



IFT/TE-M-98

D.001/93

O Princípio de Equivalência Fraco e o Acoplamento Gravitacional Não-Mínimo

Nelson Bertarelli



Dissertação de Mestrado
apresentada no
Instituto de Física Teórica da UNESP.

Orientador: Prof. Dr. Antônio José Accioly

São Paulo
janeiro/93

Ao Sol, à Lua, à Terra, ao Mar.
Ao meu pai, Guerino, à minha mãe,
Adélia.
E a um poeta, Cartola.

AGRADECIMENTOS

-- Ao Professor Antônio José Accioly pela orientação;

-- Ao Marco e ao Kwok pelo apoio e incentivo, a Hatsumi, Claudia e Dimiter por contribuírem com a edição deste trabalho, ao Sr. Antônio pelo seu auxílio nas pequenas grandes coisas;

-- Ao CNPq. e CAPES pelo suporte financeiro.

RESUMO

Mostra-se que as teorias não-minimamente acopladas à gravitação – contrariamente à crença em voga – não violam o princípio de equivalência fraco, sendo consequentemente contra-exemplos à conjectura de Schiff. A demonstração é completamente independente do modelo adotado para a descrição do acoplamento gravitacional não-mínimo. Utilizando-se uma combinação linear de lagrangeanas quadráticas no campo eletromagnético e lineares na curvatura obtém-se uma nova lei para a propagação da radiação eletromagnética em um background gravitacional, que leva a uma saída para o problema do horizonte – o calcanhar de Aquiles do modelo cosmológico padrão.

ABSTRACT

It is shown that gravitational nonminimally coupled theories – contrary to what is widely believed – do not violate the weak equivalence principle, thus being counterexamples to Schiff's conjecture. The proof is model-independent. Using a linear combination of Lagrangians quadratic in the electromagnetic field and linear in the curvature, a new law for the propagation of the electromagnetic radiation in a background gravitational field is obtained, which leads to a way out to the horizon problem – one of the fundamental problems in standard cosmology.

ÍNDICE

Resumo	ii
Abstract	iii
Convenções	vi
Introdução	1
I. Sobre o Acoplamento de Campos Físicos Com a Gravitação	
I.1 - Campos em Interação	3
I.2 - Acoplamento Não-Mínimo	12
I.3 - Lagrangeanas Pseudamente Acopladas Não-Minimamente à Gravitação	13
II. Compatibilidade Entre o Princípio de Equivalência Fraco e o Acoplamento Gravitacional Não-Mínimo	
II.1 - O Princípio de Equivalência Fraco	16
II.2 - Princípio de Equivalência Fraco Versus Acoplamento Gravitacional Não-Mínimo	18
II.3 - A Conjectura de Schiff e o Acoplamento Gravitacional Não-Mínimo	21
III. A Propagação da Radiação Eletromagnética e o Acoplamento Gravitacional Não-Mínimo	

III.1 - Foto-Propagação Via Acoplamento Gravitacional Mínimo	22
III.2 - Foto-Propagação Via Acoplamento Gravitacional Não-Mínimo ..	24
III.3 - Uma Possível Saída Para o Problema do Horizonte	27
 Discussão Geral e Conclusões.....	 35
 Apêndices:	
A - As equações de Campo da Relatividade Geral	40
B - Variação Infinitesimal de um Tensor	44
C - Equações Acopladas de Einstein-Campo Escalar Ordinário	48
D - Equações de Campo de Einstein-Maxwell	50
E - A Não Comutatividade da Derivadas Covariantes	52
 Referências	 53

CONVENÇÕES

Adotamos as convenções de Papapetrou[1] para a métrica (+ - - -) e as definições dos tensores de Riemann e de Ricci. As unidades são escolhidas de modo tal que $\hbar = c = 1$, e portanto $\frac{\kappa}{8\pi} = G = M_{Pl}^2$ é a constante gravitacional Newtoniana.

Índices gregos variam de 0 a 3. Índices latinos variam de 1 a 3.

Derivada parcial:

$$\partial_\alpha \phi \equiv \phi_{,\alpha} = \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha}$$

Símbolo de Christoffel:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (g_{\beta\lambda,\gamma} + g_{\gamma\lambda,\beta} - g_{\beta\gamma,\lambda})$$

Tensor de Riemann:

$$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = -\Gamma_{\beta\gamma,\delta}^\alpha + \Gamma_{\beta\delta,\gamma}^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma \Gamma_{\sigma\delta}^\alpha + \Gamma_{\beta\delta}^\sigma \Gamma_{\sigma\gamma}^\alpha$$

Tensor de Ricci e Escalar de Curvatura:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha}^\alpha$$

$$R = R_\alpha^\alpha$$

Derivada Covariante:

$$A^\beta_{;\alpha} \equiv \nabla_\alpha A^\beta = \partial_\alpha A^\beta + \Gamma_{\alpha\sigma}^\beta A^\sigma$$

$$A_{\alpha;\beta} \equiv \nabla_\beta A_\alpha = \partial_\beta A_\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma A_\sigma$$

Simetrização:

$$A_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2} (A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha})$$

Anti-simetrização:

$$A_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2} (A_{\alpha\beta} - A_{\beta\alpha})$$

INTRODUÇÃO

O *princípio de equivalência fraco*¹ tem desempenhado um papel de alta relevância no desenvolvimento da teoria gravitacional. Newton o tinha em tão grande apreço que dedicou os parágrafos de abertura de seu *Principia* a uma discussão detalhada do mesmo. Não é de se surpreender pois, que Leonard I. Schiff[2], impressionado pela considerável precisão com que este princípio era confirmado pelas experiências de Eötvös, fosse levado a imaginar, por volta de 1960, que qualquer teoria de gravitação que incorporasse o princípio de equivalência fraco (P.E.Fr.) necessariamente incorporaria o princípio de equivalência forte(P.E.Fo.), ou seja, o princípio do acoplamento mínimo².

Esta suposição, conhecida como CONJECTURA DE SCHIFF, estabelece uma relação entre os dois princípios de equivalência que pode ser representada simbolicamente por

$$PEFr \Rightarrow PEFo.$$

Dezessete anos após Schiff ter formulado sua conjectura, Wei-Tou Ni[3] apresentou um contra-exemplo à mesma: uma teoria de gravitação contendo um termo lagrangeano do tipo

$$\lambda\sqrt{-g}R\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta},$$

onde $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ é o tensor de Levi-Civita totalmente antissimétrico e λ é uma constante de acoplamento com dimensão de comprimento ao quadrado. Na realidade a teoria de Ni é um exemplo simples de uma teoria onde a gravitação se acopla *diretamente* com o campo

¹“As massas inercial e gravitacional da matéria usual são iguais”.

²“Em qualquer domínio do espaço-tempo, sempre se pode encontrar um sistema de referência lorentziano local de modo a que as leis físicas sejam as mesmas que no espaço-plano de Minkowski da teoria da relatividade especial”.

eletromagnético. Tais tipos de acoplamentos são conhecidos na literatura como *acoplamentos gravitacionais não-mínimos* em contraposição ao acoplamento mínimo (PEFo) preconizado por Einstein.

Este resultado de Ni nos levou a conjecturar sobre a possibilidade das teorias contendo acoplamentos gravitacionais não-mínimos serem – contrariamente à crença em voga – compatíveis com o PEFr e consequentemente, contra-exemplos à conjectura de Schiff.

O objetivo desta tese é demonstrar a validade desta suposição.

No capítulo I apresentamos uma discussão sobre o papel do acoplamento mínimo na descrição da interação entre campos e analisamos o conceito de acoplamento gravitacional não-mínimo. Em seguida mostramos que todas as teorias encontradas na literatura envolvendo campos escalares ou eletromagnéticos não-minimamente acoplados à gravitação Einsteiniiana são na realidade teorias *pseudamente acopladas não-minimamente à gravitação*[4], já que o acoplamento não-mínimo pode ser totalmente eliminado da equação de movimento correspondente ao campo escalar ou eletromagnético.

No capítulo II demonstramos que todas as teorias não-minimamente acopladas à gravitação obedecem o PEFr. A demonstração é totalmente independente do modelo adotado para a descrição do acoplamento gravitacional não-mínimo[5,6].

O capítulo III é dedicado à investigação das modificações que a presença do acoplamento não-mínimo introduz nas leis que descrevem a propagação da radiação eletromagnética. Para tal, foram utilizadas lagrangeanas lineares na curvatura e quadráticas no campo eletromagnético. Mostramos, em particular, usando o *método das características*, que as equações de Maxwell modificadas pelo acoplamento não-mínimo levam a uma nova lei para a propagação da radiação eletromagnética, que pode evitar o *problema do horizonte* – o calcanhar de Aquiles do modelo cosmológico padrão[7].

Na conclusão apresentamos uma discussão sobre os resultados anteriormente obtidos, bem como um esboço relativo a futuras aplicações.

Capítulo I

SOBRE O ACOPLAMENTO DE CAMPOS FÍSICOS COM A GRAVITAÇÃO

I.1 Campos em Interação

No contexto do formalismo lagrangeano, uma teoria de campos em interação é especificada por uma densidade de lagrangeana, a qual deve conter, além da parte livre, termos que descrevam as possíveis interações entre campos[8]. Apesar das possibilidades serem infinitas no que concerne à escolha destes termos interativos, existem certos critérios ou princípios – entre os quais o *princípio do acoplamento mínimo* ocupa papel de destaque – que, na prática, restringem fortemente a possível forma dos mesmos.

Consideremos, como ilustração deste princípio mínimo, o procedimento padrão utilizado na obtenção da densidade de lagrangeana que descreve a interação entre o campo do elétron, representado pela densidade de lagrangeana

$$\mathcal{L}_e = \bar{\psi}(x)(i \not{\partial} - m)\psi(x) \quad (\text{I.1})$$

onde

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$$

$$\not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu,$$

e o campo do fóton, cuja densidade de lagrangeana é dada por

$$\mathcal{L}_f = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) \quad (\text{I.2})$$

onde

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x). \quad (I.3)$$

Como é bem conhecido, $\mathcal{L}_e$ é invariante pela transformação global

$$\begin{aligned} \psi(x) &\longrightarrow \psi'(x) = e^{-i\theta} \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\longrightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\theta} \bar{\psi}(x). \end{aligned} \quad (I.4)$$

$\mathcal{L}_f$, por sua vez, é invariante pela transformação

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x). \quad (I.5)$$

Suponhamos, no entanto, que θ seja uma função $\theta(x)$ do espaço-tempo. Em outras palavras, admitamos que $\mathcal{L}_e$ seja invariante sob a mudança de fase dependente do espaço-tempo,

$$\begin{aligned} \psi(x) &\longrightarrow \psi'(x) = e^{-i\theta(x)} \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\longrightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\theta(x)} \bar{\psi}(x). \end{aligned} \quad (I.6)$$

O termo derivativo passa agora a ter uma lei de transformação mais complicada

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x) \partial_\mu \psi(x) &\longrightarrow \bar{\psi}'(x) \partial_\mu \psi'(x) = \bar{\psi}(x) e^{i\theta(x)} \partial_\mu [e^{-i\theta(x)} \psi(x)] \\ &= \bar{\psi}(x) \partial_\mu \psi(x) - i \bar{\psi}(x) \partial_\mu \theta(x) \psi(x). \end{aligned} \quad (I.7)$$

O segundo termo da equação (I.7) quebra a invariância. Para restaurarmos a simetria precisamos substituir a derivada ∂_μ pela derivada covariante de gauge D_μ , definida como,

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu + ie A_\mu) \psi, \quad (I.8)$$

onde $A_\mu(x)$ é o campo de gauge e e a carga eletrônica.

Para que a lei de transformação da derivada covariante

$$D_\mu \psi(x) \longrightarrow [D_\mu \psi(x)]' = e^{-i\theta(x)} D_\mu \psi(x) \quad (I.9)$$

seja satisfeita, $A_\mu(x)$ deve se transformar como se segue

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta(x). \quad (I.10)$$

A densidade de lagrangeana

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x)(i \not{D} - m)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) \quad (\text{I.11})$$

descreve a interação entre os campos do elétron e do fóton num mesmo ponto x .

O processo que acabamos de descrever é conhecido como *princípio do acoplamento mínimo*.

Em suma, a interação entre os campos é realizada através da substituição da derivada comum pela derivada covariante. No entanto, termos do tipo

$$\Delta\mathcal{L} = \xi\bar{\psi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\psi \quad (\text{I.12})$$

onde ξ é uma constante, são também invariantes de gauge. Apesar deles não serem permitidos na *QED*, em virtude do critério de renormalizabilidade [9], não existe nenhuma razão teórica para não inclui-los em outras teorias. Na realidade, a utilização unilateral do princípio do acoplamento mínimo na descrição da interação entre campos, leva a inconsistências internas. Uma possível maneira de contornar esta dificuldade é apelar-se para acoplamentos não-mínimos do tipo (I.12), conforme mostra o exemplo que se segue.

Interação de um campo carregado de spin 1 com um campo eletromagnético externo

Seja ϕ^μ um campo vetorial carregado não-massivo, cuja dinâmica é fornecida pela densidade de lagrangeana [10]

$$\tilde{\mathcal{L}} = -\frac{1}{2}\tilde{B}_{\mu\nu}^*\tilde{B}^{\mu\nu} \quad (\text{I.13})$$

com

$$\tilde{B}_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi_\nu - \partial_\nu\phi_\mu. \quad (\text{I.14})$$

A densidade de lagrangeana em questão é invariante pela transformação global

$$\phi_\mu \longrightarrow \phi'_\mu = e^{-i\theta}\phi_\mu$$

$$\phi_\mu^* \longrightarrow \phi'^*_\mu = e^{i\theta}\phi_\mu^*. \quad (\text{I.15})$$

Suponhamos agora que θ seja uma função $\theta(x)$ do espaço-tempo e apliquemos a prescrição mínima, o que nos permite construir o campo covariante de gauge

$$B^{\mu\nu} = D^\mu \phi^\nu - D^\nu \phi^\mu. \quad (\text{I.16})$$

Isto significa que

$$B^{\mu\nu} = \tilde{B}^{\mu\nu} + ie(A^\mu \phi^\nu - A^\nu \phi^\mu).$$

Vamos admitir, por simplicidade, que o campo eletromagnético seja um *campo externo*, o que implica que não há nem densidade de lagrangeana nem equação de movimento para o mesmo, já que este último é um *campo aplicado*[11].

