

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA
CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA**

ADRIELLY HOKAMA RAZZINI

LOCALIZAÇÃO DE IMPACTOS EM MATERIAIS COMPÓSITOS

**ILHA SOLTEIRA
2017**





UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
MECÂNICA

ADRIELLY HOKAMA RAZZINI

LOCALIZAÇÃO DE IMPACTOS EM MATERIAIS COMPÓSITOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Vicente Lopes Junior

ILHA SOLTEIRA

2017



FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

R279l Razzini, Adrielly Hokama.
Localização de impactos em materiais compósitos / Adrielly Hokama
Razzini. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2017
98 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de
Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Mecânica dos Sólidos, 2017

Orientador: Vicente Lopes Junior
Inclui bibliografia

1. Materiais compósitos. 2. Localização de impactos. 3. Rosetas piezelétricas.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: LOCALIZAÇÃO DE IMPACTOS EM MATERIAIS COMPÓSITOS

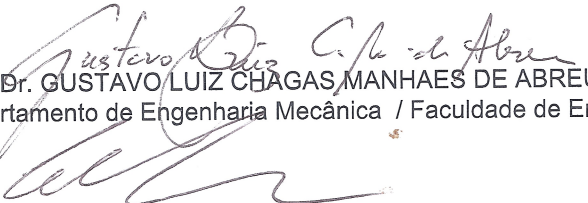
AUTORA: ADRIELLY HOKAMA RAZZINI

ORIENTADOR: VICENTE LOPES JUNIOR

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em ENGENHARIA MECÂNICA, área: MECÂNICA DOS SÓLIDOS pela Comissão Examinadora:



Prof. Dr. VICENTE LOPES JUNIOR
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



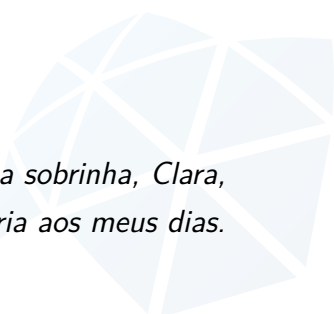
Prof. Dr. GUSTAVO LUIZ CHAGAS MANHAES DE ABREU
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Dr. CÁSSIO THOMÉ DE FARIA
/ Siemens Industry Software N.V.

Ilha Solteira, 08 de maio de 2017

*À minha sobrinha, Clara,
que trouxe mais alegria aos meus dias.*



AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Vicente Lopes Junior, que contribuiu imensamente para o meu crescimento pessoal e profissional ao longo de todos esses anos, desde o primeiro projeto de Iniciação Científica até a presente dissertação de Mestrado. Agradeço por todo o conhecimento compartilhado, incentivo, conselhos e, principalmente, pela confiança e oportunidades concedidas.

À minha mãe, Márcia Helena, pelo amor e apoio incondicional em busca dos meus sonhos. À minha avó, Zulmira, meu pai, José, e meu irmão, Eddie, por todo o carinho e incentivo. À minha sobrinha, Clara, que ainda tão pequenina, transborda amor e alegria.

Aos professores, membros e ex-membros do Grupo de Materiais e Sistemas Inteligentes (GMSINT), por todas as conversas, experimentos, ideias, orientações e até mesmo momentos de descontração. Ao técnico Carlos Santana, por toda a ajuda na realização dos experimentos. Em especial, agradeço ao Professor Dr. Michael J. Brennan, por todas as discussões que muito contribuíram para a realização deste trabalho.

À Izabela Batista, que compartilhou comigo toda essa jornada, pelo carinho, atenção e motivação, e por me incentivar a ser cada dia melhor.

Ao Rodrigo Oliveira, por não hesitar em ajudar, e pela grande amizade gerada durante este trabalho.

Aos membros da Banca Examinadora, Prof. Vicente, Prof. Dr. Gustavo Manhães e Dr. Cassio Faria pela presença, sugestões e comentários.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PPGEM), pela bolsa de estudos concedida.



♪♪ "...

It's a long way to the top

If you wanna rock 'n' roll

..." ♪♪

AC/DC

RESUMO

Materiais compósitos têm sido cada vez mais utilizados na indústria aeronáutica, devido a inúmeras vantagens que serão apresentadas nesse trabalho. Entretanto, impactos podem comprometer significativamente a estrutura. Tais impactos podem ocorrer a “baixa velocidade”, através de ferramentas derrubadas e contato com veículos/equipe de manutenção, e também a “alta velocidade”, como colisões com aves, raios elétricos, detritos de pneus ou pequenas pedras na pista. Conhecer a ocorrência e localização dos mesmos, assim como o progresso de danos subsequentes, permite realizar inspeções mais focadas e otimizar o custo e eficiência de manutenção. Este trabalho propõe a utilização de transdutores piezelétricos em formato de rosetas piezelétricas para localização de impacto em estruturas de materiais compósitos. As rosetas são compostas de transdutores retangulares de *Macro-Fiber Composite* (MFC), que apresentam uma resposta altamente diretiva para ondas ultrassônicas, o que foi explorado para determinar a localização da onda emitida, independente da velocidade de propagação da onda na estrutura. A acuracidade do método foi demonstrada experimentalmente em uma placa de fibra de carbono/ resina epóxi de dimensões 1060 × 1100 × 2mm, formada de 13 camadas *plain-weave* com duas rosetas piezelétricas coladas à superfície via adesivo cianoacrilato. Os impactos foram conduzidos utilizando um pequeno martelo com ponta metálica, simulando impactos realísticos sofridos por uma estrutura em serviço. O ponto de impacto foi determinado pelo método proposto e comparado com a localização real do impacto.

Palavras-chave: Materiais compósitos. Localização de impactos. Rosetas piezelétricas.



ABSTRACT

The usage of composite materials has been experiencing a continuous growth in aeronautic industry, due to countless advantages. However, impacts can significantly compromise the structure. These impacts can occur at "low velocity", by tools dropped, contact with maintenance vehicles or personnel and also at "high velocity", by bird/hail strikes, runaway debris from tires or lightnings. Knowing the occurrence and location of the impacts, as well as the progression of any subsequent damage, allows performing focused follow-up inspections, which can optimize maintenance cost and effectiveness. This work proposes using piezoelectric transducers arranged as rosettes to locate impacts on composite materials structures. The rosettes are comprised of rectangular transducers of Macro-Fiber Composite (MFC), which exhibit an highly directive response to ultrasonic waves that will be explored to determine the source of the incoming wave, regardless of the wave velocity. The accuracy of this method is experimentally demonstrated on a 1060x1100x2mm carbon/epoxy plate, formed by 13 plain-weave layers with two piezoelectric rosettes bonded to the surface via cyanoacrylate. The impacts were carried out using a small hammer with hardened steel tip, simulating realistic impacts suffered by an in-service structure. The impact point is determined by the proposed method and compared with the actual location of impact.

Keywords: Composite materials. Impacts location. Piezoelectric rosettes.



LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Demanda global por compósitos reforçados com fibra de carbono, em 1.000 toneladas, referente ao ano de 2013.	16
Figura 2 - Uso de materiais compósitos no Boeing 787 Dreamliner.	17
Figura 3 - Ilustração do efeito piezelétrico direto tanto para (a) compressão quanto para (b) tração do PZT.	22
Figura 4 - Ilustração do efeito piezelétrico inverso tanto para (a) tração quanto para (b) compressão do PZT.	22
Figura 5 - Cerâmicas piezelétricas em diversos tamanhos e formatos.	23
Figura 6 - Filmes piezelétricos PVDF de diversos tamanhos.	24
Figura 7 - Transdutor <i>Macro Fiber Composite</i> , demonstrando elevada flexibilidade.	25
Figura 8 - Cubo piezelétrico indicando os eixos de coordenada de uma análise tridimensional.	26
Figura 9 - Ondas de Lamb se propagando na direção positiva de x , em uma placa de espessura $2d$	29
Figura 10 - Representação dos modos de propagação simétrico e antissimétrico.	32
Figura 11 - Velocidades de fase das ondas de Lamb para uma placa de alumínio de 2mm de espessura.	33
Figura 12 - Velocidades de grupo das ondas de Lamb para uma placa de alumínio de 2mm de espessura.	33
Figura 13 - Vista expandida do transdutor MFC.	34
Figura 14 - Sensor MFC retangular sofrendo excitação de ondas de Lamb em incidência oblíqua.	35
Figura 15 - Sistema de referência para o cálculo de deformações cartesianas da onda pela resposta do sensor.	38
Figura 16 - Conceito de roseta piezelétrica para localização de impactos em um plano.	41

Figura 17 - Direção de orientação dos sensores e coordenada Cartesiana da roseta 1.	41
Figura 18 - Ilustração dos materiais e equipamentos utilizados no experimento.	43
Figura 19 - Corpo de prova instrumentado com transdutores MFC em formato de rosetas.	44
Figura 20 - Roseta de transdutores MFC em formato delta.	44
Figura 21 - Condicionador de sinais conectado à placa de aquisição de dados NI USB-6251	46
Figura 22 - Martelo utilizado para gerar impactos na estrutura.	46
Figura 23 - Configuração do experimento realizado no Laboratório de Estruturas Inteligentes - GMSINT.	47
Figura 24 - Osciloscópio digital modelo DSO-X 3014A da marca Agilent Technologies.	47
Figura 25 - Sinal obtido pelo sensor A em resposta a um impacto.	49
Figura 26 - Sinais obtidos pela roseta 1 em resposta a um impacto.	50
Figura 27 - Sinal obtido pela roseta 2 em resposta a um impacto.	50
Figura 28 - Diagrama de blocos representando a rotina desenvolvida para localização dos impactos.	51
Figura 29 - Localização do impacto através dos ângulos ϕ_1 e ϕ_2 encontrados.	51
Figura 30 - Localização dos impactos utilizando o método das rosetas piezelétricas - Impactos 1 e 2.	52
Figura 31 - Localização dos impactos utilizando o método das rosetas piezelétricas - Impactos 3 e 4.	53
Figura 32 - Localização dos impactos utilizando o método das rosetas piezelétricas - Impactos 5 e 6.	54
Figura 33 - Localização dos impactos utilizando o método das rosetas piezelétricas - Impactos 7 e 8.	55
Figura 34 - Localização dos impactos utilizando o método das rosetas piezelétricas - Impactos 9 e 10.	56
Figura 35 - Localização dos impactos utilizando o método das rosetas piezelétricas - Impactos 11 e 12.	57

Figura 36 - Representação dos resultados encontrados para 12 impactos produzidos em uma placa de fibra de carbono.	58
Figura 37 - Elemento diferencial de uma corda tensionada.	68
Figura 38 - Aproximação do elemento diferencial dS	69
Figura 39 - Posição da onda em três diferentes instantes de tempo.	74
Figura 40 - Movimento harmônico da corda em todos os instantes de tempo. .	75
Figura 41 - Propagação de um distúrbio sem distorção.	77
Figura 42 - Representação do plano característico da propagação de um distúrbio em uma corda.	80
Figura 43 - Condições de contorno na fronteira da corda.	81
Figura 44 - Representação de uma barra fina (a)e das tensões normais que atuam no seu elemento diferencial (b).	82
Figura 45 - Representação da aplicação de torque em um elemento diferencial prismático reto.	84
Figura 46 - Rigidez torcional para diferentes seções transversais.	85
Figura 47 - Representação de uma viga sofrendo um movimento transversal (a) e de seu elemento diferencial sob diversos carregamentos (b). .	86
Figura 48 - Representação de uma viga biapoiada.	90
Figura 49 - Representação de uma placa de espessura h e infinita nas outras direções.	92
Figura 50 - Representação do elemento diferencial da placa.	92
Figura 51 - Elemento diferencial da placa com uma lâmina abcd sombreada (a); Vista lateral do elemento durante flexão (b); Vista superior da lâmina mostrando deformação cisalhante.	94
Figura 52 - Placa finita biapoiada.	98



LISTA DE TABELAS

Tabela 1 -	Constantes eletromecânicas dos transdutores MFC.	45
Tabela 2 -	Localização real, localização detectada pelo método das rosetas piezelétricas e erro para 12 impactos.	58
Tabela 3 -	Identidades trigonométricas de senos e cossenos.	72
Tabela 4 -	Velocidade de Propagação da onda em uma barra para diversos materiais.	84



LISTA DE SÍMBOLOS

LETRAS GREGAS

α_i	- Direção do comprimento do sensor i
$\mathcal{D}_{mkl}$	- Constante piezelétrica
ε_{ij}	- Deformação normal
$\bar{\varepsilon}_{x'x'}$	- Espectro de amplitude da deformação superficial
$\mathcal{E}_{ijkl}^E$	- Tensor de compliância mecânica
γ_{ij}	- Deformação cisalhante
λ	- Comprimento de onda
ϕ_i	- Principal ângulo de deformação da onda
ν_{ij}	- Coeficiente de Poisson
σ_{kl}	- Tensor de tensões
θ_j	- Ângulo formado entre a direção de propagação da onda com a direção do comprimento do sensor
ω	- Frequência



LETRAS LATINAS

A	- Constante arbitrária que depende da magnitude da onda
b	- Largura do sensor
c_g	- Velocidade de grupo da onda
c_L	- Velocidade longitudinal de propagação da onda
c_p	- Velocidade de fase da onda
c_T	- Velocidade transversal de propagação da onda
C_{ij}^E	- Matriz de rigidez elástica
d	- Metade da espessura da placa
d_{mj}	- Constante piezelétrica para tensores simétricos
D_m	- Densidade de carga
e_{mn}^σ	- Permissividade dielétrica
E_k	- Módulo de elasticidade do transdutor
E_{Fn}	- Campo elétrico
G_{ij}	- Módulo de cisalhamento
H	- Constante independente da frequência
k	- Número de onda (wavenumber)
K_T	- Razão de sensibilidade transversal
l	- Comprimento do sensor
S	- Fator de sensibilidade
Q_{ij}	- Matriz de rigidez reduzida do transdutor MFC
t	- Espessura do sensor
$u_{x'}$	- Deslocamento da onda de Lamb no plano
V	- Voltagem
$\bar{V}$	- Amplitude
x, y, z	- Coordenadas globais (x,y,z)
x_{imp}	- Coordenada x do impacto detectado
x_{real}	- Coordenada x da localização real do impacto
x', y'	- Coordenadas globais (x,y) rotacionadas
y_{imp}	- Coordenada y do impacto detectado
y_{real}	- Coordenada y da localização real do impacto



LISTA DE SOBRESCRITOS

- A - Referente ao sensor A
- B - Referente ao sensor B
- C - Referente ao sensor C
- E - Sob campo elétrico constante
- i - Referente aos sensores A, B e C
- σ - Sob tensão constante

LISTA DE SUBSCRITOS

- i - Referente ao i-ésimo ponto
- j - Referente ao j-ésimo ponto
- k - Referente ao k-ésimo ponto
- l - Referente ao l-ésimo ponto
- m - Referente ao m-ésimo ponto
- n - Referente ao n-ésimo ponto
- imp - Referente à localização do impacto
- x - Referente à direção x
- x' - Referente à direção x'
- y - Referente à direção y
- y' - Referente à direção y'
- z - Referente à direção z

LISTA DE SIGLAS

- $GMSINT$ - Grupo de Materiais e Sistemas Inteligentes
- MFC - *Macro Fiber Composite*
- PZT - Titanato Zirconato de Chumbo
- SHM - *Structural Health Monitoring*



SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	OBJETIVOS	20
2	CONCEITOS FUNDAMENTAIS	21
2.1	MATERIAIS PIEZELÉTRICOS	21
2.1.1	Equações Constitutivas Lineares da Piezeletricidade	25
2.2	ONDAS DE LAMB	29
3	METODOLOGIA	34
3.1	SENSIBILIDADE À DEFORMAÇÃO DE TRANSDUTORES MFC	34
3.2	RESPOSTA DOS SENSORES MFC A ONDAS DE LAMB ANISSIMÉTRICAS	37
3.3	DIRETIVIDADE DA RESPOSTA DO MFC	39
3.4	ROSETAS DE MFC PARA LOCALIZAÇÃO DA FONTE DE ONDAS . . .	40
3.5	METODOLOGIA EXPERIMENTAL	43
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	49
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	60
5.1	ETAPAS FUTURAS	61
	REFERÊNCIAS	62
	APÊNDICE A - PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM MEIOS SÓLIDOS CONÍNUOS	66
A.1	PROPAGAÇÃO DE ONDAS UNIDIMENSIONAIS NO CONTÍNUO	67
A.1.1	Ondas e vibrações em cordas longas	67
A.1.2	Ondas longitudinais em uma barra fina	82

A.1.3 Ondas Torcionais em uma Barra	84
A.1.4 Ondas de Flexão em uma viga	86
A.2 PROPAGAÇÃO DE ONDAS BIDIMENSIONAIS EM UMA PLACA	91
A.2.1 Ondas de Flexão em uma Placa	92

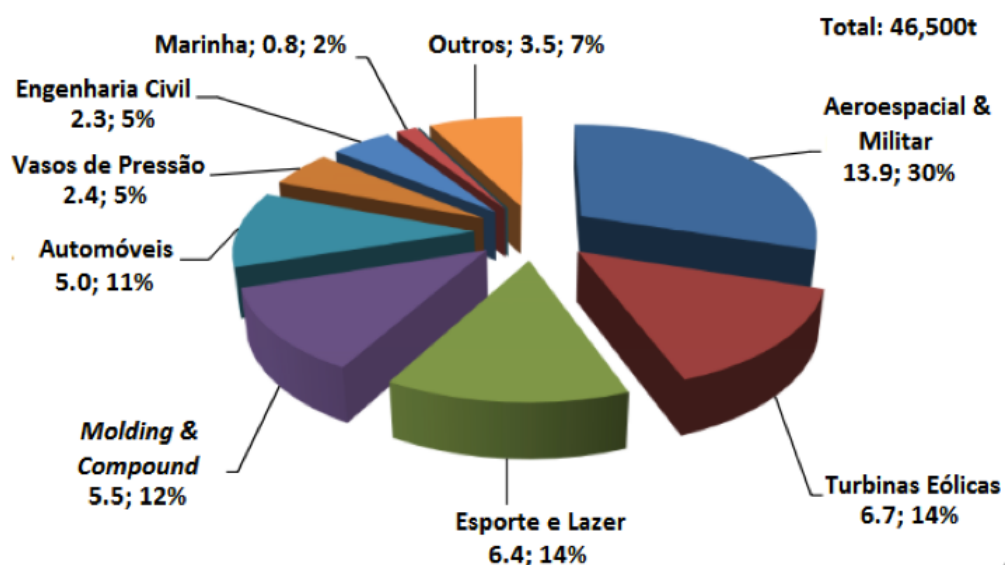


1 INTRODUÇÃO

Materiais compósitos são caracterizados pela presença de duas ou mais fases a nível macroscópico, sendo projetados de forma que apresentem desempenho e propriedades mecânicas superiores às dos materiais constituintes individualmente (DANIEL; ISHAI, 1994). Estes materiais correspondem a uma classe ampla e abrangente, compreendendo desde polímeros reforçados com fibras, materiais híbridos, concretos estruturais e outros compósitos que incorporam matriz metálica ou cerâmica (SHACKELFORD, 2008). Suas aplicações são as mais diversas, desde a fabricação de vasos de pressão, pás de turbinas eólicas, materiais esportivos, como quadros de bicicleta e raquetes de tênis, até a área de transporte, nos setores automotivo, náutico e aeroespacial.

Não é surpresa que o mercado aeroespacial é um dos maiores e mais importantes para a indústria de compósitos. Aviões comerciais e militares, helicópteros, jatos e veículos espaciais fazem uso substancial de compósitos de alta performance (GIURGIUTIU, 2016).

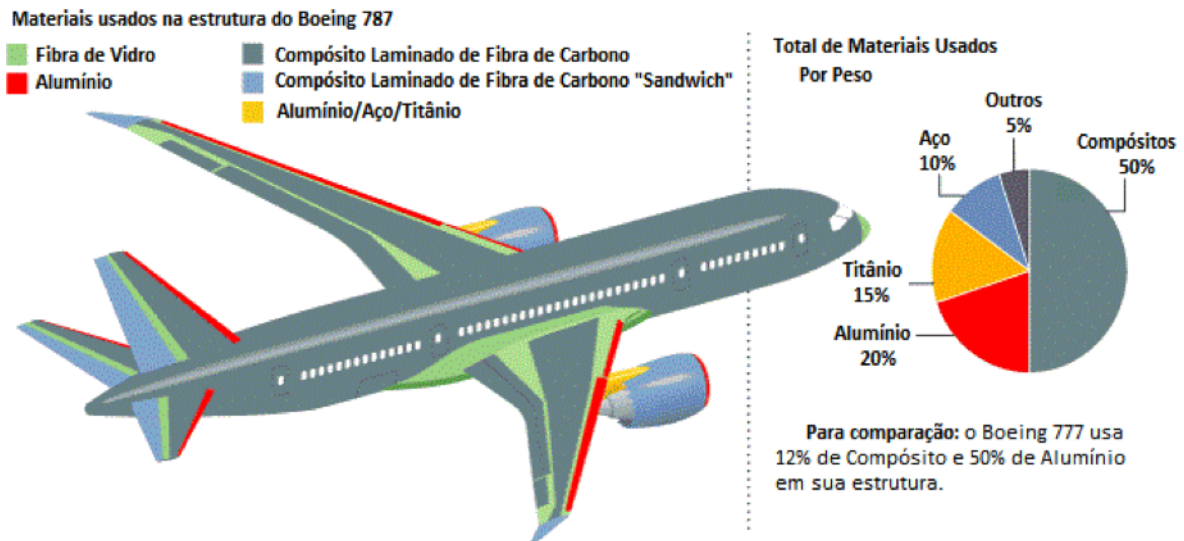
Figura 1- Demanda global por compósitos reforçados com fibra de carbono, em 1.000 toneladas, referente ao ano de 2013.



Fonte: Lucintel (2014).

A figura (1) mostra a demanda global por compósitos reforçados com fibra de carbono no ano de 2013, com destaque para o setor aeroespacial e militar, com demanda de 13,9 mil toneladas. Exemplos marcantes na indústria de aviação civil são o Boeing 787 Dreamliner (Figura 2) e o Airbus XWB, nos quais cerca de 50% da estrutura primária é de materiais compósitos.

Figura 2- Uso de materiais compósitos no Boeing 787 Dreamliner.



Fonte: Airlines (2015), adaptado pela autora.

Compósitos de alta performance foram desenvolvidos, pois nenhum material estrutural homogêneo que tivesse todos os atributos desejados para uma dada aplicação pôde ser encontrado. As vantagens do uso de compósitos na indústria aeroespacial são diversas: redução de peso na faixa de 20-50%, resistência à corrosão, aumento no ciclo de fadiga do material, alta adaptabilidade, aumento da eficiência aerodinâmica devido ao melhor acabamento do material, altos índices de resistência por unidade de peso, estabilidade térmica, fazendo com que a estrutura não contraia ou expanda excessivamente com mudanças de temperatura, capacidade de adaptar o comportamento aeroelástico para aumentar o envelope de vôo, entre outras (GIURGIUTIU, 2016).

