tag{5.25}$$

e substituindo (5.19) e (5.20) em (5.25) tem-se

$$\Delta S_{k+1} = G \Gamma u_k^{\pm} . \tag{5.26}$$

Substituindo $S_{k+1} = S_k + \Delta S_{k+1}$ em (5.24), obtém-se

$$\frac{1}{2} (S_k + \Delta S_{k+1})^T (S_k + \Delta S_{k+1}) < \frac{1}{2} S_k^T S_k , \ \|S_k\| \neq 0 \tag{5.27}$$

$$2 \Delta S_{k+1}^T S_k < -\Delta S_{k+1}^T \Delta S_{k+1} , \ \|\Delta S_{k+1}\| \neq 0, \|S_k\| \neq 0 . \tag{5.28}$$

Substituindo (5.26) em (5.28) obtém-se

$$(G \Gamma u_k^{\pm})^T S_k < -\frac{1}{2} (G \Gamma u_k^{\pm})^T G \Gamma u_k^{\pm}, \ \|S_k\| \neq 0 .$$

Supondo que $G\Gamma = I$, então a condição de existência para a superfície deslizante discreta no tempo é

$$(u_k^{\pm})^T S_k < -\frac{1}{2} (u_k^{\pm})^T (u_k^{\pm}), \|s_k\| \neq 0 . \tag{5.29}$$

A equação (5.29) pode ser reescrita como

$$\sum_{i=1}^{m} u_{ik}^{\pm} S_{ik} < -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} (u_{ik}^{\pm})^2 \ , \ \|S_k\| \neq 0 \, . \tag{5.30}$$

onde $S_{ik} = 0$ é a i-ésima superfície de deslizamento associada com a superfície de deslizamento (5.18).

Uma lei discreta no tempo para a i-ésima lei de controle $u_{i\,k}^{\pm}$, do vetor $u_k^{\pm}$, que satisfaz a condição (5.30) é

$$u_{ik}^{\pm} = -a_i \, S_{ik} \ , \ i = 1,2,...,m \, , \tag{5.31}$$

sendo a_i uma constante real e substituindo (5.31) em (5.29) tem-se

$$-a_i \, S_{ik}{}^T S_k < -\frac{1}{2} a_i{}^2 \, S_{ik}{}^T S_{ik} \ , \ \|s_k\| \neq 0$$

$$-a_i < -\frac{1}{2} a_i{}^2$$

$$a_i \left(\frac{a_i}{2} - 1 \right) < 0$$

ou seja, $0 < a_i < 2$, para $i = 1,2,...,m$.

Para o caso de uma única entrada, com $a = 1$, a lei se reduz a

$$u_k^{\pm} = -S_k \quad ; \quad u_k = u_k^{eq} + u_k^{\pm} = -[(G\Gamma)^{-1} G(\phi - I) x_k + S_k \,] \, . \tag{5.32}$$

É interessante observar a simplicidade na realização desta lei e a garantia que a computação de tal lei, através de um dispositivo digital, é bastante rápida comparada às diversas leis muito mais complexas encontradas na literatura [49]. Outra observação importante é que tal lei deixa de ser chaveada e passa a ser suave; daí dizer que esta estratégia de controle deixa de ser chaveada (CEV/MD) e passa a ser apenas com modos deslizantes (CDMD).

5.2.3 Análise da Robustez da Estabilidade

A lei de controle (5.31) foi escolhida devida sua simplicidade de realização e também por sua rápida computação. Outras várias leis discretas no tempo satisfazem a condição de existência do modo deslizante [45, 49, 50]. Mas todas essas leis apresentam uma estrutura variável na forma descrita em (5.6), devida sua robustez. Contudo, o uso de dispositivos digitais programáveis para a realização do controle robusto [52] pode causar considerável atraso na computação do sinal de controle devido ao processamento da lei de controle. Em geral, os efeitos do atraso na dinâmica do sistema comprometem o desempenho do controlador e faz com que a estabilização do sistema em malha fecha se torne um desafio. A lei de controle variável (5.6) não apresenta robustez com respeito ao atraso [16, 21, 53]. A lei de controle discreta proposta em (5.31), além de computação rápida, também apresenta robustez para uma classe de incertezas como será visto a seguir.

Considere o sistema discreto incerto

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi\, x_k + \Gamma u_k + \Delta f(x_k) \\ y_k &= C\, x_k \end{aligned} \tag{5.33}$$

onde $\Delta f(x_k) \in \Re^n$ é a função discreta que representa a incerteza da planta.

Para a análise da robustez da estabilidade, este trabalho propõe o seguinte teorema.

Teorema 5.1:

Se $\|G\,\Delta f(x_k)\| < \|G\,x_k\|$ para todo k, então o sistema descrito pela equação (5.33) com lei de controle discreta (5.32) terá condição de atratividade à superfície de deslizamento.

Prova:

Considerando a incerteza, tem-se:

$$\begin{aligned} \Delta S_{k+1} &= S_{k+1} - S_k = G\,x_{k+1} - G\,x_k \\ \Delta S_{k+1} &= G(\phi\, x_k + \Gamma u_k + \Delta f(x_k)) - G\,x_k \end{aligned} \tag{5.34}$$

e substituindo (5.19) e (5.20) em (5.34) tem-se

$$\Delta S_{k+1} = G\,\Gamma u_k^{\pm} + G\Delta f(x_k)\,. \tag{5.35}$$

Considerando a candidata a função de Lyapunov $V_k = \frac{1}{2} S_k^T\, S_k$, tem-se

$$V_{k+1} = \frac{1}{2} S_{k+1}^T\, S_{k+1} \tag{5.36}$$

$$V_{k+1} = \frac{1}{2}(S_k + \Delta S_{k+1})^T (S_k + \Delta S_{k+1}) \tag{5.37}$$

Substituindo (5.35) em (5.37) resulta em

$$V_{k+1} = \frac{1}{2}(S_k + G\,\Gamma u_k^{\pm} + G\Delta f(x_k))^T (S_k + G\,\Gamma u_k^{\pm} + G\Delta f(x_k)) \tag{5.38}$$

Considerando, por simplicidade a lei (5.32), $u_k^{\pm} = -S_k$ e $G\,\Gamma = 1$ (caso SISO), e substituindo em (5.38)

$$V_{k+1} = \frac{1}{2}(S_k - S_k + G\Delta f(x_k))^T (S_k - S_k + G\Delta f(x_k))$$

$$V_{k+1} = \frac{1}{2}(G\Delta f(x_k))^T (G\Delta f(x_k)) = \frac{1}{2}\left\|G\Delta f(x_k)\right\|^2 \tag{5.39}$$

Sabendo-se também que:

$$V_k = \frac{1}{2}(S_k)^T (S_k) = \frac{1}{2}(G\,x_k)^T (G\,x_k) = \frac{1}{2}\left\|G\,x_k\right\|^2 \tag{5.40}$$

Se $\left\|G\,x_k\right\| > \left\|G\,\Delta f(x_k)\right\|$, então de (5.39) e (5.40), tem-se que

$$V_k = \frac{1}{2}\left\|G\,x_k\right\|^2 > \frac{1}{2}\left\|G\Delta f(x_k)\right\|^2 = V_{k+1} \tag{5.41}$$

Ou seja, a condição de atratividade , que é $V_{k+1} < V_k$ será satisfeita.

5.3 O Modelo Pêndulo Invertido

Considere o sistema instável mostrado na Figura 5.1, onde um pêndulo invertido é montado sobre um carrinho com motor, que está sobre um trilho. Neste caso somente o problema bi-dimensional é considerado. O pêndulo invertido pode ser considerado como um sistema de lançamento de foguete, cujo objetivo é manter a nave na posição vertical no momento de seu lançamento [51].

Na Figura 5.1, *u* é uma força de controle, *M* é a massa do carro, *m* é a massa da haste, *x* é a posição do carro sobre o trilho e θ é o ângulo da haste. Os valores desses parâmetros para o sistema utilizado nesta implementação são dados na Tabela 5.1 [54].

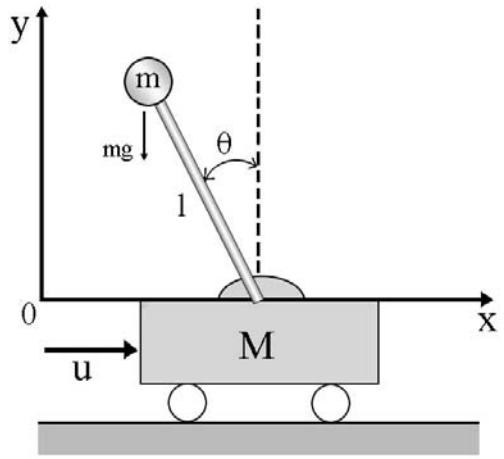

Figura 5.1 – Sistema pêndulo invertido.

Tabela 5.1: Valores dos parâmetros do pêndulo

Parâmetro	**Símbolo**	**Valor**	**Unidade**
Comprimento da haste	l	0.305	m
Massa da haste	m	0.21	kg
Massa do carro	M	0.4573	kg
Aceleração da gravidade	g	9.81	m/s^2
Dados de placa	a	1.7378	-
Dados de placa	b	7.6832	-

O modelo matemático para o sistema pêndulo invertido segue abaixo. Mais detalhes pode ser encontrado em [51].

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dfrac{(M+m)g\,sin\theta - m(sin\theta)(\dot{\theta})^2\cos\theta + b\,\dot{x}\cos\theta}{l(M+m\,sin^2\theta)} \\ \dot{x} \\ \dfrac{m\,l(\dot{\theta})^2\,sin\theta - m\,g\,sin\theta - b\dot{x}}{(M+m-m\cos\theta)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{a\cos\theta}{l(M+m\,sin^2\theta)} \\ 0 \\ \dfrac{a}{(M+m-m\cos\theta)} \end{bmatrix} V_v \ , \tag{5.42}$$

onde a relação entre a força de controle u e a tensão V_v , em Volts, gerada pelo computador digital é [54]

$$u = aV_v - b\dot{x} \tag{5.43}$$

e os valores numéricos de *a* e *b* são apresentados na Tabela 5.1.

Após linearização do sistema próximo ao ponto de equilíbrio $[\theta\ \dot{\theta}\ x\ \dot{x}] = [0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$, resulta em [54]

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{(M+m)}{M\,l}g & 0 & 0 & \dfrac{b}{M\,l} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{-m}{M}g & 0 & 0 & \dfrac{-b}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{a}{M\,l} \\ 0 \\ \dfrac{a}{M} \end{bmatrix} V_v \, . \tag{5.44}$$

5.4 Sistema Pêndulo Invertido com CMD

Aqui é apresentado o projeto para o controlador com modos deslizantes aplicado ao sistema pêndulo invertido. Assume-se que todos os estados são acessíveis e podem ser utilizados na malha de realimentação. As equações (5.2) e (5.18) são utilizadas para computar a superfície deslizante para controladores contínuos e discretos, respectivamente.

Usando a planta descrita em (5.44), os valores dos parâmetros da Tabela 5.1 e as equações (5.5) e (5.21), obtém-se as superfícies deslizantes para os casos contínuo e

discreto. Para obter o valor dos ganhos da superfície é utilizado o método de alocação de pólos. A lei de controle é obtida através de (5.16) e (5.32), para os casos contínuo e discreto, respectivamente.

Utilizando as informações da Tabela 5.1, tem-se a seguinte planta do sistema.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 46.9 & 0 & 0 & 55.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \\ -4.5 & 0 & 0 & -16.8 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -12.4 \\ 0 \\ 3.8 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.45}$$

A transformação da planta para o modelo discreto, descrito em (5.17), é facilmente obtida com o *software Matlab*, através da linha de comando *c2d*.

Os pólos são escolhidos levando-se em consideração a saturação da interface A/D e D/A da placa de aquisição, que é limitado em ± 5Volts. Assim, foi escolhido os pólos -10, -5 e -3, que estabilizam a dinâmica de ordem reduzida para o sistema em modo deslizante (5.5). Os vetores de valores constantes obtidos para o controlador contínuo são

$$G = \begin{bmatrix} -348.1 & -62.1 & -466.2 & -178.7 \end{bmatrix}. \tag{5.46}$$

e

$$F_{eq} = \begin{bmatrix} 22.2 & 3.6 & 0 & 9.3 \end{bmatrix}.$$

O controlador contínuo (5.15) foi modificado como a seguir

$$u_n^{\pm}(t) = \rho \frac{S(t)}{\| S(t) \| + \Delta}, \quad \rho < 0, \tag{5.47}$$

com $\rho = -1$ e $\Delta = 0.005$. Esta modificação foi feita para reduzir o efeito do *chattering* [12].

Para o controlador discreto, os ganhos variam de acordo com o período de amostragem e são obtidos de (5.20) e (5.21). Para o período de amostragem de 0.01 segundo os vetores de ganhos obtidos são

$$F_{eq} = \begin{bmatrix} 11.6 & 1.9 & 0 & 5.6 \end{bmatrix} \text{ e } G = \begin{bmatrix} -180.5 & -31.5 & -121.8 & -77.1 \end{bmatrix},$$

e para a amostragem de 0.001 segundo, os vetores de ganhos são

$$F_{eq} = \begin{bmatrix} 11.4 & 1.8 & 0 & 5.6 \end{bmatrix} \text{ e } G = \begin{bmatrix} -1817.9 & -317.1 & -1226.5 & -776.8 \end{bmatrix}.$$

A lei de controle utilizada para o caso discreto foi a mesma apresentada em (5.31), $u_k^{\pm} = -S_k$.

5.5 Simulações e Resultados Experimentais

Os resultados das simulações e implementações práticas para os controladores contínuo e discreto no tempo, são apresentados nesta seção. Os equipamentos utilizados para a realização prática desta estratégia de controle são apresentados na Figura 5.2 e descritos a seguir.

- PC Pentium 200 MHz MMX ;
- Sistema Pêndulo Invertido;
- Placa de aquisição de dados com Interface A/D – D/A MULTIQTM [16], que possui 8 conversores A/D e 8 conversores D/A, e
- *Software Matlab/Simulink/Real-Time* e *software Wincon.*

Figura 5.2 – Equipamento utilizado para realização do controle sobre o sistema pêndulo invertido.

A Figura 5.3 mostra a representação esquemática para a implementação do controle sobre o sistema pêndulo invertido.

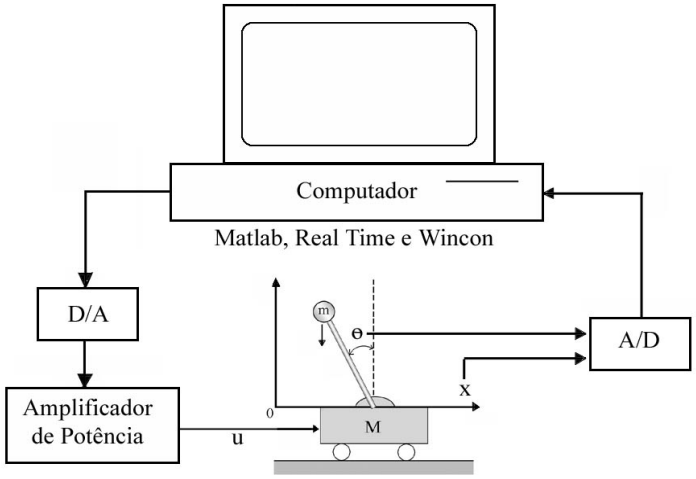

Figura 5.3 – Representação esquemática do sistema pêndulo invertido com o dispositivo de controle

Na seção anterior, foi considerado que, para o projeto da superfície de deslizamento, todos os estados da planta estão acessíveis, porém, no sistema pêndulo invertido utilizado, somente os estados θ e x estão disponíveis. Para calcular os outros dois estados, $\dot{\theta}$ e $\dot{x}$, foi utilizado através do *software Matlab* um filtro derivativo [54].

5.5.1 Controle Contínuo com Modos Deslizantes (CCMD)

5.5.1.1 Simulações

Na Figura 5.4 é mostrada a representação em diagrama de blocos, para a simulação do pêndulo invertido controlado com a estratégia modos deslizantes contínuo no tempo (5.47).

Os resultados, considerando uma referência quadrada e condições iniciais $\left[\theta\ \dot{\theta}\ x\ \dot{x}\right] = \left[0\ 0\ \ 0\ \ 0\right]$ são apresentados nas Figuras 5.5 e 5.6. As simulações levam em consideração que o controle é realizado por um computador digital, onde o período de amostragem não foi considerado no projeto do controlador, mas foi considerado nas simulações através do bloco de funções do conversor A/D, implementado no *software*

Matlab with Simulink. O modelo não-linear (5.42) foi usado para as simulações do sistema pêndulo invertido.