A densidade de lagrangeana invariante de gauge é portanto

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{2}(D_\mu \phi_\nu - D_\nu \phi_\mu)^* B^{\mu\nu}. \quad (\text{I.17})$$

De (I.17) segue-se imediatamente a equação de movimento para o campo ϕ^μ

$$D_\nu B^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{I.18})$$

Aplicando o operador D_μ à equação (I.18) e levando em conta a não comutatividade das derivadas covariantes, ou seja, que

$$[D_\mu, D_\nu] = ieF_{\mu\nu} \quad (\text{I.19})$$

obtemos a condição suplementar

$$F_{\mu\nu} B^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{I.20})$$

Podemos evitar tal dificuldade adicionando a $\mathcal{L}$ o termo não-mínimo

$$\Delta\mathcal{L} = \xi \phi_\mu^* \phi_\nu F^{\mu\nu}. \quad (\text{I.21})$$

A densidade de lagrangeana resultante

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{2} B_{\mu\nu}^* B^{\mu\nu} + \xi \phi_\mu^* \phi_\nu F^{\mu\nu}, \quad (\text{I.22})$$

nos fornece agora a seguinte equação de movimento para o campo ϕ^μ

$$D_\nu B^{\mu\nu} - \xi \phi_\nu F^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{I.23})$$

Tomando a divergência de (1.23), obtemos, em lugar de (1.20), a condição de consistência

$$(i\epsilon - \xi)F_{\mu\nu}B^{\mu\nu} = 0.$$

Escolhendo convenientemente a constante ξ , é possível eliminar o vínculo (1.20) e tornar a teoria de interação consistente.

Analisemos mais de perto a lagrangeana de interação (1.22). Esta pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{NM}, \quad (1.24)$$

$$\mathcal{L}_M = \frac{-1}{2}B_{\mu\nu}^*B^{\mu\nu},$$

$$\mathcal{L}_{NM} = \xi\phi_\mu^*\phi_\nu F^{\mu\nu},$$

O primeiro termo – $\mathcal{L}_M$ – obedece o princípio de acoplamento mínimo, e como tal, garante a invariância de gauge local. O segundo termo, $\mathcal{L}_{NM}$, por sua vez, não obedece o princípio de acoplamento mínimo, sendo, porém, invariante por uma mudança de fase dependente do espaço-tempo. Sua função é possibilitar a construção de uma teoria de interação consistente. Na realidade, $\mathcal{L}_M$ e $\mathcal{L}_{NM}$, desempenham papéis complementares e são igualmente importantes se o alvo é a obtenção de uma teoria de interação entre o campo ϕ_μ e o campo eletromagnético, que seja simultaneamente invariante de gauge local e consistente.

Interação com o campo gravitacional

O primeiro passo a caminho da descrição da interação entre um dado campo e a gravitação é tentar responder à questão : *como a gravitação modifica a equação de movimento do campo em questão?*

À primeira vista a resposta à esta indagação parece ser muito simples se, como é de praxe, invocarmos o princípio do acoplamento mínimo. De acordo com este princípio, a interação entre o campo gravitacional e um dado campo ψ^A , onde A representa quaisquer índices tensoriais, é feita substituindo-se, na densidade de lagrangeana $\mathcal{L}(\psi^A, \partial_\mu \psi^A)$ que descreve a dinâmica do campo ψ^A na relatividade especial, $\eta_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu}$ e $\partial_\mu \longrightarrow \nabla_\mu$. A derivada covariante ∇_μ é agora construída com os símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, os quais, por sua

vez, são definidos em termos do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ (potencial gravitacional):

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}[g_{\mu\lambda,\nu} + g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}]. \quad (1.25)$$

É importante assinalar que, contrariamente ao que acontece nas teorias de gauge, onde a passagem da invariância global para a local exige a introdução de um campo de gauge (o campo eletromagnético, no caso do elétron), **não é verdade** que se necessite lançar mão do campo gravitacional para se construir uma teoria cujas equações sejam covariantes com respeito a transformações de coordenadas gerais. De fato, como foi reconhecido por Kretschmann[12] num exame crítico da teoria da relatividade geral, qualquer equação que não é covariante pode ser facilmente transformada numa equação equivalente, a qual, por sua vez, é covariante.

Mesmo as equações de movimento de Newton $\frac{\partial p^k}{\partial x^0} = F^k$, podem ser escritas sob a forma covariante geral[13]

$$\frac{\partial \bar{x}^{\alpha}}{\partial x^0} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{\alpha}} \left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{\mu}} \bar{p}^{\mu} \right) = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{\mu}} \bar{F}^{\mu},$$

se definirmos

$$\bar{p}^{\mu} = \frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial x^l} p^l$$

$$\bar{F}^{\mu} = \frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial x^k} F^k.$$

Consideremos, com vistas ao que se segue, dois importantes exemplos do emprego do acoplamento gravitacional mínimo.

Acoplamento mínimo de campo escalar com a gravitação

Seja um campo escalar real não-massivo $\phi(x)$ cuja lagrangeana na ausência de qualquer interação é dada por

$$\mathcal{L}_0 = \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi. \quad (1.26)$$

De acordo com o princípio de acoplamento mínimo, na presença do campo gravitacional, a lagrangeana (1.26) assume a forma

$$\mathcal{L}_{\phi} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \phi \nabla_{\nu} \phi.$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \\
&= \sqrt{-g} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi.
\end{aligned} \tag{I.27}$$

A lagrangeana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_E + \mathcal{L}_\phi \tag{I.28}$$

$$\mathcal{L}_E = \sqrt{-g} \frac{R}{k} \tag{I.29}$$

onde k é a constante de Einstein¹, descreve a interação mínima campo escalar-gravitação. Fatores adicionais como massa, potencial, auto-interação ou a presença de uma constante cosmológica podem ser facilmente incluídas nesta descrição.

As equações de campo correspondentes a (I.28), encontram-se na apêndice C.

Interação mínima entre um campo vetorial e o campo gravitacional

No caso de um campo vetorial $A_\mu(x)$, que para sermos específicos admitiremos ser o potencial eletromagnético na ausência de cargas, as equações que descrevem a dinâmica do campo A_μ na relatividade especial são as equações de Maxwell da eletrodinâmica clássica

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{I.30}$$

$$\partial_{[\lambda} F_{\mu\nu]} = 0 \tag{I.31}$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{I.32}$$

é o *tensor antissimétrico de Maxwell* para o potencial A_μ . A relação cíclica (I.31) resulta diretamente da definição (I.32) do tensor $F_{\mu\nu}$; a equação (I.30) pode ser obtida a partir da lagrangeana

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \tag{I.33}$$

¹ $k = 8\pi G$ no sistema natural de unidades; G é a constante de gravitação de Newton.

Novamente, o princípio do acoplamento mínimo nos indica que o caminho mais natural para uma generalização covariante geral dos processos eletromagnéticos para espaços curvos consiste na substituição direta da métrica de Lorentz $\eta^{\mu\nu}$ pela métrica riemanniana arbitrária $g^{\mu\nu}$ e também das derivadas ordinárias por derivadas covariantes; assim, definimos o tensor de Maxwell generalizado

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &\equiv \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \end{aligned} \quad (\text{I.34})$$

que em virtude da antissimetria se reduz à forma tradicional (I.32). Com esta definição a relação cíclica correspondente à equação (I.31), é imediatamente satisfeita,

$$\nabla_{[\lambda} F_{\mu\nu]} = 0 \quad (\text{I.35})$$

A lagrangeana de Maxwell generalizada toma a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{I.36})$$

Introduzindo a representação de Einstein–Hilbert para o campo gravitacional, a lagrangeana total da interação mínima campo vetorial – gravitação é expressa por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_E + \mathcal{L}_F. \quad (\text{I.37})$$

As correspondentes equações de campo encontram-se no apêndice D.

É simples a introdução de cargas ou correntes externas nesta representação.

É importante notar, no entanto, que uma generalização direta das equações de Maxwell para o espaço-curvo pela regra da “vírgula-vai-em-ponto-e-vírgula”, como é conhecido popularmente o princípio do acoplamento mínimo², não é totalmente desprovida de ambiguidades. Para comprovarmos esta asserção, basta considerarmos as equações de Maxwell não homogêneas

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu, \quad (\text{I.38})$$

²É comum representar-se a derivada ordinária por uma vírgula e a derivada covariante por um ponto e vírgula, daí o nome da regra.

que, com a ajuda de (I.32), podem ser escritas como

$$A^{\nu,\mu}_{;\nu} - A^{\mu,\nu}_{;\nu} = J^{\mu}. \quad (I.39)$$

Como as derivadas ordinárias comutam, a equação (I.39) é equivalente a

$$A^{\nu}_{;\nu}{}^{,\mu} - A^{\mu,\nu}_{;\nu} = J^{\mu}. \quad (I.40)$$

Se aplicarmos a regra da “vírgula-vai-em-ponto-e-vírgula” à equação (I.39), obtemos,

$$A^{\nu;\mu}_{;\nu} - A^{\mu;\nu}_{;\nu} = J^{\mu} \longrightarrow F^{\mu\nu}_{;\nu} = J^{\mu}. \quad (I.41)$$

Aplicando, agora, a mesma regra à equação (I.40) obtemos

$$A^{\nu}_{;\nu}{}^{;\mu} - A^{\mu;\nu}_{;\nu} = J^{\mu}. \quad (I.42)$$

Utilizando a equação (E.5) do apêndice E, a equação anterior assume a forma

$$A^{\nu;\mu}_{;\nu} - A^{\mu;\nu}_{;\nu} + R^{\mu}_{\lambda} A^{\lambda} = J^{\mu} \longrightarrow F^{\mu\nu}_{;\nu} = J^{\mu} - R^{\mu}_{\lambda} A^{\lambda}. \quad (I.43)$$

As equações (I.41) e (I.43) tem, em princípio, consequências diferentes do ponto de vista experimental. No entanto, não existe até o momento nenhuma experiência que permita dizer qual das duas equações é a correta[14, 15]

Os exemplos anteriores são instrutivos para que apreciemos alguns aspectos de interesse dos acoplamentos mínimos: em primeiro lugar, devido ao pequeno número de condições arbitrárias introduzidas, sua atraente simplicidade conceitual. Por outro lado, como no acoplamento mínimo os termos de curvatura não se mesclam com os campos da matéria, é sempre possível encontrar um sistema de referência lorentziano local – bastando para tanto anular localmente as conexões afins da variedade(vide apêndice A) – de modo que as equações de movimento sejam as mesmas que no espaço plano de Minkowski da relatividade especial. Em outras palavras, pela aplicação do princípio do acoplamento mínimo obtemos leis físicas covariantes que se reduzem localmente àquelas de que partimos.

Considera-se na literatura[16], que existem três tipos de confirmação observacional para o princípio de equivalência forte, ou seja o princípio do acoplamento mínimo : i) a invariância da razão entre massa inercial e massa gravitacional (experiência de Eötvös); ii) a presumível

validade das equações generalizadas de Maxwell da eletrodinâmica; iii) a estabilidade de certas constantes adimensionais microscópicas.

É importante frisar, no entanto, que o princípio do acoplamento mínimo só foi testado em regiões de campo gravitacional fraco[17]. É provável que este princípio deva ser abandonado quando entram em consideração fenômenos envolvendo campos gravitacionais intensos (como é o caso, por exemplo, dos pulsares e estrelas colapsantes), domínios muito amplos do espaço-tempo ou outros aspectos não-locais ("solares"). Em verdade, não há, na presente época, evidências definitivas ou princípios terminantemente estabelecidos que selecionem este princípio mínimo à exclusão de quaisquer outras formas de representação[18, 19].

Esta constatação nos incentiva à investigação de formas de acoplamentos gravitacionais mais abrangentes que as prescritas pelo procedimento mínimo da teoria da relatividade geral usual.

I.2 Acoplamento Não-Mínimo

De um modo geral, o acoplamento gravitacional não-mínimo admite uma representação lagrangeana da forma³

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{grav} + \mathcal{L}_{mat} + \mathcal{L}_{int}[grav, mat], \quad (I.44)$$

onde a introdução da lagrangeana de interação $\mathcal{L}_{int}$, contendo funcionais da curvatura misturados a termos de matéria, acarreta o aparecimento de termos mistos também nas equações de movimento oriundas da variação da ação correspondente a $\mathcal{L}$.

É interessante notar-se a semelhança formal entre as equações (I.44) e (I.24) – o termo $\mathcal{L}_{mat}(\mathcal{L}_M)$ obedece o princípio do acoplamento mínimo e garante a covariância geral, enquanto que $\mathcal{L}_{int}(\mathcal{L}_{NM})$ não obedece o princípio mínimo, mas é covariante geral.

Para citar apenas um exemplo da importância do acoplamento gravitacional não-mínimo, basta que recordemos o papel fundamental desempenhado pelo acoplamento conforme entre os campos escalares e gravitacional em modernas investigações na física das partículas

³ $\mathcal{L}_{grav} \equiv \mathcal{L}_E$ é a densidade de lagrangeana de Einstein-Hilbert; enquanto $\mathcal{L}_{mat} \equiv \mathcal{L}_m$ é a densidade de lagrangeana da matéria.

elementares, em conexão com modelos de quebra espontânea de simetria e transições de fase e, na cosmologia, na elaboração de cenários alternativos variados[20].

Vamos analisar agora uma classe peculiar de lagrangeanas.

I.3 Lagrangeanas Pseudamente Acopladas Não-Minimamente à Gravitação

Seja $\mathcal{L}$ a densidade de lagrangeana mais geral descrevendo o acoplamento não-mínimo entre um campo escalar real e a gravitação einsteiniana em quatro dimensões⁴

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\frac{R}{k} + \sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)\right] + \sqrt{-g}f(\phi)R + \sqrt{-g}L_m. \quad (\text{I.45})$$

As funções arbitrárias $f(\phi)$ e $V(\phi)$ distinguem as diferentes teorias; o potencial $V(\phi)$ desempenha o papel de uma constante cosmológica caso $V(\phi)$ seja igual a uma constante não nula.

Em unidades naturais, $[f(\phi)] = [k^{-1}] = L^{-2}$.