Apesar da sua grande popularidade e atrativos para seu desenvolvimento, o uso de materiais compósitos ainda traz preocupações. Falhas em estruturas compósitas em aeronaves podem ser catastróficas, como no caso ocorrido em Nova Iorque em novembro de 2001, onde o estabilizador vertical do Airbus A300-600 da American Airlines se separou da aeronave, fazendo com que ela viesse a cair, gerando 265 vítimas fatais (GIURGIUTIU, 2016). Diferentes tipos de acidentes em aviões são relatados na literatura. Danos causados por impacto podem gerar significativa alteração estrutural.

Impactos em materiais compósitos podem gerar danos na estrutura, dentre eles: rachaduras na matriz (RICHARDSON; WISHEART, 1996) e delaminações (OSMONT et al., 2000; GIURGIUTIU, 2011), que na maioria das vezes não são visíveis a olho nu e passam despercebidos em inspeções visuais. Outros modos de falha menos comuns, que ocorrem em resposta a eventos de impacto dramáticos, são ruptura de fibra, penetração e perfuração (HOSSEINZADEH; SHOKRIEH; LESSARD, 2006). Tais impactos podem ocorrer a “baixa velocidade”, através de ferramentas derrubadas e contato com veículos/equipe de manutenção, e também a “alta velocidade”, como colisões com aves, raios

elétricos, detritos de pneus e pequenas pedras na pista (NUCERA et al., 2015).

Conhecer a ocorrência e localização desses impactos, assim como a progressão de qualquer dano subsequente, permite a realização de acompanhamentos e inspeções focadas que podem ajudar a otimizar os custos e eficiência de manutenção (PARK; HA; CHANG, 2009).

Tendo isto em vista, é do interesse da indústria o desenvolvimento de técnicas capazes de monitorar remotamente e em tempo real a integridade estrutural de seus produtos. O processo de implementação de uma estratégia de identificação de danos em estruturas de engenharia aeroespacial, civil e mecânica é chamado de *Structural Health Monitoring* (SHM). Esse processo envolve a observação da estrutura ou sistema mecânico durante o tempo usando medições periodicamente espaçadas, a extração de características sensíveis ao dano a partir destas medições e a análise estatística destas características para determinar o estado atual da integridade estrutural (FARRAR; LIEVEN, 2007).

Uma das abordagens mais efetivas para efetuar este monitoramento vem sendo feita com transdutores piezelétricos, representando uma frente de atuação promissora para SHM. Segundo Park e Inman (2007), eles são pequenos e discretos, possuem uma grande variedade de tamanhos e propriedades, permitindo que eles sejam implantados praticamente em qualquer lugar. Seu aspecto mais interessante de material inteligente é que eles podem agir como sensores e como atuadores. Conectados a sistemas de aquisição de dados apropriados, permitem realizar monitoramento via diversos mecanismos: propagação de ondas guiadas (JARMER; FLYNN; TODD, 2014), medição das funções de resposta em frequência (YANG et al., 2008), medição da impedância eletromecânica do sistema (LOPES et al., 2000), dentre vários outros.

Dada a importância de se conhecer e catalogar regiões que tenham sofrido impacto e possam apresentar danos, trabalhos recentes têm sido desenvolvidos com esta finalidade, além de estimar a força e energia do impacto sofrido. Coverley e Staszewski (2003) utilizam algoritmos genéticos junto com procedimentos de triangularização para localizar impactos em sistemas anisotrópicos. Entretanto, eles assumem um conhecimento prévio do momento do impacto, o que não é um parâmetro determinado facilmente em aplicações reais.

Kundu, Das e Jata (2007) mostram uma abordagem diferente para o problema, focando na localização de impactos com sensores piezelétricos através de funções de erro, isto é, funções que levam em consideração propriedades da placa e o tempo de chegada das ondas, assumindo valores para cada posição no domínio da placa. Estes valores refletem na proximidade da posição correspondente ao ponto de impacto. O estudo apresentou resultados satisfatórios, mas não foi testado para sistemas altamente anisotrópicos.

Ciampa e Meo (2011) propõem um sistema de SHM *in situ* para a localização do

ponto de impacto em estruturas anisotrópicas complexas. A técnica se baseia no método de acústica *time reversal* aplicado a um número de formas de ondas armazenados em uma data-base contendo a resposta ao impulso da estrutura, sendo que não requer nenhum conhecimento prévio das propriedades mecânicas da estrutura. O sistema apresentou uma boa exatidão, entretanto, o método requer que um número muito elevado de amostras seja coletado para o banco de dados, o que se torna inviável para aplicações em estruturas de larga escala.

Matt e Scalea (2007) apresentam uma abordagem baseada em rosetas piezelétricas para localização de emissão acústica em estruturas isotrópicas e anisotrópicas. As rosetas exploram a resposta altamente diretiva dos transdutores piezelétricos de *Macro Fiber Composite* (MFC) para determinar a direção de uma onda incidente, independente da velocidade de propagação da onda no meio. O método foi validado através do teste *Pencil-Lead Break*, que utiliza a quebra de grafites para obter emissões acústicas de alta frequência, mas não foi testado com impactos reais. Salamone et al. (2010) deram continuidade ao método, com impactos de alta velocidade produzidos por pedras de gelo atiradas por um canhão a gás, que também excita a estrutura em frequências elevadas.

Nucera et al. (2015) utilizam o método das rosetas piezelétricas para o monitoramento da progressão de um dano causado por um impacto de grande energia que cobre uma grande área da estrutura, e também implementam um algoritmo para identificação da força do impacto. Uma estrutura de fibra de carbono foi submetida a um impacto de aproximadamente 70kN que gerou delaminações na estrutura. O método não localiza a região na qual ocorreu o impacto, mas monitora o dano causado por ele, localizando as emissões acústicas que ocorrem no momento das delaminações.

Conforme apresentado, esta é uma área de pesquisa em progresso, que se mostra como tendência para os próximos anos. No presente trabalho, propõe-se utilizar a metodologia das rosetas piezelétricas, introduzida por Matt e Scalea (2007), para localização de impactos em placas laminadas de materiais compósitos. Entretanto, algumas diferenças são propostas. Enquanto os trabalhos anteriores utilizaram a magnitude do sinal obtida no domínio da frequência, em uma faixa limitada de valores de frequência definida experimentalmente e que varia de acordo com a estrutura analisada, este trabalho utiliza a norma infinita dos sinais no domínio do tempo, que funciona da mesma maneira para qualquer material. Este trabalho estende o estudo para impactos de baixa velocidade, conduzidos manualmente por um pequeno martelo, que excitam a estrutura em uma faixa de frequência inferior às dos experimentos mencionados anteriormente.



1.1 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é desenvolver a abordagem da utilização de transdutores piezelétricos em formato de rosetas para a localização de impactos em estruturas de materiais compósitos.



2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos introdutórios sobre piezeletricidade e propagação de ondas, para fundamentar o método proposto neste trabalho.

2.1 MATERIAIS PIEZELÉTRICOS

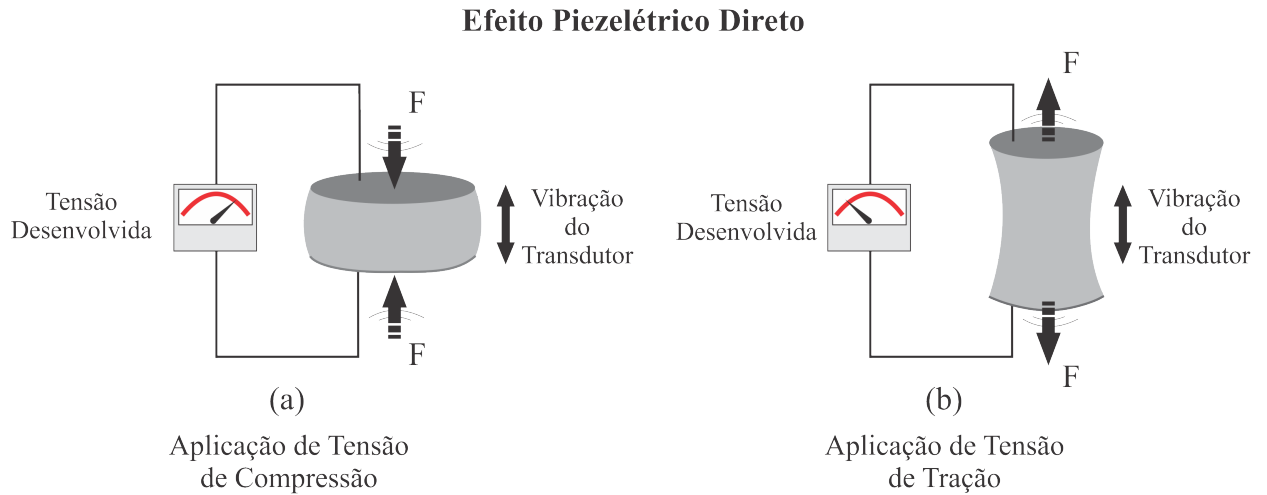
Materiais inteligentes são aqueles que exibem acoplamento entre múltiplos domínios físicos. Um exemplo conhecido na engenharia são os materiais piezelétricos, que podem converter sinais elétricos em deformação mecânica e podem converter deformação mecânica em uma saída elétrica. Outros exemplos incluem a conversão de energia térmica em deformação mecânica, através das ligas de memória de forma (do inglês *Shape Memory Alloys* - *SMA*) ou o acoplamento de um campo magnético com movimento mecânico, através dos fluidos magnetorreológicos. Mais informações e particularidades sobre os materiais inteligentes podem ser encontradas nos trabalhos de Smith (2005) e Leo (2007).

Em meados do século XVIII, Carolus Linnaeus e Franz Aepinus observaram pela primeira vez que certos materiais, como cristais e algumas cerâmicas, geram cargas elétricas quando há mudança de temperatura. Tanto René Just Haüy quanto Antoine César Becquerel tentaram subsequentemente investigar os fenômenos, mas não obtiveram sucesso. A piezeletricidade como uma área de pesquisa da Física foi iniciada pelos irmãos Jacques e Pierre Curie com seus estudos (CURIE; CURIE, 1880a; CURIE; CURIE, 1880b). Eles descobriram uma característica incomum de certos minerais cristalinos como turmalina, quartzo, topázio e sal de Rochelle: verificou-se que a tensão e a compressão geraram tensões de polaridade oposta e proporcionais à carga aplicada. Isso foi chamado por Hankel (1881) de efeito piezelétrico (direto).

O efeito piezelétrico descoberto é mostrado esquematicamente na figura (3). A palavra piezeletricidade vem do grego e significa eletricidade resultante de pressão. No ano seguinte à descoberta do efeito direto, Lippmann (1881) previu a existência do efeito inverso com base em princípios termodinâmicos fundamentais. Antes do final de 1881, os irmãos Curies confirmaram experimentalmente a existência do efeito inverso. Eles mostraram que, se um desses cristais for exposto a um campo elétrico, ele varia seu comprimento de acordo com a polaridade do campo, e na proporção de sua força, como mostrado na figura (4).

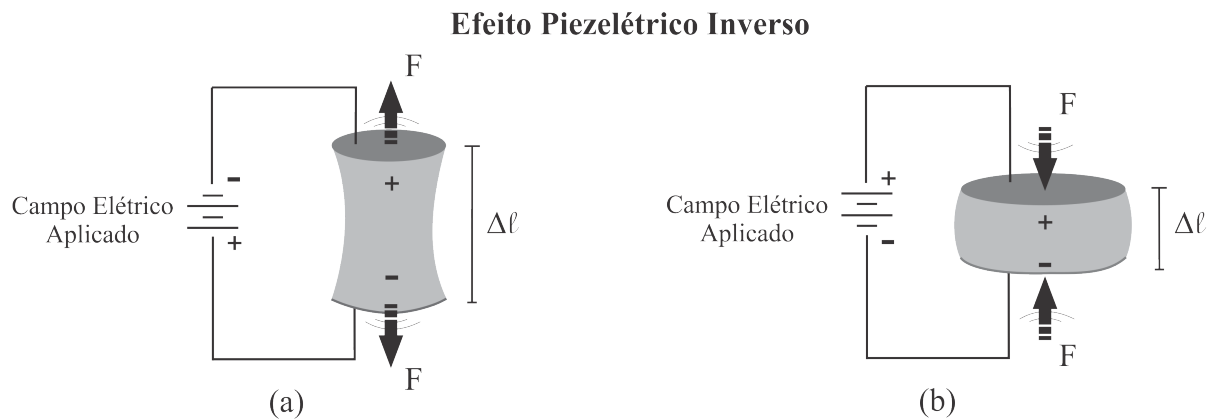
O estudo da piezeletricidade permaneceu como uma curiosidade de laboratório durante

Figura 3- Ilustração do efeito piezelétrico direto tanto para (a) compressão quanto para (b) tração do PZT.



Fonte: Autoria própria.

Figura 4- Ilustração do efeito piezelétrico inverso tanto para (a) tração quanto para (b) compressão do PZT.



Fonte: Autoria própria.

os anos que se seguiram até a Primeira Guerra Mundial, quando Langévin (1920) utilizou quartzo como ressonador para fontes de ultrassom no SONAR, para detectar submarinos por meio da ecolocalização. Roberts (1947) descobriu que o titanato de bário (BaTiO_3) é um ferroelétrico que pode ser facilmente fabricado e moldado a baixo custo e pode se tornar um material piezelétrico com constantes muito superiores aos materiais naturais por um processo de polarização elétrica. Isso marcou o início da geração das piezocerâmicas.

Os estudos de soluções sólidas de PbZrO_3 - PbTiO_3 , por Jaffe, Roth e Marzullo (1955), resultaram na obtenção de cerâmicas de titanato zirconato de chumbo (PZT), que passaram a ser objeto de frequentes investigações para a otimização de suas propriedades ou

como motivação para o desenvolvimento de novos compostos cerâmicos.

Estes materiais podem ser fabricados de várias formas e tamanhos, propiciando assim sua utilização em diversas aplicações, incluindo lugares de difícil acesso, e operando na faixa de alguns Hz até frequências da ordem de MHz. Além disso, eles podem ser usados como sensores (efeito direto) e atuadores (efeito inverso), permitindo assim o monitoramento e ação de controle nas estruturas em que estão agregados (PEAIRS; INMAN; PARK, 2007).

As cerâmicas piezelétricas se destacam por apresentarem propriedades mais elevadas quando comparadas a outros materiais piezelétricos (naturais ou sintéticos). Outra característica importante é a variedade de formas e tamanhos que as cerâmicas podem assumir devido ao seu processo de produção que, de acordo com Venet e Pereira (2004), consiste na sinterização de pó cerâmico conformado via prensagem ou extrusão. Algumas exemplos podem ser observados na figura 5, em diversos tamanhos e formatos.

Figura 5- Cerâmicas piezelétricas em diversos tamanhos e formatos.

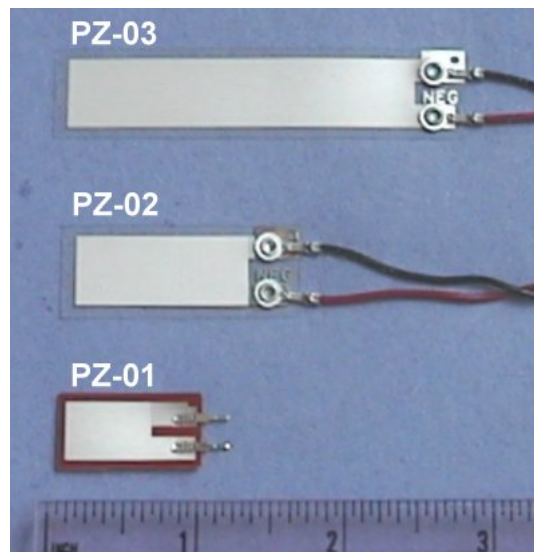


Fonte: Prowave (2005).

No entanto, existem várias limitações práticas para a utilização deste tipo de material, pois a natureza frágil das cerâmicas as torna vulneráveis a quebras acidentais durante o manuseio e procedimentos de colagem em estruturas, assim como sua capacidade limitada de se conformar a superfícies curvas. Como alternativa geralmente são utilizados os polímeros PVDF (Fluorido de Polivinilideno) em forma de filmes finos. Assim, além de possibilitarem uma formatação com geometrias complexas, são facilmente colados em superfícies irregulares. Por apresentarem baixa rigidez, os filmes PVDF (figura 6) mostram-se mais adequados e eficientes na confecção de sensores.

O número de aplicações em engenharia utilizando o polímero piezelétrico PVDF é cada vez maior. Entre os diversos fatores responsáveis se destacam: pouco peso, elevada flexibilidade, além de baixa impedância mecânica e acústica, o que torna ideal para aplicações subaquáticas e médicas. Estes sensores também oferecem algumas desvantagens, como o

Figura 6- Filmes piezelétricos PVDF de diversos tamanhos.



Fonte: SI (2015).

uso em uma faixa limitada de temperatura e estabilidade química pobre em ambientes ásperos (MALMONGE et al., 2009).

A ideia de um material compósito constituído por uma fase piezocerâmica fibrosa incorporada em uma fase de matriz polimérica soluciona muitas das restrições mencionadas anteriormente. Normalmente, materiais cristalinos apresentam forças muito mais elevadas na forma de fibra, onde a diminuição da fração de volume de falhas leva a um aumento na força específica. Ademais, além de proteger as fibras, a natureza flexível da matriz polimérica permite que o material se adapte mais facilmente às superfícies curvas encontradas em aplicações industriais (WILLIAMS et al., 2002).

Neste cenário, o *Macro Fiber Composite* (MFC - Figura 7) é parte de uma tecnologia emergente que busca melhorar o atual estado da arte para a atuação estrutural, apresentando grande flexibilidade e níveis de deformações induzidos muito mais elevados que seus antecessores de cerâmica (WILLIAMS et al., 2003). Enquanto são necessários arranjos complexos de cerâmicas piezelétricas para flexionar ou torcioniar uma estrutura, as características do MFC fazem que um único transdutor seja capaz de aplicar momentos de flexão ou torques de torção. Outras vantagens são: elevada durabilidade, resistência a danos, atuação e sensibilidade direcional, conforma-se à superfície e podem ser fabricados em diversas formas/tamanhos (WILLIAMS et al., 2002).

Desenvolvidos nos anos 2000 no centro de pesquisa *Langley Research Center* da NASA, os transdutores MFCs são compostos de fibras muito finas de cerâmicas piezelétricas alinhadas com resina epóxi e prensadas entre duas camadas de eletrodos impressos em filmes de poliamida. O uso de eletrodos interdigitados faz com que esses atuadores desenvolvam forças ou deslocamentos muito maiores, capitalizando o efeito piezelétrico

Figura 7- Transdutor *Macro Fiber Composite*, demonstrando elevada flexibilidade.



Fonte: NASA (2015).

longitudinal mais forte, no qual a maior resposta mecânica ocorre na direção do campo elétrico aplicado. As vantagens apresentadas acima permitem sua aplicação em diversas áreas, como Asas Adaptativas (BILGEN et al., 2007), *Power Harvesting* (YANG; TANG; LI, 2009), Controle Ativo de Vibrações (LENIOWSKA; MAZAN, 2015), Monitoramento da Integridade Estrutural (NUCERA et al., 2015), dentre outras.

2.1.1 Equações Constitutivas Lineares da Piezeletricidade

As características de um material piezelétrico, como tensão mecânica, campo elétrico, deformação e indução, podem ser descritas por um par de equações eletromecânicas. A relação entre campo elétrico e deformação é aproximadamente linear para baixas intensidades do campo elétrico.

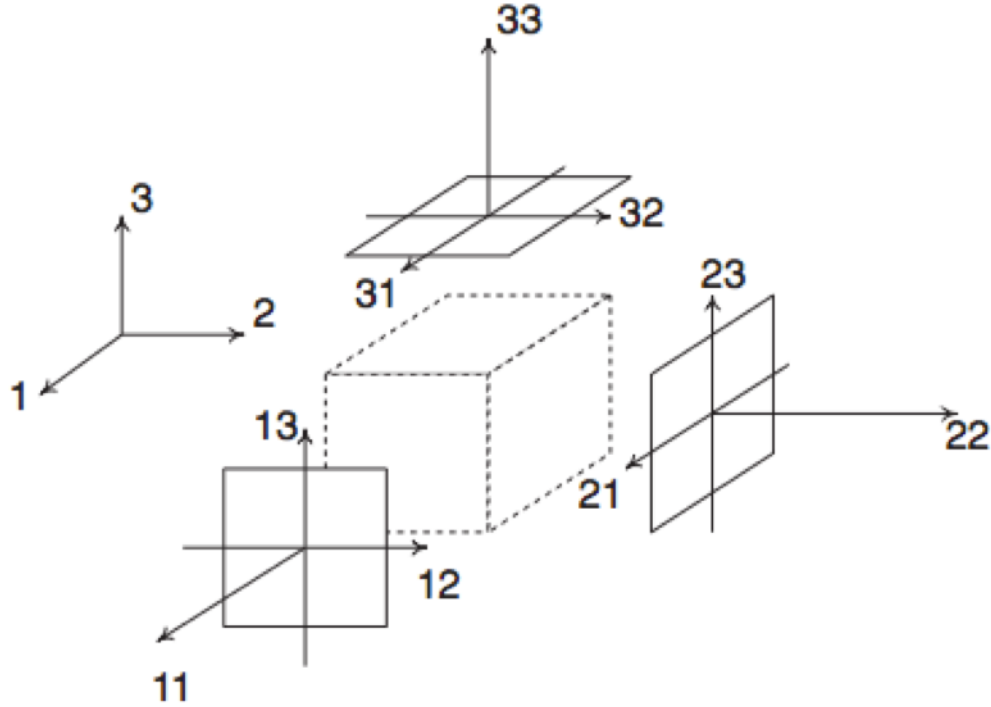
Leo (2007), seguindo notação padrão IEEE 176-1987, considera um cubo de material piezelétrico, sem fazer proposições da direção na qual o campo elétrico é aplicada ou a direção na qual o material está produzindo tensão ou deformação. Será definido um sistema de coordenadas no qual as três direções são especificadas numericamente. Além disso, é usada a convenção de que as três direções estão alinhadas com o eixo de simetria do material, como representa a figura 8.

Observa-se da figura que há três direções nas quais pode ser aplicado um campo elétrico. Essas três direções serão denominadas E_{Fi} , onde $i = 1, 2, 3$, e expressarão estes campos em termos do vetor campo elétrico:

$$\bar{E}_F = \begin{Bmatrix} E_{F1} \\ E_{F2} \\ E_{F3} \end{Bmatrix}$$

(1)

Figura 8- Cubo piezelétrico indicando os eixos de coordenada de uma análise tridimensional.