Dois casos são apresentados: i) período de amostragem de 0.01 segundo e ii) período de amostragem de 0.065 segundo. Os resultados indicam que o desempenho do sistema é prejudicado com o aumento do período de amostragem.

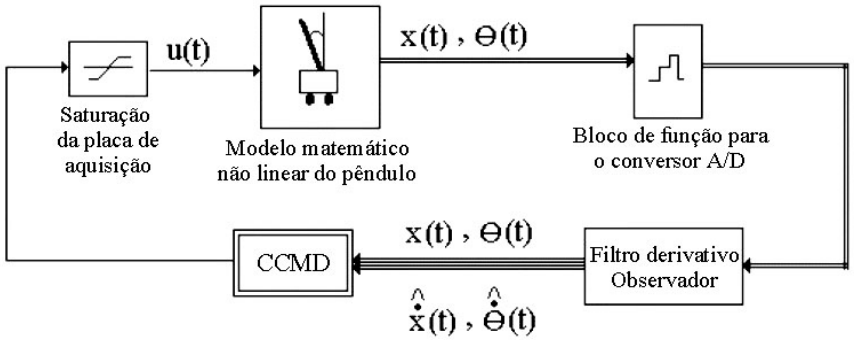

Figura 5.4 – Representação em diagrama de blocos da simulação do pêndulo invertido utilizando CCMD.

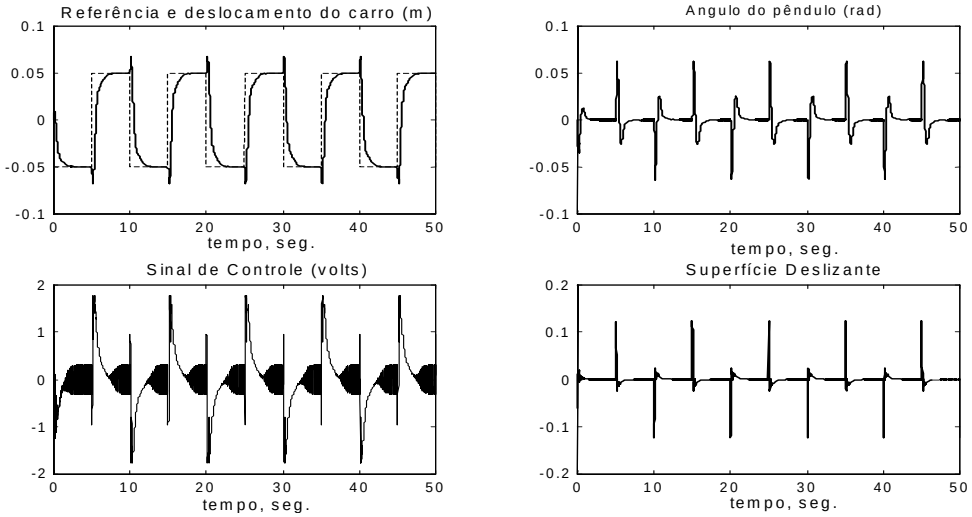

Figura 5.5 - CCMD realizado por um computador: simulações com período de amostragem de 0.001 seg.

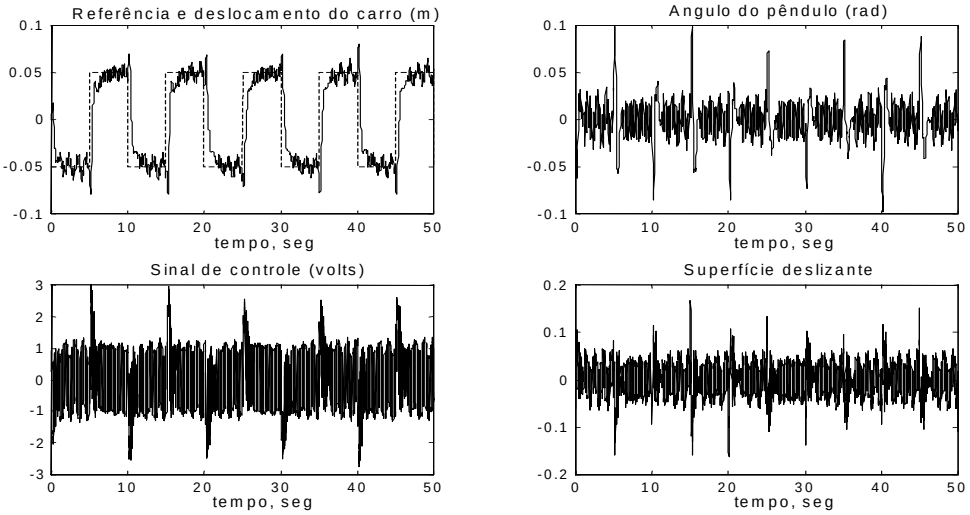

Figura 5.6 - CCMD realizado por um computador: simulações com período de amostragem de 0.065 seg.

5.5.1.2 Implementação prática

Um controlador contínuo (5.47) foi implementado usando o *software Simulink* e *Wincon* como mostrado na Figura 5.7. Alguns resultados experimentais são apresentados nas Figuras 5.8 e 5.9.

Analisando as simulações e os resultados experimentais, observa-se que o CCMD é muito sensível a mudança do período de amostragem, mostrando que o desempenho do controlador é prejudicado com o aumento dos períodos de amostragem (Figuras 5.6 e 5.9).

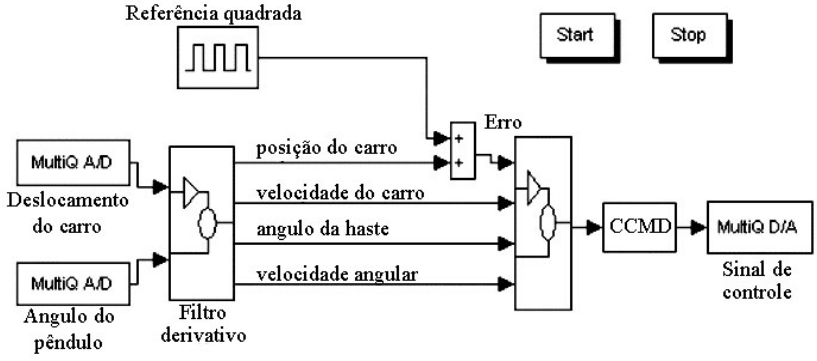

Figura 5.7 - Controlador contínuo emulado em um computador digital

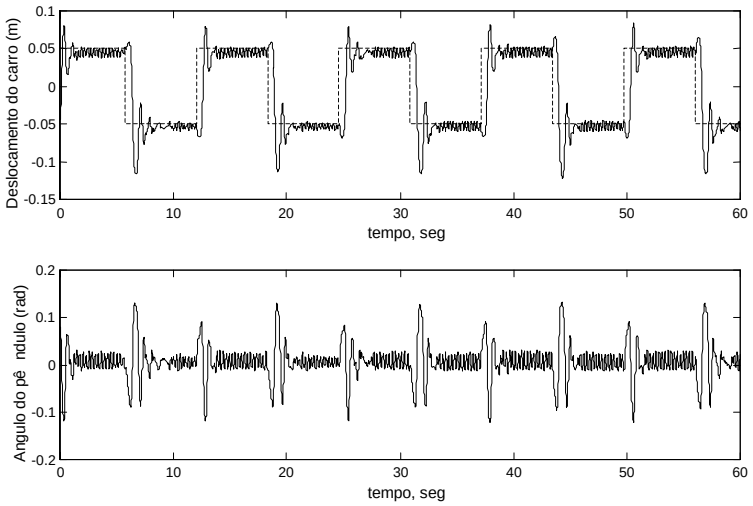

Figura 5.8 - CCMD realizado por um computador: resultados experimentais com período de amostragem de 0.001 seg.

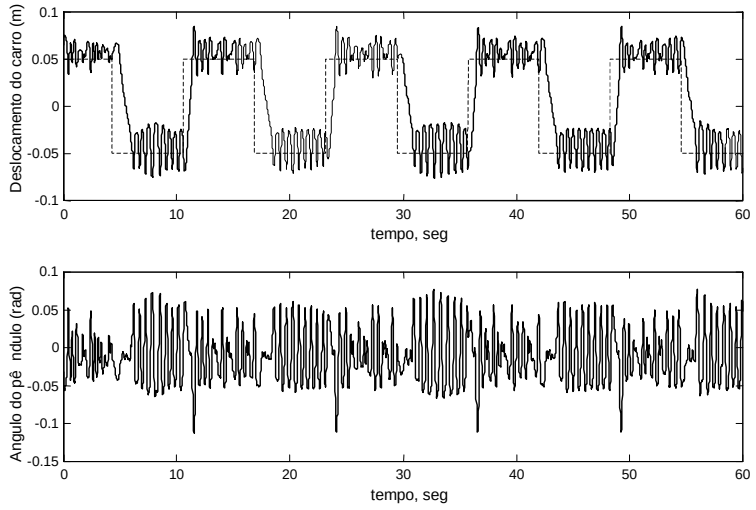

Figura 5.9 - CCMD realizado por um computador: resultados experimentais com período de amostragem de 0.01 seg.

5.5.2 Controle Discreto com Modos Deslizantes (CDMD)

5.5.2.1 Simulações

O diagrama, composto pelo controlador discreto com modos deslizantes (5.32) e o sistema pêndulo invertido, é mostrado na Figura 5.10. Nas simulações considera-se que a lei de controle é realizada por um computador digital e o período de amostragem é levado em consideração ao projetar o controlador.

Para simular a amostragem do sinal utiliza-se o bloco *zero order* do *software Simulink*. A mesma referência e as mesmas condições iniciais utilizadas na simulação do CCMD são utilizadas na simulação do CDMD. Foram simulados dois casos: i) amostragem de 0.01 segundo e ii) amostragem de 0.1 segundo. Os resultados são apresentados respectivamente nas Figuras 5.11 e 5.12

Os resultados indicam bom desempenho do sistema mesmo com o aumento do período de amostragem.

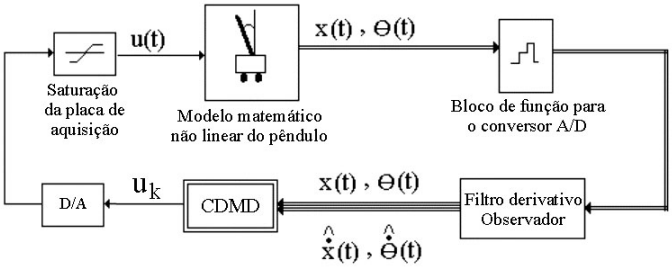

Figura 5.10 – Diagrama de blocos representando o procedimento para simulação do CDMD aplicado ao pêndulo invertido.

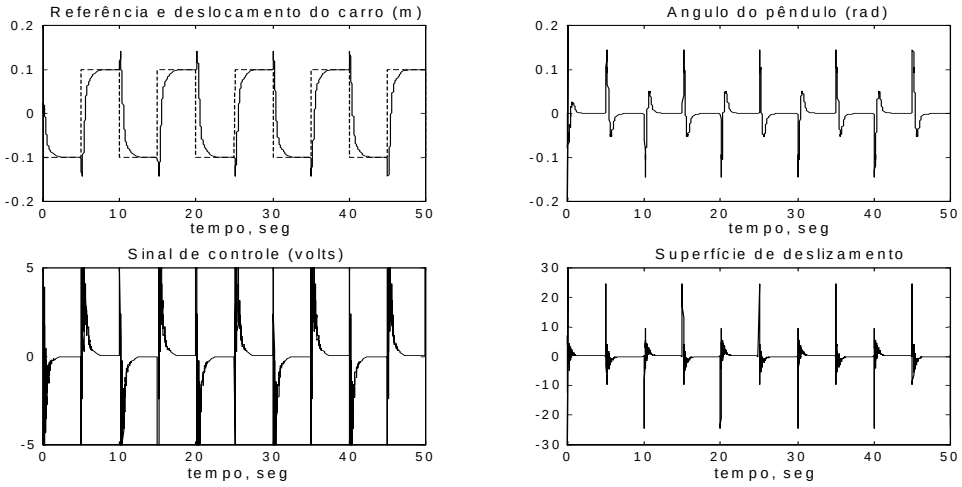

Figura 5.11 – CDMD realizado por um computador digital: simulação com período de amostragem de 0.01 seg.

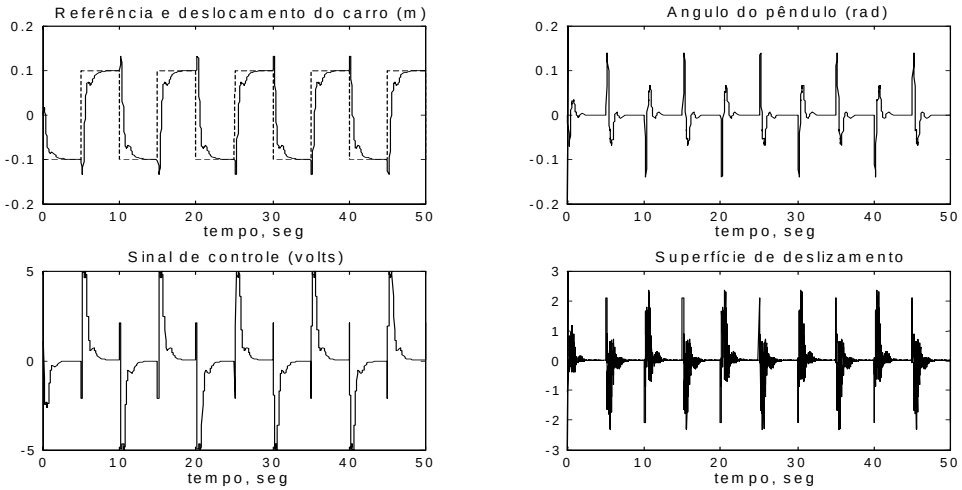

Figura 5.12 – CDMD realizado por um computador digital: simulação com período de amostragem de 0.1 seg.

5.5.2.2 Implementação prática

O controlador discreto proposto em (5.32) é implementado num computador digital utilizando o *software Simulink* e *Wincon* como é mostrado na Figura 5.13. Dois resultados experimentais com período de amostragem de 0.001 segundo e 0.01 segundo são apresentados, respectivamente, nas Figuras 5.14 e 5.15. Os resultados indicam um bom desempenho do CDMD mesmo com o aumento do período de amostragem.

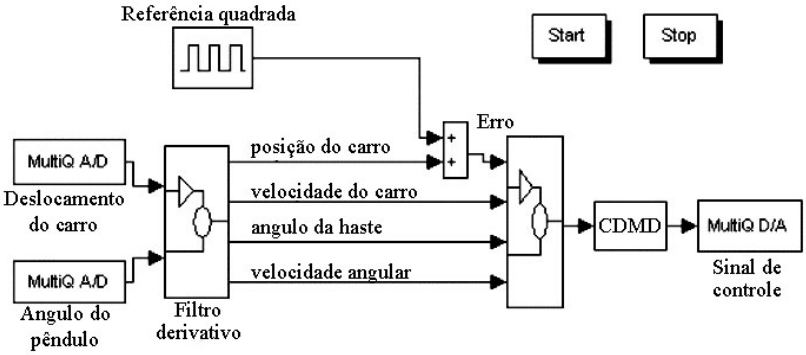

Figura 5.13 – Controlador discreto implementado em um computador digital.

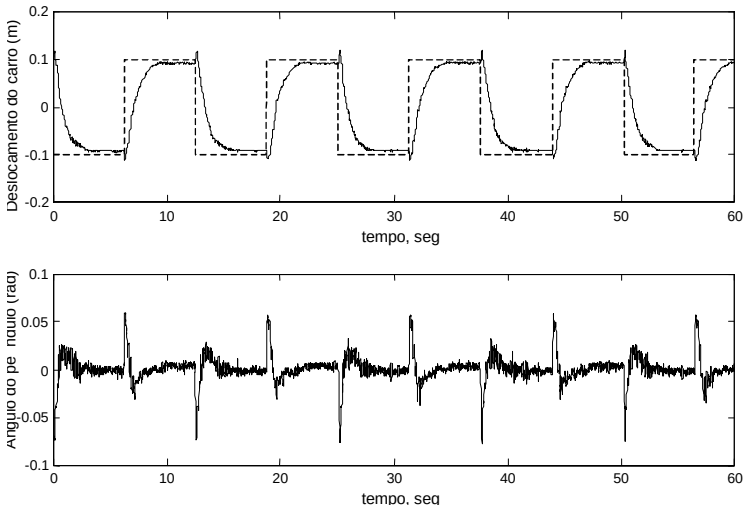

Figura 5.14 - CDMD realizado por um computador: resultados experimentais com período de amostragem de 0.001 seg.