Variando $\mathcal{L}$ em relação a ϕ , obtemos a equação de movimento para o campo escalar, ou seja,

$$\square\phi + V'(\phi) - Rf'(\phi) = 0, \quad (\text{I.46})$$

onde $f'(\phi) = \frac{df}{d\phi}$ e $V'(\phi) = \frac{dV}{d\phi}$.

Variando agora $\mathcal{L}$ em relação a $g_{\mu\nu}$, com ϕ constante, e utilizando os resultados dos apêndices A e C, teremos a equação de Einstein associada,

$$G^{\mu\nu} + k[T^{\mu\nu} + T_{(\phi)}^{\mu\nu}] = 0 \quad (\text{I.47})$$

$$\begin{aligned} T_{(\phi)}^{\mu\nu} &= \frac{-1}{4}g^{\mu\nu}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi + \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi \\ &\quad + \frac{V(\phi)}{2}g^{\mu\nu} + (\nabla^\mu\nabla^\nu - g^{\mu\nu}\square)f(\phi) + G^{\mu\nu}f(\phi) \end{aligned}$$

$$\delta_g \int d^4x \sqrt{-g} L_m = - \int d^4x \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}.$$

⁴Neste trabalho, não consideraremos acoplamentos derivativos.

Note que $T_{(\phi)}^{\mu\nu}$ pode ser escrito como

$$T_{(\phi)}^{\mu\nu} = T_{\min}^{\mu\nu}[\phi] + (\nabla^\mu \nabla^\nu - g^{\mu\nu} \square) f + G^{\mu\nu} f \quad (\text{I.48})$$

$$T_{(\min)}^{\mu\nu}[\phi] = \frac{-1}{4} g^{\mu\nu} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi + \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + \frac{V(\phi)}{2} g^{\mu\nu}.$$

Tomando o traço de (I.47), obtemos

$$R = k(1 + fk)^{-1} [T - \frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi + 2V - 3\square f]. \quad (\text{I.49})$$

Levando este resultado em (I.46), a equação de movimento do campo escalar assume a forma

$$kf'(1 + fk)^{-1} [T - \frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi + 2V - 3\square] - \square \phi - V' = 0. \quad (\text{I.50})$$

Apesar de altamente não linear, a equação de movimento de ϕ descreve um campo escalar **minimamente acoplado** à gravitação. Este resultado peculiar, levou Accioly e Wichoski a denominarem lagrangeanas do tipo (II.45) de **lagrangeanas pseudamente acopladas não minimamente à gravitação** [4].

É digno de nota, que todas as teorias encontradas até agora na literatura envolvendo um campo escalar real não-minimamente acoplado à gravitação einsteiniana em quatro dimensões são na realidade **teorias pseudamente acopladas não-minimamente à gravitação**. Exemplos específicos são fornecidos pela *teoria com simetria quebrada de Zee*[21], assim como pelas teorias gravitacionais de *Callan et al.*[22], *Madsen*[23], *Schmidt et al.*[24]. Nesta classe estão também incluídas as *teorias com campo escalar conforme*[25, 26, 27].

Vamos considerar agora teorias contendo acoplamentos não-mínimos entre o tensor do campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$ e a gravitação, representadas pela densidade de lagrangeana⁵

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{-g}}{k} R - \frac{\sqrt{-g}}{2} F^2 + \sqrt{-g} h(F^2) R + \sqrt{-g} L_m, \quad (\text{I.51})$$

onde

$$F^2 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

⁵ $[h(F^2)] = [k^{-1}] = L^{-2}$.

As correspondentes equações de campo são dadas por(vide apêndices A e D)

$$G^{\mu\nu} + k(T^{\mu\nu} + T_{(F)}^{\mu\nu}) = 0 \quad (I.52)$$

$$\begin{aligned} T_{(F)}^{\mu\nu} = & \frac{1}{4}F^2 g^{\mu\nu} - F^\mu_\alpha F^{\nu\alpha} \\ & + (\nabla^\mu \nabla^\nu - g^{\mu\nu} \square)h \\ & + 2R \frac{dh}{dF^2} F^\mu_\alpha F^{\nu\alpha} + G^{\mu\nu} h \end{aligned}$$

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} - \nabla_\nu [2R \frac{dh}{dF^2} F^{\mu\nu}] = 0. \quad (I.53)$$

Tomando o traço de (I.52) e substituindo em (I.53) obtemos

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} - \nabla_\nu \left\{ 2 \frac{dh}{dF^2} F^{\mu\nu} k(1 + kh - 2kF^2 \frac{dh}{dF^2})^{-1} [T - 3\square h] \right\} = 0 \quad (I.54)$$

Segue-se que a lagrangeana (I.51) é também *pseudamente acoplada não-minimamente*.

No caso particular $h(F^2) = \lambda F^2$, onde λ é uma constante de acoplamento, (I.51) reproduz a eletrodinâmica não-linear analisada por Accioly e Pereira da Silva[28, 29].

Apesar de não termos considerado teorias contendo acoplamentos $\approx RA^2$, uma vez que estes não são invariantes de gauge[30], é fácil mostrar por argumentos semelhantes aos aqui expostos, que as correspondentes lagrangeanas são também *pseudamente acopladas não-minimamente*.

O próximo capítulo será devotado ao estudo da compatibilidade entre o PEFr e o acoplamento gravitacional não-mínimo.

Capítulo II

COMPATIBILIDADE ENTRE O PRINCÍPIO DE EQUIVALÊNCIA FRACO E O ACOPLAMENTO GRAVITACIONAL NÃO-MÍNIMO

II.1 O Princípio de Equivalência Fraco

Quase todas as teorias de gravitação conhecidas têm como pedra fundamental o Princípio de Equivalência Fraco¹: *uma partícula-teste em queda livre segue uma “linha reta” ou geodésica do espaço-tempo local, quaisquer que sejam sua estrutura ou composição internas.* Por *partícula-teste* compreendemos aqui uma partícula eletricamente neutra, suficientemente pequena para que i) sua auto-energia gravitacional, calculada utilizando-se a teoria de Newton usual, possa ser desprezada quando comparada com sua massa de repouso ($\frac{M}{R} \ll 1$), e ii) o acoplamento de seus momentos de multipolo com as inhomogeneidades do campo gravitacional possam ser negligenciados[31]. Na linguagem de Papapetrou[1] tais partículas são chamadas de *monopólos*.

Pode-se mostrar rigorosamente que pelo fato do tensor de energia-momentum da matéria ser covariantemente conservado na teoria da relatividade geral – o que, por sua vez, é uma consequência trivial das equações de campo de Einstein – as partículas-teste seguem as geodésicas do espaço-tempo[1].

¹ “Todos os corpos caem em um campo gravitacional com a mesma aceleração independentemente de sua massa ou composição interna”. Um enunciado alternativo é o seguinte:

“Para qualquer corpo $m_p = m_i$, onde m_p é a massa gravitacional passiva e m_i a massa inercial.”

Apresentamos, em sequência, uma demonstração não rigorosa, mas bastante simples e elucidativa deste fato. Para tanto, consideremos uma coleção de partículas livres (partículas que não interagem entre si). Se o seu número for muito grande, podemos considerá-las como um fluido ideal sem pressão (poeira), o que implica que seu tensor de energia-momentum pode ser escrito como²

$$T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu. \quad (\text{II.1})$$

Devido as equações de campo de Einstein³,

$$0 = T^{\mu\nu}_{;\mu} = (\rho U^\mu)_{;\mu} U^\nu + \rho U^\mu U^\nu_{;\mu}. \quad (\text{II.2})$$

Do fato que $U_\nu U^\nu = 1$, vem, por outro lado, que

$$U_\nu U^\nu_{;\mu} = \frac{1}{2} (U_\nu U^\nu)_{;\mu} = 0 \quad (\text{II.3})$$

Multiplicando agora (II.2) por U_ν e levando em conta (II.3), obtemos

$$(\rho U^\mu)_{;\mu} = 0 \quad (\text{II.4})$$

ou seja, a equação de continuidade (conservação de massa). Portanto, (II.2) assume agora a forma

$$U^\mu U^\nu_{;\mu} = 0, \quad (\text{II.5})$$

ou, equivalentemente

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} [U^\nu_{;\mu} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} U^\lambda] = 0 \rightarrow \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \quad (\text{II.6})$$

As linhas de universo das partículas são, pois, geodésicas. Como por hipótese as partículas não interagem entre si, podemos concluir que a linha de universo de uma **única** partícula-teste livre será também uma geodésica.

² ρ é a densidade de energia e U^μ um vetor tipo-tempo normalizado a um ($U^\mu U_\mu = 1$).

³ $G^{\mu\nu} = -kT^{\mu\nu} \Rightarrow T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$, já que $G^{\mu\nu}_{;\mu} \equiv 0$.

II.2 Princípio de Equivalência Fraco Versus Acoplamento Gravitacional Não-Mínimo

É crença generalizada que o acoplamento gravitacional não-mínimo viola o princípio de equivalência fraco. Esta idéia é na realidade falaz, conforme demonstraremos em sequência[5].

Teorema⁴. – Qualquer teoria cuja ação é da forma

$$S(x) = \int d^4x \mathcal{L}(x) \quad (\text{II.7})$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_E + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_m$$

$$\mathcal{L}_E = \frac{R\sqrt{-g}}{k}$$

$$\mathcal{L}_I = \sqrt{-g} L_I(g_{\mu\nu}, \psi^A)$$

onde A representa quaisquer índices tensoriais, $\mathcal{L}_I$ é densidade de lagrangeana para a interação não-mínima entre o campo tensorial ψ^A e a gravitação, e $\mathcal{L}_m$ a densidade de lagrangeana para a matéria usual, é compatível com o princípio de equivalência fraco. – Como a ação é um escalar ela é invariante sob a transformação de coordenadas infinitesimal

$$\delta_c x^\mu \equiv \bar{x}^\mu - x^\mu = \xi^\mu \quad (\text{II.8})$$

o que nos permite escrever

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{S}(\bar{x}) - S(x) = \int d^4\bar{x} \bar{\mathcal{L}}(\bar{x}) - \int d^4x \mathcal{L}(x) \\ &= \int d^4x [\bar{\mathcal{L}}(x) - \mathcal{L}(x)] \\ &= \int d^4x \delta_c \mathcal{L}(x) \\ &= \int d^4x \delta_c \mathcal{L}_E + \int d^4x \delta_c \mathcal{L}_I + \int d^4x \delta_c \mathcal{L}_m \end{aligned}$$

Porém, $\int d^4x \delta_c \mathcal{L}_E$, $\int d^4x \delta_c \mathcal{L}_I$ e $\int d^4x \delta_c \mathcal{L}_m$, são, por sua vez, separadamente invariantes pela transformação de coordenadas (III.8), devido a própria natureza do processo de covariância.

⁴A densidade de lagrangeana para a matéria usual não contém ψ^A .

Examinemos, pois, o que esta invariância nos fornece em cada caso:

$$i) \int d^4x \delta_c \mathcal{L}_E = 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^4x \delta_c \mathcal{L}_E \\ &= - \int d^4x \sqrt{-g} \frac{G^{\mu\nu}}{k} \delta_c g_{\mu\nu} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \frac{G^{\mu\nu}}{k} (\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu) \quad [\text{vide apêndice B}] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \frac{2G^{\mu\nu}}{k} \nabla_\mu \xi_\nu \\ &= - \int d^4x \frac{2\sqrt{-g}}{k} (\nabla_\mu G^{\mu\nu}) \xi_\nu. \end{aligned}$$

Como ξ_ν é arbitrário, segue-se que $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$. Este é realmente o caso devido a *identidade de Bianchi*⁵.

$$ii) \int d^4x \delta_c \mathcal{L}_I = 0$$

$$0 = \int d^4x \frac{\delta \mathcal{L}_I}{\delta \psi^A} \delta_c \psi^A + \int d^4x \frac{\delta \mathcal{L}_I}{\delta g_{\mu\nu}} \delta_c g_{\mu\nu}.$$

Mas $\frac{\delta \mathcal{L}_I}{\delta \psi^A}$ são as equações de movimento para ψ^A o que implica em

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^4x \sqrt{-g} T_{(I)}^{\mu\nu} \delta_c g_{\mu\nu} \\ &= -2 \int d^4x \sqrt{-g} \xi_\nu \nabla_\mu T_{(I)}^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Pelo fato de ξ_ν ser arbitrário, $\nabla_\mu T_{(I)}^{\mu\nu} = 0$, ou seja, o tensor de energia-momentum correspondente ao acoplamento gravitacional não-mínimo, é covariantemente conservado na concha de massa de ψ^A independentemente de quaisquer outras propriedades do resto da ação. A física é simples: ψ^A só vê a gravidade, portanto seu tensor de energia-momentum só é afetado ou não conservado ($\nabla_\mu T_{(I)}^{\mu\nu} \neq 0$) devido ao campo gravitacional. Este resultado é extremamente importante, pois evita, na prática, a árdua tarefa de computar na “força bruta” a divergência covariante do tensor de energia-momentum.

$$iii) \int d^4x \delta_c \mathcal{L}_m = 0$$

De (iii) segue-se prontamente que $\nabla_\mu T_{(m)}^{\mu\nu} = 0$. Consequentemente, a troca de energia entre a matéria e o campo gravitacional é descrita exatamente como na teoria de Einstein.

⁵ $R^\alpha_{\beta[\gamma\delta;\tau]} = 0$.

QED. A demonstração acima delineada é totalmente independente do modelo adotado para a descrição da interação gravitacional não-mínima, sendo portanto completamente geral.

Em 1990 Accioly[32] e Accioly e Wichoski[4] apresentaram uma demonstração deste teorema para o caso particular das teorias pseudamente acopladas não-minimamente à gravitação, utilizando a “força bruta”. Apresentaremos, em seguida, uma versão deste resultado.