Fonte: Leo (2007).

Similarmente, nota-se que há três direções nas quais se pode produzir deslocamento elétrico ao longo do material. Elas são expressas pelo vetor direção do deslocamento elétrico:

$$\bar{D} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

O fato de que há três direções associadas com o campo elétrico e três associadas com o deslocamento elétrico significa que a relação geral entre as variáveis toma a seguinte forma (LEO, 2007):

$$D_1 = e_{11}^{\sigma} E_{F1} + e_{12}^{\sigma} E_{F2} + e_{13}^{\sigma} E_{F3}$$

$$D_2 = e_{21}^{\sigma} E_{F1} + e_{22}^{\sigma} E_{F2} + e_{23}^{\sigma} E_{F3}$$

$$D_3 = e_{31}^{\sigma} E_{F1} + e_{32}^{\sigma} E_{F2} + e_{33}^{\sigma} E_{F3}$$

(3)

Essas expressões podem ser representadas em notação indicial como:

$$D_m = e_{mn}^\sigma E_{Fn}, \quad \text{com } m=1,2,3 \text{ e } n=1,2,3. \quad (4)$$

As equações que relacionam a deformação à tensão no caso tridimensional podem ser encontradas de uma maneira similar. No caso de um estado geral de tensão e deformação para o cubo do material, nota-se que são necessários nove termos para uma especificação completa. Os componentes de tensão e deformação que são normais à superfície do cubo são denotados $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ e $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$, respectivamente. Há seis componentes de tensão cisalhante, $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{32}$ e $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}$. Para um material linearmente elástico, pode-se relacionar deformação à tensão com a expressão do tensor abaixo (LEO, 2007):

$$\varepsilon_{ij} = \mathcal{E}_{ijkl}^E \sigma_{kl} \quad (5)$$

na qual o tensor $\mathcal{E}_{ijkl}^E$ representa 81 termos de compliância mecânica.

O último passo para descrever as relações constitutivas é especificar o acoplamento entre as variáveis elétricas e mecânicas. No caso mais geral, vê-se que os nove estados de deslocamento são relacionados com os três campos elétricos aplicados através da expressão:

$$\varepsilon_{ij} = \mathcal{D}_{ijn} E_{Fn} \quad (6)$$

e os três deslocamentos elétricos são relacionados à tensão mecânica pela equação

$$D_m = \mathcal{D}_{mkl} \sigma_{kl} \quad (7)$$

Combinado as equações (4) a (7), pode-se escrever as equações constitutivas para um material piezelétrico linear:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \mathcal{E}_{ijkl}^E \sigma_{kl} + \mathcal{D}_{ijn} E_{Fn} \\ D_m &= \mathcal{D}_{mkl} \sigma_{kl} + e_{mn}^\sigma E_{Fn} \end{aligned} \quad (8)$$

sendo, ε_{ij} o tensor deformação $[m/m]$, σ_{kl} o tensor de tensões $[N/m^2]$, E_{Fn} o campo elétrico $[V/m; N/C]$, $\mathcal{D}_{mkl}$ a constante piezelétrica $[C/m]$, D_m o deslocamento elétrico ou indução $[C/m^2]$, $\mathcal{E}_{ijkl}^E$ o tensor de compliância $[m^2/N]$ e e_{mn}^σ a permissividade dielétrica $[C^2/N \text{ m}^2]$. As letras nos colchetes representam as unidades no Sistema Internacional, com Newton (N), metro (m), Volt (V) e Coulomb (C).

O conjunto completo de equações é definido por 81 constantes de compliância mecânica, 27 valores do coeficiente de deformação piezelétrica e 9 permissividades dielétricas.

Estas equações são escritas em notação tensorial ou indicial devido ao fato que elas representam uma relação entre nove variáveis de campo mecânico (tensão ou deformação) e três variáveis associadas às propriedades elétricas.

A forma compacta das relações constitutivas é baseada no fato de que os tensores de tensão e deformação são simétricos, portanto (LEO, 2007):

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \sigma_{ji} \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ji}\end{aligned}\tag{9}$$

Com a simetria dos tensores de tensão e deformação em mente, nota-se que ao invés de 9 elementos independentes de tensão e deformação, tem-se apenas 6 elementos independentes. Pode-se, assim, definir o novo conjunto de componentes de tensão e deformação:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_{11} & \sigma_1 &= \sigma_{11} \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_{22} & \sigma_2 &= \sigma_{22} \\ \varepsilon_3 &= \varepsilon_{33} & \sigma_3 &= \sigma_{33} \\ \varepsilon_4 &= \varepsilon_{23} + \varepsilon_{32} & \sigma_4 &= \sigma_{23} = \sigma_{32} \\ \varepsilon_5 &= \varepsilon_{31} + \varepsilon_{13} & \sigma_5 &= \sigma_{31} = \sigma_{13} \\ \varepsilon_6 &= \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} & \sigma_6 &= \sigma_{12} = \sigma_{21}\end{aligned}\tag{10}$$

Com essas definições, pode-se escrever as equações constitutivas em uma notação muito mais compacta (LEO, 2007):

$$\varepsilon_i = \epsilon_{ij}^E \sigma_j + d_{ik} E_{Fk}\tag{11}$$

$$D_m = d_{mj} \sigma_j + e_{mk}^{\sigma} E_{Fn}\tag{12}$$

onde ϵ_{ij}^E representa os coeficientes de compliância, i e j assumem valores entre 1 e 6, m e n assumem valores entre 1 e 3. Essa notação destaca que há apenas 36 constantes elásticas independentes, 18 coeficientes de deformação piezoeletrica e 9 valores de permissividade elétrica que caracterizam um material piezoeletrico.

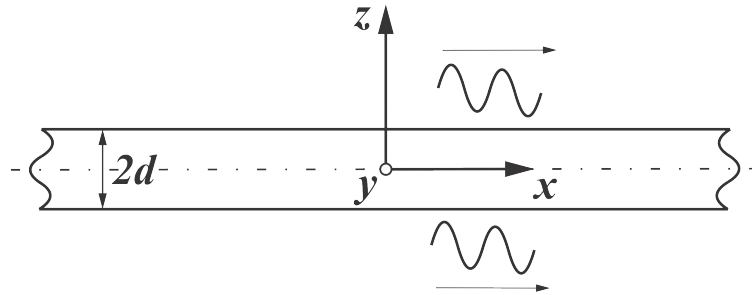
As equações (11) e (12) representam, respectivamente, o efeito inverso e direto do PZT. O efeito inverso normalmente é associado à utilização do PZT como atuador, pois aplicando uma tensão elétrica alternada no PZT, obtém-se também uma deformação alternada, gerando assim um estado vibratório. Por outro lado, aplicando uma tensão mecânica no PZT é possível notar a presença de uma tensão elétrica, efeito direto.

2.2 ONDAS DE LAMB

Em física, uma onda é um distúrbio ou oscilação que viaja através do espaço e matéria, acompanhado de transferência de energia. A propagação de ondas em diversas formas é um fenômeno comum a todas as pessoas, tais como transmissão do som através do ar, propagação de ondas em uma lagoa ao se atirar uma pequena pedra, transmissão de tremores sísmicos na Terra ou transmissão de ondas de rádio. Estes e muitos outros exemplos podem ser citados para ilustrar a propagação de ondas através de meios sólidos, líquidos ou gasosos. Conceitos fundamentais e um equacionamento detalhado sobre a propagação de ondas em meios sólidos podem ser encontrados no Apêndice A. Nesta seção serão mostrados apenas os conceitos sobre ondas de Lamb, pois serão utilizados na metodologia proposta.

Ondas de Lamb são uma forma de perturbação elástica que se propaga entre duas superfícies paralelas livres, tais como as superfícies superior e inferior de uma placa, viga ou casca, onde os deslocamentos ocorrem tanto na direção de propagação da onda quanto perpendicularmente à superfície (VIKTOROV, 1967). A análise desse tipo de onda se iniciou em 1917 por Horace Lamb em uma de suas publicações históricas, *"On Waves in an Elastic Plate"* (LAMB, 1917).

Figura 9- Ondas de Lamb se propagando na direção positiva de x , em uma placa de espessura $2d$.



Fonte: Autoria própria.

Considere uma placa fina, isotrópica e homogênea, de espessura $2d$, com ondas de Lamb se propagando na posição positiva de x (figura 9). As equações que descrevem a propagação dos modos longitudinais e transversais das ondas, respectivamente, são dadas por (SU; YE; LU, 2006):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (14)$$

onde

$$\varphi = [A_1 \sin(pz) + A_2 \cos(pz)]e^{i(kx-\omega t)} \quad (15)$$

$$\psi = [B_1 \sin(qz) + B_2 \cos(qz)]e^{i(kx-\omega t)} \quad (16)$$

onde A_1 , A_2 , B_1 e B_2 representam constantes determinadas através da condição de contorno. O número de onda (*wave number*) é representado por k , que junto com q e p são parâmetros obtidos a partir das equações:

$$p^2 = \frac{\omega^2}{c_L^2} - k^2 \quad (17)$$

$$q^2 = \frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2 \quad (18)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c_p} \quad (19)$$

$$\omega = 2\pi f \quad (20)$$

onde ω representa a frequência angular, f a frequência em Hz, λ o comprimento de onda (*wavelength*) e c_p a velocidade de fase da onda. c_L e c_T são as velocidades de propagação dos modos longitudinais e transversais, respectivamente, definidas por:

$$c_L = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} = \sqrt{\frac{2\mu(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}} \quad (21)$$

$$c_T = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (22)$$

onde E é o módulo de elasticidade, μ é o módulo de cisalhamento, ν é o coeficiente de Poisson e ρ é a densidade específica do material da placa.

Os deslocamentos na direção de propagação da onda (u_x) e na direção normal (u_z), assim como os componentes de tensão σ_{xx} , σ_{zz} e σ_{xz} podem ser representados em função

de φ e ψ através das equações (VIKTOROV, 1967):

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (23)$$

$$u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (24)$$

$$\sigma_{xx} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) \quad (25)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) \quad (26)$$

$$\sigma_{xz} = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \quad (27)$$

Para uma placa com superfícies superiores e inferiores livres, aplicando as condições de contorno $\sigma_{xz} = \sigma_{zz} = 0$ em $z = \pm d$, pode-se obter a descrição geral das ondas de Lamb:

$$\frac{\tan(qd)}{\tan(pd)} = \frac{4k^2 qp \mu}{(\lambda k^2 + \lambda p^2 + 2\mu p^2)(k^2 - q^2)} \quad (28)$$

Considerando que a função trigonométrica tangente é definida com seno e cosseno, que possuem propriedades simétricas e antissimétricas, respectivamente, a equação (28) pode ser separada em duas partes com propriedades unicamente simétricas e antissimétricas, implicando que as ondas de Lamb em uma placa consistem de modos simétricos e antissimétricos (SU; YE; LU, 2006):

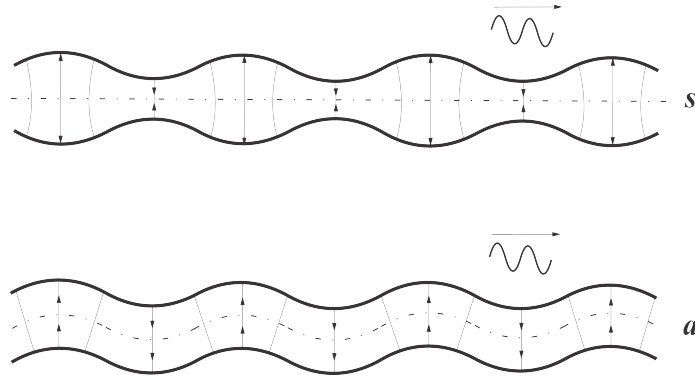
$$\frac{\tan(qd)}{\tan(pd)} = -\frac{4k^2 qp}{(k^2 - q^2)^2}, \quad \text{para modos simétricos} \quad (29)$$

$$\frac{\tan(qd)}{\tan(pd)} = -\frac{(k^2 - q^2)^2}{4k^2 qp}, \quad \text{para modos antissimétricos} \quad (30)$$

O desenho esquemático dos modos simétricos e antissimétricos das ondas de Lamb é mostrado na figura (10), indicando a deformação da placa na direção z durante a propagação de ondas simétricas (s) e antissimétricas (a):

Apesar da aparência simples, as equações (29) e (30) são transcendentais e só podem ser resolvidas numericamente. Elas correlacionam a velocidade de fase (c_p) com a frequên-

Figura 10- Representação dos modos de propagação simétrico e antissimétrico.



Fonte: Autoria própria.

cia (ω), o que implica que as ondas de Lamb, independente do modo, são dispersivas, isto é, a velocidade depende da frequência. Essas equações podem ser satisfeitas por um número infinito de raízes reais correspondentes aos números de onda (*wavenumber*) para uma dada frequência, onde cada solução corresponde à ordem i dos modos de propagação simétrico (S_i) e antissimétricos (A_i), com $i = 0, 1, 2, \dots$ (SU; YE, 2009).

A velocidade de fase (c_p , equação (19)) é definida como a velocidade de propagação da fase de uma frequência particular contida nos sinais gerais da onda. A partir da sua derivada parcial em relação a ω , pode-se encontrar a velocidade de grupo, que é definida como a velocidade com a qual a forma geral das amplitudes da onda (envelope) se propaga pelo espaço, que é a velocidade capturada nos experimentos (velocidade da energia de transporte da onda). Sua expressão é dada por (SU; YE; LU, 2006):

$$c_g = \frac{c_p}{1 - \frac{\omega}{c_p} \frac{\partial c_p}{\partial \omega}} \quad (31)$$

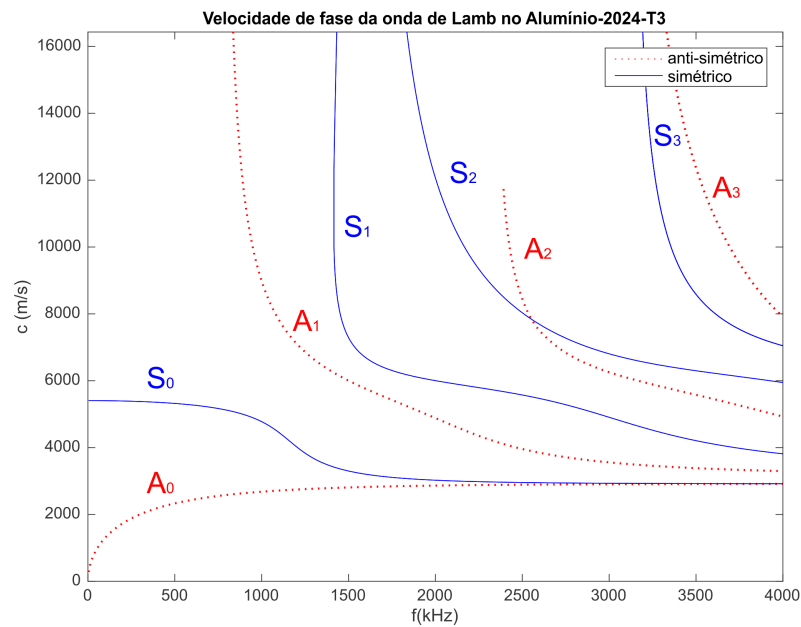
Algumas vezes é conveniente mostrar a velocidade de propagação dos modos como função de ω graficamente, como nas figuras (11 e 12). Tais gráficos são chamados curvas de dispersão.

A análise das curvas de dispersão é importante para se conhecer as frequências de excitação das ondas que serão pouco dispersivas para um dado material, assim como para determinar o número de modos que podem coexistir em uma dada frequência. Além disso, pode-se determinar os limites de frequência para os quais apenas existem os modos S_0 e A_0 . Tais modos podem ser excitados e propagados independentemente do outro.

Para materiais compósitos, entretanto, as velocidades de propagação da onda dependem da direção de propagação ($c = c(\theta)$), devido à anisotropia do material. Este fato faz com seja necessária uma modelagem complexa do material para a solução das curvas de

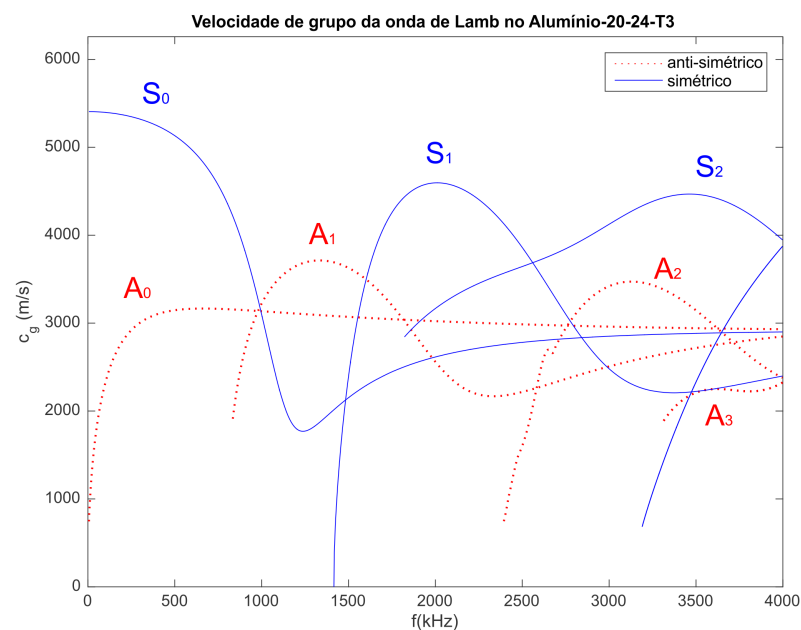
dispersão.

Figura 11- Velocidades de fase das ondas de Lamb para uma placa de alumínio de 2mm de espessura.



Fonte: Razzini (2015), adaptado pela autora.

Figura 12- Velocidades de grupo das ondas de Lamb para uma placa de alumínio de 2mm de espessura.



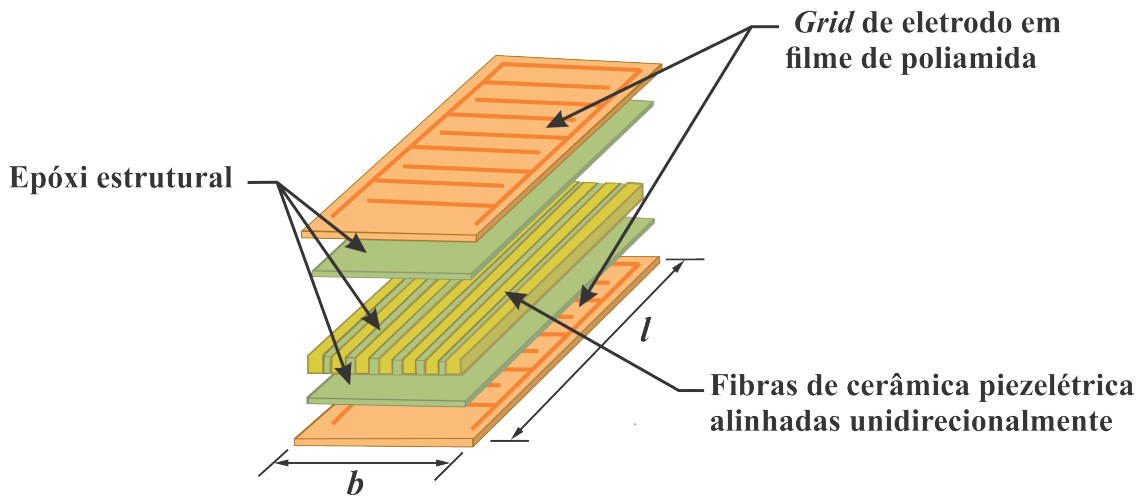
Fonte: Razzini (2015), adaptado pela autora.

3 METODOLOGIA

Para a realização deste trabalho, propõe-se uma abordagem baseada na utilização de transdutores piezelétricos em formato de rosetas para localização de impacto em estruturas laminadas de materiais compósitos, inicialmente apresentada por Matt e Scalea (2007). As rosetas são compostas de transdutores retangulares de MFC, que apresentam uma resposta altamente diretiva para ondas ultrassônicas. Esse efeito é explorado para determinar a localização da onda emitida pelo impacto, independente da velocidade de propagação da onda na estrutura.

Neste estudo, foram utilizados transdutores MFC tipo P2, fabricados pela empresa *Smart Material Corporation*. Os transdutores MFCs são compostos de fibras muito finas de cerâmicas piezelétricas alinhadas com resina epóxi e prensadas entre duas camadas de eletrodos impressos em filmes de poliamida, conforme pode ser observado na figura (13).

Figura 13- Vista expandida do transdutor MFC.



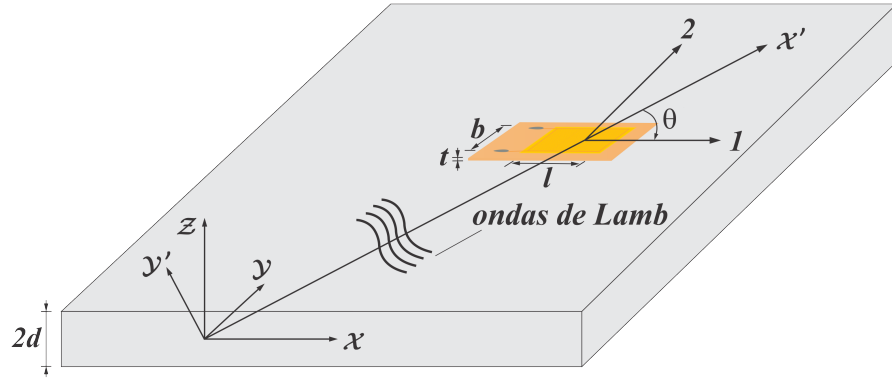
Fonte: Autoria própria.

3.1 SENSIBILIDADE À DEFORMAÇÃO DE TRANSDUTORES MFC

Considere o transdutor MFC em questão, agindo apenas como sensor, com comprimento (l), largura (b) e espessura (t) ao longo das coordenadas 1, 2 e 3, respectivamente (figura 14). O sistema de referência cartesiano (x, y, z) está alinhado com os eixos geométricos do transdutor (1, 2, 3).

Considerando o transdutor MFC transversalmente isotrópico, ele pode ser modelado

Figura 14- Sensor MFC retangular sofrendo excitação de ondas de Lamb em incidência oblíqua.