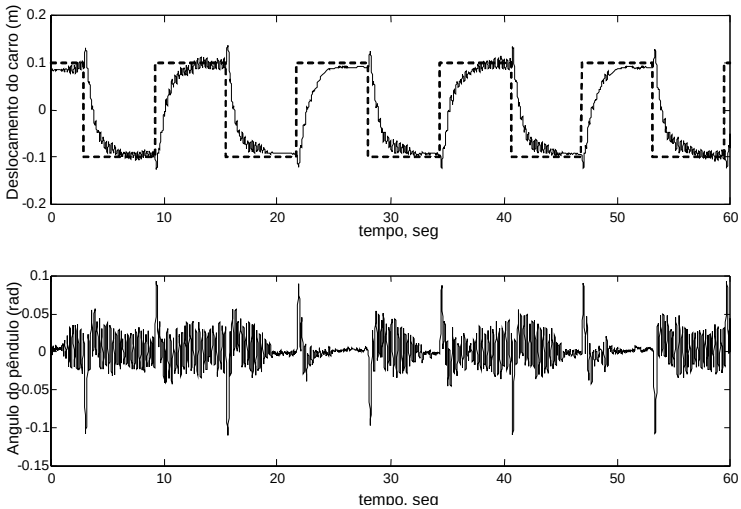

Figura 5.15 - CDMD realizado por um computador: resultados experimentais com período de amostragem de 0.01 seg.

5.6 Comentários

Neste capítulo, um controlador com modos deslizantes, realizado por um computador digital, foi analisado. Este projeto não leva em consideração o tempo de atraso e o CCMD é um controlador contínuo, ou seja, é projetado sem conhecer o período de amostragem, portanto, o CCMD, implementado em um computar digital, só irá ter um bom desempenho se o período de amostragem for pequeno.

Um novo controlador discreto com modos deslizantes foi proposto, CDMD. Este controlador sugere uma lei suave ao invés de uma lei chaveada. O CDMD leva em consideração os conversores e o período de amostragem.

A grande vantagem da lei de controle discreta proposta é sua simplicidade de aplicação, uma vez que não possui estrutura chaveada. Assim, a computação da lei é mais rápida evitando atraso devido a computação do sinal de controle. Essa lei discreta também é robusta para uma classe de incertezas.

Simulações e implementações práticas foram realizadas sobre o sistema pêndulo invertido para o CCMD e CDMD propostos. Os resultados mostram um bom desempenho do controle com modos deslizantes para ambos os casos, mas foi o controlador discreto que apresentou melhor resultado, mesmo com grandes períodos de amostragens.

CAPÍTULO 6

6. CONTROLE DISCRETO COM MODOS DESLIZANTES PARA SISTEMAS COM ATRASO NO SINAL DE CONTROLE E SEM ESTIMATIVA DAS INCERTEZAS (CDMD-A)

O uso de dispositivos digitais programáveis para realização do controle robusto pode causar considerável atraso no sinal de controle devido ao tempo de processamento. Em geral, sabe-se que os efeitos do atraso do tempo em sistemas dinâmicos degradam o desempenho do controle e faz com que o problema de estabilização em malha-fechada seja mais desafiador.

Assim, quando um algoritmo de controle é implementado sobre um computador digital, existe um atraso h, causado principalmente pelo tempo de execução das instruções no dispositivo digital, podendo prejudicar o desempenho do sistema ou até mesmo levá-lo a instabilidade.

Neste capítulo é proposta uma nova lei de controle discreto, capaz de suprir o sinal atrasado sem a necessidade de um preditor.

6.1 Modelo Discreto com Atraso

Considere um sistema discreto de uma entrada e sem atraso, representado por [30]

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi x_k + \Gamma u_k \\ y_k &= C x_k \end{aligned} \tag{6.1}$$

onde $x_k \in \Re^n$, $y_k \in \Re^p$ são os sinais amostrados e $u_k \in \Re^1$ é o controle discreto no tempo. As matrizes constantes são $\Phi \in \Re^{n\,x\,n}$, $\Gamma \in \Re^{n\,x\,1}$, $C \in \Re^{p\,x\,n}$. O par (Φ,Γ) é assumido ser controlável, e o par (Φ,C) observável.

Para o projeto deste controlador, assume-se que o atraso é constante e menor que o período de amostragem Δ $(0 < h < \Delta)$. Desta forma o controle *u*(t) deve ser escolhido como a seguir [2]:

$$u(t) = u_k, \quad \text{para } k\Delta + \Delta \le t < (k+1)\Delta + \Delta \tag{6.2}$$

O modelo discreto no tempo (6.1), com entrada de controle (6.2), e considerando atraso no sinal de controle, é dada como a seguir [2]:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi x_k + (\Gamma - \Gamma_{\Delta-h}) u_{k-1} + \Gamma_{\Delta-h} u_k \\ &= \Phi x_k + \Gamma_1 u_{k-1} + \Gamma_2 u_k \end{aligned} \tag{6.3}$$

onde

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \Gamma - \Gamma_{\Delta-h} = \int_{\Delta-h}^{\Delta} \exp(A\tau)\, d\tau\, B, \\ \Gamma_2 &= \Gamma_{\Delta-h} = \int_0^{\Delta-h} \exp(A\tau)\, d\tau\, B. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Neste modelo, a suposição de controlabilidade e observabilidade são preservadas em respeito da existência de um tempo de atraso de computação. Note que a matriz de entrada Γ satisfaz a relação, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$.

Considere um sistema discreto MIMO com tempo de atraso de computação [2], representado por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi x_k + \Gamma_1 u_{k-1} + \Gamma_2 u_k \\ y_k &= C x_k \end{aligned}, \tag{6.5}$$

onde $x_k \in \Re^n$, $y_k \in \Re^p$ são os sinais amostrados e $u_k \in \Re^m$ é o vetor de controle discreto no tempo. As matrizes constantes são $\Phi \in \Re^{n\,x\,n}$, Γ_1, $\Gamma_2 \in \Re^{n\,x\,m}$ e $C \in \Re^{p\,x\,n}$.

6.2 Projeto da Superfície Deslizante Discreta

A superfície deslizante discreta no tempo, que leva em consideração o tempo de atraso, S_k é definida como

$$S_k = G\,x_k + G\,\Gamma_1\,u_{k-1}. \tag{6.6}$$

Observe que esta nova superfície depende da componente atrasada do sinal de controle, e este sinal é acessível. A escolha desta superfície é que compensa o atraso no sinal de controle e, portanto, é uma das contribuições deste trabalho. A matriz $G \in \Re^{1xn}$ é projetada tal que os estados, mantidos sobre S_k para todo *k*, sejam estáveis. O controle é dado em cada intervalo de amostragem kΔ, onde Δ é o período de amostragem. Em controle digital, a entrada *u* tem um valor constante entre o período amostrado

$$u(t) = u_k = u_k^{eq} + u_k^{\pm} \qquad k\Delta \le t < (k+1)\Delta \ , \tag{6.7}$$

onde u_k^{eq} é o controle equivalente discreto no tempo e $u_k^{\pm}$ é o controle chaveado discreto no tempo.

Uma lei de controle equivalente para o sistema (6.5) para todo *k* é obtida da condição de deslizamento $S_{k+1} = S_k$. Então,

$$\begin{aligned}
&G\,x_{k+1} + G\,\Gamma_1\,u_k^{eq} = G\,x_k + G\,\Gamma_1\,u_{k-1}^{eq} \\
&G\left(\Phi\,x_k + \Gamma_1 u_{k-1}^{eq} + \Gamma_2 u_k^{eq}\right) + G\,\Gamma_1\,u_k^{eq} = G\,x_k + G\,\Gamma_1\,u_{k-1}^{eq} \\
&G\,\Phi\,x_k + G\,\Gamma_2 u_k^{eq} + G\,\Gamma_1\,u_k^{eq} = G\,x_k
\end{aligned}$$

Considerando que $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, o resultado é

$$\begin{aligned}
u_k^{eq} &= F_{eq}\,x_k \\
F_{eq} &= -(G\,\Gamma)^{-1} G(\Phi - I)
\end{aligned} \tag{6.8}$$

onde G é uma matriz constante projetada tal que o sistema, em modo deslizante, seja estável.

6.3 Projeto da Lei de Controle Discreta

Agora, a lei de controle $u_k^{\pm}$, levando em consideração o tempo de atraso, é projetada. Considerando as equações (5.22)-(5.24), e (6.8), tem-se

$$\Delta S_{k+1} = S_{k+1} - S_k = G\, x_{k+1} + G\,\Gamma_1\, u_k - G\, x_k - G\,\Gamma_1\, u_{k-1} \tag{6.9}$$

que também resulta

$$\Delta S_{k+1} = G\ \Gamma u_k^{\pm}. \tag{6.10}$$

Já que as equações (6.10) e (5.26) são iguais, logo os passos para cálculo da lei de controle são os mesmos (5.27)-(5.30), também resultando em

$$u_{ik}^{\pm} = -a_i\, S_{ik}\ ,\ i = 1,2,...,m, \tag{6.11}$$

sendo a_i uma constante real, tal que $0 < a_i < 2$, para $i = 1,2,...,m$.

Para o caso de uma única entrada, com $a = 1$, a lei se reduz a

$$\begin{aligned} u_k^{\pm} &= -S_k \\ u_k &= u_k^{eq} + u_k^{\pm} = -[(G\,\Gamma)^{-1} G\,(\phi - I) x_k + S_k\,]. \\ S_k &= G\, x_k + G\,\Gamma_1\, u_{k-1} \end{aligned} \tag{6.12}$$

6.4 Análise da Robustez da Estabilidade

A lei de controle discreta proposta (6.12), além da rápida computação, também apresenta robustez para uma classe de incertezas como será mostrado a seguir.

Considere o sistema discreto com incerteza e atraso no tempo

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi\, x_k + \Gamma_1\, u_{k-1} + \Gamma_2\, u_k + \Delta f\,(x_k) \\ y_k &= C\, x_k \end{aligned} \tag{6.13}$$

onde $\Delta f\,(x_k) \in \Re^n$ é uma função discreta que representa as incertezas da planta.

Para a análise da robustez da estabilidade, este trabalho propõe o seguinte teorema.

Teorema 6.1: Se $\|G\,\Delta f(x_k)\| < \|G\,(x_k + \Gamma_1\, u_{k-1})\|$ para todo *k*, então o sistema (6.13), com lei de controle discreta (6.12), garante a condição de alcançabilidade à superfície deslizante.

Prova: Com o sistema (6.13), que considera a incerteza, tem-se:

$$\begin{aligned} \Delta S_{k+1} &= S_{k+1} - S_k = G\,x_{k+1} - G\,x_k \\ \Delta S_{k+1} &= G(\phi\; x_k + \Gamma u_k + \Delta f(x_k)) - G\,x_k \end{aligned} \tag{6.14}$$

e substituindo (6.7) e (6.8) em (6.14) tem-se

$$\Delta S_{k+1} = G\,\Gamma u_k^{\pm} + G\Delta f(x_k)\,. \tag{6.15}$$

Considerando a candidata a função de Lyapunov $V_k = \frac{1}{2} S_k^T\, S_k$, tem-se

$$V_{k+1} = \frac{1}{2} S_{k+1}^T\, S_{k+1}$$

$$V_{k+1} = \frac{1}{2}(S_k + \Delta S_{k+1})^T (S_k + \Delta S_{k+1}) \tag{6.16}$$

Substituindo (6.15) em (6.16) resulta em

$$V_{k+1} = \frac{1}{2}(S_k + G\,\Gamma u_k^{\pm} + G\Delta f(x_k))^T (S_k + G\,\Gamma u_k^{\pm} + G\Delta f(x_k)) \tag{6.17}$$

Considerando, por simplicidade a lei (6.12), $u_k^{\pm} = -S_k$ e $G\,\Gamma = 1$ (caso SISO), e substituindo em (6.17)

$$V_{k+1} = \frac{1}{2}(S_k - S_k + G\Delta f(x_k))^T (S_k - S_k + G\Delta f(x_k))$$

$$V_{k+1} = \frac{1}{2}(G\Delta f(x_k))^T (G\Delta f(x_k))$$
$$V_{k+1} = \frac{1}{2}\left\|G\Delta f(x_k)\right\|^2 \tag{6.18}$$

Sabendo-se também que:

$$V_k = \frac{1}{2}(S_k)^T (S_k) = \frac{1}{2}(G\,x_k + G\,\Gamma_1\,u_{k-1})^T (G\,x_k + +G\,\Gamma_1\,u_{k-1})$$
$$V_k = \frac{1}{2}\left\|G\,x_k + G\,\Gamma_1\,u_{k-1}\right\|^2 \tag{6.19}$$

Se $\left\|G\,\Delta f(x_k)\right\| < \left\|G(x_k + \Gamma_1\,u_{k-1})\right\|$, então de (6.18) e (6.19), tem-se que

$$V_{k+1} = \frac{1}{2}\left\|G\Delta f(x_k)\right\|^2 < \frac{1}{2}\left\|G\,x_k + G\,\Gamma_1\,u_{k-1}\right\|^2 = V_k \tag{6.20}$$

Ou seja, a condição de atratividade , que é $V_{k+1} < V_k$ será satisfeita.

6.5 Comentários

Neste capítulo foi proposta uma nova estratégia de controle discreto com modos deslizantes, que leva em consideração o atraso no sinal de controle, o que não ocorria no controlador apresentado no Capítulo 5. As simulações e resultados práticos para esta estratégia serão apresentados no Capítulo 8 deste trabalho. Esta nova lei de controle também não utiliza estrutura chaveada, portanto, os efeitos sentidos pelo atraso podem ser minimizados. Foi apresentada também a análise de robustez, mostrando que o CDMD-A é também robusto, em relação à existência de deslizamento, para uma classe de incertezas da planta. Outra importante observação é que utilizando este controlador não há a necessidade de utilizar um preditor para os casos de controladores com entrada atrasada, portanto, os efeitos do atraso são suprimidos através da escolha adequada da superfície deslizante, que leva em consideração o atraso.

CAPÍTULO 7

7. CONTROLE DISCRETO COM MODOS DESLIZANTES PARA SISTEMAS SEM E COM ATRASO NO SINAL DE CONTROLE E COM ESTIMADOR DE INCERTEZAS (CDMD-B)

Neste capítulo outro controlador é proposto. Assim como o controlador do Capítulo 6, este controlador discreto leva em consideração o atraso no tempo de computação da entrada de controle e nessa estratégia não faz-se necessidade de uso de preditores. Outra característica desse novo controlador é a presença de um estimador de incertezas.

7.1 Controle Discreto com Modos Deslizantes (CDMD-B) sem atraso no sinal de controle

Considere o sistema discreto, sem atraso, com uma entrada

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi x_k + \Gamma u_k + f_k \\ y_k &= C x_k \end{aligned} \tag{7.1}$$

onde $x_k \in \Re^n$, $y_k \in \Re^p$ são os sinais amostrados e $u_k \in \Re^1$ é o controle discreto no tempo. As matrizes constantes são $\Phi \in \Re^{n\,x\,n}$, $\Gamma \in \Re^{n\,x\,1}$, $C \in \Re^{p\,x\,n}$. O par (Φ,Γ) é assumido ser controlável, e o par (Φ,C) observável.

A superfície deslizante discreta no tempo, S_k, é definida como

$$S_k = G\,x_k\,. \tag{7.2}$$

A matriz G $\in \Re^{1xn}$ é projetada tal que os estados, mantidos sobre S_k para todo *k*, sejam estáveis. O controle é dado em cada intervalo de amostragem kΔ, onde Δ é o período de amostragem. Em controle digital, a entrada *u* tem um valor constante entre o período amostrado

$$u(t) = u_k = u_k^{eq} + u_k^f \qquad k\Delta \le t < (k+1)\Delta \tag{7.3}$$

onde u_k^{eq} é o controle equivalente discreto no tempo e u_k^f é o controle discreto no tempo que mantém o sistema sobre a superfície de deslizamento.

7.1.1 Projeto da Superfície Deslizante Discreta

Uma lei de controle equivalente para o sistema (7.1) para todo o *k* é dada da condição $S_k = S_{k+1}$ [30]

$$\begin{aligned} u_k^{eq} &= F_{eq}x_k \\ F_{eq} &= -(G\Gamma)^{-1}G(\Phi - I) \end{aligned} \tag{7.4}$$

onde *G* é uma matriz constante, projetada tal que o sistema em modo deslizante

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= [\Phi - \Gamma(G\Gamma)^{-1}G(\Phi - I)]x_k \\ Gx_k &= 0 \end{aligned} \tag{7.5}$$

seja estável.