Sejam as teorias dadas por (I.45) e (I.51). Vamos calcular inicialmente $\nabla_\nu T_{(\phi)}^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}\nabla_\nu T_{(\phi)}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\phi^{,\mu}[\Box\phi + V'] + f^{,\nu;\mu}_{;\nu} \\ &\quad - f^{,\nu}_{;\nu}{}^{;\mu} + R^\mu{}_\nu f^{,\nu} - \frac{1}{2}Rf^{,\mu}.\end{aligned}$$

Utilizando (I.46) e lembrando que (vide apêndice E),

$$[\nabla_\lambda, \nabla_\mu]f^{,\lambda} = -R_{\lambda\mu}f^{,\lambda}, \quad (II.9)$$

podemos escrever:

$$\begin{aligned}\nabla_\nu T_{(\phi)}^{\mu\nu} &= \frac{R}{2}f^{,\mu} - R^\mu{}_\nu f^{,\nu} + R^\mu{}_\nu f^{,\nu} - \frac{1}{2}Rf^{,\mu} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto, no caso do campo escalar, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. QED.

Determinemos agora $\nabla_\nu T_{(F)}^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}\nabla_\nu T_{(F)}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}F_{\nu\alpha}[F^{\nu\alpha;\mu} - 2F^{\mu\alpha;\nu}] + F^\mu{}_\alpha F^{\alpha\nu}{}_{;\nu} \\ &\quad - R^\mu{}_\nu h^{,\nu} - F^\mu{}_\alpha \nabla_\nu (2R \frac{dh}{dF^2} F^{\alpha\nu}) \\ &\quad - 2R \frac{dh}{dF^2} F_{\alpha\nu} F^{\mu\alpha;\nu} + R^\mu{}_\nu h^{,\nu} - \frac{1}{2}R h^{,\mu} \\ &= \frac{3}{2}F_{\nu\alpha} F^{[\mu\alpha;\nu]} + F^\mu{}_\alpha [F^{\alpha\nu}{}_{;\nu} - \nabla_\nu (2R \frac{dh}{dF^2} F^{\alpha\nu})] \\ &\quad + R \frac{dh}{dF^2} F_{\alpha\nu} [F^{\nu\alpha;\mu} - 2F^{\mu\alpha;\nu}] \\ &= \frac{3}{2}F_{\nu\alpha} F^{[\mu\alpha;\nu]} + F^\mu{}_\alpha [F^{\alpha\nu}{}_{;\nu} - \nabla_\nu (2R \frac{dh}{dF^2} F^{\alpha\nu})] \\ &\quad + 3R \frac{dh}{dF^2} F_{\alpha\nu} F^{[\mu\alpha;\nu]}.\end{aligned}$$

Usando (I.53) e levando em conta que

$$F^{[\mu\alpha;\nu]} = 0, \quad (II.10)$$

obtemos,

$$\nabla_{\nu} T_{(F)}^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{II.11})$$

O que implica em

$$\nabla_{\nu} T^{\mu\nu} = 0, \quad \text{Q.E.D.} \quad (\text{II.12})$$

Consequentemente, será impossível, em ambos os casos, distinguir entre um campo inercial e um gravitacional através de experimentos de queda livre. Esta conclusão é totalmente independente da forma explícita de $f(\phi)$, $V(\phi)$ e $h(F^2)$.

II.3 A Conjectura de Schiff e o Acoplamento Gravitacional Não-Mínimo

Como acabamos de ver, qualquer teoria cuja ação é da forma (II.7) não viola o princípio de equivalência fraco. Porém, como ela contém campos ψ^A acoplados não-minimamente à gravitação, ela viola necessariamente o princípio de equivalência forte, sendo portanto um contra-exemplo à conjectura de Schiff[2]. A teoria de Ni[3] faz parte das teorias definidas por (II.7). Estes resultados podem ser reunidos no colorário que se segue[5].

Colorário – *As teorias com acoplamento gravitacional não-mínimo são contra-exemplos à conjectura de Schiff* – A relação entre os dois princípios de equivalência pode ser representada simbolicamente por

$$PEF_o \not\Rightarrow PEF_r.$$

No próximo capítulo investigaremos as modificações que o acoplamento gravitacional não-mínimo introduz nas leis de propagação da radiação eletromagnética.

Capítulo III

A PROPAGAÇÃO DA RADIAÇÃO ELETROMAGNÉTICA E O ACOPLAMENTO GRAVITACIONAL NÃO-MÍNIMO

III.1 Foto-propagação Via Acoplamento Gravitacional Mínimo

Todo conhecimento que temos do universo provem da observação da radiação eletromagnética¹. Por esta razão, é fundamental que conheçamos as leis que descrevem sua propagação no espaço-tempo curvo. Vamos, pois, em primeiro lugar, estudar essas leis no contexto do acoplamento gravitacional mínimo e, numa etapa posterior, investigar as prováveis alterações introduzidas nestas leis em decorrência da consideração de campos eletromagnéticos não-minimamente acoplados à gravitação.

Apesar de não existirem soluções exatas das equações de Maxwell no espaço-tempo curvo, existem dois métodos que permitem analisar as propriedades de propagação das ondas eletromagnéticas nestas variedades: (i) a *ótica geométrica* e (ii) o estudo das superfícies de descontinuidade – as *características*. Ambos os métodos fornecem de maneira exata as *frentes de onda*.

Neste capítulo, o campo eletromagnético é suposto ser um campo-teste, o que significa que desprezamos sua influência sobre o campo gravitacional².

¹Os raios cósmicos de alta energia constituem a única exceção a esta regra.

²O campo gravitacional será tratado como um campo de fundo (background), que é dado a priori.

Começemos com o estudo das *características* no caso das equações de Maxwell:

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad (\text{III.1})$$

$$F_{[\mu\nu;\tau]} = 0. \quad (\text{III.2})$$

Para obtermos sua equação, precisamos procurar as hipersuperfícies S através das quais $F_{\mu\nu}$ seja contínuo e $F^{\mu\nu}_{;\tau}$ apresente descontinuidades. Seja $f(x) = 0$ a equação que define S , o que implica que

$$k_\mu = f_\mu(x) \quad (\text{III.3})$$

é o vetor gradiente de S . Denotemos por $[]_S$ qualquer descontinuidade funcional através de S . Ou seja, para qualquer funcional ψ do campo,

$$[\psi]_S = \lim_{S^+, S^- \rightarrow S} [\psi(S^+) - \psi(S^-)]. \quad (\text{III.4})$$

Para facilitar a notação, omitiremos o índice S daqui por diante.

As condições de Hadamard[33] garantem a existência de um $\phi_{\mu\nu}$ tal que

$$[F_{\mu\nu;\tau}] = \phi_{\mu\nu} k_\tau. \quad (\text{III.5})$$

Como, por outro lado, a geometria é contínua através de S , podemos escrever

$$[F_{\mu\nu;\tau}] = [F_{\mu\nu,\tau}] = \phi_{\mu\nu} k_\tau. \quad (\text{III.6})$$

Levando (III.6) em (III.1), vem

$$\phi^{\mu\nu} k_\nu = 0 \quad (\text{III.7})$$

$$\phi_{\mu\nu} k_\tau + \phi_{\tau\mu} k_\nu + \phi_{\nu\tau} k_\mu = 0 \quad (\text{III.8})$$

Multiplicando (III.8) por k^τ e usando (III.7) obtemos

$$k_\tau k^\tau \phi_{\mu\nu} = 0.$$

Porém, $\phi_{\mu\nu}$ é diferente de zero – estamos supondo que existam descontinuidades – o que implica que

$$k^2 \equiv k^\tau k_\tau = 0 \quad (\text{III.9})$$

O vetor gradiente de S é, pois, um vetor nulo; consequentemente S é uma superfície nula. De (III.9) segue-se imediatamente que

$$k_\mu k^{\mu;\nu} = 0.$$

Porém, k_μ é um gradiente, o que nos permite escrever

$$k^\mu k^\nu_{;\mu} = 0. \quad (\text{III.10})$$

Logo, as trajetórias cujos vetores tangentes são os k^μ 's são geodésicas tipo-nulo (vide capítulo II). Identificando S com as frentes de onda e as trajetórias com os raios de luz, podemos concluir que estes são geodésicas tipo-nulo.

A partir da equação (III.9) podemos calcular a velocidade de propagação da luz. Temos como relação de dispersão $k_0^2 = k^2$ ($k^2 = k_i k^i$), o que implica numa propagação não dispersiva, onde a velocidade de fase $v_f \equiv \frac{k_0}{k}$ é igual a velocidade de grupo $v_g \equiv \frac{dk_0}{dk}$; portanto no caso da luz, $v_f = v_g = 1$.

A transição da ótica ondulatória para a ótica geométrica é usualmente feita substituindo-se o potencial vetor escrito sob a forma

$$A_\mu(x) = \hat{A}_\mu(x) e^{i\omega S(x)}, \quad (\text{III.11})$$

onde S é real, nas equações para o campo eletromagnético, e igualando-se os coeficientes de w^2 e w , separadamente, a zero[14]. É fácil mostrar utilizando-se o ansatz (III.11) que os resultados fornecidos por este método são idênticos àqueles fornecidos pelo método das características.

Vamos analisar, em sequência, o efeito do acoplamento gravitacional não-mínimo sobre a propagação da radiação eletromagnética.

III.2 Foto-Propagação Via Acoplamento Gravitacional Não-Mínimo

Se nos restringirmos a lagrangeanas lineares na curvatura e quadráticas no campo eletromagnético, que sejam também invariantes de gauge, poderemos construir três teorias descrevendo

campos eletromagnéticos não-minimamente acoplados à gravitação:

$$\mathcal{L}_i = [L_E + L_F + L_i]\sqrt{-g} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$L_E = \frac{R}{k}, \quad L_F = -\frac{1}{2}F^2$$

$$L_1 = \lambda_1 R F^2 \quad (\text{III.12})$$

$$L_2 = \lambda_2 R_{\mu\nu} F^{\mu\tau} F^\nu_\tau \quad (\text{III.13})$$

$$L_3 = \lambda_3 R_{\alpha\beta\gamma\delta} F^{\alpha\beta} F^{\gamma\delta}. \quad (\text{III.14})$$

Nestas lagrangeanas $[\lambda] = L^2$. Discutiremos mais adiante qual a escolha mais natural para o valor dessa constante.

A eletrodinâmica não-linear gerada por L_1 foi estudada por Accioly e Pereira da Silva [28, 29]; enquanto que o acoplamento (III.14) foi proposto por Prasana[34] e suas consequências observacionais investigadas por Souza, Bedran e Lesche [35, 36].

As equações associadas de Einstein correspondentes as lagrangeanas anteriores são dadas por (vide apêndices A e D):

$$G^{\mu\nu} + k[T^{\mu\nu}_{(i)}] = 0 \quad (\text{III.15})$$

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}_{(1)} &= \frac{1}{4}F^2 g^{\mu\nu} - F^\mu_\alpha F^{\nu\alpha} \\ &+ \lambda_1[F^2 G^{\mu\nu} + (\nabla^\mu \nabla^\nu - g^{\mu\nu} \square)F^2 + 2RF^{\mu\alpha} F^\nu_\alpha]; \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}_{(2)} &= \frac{1}{4}F^2 g^{\mu\nu} - F^\mu_\alpha F^{\nu\alpha} + \lambda_2[-\frac{1}{2}R_{\alpha\beta} F^{\alpha\tau} F^\beta_\tau g^{\mu\nu} \\ &+ R_{\alpha\beta} F^{\mu\alpha} F^{\nu\beta} + 2R^\mu_{\alpha} F^{\nu\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\square(F^{\mu\alpha} F^\nu_\alpha) \\ &- \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta (F^{\alpha\tau} F^\beta_\tau) + (F^{\lambda\tau} F^{\nu\mu}_{;\lambda})]; \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}_{(3)} &= \frac{1}{4}F^2 g^{\mu\nu} - F^\mu_\alpha F^{\nu\alpha} + \lambda_3[-\frac{1}{2}g^{\mu\nu} R_{\alpha\lambda\rho\tau} F^{\alpha\lambda} F^{\rho\tau} \\ &+ 3R^{\alpha\beta\lambda(\mu} F^{\nu)}_{\lambda} F_{\alpha\beta} - 2\nabla_\lambda \nabla_\theta F^{\lambda(\mu} F^{\nu)\theta}]. \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

As equações para o campo eletromagnético, por sua vez, assumem a forma:

$$RF_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \longrightarrow \nabla_\nu[(1 - 2\lambda_1 R)F^{\mu\nu}] = 0; \quad (\text{III.19})$$

$$R_{\mu\nu}F^{\mu\tau}F^\nu_\tau \longrightarrow \nabla_\nu[F^{\mu\nu} + \lambda_2(R^\nu_\tau F^{\tau\mu} - R^\mu_\tau F^{\tau\nu})] = 0 \quad (\text{III.20})$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta} \longrightarrow \nabla_\nu[F^{\mu\nu} - 2\lambda_3 R^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}] = 0 \quad (\text{III.21})$$

De acordo com o teorema do capítulo II, as três teorias acima delineadas, não violam o princípio de equivalência fraco. No entanto se quisermos demonstrar este resultado utilizando a “força bruta”, encontraremos sérias dificuldades no que concerne às teorias $R_{\mu\nu}F^{\mu\tau}F^\nu_\tau$ e $R_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta}$. A bem da verdade, não conseguimos realizar tal proeza, apesar de inúmeras e exaustivas tentativas, o que nos convenceu, de certa maneira, da importância do citado teorema.

É interessante observar que apenas a teoria com acoplamento RF^2 é *pseudamente acoplada não-minimamente à gravitação*. Como veremos a seguir, esta peculiaridade confere a esta teoria propriedades que estão de acordo com o que se espera ser o comportamento da radiação eletromagnética em um background gravitacional fraco.

A escolha mais natural para a constante de acoplamento λ – que, conforme vimos anteriormente, tem dimensão L^2 – é o quadrado do comprimento de Planck ($l_{Pl} = (\frac{G\hbar}{c^3})^{1/2} = \sqrt{G}$ em unidades naturais), já que este é o único comprimento que podemos formar com as constantes fundamentais da gravitação e do eletromagnetismo.

Na realidade, como as equações de Maxwell usuais descrevem corretamente a propagação da radiação eletromagnética num campo gravitacional fraco, é de se esperar que em situações como aquelas descritas no parágrafo I.1 do capítulo I, o acoplamento não-mínimo venha a introduzir correções nas equações de Maxwell.