Fonte: Autoria própria.

como uma lâmina isotrópica em estado plano de tensões ($\sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0$). Dado que o MFC é um dispositivo piezelétrico, sua equação constitutiva para o efeito piezelétrico direto é dado pela equação (12), do capítulo 2. Para o sensor polarizado ao longo da direção da espessura (eixo 3), esta equação pode ser reescrita como (AZZOUZ et al., 2001):

$$D_3 = [d_{31} \ d_{32} \ 0] \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} - E_{F3} \begin{bmatrix} d_{31} \\ d_{32} \\ 0 \end{bmatrix} \right) + e_{33}^\sigma E_{F3} \quad (32)$$

onde D_3 , e_{33}^σ e E_{F3} são a densidade de carga, permissividade dielétrica e o campo elétrico, respectivamente, ao longo da direção de polarização. Os termos d_{31} e d_{32} são constantes piezelétricas, ε_{11} e ε_{22} são as deformações normais, γ_{12} é a deformação cisalhante e $[Q]$ é a matriz de rigidez reduzida. Expandindo a equação (32),

$$D_3 = [(d_{31}Q_{11} + d_{32}Q_{12})(\varepsilon_{11} - E_{F3}d_{31}) + (d_{31}Q_{12} + d_{32}Q_{22})(\varepsilon_{22} - E_{F3}d_{32})] + e_{33}^\sigma E_{F3} \quad (33)$$

e fazendo as devidas simplificações, a densidade de carga se torna

$$D_3 = (d_{31}Q_{11} + d_{32}Q_{12})\varepsilon_{11} + (d_{31}Q_{12} + d_{32}Q_{22})\varepsilon_{22} - (d_{31}^2Q_{11} + 2d_{31}d_{32}Q_{12} + d_{32}^2Q_{22} + e_{33}^\sigma)E_{F3} \quad (34)$$

onde a matriz de rigidez reduzida de um transdutor MFC é dada por (MATT; SCALEA,

2007):

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{21}\nu_{12}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{21}\nu_{12}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{21}\nu_{12}} & \frac{E_2}{1-\nu_{21}\nu_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (35)$$

onde E_1 e E_2 são os módulos de elasticidade do transdutor ao longo de os eixos 1 e 2, ν_{12} e ν_{21} são os respectivos coeficientes de Poisson e G_{12} é o módulo de cisalhamento.

Considerando as condições de contorno elétricas do sensor MFC como sendo um circuito aberto, a carga total na área do eletrodo é zero, logo $\int \int D_3 dx dy dz = 0$ (TZOU, 2012). Neste caso, considerando um domínio retangular ($f(x, y) = F(x) * G(y)$), a voltagem pode ser calculada como

$$V = -\frac{\int \int \int E_{F3} dx dy dz}{lb} \quad (36)$$

De (34), o campo elétrico ao longo da direção de polarização,

$$E_{F3} = \frac{(d_{31}Q_{11} + d_{32}Q_{12})\varepsilon_{11} + (d_{31}Q_{12} + d_{32}Q_{22})\varepsilon_{22} - D_3}{d_{31}^2Q_{11} + 2d_{31}d_{32}Q_{12} + d_{32}^2Q_{22} - e_{33}^\sigma} \quad (37)$$

e sabendo que E_{F3} é função apenas de x e y ($\int dz = t$), obtém-se a seguinte equação para a voltagem

$$V = \frac{t \int \int [(d_{31}Q_{11} + d_{32}Q_{12})\varepsilon_{11} + (d_{31}Q_{12} + d_{32}Q_{22})\varepsilon_{22}] dx dy}{lb[e_{33}^\sigma - (d_{31}^2Q_{11} + 2d_{31}d_{32}Q_{21} + d_{32}^2Q_{22})]} \quad (38)$$

na qual se assume que todas as variáveis são uniformes através da espessura (sensor fino).

Substituindo a matriz de rigidez reduzida (equação 35) na equação (38), tem-se a resposta da voltagem do sensor MFC como uma função das duas deformações no plano, ε_{11} e ε_{22} (MATT; SCALEA, 2007):

$$V = \frac{t \int \int [(d_{31}E_1 + d_{32}\nu_{12}E_2)\varepsilon_{11} + (d_{31}\nu_{12}E_2 + d_{32}E_2)\varepsilon_{22}] dx dy}{lb[(1 - \nu_{21}\nu_{12})e_{33}^\sigma - (d_{31}^2E_1 + 2d_{31}d_{32}\nu_{12}E_2 + d_{32}^2E_2)]} \quad (39)$$

A resposta do sensor a ondas de Lamb ultrassônicas será examinada na sessão a seguir, considerando o campo de deformação apropriado na equação (39). Considera-se que a cola age como uma camada adesiva muito fina e rígida, portanto o sensor sofre a mesma deformação que a estrutura (CRAWLEY; LUIS, 1987).

3.2 RESPOSTA DOS SENSORES MFC A ONDAS DE LAMB ANISSIMÉTRICAS

Considere um sensor MFC retangular colado na superfície superior de uma placa isotrópica de espessura $2d$ e sujeita a um campo de deformação harmônica associado com ondas de Lamb antissimétricas propagando no plano (x', z) através da direção x' (Figura 14).

No caso de um impacto, a maior parte da energia é transportada pelo modo de propagação da onda antissimétrico e, conseqüentemente, a amplitude do modo S_0 é consideravelmente menor que a do modo A_0 (SCHOENECKER et al., 2005). A direção de propagação da onda x' forma um ângulo θ com a direção do comprimento do sensor (eixo 1). A origem da coordenada da espessura, $z = 0$, localiza-se no meio-plano da placa. Através da equação (23), o deslocamento da onda de Lamb no plano pode ser expresso por uma das formulações clássicas (VIKTOROV, 1967):

$$u_{x'} = Ak \left(\frac{\sinh(rz)}{\cosh(rd)} - \frac{(2rs)}{k^2 + s^2} \cdot \frac{\sinh(sz)}{\cosh(sd)} \right) e^{i(kx' - \omega t - \frac{\pi}{2})} \quad (40)$$

onde A é uma constante arbitrária que depende da magnitude da onda e os parâmetros r e s , que são os parâmetros p e q (equações 17 e 18) reescritos de outra maneira, são definidos como

$$r = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_L^2}} \quad (41)$$

$$s = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_T^2}} \quad (42)$$

onde ω é a frequência, k é o número de onda (*wavenumber*), e c_L e c_T são as velocidades de propagação longitudinais e transversais na placa, respectivamente.

Para ondas planas ($\varepsilon_{y'y'} = 0$), a única deformação relevante ao sensor colado na superfície, onde $z = d$, é o componente no plano na direção de propagação da onda, dada por (VIKTOROV, 1967):

$$\varepsilon_{x'x'}|_{z=d} = \frac{\partial u_{x'}}{\partial x'}|_{z=d} = ik^2 A \left(\tanh(rd) - \frac{(2rs)}{k^2 + s^2} \cdot \tanh(sd) \right) e^{i(kx' - \omega t - \frac{\pi}{2})} \quad (43)$$

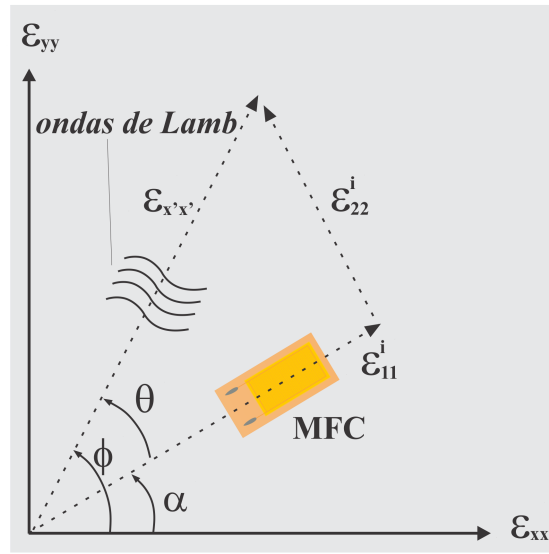
A deformação no plano $\varepsilon_{x'x'}$ pode ser transformada nos componentes de deformação na direção do comprimento e da largura do sensor seguindo as relações de transformação

da deformação (HIBBELER, 2010), conforme a figura (15):

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{x'x'} \cdot \cos^2 \theta \quad (44)$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{x'x'} \cdot \sin^2 \theta \quad (45)$$

Figura 15- Sistema de referência para o cálculo de deformações cartesianas da onda pela resposta do sensor.



Fonte: Autoria própria.

A voltagem da equação (39) pode ser reescrita como

$$V = \frac{H}{lb} \iint \varepsilon_{x'x'} dx dy \quad (46)$$

onde H é a seguinte constante independente da frequência (MATT; SCALEA, 2007):

$$H = \frac{t[(d_{31}E_1 + d_{32}\nu_{12}E_2)\cos^2\theta + (d_{31}\nu_{12}E_2 + d_{32}E_2)\sin^2\theta]}{[(1 - \nu_{21}\nu_{12})e_{33}^\sigma - (d_{31}^2E_1 + 2d_{31}d_{32}\nu_{12}E_2 + d_{32}^2E_2)]} \quad (47)$$

logo, H depende das propriedades eletromecânicas e da espessura do sensor, assim como da direção de propagação da onda relativa aos eixos geométricos do sensor.

Substituindo a equação (43) na equação (46):

$$V = \frac{H}{lb} \iint ik^2 A \left[\tanh(rd) - \frac{2rs}{k^2 + s^2} \tanh(sd) \right] e^{i(kx' - \omega t - \pi/2)} dx dy \quad (48)$$

Fazendo a transformação de variável $x' = x \cos \theta + y \sin \theta$:

$$V = \frac{H}{lb} \iint ik^2 A \left[\tanh(rd) - \frac{2rs}{k^2 + s^2} \tanh(sd) \right] e^{i[k(x \cos \theta + y \sin \theta) - \omega t - \pi/2]} dx dy \quad (49)$$

Utilizando as fórmulas de Euler:

$$\begin{cases} e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha \\ e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i \sin \alpha \end{cases} \quad (50)$$

e após algum trabalho algébrico, obtém-se a expressão da voltagem de resposta a ondas de Lamb antissimétricas:

$$V = i\bar{V}e^{-i(\omega t + \frac{\pi}{2})} \quad (51)$$

onde a amplitude é

$$\bar{V} = \frac{4HA}{lb \sin \theta \cos \theta} \left(\tanh(rd) - \frac{2rs}{k^2 + s^2} \cdot \tanh(sd) \right) \sin\left(\frac{kb \sin \theta}{2}\right) \sin\left(\frac{kl \cos \theta}{2}\right) \quad (52)$$

3.3 DIRETIVIDADE DA RESPOSTA DO MFC

O espectro de amplitude de resposta do sensor, $\bar{V}$, pode ser expresso em termos de fator de sensibilidade, S , que depende da frequência, e do espectro de amplitude da deformação superficial, $\bar{\varepsilon}_{x'x'}$, como:

$$\bar{V} = S \bar{\varepsilon}_{x'x'} \quad (53)$$

Pelas equações (43) e (52), o fator de sensibilidade para ondas antissimétricas é:

$$S = \frac{4H}{lbk^2 \sin \theta \cos \theta} \sin\left(\frac{kb \sin \theta}{2}\right) \sin\left(\frac{kl \cos \theta}{2}\right) \quad (54)$$

Pode ser demonstrado que, para $\lambda \geq l$ (sensor menor que o comprimento de onda), a sensibilidade pode ser decomposta em um fator de sensibilidade longitudinal, S_1 , e um fator de sensibilidade transversal, S_2 (MATT; SCALEA, 2007):

$$S \approx S_1 \cos^2 \theta + S_2 \sin^2 \theta \quad (55)$$

onde θ é a direção de propagação em relação à direção do comprimento do sensor (figura 14). Os fatores de sensibilidade longitudinal e transversal são definidos por ondas propagando-se ao longo da direção do comprimento e da largura do sensor, respectivamente.

Portanto:

$$S_1 = S|_{\theta=0^\circ} = \frac{2t(d_{31}E_1 + d_{32}\nu_{12}E_2)\sin\left(\frac{kl}{2}\right)}{lk[(1 - \nu_{21}\nu_{12})e_{33}^\sigma - (d_{31}^2E_1 + 2d_{31}d_{32}\nu_{12}E_2 + d_{32}^2E_2)]} \quad (56)$$

$$S_2 = S|_{\theta=90^\circ} = \frac{2t(d_{31}\nu_{12}E_2 + d_{32}E_2)\sin\left(\frac{kb}{2}\right)}{bk[(1 - \nu_{21}\nu_{12})e_{33}^\sigma - (d_{31}^2E_1 + 2d_{31}d_{32}\nu_{12}E_2 + d_{32}^2E_2)]} \quad (57)$$

Substituindo a equação (55) em (53) e recordando as equações de transformação da deformação, a resposta do sensor se torna:

$$\bar{V} \approx S_1\bar{\varepsilon}_{11} + S_2\bar{\varepsilon}_{22} \quad (58)$$

onde os componentes da deformação da onda ao longo das direções longitudinal e transversal do sensor são explicitamente indicadas.

A equação (58) torna a resposta do MFC equivalente à de extensômetros convencionais. Esta equação também enfatiza que a resposta é altamente dependente da direção de propagação da onda.

3.4 ROSETAS DE MFC PARA LOCALIZAÇÃO DA FONTE DE ONDAS

Considera-se três sensores MFC retangulares A, B e C, dispostos em uma configuração arbitrária de roseta e submetidos às ondas antissimétricas como mostradas na figura (16). Considerando as ondas de tal modo que $\lambda \geq l$ e usando a equação (58), as respostas dos sensores podem ser escritas como (MATT; SCALEA, 2007):

$$\begin{aligned} \bar{V}^A &= S_1\bar{\varepsilon}_{11}^A + S_2\bar{\varepsilon}_{22}^A \\ \bar{V}^B &= S_1\bar{\varepsilon}_{11}^B + S_2\bar{\varepsilon}_{22}^B \\ \bar{V}^C &= S_1\bar{\varepsilon}_{11}^C + S_2\bar{\varepsilon}_{22}^C \end{aligned} \quad (59)$$

onde ε_{11}^i e ε_{22}^i ($i = A, B, C$) indicam, respectivamente, a componente da deformação na direção longitudinal e na direção transversal do i -ésimo sensor, sendo todos os sensores assumidos como iguais em propriedades eletromecânicas e geométricas.

Dividindo a equação (59) pelo fator de sensibilidade longitudinal tem-se:

$$\frac{\bar{V}^i}{S_1} = \bar{\varepsilon}_{11}^i + K_T\bar{\varepsilon}_{22}^i \quad \text{for } i = A, B, C. \quad (60)$$

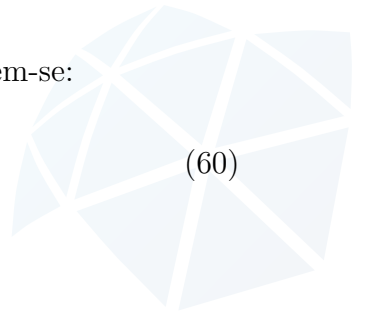
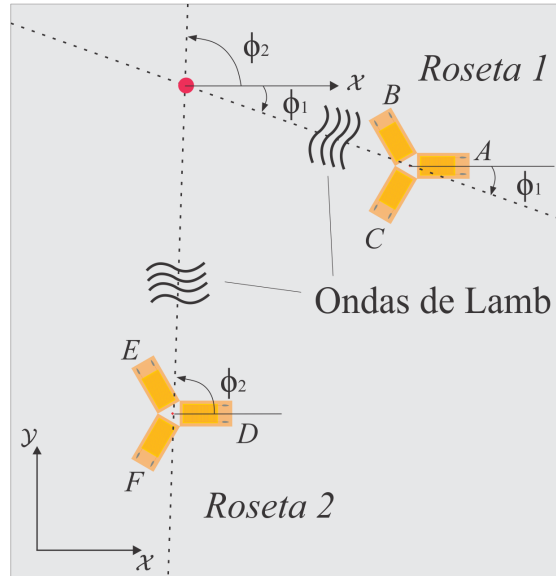


Figura 16- Conceito de roseta piezelétrica para localização de impactos em um plano.



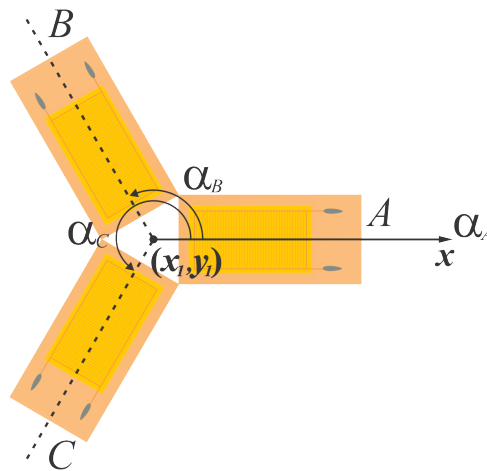
Fonte: Autoria própria.

onde K_T é a razão de sensibilidade transversal definida como:

$$K_T = \frac{S_2}{S_1} = \frac{l(d_{31}\nu_{12}E_2 + d_{32}E_2)\sin\left(\frac{kb}{2}\right)}{b(d_{31}E_1 + d_{32}\nu_{12}E_2)\sin\left(\frac{kl}{2}\right)} \quad (61)$$

Assume-se que a direção do comprimento do i -ésimo sensor é orientado segundo um ângulo α_i a partir de coordenadas globais do eixo x (Figura 17).

Figura 17- Direção de orientação dos sensores e coordenada Cartesiana da roseta 1.



Fonte: Autoria própria.

Analogamente a extensômetros de resistência elétrica, relações de transformação da deformação podem ser usadas para determinar as componentes cartesianas da deformação

a partir da resposta dos três sensores (MATT; SCALEA, 2007):

$$\begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{xx} \\ \bar{\varepsilon}_{yy} \\ \bar{\gamma}_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\bar{V}^A}{S_1} \\ \frac{\bar{V}^B}{S_1} \\ \frac{\bar{V}^C}{S_1} \end{bmatrix} \quad (62)$$

onde a matriz de transformação é dada por

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_A + K_T \sin^2 \alpha_A & \sin^2 \alpha_A + K_T \cos^2 \alpha_A & (1 - K_T) \sin^2 \alpha_A \cos^2 \alpha_A \\ \cos^2 \alpha_B + K_T \sin^2 \alpha_B & \sin^2 \alpha_B + K_T \cos^2 \alpha_B & (1 - K_T) \sin^2 \alpha_B \cos^2 \alpha_B \\ \cos^2 \alpha_C + K_T \sin^2 \alpha_C & \sin^2 \alpha_C + K_T \cos^2 \alpha_C & (1 - K_T) \sin^2 \alpha_C \cos^2 \alpha_C \end{bmatrix} \quad (63)$$

O ângulo de deformação principal da onda, ϕ , medido através da coordenada global x figura (16) pode ser obtido através das deformações principais (MATT; SCALEA, 2007):

$$\tan 2\phi = \frac{\bar{\gamma}_{xy}}{\bar{\varepsilon}_{xx} - \bar{\varepsilon}_{yy}} = \frac{num}{den} \quad (64)$$

A incerteza de $\pm 90^\circ$ afetando o ângulo ϕ devido à função *arctan* pode ser resolvida com base nos sinais do numerador (*num*) e do denominador (*den*), de acordo com:

$$\begin{aligned} & \text{if } num > 0, 0^\circ < \phi < 90^\circ; \\ & \text{if } num < 0, -90^\circ < \phi < 0^\circ; \\ & \text{if } num = 0 \text{ e } den > 0, \phi = 0^\circ; \\ & \text{if } num = 0 \text{ e } den < 0, \phi = \pm 90^\circ; \\ & \text{if } num = 0 \text{ e } den = 0, \phi \text{ é indeterminado.} \end{aligned}$$

A estimativa da localização da fonte de ondas (impactos ou emissões acústicas) no plano pode ser determinada pela intersecção das direções principais determinadas pelas duas rosetas (Figura 16). As equações das linhas retas que conectam o local do impacto ao centroide de cada roseta podem ser escritas em função dos ângulos de deformação principal, ϕ_1 e ϕ_2 , de acordo com:

$$\begin{aligned} y_{imp} &= (x_{imp} - x_1) \tan \phi_1 + y_1, \quad \text{para a roseta 1} \\ y_{imp} &= (x_{imp} - x_2) \tan \phi_2 + y_2, \quad \text{para a roseta 2} \end{aligned} \quad (65)$$

onde (x_{imp}, y_{imp}) representam as coordenadas do local estimado do impacto no sistema cartesiano (x, y) , e $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ representam as coordenadas dos centroides de cada roseta. Da equação (65), tem-se:

$$(x_{imp} - x_1) \tan \phi_1 + y_1 = (x_{imp} - x_2) \tan \phi_2 + y_2 \quad (66)$$

Rearranjando os termos da equação (66), obtém-se um sistema linear de equações que pode finalmente ser resolvido para as coordenadas do local onde ocorreu o impacto:

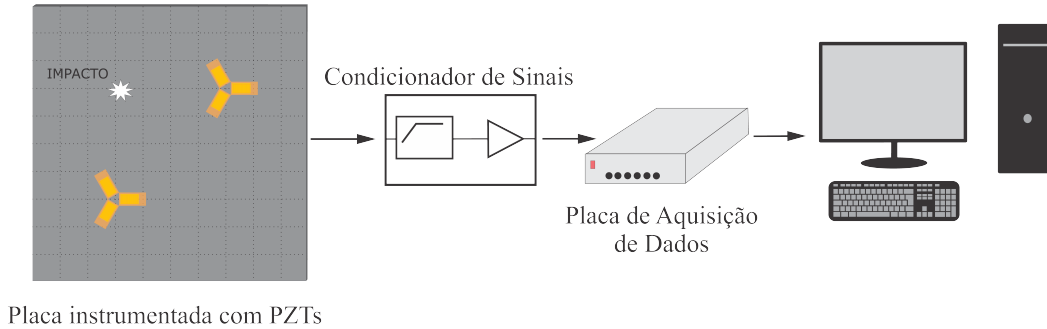
$$x_{imp} = \frac{y_2 - y_1 + x_1 \tan \phi_1 - x_2 \tan \phi_2}{\tan \phi_1 - \tan \phi_2} \quad (67)$$

$$y_{imp} = (x_{imp} - x_1) \tan \phi_1 + y_1 \quad (68)$$

3.5 METODOLOGIA EXPERIMENTAL

Para realização do experimento, foram utilizadas as instalações e materiais disponíveis no Laboratório de Sistemas Inteligentes do grupo de pesquisa GMSINT. O arranjo experimental foi realizado de acordo com o esquema representativo da Figura 18 e será detalhado a seguir.

Figura 18- Ilustração dos materiais e equipamentos utilizados no experimento.