7.1.2 Projeto da Lei de Controle Discreta

Agora, a lei de controle $u_k^f(t)$ é projetada, supondo a seguinte candidata a função de Lyapunov

$$V_k = \frac{1}{2} S_k^2 . \tag{7.6}$$

Para garantir a condição de existência para a superfície de deslizamento discreta, tem-se

$$V_{k+1} < V_k . \tag{7.7}$$

Substituindo (7.6) em (7.7), a condição de existência para a superfície deslizante é

$$\frac{1}{2} S_{k+1}^2 < \frac{1}{2} S_k^2 . \tag{7.8}$$

Considerando que

$$\begin{aligned} \Delta S_{k+1} &= S_{k+1} - S_k = G x_{k+1} - G x_k \\ \Delta S_{k+1} &= G(\Phi x_k + \Gamma u_k + f_k) - G x_k \end{aligned} \tag{7.9}$$

e substituindo (7.3) e (7.4) em (7.9) tem-se

$$\Delta S_{k+1} = G \Gamma u_k^f + G f_k . \tag{7.10}$$

Substituindo $S_{k+1} = S_k + \Delta S_{k+1}$ em (7.8), tem-se

$$\frac{1}{2}(S_k + \Delta S_{k+1})^2 < \frac{1}{2} S_k^2 , \text{ e} \tag{7.11}$$

$$\frac{1}{2}(S_k^2 + 2\Delta S_{k+1} S_k + \Delta S_{k+1}^2) < \frac{1}{2} S_k^2 . \tag{7.12}$$

Substituindo (7.10) em (7.12) resulta em

$$S_k (G \Gamma u_k^f + G f_k) < -\frac{1}{2}(G \Gamma u_k^f + G f_k)^2 . \tag{7.13}$$

Uma lei, discreta no tempo, u_k^f que satisfaz a condição de existência (7.13) é

$$u_k^f = -0.1 \, (G\Gamma)^{-1} \left[S_k + G \hat{f}_k \right] , \tag{7.14}$$

onde $G\hat{f}_k \cong Gf_k$ é a estimativa do valor de Gf_k, que é obtida por

$$S_{k+1} = G\Phi x_k + G\Gamma u_k + Gf_k$$

$$Gf_k = S_{k+1} - G\Phi x_k - G\Gamma u_k \tag{7.15}$$

Considerando que f_k é uma função contínua e suave, segue que

$$Gf_{k-1} = G\hat{f}_k \cong Gf_k . \tag{7.16}$$

Logo,

$$G\hat{f}_k = S_k - G\Phi x_{k-1} - G\Gamma u_{k-1} \tag{7.17}$$

Assim, segue que a lei discreta de controle é

$$\begin{aligned} u_k &= u_k^{eq} + u_k^f = -(G\Gamma)^{-1}\left\{G[\Phi - I]x_k + 0.1\left\lfloor S_k + G\hat{f}_k \right\rfloor\right\}, \\ G\hat{f}_k &= S_k - G\Phi x_{k-1} - G\Gamma u_{k-1}, \\ S_k &= Gx_k \end{aligned} \tag{7.18}$$

7.2 Controle Discreto com Modos Deslizantes (CDMD-B) com Atraso no Sinal de Controle

Assume-se que o atraso é constante e menor que o intervalo de amostragem Δ $(0 < h < \Delta)$. Desta forma o controle *u*(t) deve ser escolhido como a seguir [2]

$$u(t) = u_k , \quad \text{para } k\Delta + \Delta \le t < (k+1)T + \Delta \tag{7.19}$$

O modelo discreto no tempo (7.1) com entrada de controle (7.19) é dado como segue [2]:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi\, x_k + (\Gamma - \Gamma_{\Delta-h})\, u_{k-1} + \Gamma_{\Delta-h}\, u_k \\ &= \Phi\, x_k + \Gamma_1\, u_{k-1} + \Gamma_2\, u_k \end{aligned} \tag{7.20}$$

onde,

$$\Gamma_1 = \Gamma - \Gamma_{\Delta-h} = \int_{\Delta-h}^{\Delta} \exp(A\tau)\, d\tau\, B,$$
$$\Gamma_2 = \Gamma_{\Delta-h} = \int_0^{\Delta-h} \exp(A\tau)\, d\tau\, B. \qquad (7.21)$$

Neste modelo, a suposição de controlabilidade e observabilidade são preservadas em respeito da existência de um tempo de atraso de computação. Note que a matriz de entrada Γ satisfaz a relação, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$.

Considere um sistema discreto com uma entrada e com tempo de atraso de computação, representado por

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma_1 u_{k-1} + \Gamma_2 u_k + f_k$$
$$y_k = C x_k \qquad (7.22)$$

onde $x_k \in \Re^n$, $y_k \in \Re^p$ são os sinais amostrados, $u_k \in \Re^1$ é o controle discreto no tempo e $f_k \in \Re^n$ é a função discreta que representa as incertezas da planta. As matrizes constantes são $\Phi \in \Re^{n\,x\,n}$, Γ_1 e $\Gamma_2 \in \Re^{n\,x1}$, $C \in \Re^{p\,x\,n}$.

7.2.1 Projeto da Superfície Deslizante Discreta

A superfície deslizante discreta no tempo, que leva em consideração o tempo de atraso, S_k é definida como

$$S_k = G\, x_k + G\, \Gamma_1\, u_{k-1}. \qquad (7.23)$$

Assim, como no capítulo anterior, a superfície deslizante escolhida depende do sinal atrasado da lei de controle. A matriz $G \in \Re^{1xn}$ é projetada tal que os estados, mantidos sobre S_k para todo *k*, sejam estáveis. O controle é dado em cada intervalo de amostragem $k\Delta$, onde Δ é o período de amostragem. Em controle digital, a entrada *u* tem um valor constante entre os instantes de amostragem

$$u(t) = u_k = u_k^{eq} + u_k^f \qquad k\Delta \le t < (k+1)\Delta, \qquad (7.24)$$

onde u_k^{eq} é o controle equivalente discreto no tempo e u_k^f é o controle discreto no tempo que mantém o sistema sobre a superfície de deslizamento.

Uma lei de controle equivalente paro o modelo descrito em (7.22) é obtida de $S_{k+1} = S_k$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
&G\,x_{k+1} + G\,\Gamma_1 u_k^{eq} = G\,x_k + G\,\Gamma_1 u_{k-1}^{eq} \\
&G\left(\Phi\,x_k + \Gamma_1 u_{k-1}^{eq} + \Gamma_2 u_k^{eq}\right) + G\,\Gamma_1 u_k^{eq} = G\,x_k + G\,\Gamma_1 u_{k-1}^{eq} \\
&G\,\Phi\,x_k + G\,\Gamma_2 u_k^{eq} + G\,\Gamma_1 u_k^{eq} = G\,x_k
\end{aligned}
$$

Considerando que $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, o resultado é

$$
\begin{aligned}
u_k^{eq} &= F_{eq} x_k \\
F_{eq} &= -(G\,\Gamma)^{-1} G(\Phi - I)
\end{aligned}
\tag{7.25}
$$

onde G é uma matriz constante projetada tal que o sistema, em modo deslizante, seja estável.

7.2.2 Projeto da Lei de Controle Discreta

Neste item, a lei de controle u_k^f é projetada. Considerando as equações (5.22)-(5.24), e (7.25), tem-se

$$
\begin{aligned}
\Delta S_{k+1} &= S_{k+1} - S_k \\
\Delta S_{k+1} &= G(\Phi x_k + \Gamma_1 u_{k-1} + \Gamma_2 u_k + f_k + \Gamma_1 u_k) - G\,x_k - G\,\Gamma_1 u_{k-1}
\end{aligned}
\tag{7.26}
$$

sendo $u_k = u_k^{eq} + u_k^f$, $u_k^{eq} = F_{eq} x_k$ e $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, que também resulta em

$$
\Delta S_{k+1} = G\,\Gamma\,u_k^f + G\,f_k . \tag{7.27}
$$

Já que as equações (7.27) e (7.10) são iguais, logo os passos para cálculo da lei de controle são os mesmos (7.11)-(7.14), também resultando em

$$
u_k^f = -0.1(G\Gamma)^{-1}\left[S_k + G\hat{f}_k\right]. \tag{7.28}
$$

onde $G\hat{f}_k \cong Gf_k$ é a estimativa de Gf_k, que é calculada como a seguir

$$S_{k+1} = G\Phi x_k + G\Gamma_1 u_{k-1} + G\Gamma_2 u_k + G\, f_k$$

$$G\, f_k = S_{k+1} - G\Phi x_k - G\Gamma_1 u_{k-1} + G\Gamma_2 u_k \tag{7.29}$$

Considerando que f_k é uma função contínua e suave, segue que

$$Gf_{k-1} = G\hat{f}_k \cong Gf_k$$

Logo,

$$G\,\hat{f}_k = S_k - G\Phi\, x_{k-1} - G\Gamma_1 u_{k-2} - G\Gamma_2 u_{k-1} \tag{7.30}$$

Assim, segue que a lei de controle discreta, que leva em consideração o atraso no tempo e utiliza a estimativa das incertezas da planta, é

$$\begin{aligned} u_k &= u_k^{eq} + u_k^f = -(G\Gamma)^{-1}\left\{G\left[\Phi - I\right]x_k + 0.1\left[S_k + G\hat{f}_k\right]\right\},, \\ G\hat{f}_k &= S_k - G\Phi x_{k-1} - G\Gamma_1 u_{k-2} - G\Gamma_2 u_{k-1}, \\ S_k &= G\, x_k + G\Gamma_1 u_{k-1} \end{aligned} \tag{7.31}$$

7.3 Comentários

Neste capítulo foi proposta mais uma lei de controle discreta, CDMD-B, que pode ser utilizada em sistemas que não possuem atraso no sinal de controle (equação 7.18), ou para sistemas que possuem atraso (equação 7.31). Esta nova estratégia é extensão da apresentada no Capítulo 6, onde é inserido um novo recurso de controle, na tentativa de melhorar o resultado do sistema controlado, que é a estimação das incertezas da planta. As simulações e resultados práticos desta nova lei, levando em consideração o atraso, são apresentados no próximo capítulo, onde será mostrado sua eficácia ao controlar uma planta estável e uma planta instável.

CAPÍTULO 8

8. RESULTADOS: SIMULAÇÕES DOS CONTROLES CDMD, CDMD-A E CDMD-B APLICADOS A UMA PLANTA ESTÁVEL E UMA INSTÁVEL, E IMPLEMENTAÇÕES DOS CONTROLADORES SOBRE O SISTEMA PÊNDULO INVERTIDO

8.1 Simulações do CDMD, CDMD-A e CDMD-B, Aplicados a uma Planta Estável: Controle Automático de Geração (CAG) com Entrada Atrasada

A Figura 8.1 representa o sistema de controle aplicada a planta a ser simulada. Considere o sistema de Controle Automático de Geração, com entrada atrasada e acesso somente à saída. O sistema, descrito originalmente em Hiyama [56], não considera atraso no sinal de entrada. Neste trabalho é inserido um sinal de atraso na entrada devido, por exemplo, ao processamento da lei de controle realizada por um dispositivo digital. A estratégia de controle utilizada nesta simulação é mesma apresentada nos Capítulos 6 e 7. É importante notar que esta estratégia de controle necessita das medidas dos estados, portanto foi utilizado o observador de *Spurgeon* [38] com a proposta de [21,60], que leva em consideração o atraso, para estimar os estados, $\hat{x}_k$, utilizados na computação da lei de controle.

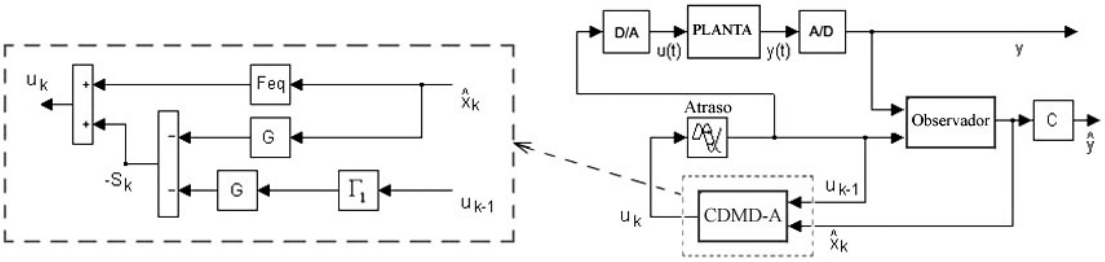

Figura 8.1a - Planta, observador e lei de controle utilizando a estratégia CDMD-A.

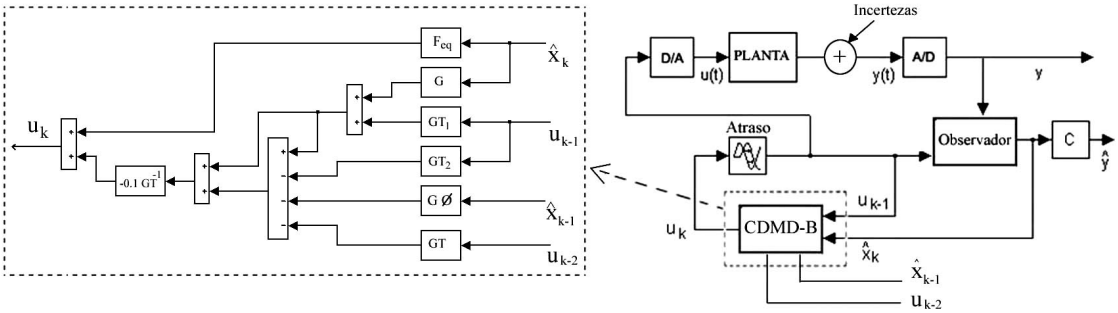

Figura 8.1b - Planta, observador e lei de controle utilizando a estratégia CDMD-B.

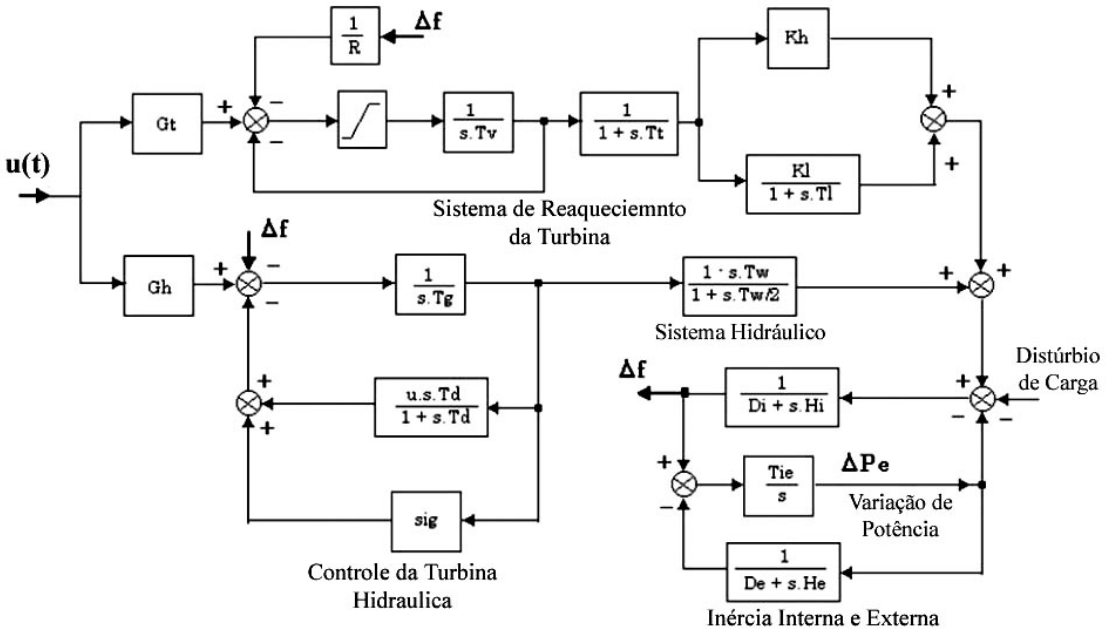

Figura 8.2 - Planta do sistema de Controle de Geração [56].