Aplicando o método das *características* às equações (III.19, III.20, III.21), obtemos

$$RF_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \longrightarrow k^\mu k^\nu_{;\mu} = 0, \quad (\text{III.22})$$

$$R^{\mu\nu}F^{\mu\tau}F^\nu_\tau \longrightarrow \phi^{\mu\nu}k_\nu - \lambda_2(R^\mu_\tau \phi^{\tau\nu} - R^\nu_\tau \phi^{\tau\mu})k_\nu = 0 \quad (\text{III.23})$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta} \rightarrow \phi^{\mu\nu}k_\nu - 2\lambda_3 R^{\mu\nu\alpha\beta}\phi_{\alpha\beta}k_\nu = 0. \quad (\text{III.24})$$

Analisando estes resultados, podemos concluir de imediato que somente no caso do invariante RF^2 – a teoria pseudamente acoplada não-minimamente – os raios de luz são geodésicas nulas. Em outras palavras, este é o único invariante do conjunto em questão que permite recobrar a ótica geométrica da relatividade geral na aproximação eikonal.

Vamos investigar agora o efeito do acoplamento gravitacional não-mínimo num background de particular interesse físico: o espaço-tempo de *Robertson-Walker*[7].

III.3 Uma Possível Saída Para o Problema do Horizonte

Combinando linearmente os invariantes do parágrafo anterior, podemos construir a densidade de lagrangeana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \sqrt{-g} & \left[\frac{-1}{2}F^2 + \lambda_1 RF^2 + \lambda_2 R_{\mu\nu}F^{\mu\tau}F^\nu{}_\tau \right. \\ & \left. + \lambda_3 R_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta} \right], \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

onde $\lambda_i \sim l_{Pl}^2$ ($i = 1, 2, 3$).

As equações para o campo eletromagnético, num background gravitacional, assumem, em consequência, a forma

$$\begin{aligned} \nabla_\nu F^{\mu\nu} - \nabla_\nu [2\lambda_1 RF^{\mu\nu} \\ + \lambda_2 (R^\mu{}_\tau F^{\tau\nu} - R^\nu{}_\tau F^{\tau\mu}) + 2\lambda_3 R^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}] = 0, \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

$$F_{[\mu\nu;\tau]} = 0. \quad (\text{III.27})$$

Para determinarmos as frentes de onda, vamos recorrer mais uma vez ao método das *características*³. Seja, pois

$$f_{\mu\nu} \equiv \phi_{\mu\nu}, \quad \xi_\mu \equiv k_\mu. \quad (\text{III.28})$$

Segue-se, então, que

$$\begin{aligned} f^{\mu\nu}\xi_\nu - [2\lambda_1 Rf^{\mu\nu} + \lambda_2 (R^\mu{}_\tau f^{\tau\nu} - R^\nu{}_\tau f^{\tau\mu}) \\ + 2\lambda_3 R^{\mu\nu\alpha\beta}f_{\alpha\beta}]\xi_\nu = 0, \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

³Esta formulação é totalmente independente de gauge.

$$f_{\mu\nu}\xi_\tau + f_{\tau\mu}\xi_\nu + f_{\nu\tau}\xi_\mu = 0. \quad (\text{III.30})$$

Vamos examinar agora estas equações num background de grande interesse físico – o espaço-tempo de Robertson-Walker. Em sua forma padrão a métrica de Robertson-Walker é dada por

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{d\eta^2}{1 - \varepsilon\eta^2} + \eta^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (\text{III.31})$$

A constante ε está relacionada à topologia do modelo:

$$\varepsilon = -1 \longrightarrow \text{universo aberto}$$

$$\varepsilon = 0 \longrightarrow \text{universo plano}$$

$$\varepsilon = +1 \longrightarrow \text{universo fechado}$$

Do fato de todas as métricas do tipo de Robertson-Walker serem conformemente planas⁴, segue-se imediatamente a equação

$$R^{\mu\nu\alpha\beta} f_{\alpha\beta} = R^\nu_\alpha f^{\alpha\mu} - R^\mu_\alpha f^{\alpha\nu} + \frac{R}{3} f^{\mu\nu}. \quad (\text{III.32})$$

O tensor de Ricci, por sua vez, pode ser escrito como

$$R^\mu_\nu = 2 \left(\frac{\dot{a}^2 + \varepsilon}{a^2} \right) (\delta^\mu_\nu - U^\mu U_\nu) + \frac{\ddot{a}}{a} (\delta^\mu_\nu + 2U^\mu U_\nu) \quad (\text{III.33})$$

com $U^\nu = (1, 0, 0, 0)$, e onde o ponto representa derivação com respeito a t .

De (III.29) e (III.32), vem que

$$f^{\mu\nu}\xi_\nu - \alpha R f^{\mu\nu}\xi_\nu - \beta (R^\mu_\tau f^{\tau\nu} - R^\nu_\tau f^{\tau\mu})\xi_\nu = 0, \quad (\text{III.34})$$

onde $\alpha \equiv 2(\lambda_1 + \frac{\lambda_3}{3})$ e $\beta \equiv \lambda_2 - 2\lambda_3$.

Levando (III.33) em (III.34), obtemos

$$\begin{aligned} f^{\mu\nu}\xi_\nu(1 - \alpha R) = & \beta \left\{ \frac{4(a^2 + \varepsilon)}{a^2} f^{\mu\nu}\xi_\nu \right. \\ & + 2 \left[\frac{\dot{a}^2 + \varepsilon}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} \right] f^{\tau\mu} U_\tau (\xi \cdot U) + 2 \frac{\ddot{a}}{a} f^{\mu\nu}\xi_\nu \\ & \left. + 2 \left[\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2 + \varepsilon}{a^2} \right] f^{\tau\nu} U_\tau \xi_\nu U^\mu \right\}, \end{aligned} \quad (\text{III.35})$$

⁴O tensor de Weyl $C^{\mu\nu\alpha\beta} = 0$, onde

$$R^{\mu\nu\alpha\beta} = C^{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{1}{2} (g^{\mu\beta} B^{\nu\alpha} + g^{\nu\alpha} B^{\mu\beta} - g^{\mu\alpha} B^{\nu\beta} - g^{\nu\beta} B^{\mu\alpha}) + \frac{1}{12} R (g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}),$$

com $B^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} R$.

onde

$$\xi.U \equiv \xi_\mu U^\mu.$$

Da contração de (III.35) com U_μ , vem que

$$f^{\mu\nu} U_\mu \xi_\nu = 0. \quad (\text{III.36})$$

Levando (III.36) em (III.35) e lembrando que $R = 6(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\epsilon + \dot{a}^2}{a^2})$, chegamos ao resultado

$$f^{\mu\nu} \xi_\nu + \frac{2\beta[\frac{\dot{a}^2 + \epsilon}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a}] f^{\mu\nu} U_\nu (\xi.U)}{1 - 6\alpha(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\epsilon + \dot{a}^2}{a^2}) - 2\beta[\frac{2(\epsilon + \dot{a}^2)}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a}]} = 0. \quad (\text{III.37})$$

Contraindo (III.30) com ξ^τ , dá

$$f_{\mu\nu} \xi^2 - f_{\mu\tau} \xi^\tau \xi_\nu + f_{\nu\tau} \xi^\tau \xi_\mu = 0. \quad (\text{III.38})$$

Levando (III.37) em (III.38), obtemos

$$\xi^2 + \frac{2\beta[\frac{\dot{a}^2 + \epsilon}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a}](\xi.U)^2}{1 - 6\alpha(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\epsilon + \dot{a}^2}{a^2}) - 2\beta[\frac{2(\epsilon + \dot{a}^2)}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a}]} = 0. \quad (\text{III.39})$$

De (III.39), segue-se, finalmente, a expressão para a velocidade de propagação da radiação eletromagnética

$$\begin{aligned} v^2 &= \left| \frac{\xi_0^2}{\xi^2} \right| \\ &= \left| \frac{1 - 6\alpha(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\epsilon + \dot{a}^2}{a^2}) - 2\beta[\frac{2(\epsilon + \dot{a}^2)}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a}]}{1 - 6\alpha(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\epsilon + \dot{a}^2}{a^2}) - 2\beta(\frac{\dot{a}^2 + \epsilon}{a^2} - 2\frac{\ddot{a}}{a})} \right|. \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

Para interpretarmos fisicamente o resultado anterior, temos que escolher uma equação de estado para o fluido que gera a curvatura. Vamos supor então que este fluido seja um fluido perfeito, o que implica num tensor de energia-momentum da forma

$$T_{\mu\nu} = -pg_{\mu\nu} + (p + \rho)V_\mu V_\nu. \quad (\text{III.41})$$

Admitamos também que a relação entre p e ρ seja do tipo

$$p = \gamma\rho, \quad 0 \leq \gamma \leq 1 \quad (\text{III.42})$$

Das equações de Einstein, vem, que

$$3\left(\frac{\epsilon + \dot{a}^2}{a^2}\right) = k\rho \quad (\text{III.43})$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\varepsilon + \dot{a}^2}{a^2} = -k\gamma\rho. \quad (\text{III.44})$$

Levando (III.43) e (III.44) em (III.40), chegamos à seguinte expressão para a velocidade de propagação da radiação eletromagnética

$$v^2 = \left| \frac{1 - k\rho[\alpha(1 - 3\gamma) + \beta(1 - \gamma)]}{1 - k\rho[\alpha(1 - 3\gamma) - 2\beta\gamma]} \right|. \quad (\text{III.45})$$

Do fato que o tensor de energia-momentum é covariantemente conservado, obtemos

$$\frac{\gamma}{\gamma + 1} a^3 \dot{\rho} = (a^3 \rho) \cdot, \quad (\text{III.46})$$

o que implica que

$$a^3 \rho^{\frac{1}{\gamma+1}} = \text{constante}. \quad (\text{III.47})$$

Estes resultados nos mostram que a velocidade de propagação da radiação eletromagnética tende a *um* limite de baixas energias. Consequentemente devemos esperar modificações nas leis de propagação somente em regiões de densidades extremamente elevadas. Do ponto de vista da cosmologia convencional o universo primitivo preenche exatamente tal requisito. Como esta fase do universo é suposta ser dominada pela radiação, (III.42) e (III.47) assumem a forma

$$p = \frac{1}{3}\rho, \quad a^4 \rho = \text{constante} \quad (\text{III.48})$$

Para podermos determinar ρ precisamos conhecer a curvatura da secção espacial. No entanto, como estamos interessados numa época próxima à singularidade, podemos tomar $\varepsilon = 0$, que corresponde ao tri-espaco plano, sem que isto restrinja a validade de nossas conclusões⁵. Nestas condições, combinando (III.43) e (III.48), determinamos ρ como função do tempo

$$k\rho = \frac{3}{4}t^2. \quad (\text{III.49})$$

A correspondente expressão para v , é

$$v^2 = \left| \frac{1 - \lambda t^2}{1 + \lambda t^2} \right|, \quad \lambda \equiv \beta/2. \quad (\text{III.50})$$

⁵Próximo à singularidade, as três topologias se comportam exatamente como se a topologia fosse plana. Demonstraremos esse resultado um pouco mais adiante.

Vamos mostrar como este resultado pode resolver um dos problemas fundamentais inerentes ao modelo cosmológico padrão – o *problema do horizonte*.

Iniciaremos fazendo uma breve revisão sobre o assunto, no contexto da cosmologia padrão.

Para tal vamos considerar a métrica padrão de Robertson-Walker sob a forma

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)[d\chi^2 + f^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]$$

$$f(\chi) = \begin{cases} \sin\chi & \text{para } \epsilon = 1 \\ \chi & \text{para } \epsilon = 0 \\ \sinh\chi & \text{para } \epsilon = -1 \end{cases}$$

A coordenada χ está diretamente relacionada à coordenada radial d de um dado ponto, pela expressão [14]:

$$d = a\chi.$$

É importante notar, de passagem, que $f(\chi) = \chi$, para $\chi \ll 1$, o que justifica termos escolhido anteriormente $\epsilon = 0$, para épocas próximas à singularidade.

Para sinais que se propagam ao longo de geodésicas nulas ($ds^2 = 0$), e para simplificar, em direção radial, temos que

$$dt^2 = a^2(t)d\chi^2.$$

Consequentemente, sinais luminosos emitidos no tempo t_1 em $\chi = 0$, atingirão o ponto

$$\chi = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)}$$

no tempo t_2 .