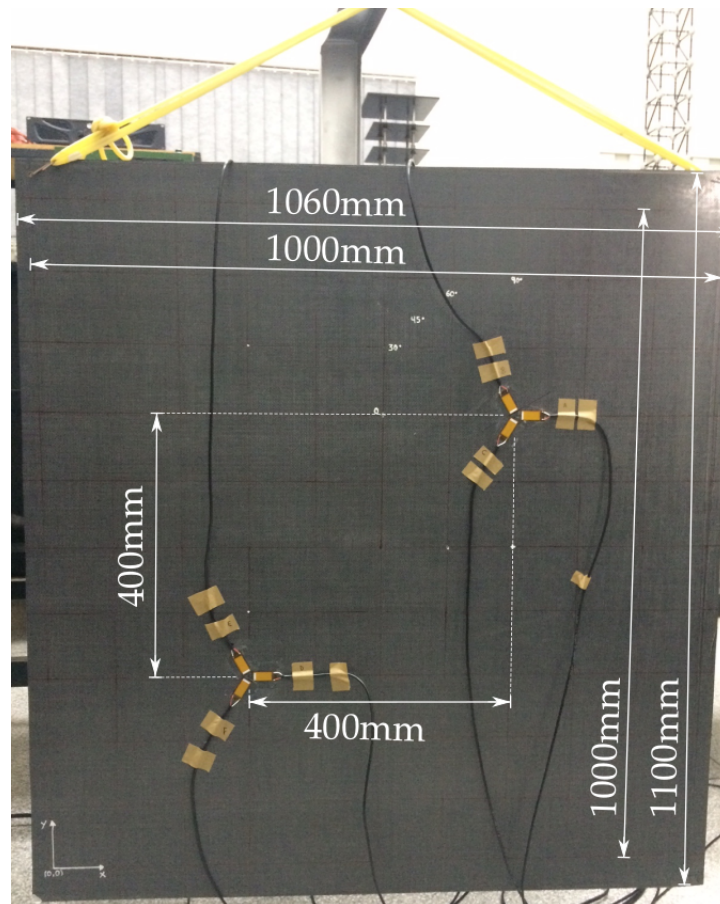


Fonte: Autoria própria.

O corpo de prova foi uma placa laminada de fibra de carbono/resina epóxi de trama simples (*plain weave*) com 13 camadas e sequência de empilhamento de $[0/90]$ graus, com cura realizada a $120^\circ C$. Suas dimensões são $(1,06; 1,10; 0,002)m$. Para melhor análise, a área efetiva considerada foi de $(1 \times 1)m$, com origem do sistema cartesiano (x, y) no canto inferior esquerdo da placa, conforme Figura (19). O centroide das rosetas 1 está localizado na posição $(0,7; 0,7)m$, enquanto o centroide da roseta 2 está localizado na posição $(0,3; 0,3)m$, conforme mostra a Figura (19).

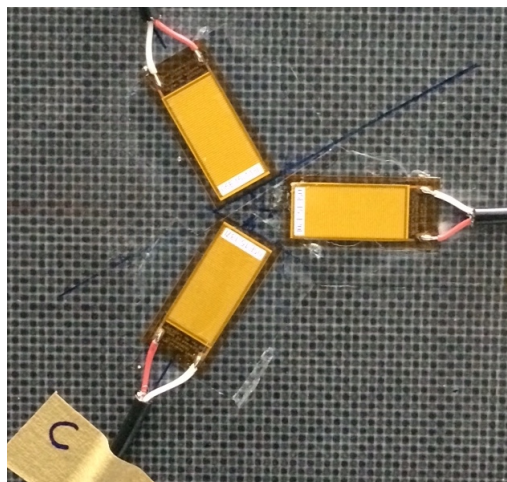
Os transdutores utilizados são MFCs M-2814-P2, fabricados pela empresa *Smart Material Corporation*, de dimensões gerais $(l \times b) = (37 \times 18)mm$ e dimensões ativas $(28 \times 14)mm$ (área ativa do transdutor). As constantes eletromecânicas importantes para o equacionamento são fornecidas pelo fabricante e são mostrados na tabela (1). Eles foram colados em formato de roseta em delta, formando ângulos de 120° entre eles, conforme a figura (20).

Figura 19- Corpo de prova instrumentado com transdutores MFC em formato de rosetas.



Fonte: Autoria própria.

Figura 20- Roseta de transdutores MFC em formato delta.



Fonte: Autoria própria.

Para a colagem dos sensores, foi utilizado o adesivo cianoacrilato LOCTITE 401 da marca Henkel. Os cabos, recomendados pelo fabricante, são do tipo Blindado KMP 2x24 AWG(T), para minimizar ruídos e interferências. De modo a emular condições de contorno aproximadamente livres, evitando, sobretudo, o apoio sobre pontos de contato rígidos, a

Tabela 1- Constantes eletromecânicas dos transdutores MFC.

$d_{31}(pC/N)$	$d_{32}(pC/N)$	$E_1(GPa)$	$E_2(GPa)$	ν_{12}	ν_{21}	$G_{12}(GPa)$	$e_{33}^{\sigma}(nC/m)$
-170	-170	30,336	15,857	0,31	0,16	5,515	16,82

Fonte: Autoria própria.

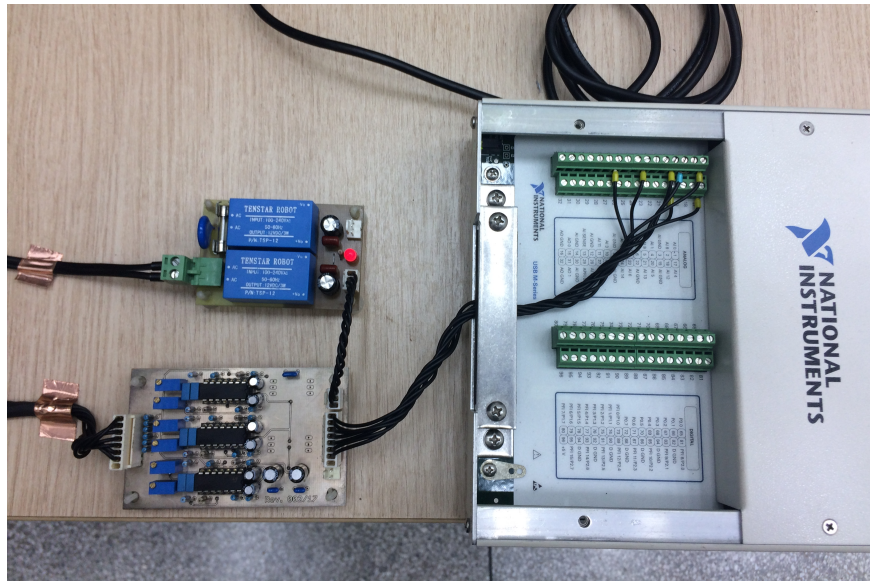
placa foi pendurada através de elásticos em um suporte fixado em uma mesa inercial. Deste modo, a geração de ondas de impacto originadas a partir de contato indireto com o ambiente foi evitada, garantindo, assim, que apenas ondas de impacto diretas sejam contabilizadas no método. A figura (19) mostra a placa de fibra de carbono/resina epóxi, com as duas rosetas coladas e os cabos soldados.

Os sensores foram conectados a um condicionador de sinais, desenvolvido dentro da própria universidade pelo doutorando em Engenharia Elétrica Rodrigo Nunes Oliveira (Laboratório de Qualidade da Energia Elétrica), afim de converter a carga elétrica gerada pelo PZT em um sinal de tensão com uma baixa impedância de saída em relação à impedância de entrada da placa de aquisição, e níveis de tensão relativamente elevados em relação ao fundo de escala da placa de aquisição. O condicionador possui seis canais, um filtro passa alta na entrada, com frequência de corte de aproximadamente 340Hz e um estágio amplificador baseado em cargas. A frequência de corte foi definida para eliminar a interferência de 60Hz proveniente da rede elétrica e seus harmônicos predominantes (3° e 5°). Cada canal possui um ganho ajustável independente, sendo que os seis canais foram calibrados para ter o mesmo valor de ganho.

Os canais da saída do condicionador foram ligados a uma placa de aquisição NI USB-6251 da empresa National Instruments (Figura 21), que é um dispositivo que se conecta a computadores via USB para obtenção de medidas. A placa em questão possui 16 entradas de 16 bits e taxa de aquisição de até 1,25MS/s. Foram utilizadas 6 entradas analógicas para as rosetas piezelétricas, conectadas a partir do condicionador de sinais. Para utilizar a placa de aquisição, é necessário construir um Instrumento Virtual no software LabVIEW, também da empresa National Instruments. Nesse software foi realizada a configuração dos canais de aquisição e de parâmetros importantes, como frequência de amostragem e tempo de aquisição de sinais, além do armazenamento dos dados coletados.

Afim de manter um objeto padrão para a excitação da estrutura e simular impactos gerados por ferramentas de manutenção ou por outro evento inesperado, os impactos foram produzidos com um pequeno martelo plástico com ponta metálica (Figura (22)), que normalmente é utilizado para gerar impactos pontuais e quebrar vidros em caso de incêndios. Entretanto, os impactos poderiam ser originados por qualquer outro objeto sem afetar a eficiência do método em questão. O arranjo experimental completo pode, enfim, ser observado na Figura (23).

Figura 21- Condicionador de sinais conectado à placa de aquisição de dados NI USB-6251



Fonte: Autoria própria.

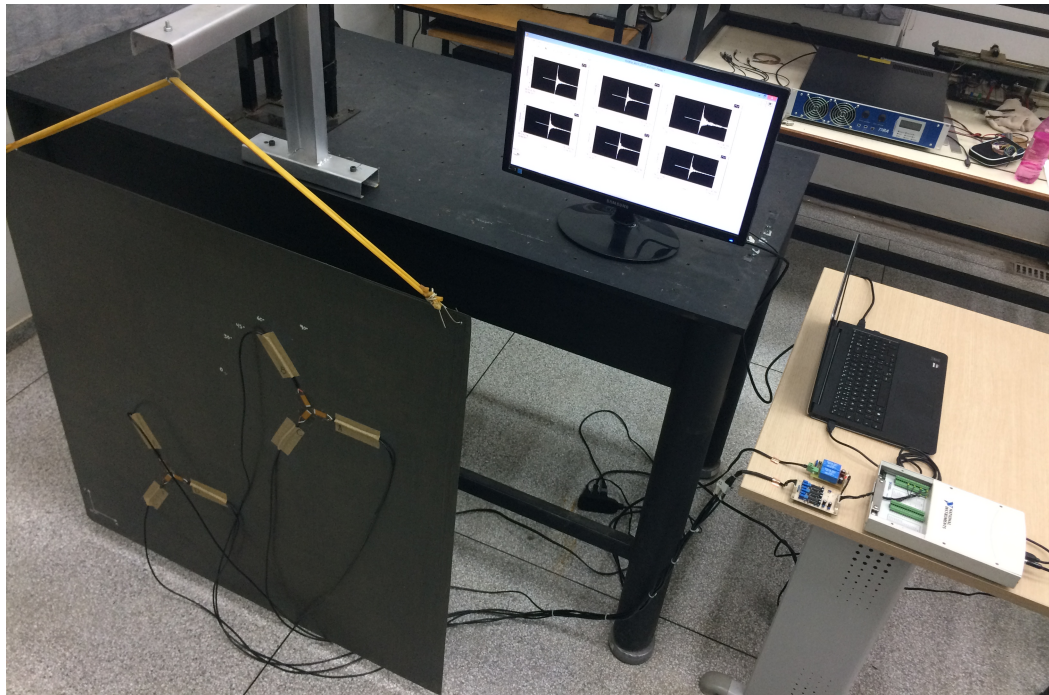
Figura 22- Martelo utilizado para gerar impactos na estrutura.



Fonte: Autoria própria.

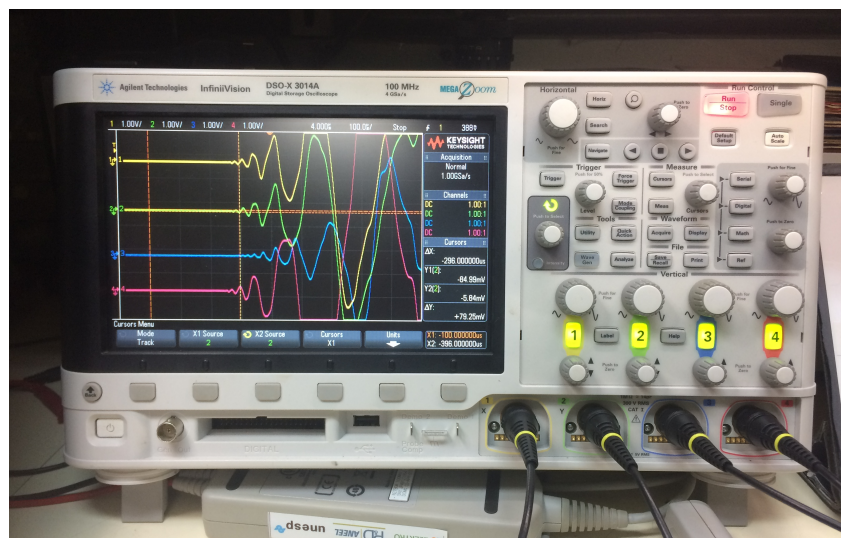
Através do sistema de aquisição, os dados foram coletados simultaneamente em todos os canais para cada impacto realizado, com uma frequência de amostragem (f_s) de 100kHz. Esse parâmetro foi definido após testes utilizando um osciloscópio digital modelo DSO-X 3014A da marca Agilent Technologies, 100MHz, 1GSa/s. Foram selecionados 4 dos 6 sensores disponíveis para coletar dados dos impactos, conforme a figura (24). Os sinais foram coletados para diversos impactos e através da análise do domínio da frequência dos mesmos, realizadas com o módulo de matemática do próprio osciloscópio, notou-se que nenhuma excitação excedia 20kHz. Assim, o valor de 100kHz mostrou-se apropriado para a aquisição dos sinais utilizando o arranjo experimental já mencionado, pois nenhuma informação seria perdida, satisfazendo o teorema de amostragem de Nyquist-Shannon, e a taxa de aquisição máxima da placa não seria excedida.

Figura 23- Configuração do experimento realizado no Laboratório de Estruturas Inteligentes - GMSINT.



Fonte: Autoria própria.

Figura 24- Osciloscópio digital modelo DSO-X 3014A da marca Agilent Technologies.



Fonte: Autoria própria.

Para a realização dos ensaios não foi utilizado *trigger* no software LabVIEW. O programa era iniciado e pausado manualmente, portanto os tempos de aquisição são diferentes para cada impacto. Os dados coletados nos ensaios foram salvos em um computador e processados utilizando uma rotina no software MATLAB®, desenvolvida pela autora utilizando o equacionamento detalhado na metodologia.

Com os resultados em mãos, a precisão da localização do impacto através da metodo-

logia proposta pode ser verificada através da seguinte função de erro:

$$Err = \sqrt{(x_{real} - x_{imp})^2 + (y_{real} - y_{imp})^2} \quad (69)$$

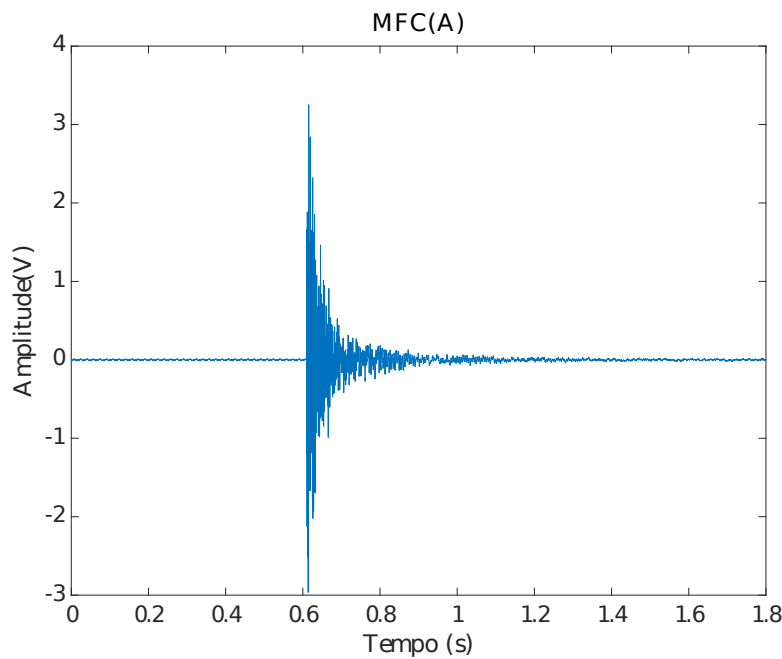
onde x_{imp} e y_{imp} são os locais de impacto detectados através da metodologia proposta e x_{real} e y_{real} são os locais exatos onde ocorreram os impactos.



4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os experimentos foram realizados de acordo com a metodologia apresentada no Capítulo 3. O sinal de resposta a um impacto realizado na coordenada Cartesiana ($x = 300mm; y = 600mm$) medido pelo sensor MFC A é apresentado na figura (25).

Figura 25- Sinal obtido pelo sensor A em resposta a um impacto.



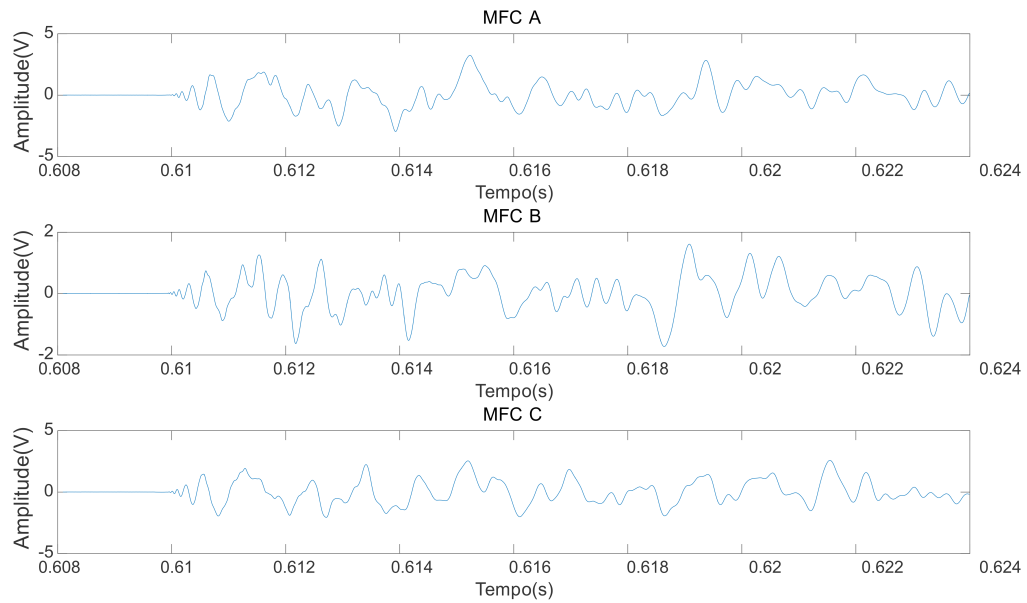
Fonte: Autoria própria.

Os sinais janelados com 1600 pontos obtidos pelos sensores A, B e C (roseta 1) podem ser observados na figura (26) e os sinais obtidos pelos sensores D, E e F (roseta 2) são apresentados na figura (27).

O fluxograma do algoritmo desenvolvido para estimativa do local do impacto é mostrado na figura (27). Os sinais de resposta ao impacto medidos por cada sensor foram inseridos na rotina, então o valor $\bar{V}_i$ (conforme equação 59) para cada sinal foi obtido aplicando a norma infinita para cada um. Para obtenção de tal valor, foram realizados testes com o valor RMS, energia total do sinal e valor de pico a pico, entretanto, a norma infinita mostrou-se mais apropriada para o método.

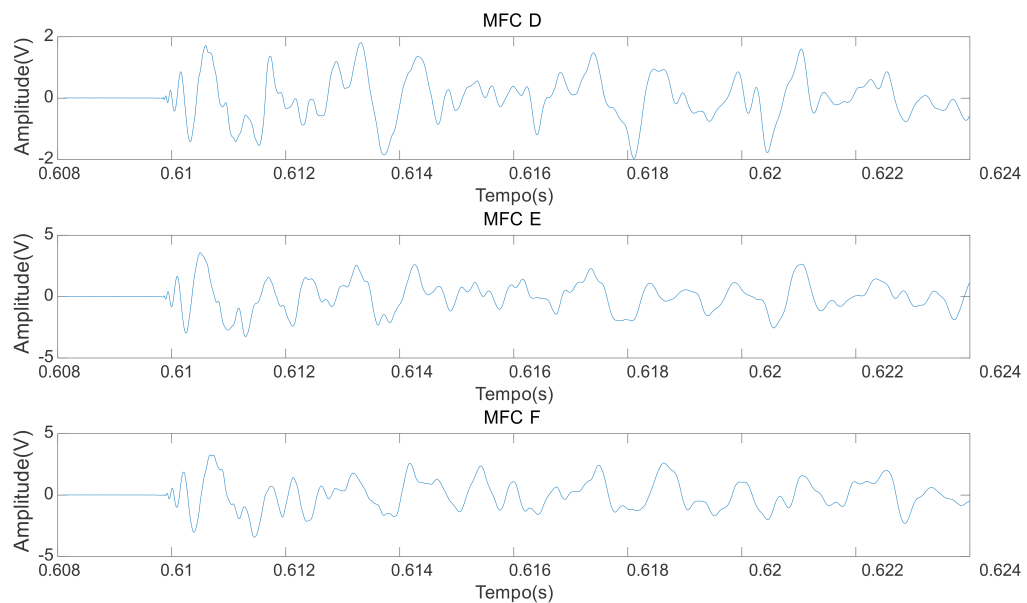
As propriedades dos sensores apresentadas na tabela (1) e os ângulos α_i foram utilizados para encontrar o fator de sensibilidade longitudinal, S_1 , conforme a equação (56) e a matriz de transformação $[T]$, equação (63). então esses valores foram utilizados para encontrar o ângulo principal de deformação para cada roseta (ϕ_1 e ϕ_2 , equação 64), for-

Figura 26- Sinais obtidos pela roseta 1 em resposta a um impacto.



Fonte: Autoria própria.

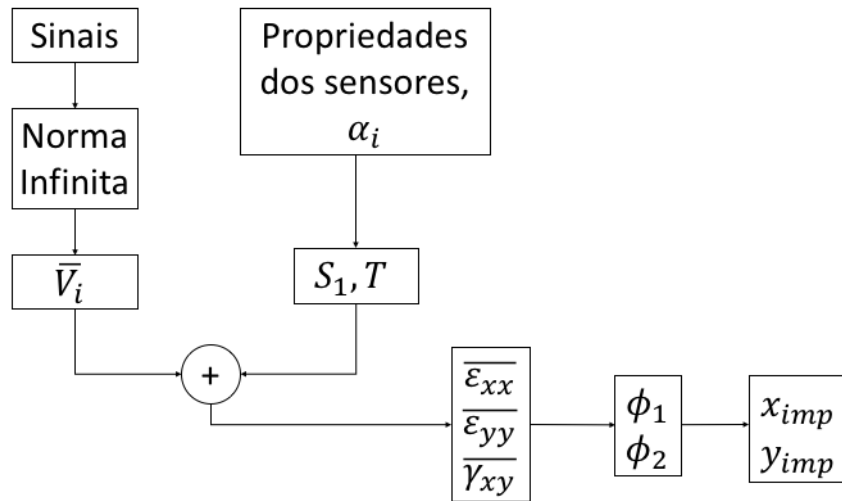
Figura 27- Sinal obtido pela roseta 2 em resposta a um impacto.