Foram consideradas duas áreas de controle interconectadas, uma referente à geração de energia com características térmicas, e outra com característica hidráulica. A representação, em diagrama de blocos, deste sistema é apresentada na Figura 8.2 [57,58]. Na Tabela 8.1, os parâmetros e valores nominais são apresentados. As equações linearizadas do sistema são

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t-h) \\ y(t) &= C\,x(t) \end{aligned} \tag{8.1}$$

onde $x \in \Re^{10}$, $u(t) \in \Re^{1}$ e $y(t) \in \Re^{5}$ são os vetores de estado, o vetor de entrada e o vetor de saída, respectivamente. As matrizes $A \in \Re^{10x10}$, $B \in \Re^{10x1}$ e $C \in \Re^{5x10}$ são constantes. O atraso é conhecido e tem valor h.

No problema do CAG as exigências mínimas são [58]:

- erro da freqüência estática, seguindo uma mudança em degrau da carga, deve ser zero;
- oscilação da freqüência transitória (Δf) não pode exceder $\pm 0{,}02$ Hz sobre as condições normais;
- mudança estática no fluxo de potência (ΔPe), seguindo uma mudança degrau em cada área, deve ser zero;
- o erro no tempo, devido a oscilação transitória da freqüência, não pode exceder ± 3 segundos.

Para isso, foi simulado o projeto proposto CEV-MD, mostrado em diagrama de blocos na Figura 8.2.

A entrada de controle é o sinal de comando para as turbinas térmicas e hidráulicas. As saídas são o comando da turbina hidráulica, a variação de freqüência, a variação de potência e o incremento da potência na saída dos geradores térmico e hidráulico. O distúrbio de carga é um degrau igual a 0.01 p.*u*. O atraso é $h = 0.15$ seg e a amostragem é $\Delta = 0.2$ seg.

Tabela 8.1 Controle de Geração: Parâmetros e valores nominais [56].

Parâmetro	**Símbolo**	**Valor**
Variação da freqüência [Hz]	Δf	-
Variação da potência [p.*u*.]	ΔPe	-
Regulação de velocidade [Hz/p.*u*. Mw]	R	2.4
Coeficiente de reaquecimento	Kh / Kl	0.5 / 0.5
Constante de tempo de reaquecimento [seg.]	Tl	6.0
Constante de tempo da Turbina [seg.]	Tt	0.3
Constante de tempo do gerador [seg.]	Tv	0.1
Coeficiente de sincronismo entre os sistemas interconectados [p.*u*. Mw/H seg.]	Tie	1.1677
Regulação transitória da turbina hidráulica [Hz/p.*u*. Mw]	μ	24.0
Regulação permanente da turbina hidráulica [Hz/p.*u*. Mw]	sig	1.8
Constante de tempo da turbina hidráulica [seg.]	Td / Tg / Tw	4.0 / 0.6 / 1.0
Constante de Inércia do sistema de potência interna e externa [seg.]	Hi / He	0.17 / 0.10
Característica da variação de carga do sistema de potência interna e externa [p.*u*. Mw/Hz]	Di / De	0.008 / 0.892
Alocação de carga para as turbinas térmicas e hidráulicas [ganhos]	Gt / Gh	0.3 / 0.7

Para efeito de comparação, quatro controladores, aplicados a planta estável, serão simulados (um clássico e três propostos neste trabalho): i) o primeiro considera o projeto convencional CEV-MD (sem preditor) com estrutura chaveada; ii) o segundo considera o sistema CAG com o novo CDMD proposto no Capítulo 5, que não leva em consideração o atraso no tempo; iii) o terceiro utiliza a estratégia CDMD-A, apresentada no Capítulo 6, que leva em consideração o atraso no tempo de computação do sinal de controle ao projetar o controlador e, por fim, iv) o CDMD-B, que leva em consideração o atraso e estima as incertezas da planta, é utilizado para a simulação do sistema.

8.1.1 Sistema CAG com Projeto Contínuo Convencional CEV-MD

Para o projeto contínuo convencional CEV-MD, a lei de controle e a matriz *S*, referente a superfície deslizante, são respectivamente

$$u(t) = u_L(t) + u_{NL}(t)$$

onde,
$$u_L(t) = -[S\,B]^{-1}\,S\,A\,\hat{x}_P(t)\,, \tag{8.2}$$

$$u_{NL}(t) = \frac{-(S\,B)^{-1}\,\sigma\left|S\,e^{Ah}\right|}{|\sigma| + \delta}\,\delta_1, \tag{8.3}$$

com $\delta_1 = 15$ e $\delta = 0.01$, e

$$S = [1.000 \quad 2.698 \quad -0.754 \quad 1.607 \quad 0.458 \quad -0.285 \quad 5.899 \quad 0.532 \quad 0.723 \quad 0.263]$$

Na Figura 8.3 são mostrados os resultados da simulação para o projeto contínuo convencional CEV-MD, considerando a entrada atrasada (h=0.15 seg) e o período de amostragem Δ=0.20 seg. Neste caso o sistema tende a instabilidade ou, pelo menos, não converge ao ponto de equilíbrio, visto que a natureza desta planta já é estável. Assim, este controlador não é robusto na presença do atraso.

8.1.2 Sistema CAG com o Novo Projeto CDMD

Na Figura 8.4 são mostrados os resultados da simulação para a nova estratégia de controle discreto CDMD apresentada no Capítulo 5, equação 5.32, considerando entrada atrasada (h=0.15 segundos) e período de amostragem Δ=0.20 seg.

Neste caso é importante observar que o controle visto no Capítulo 5 não leva em consideração o atraso no tempo, assim os resultados, embora melhores que ao controle convencional, ainda não apresentam um bom desempenho. As matrizes de ganhos obtidas foram:

$$F_{eq} = [1.00 \;\; 10.43 \;\; 1.41 \;\; -0.21 \;\; -0.27 \;\; -0.63 \;\; -4.06 \;\; 0.78 \;\; -3.07 \;\; -0.33\,]$$ e

$$G = [4.38 \;\; 25.56 \;\; -5.78 \;\; 11.40 \;\; 1.73 \;\; -0.20 \;\; 47.99 \;\; 2.09 \;\; 5.44 \;\; -1.48]$$

8.1.3 Sistema CAG com o Novo Projeto CDMD-A

O projeto CDMD-A, discreto no tempo, proposto no Capítulo 6 (6.12), foi aplicado ao sistema. Esta nova estratégia de controle leva em consideração o atraso no sinal de entrada para projetar o controlador em modo deslizante. O valor do atraso foi de

h=0.15 segundos e período de amostragem Δ=0.20 seg. Os resultados são mostrados na Figura 8.5. O projeto CDMD-A proposto é robusto para o atraso no tempo (ver Figura 8.5) e o sistema é estável.

Comparando o resultado com a Figura 8.3, uma grande melhora no controle pode ser observada. Isto se deve ao fato que a nova lei de controle proposta leva em consideração o atraso no sinal de controle. As matrizes de ganhos obtidas foram:

$$F_{eq} = [1.00 \;\; 10.43 \;\; 1.41 \;\; -0.21 \;\; -0.27 \;\; -0.63 \;\; -4.06 \;\; 0.78 \;\; -3.07 \;\; -0.33 \,],$$

$$G = [4.38 \;\; 25.56 \;\; -5.78 \;\; 11.40 \;\; 1.73 \;\; -0.20 \;\; 47.99 \;\; 2.09 \;\; 5.44 \;\; -1.48] \text{ e}$$

$$\Gamma_1' = [-0.0064 \;\; -0.0084 \;\; -0.0044 \;\; 0.0187 \;\; 0.0036 \;\; 0.0519 \;\; 0.0056 \;\; 0.2442 \;\; -0.0002 \;\; 0.0063]$$

8.1.4 Sistema CAG com o Novo Projeto CDMD-B

O projeto CDMD-B, discreto no tempo, proposto no Capítulo 7 (7.31), foi aplicado ao sistema. Esta nova estratégia de controle leva em consideração o atraso no sinal de entrada para projetar o controlador em modo deslizante e também calcula a estimativa da incerteza. O valor do atraso foi de h=0.15 segundos e período de amostragem Δ=0.20 seg. Os resultados são mostrados na Figura 8.5. O projeto CDMD-B proposto é robusto para o atraso no tempo (ver Figura 8.6) e o sistema é estável.

Comparando o resultado com a Figura 8.3, uma grande melhora no controle pode ser notada. Isto se deve ao fato que a nova lei de controle proposta leva em consideração o atraso no sinal de controle. As matrizes de ganhos obtidas foram:

$$F_{eq} = [1.00 \;\; 10.43 \;\; 1.41 \;\; -0.21 \;\; -0.27 \;\; -0.63 \;\; -4.06 \;\; 0.78 \;\; -3.07 \;\; -0.33 \,],$$

$$G = [4.38 \;\; 25.56 \;\; -5.78 \;\; 11.40 \;\; 1.73 \;\; -0.20 \;\; 47.99 \;\; 2.09 \;\; 5.44 \;\; -1.48],$$

$$\Gamma_1' = [-0.0064 \;\; -0.0084 \;\; -0.0044 \;\; 0.0187 \;\; 0.0036 \;\; 0.0519 \;\; 0.0056 \;\; 0.2442 \;\; -0.0002 \;\; 0.0063]$$

e $\Gamma_2' = 10^{-3} [-0.496 \;\; -2.633 \;\; -0.363 \;\; 3.034 \;\; 0.177 \;\; 43.637 \;\; 1.392 \;\; 119.195 \;\; -0.004 \;\; 1.439]$

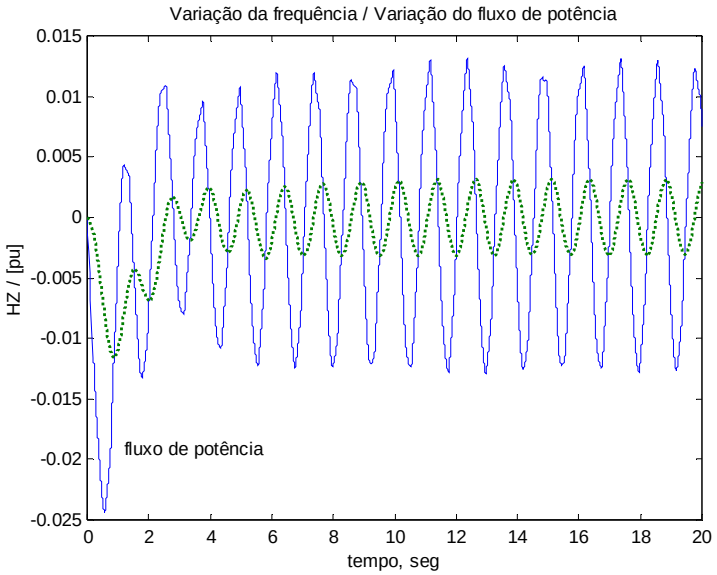

Figura 8.3 - Resposta do sistema com entrada atrasada h=0.15 seg e período de amostragem de 0.20 seg, utilizando o projeto contínuo convencional CEV-MD.

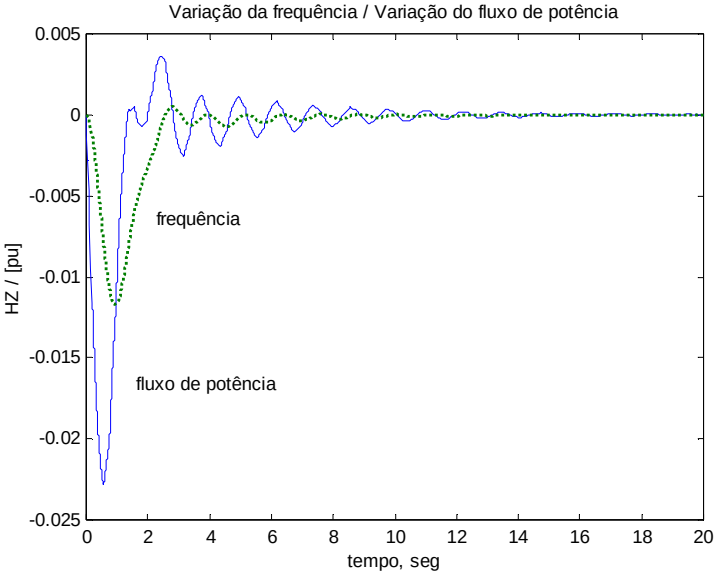

Figura 8.4 -Resposta do sistema com CEV-MD, proposto no Capítulo 5 (equação 5.32), com entrada atrasada em h=0.15 seg e período de amostragem de 0.20 seg.

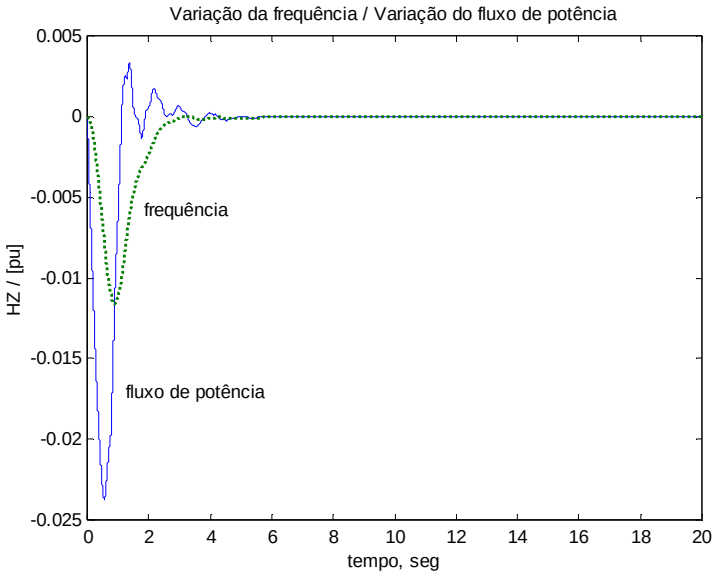

Figura 8.5 -Resposta do sistema com CDMD-A, proposto no Capítulo 6 (equação 6.12), com entrada atrasada em h=0.15 seg e período de amostragem de 0.20 seg.

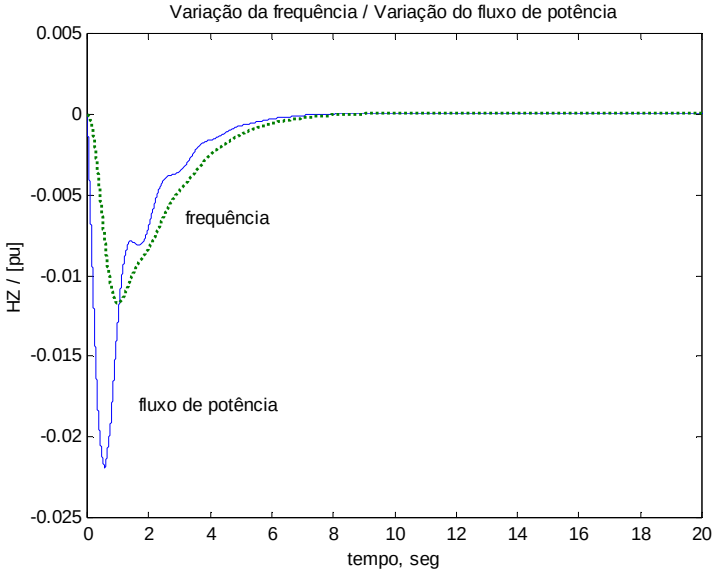

Figura 8.6 -Resposta do sistema com CDMD-B, proposto no Capítulo 7 (equação 7.31), com entrada atrasada em h=0.15 seg e período de amostragem de 0.20 seg.

8.2 Simulações do CDMD, CDMD-A e CDMD-B, Aplicados a uma Planta Instável: Modelo Pêndulo Invertido com Entrada Atrasada

O modelo pêndulo invertido é apresentado no Capítulo 5 (Figura 5.1). Este sistema é muito utilizado para estudo e aplicações de novas técnicas de controle, por ser um modelo bastante didático, que pode ser bastante explorado, devido sua natureza instável e complexidade.

A planta não-linear do pêndulo é descrita como a seguir

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dfrac{(M+m)g\,sin\theta - m(sin\theta)(\dot{\theta})^2\cos\theta + b\,\dot{x}\cos\theta}{l(M+m\,sin^2\theta)} \\ \dot{x} \\ \dfrac{m\,l(\dot{\theta})^2 sin\theta - m\,g\,sin\theta - b\dot{x}}{(M+m-m\cos\theta)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{a\cos\theta}{l(M+m\,sin^2\theta)} \\ 0 \\ \dfrac{a}{(M+m-m\cos\theta)} \end{bmatrix} V_v \ , \qquad (8.4)$$

e seus parâmetros são apresentados na Tabela 5.1.