Considere agora o cone de luz do passado do ponto $\chi = 0$, $t > 0$, e imagine que este intercepte a época singular $t = 0$ em χ_H . Então

$$\int_0^{\chi_H} d\chi = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}.$$

Dependendo da função $a(t')$ esta integral pode ou não convergir. Quando ele converge, o universo visível do observador é limitado por um *horizonte de partículas*. Até o tempo t este observador só pode ter recebido sinais de partículas ou galáxias que se movem conjuntamente com ele, que se situem numa coordenada inferior a χ_H [vide figura (III.1)]. Vamos considerar agora a radiação de fundo de aproximadamente $3^\circ K$, e supor que ela foi emitida

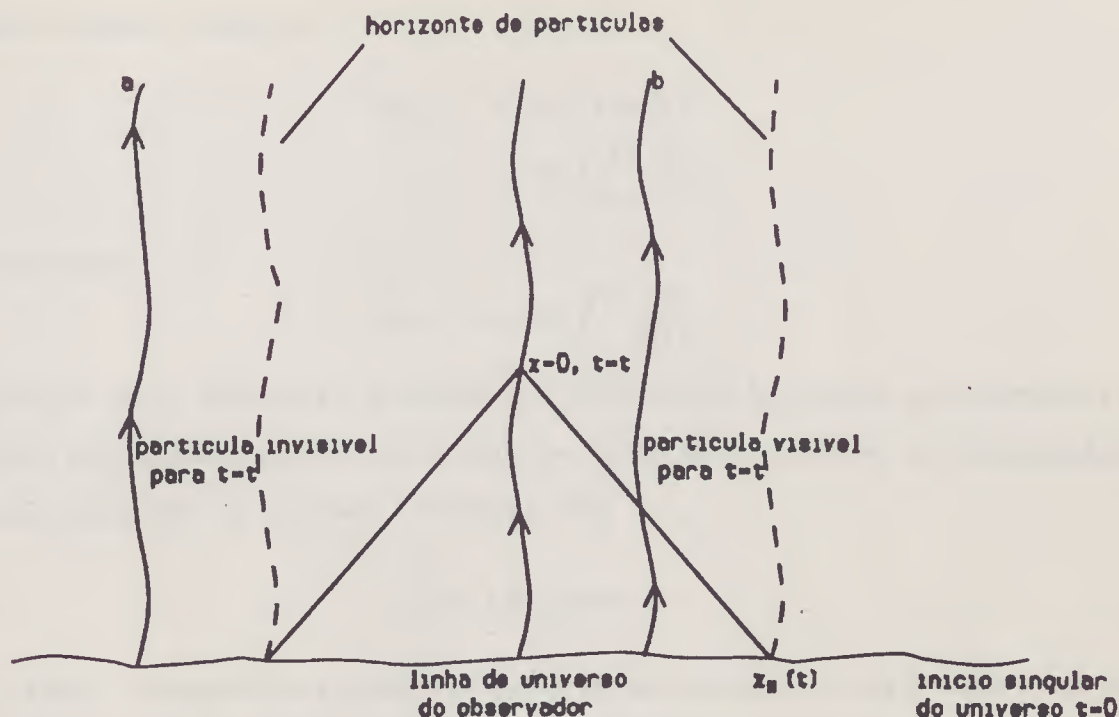


Figura III.1: O cone nulo do observador termina na época singular e tem coordenada $\chi_H(t)$. Partículas tais como a que jazem além desta distância não são vistas pelo observador no tempo t . Partículas como b que jazem aquém desta distância são visíveis para o observador no tempo t .

num tempo t_R , que coincide com o tempo em que o universo, em virtude do desacoplamento entre matéria e radiação, se tornou transparente para a radiação eletromagnética. Podemos estimar t_R supondo que o desacoplamento se deu a uma temperatura $T(t_R)$ de aproximadamente $3000^\circ K$ [37]. Uma comparação entre a lei de Stefan-Boltzmann $\rho \propto T^4$ e (III.47) para $\gamma = 1/3$, ou seja, $a^3 \rho^{3/4} = \text{constante}$, nos diz que $a(t) \propto T^{-1}(t)$; o que implica que $\frac{a(t)}{a(t_R)} \approx 1000$. Se a homogeneização do universo se dá pelo transporte de energia ou momento com velocidade igual ou inferior a da luz, é de se esperar que em t_R o universo fosse inhomogêneo em escalas superiores a $\chi_{HP}(t_R)$, já que desde sua criação não houve interação que pudesse homogeneizá-lo além destas escalas. Se χ_{HV} é o horizonte visível do observador⁶, então a distância máxima entre dois eventos, que se encontram dentro do

⁶O cone de luz do passado do observador abrange todos os eventos que se deram a partir de t_R e foram observados até t .

horizonte visível, é dada por

$$\begin{aligned} d_{HV}(t) &= a(t) \chi_{HV}(t) \\ &= a(t) \int_{t_R}^t \frac{dt'}{a(t')}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$d_{HP}(t) = a(t) \int_0^{t_R} \frac{dt}{a(t)}.$$

Se supormos que o universo foi dominado por radiação até t_R , quando passou então a ser dominado por matéria, podemos substituir nas integrais precedentes as correspondentes expressões para $a(t)$. O resultado é o seguinte [37]:

$$d_{HP}(t) \cong \frac{1}{60} d_{HV}(t).$$

Logo, a região correspondente àquela em que t_R foi causalmente conexa é muito menor que a parte do universo atualmente visível. Consequentemente, apesar de não existir nenhum processo causal que possa explicar a homogeneidade do universo em escala do horizonte visível, a isotropia observada da radiação de fundo indica que o universo é de fato homogêneo em tais escalas. Este é o problema do *horizonte*. Na verdade este problema é uma decorrência do fato do modelo convencional prever uma velocidade de propagação constante e finita para um sinal arbitrário.

Retornemos ao nosso resultado (III.50). Como $\lambda \sim l_{Pl}^2$, podemos tomar $\lambda = N t_{Pl}^2$, onde N é um número puro da ordem de um e t_{Pl} é o tempo de Planck. Admitindo que $\lambda < 0$, a velocidade de propagação da radiação eletromagnética pode ser escrita como

$$v^2 = \left| \frac{t^2 + N t_{Pl}^2}{t^2 - N t_{Pl}^2} \right|. \quad (\text{III.51})$$

Se $t \gg t_{Pl}$, (III.51) nos fornece o resultado $v \approx 1 + N(\frac{t_{Pl}}{t})^2$, ou seja, os fótons são ligeiramente desviados das geodésicas nulas.

A medida que voltamos atrás na história do universo, os fótons se afastam cada vez mais das geodésicas nulas e sua velocidade aumenta mais e mais ao nos aproximarmos do tempo de Planck. Em $t = N t_{Pl}$, a velocidade da luz torna-se ilimitada, induzindo um imenso clarão que se propaga pelo universo todo, permitindo assim que regiões, que de acordo com o modelo padrão, são causalmente desconexas devido ao problema do horizonte, entrem

em contato causal. Este contato é exatamente a condição necessária para que ocorra o fenômeno da termalização, dando como resultado a isotropia espacial presentemente observada do universo.

Para tempos anteriores a t_{PI} , os efeitos quânticos tornam-se predominantes e não faz sentido, portanto, utilizar-se a presente teoria, que é totalmente clássica.

Uma questão em aberto, é o sinal da constante de acoplamento β . Aparentemente não há nenhuma razão para a mesma ser necessariamente negativa. Acreditamos que uma explicação possa ser encontrada no domínio da teoria quântica de campos. De fato, Drummond e Hathell[38], calcularam como a propagação do fóton em um background gravitacional é influenciada pela polarização do vácuo. Vale a pena mencionar que o parâmetro, que em seu trabalho desempenha papel semelhante à constante de acoplamento β , é também negativo.

Para finalizar, gostaríamos de frisar que a introdução do acoplamento gravitacional não-mínimo nos permitiu explicar de maneira bastante simples, a isotropia da radiação de fundo – experimentalmente observada – independentemente de qualquer hipótese sobre como era o universo anteriormente ao tempo de Planck.

DISCUSSÃO GERAL E CONCLUSÕES

A constatação de que a teoria de gravitação de Ni – um exemplo simples de uma teoria com acoplamento gravitacional não-mínimo – não viola o PEFr, sendo, consequentemente, um contra-exemplo à conjectura de Schiff, nos levou neste trabalho a analisar mais de perto o *acoplamento matéria-gravitação*.

Adotando formas de acoplamento mais complexas para representar a interação entre a gravitação e outros campos, chegamos, no capítulo I, a uma classe peculiar de teorias: *teorias pseudamente acopladas não-minimamente à gravitação*. No caso particular destas teorias, o efeito líquido do acoplamento não-mínimo é tornar a equação do campo que se acopla com a gravitação, *não-linear*, conforme mostra o exemplo que se segue.

Seja

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{k} - \frac{1}{2} F^2 + \lambda R F^2 \right] \quad (1)$$

a ação que descreve a dinâmica de um campo eletromagnético não-minimamente acoplado à gravitação einsteiniana. As equações de campo para $g_{\mu\nu}$ e A^μ são dadas, respectivamente, por

$$G^{\mu\nu} + k \left\{ \frac{1}{4} F^2 g^{\mu\nu} - F^\mu_\alpha F^{\nu\alpha} + \lambda [(\nabla^\mu \nabla^\nu - g^{\mu\nu} \square) F^2 + 2R F^\mu_\alpha F^{\nu\alpha} + G^{\mu\nu} F^2] \right\} = 0; \quad (2)$$

$$\nabla_\nu [F^{\mu\nu} - 2R\lambda F^{\mu\nu}] = 0. \quad (3)$$

Tomando o traço da equação (2), e substituindo na equação (3), obtemos

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} + 6\lambda^2 k \nabla_\nu \left[\frac{F^{\mu\nu} \square F^2}{1 - k\lambda F^2} \right] = 0. \quad (4)$$

É interessante observar que o acoplamento não-mínimo foi totalmente eliminado da equação anterior. Este resultado singular nos leva a uma questão do tipo “o-ovo-ou-a-galinha”, ou seja, o que seria mais importante para caracterizar o acoplamento não-mínimo: a densidade de lagrangeana ou a equação de movimento? No caso específico de teorias onde o campo de matéria se acopla diretamente com o *escalar de Ricci*(R), tudo indica que seja a equação de movimento. Este resultado que parece favorecer a equação de movimento em detrimento da densidade de lagrangeana, não parecerá assim tão estranho, se nos recordarmos que existem equações de movimento que não possuem lagrangeanas. Exemplos notáveis são fornecidos pelas equações de *Navier - Stokes* e *Korteweg - de Vries* [39].

A equação de Navier - Stokes,

$$\rho v^j \partial_j v^i + \partial^i p - \mu \partial^j \partial_j v^i = 0$$

junto com a condição

$$\partial_j v^j = 0$$

descreve o comportamento de um fluido incompressível de densidade ρ e coeficiente de viscosidade μ . A equação de Korteweg - de Vries,

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx},$$

surgiu pela primeira vez na teoria da “estiagem”, tendo sido encontrada posteriormente numa série de problemas de física - matemática.

Mostrou-se recentemente que certas teorias não-lagrangeanas também podem ser quantizadas[40]. Na realidade, teorias lagrangeanas são *pertubativamente coerentes* – possuem vértices bem definidos. Enquanto que as teorias não-lagrangeanas podem ser coerentes ou não. As teorias coerentes são, em princípio, quantizáveis por métodos perturbativos.

No capítulo II, discutimos a compatibilidade entre o princípio de equivalência fraco e o acoplamento gravitacional não-mínimo. Na demonstração lá apresentada foi admitido que $\mathcal{L}_m$ era a lagrangeana correspondente a matéria usual, o que significa que ela não contém o campo ψ^A , ou seja, não há interação direta entre ψ^A e os campos de matéria. Vamos analisar, em sequência, o que aconteceria se tal interação ocorresse.

Seja, por exemplo, uma teoria de gravitação contendo um campo escalar ϕ não-minimamente

acoplado à curvatura, cuja dinâmica é dada pela ação[5,6]

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(x)$$

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_E + \mathcal{L}(\phi, g_{\mu\nu}) + \mathcal{L}_m$$

$\mathcal{L}(\phi, g)$ descreve o acoplamento não-mínimo entre ϕ e a curvatura. $\mathcal{L}_m$ é a lagrangeana para a matéria que, por hipótese, contem ϕ .

Utilizando uma argumentação semelhante àquela usada na demonstração do teorema do capítulo I, chegamos ao resultado

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^4x \delta_c \mathcal{L}_m \\ &= \int d^4x \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta \phi} \delta_c \phi + \int d^4x \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g_{\mu\nu}} \delta_c g_{\mu\nu} \\ &= - \int d^4x \left(\frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta \phi} \right) \xi^\nu \partial_\nu \phi + 2 \int d^4x T_{(m)}^{\mu\nu} \nabla_\mu \xi_\nu \\ &= \int d^4x [\rho J^\nu + 2 \nabla_\mu T_{(m)}^{\mu\nu}] \xi_\nu \end{aligned} \quad (5)$$

onde $\rho \equiv \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta \phi}$ e $J^\nu \equiv \partial^\nu \phi$.

De (5) segue-se que

$$\nabla_\mu T_{(m)}^{\mu\nu} = -\rho J^\nu. \quad (6)$$

É importante observar que o resultado (6) é totalmente independente do modelo adotado para descrever a interação não-mínima entre ϕ e a curvatura. Zee[21] e Accioly e Pimentel[41] chegaram a estes mesmos resultados, usando a “força bruta”, e utilizando modelos particulares para a descrição da interação não-mínima campo escalar-gravitação.

A equação (6) nos diz que $T_{(m)}^{\mu\nu}$ não é covariantemente conservado. No entanto, em regiões do espaço-tempo em que ϕ não esteja variando, tal como aqui e agora, ainda teremos $\nabla_\mu T_{(m)}^{\mu\nu} = 0$.

Evidentemente, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = -\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} \partial^\nu \phi$, o que implica que a divergência do tensor de energia-momentum não é mais covariantemente conservada.

Como $\left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} + \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta \phi} \right)$ é exatamente a equação de movimento para ϕ , podemos escrever (6) em função de $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi}$, ou seja,

$$\nabla_\mu T_{(m)}^{\mu\nu} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} \partial^\nu \phi. \quad (7)$$

Um fato importante que não foi comentado na demonstração do teorema do capítulo II, é que a lagrangeana da matéria é uma função das variáveis que definem o sistema físico em consideração, que denotaremos genericamente por q . Porém, em virtude das equações de movimento, termos do tipo $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q}$ se cancelam. A mesma observação se aplica à equação (5), onde $\dot{\mathcal{L}}_m = \mathcal{L}_m(\phi, q)$.

No capítulo III investigamos as modificações que a presença do acoplamento gravitacional não-mínimo provoca na lei de propagação da radiação eletromagnética em um background gravitacional. Encontramos, em particular, que a velocidade de propagação desta radiação [vide equação (III.40)] *é a mesma em todas as direções e para todas as polarizações*, o que era de se esperar, uma vez que a métrica de Robertson - Walker descreve um espaço homogêneo e isotrópico. *Esta velocidade de propagação é, em geral, função tanto da direção quanto da polarização.*

O fato de termos utilizado uma teoria *puramente clássica* para estudar os efeitos do acoplamento não-mínimo numa região próxima ao comprimento de Planck é passível de crítica. Como não existe ainda uma teoria de gravitação quântica o correto seria a utilização de uma teoria de gravitação semi-clássica – a gravitação encarada como um campo clássico e a matéria e a energia não-gravitacional tratadas quanticamente. Tal teoria se aplica, em princípio, à regiões compreendidas entre o comprimento de Planck ($\sim 10^{-33}cm$) e as distâncias atômica ($\sim 10^{-13}cm$). Na realidade, Drummond e Hathrell[38] estudaram como a propagação do fóton em um background curvo é influenciada pela polarização do vácuo, usando a lagrangeana (III.25) como parte de uma lagrangeana efetiva que incorpora o efeito quântico da polarização do vácuo, e chegaram a resultados que são qualitativamente semelhantes aos nossos; o que dá, pelo menos em tese, certa confiabilidade aos nossos resultados. Passemos, em sequência, à discussão do fato da velocidade do fóton ser maior que a unidade. A objeção usual à transmissão de informação com velocidade superior à da luz é que tal fato leva a um paradoxo. Se um observador no evento A envia um sinal para um observador no evento B, via um vetor tipo-espaco, então pode acontecer que um outro observador C dotado de movimento tipo-tempo veja B acontecer antes de A. A invariância relativística das leis da física assegura que se é possível uma velocidade tipo-espaco que permita ir de A para B viajando em direção ao passado (do ponto de vista de C), então B pode enviar

um sinal de volta para a linha do universo de A que chegue neste *antes* que A emita seu primeiro sinal, o que é absurdo. Acontece, no entanto, que a velocidade calculada neste trabalho *depende do sistema de referência*. No sistema particular de referência por nós escolhido, a velocidade tipo-espaço do fóton corresponde a movimento somente em direção ao futuro, o que evita o paradoxo. Mesmo que fosse possível encontrar um observador com movimento tipo-tempo que visse um sinal luminoso se propagando causalmente em direção ao passado, o sinal de retôrno enviado na outra direção só poderia se deslocar em direção ao futuro de modo a chegar na fonte *após* a emissão do sinal original.