Fonte: Autoria própria.

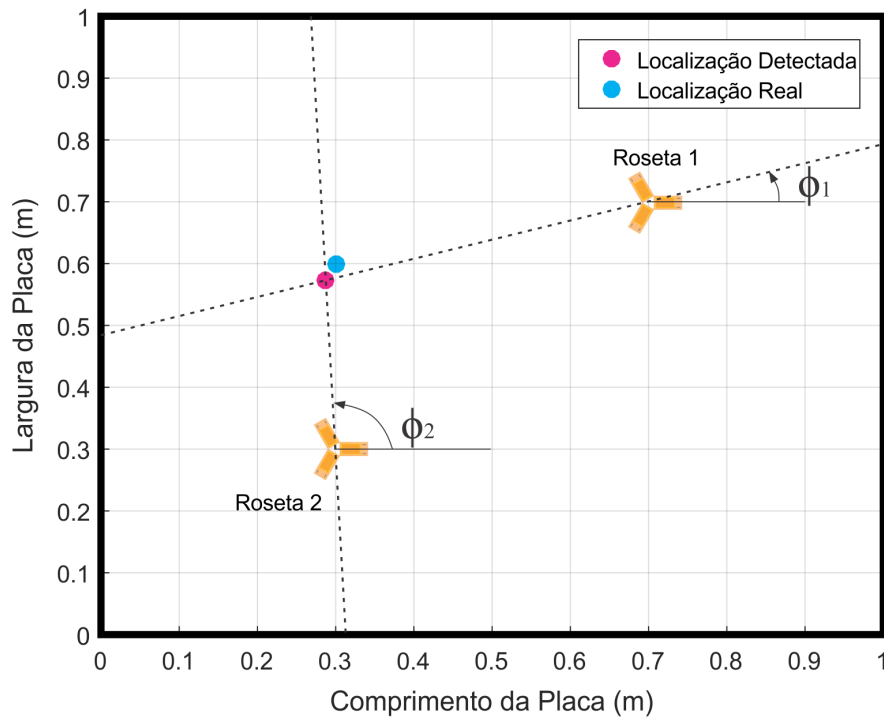
necendo assim a localização do impacto, conforme a figura (29), gerada pela rotina em MATLAB® e tratada no software livre Inkscape. Tal software é utilizado para edição de figuras, possibilitando o desenho das rosetas e dos ângulos para uma melhor representação do método.

Figura 28- Diagrama de blocos representando a rotina desenvolvida para localização dos impactos.



Fonte: Autoria própria.

Figura 29- Localização do impacto através dos ângulos ϕ_1 e ϕ_2 encontrados.

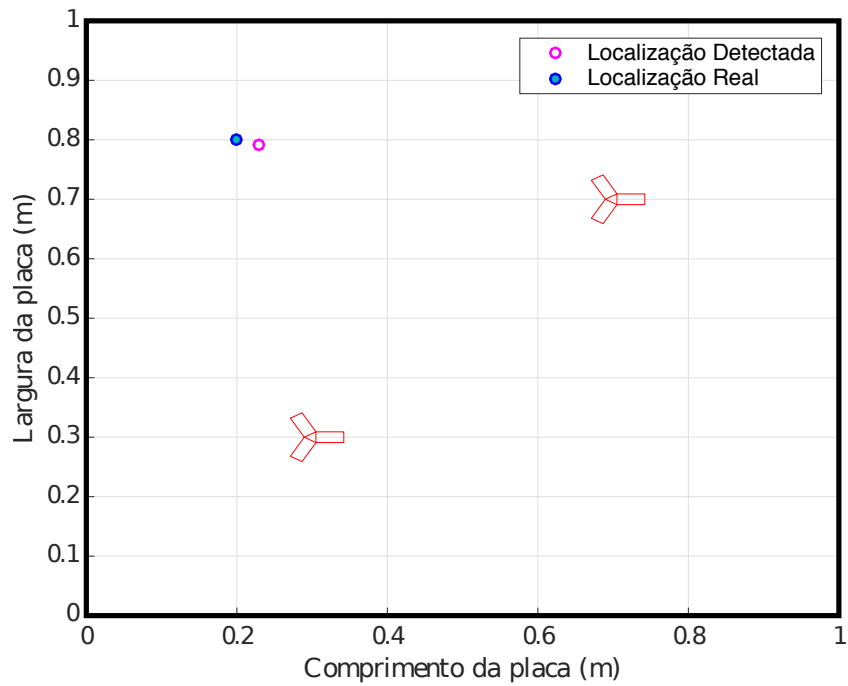


Fonte: Autoria própria.

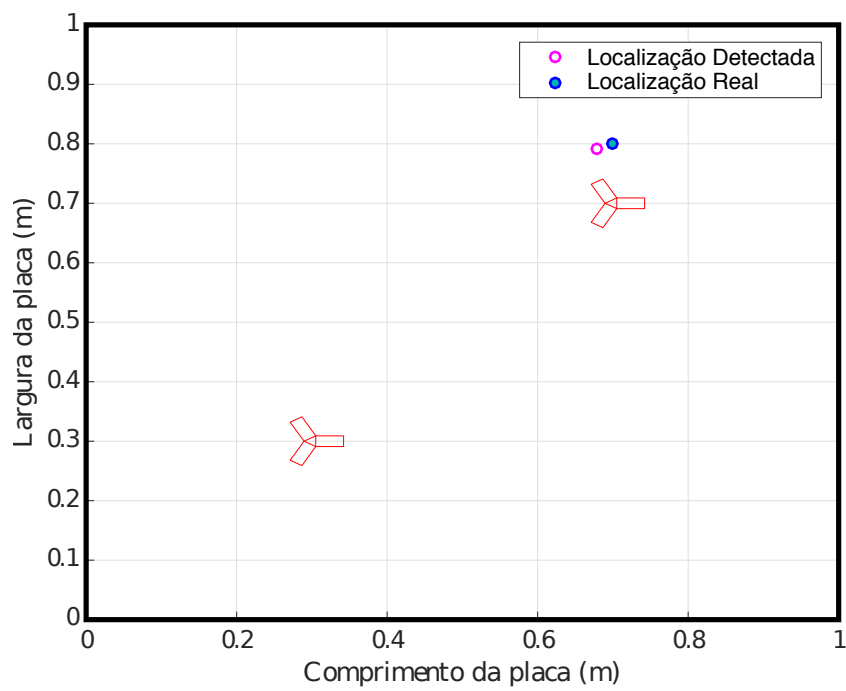
Seguindo este procedimento, 12 impactos foram realizados. Os sinais obtidos por cada sensor foram salvos e analisados, fornecendo a localização detectada dos mesmos. O erro para cada impacto foi calculado através da equação (69). Os resultados encontram-se ilustrados nas figuras (30, 31, 32, 33, 34 e 35), onde a localização do impacto detectada pelo método é representada por um círculo rosa aberto, enquanto a localização real do

impacto é representada por um círculo azul fechado.

Figura 30- Localização dos impactos utilizando o método das rosetas piezelétricas - Impactos 1 e 2.



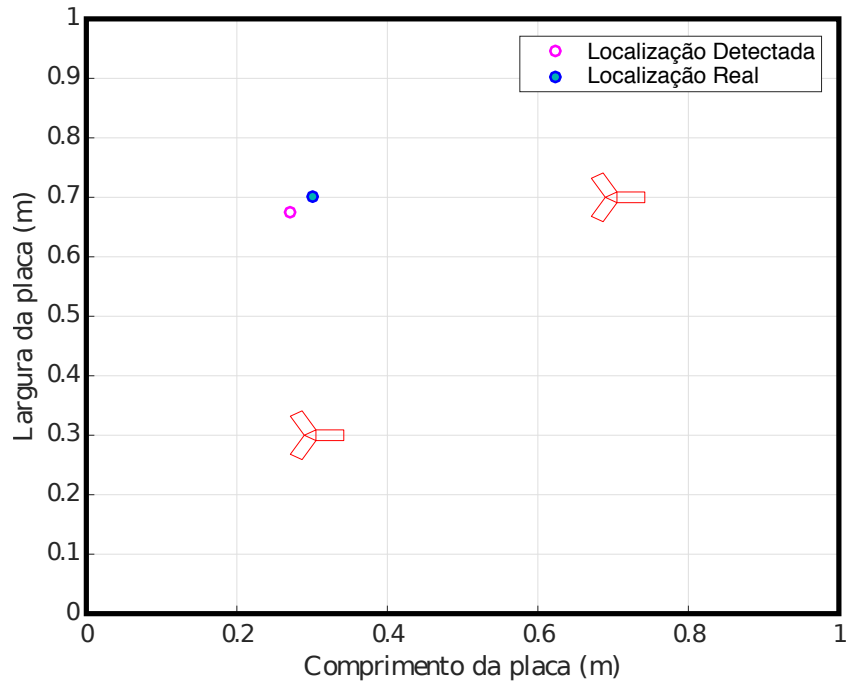
(a) Impacto 1



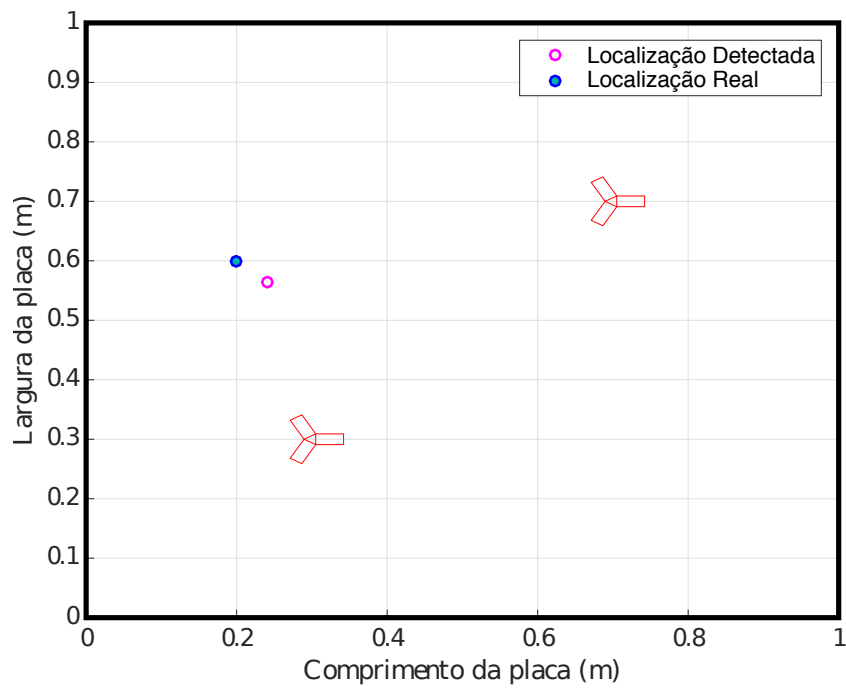
(b) Impacto 2

Fonte: Autoria própria.

Figura 31- Localização dos impactos utilizando o método das rosetas piezelétricas - Impactos 3 e 4.



(a) Impacto 3

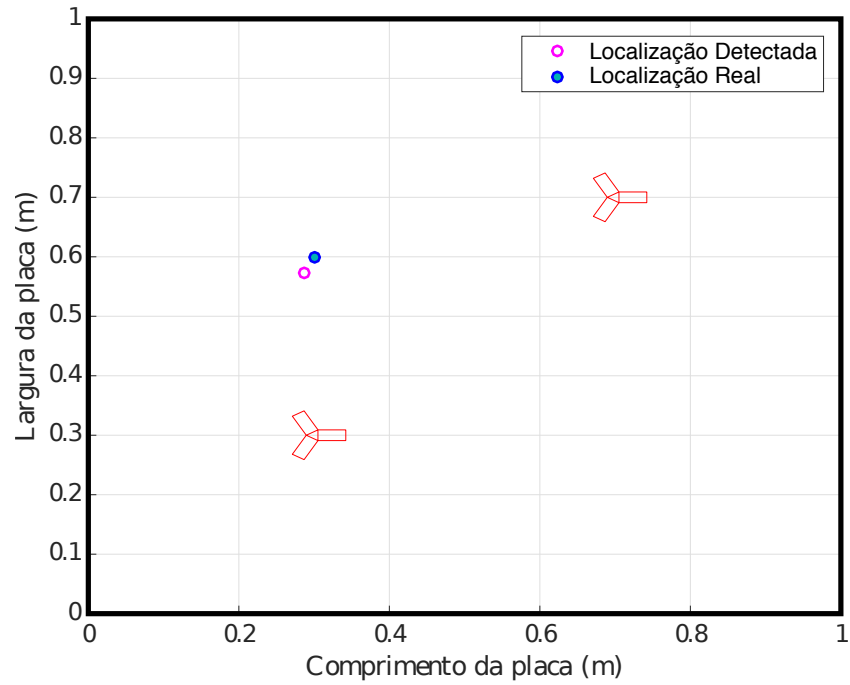


(b) Impacto 4

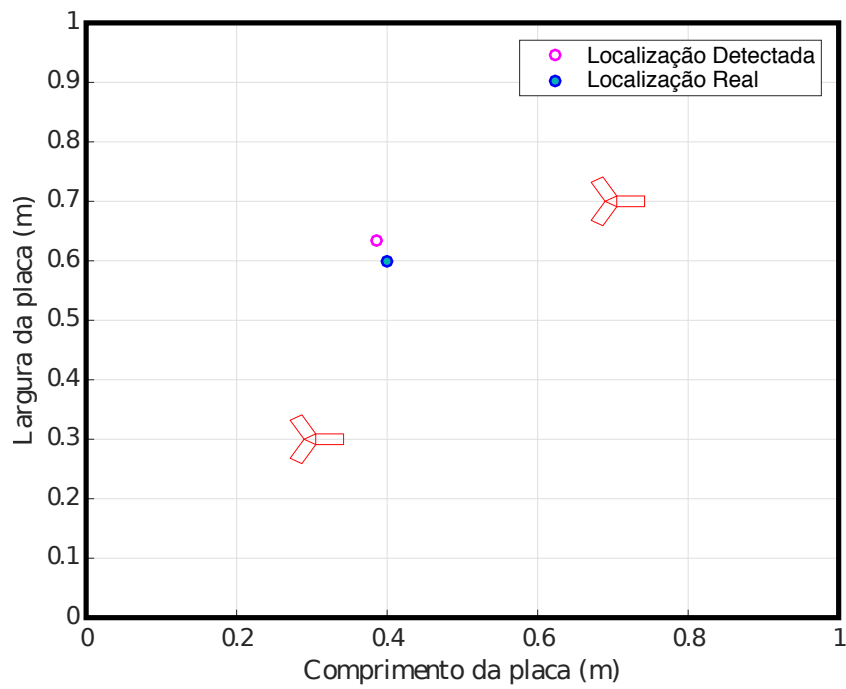
Fonte: Autoria própria.



Figura 32- Localização dos impactos utilizando o método das rosetas piezelétricas - Impactos 5 e 6.



(a) Impacto 5

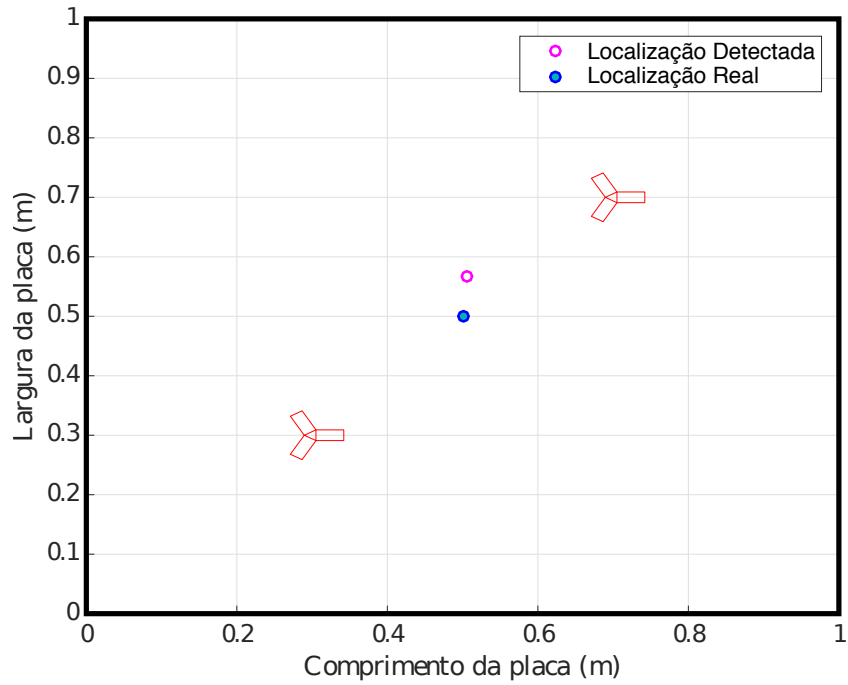


(b) Impacto 6

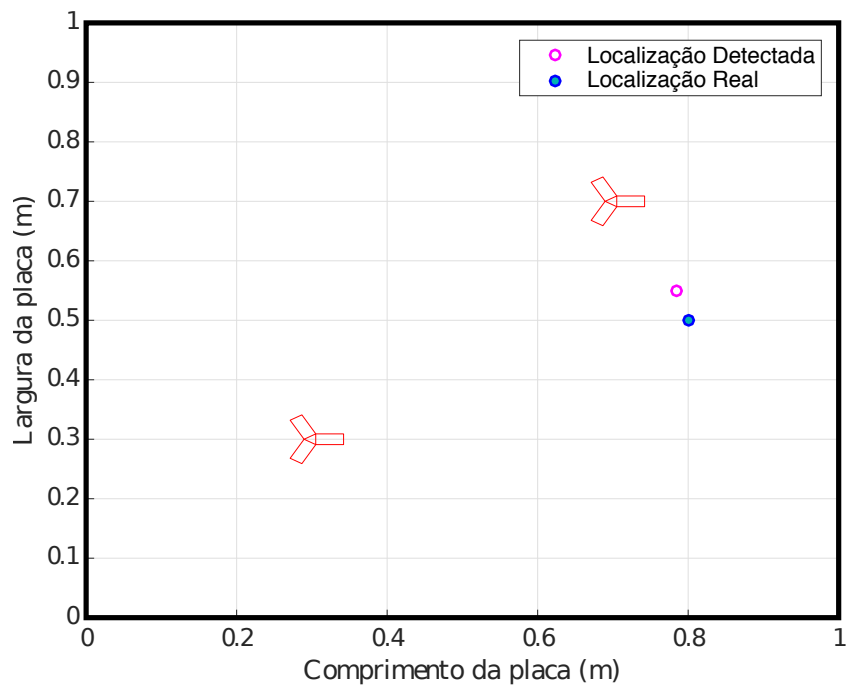
Fonte: Autoria própria.



Figura 33- Localização dos impactos utilizando o método das rosetas piezelétricas - Impactos 7 e 8.



(a) Impacto 7

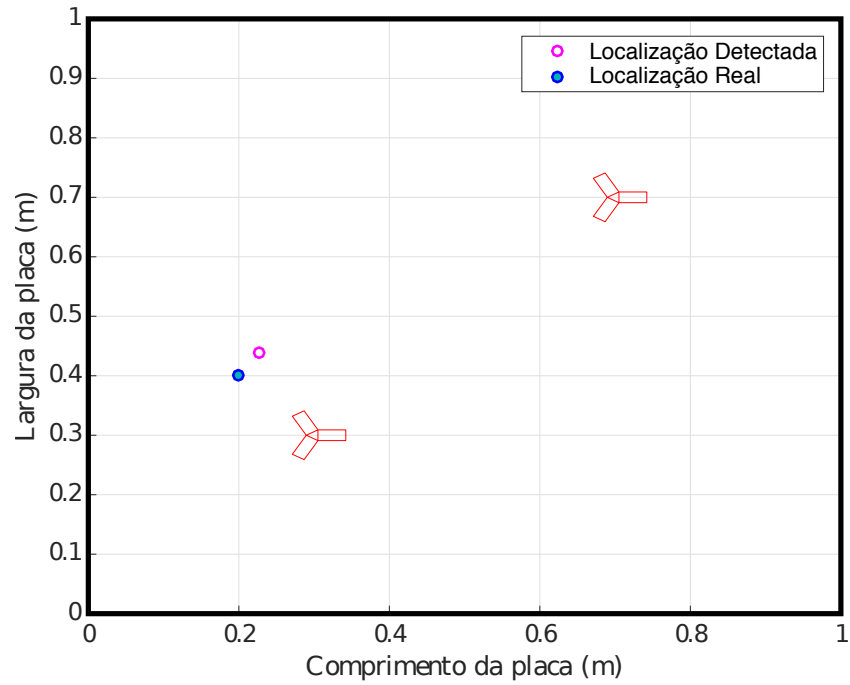


(b) Impacto 8

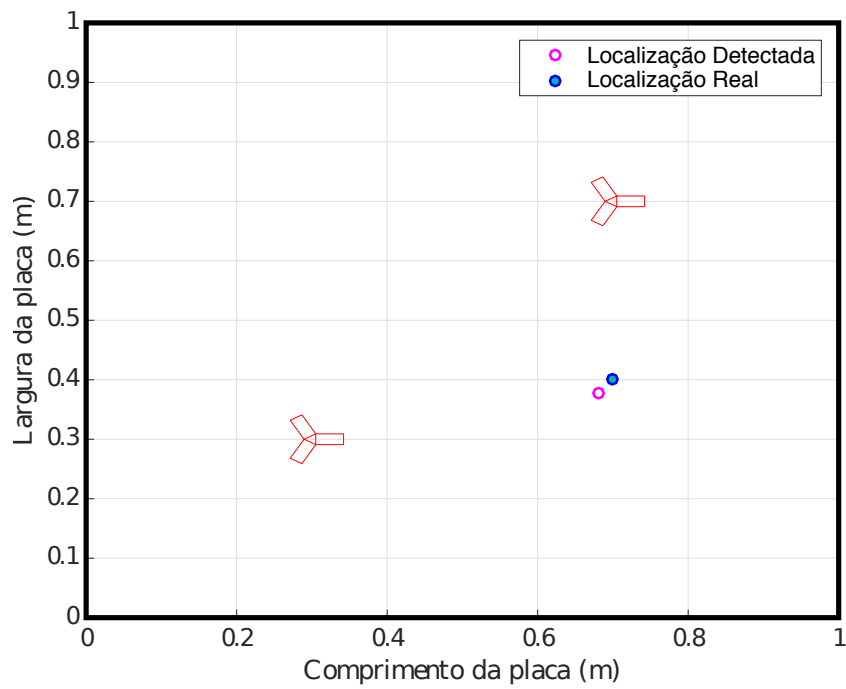
Fonte: Autoria própria.