As simulações foram realizadas considerando condições iniciais nulas $\lfloor \theta \quad \dot{\theta} \quad x \quad \dot{x} \rfloor = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$, com objetivo de equilibrar a haste e rastrear um sinal de referência quadrada.

8.2.1 Sistema Pêndulo Invertido com a Nova Estratégia CDMD

No Capítulo 5 foi apresentada uma nova lei de controle, equação 5.32, cuja maior contribuição é sua simplicidade comparada as existentes na literatura. Contudo essa lei não leva em consideração atraso no sinal de controle. Portanto, faz-se aqui uma análise, através de simulações, do comportamento e robustez da CDMD quando o sinal de controle atrasado estiver presente no sistema. A Figura 8.7 descreve, através de diagrama de blocos o modelo utilizado na simulação do Controlador Discreto com Modos Deslizantes (CDMD).

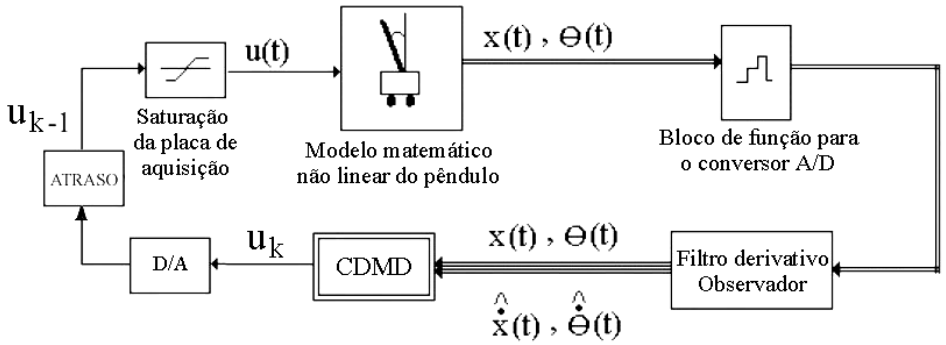

Figura 8.7 - Representação em diagrama de blocos do sistema pêndulo invertido, controlado com CDMD, na presença de atraso do sinal de controle.

Como se pode observar, para simular a amostragem do sinal é utilizado, no *software Simulink*, um bloco chamado *Zero Order*, representado na Figura 8.7 pelo conversor A/D. É apresentado, nas Figuras 8.8 e 8.9, dois casos de simulações: i) período de amostragem de 0.06 seg, com atraso de 0.01 e, ii) período de amostragem de 0.06 seg, com atraso de 0.04 seg. Os ganhos calculados para realização desta simulação foram

$$G = \begin{bmatrix} -28.01 & -4.89 & -19.03 & -12.06 \end{bmatrix};\ F_{eq} = \begin{bmatrix} 12.45 & 2.03 & 0 & 5.56 \end{bmatrix}$$

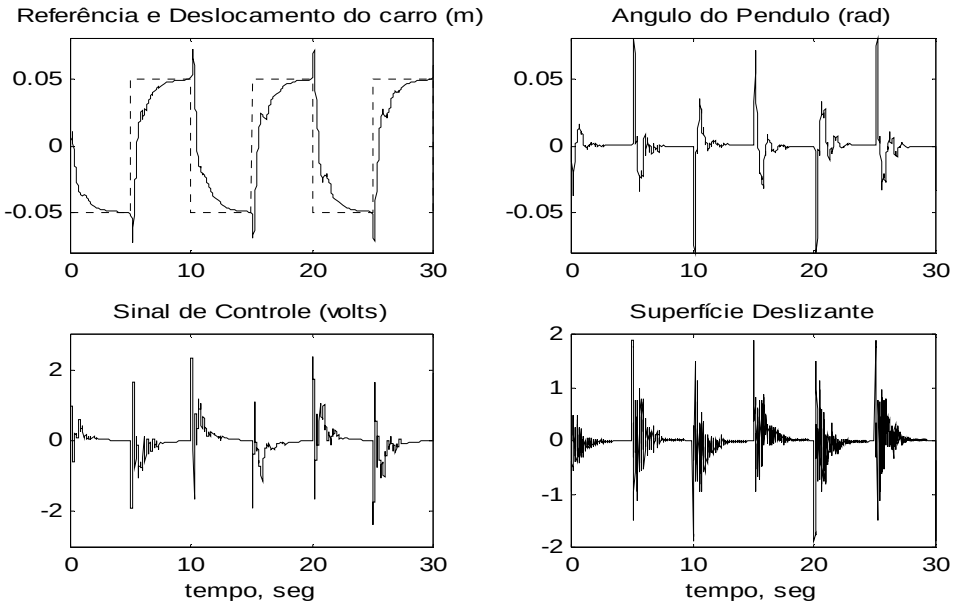

Figura 8.8 - Resposta do sistema Pêndulo Invertido com CDMD, proposto no Capítulo 5 (equação 5.32), com atraso de 0.01 seg e período de amostragem de 0.06 seg.

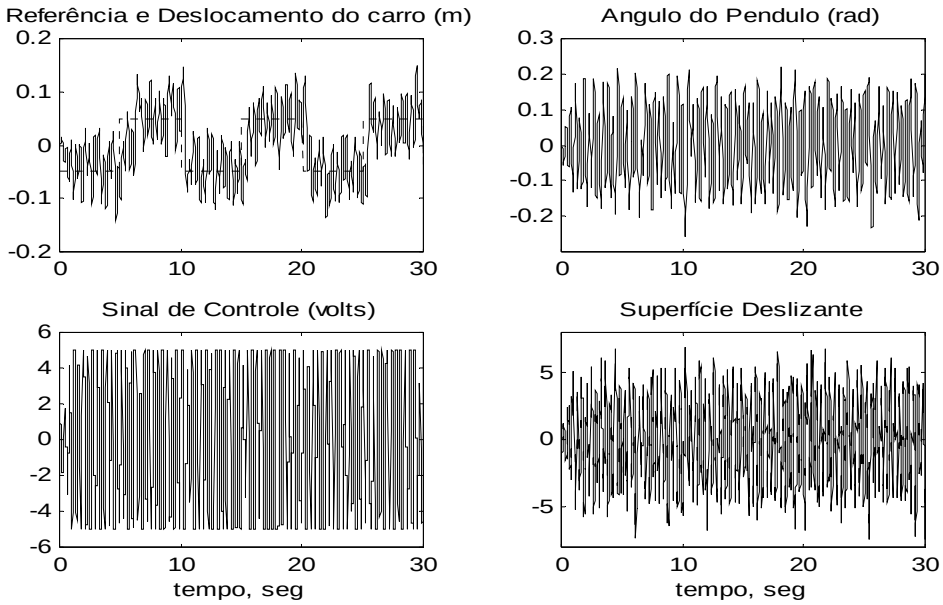

Figura 8.9 - Resposta do sistema Pêndulo Invertido com CDMD, proposto no Capítulo 5 (equação 5.32), com atraso de 0.04 seg e período de amostragem de 0.06 seg (instável).

Era esperado que o aumento do atraso influenciasse no resultado da simulação, pois a metodologia utilizada no CDMD, embora seja um controlador digital, não leva em consideração o atraso no sinal de controle. A Figura 8.9 mostra que o sinal de controle atingiu o máximo permitido pela placa de aquisição e, ainda assim, o sistema não se mostrou estável. Ou seja, não é viável a utilização desta lei quando houver atraso grande na computação do sinal de controle.

8.2.2 Sistema Pêndulo Invertido com a Nova Estratégia CDMD-A

Esta estratégia leva em consideração o atraso no sinal de controle. Ela é apresentada no Capítulo 6, e sua estrutura de controle, equação (6.12), é mostrada na Figura 8.10.

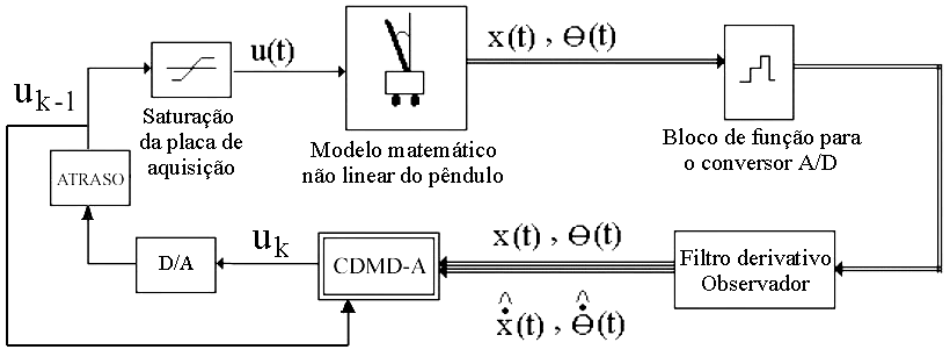

Figura 8.10 - Representação em diagrama de blocos do sistema pêndulo invertido, controlado com CDMD-A, na presença de atraso do sinal de controle.

Os mesmos dois casos de simulação, apresentados no item anterior, serão simulados aqui. Como esta estratégia leva em consideração o atraso no tempo de computação, é necessária a realimentação da entrada atrasada no CDMD-A. Os resultados para as duas simulações são apresentados nas Figuras 8.11a e 8.11b.

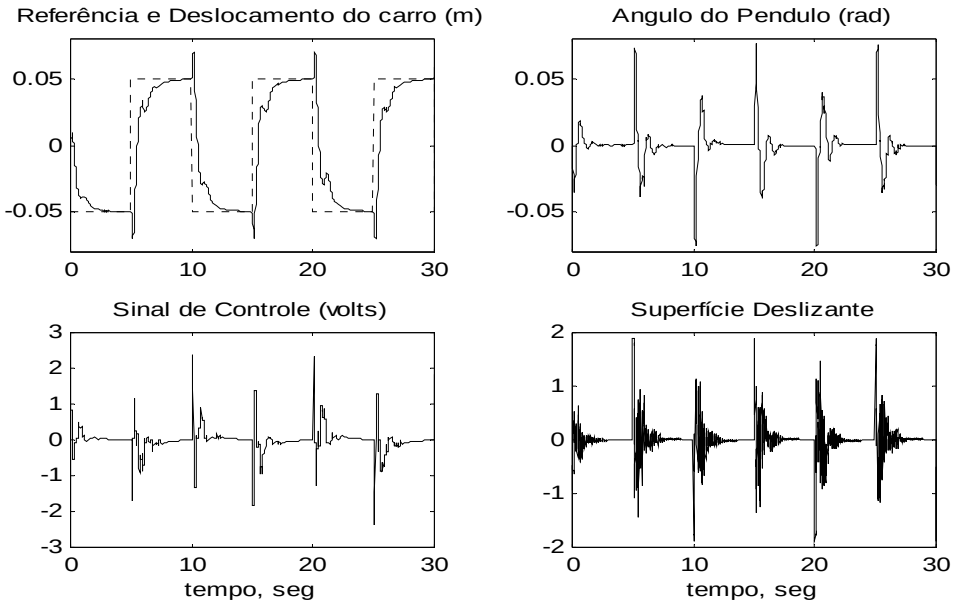

Figura 8.11a - Resposta do sistema Pêndulo Invertido com CDMD-A, proposto no Capítulo 6 (equação 6.12), com atraso de 0.01 seg e período de amostragem de 0.06 seg.

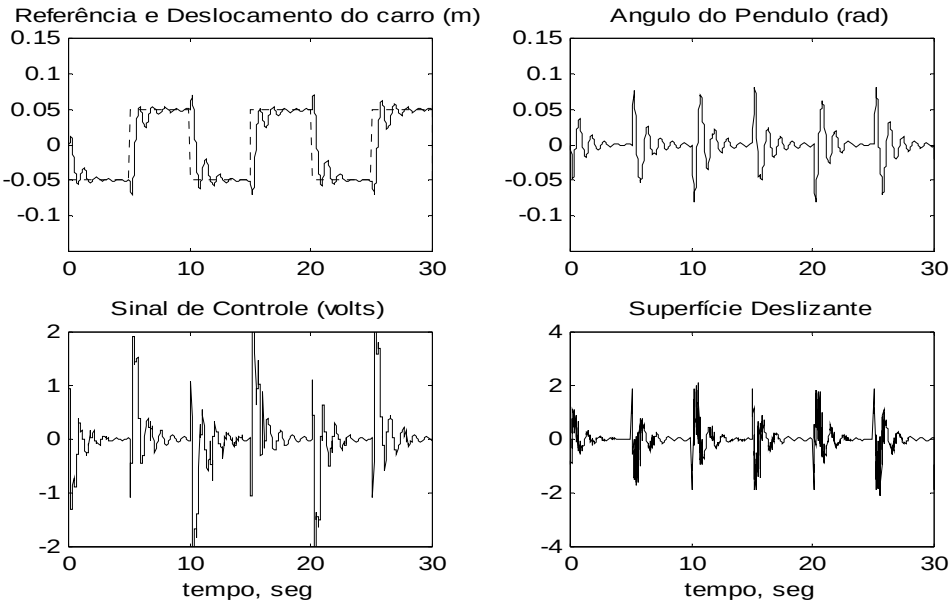

Figura 8.11b - Resposta do sistema Pêndulo Invertido com CDMD-A, proposto no Capítulo 6 (equação 6.12), com atraso de 0.04 seg e período de amostragem de 0.06 seg.

Os valores dos ganhos obtidos para a simulação deste sistema foram.

$G = \begin{bmatrix} -28.02 & -4.88 & -19.03 & -12.06 \end{bmatrix}$

$F_{eq} = \begin{bmatrix} 12.45 & 2.03 & 0 & 5.56 \end{bmatrix}$

$\Gamma_1' = \begin{bmatrix} -0.0006 & -0.1148 & 0.0002 & 0.0350 \end{bmatrix}$ para o atraso de 0.01 seg

$\Gamma_1' = \begin{bmatrix} -0.0081 & -0.3680 & 0.0025 & 0.1111 \end{bmatrix}$ para o atraso de 0.04 seg.

As Figuras 8.10 e 8.11 mostram que este sistema é estável na presença de atraso, mesmo que o atraso seja grande comparado ao período de amostragem.

8.2.3 Sistema Pêndulo Invertido com a Nova Estratégia CDMD-B

Esta estratégia leva em consideração o atraso no sinal de controle. Ela é apresentada no Capítulo 7, e sua estrutura de controle, equação (7.31), é mostrada na

Figura 8.12. Esta lei além de levar em consideração o atraso no sinal de controle, também foi proposta para compensar as incertezas do sistema.

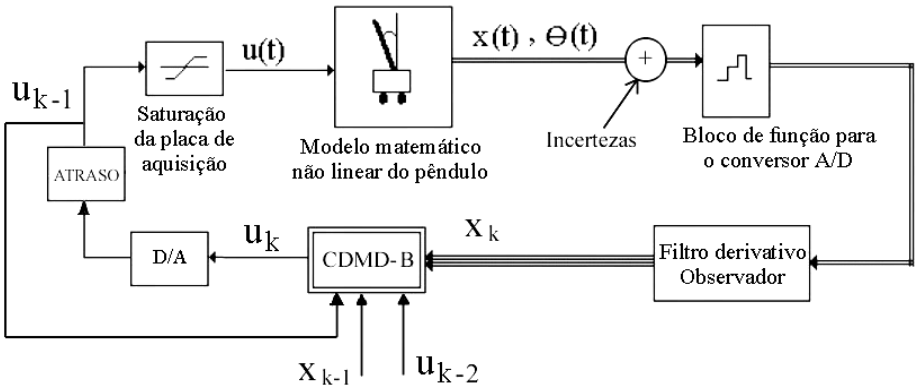

Figura 8.12 - Representação em diagrama de blocos do sistema pêndulo invertido, controlado com CDMD-B, na presença de atraso do sinal de controle e com incertezas.