Analisando as equações (III.16, III.17 e III.18) observamos que os tensores de energia-momentum não vão a zero quando $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$. Os termos que sobram, no entanto, são divergências que não contribuem para a energia ou momentum total quando integrados sobre todo o espaço. Porém, podem surgir efeitos de fronteira quando os campos forem tratados quanticamente, conforme mostraram Davies e Toms[42] no caso de lagrangeanas contendo acoplamentos proporcionais a $RA_\mu A^\mu$ e $R_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$. Uma continuação natural desta tese seria investigar se as lagrangeanas aqui analisadas (III.25) poderiam dar uma contribuição ao efeito Casimir[43] (um efeito quântico devido a flutuações do campo eletromagético no vácuo), o que levaria a uma possível detecção das mesmas no laboratório.

Apêndice A

AS EQUAÇÕES DE CAMPO DA RELATIVIDADE GERAL

A ação que descreve o campo gravitacional na presença de matéria é dada por:

$$I = I_E + I_m \quad (\text{A.1})$$

$$I_E = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{R}{2k} \quad (\text{A.2})$$

$$I_m = \int d^4x \sqrt{-g} L_m \quad (\text{A.3})$$

onde L_m é a densidade de lagrangeana da matéria ¹.

As equações para o campo gravitacional são obtidas do princípio de mínima ação $\delta(I_E + I_m) = 0$.

Variando I_E em relação a $g_{\mu\nu}$, obtemos:

$$\delta_g I_E = \int d^4x \frac{R}{2k} \delta_g \sqrt{-g} + \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2k} \delta_g R. \quad (\text{A.4})$$

Precisamos agora determinar uma expressão que forneça a derivada de um determinante.

Uma maneira de se conseguir isso é se lançar mão da identidade ²

$$\det A = e^{\text{Tr}[\ln A]}, \quad (\text{A.5})$$

¹Matéria significa, aqui, tudo exceto o campo gravitacional.

²A exponencial é definida como uma série de potências e $\ln A$ é a função inversa de e^A .

válida para qualquer matriz não singular A .

Utilizando (A.5), podemos escrever:

$$\begin{aligned}\delta \det[A] &= e^{Tr[\ln A]} \delta Tr[\ln A] \\ &= (\det A) Tr[A^{-1}] \delta A.\end{aligned}$$

Se $g \equiv \det(g^{\mu\nu})$, então

$$\begin{aligned}\delta g &= g g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\mu} \\ &= g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}\end{aligned}$$

Logo,

$$\delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.6})$$

Por outro lado, lembrando que $g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu$, obtemos:

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \delta g^{\alpha\beta}. \quad (\text{A.7})$$

Este resultado nos permite expressar $\delta \sqrt{-g}$ em função de $\delta g^{\mu\nu}$:

$$\delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.8})$$

Consequentemente,

$$\int d^4x \frac{R}{2k} \delta g \sqrt{-g} = \int d^4x \frac{R}{2k} \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.9})$$

Vamos calcular, em sequência, $\delta_g R$:

$$\begin{aligned}\delta_g R &= \delta_g (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) \\ &= R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta_g R_{\mu\nu} \\ &= -R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta_g R_{\mu\nu}\end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Porém,

$$g^{\mu\nu} \delta_g R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \delta_g [-\Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha + \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha + \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^\alpha].$$

Utilizando um sistema de coordenadas geodésico³ e lembrando que $\delta_g \Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ é um tensor⁴, podemos escrever:

$$g^{\mu\nu} \delta_g R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} [-\nabla_\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha]. \quad (\text{A.11})$$

Como (A.11) é uma equação tensorial, ela é válida em qualquer sistema de coordenadas. Por outro lado, num sistema de coordenadas geodésico,

$$\begin{aligned} -g^{\mu\nu} \nabla_\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= -g^{\mu\nu} \nabla_\alpha \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\nabla_\nu \delta g_{\mu\lambda} + \nabla_\mu \delta g_{\nu\lambda} - \nabla_\lambda \delta g_{\mu\nu}) \right] \\ &= [-\nabla^\mu \nabla^\nu + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \square] \delta g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

e

$$g^{\mu\nu} \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \square \delta g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.13})$$

Como (A.12) e (A.13) são equações tensoriais, elas são válidas em qualquer sistema de coordenadas. Segue-se, pois, que

$$g^{\mu\nu} \delta_g R_{\mu\nu} = [-\nabla^\mu \nabla^\nu + g^{\mu\nu} \square] \delta g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.14})$$

Logo,

$$\delta_g R = [-R^{\mu\nu} - \nabla^\mu \nabla^\nu + g^{\mu\nu} \square] \delta g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.15})$$

Consequentemente, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \delta_g I_E &= \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2k} \left[\frac{R}{2} g^{\mu\nu} - R^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu} \\ &\quad + \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2k} g^{\mu\nu} \square \delta g_{\mu\nu} \\ &\quad - \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2k} \nabla^\mu \nabla^\nu \delta g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

³Se a conexão da variedade é simétrica – o que acontece nas variedades riemannianas – então é sempre possível encontrar um sistema de coordenadas (sistema de coordenadas geodésico) onde todos os símbolos de Christoffel se anulam localmente. Neste sistema – onde a derivada covariante coincide localmente com a derivada ordinária – $\partial_\mu g^{\alpha\beta}$, $\partial_\nu g_{\alpha\beta}$ e $\partial_\alpha \sqrt{-g}$ também se anulam.

⁴Apesar da conexão não ser um tensor, a diferença de duas conexões o é. Consequentemente, $\delta_g \Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ é um tensor.

Porém⁵,

$$\begin{aligned}
 \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2k} g^{\mu\nu} \square \delta g_{\mu\nu} &= \int d^4x \nabla_\alpha \left(\frac{\sqrt{-g}}{2k} g^{\mu\nu} \nabla^\alpha \delta g_{\mu\nu} \right) \\
 &= \int d^4x \partial_\alpha (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \nabla^\alpha \delta g_{\mu\nu}) \\
 &= \int d\tau_\alpha \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \nabla^\alpha \delta g_{\mu\nu} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

De maneira inteiramente análoga, pode-se mostrar que $\int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2k} \nabla^\mu \nabla^\nu \delta g_{\mu\nu} = 0$.

Levando estes resultados em (A.16), obtemos⁶

$$\delta_g I_E = - \int d^4x \sqrt{-g} \frac{G^{\mu\nu}}{2k} \delta g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.17})$$

Vamos agora variar I_m em relação a $g_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
 \delta_g I_m &= \int d^4x \delta_g (\sqrt{-g} L_m) \\
 &= - \int d^4x \sqrt{-g} \frac{T^{\mu\nu}}{2} \delta g_{\mu\nu}
 \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

onde $T^{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momentum da matéria.

De (A.17) e (A.18) obtemos as equações de campo da relatividade geral:

$$G^{\mu\nu} + k T^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.19})$$

Apresentamos, como complemento, as expressões para as variações de $R_{\mu\nu}$ e $R^\rho_{\lambda\mu\nu}$ em relação a $g_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned}
 \delta_g R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} [- \nabla^\lambda \nabla_\nu \delta g_{\mu\lambda} - \nabla^\lambda \nabla_\mu \delta g_{\nu\lambda} \\
 &\quad + \square \delta g_{\mu\nu} + g^{\alpha\lambda} \nabla_\nu \nabla_\mu \delta g_{\alpha\lambda}]
 \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{aligned}
 \delta_g R^\rho_{\lambda\mu\nu} &= \frac{1}{2} [g^{\rho\alpha} (\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) \delta g_{\alpha\lambda} + g^{\rho\alpha} \nabla_\mu \nabla_\lambda \delta g_{\alpha\nu} \\
 &\quad - g^{\rho\alpha} \nabla_\nu \nabla_\lambda \delta g_{\alpha\mu} + \nabla_\nu \nabla^\rho \delta g_{\lambda\mu} - \nabla_\mu \nabla^\rho \delta g_{\lambda\nu}].
 \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

⁵Note que:

a) $\nabla_\alpha g^{\mu\nu} = 0, \nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0, \nabla_\alpha \sqrt{-g} = 0$;

b) $\nabla_\alpha B^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha (\sqrt{-g} B^\alpha)$;

c) $\delta g_{\mu\nu}$ e $\nabla_\alpha \delta g_{\mu\nu}$ se anulam na fronteira da região de integração.

⁶ $G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R$ é o tensor de Einstein.

Apêndice B

VARIAÇÃO INFINITESIMAL DE UM TENSOR

Vamos determinar aqui uma expressão explícita para a variação sofrida por um tensor quando submetemos o mesmo à seguinte transformação de coordenadas infinitesimal

$$\bar{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu \quad (\text{B.1})$$

ou seja,

$$\delta x^\mu \equiv \bar{x}^\mu - x^\mu = \xi^\mu \quad (\text{B.2})$$

onde $|\xi| \ll 1$.

Escalar $\phi(x)$

Como ϕ é um escalar, $\bar{\phi}(\bar{x}) = \phi(x)$. Expandindo $\bar{\phi}(\bar{x})$ em série de potências de $(\bar{x}^\lambda - x^\lambda)$, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(\bar{x}) &= \bar{\phi}(x) + (\bar{x}^\lambda - x^\lambda) \frac{\partial \bar{\phi}(x)}{\partial x^\lambda} \\ &= \bar{\phi}(x) + \xi^\lambda \partial_\lambda \bar{\phi}(x). \end{aligned}$$

Porém, como $\delta\phi(x) = \bar{\phi}(x) - \phi(x)$, podemos substituir $\bar{\phi}(x)$ por $\phi(x)$ em todos os termos que contenham ξ^λ . Segue-se, então, que $\bar{\phi}(\bar{x}) = \phi(x) + \xi^\lambda \partial_\lambda \phi(x)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \delta\phi(x) &= \bar{\phi}(x) - \phi(x) \\ &= \phi(x) - \xi^\lambda \partial_\lambda \phi(x) - \phi(x) \\ &= -\xi^\lambda \partial_\lambda \phi(x). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Vetor Contravariante $A^\mu(x)$

Por definição,

$$\bar{A}^\mu(\bar{x}) = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu(x) \quad (\text{B.4})$$

Porém, sob a transformação (B.1),

$$\begin{aligned} \bar{A}^\mu(\bar{x}) &= (\delta^\mu_\nu + \partial_\nu \xi^\mu) A^\nu(x) \\ &= A^\mu(x) + (\partial_\nu \xi^\mu) A^\nu(x). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \bar{A}^\mu(\bar{x}) &= \bar{A}^\mu(x + \xi) \\ &= \bar{A}^\mu(x) + \xi^\lambda \partial_\lambda \bar{A}^\mu(x) \\ &= \bar{A}^\mu(x) + \xi^\lambda \partial_\lambda A^\mu(x). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \delta A^\mu(x) &= \bar{A}^\mu(x) - A^\mu(x) \\ &= -\xi^\lambda \partial_\lambda A^\mu(x) + A_\nu(x) \partial_\nu \xi^\mu. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Vetor Covariante $A_\mu(x)$

Como,

$$\bar{A}_\mu(\bar{x}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} A_\alpha(x) \quad (\text{B.6})$$

segue-se, que sob a transformação (B.1),

$$\begin{aligned} \bar{A}(\bar{x}) &= (\delta^\alpha_\mu - \frac{\partial \xi^\alpha(x)}{\partial \bar{x}^\mu}) A_\alpha(x) \\ &= A_\mu(x) - \frac{\partial \xi^\alpha(x)}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\mu} A_\alpha(x) \\ &= A_\mu(x) - (\partial_\mu \xi^\alpha) A_\alpha(x). \end{aligned}$$

Porém,

$$\begin{aligned} \bar{A}_\mu(\bar{x}) &= \bar{A}_\mu(x + \xi) \\ &= \bar{A}_\mu(x) + \xi^\lambda \partial_\lambda A_\mu(x). \end{aligned}$$

Podemos então concluir que:

$$\begin{aligned}\delta A_\mu(x) &= \bar{A}(x) - A_\mu(x) \\ &= -\xi^\lambda \partial_\lambda A_\mu(x) - A_\alpha(x) \partial_\mu \xi^\alpha\end{aligned}\quad (\text{B.7})$$

Tensor Métrico Contravariante $g^{\mu\nu}(x)$ e Tensor Métrico Covariante $g_{\mu\nu}(x)$

Seguindo o mesmo procedimento, teremos no caso do tensor métrico contravariante $g^{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned}\bar{g}^{\mu\nu}(\bar{x}) &= \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta}(x) \\ &= (\delta^\mu_\alpha + \partial_\alpha \xi^\mu)(\delta^\nu_\beta + \partial_\beta \xi^\nu) g^{\alpha\beta}(x) \\ &= g^{\mu\nu}(x) + g^{\mu\beta}(x) \partial_\beta \xi^\nu + g^{\nu\alpha}(x) \partial_\alpha \xi^\mu;\end{aligned}\quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned}\bar{g}^{\mu\nu}(\bar{x}) &= \bar{g}^{\mu\nu}(x + \xi) \\ &= \bar{g}^{\mu\nu}(x) + \xi^\lambda \partial_\lambda g^{\mu\nu}(x);\end{aligned}\quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned}\delta g^{\mu\nu}(x) &= \bar{g}^{\mu\nu}(x) - g^{\mu\nu}(x) \\ &= -\xi^\lambda \partial_\lambda g^{\mu\nu}(x) + g^{\mu\beta}(x) \partial_\beta \xi^\nu + g^{\nu\alpha}(x) \partial_\alpha \xi^\mu.\end{aligned}\quad (\text{B.10})$$

Num sistema geodésico, (B.10) toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\delta g^{\mu\nu}(x) &= g^{\mu\beta}(x) \nabla_\beta \xi^\nu + g^{\nu\alpha}(x) \nabla_\alpha \xi^\mu \\ &= \nabla^\mu \xi^\nu + \nabla^\nu \xi^\mu\end{aligned}\quad (\text{B.11})$$

Como (B.11) é uma equação tensorial, ele é válida em qualquer sistema de coordenadas.