Figura 34- Localização dos impactos utilizando o método das rosetas piezelétricas - Impactos 9 e 10.



(a) Impacto 9

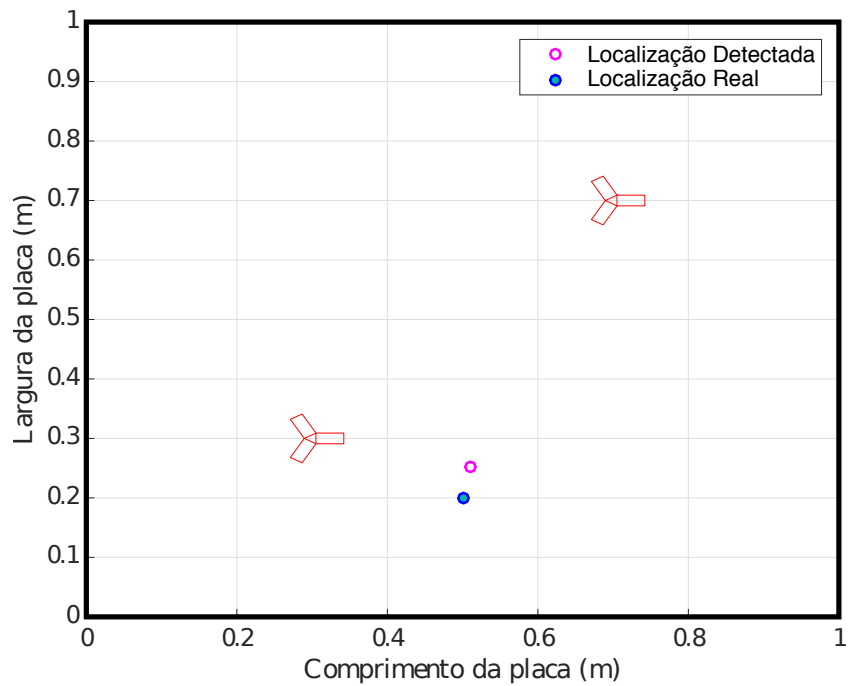


(b) Impacto 10

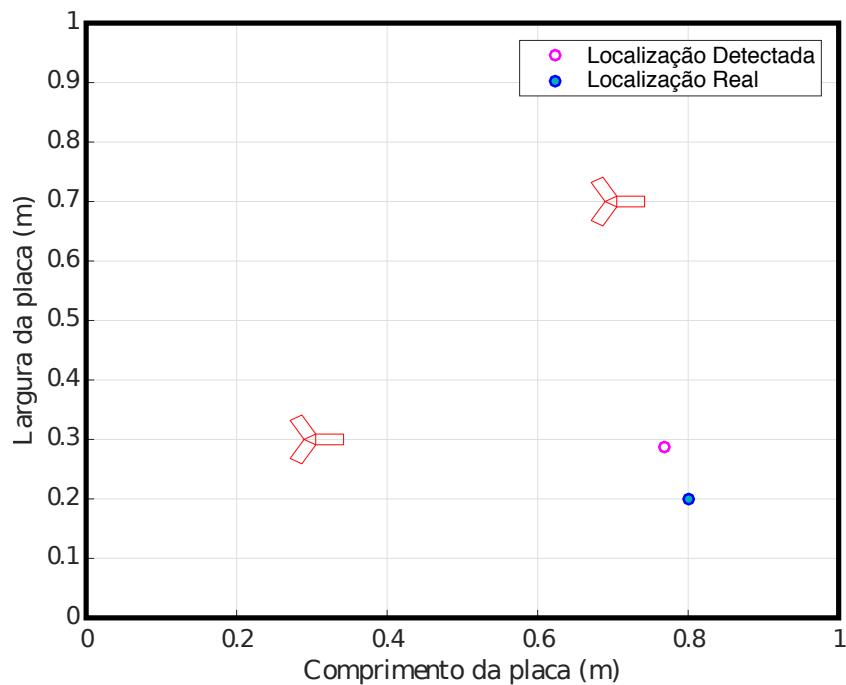
Fonte: Autoria própria.



Figura 35- Localização dos impactos utilizando o método das rosetas piezelétricas - Impactos 11 e 12.



(a) Impacto 11



(b) Impacto 12

Fonte: Autoria própria.

Para melhor visualização, os resultados apresentados nas figuras (30, 31, 32, 33, 34 e 35), foram resumidos na tabela (2) e plotados em apenas um gráfico, apresentado na

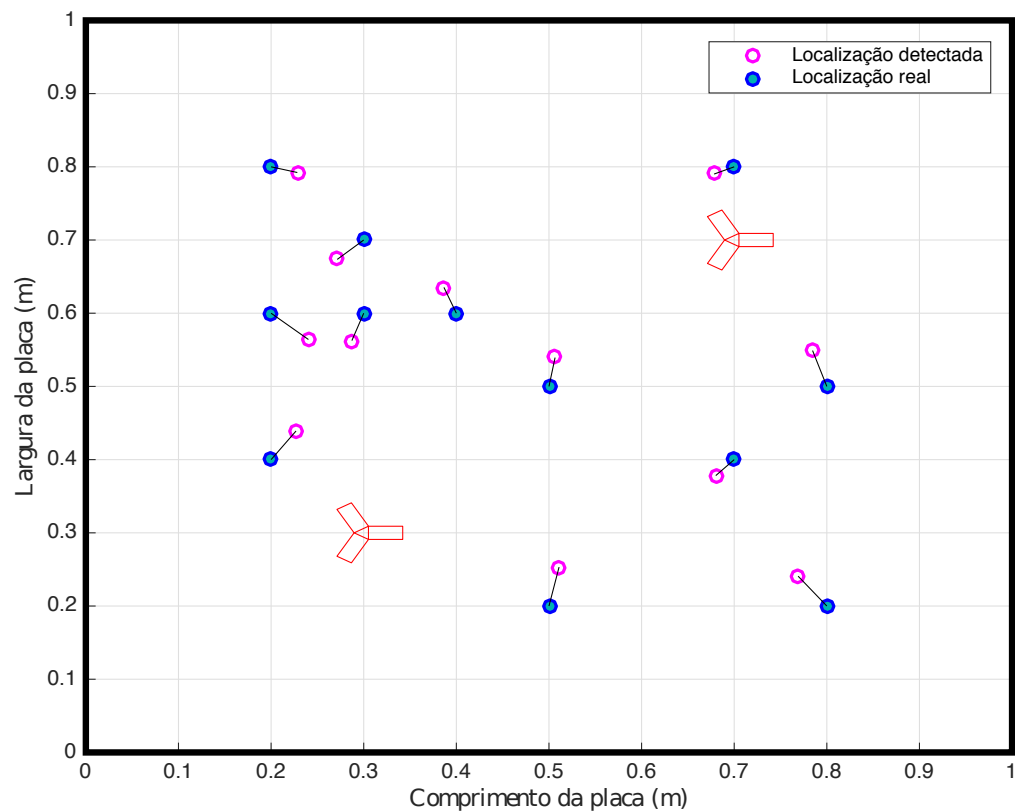
figura (36). Os círculos foram ligados por uma linha para indicar que as localizações são referentes a um mesmo impacto.

Tabela 2- Localização real, localização detectada pelo método das rosetas piezelétricas e erro para 12 impactos.

Impacto	x_{real} (m)	y_{real} (m)	x_{imp} (m)	y_{imp} (m)	Erro (mm)
1	0.2	0.8	0.2283	0.7922	29.4
2	0.7	0.8	0.6783	0.7901	23.9
3	0.3	0.7	0.2714	0.6735	39.0
4	0.2	0.6	0.2403	0.5641	54.0
5	0.3	0.6	0.2872	0.5626	39.5
6	0.4	0.6	0.3866	0.6353	37.8
7	0.5	0.5	0.5066	0.5394	39.9
8	0.8	0.5	0.7846	0.5490	51.4
9	0.2	0.4	0.2269	0.4391	47.5
10	0.7	0.4	0.6801	0.3782	29.5
11	0.5	0.2	0.5109	0.2532	54.3
12	0.8	0.2	0.7690	0.2868	51.2

Fonte: Autoria própria.

Figura 36- Representação dos resultados encontrados para 12 impactos produzidos em uma placa de fibra de carbono.



Fonte: Autoria própria.

O erro médio das localizações detectadas pelos 12 impactos foi de 41.44mm, enquanto o menor erro foi de 23.9mm e o maior de 54.3mm. Dadas as dimensões efetivas da placa ($1000mm \times 1000mm$), a localização média dos impactos apresentou um erro de 4.1%, o que é muito satisfatório para uma placa de material compósito.

Alguns fatores podem ser considerados como fontes de erro no experimento. Os sensores são fornecidos em forma individual e foram manualmente colados a fim formar rosetas, podendo existir pequena variação no ângulo de 120° entre cada sensor. Considera-se ainda que o sensor sofre a mesma deformação que a estrutura, entretanto, a camada de cola pode gerar amortecimento na deformação. Os impactos foram realizados manualmente, gerando desvios entre os pontos escolhidos para os impactos e os reais pontos de impacto, porém, tais desvios foram mantidas dentro de limites mínimos, da ordem de poucos milímetros.

Outros ensaios foram realizados utilizando esferas de aço de 4 e 6mm de diâmetro, as quais apresentaram resultados igualmente satisfatórios ao martelo. Porém, devido à necessidade de um mecanismo propulsor para arremessar as esferas, e à dificuldade em garantir que elas atingiram o ponto desejado, optou-se por apresentar apenas os ensaios realizados com o martelo, os quais podem facilmente ser reproduzidos experimentalmente.



5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou o estado da arte de localização de impactos, conceitos fundamentais para estudo do problema e uma metodologia que se baseia em trabalhos que utilizam o conceito de rosetas piezelétricas de *Macro Fiber Composite* para localização de impactos em materiais compósitos. A grande vantagem desta metodologia é não precisar saber a velocidade de propagação das ondas na estrutura anisotrópica, portanto não requer uma modelagem complexa da estrutura ou uma grande quantidade de sensores para a determinação experimental da mesma e nem a realização de ensaios para treinamento de redes neurais artificiais.

Para validar a metodologia proposta, experimentos foram realizados no Laboratório de Sistemas Inteligentes do grupo de pesquisa GMSINT. Foram realizados 12 impactos em diversas posições, afim de cobrir uma grande área da placa. O erro médio das localizações detectadas foi de 41.44mm, enquanto o menor erro foi de 23.9mm e o maior de 54.3mm. Dadas as dimensões efetivas da placa ($1000mm \times 1000mm$), a localização média dos impactos apresentou um erro de 4.1%. A exatidão pode ser aumentada com o uso de uma terceira roseta, a qual forneceria dados adicionais ao método proposto, bem como eliminaria o ponto cego presente na montagem com 2 rosetas. Tal ponto ocorre quando $\phi_1 = \phi_2$, formando retas sobrepostas, sem um ponto de intersecção entre elas.

Os pontos mais distantes testados foram $(x = 800mm; y = 200mm)$ e $(x = 200mm; y = 800mm)$, o que mostra a eficiência do método em uma área de $600mm \times 600mm$ para a placa de material compósito analisada. Além disso, no arranjo experimental, as rosetas foram coladas aproximadamente 565mm distantes uma da outra, o que é uma distância muito maior do que a usada em experimentos anteriores, mencionados na introdução deste trabalho, que utilizam o mesmo método. Enquanto os trabalhos anteriores utilizaram a magnitude do sinal obtida no domínio da frequência, em uma faixa limitada de valores de frequência definida experimentalmente e que varia de acordo com a estrutura analisada, este trabalho utiliza a norma infinita dos sinais no domínio do tempo, que funciona da mesma maneira para qualquer material. Este trabalho também estendeu a metodologia para impactos de baixa velocidade, que não haviam sido analisados previamente.

Embora não testado, a robustez do método deve ser preservada em eventos de mudança de temperaturas. Esta conclusão é baseada no fato de que a magnitude de resposta relativa é usada no algoritmo. Dado que os sensores são os mesmos, a temperatura afetaria todos da mesma maneira, portanto essa mudança não deve introduzir erros.

5.1 ETAPAS FUTURAS

Para a continuidade do trabalho, propõe-se a análise de variância dos resultados repetindo os impactos 10 vezes para cada ponto, analisando a média e o desvio padrão de cada um. Além disso, o ensaio pode ser repetido para pontos mais extremos da placa, para verificar se o método ainda é capaz de identificar a localização dos impactos em regiões mais distantes que as apresentadas.

Conforme citado anteriormente, sugere-se a adição de uma terceira roseta a fim de propiciar uma análise de sua influência nos resultados, quantificando o aumento da exatidão do método, bem como a existência de aumento significativo na área máxima para detecção de impactos. Além disso, pode-se testar a eficiência do método em estruturas mais complexas, como a secção da fuselagem de uma aeronave, fabricada com materiais compósitos.



REFERÊNCIAS

- AIRLINES, M. Boeing 787 dreamliner specs. [S.I.], 2015. Disponível em: <<http://www.modernairliners.com/boeing-787-dreamliner/boeing-787-dreamliner-specs/>>. Acesso em: 29 apr. 2015.
- AZZOUZ, M. S.; MEI, C.; BEVAN, J. S.; RO, J. J. Finite element modeling of mfc/afc actuators and performance of mfc. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, London, v. 12, n. 9, p. 601--612, set. 2001.
- BILGEN, O.; KOCHERSBERGER, K.; DIGGS, E. C.; KURDILA, A. J.; INMAN, D. J. Morphing wing micro-air-vehicles via macro-fibercomposite actuators. In: AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC STRUCTURES, STRUCTURAL DYNAMICS, AND MATERIALS CONFERENCE, 48th., Honolulu. **Anais...** Honolulu: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2007. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2514/6.2007-1785>>. Acesso em: 11 fev. 2016.
- CIAMPA, F.; MEO, M. Impact detection in anisotropic materials using a time reversal approach. **Structural Health Monitoring**, London, v. 11, n. 1, p. 43--49, jan. 2011. Disponível em: <<http://journals.sagepub.com/doi/pdf/10.1177/1475921710395815>>. Acesso em: 18 jun. 2016.
- COVERLEY, P. T.; STASZEWSKI, W. J. Impact damage location in composite structures using optimized sensor triangulation procedure. **Smart materials and structures**, Bristol, v. 12, n. 5, p. 795--803, 2003. Disponível em: <<http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0964-1726/12/5/017/meta>>. Acesso em: 20 abr. 2015.
- CRAWLEY, E. F.; LUIS, J. D. Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures. **AIAA journal**, Reston, v. 25, n. 10, p. 1373--1385, 1987. Disponível em: <<https://arc.aiaa.org/doi/pdf/10.2514/3.9792>>. Acesso em: 20 fev. 2016.
- CURIE, J.; CURIE, P. Développement, par pression, de l'électricité polaire dans les cristaux hémiedres à faces inclinées. **Comptes Rendus de l'Académie des Sciences**, [S.I.], n. 91, p. 294--295, 1880.
- CURIE, J.; CURIE, P. Sur l'électricité polaire dans les cristaux hémiedres faces inclinées. **Comptes Rendus de l'Académie des Sciences**, [S.I.], n. 91, p. 383--386, 1880.
- DANIEL, I. M.; ISHAI, O. **Engineering mechanics of composite materials**. New York: Oxford University Press, 1994.
- FARRAR, C. R.; LIEVEN, N. A. J. An introduction to structural health monitoring. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, London, v. 365, n. 1851, p. 303--315, 2007. Disponível em: <rsta.royalsocietypublishing.org/content/365/1851/303>. Acesso em: 28 mar. 2015.

GIURGIUTIU, V. **Structural Health Monitoring: with Piezoelectric Wafer Active Sensors**. [S.I.]: Elsevier Science, 2007. (Structures and Fracture ebook Collection Series). ISBN 9780080556796. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=AG5h8Hu-MdUC>>. Acesso em: 28 apr. 2015.

GIURGIUTIU, V. Piezoelectric wafer active sensors for structural health monitoring of composite structures using tuned guided waves. **Journal of Engineering Materials and Technology**, New York, v. 133, n. 4, p. 1--6, 2011. Disponível em: <<http://materialstechnology.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1429079>>. Acesso em: 10 ago. 2015.

GIURGIUTIU, V. **Structural Health Monitoring of Aerospace Composites**. [S.I.]: Elsevier Science, 2016. 470 p. ISBN 9780124104419.

GRAFF, K. **Wave Motion in Elastic Solids**. [S.I.]: Mineola: Dover Publications, 2012. (Dover Books on Physics). ISBN 9780486139579.

HANKEL, W. G. Über die aktinound piezoelektrischen eigenschaften des bergkrystalles und ihre beziehung zu den thermoelektrischen. **Abh. Sächs**, Leipzig, v. 12, p. 457, 1881. Disponível em: <<http://digital.slub-dresden.de/werkansicht/dlf/6732/1/>>. Acesso em: 20 jan. 2017.

HIBBELER, R. **Resistência dos materiais**. [S.I.]: Prentice Hall Brasil, 2010. ISBN 9788576053736.

HOSSEINZADEH, R.; SHOKRIEH, M. M.; LESSARD, L. Damage behavior of fiber reinforced composite plates subjected to drop weight impacts. **Composites science and technology**, Kidlington, v. 66, n. 1, p. 61--68, 2006. Disponível em: <www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266353805002022>. Acesso em: 16 jun. 2015.

JAFFE, B.; ROTH, R.; MARZULLO, S. Properties of piezoelectric ceramics in the solid-solution series lead titanate-lead zirconate-lead oxide: tin oxide and lead titanate-lead hafnate. **Journal of research of the National Bureau of Standards**, Gaithersburg, v. 55, n. 5, p. 239--254, 1955. Disponível em: <http://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/jres/55-jresv55n5p239_A1b.pdf>. Acesso em: 2 jun. 2015.

JARMER, G. J. S.; FLYNN, E. B.; TODD, M. D. M. Multi-wave-mode, multi-frequency detectors for guided wave interrogation of plate structures. **Structural Health Monitoring**, London, v. 13, p. 120--130, 2014. Disponível em: <journals.sagepub.com/doi/abs/10.1177/1475921713513972>. Acesso em: 5 jul. 2015.

KUNDU, T.; DAS, S.; JATA, K. V. Point of impact prediction in isotropic and anisotropic plates from the acoustic emission data. **The Journal of the Acoustical Society of America**, Melville, v. 122, n. 4, p. 193--201, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1121/1.2775322>>. Acesso em: 11 mar. 2015.

LAMB, H. On waves in an elastic plate. **Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, London, v. 93, n. 648, p. 114--128, 1917. Disponível em: <<http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/93/648/114>>. Acesso em: 25 mar. 2015.

LANGÉVIN, P. **Procédé et appareils d'émission et de réception des ondes élastiques sous-marines à l'aide des propriétés piézo-électriques du quartz**. [S.I.]: Oeuvres Scientifiques de Paul Langévin, 1920.

LENIOWSKA, L.; MAZAN, D. Mfc sensors and actuators in active vibration control of the circular plate. **PAN - Archives of Acoustic**, Rzeszów, v. 40, n. 2, p. 257--265, abr. 2015. Disponível em: <<https://www.degruyter.com/view/j/aoa.2015.40.issue-2/aoa-2015-0028/aoa-2015-0028.xml>>. Acesso em: 21 mar. 2016.

LEO, D. J. **Engineering analysis of smart material systems**. New Jersey: Hoboken: John Wiley & Sons, 2007. 449 p.

LIPPMANN, G. Principe de la conservation de l'électricité. **Annales de Chimie et de Physique**, Cachan, v. 24, p. 145--178, 1881. Disponível em: <<https://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00237824/document>>. Acesso em: 11 nov. 2015.

LOPES, J. V.; PARK, G.; CUDNEY, H. H.; INMAN, D. J. Impedance-based structural health monitoring with artificial neural networks. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, London, v. 11, n. 3, p. 206--214, 2000. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1106/H0EV-7PWM-QYHW-E7VF>>. Acesso em: 20 mar. 2015.

LUCINTEL, L. Growth opportunities in global carbon fibre market: 2014-2019. **Irving**, 2014. Disponível em: <<http://www.prnewswire.com/news-releases/growth-opportunities-in-the-global-carbon-fiber-market-2014--2019-269216931.html>>. Acesso em: 26 apr. 2015.

MALMONGE, J. A.; MALMONGE, L. F.; FUZARI, G. C.; MALMONGE, S. M.; SAKAMOTO, W. K. Piezo and dielectric properties of PHB-PZT composite. **Polymer Composites**, Hoboken, USA, v. 30, n. 9, p. 1333--1337, 2009. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/10127>>. Acesso em: 29 apr. 2015.

MATT, H. M.; SCALEA, F. L. di. Macro-fiber composite piezoelectric rosettes for acoustic source location in complex structures. **Smart Materials and Structures**, Bristol, v. 16, n. 4, p. 1489--1499, 2007. Disponível em: <<http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0964-1726/16/4/064/meta>>. Acesso em: 16 mar. 2015.

NASA. [s.i.]. [S.I.], 2015. Disponível em: <<https://spinoff.nasa.gov/Spinoff2007/images/MFC.jpg>>. Acesso em: 22 jun. 2015.

NUCERA, C.; WHITE, S.; CHEN, Z. M.; KIM, H.; SCALEA, F. L. di. Impact monitoring in stiffened composite aerospace panels by wave propagation. **Structural Health Monitoring**, London, v. 14, n. 6, p. 547--557, set. 2015. Disponível em: <<http://journals.sagepub.com/doi/abs/10.1177/1475921715599600>>. Acesso em: 16 mar. 2015.

OSMONT, D. L.; DUPONT, M.; GOUYON, R.; LEMISTRE, M. B.; BALAGEAS, D. L. Piezoelectric transducer network for dual-mode (active/passive) detection, localization, and evaluation of impact damages in carbon/epoxy composite plates. In: EUROPEAN CONFERENCE ON SMART STRUCTURES AND MATERIALS, 5th., 2000, Glasgow. **Anais...** Glasgow: Proc. SPIE, 2000. v. 4073, p. 130--137. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1117/12.396391>>. Acesso em: 17 sep. 2015.