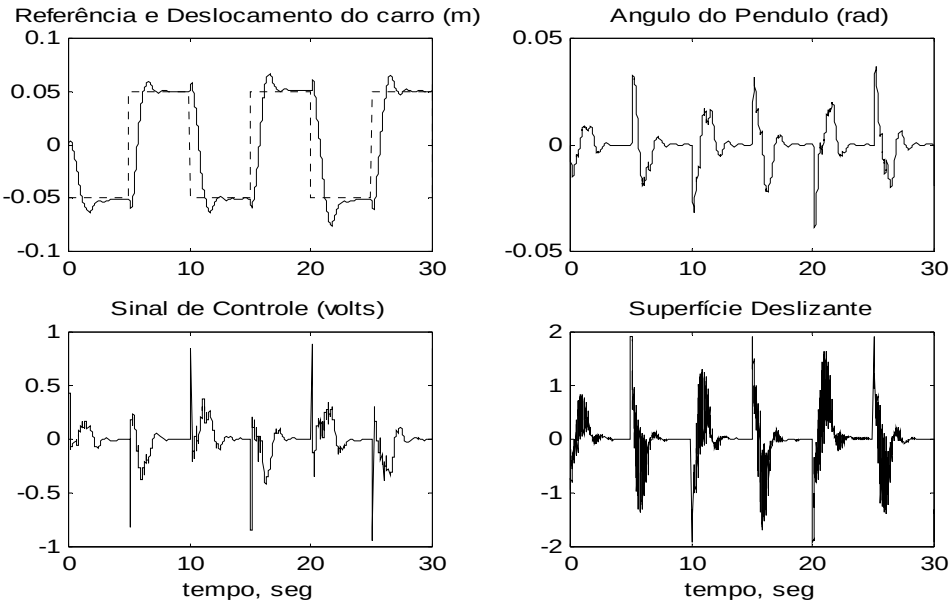

Figura 8.13 - Resposta do sistema Pêndulo Invertido com CDMD-B, proposto no Capítulo 7 (equação 7.31), com atraso de 0.01 seg e período de amostragem de 0.06 seg.

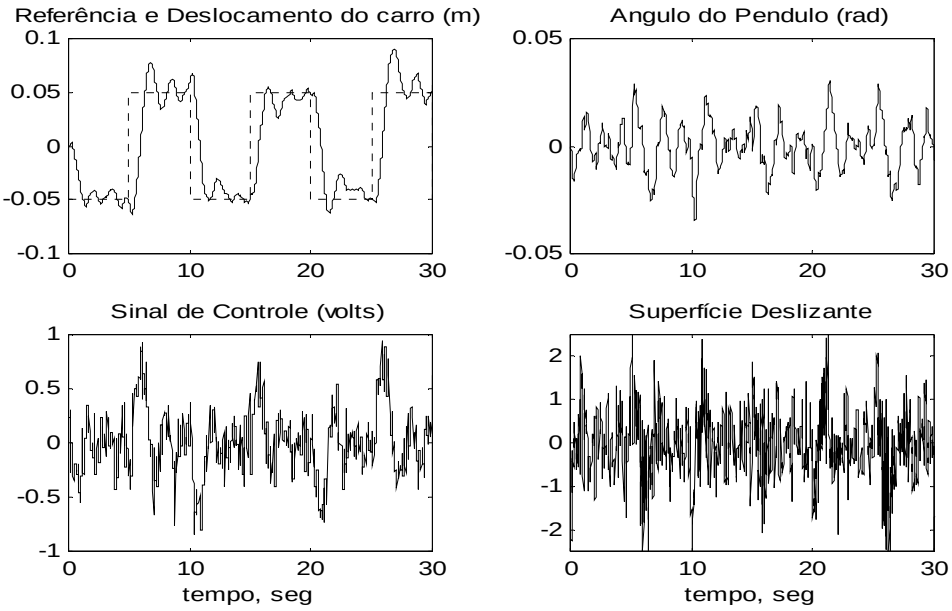

Figura 8.14 - Resposta do sistema Pêndulo Invertido com CDMD-B, proposto no Capítulo 7 (equação 7.31), com atraso de 0.04 seg e período de amostragem de 0.06 seg.

Esta nova abordagem de controle para sistemas com atraso no tempo e incertezas, somente apresenta bom desempenho se o atraso não for muito próximo ao valor do período de amostragem. A Figura 8.14 mostra que o aumento do atraso degrada a resposta do sistema. Portanto esta abordagem pode ser utilizada em sistemas de controle digital com períodos de amostragens maiores.

Os ganhos utilizados para realizar estas simulações foram

$G = \begin{bmatrix} -28.02 & -4.88 & -19.03 & -12.06 \end{bmatrix}$

$F_{eq} = \begin{bmatrix} 12.45 & 2.03 & 0 & 5.56 \end{bmatrix}$

$\Gamma_1' = \begin{bmatrix} -0.0006 & -0.1148 & 0.0002 & 0.0350 \end{bmatrix}$ para o atraso de 0.01 seg.

$\Gamma_1' = \begin{bmatrix} -0.0081 & -0.3680 & 0.0025 & 0.1111 \end{bmatrix}$ para o atraso de 0.04 seg.

$\Gamma_2' = \begin{bmatrix} -0.0121 & -0.4309 & 0.0037 & 0.1293 \end{bmatrix}$ para o atraso de 0.01 seg.

$\Gamma_2' = \begin{bmatrix} -0.0022 & -0.2123 & 0.0007 & 0.0646 \end{bmatrix}$ para o atraso de 0.04 seg.

8.3 Implementações do CDMD, CDMD-A e CDMD-B, Aplicados a uma Planta Instável: Modelo Pêndulo Invertido com Entrada Atrasada

Os resultados das simulações e implementações práticas para os controladores discretos no tempo, aplicados à planta instável, são apresentados nesta seção. Os equipamentos utilizados para a realização prática desta estratégia de controle são apresentados na Figura 8.15 e descritos a seguir.

- PC Pentium 200 MHz MMX ;
- Sistema Pêndulo Invertido;
- Placa de aquisição de dados com Interface A/D – D/A MULTIQTM [54], que possui 8 conversores A/D e 8 conversores D/A, e
- *Software Matlab/Simulink/Real-Time* e *software Wincon.*

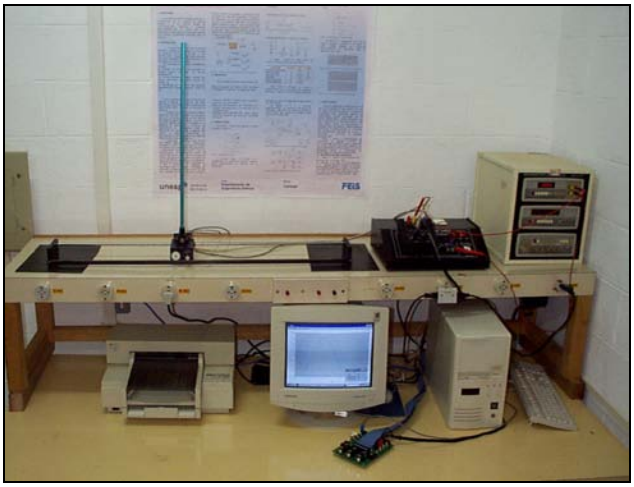

Figura 8.15 – Equipamento utilizado para realização da implementação prática dos controles sobre o sistema pêndulo invertido.

A Figura 8.16 mostra o esquema para a implementação do controle sobre o sistema pêndulo invertido.

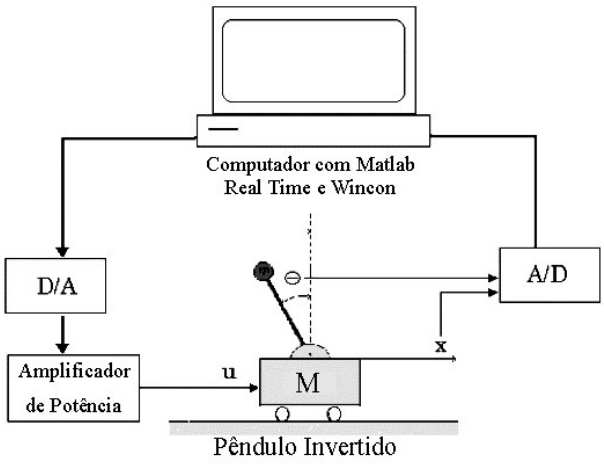

Figura 8.16 – Esquema do sistema pêndulo invertido com o dispositivo de controle

Tem-se acesso apenas aos estados θ e x, portanto, para calcular os outros dois estados, $\dot{\theta}$ e $\dot{x}$, foi utilizado através do *software Matlab* um filtro derivativo [54]. Para a analisar os efeitos do atraso no sistema controlado, foi inserido um bloco do *Simulink* de função *Delay* em série na saída do controlador digital, simulando assim um atraso de computação do sinal de controle. Os resultados práticos são apresentados nos dois itens subseqüentes.

8.3.1 Resultado da Implementação das Estratégias CDMD e CDMD-A

As Figuras 8.17 e 8.18 apresentam, respectivamente, os resultados práticos da realização do controle discreto utilizando o CDMD-A e CDMD. Para um mesmo período de amostragem de 5ms e mesmo atraso 4ms. De fato, o controle utilizando a estratégia CDMD-A deve apresentar melhor resultado, visto que em seu projeto leva-se em conta o atraso no sinal de controle. Enquanto que o controle CDMD não leva em consideração este atraso de computação.

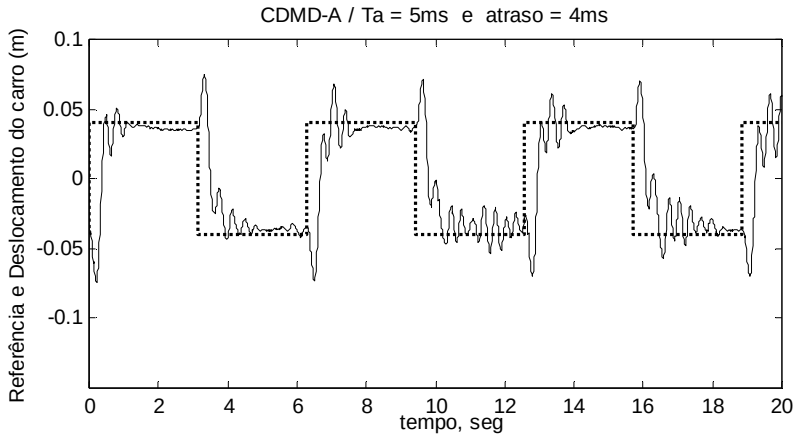

Figura 8.17 - Resposta do sistema Pêndulo Invertido com CDMD-A, com período de amostragem de 0.005 seg e atraso de 0.004 seg. Implementação através de computador.

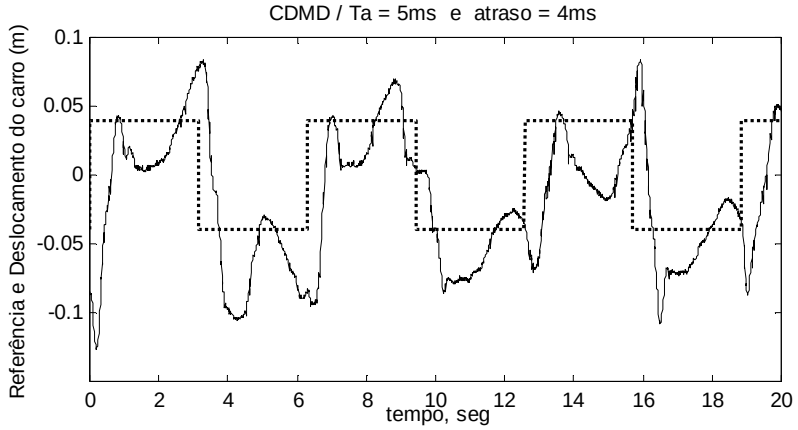

Figura 8.18 - Resposta do sistema Pêndulo Invertido com CDMD, com período de amostragem de 0.005 seg e atraso de 0.004 seg. Implementação através de computador.

Nas Figuras 8.19 e 8.20 faz-se uma nova comparação de resultados, porém com período de amostragem de 10ms e atraso de 9ms. Novamente nota-se que o controle CDMD-A apresenta melhor desempenho que o CDMD

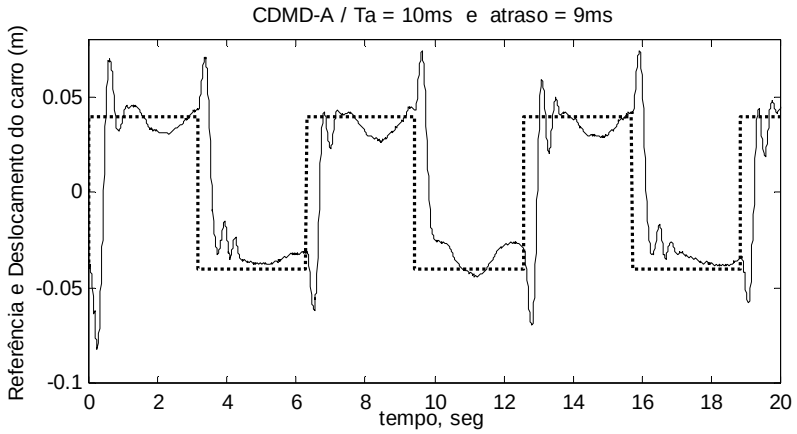

Figura 8.19 - Resposta do sistema Pêndulo Invertido com CDMD-A, com período de amostragem de 0.010 seg e atraso de 0.009 seg. Implementação através de computador.

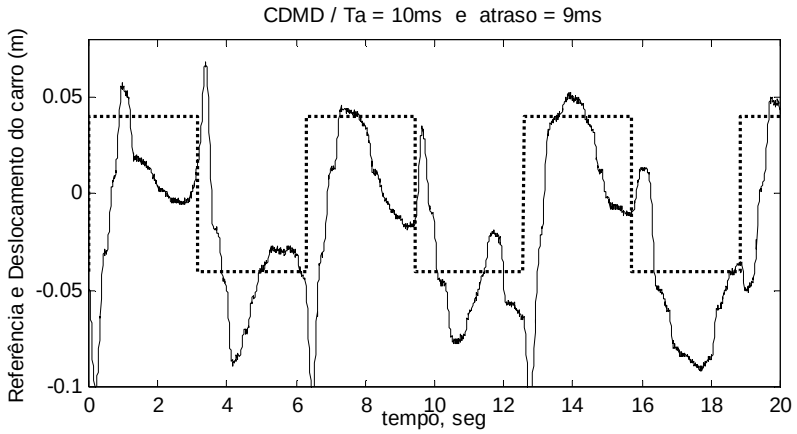

Figura 8.20 - Resposta do sistema Pêndulo Invertido com CDMD, com período de amostragem de 0.010 seg e atraso de 0.009 seg. Implementação através de computador.

Conclui-se, portanto, que embora exista grande facilidade na realização do controle utilizando a estratégia CDMD, ela não fornece robustez na presença de atrasos. Portanto sua utilização em controladores digitais fica restrita a sistemas de rápido processamento ou que tenham dinâmica lenta.

8.3.2 Resultado da Implementação da Estratégia CDMD-B

Como pode ser visto nas Figuras 8.21 e 8.22 esta estratégia de controle apresentou boa resposta ao rastreamento do sinal de referência.

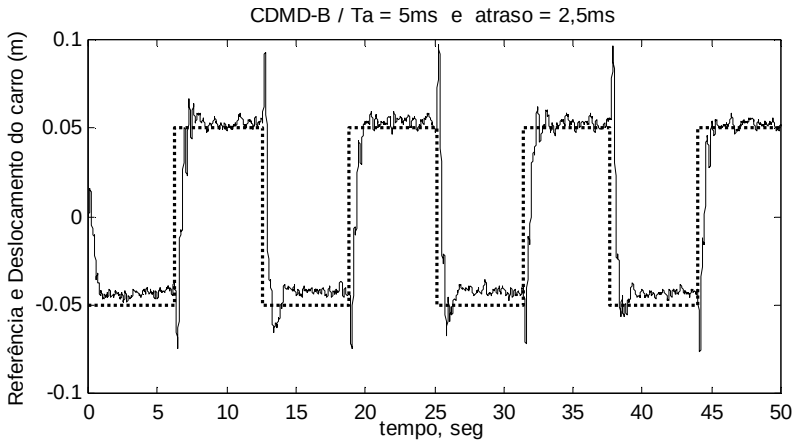

Figura 8.21 - Resposta do sistema Pêndulo Invertido com CDMD-B, com período de amostragem de 0.005 seg e atraso de 0.0025 seg. Implementação através de computador.

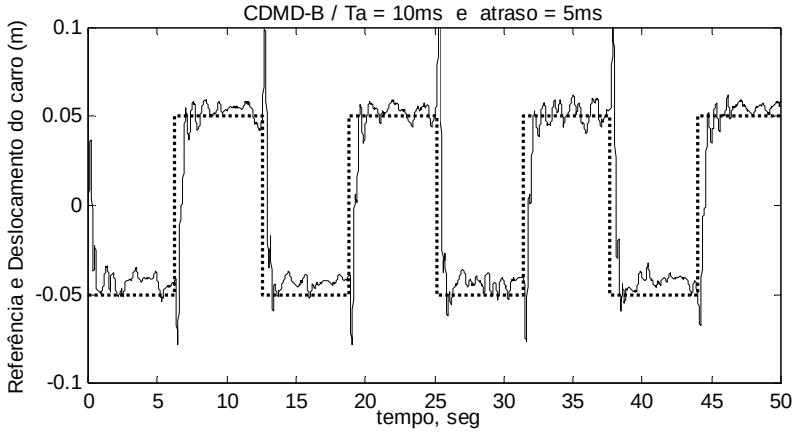

Figura 8.22 - Resposta do sistema Pêndulo Invertido com CDMD-B, com período de amostragem de 0.010 seg e atraso de 0.005 seg. Implementação através de computador.