No caso do tensor métrico covariante $g_{\mu\nu}(x)$, a variação é dada por

$$\delta g_{\mu\nu}(x) = -\nabla_\mu \xi_\nu - \nabla_\nu \xi_\mu. \quad (\text{B.12})$$

Podemos testar a consistência desses resultados utilizando (A.7), que nos diz que

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \delta g^{\alpha\beta}.$$

De acôrdo com (B.11),

$$\begin{aligned}-g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \delta g^{\alpha\beta} &= -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \delta g^{\alpha\beta} \\ &= -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} [\nabla^\alpha \xi^\beta + \nabla^\beta \xi^\alpha] \\ &= -\nabla_\mu \xi_\nu - \nabla_\nu \xi_\mu \\ &= \delta g_{\mu\nu};\end{aligned}$$

o que nos mostra que (B.11) e (B.12) são consistentes.

Apêndice C

EQUAÇÕES ACOPLADAS DE EINSTEIN-CAMPO ESCALAR ORDINÁRIO

A ação correspondente à teoria de Einstein-Campo Escalar Ordinário é dada por

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{k} + \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right] \quad (C.1)$$

Variando I em relação a ϕ , obtemos:

$$\begin{aligned} \delta_\phi I &= \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta_\phi (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} [\partial_\mu \phi \partial_\nu \delta\phi + \partial_\nu \phi \partial_\mu \delta\phi] \\ &= 2 \int d^4x \sqrt{-g} \partial^\nu \phi \partial_\nu \delta\phi \\ &= -2 \int d^4x \partial_\nu (\sqrt{-g} \partial^\nu \phi) \delta\phi \\ &= -2 \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\nu \nabla^\nu \phi \delta\phi \\ &= -2 \int d^4x \sqrt{-g} \square \phi \delta\phi \end{aligned}$$

A equação de movimento para o campo ϕ é

$$\square \phi = 0 \quad (C.2)$$

Vamos agora variar I em relação a $g_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \delta_g I &= \int d^4x \sqrt{-g} [-G^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}] \\ &\quad + \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu} \partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi \delta g_{\mu\nu} \\ &\quad + \int d^4x \sqrt{-g} \delta_g (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi). \end{aligned} \quad (C.3)$$

Logo,

$$\delta_g I = \int d^4x \sqrt{-g} [-G^{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - (\partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi) g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}] \delta g_{\mu\nu} \quad (C.4)$$

Do resultado anterior, segue-se que:

$$G^{\mu\nu} + k T_{(\phi)}^{\mu\nu} = 0 \quad (C.5)$$

$$T_{(\phi)}^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi \quad (C.6)$$

Apêndice D

AS EQUAÇÕES DE CAMPO DE EINSTEIN-MAXWELL

Seja,

$$I = I_E + I_F \quad (\text{D.1})$$

$$I_E \equiv \int d^4x \sqrt{-g} \frac{R}{k} \quad (\text{D.2})$$

$$I_F \equiv -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (\text{D.3})$$

$$F_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha, \quad (\text{D.4})$$

a ação correspondente à teoria de Einstein-Maxwell.

Variando I com relação a A_μ , e mantendo $g_{\mu\nu}$ fixo, obtemos

$$\begin{aligned} \delta_A I = \delta_A I_F &= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \delta_A (F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}) \\ &= -\int d^4x \sqrt{-g} F^{\mu\nu} \delta_A (F_{\mu\nu}) \\ &= -\int d^4x \sqrt{-g} F^{\mu\nu} [\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu] \\ &= 2 \int d^4x \sqrt{-g} F^{\mu\nu} \partial_\nu \delta A_\mu \\ &= 2 \int d^4x \partial_\nu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) \delta A_\mu \\ &= -2 \int d^4x (\sqrt{-g} \nabla_\nu F^{\mu\nu}) \delta A_\mu \end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = 0. \quad (D.5)$$

Variemos agora I em relação a $g_{\mu\nu}$, com A_μ fixo:

$$\begin{aligned} \delta_g I &= \delta_g I_E + \delta_g I_F \\ &= - \int d^4x \sqrt{-g} \frac{G^{\mu\nu}}{k} \delta g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \int d^4x F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \delta g(\sqrt{-g} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}) \end{aligned}$$

Porém,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int d^4x F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \delta g(\sqrt{-g} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}) &= -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \\ &\quad - \int d^4x \sqrt{-g} F_{\alpha\beta} F_\mu{}^\beta \delta g^{\alpha\mu} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + F_\lambda{}^\mu F^{\nu\lambda} \right] \delta g_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Logo,

$$G^{\mu\nu} + k T_{(F)}^{\mu\nu} = 0 \quad (D.6)$$

$$T_{(F)}^{\mu\nu} = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F_\lambda{}^\mu F^{\nu\lambda}. \quad (D.7)$$

Apêndice E

A NÃO COMUTATIVIDADE DAS DERIVADAS COVARIANTES

Num sistema localmente geodésico,

$$a) R^\rho_{\lambda\mu\nu} = -\Gamma^\rho_{\lambda\mu,\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu,\mu}; \quad (E.1)$$

$$\begin{aligned} b) A^\mu_{;\alpha\beta} &= (A^\mu_{;\alpha})_{,\beta} \\ &= (A^\mu_{,\alpha} + \Gamma^\mu_{\alpha\lambda} A^\lambda)_{,\beta} \\ &= A^\mu_{,\alpha\beta} + \Gamma^\mu_{\alpha\lambda,\beta} A^\lambda; \end{aligned} \quad (E.2)$$

$$c) A^\mu_{;\beta\alpha} = A^\mu_{,\beta\alpha} + \Gamma^\mu_{\beta\lambda,\alpha} A^\lambda; \quad (E.3)$$

$$\begin{aligned} d) A^\mu_{;\alpha\beta} - A^\mu_{;\beta\alpha} &= (\Gamma^\mu_{\lambda\alpha,\beta} - \Gamma^\mu_{\lambda\beta,\alpha}) A^\lambda \\ &= -R^\mu_{\lambda\alpha\beta} A^\lambda. \end{aligned} \quad (E.4)$$

Como (E.4) é uma equação tensorial, ela é válida em qualquer sistema de coordenadas.

De (E.4) segue-se imediatamente que

$$\begin{aligned} A^\nu_{;\nu}{}^{;\mu} - A^{\nu;\mu}_{;\nu} &= -R^\nu_{\lambda\nu}{}^\mu A^\lambda \\ &= R^\mu_{\lambda} A^\lambda. \end{aligned} \quad (E.5)$$

Referências

- [1] A.Papapetrou, Lectures on General Relativity (D.Reidel Publ.Co., Dordrecht, 1974).
- [2] L.I.Schiff, On Experimental Tests of the General Theory of Relativity, *Am.J.Phys.***28**, 340 (1960).
- [3] Wei-Tou Ni, Equivalence Principles and Electromagnetism, *Phys.Rev.Lett.***38**, 301 (1977).
- [4] A.J.Accioly and U.F.Wichoski, Pseudogravitational Non-Minimally Coupled Theories, *Class.Quantum Grav.***7**, L139 (1990).
- [5] A.J.Accioly, N.Bertarello and U.F.Wichoski, Equivalence Principle and Gravitational Nonminimal Coupling(submetido à publicação).
- [6] A.J.Accioly, U.F.Wichoski and N.Bertarello, Counterexamples to Schiff's Conjecture (submetido à publicação).
- [7] A.J.Accioly, Gravitational Nonminimal Coupling and the Horizon Problem (submetido à publicação).
- [8] M.O.C.Gomes, Teoria Quântica dos Campos (Instituto de Física da USP, São Paulo, SP, 1990).
- [9] Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics (Clarendon Press, Oxford, 1984).
- [10] J.L.Lopes, Gauge Field Theories, An Introduction (Pergamon Press, New York, 1981).

- [11] D.Lurié, Particles and Fields (Interscience Publishers, Bristol, 1968).
- [12] E.Kretschmann, Über den physikalischen Sinn der Relativitätspostulate, A. Einsteins neue und seine ursprüngliche Relativitätstheorie, *Ann.Physik* **53**, 575 (1917).
- [13] H.C.Ohanian, Gravitation and Spacetime (W.W.Norton & Co.,Inc.,New York, 1976)
- [14] H.Stephani, General Relativity, An Introduction to the Theory of the Gravitational Field (Cambridge University Press,Cambridge,1982).
- [15] N.Straumann, General Relativity and Relativistic Astrophysics (Springer-Verlag, Berlin, 1984).
- [16] C.W.Misner, K.S.Thorne and I.A.Wheeler, Gravitation (W.H.Freeman and Company, San Francisco, 1973).
- [17] H.F.M.Goenner, Theories of Gravitation With Nonminimal Coupling of Matter, *Found. of Phys.***14**, 865 (1984).
- [18] L.A.Rezende de Oliveira, Acoplamento Não-Mínimo com a Gravitação e Espaços de Weyl Integráveis(Tese de Doutorado, CBPF, RJ, 1988).
- [19] S.Dieter Jorda, Os Diversos Modos de Acoplamento Não-Mínimo Entre Eletromagnetismo e Gravitação: Suas Propriedades Gerais e Suas Consequências Para a Propagação da Radiação Eletromagnética (Tese de Mestrado, CBPF, RJ, 1988).
- [20] Ya.B.Zeldovich, The Theory of the Expanding Universes as Originated by A.A.Friedmann, *Sov.Phys.Uspekhi***6**, 475 (1964).
- [21] A.Zee, Broken-Symmetric Theory of Gravity, *Phys.Rev.Lett.***42**, 417 (1979).
- [22] C.G.Callan, S.Coleman and R.Jackiw, A New Improved Energy-Momentum Tensor, *Ann.Phys.,NY* **59**, 42 (1970).

- [23] Mark S.Madsen, Scalar Fields in Curved Spacetimes,
*Class.Quantum Grav.***5**, 627 (1988).
- [24] G.Schmidt, W.Greiner, V.Heinz and B.Müller, Stability of Massive
Objects in a New Escalar-Tensor Theory, *Phys.Rev.D***24**, 1484 (1981).
- [25] A.J.Accioly, A.N.Vaidya and M.M.Som, Bianchi Type-I Models With
Conformally Invariant Scalar Field, *Phys.Rev.D***27**, 2282 (1983).
- [26] A.J.Accioly, A.N.Vaidya and M.M.Som, Nonminimal Coupling and Bianchi
Type-I Cosmologies, *Phys.Rev.D***28**, 1853 (1983).
- [27] A.J.Accioly, A.N.Vaidya and M.M.Som, Static Conformally Invariant
Scalar Field, *J.Math.Phys.***24**, 2176 (1983).
- [28] A.J.Accioly and N.L.Pereira da Silva, On a Nonlinear Electrodynamics
Generated via Gravitational Nonminimal Coupling, *Phys.Lett.A***118**, 271 (1986).
- [29] A.J.Accioly and N.L.Pereira da Silva, An Approach to a Nonlinear Eletrodynamics in
Curved Space-time, *Prog.Theor.Phys.* **76**, 1179 (1986).
- [30] M.Novello and J.M.Salim, Nonlinear Photons in the Universe,
*Phys.Rev.D***20**, 377 (1979).
- [31] Clifford M.Will, Theory and Experiment in Gravitational Physics
(Cambrige University Press, New York, 1981).
- [32] A.J.Accioly, Are Gravitational Theories Containing Nonminimal
Couplings Really Ruled Out by Equivalence Principle, ensaio selecionado
para *Honorable Mention* no Gravity Research Foundation Essay Contest,
USA, 1990; não publicado.
- [33] I.Hadamard, Leçons sur la Propagation des Ondes (Herman & Cie.,Paris, 1903).
- [34] A.R.Prasana, A New Invariant for Eletromagnetic Fields in Curved
Space-time, *Phys.Lett.A***37**, 331 (1971); Electromagnetism and Gravitation,
*Lett.Nuo.Cim.***6**, 420 (1973).

- [35] J.G.Souza, M.L.Bedran and B.Lesche, Magnetic Dipole Field in a Schwarzschild Metric With Nonminimal Coupling, *RBF* **14**, 488 (1984).
- [36] B.Lesche and M.L.Bedran, A Test of the Equivalence Principle With Polarized Light, *RBF*, **17**, 100 (1987).
- [37] G.F.R.Ellis, Standard Cosmology, Proc. Vth Brazilian School of Cosmology (World Scientific Publ.Co., 1988)
- [38] I.T.Drummond and S.J.Hathrell, QED Vacuum Polarization in a Background Gravitational Field and its Effect on the Velocity of Photons, *Phys.Rev.D* **22**, 343 (1980).
- [39] R.Aldrovandi and R.A.Kraenkel, On Exterior Variational Calculus, *J. Phys.A: Math.Gen.***21**, 1329 (1988).
- [40] R.Aldrovandi and R.A.Kraenkel, Perturbative Coherence in Field Theory, *J.Math.Phys.***30**, 1866 (1989).
- [41] A.J.Accioly and B.M.Pimentel, A Theory of Gravity with Broken Symmetry, *Can.J.Phys.***68**, 1183 (1990).
- [42] P.C.W.Davies and D.J.Toms, Boundary Effects and the Massless Limit of the Photon, *Phys.Rev.D***31**, 1363 (1985).
- [43] C.Itzykson and J.B.Zuber, Quantum Field Theory (McGraw-Hill Inc., USA, 1980)