CAPÍTULO 9

9. CONCLUSÕES

9.1 Conclusões Gerais

Este trabalho propõe soluções, utilizando controladores com modos deslizantes, para problemas que envolvem atraso no sinal de controle. Um objetivo deste trabalho era a compensação do sinal atrasado do controle sem utilização de preditores. Outro objetivo foi disponibilizar um material didático que possa ser utilizado como um tutorial simples para aplicações de controle discreto e robusto com modos deslizantes, em sistemas incertos que envolvam ou não atraso na computação do sinal de controle, tanto para cursos de pós-graduação como para cursos de graduação. Três novas estratégias de controladores discretos foram propostas: i) CDMD, que não leva em consideração o atraso na computação do sinal de controle, ii) CDMD-A, que leva em consideração o atraso no sinal de controle e iii) CDMD-B, que além de considerar atraso faz uma estimação da incerteza para diminuir seus efeitos no desempenho do sistema. O CDMD-B propõe duas soluções, uma que considera o atraso (equação 7.31) e outra que não leva em consideração o atraso (equação 7.18).

Todas as três estratégias de controle apresentaram bons resultados, mas vale ressaltar que o CDMD foi projetado sem levar em consideração o atraso no sinal de controle, portanto ele fornece ótimos resultados (Figuras 5.11-5.15) na ausência de atraso. Contudo, como pode ser visto na Figura 8.9, o atraso pode levá-lo a instabilidade.

Portanto, das três estratégias, o CDMD é a mais simples, mas fica restrito a sistemas que não possuem atraso, ou que o atraso seja pequeno comparado ao período de amostragem.

O projeto eficaz de controladores discretos no tempo, aplicado em sistemas incertos com atraso e cuja planta é instável, sempre foi visto como um desafio, dado a complexidade que existe nas soluções propostas. Neste trabalho duas soluções simples, que leva em consideração o atraso, foram propostas.

No Capítulo 8 pode-se observar que o CDMD-A tem um bom desempenho tanto nas simulações quanto nas implementações práticas.

O CDMD-B, é uma estratégia que também mostrou-se eficaz. Esta estratégia é derivada da CDMD-A, porém com uma característica importante: ela estima as incertezas da planta desde que essas incertezas sejam contínuas e suave no tempo. Os resultados das simulações e implementações apresentadas no Capítulo 8 comprovam seu bom desempenho; tanto para a planta estável, quanto para a planta instável. Porém, uma restrição deve ser observada nesta estratégia de controle; as incertezas são estimadas considerando que sua dinâmica seja lenta e não mude acintosamente entre um instante de amostragem e outro, pois o estimador apresentado neste trabalho calcula o valor da incerteza com atraso de um período de amostragem.

É importante dizer também que este trabalho de pesquisa gerou publicações nacionais e internacionais e que abriu caminho para novas investigações e análises, conforme descrito no item 9.3.

9.2 Trabalhos Publicados

GARCIA, J. P. F.; RIBEIRO, J. M. S.; SILVA J. J. F.; MARTINS E. S. Continuous-time and discrete-time sliding mode control accomplished using a computer. **IEE Proc., Control Theory Appl.**, 2005, 152, (2), pp. 220-228.

RIBEIRO, J. M. S., GARCIA, J. P. F., JACOMELI, J. R., GARCIA, L. M. C. F. Discrete-Time Sliding Mode Control of Input-Delay Systems applied on a Power Generation System. **Proceedings of IEEE ISIE 2006**, Montreal, Canada, p.1794-1798, 2006.

GARCIA, J. P. F.; RIBEIRO, J. M. S.; MACELO, J. M. A; GARCIA, L. M. C. F. Controle com Estrutura Variável Implementado com Dispositivos Digitais Programáveis. **Anais do 6º Simpósio de Automação Inteligente (SBAI).** Bauru, Brasil, 2003.

GARCIA, L.M.C.F. ; GARCIA, J.P.F.; RIBEIRO, J.M.S.; CAUN A.P. Discrete-Time Sliding Mode Control Of Input-Delay Systems. **IEE Proceeding, Control Theory and Application,** 2006 (*trabalho submetido*).

9.3 Sugestões de Trabalhos

Sugere-se para trabalhos futuro:

i) pesquisa e implementação de observadores discretos;

ii) aplicações de tais controladores em sistemas MIMO;

iii) estimador da incerteza em tempo real para a estratégia CDMD-B;

iv) análise de limites para valores dos ganhos dos controles equivalente e chaveado, utilizando essas novas estratégias.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] JANARDHANAN, B. S.; BANDYOPADHYAY, B.; THAKAR, V. K. Discrete-time Output Feedback Sliding Mode Control for Time-Delay System with Uncertainty. **Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Control Applications.** Tapei, Taiwan, p. 1358-1363, 2004.

[2] LEE, S. M.; LEE, B. H. A Discrete-Time Slinding Mode Controller an Observer with Computation Time Delay. **Control Engineering Practice 7**, p. 943-955, 1999.

[3] QU, S. C.; SUN, C.; WANG, Y. J. Design Sliding Mode Control for Neutral Time-Delay Systems. **International Conference on Control and Automation (ICCA2005).** Budapest, Hungria, p. 49-52, 2005.

[4] XIA, Y.; HAN, J.; JIA, Y. A Slinding Mode Control for Linear Systems with Input and State Delays. **Proceedings of the 4Isn IEEE Conference on Decision and Control.** Las Vegas, Nevada USA, p. 3332-3337, 2002.

[5] UTKIN, V. I. **Sliding Modes and Their Applications in Variable Structure Systems**. Moscow: Mir Publishers, 257p, 1978.

[6] UTKIN, V. I. **Sliding Modes in Control and Optimization**. Berlin: Springer-Verlag, 284p, 1992.

[7] RICHARD, J. P. Time Delay Systems: an overview of some recent advances and open problems. **Pergamon. Automatica.** v. 39, p. 1667-1694, 2003.

[8] KOLMANOVSKII, V. B., MYSHKIS, A. Introduction to the theory and applications of functional diferential equations. **Dordrecht: Kluwer Academy**, 1999.

[9] NICULESCU, S. I.; LOZANO, R.. On the passivity of linear delay systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 46(3), 460–464, 2001.

[10] DRAZENOVIC, B. The invariance conditions in variable structure systems, **Automatica**, v. 5, p. 287-295, 1969.

[11] KUO, C. Sistemas de Controle Automático. **Prentice-Hall do Brasil.** 4ª Edição. Rio de Janeiro, 1985.

[12] SPURGEON, S. K.; DAVIES, R. A nonlinear control strategy for robust sliding mode perfomance in the presence of unmatched uncertainty. **International Journal of Control**, v. 57, n. 5, p. 1107-1123, 1993.

[13] GARCIA, C. **Modelagem e Simulação de Sistemas**. São Paulo: Edusp, 457p, 1997.

[14] SMITH, 0. J. M. Closer control of loops with dead time. **Chemical Engineering Progress**. vol. 53(5). pp. 217-219, 1957.

[15] FURUKAWA, T.; SHIMEMURA, E. Predictive control for systems with time delay. **International Journal of Control**, v. 37, n. 2, p. 399-412, 1983.

[16] CHOI, H. H.; CHUNG, M. J. Memoryless stabilization of uncertain dynamic systems with time varying delayed states and controls. **Automatica**, v. 31, p. 1349-1351, 1995.

[17] PHOOJARUENCHANACHAI, S.; FURUTA, K. Memoryless stabilization of uncertain linear systems including time-varying state delays. **IEEE Transactions On Automatic Control**, vol. 37, n. 7, p. 1022-1026, 1992.

[18] UTKIS, U. **Control Systems of Variable Structure**. New York, NY: Wiley, 214p, 1976.

[19] GARCIA, J. P. F.; RIBEIRO, J. M. S.; SILVA J. J. F.; MARTINS E. S. Continuous-time and discrete-time sliding mode control accomplished using a computer. **IEE Proc., Control Theory Appl.**, 152, (2), pp. 220-228, 2005.

[20] FIAGEDZ, Y. A.; PEARSON, A. E. Feedback stabilization of linear autonomous time lag systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 31, n. 9, p. 847-855, 1986.

[21] GARCIA, L. M. C. F.; BENNATON, J. F. Sliding mode control for uncertain input-delay systems with only plant output access. **Proceedings of 7th International Workshop on Variable Structure Systems.** Sarajevo, Bosnia and Herzegovina, 175-184, 2002.

[22] SHEN, J.C., CHEN, B.S.; KUNG, F.C. Memoryless stabilization of uncertains dynamic delay systems: Riccati equation approach. **IEEE Transactions On Automatic Control**, v. 36, n. 5, p. 638-640, 1991.

[23] MONDIÉ, S.; GARCIA P.; LOZANO. Reseting Smith Predictor for the controlo f unstable systems with delay. **15th IFAC World Conference.** Barcelona, Espanha, 2002.

[24] DUGARD, L.; VERRIEST, E. I. **Stability and control of time-delay systems**. Lectures Notes in Computer Science. Berlin: Springer, 228p, 1997.

[25] LI, X.; DE SOUZA, C. E. Criteria for robust stability and stabilization of uncertain linear systems with state delay. **Automatica**, v. 33, p. 1657-1662, 1997.

[26] MAHMOUD, M. S. **Robust Control and Filtering for Time-Delay Systems**. New York: Marcel Dekker, 425p, 2000.

[27] CHERES, E.; GUTMAN, S.; PALMOR, S. J. Stabilization of uncertain dynamic systems incluinding state delay. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 34, n. 11, p. 1199-1203, 1989.

[28] KOJIMA, A.; UCHIDA, K.; SHIMEMURA, E.; ISHIJIMA, S. Robust stabilization of a systems with delayed in control. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 39, n. 8, p. 1694-1698, 1994.

[29] KOSHKOUEI, A. J.; ZINOBER, A. S. I. Sliding mode time-delay systems. **In: 4th International Workshop on Variable Structure Systems**, Tokyo, Japan, p. 97-101, 1996.

[30] RIBEIRO, J. M. S., GARCIA, J. P. F., JACOMELI, J. R., GARCIA, L. M. C. F. Discrete-Time Sliding Mode Control of Input-Delay Systems applied on a Power Generation System. **Proceedings of IEEE ISIE 2006**, Montreal, Canada, p.1794-1798, 2006.

[31] ROH, Y. H.; OH, J. H. Robust stabilization of uncertain input-delay systems by sliding mode control with delay compensation. **Automatica**, v.35, p.1861-1865,1999.

[32] ROH, Y. H.; OH, J. H. Sliding mode control with delay compensation for uncertain input-delay systems. **In: American Control Conference**, San Diego, USA, p. 309-313, 1999.

[33] ROH, Y. H.; OH, J. H. Sliding mode control with uncertainty adaptation for uncertain input-delay systems. **International Journal of Control**, v. 73, n. 13, p. 1255-1260, 2000.

[34] DE CARLO, R. A.; ZAK, S. H.; MATHEWS, G. P. Variable structure control of nonlinear and multivariable systems: a tutorial. **In: Institute of Electrical and Electronics Engineers**, v. 76, n. 3, p. 212-232, 1988.

[35] FILLIPOV, A. F. **Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides**. Kluwer Academic Publishers, 304p, 1988.

[36] BAG, S.K.; SPURGEON, S.K.; EDWARDS, C. Output feedback sliding mode design for linear uncertain systems. **IEE Proc. Control Theory Appl**., v. 144, n. 3, p. 209-216, 1997.

[37] COVACIC, M. **Controle Automático com Estrutura Variável Utilizando Sistemas ERP e LMI**. 2001. 101p. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Ilha Solteira.

[38] EDWARDS, C.; SPURGEON, S. K. On the development of discontinuos observers. **International Journal of Control**, v. 59, n. 5, p. 1211-1229, 1994.

[39] PRADO, M.L.M. **Controle Multivariável Aplicado a Sistemas com Atraso**. 2000. 122 p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia. de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos.

[40] HALE, J. **Theory of Functional Differential Equations**. New York: Springer-Verlag, 365p, 1977.

[41] ARTSTEIN, Z. Linear systems with delayed control: A reduction. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 27, p. 869-879, 1982.

[42] PARK, P.; MOON, Y. S.; KWON W. H. A stabilizing output-feedback linear quadratic control for pure input-delayed systems**. International Journal of Control**, v. 72, n. 5, p. 385-391, 1999.

[43] ZAK, S. H.; WALCOTT, B. L. State observation of nonlinear control systems via the method of Lyapunov. In: ZINOBER, A. S. I. **Deterministic Control of Uncertain Systems.** London, U. K.: Peter Peregrinus 1990.

[44] GUO, J., ZHANG X.: 'Advance in discrete-time sliding mode variable structure control theory'. **4th World Congress on Intelligent Control and Automation**, 2, pp. 878-882, 2002.

[45] SU, W. C., TSAI, C.C.: 'Discrete-time VSS temperature control for a plastic extrusion process with water cooling systems', **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, 9, (4), pp. 618-623, 2001.

[46] ZHOU, J., ZHOU, R., WANG, Y., AND GUO, G.: 'Improved proximate time-optimal sliding-mode control of hard disk drives', **IEE Proc. Control Theory and Applications**, 148, (6), pp. 516–522, 2001.

[47] Advances in Variable Structure Systems: 'Analysis, Integration and Applications'. **6th IEEE International Workshop on Variable Structure Systems**, World Scientific Publishing, 2000.

[48] SILVA, S.G., GARCIA, J.P.F., TEIXEIRA, M.C.M.: 'Variable structure controller and observer applied to induction machine'**. 5th International Workshop on Advanced Motion Control**, **AMC'98**, Coimbra, Portugal, pp. 123–128, 1998.

[49] FURUTA, K.: 'Sliding mode control of a discrete system', **Systems & Control Letters**, 14, pp. 145-152, 1990.

[50] CHAN, C.Y.: 'Servo-systems with discrete variable structure control', **Systems & Control Letters**, 14, pp. 321-325, 1991.

[51] OGATA, K.: 'Modern control engineering' (**Prentice-Hall**), 3rd Edition, 1997.

[52] GARCIA, J. P. F.; RIBEIRO, J. M. S.; MACELO, J. M. A; GARCIA, L. M. C. F. Controle com Estrutura Variável Implementado com Dispositivos Digitais Programáveis. **Anais do 6o Simpósio de Automação Inteligente (SBAI).** Bauru, Brasil, 2003.

[53] CHOI, H. H., AND CHUNG, M.J.: 'Memoryless stabilization of uncertain dynamic systems with time varying delayed states and controls', **Automática.** 31, pp.1349-1351, 1995.

[54] 'Wincon v3.0 – user's guide' (**Quanser Consulting Inc**., Ontario, Canada, 1998).

[55] GARCIA, L.M.C.F. ; GARCIA, J.P.F.; RIBEIRO, J.M.S.; CAUN A.P. Discrete-Time Sliding Mode Control Of Input-Delay Systems. **IEE Proceeding, Control Theory and Application.** 2006 (*trabalho submetido*).

[56] HIYAMA, T. Design of decentralized load-frequency regulators for interconnected power systems, **IEE Proc**, 129(1), 1982.

[57] **Working Group on Prime Mover and Energy Supply**, Hydraulic turbine and turbine control models for system dynamic studies. **Transactions on Power System**, 7(1), pp. 167-179, 1992.

[58] CHAN W. C. C.; HSU, Y. Y. Automatic generation control of interconnected power systems using variable-structure controllers, **IEE Proc.,** 128(5), 269-279, 1981.

[59] BAHILL, A. T. A simple Adaptive Smith-Predictor for Controlling Time-Delay Systems. **Control Systems Magazine, IEEE.** V 3, issues, p. 16-22, 1983.

[60] GARCIA, L.M.C.F. **Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes em Sistemas Incertos com Atraso no Controle.** 2002. 92p. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo.

[61] ABDALLAH, G.; DORATO, P.; BENITEZ-READ, J.; BYRNE, R. Delayed positive feedback can stabilize oscillatory systems. **In ACC'93 (American control conference)**, San Francisco, USA, pp. 3106–3107, 1993.