PARK, G.; INMAN, D. J. Structural health monitoring using piezoelectric impedance measurements. **Philosophical Transactions Of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, London, v. 365, n. 1851, p. 373--392, fev. 2007. Disponível em: <<http://rsta.royalsocietypublishing.org/content/365/1851/373>>. Acesso em: 5 jun. 2015.

PARK, J.; HA, S.; CHANG, F.-k. Monitoring impact events using a system-identification method. **AIAA Journal**, Reston, v. 47, n. 9, p. 2011--2021, set. 2009. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2514/1.34895>>. Acesso em: 3 jun. 2015.

PEAIRS, D. M.; INMAN, D. J.; PARK, G. Circuit analysis of impedance-based health monitoring of beams using spectral elements. **Structural Health Monitoring**, London, v. 6, n. 1, p. 81--94, 2007. Disponível em: <<http://journals.sagepub.com/doi/pdf/10.1177/1475921707072621>>. Acesso em: 15 fev. 2016.

PROWAVE, E. C. Piezoelectric products. [S.I.], 2005. Disponível em: <<http://www.prowave.com.tw/english/item/pp.htm>>. Acesso em: 20 jun. 2015.

RAZZINI, A. H. **Análise da propagação de ondas de Lamb para aplicações em monitoramento de estruturas**. 2015. 81 f. Dissertação (Trabalho de Graduação em Engenharia Mecânica) --- Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2015.

RICHARDSON, M. O. W.; WISHEART, M. J. Review of lowvelocity impact properties of composite materials. **Composites Part A: Applied Science and Manufacturing**, Kidlington, v. 27, p. 1123--1132, 1996.

ROBERTS, S. Dielectric and piezoelectric properties of barium titanate. **Physical Review**, College Park, v. 71, n. 12, p. 890--895, 1947. Disponível em: <<https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.71.890>>. Acesso em: 25 mai. 2016.

SALAMONE, S.; BARTOLI, I.; LEO, P. D.; SCALA, F. L. D.; AJOVALASIT, A.; D'ACQUISTO, L.; RHYMER, J.; KIM, H. High-velocity impact location on aircraft panels using macro-fiber composite piezoelectric rosettes. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, London, v. 21, n. 9, p. 887--896, 2010. Disponível em: <<http://journals.sagepub.com/doi/abs/10.1177/1045389X10368450>>. Acesso em: 20 mar. 2015.

SCHOENECKER, A. J.; GEBHARDT, S. E.; ROEDIG, T.; KEITEL, U.; BRUECKNER, B.; SCHNETTER, J.; DAUE, T. Piezocomposite transducers for smart structures applications. In: SMART STRUCTURES AND MATERIALS: SMART STRUCTURES AND INTEGRATED SYSTEMS, 2005, San Diego. **Anais...** San Diego: Proc. SPIE, 2005. v. 5764, p. 34--41.

SHACKELFORD, J. F. **Ciência dos materiais**. 6. ed. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2008. 576 p.

SI, I. I. Fun with piezoelectric film. [S.I.], 2015. Disponível em: <<http://www.imagesco.com/articles/piezo/piezo00.html>>. Acesso em: 20 jun. 2015.

SMITH, R. C. **Smart material systems: model development**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005. 501 p. (Frontiers in Applied Mathematics, v. 32). ISBN 9780898715835.

SU, Z.; YE, L. **Identification of damage using Lamb waves: from fundamentals to applications**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2009. 346 p. (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, v. 48).

SU, Z.; YE, L.; LU, Y. Guided lamb waves for identification of damage in composite structures: A review. **Journal of sound and vibration**, London, v. 295, n. 3, p. 753-780, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.01.020>>. Acesso em: 28 mar. 2015.

TZOU, H. **Piezoelectric shells: distributed sensing and control of continua**. [S.I.]: Springer Netherlands, 2012. (Solid Mechanics and Its Applications). ISBN 9789401117838. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=tjDyCAAAQBAJ>>.

VENET, M. E.; PEREIRA, A. H. P. **Materiais e dispositivos piezoelétricos: fundamentos e desenvolvimento: Apostila 1 do curso**. São Carlos: [s.n.], 2004. 18 p. Disponível em: <<http://www.atcp.com.br/pt/produtos/ultra-som/ceramicas-piezoeletricas.html>>. Acesso em: 12 fev. 2015.

VIKTOROV, I. A. **Rayleigh and Lamb waves: physical theory and applications**. 1. ed. New York: Springer US, 1967. (Ultrasonic Technology). ISBN 978-1-4899-5683-5.

WILLIAMS, R. B.; INMAN, D. J.; SCHULTZ, M. R.; HYER, M. W. Nonlinear tensile and shear behavior of macro fiber composite actuators. **Journal of Composite Materials**, Thousand Oaks, v. 38, n. 24061, 2003. Disponível em: <<http://journals.sagepub.com/doi/pdf/10.1177/0021998304040555>>. Acesso em: 24 jun. 2015.

WILLIAMS, R. B.; PARK, G.; INMAN, D. J.; WILKIE, W. K. An overview of composite actuators with piezoceramic fibers. **Proceeding of IMAC XX**, Bellingham, v. 47, 2002. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/279708311_An_overview_of_composite_actuators_with_piezoceramic_fibers>. Acesso em: 25 jan. 2017.

YANG, C.; ADAMS, D. E.; DERRISO, M.; GORDON, G. Structural damage identification in a mechanically attached metallic panel using embedded sensitivity functions. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, London, v. 19, n. 4, p. 475--485, 2008. Disponível em: <<http://journals.sagepub.com/doi/pdf/10.1177/1045389X06076187>>. Acesso em: 19 jul. 2016.

YANG, Y.; TANG, L.; LI, H. Vibration energy harvesting using macro-fiber composites. **Smart Materials and Structures**, Bristol, v. 18, n. 11, set. 2009. Disponível em: <<http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0964-1726/18/11/115025>>. Acesso em: 30 nov. 2016.



APÊNDICE A – PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM MEIOS SÓLIDOS CONTÍNUOS

Este apêndice apresenta conceitos fundamentais sobre a propagação de ondas em meios sólidos contínuos, para casos unidimensionais e bidimensionais.

A.1 PROPAGAÇÃO DE ONDAS UNIDIMENSIONAIS NO CONTÍNUO

A.1.1 Ondas e vibrações em cordas longas

Muitas aplicações do fenômeno de ondas envolvem uma análise matemática muito complicada devido às complexidades geométricas do sistema físico. A corda tensionada, entretanto, representa um sistema físico cuja equação governante é mais simples, quando comparado a problemas tridimensionais.

Apesar de mais simples, muitas motivações práticas existem para este estudo. As características de muitos instrumentos musicais são baseadas nas vibrações de cordas. A dinâmica das linhas de transmissão elétrica são modeladas através de cordas. Problemas na dinâmica de cordas surgem na manufatura do fio. Além disso, a corda elástica é interessante por questões matemáticas.

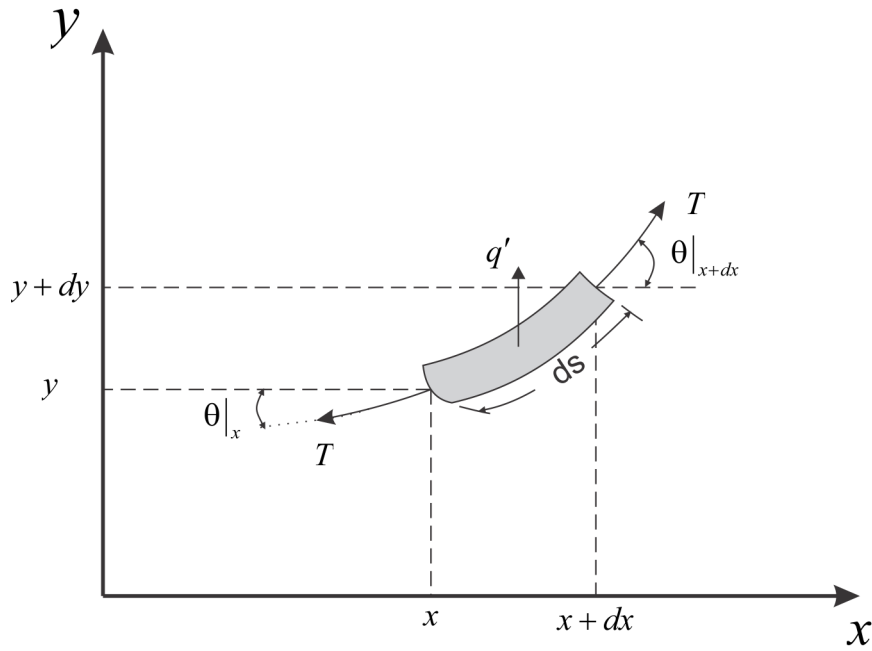
Primeiramente, deve-se desenvolver a equação governante para uma corda tensionada. Dado que fronteiras inevitavelmente introduzem complicações na propagação de ondas devido ao fenômeno da reflexão, as primeiras considerações envolvem cordas “longas”, isto é, cordas infinitas ou semi-infinitas, nas quais não aparecerá o problema de reflexão. As características básicas de ondas livres e ondas que resultam do movimento forçado serão estudados nestas condições.

Equação governante de uma corda tensionada

Considere um elemento diferencial de comprimento infinitesimal dS de uma corda sob tração T , como mostrado na figura (37). Assume-se que qualquer variação na tensão devido ao deslocamento da corda é desprezível. A densidade de massa por unidade de comprimento é ρ e a força do corpo ou carregamento externo é dado por $q(x, t)$.

Conforme mostra a figura (38), o comprimento infinitesimal da corda pode ser apro-

Figura 37- Elemento diferencial de uma corda tensionada.



Fonte: Autoria própria.

ximado por:

$$ds^2 \cong dy^2 + dx^2 \quad (\text{A.1})$$

$$ds \cong \sqrt{dy^2 + dx^2} \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{ds}{dx} \cong \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (\text{A.3})$$

Da equação do movimento na direção vertical (2ª Lei de Newton), tem-se que

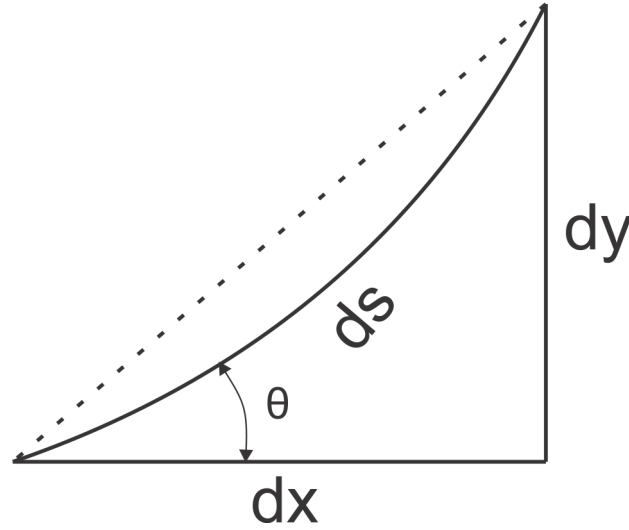
$$\sum F_y = m\ddot{y} \quad (\text{A.4})$$

onde,

$$\ddot{y} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad m = \rho ds \quad (\text{A.5})$$

Assim, a equação de movimento resultante na direção vertical é

$$-T \sin(\theta|_x) + T \sin(\theta|_{x+dx}) + q' ds = \rho ds \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (\text{A.6})$$

Figura 38- Aproximação do elemento diferencial dS.

Fonte: Autoria própria.

Usando a expansão em série de Taylor para o termo $\theta|_{x+dx}$, tem-se:

$$\theta|_{x+dx} = \theta|_x + \frac{\partial \theta}{\partial x} dx \quad (\text{A.7})$$

Logo,

$$-T \sin(\theta|_x) + T \sin\left(\theta|_x + \frac{\partial \theta}{\partial x} dx\right) + q' ds = \rho ds \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (\text{A.8})$$

Linearizando a função seno em torno de θ , ou seja, para $\theta \ll$

$$\sin(\theta) \cong \theta \quad (\text{A.9})$$

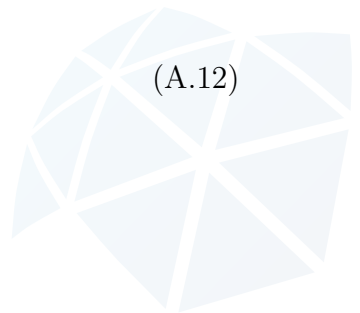
pois,

$$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \quad (\text{A.10})$$

Portanto,

$$-T\theta|_x + T\theta|_x + T \frac{\partial \theta}{\partial x} dx + q' ds = \rho ds \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (\text{A.11})$$

$$T \frac{\partial \theta}{\partial x} dx + q' ds = \rho ds \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (\text{A.12})$$



Da figura tem-se $\sin(\theta) = \frac{dy}{dx}$. Como $\theta \ll$, assim:

$$\theta \cong \frac{dy}{dx} \text{ e } ds \cong \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (\text{A.13})$$

fazendo com que a equação (A.12) seja reescrita como

$$T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) dx + q' \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dx = \rho \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (\text{A.14})$$

Sendo $\theta \ll$, $\frac{\partial y}{\partial x} \ll 1$. Assim,

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + q' = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (\text{A.15})$$

Algumas soluções para esta equação diferencial parcial (EDP) não-homogênea de segunda ordem serão investigadas nos tópicos a seguir. Uma forma de interesse particular é a equação diferencial parcial homogênea obtida definindo que não há carregamento externo ($q = 0$), resultando em:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (\text{A.16})$$

$$c_0^2 = \frac{T}{\rho}. \quad (\text{A.17})$$

onde c_0 é a velocidade de propagação da onda.

Esta equação que governa o movimento transversal livre da corda é conhecida como equação da onda. Ela possui um número de propriedades interessantes e também servirá para outros sistemas elásticos. Ela pode ser resolvida por vários métodos, entretanto, serão apresentadas apenas duas abordagens: o método de separação das variáveis e o método de d'Alembert.

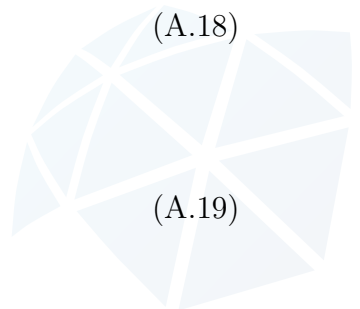
Método de Separação das Variáveis

Seja

$$y = y(x, t) = X(x) T(t) \quad (\text{A.18})$$

a equação (A.16) pode ser reescrita como

$$X'' T = \frac{1}{c_0^2} X \ddot{T} \quad (\text{A.19})$$



ou

$$T \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{c_0^2} X \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{T c_0^2} \frac{d^2 T}{dt^2} = \pm k^2 = cte \quad (\text{A.21})$$

Se, para ambas as equações, em x e em t houver o problema de valor característico, o sinal de k^2 é negativo. Assim,

$$\frac{X''}{X} = \frac{\ddot{T}}{T c_0^2} = -k^2 \quad (\text{A.22})$$

Logo, tem-se duas equações diferenciais ordinárias (EDOs) de 2ª ordem que juntas descrevem o movimento da onda:

$$\begin{cases} X'' + k^2 X = 0 \\ \ddot{T} + k^2 c_0^2 T = 0 \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

Método de Solução de uma EDO de 2ª ordem

A solução de uma EDO de 2ª ordem pode ser dada por

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad (\text{A.24})$$

cuja equação característica é

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (\text{A.25})$$

onde r é a variável característica e as raízes da equação característica são

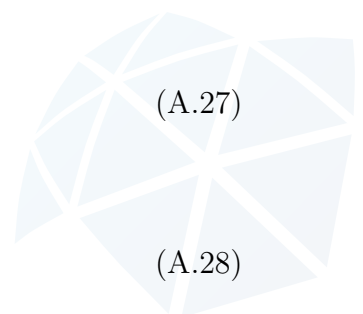
$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{A.26})$$

Há três possibilidades para as raízes da equação:

- Se $b^2 - 4ac = 0$,

$$r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a} \rightarrow \text{número real} \quad (\text{A.27})$$

$$\therefore y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x} \quad (\text{A.28})$$



- Se $b^2 - 4ac > 0$, r_1 e $r_2 \in \mathbb{R}$

$$\therefore y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \quad (\text{A.29})$$

- Se $b^2 - 4ac < 0$, r_1 e $r_2 \in \mathbb{C}$

$$y = C_1 \text{sen}(rx) + C_2 \cos(rx) \quad (\text{A.30})$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

A solução das 2 EDOs encontradas se encaixa no 3º caso, pois $b^2 - 4ac < 0$. Logo,

$$X(x) = c_1 \text{sen}(kx) + c_2 \cos(kx) \quad (\text{A.31})$$

$$T(t) = c_3 \text{sen}(kc_0 t) + c_4 \cos(kc_0 t) \quad (\text{A.32})$$

Sabe-se que $y = X(x)T(t)$ e $kc_0 = \omega$

$$y = [c_1 \text{sen}(kx) + c_2 \cos(kx)][c_3 \text{sen}(kc_0 t) + c_4 \cos(kc_0 t)] \quad (\text{A.33})$$

$$y = c_1 \text{sen}(kx)c_3 \text{sen}(kc_0 t) + c_1 \text{sen}(kx)c_4 \cos(kc_0 t) + c_2 \cos(kx)c_3 \text{sen}(kc_0 t) + c_2 \cos(kx)c_4 \cos(kc_0 t) \quad (\text{A.34})$$

$$y = A_1 \text{sen}(kx) \text{sen}(\omega t) + A_2 \text{sen}(kx) \cos(\omega t) + A_3 \cos(kx) \text{sen}(\omega t) + A_4 \cos(kx) \cos(\omega t) \quad (\text{A.35})$$

Usando algumas identidades trigonométricas:

Tabela 3- Identidades trigonométricas de senos e cossenos.

$\text{sen}(kx) \text{sen}(\omega t) = \frac{1}{2} [\cos(kx - \omega t) - \cos(kx + \omega t)]$	Fonte: Autoria própria.
$\text{sen}(kx) \cos(\omega t) = \frac{1}{2} [\text{sen}(kx + \omega t) - \text{sen}(kx - \omega t)]$	
$\cos(kx) \cos(\omega t) = \frac{1}{2} [\cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t)]$	

Pode-se reescrever a equação anterior:

$$y = A_1 \frac{1}{2} [\cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t)] + A_2 \frac{1}{2} [\text{sen}(kx + \omega t) - \text{sen}(kx - \omega t)] + A_3 \frac{1}{2} [\text{sen}(kx + \omega t) - \text{sen}(kx - \omega t)] + A_4 \frac{1}{2} [\cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t)] \quad (\text{A.36})$$

Logo,

$$y = B_1 \cos(kx - \omega t) + B_2 \cos(kx + \omega t) + B_3 \sin(kx + \omega t) + B_4 \sin(kx - \omega t) \quad (\text{A.37})$$

onde as constantes B_1, B_2, B_3 e B_4 podem ser encontradas utilizando as condições de contorno.

Números Complexos

As funções trigonométricas seno e cosseno podem ser escritas em séries de potência, como:

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} \dots \quad (\text{A.38})$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} \dots \quad (\text{A.39})$$

Dado o Teorema de Taylor (Expansão em Série de Taylor) em torno de 0:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots \quad (\text{A.40})$$

O exponencial natural em série de potência é dado por:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (\text{A.41})$$

fazendo $x = i\theta$, onde i é um número imaginário, $i = \sqrt{-1}$, tem-se:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \dots \quad (\text{A.42})$$

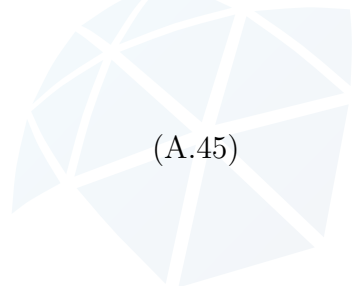
$$e^{i\theta} = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots + i\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\right] \quad (\text{A.43})$$

logo,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (\text{A.44})$$

A equação (A.37) pode ser reescrita usando:

$$y(x, t) = A_1 e^{i(kx + \omega t)} + B_1 e^{-i(kx - \omega t)} \quad (\text{A.45})$$

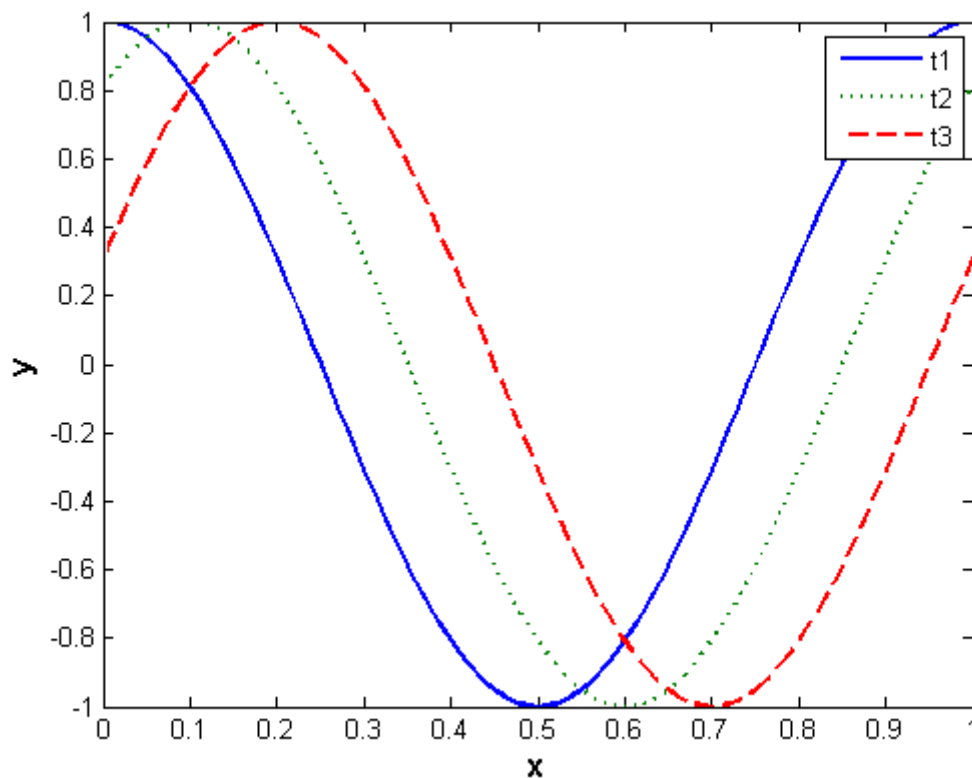


Para uma onda em uma corda de comprimento infinito não existe reflexão. Portanto, tem-se

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t) \quad (\text{A.46})$$

A equação (A.46) pode ser plotada para observar a posição da onda em diferentes instantes de tempo (figura 39).

Figura 39- Posição da onda em três diferentes instantes de tempo.

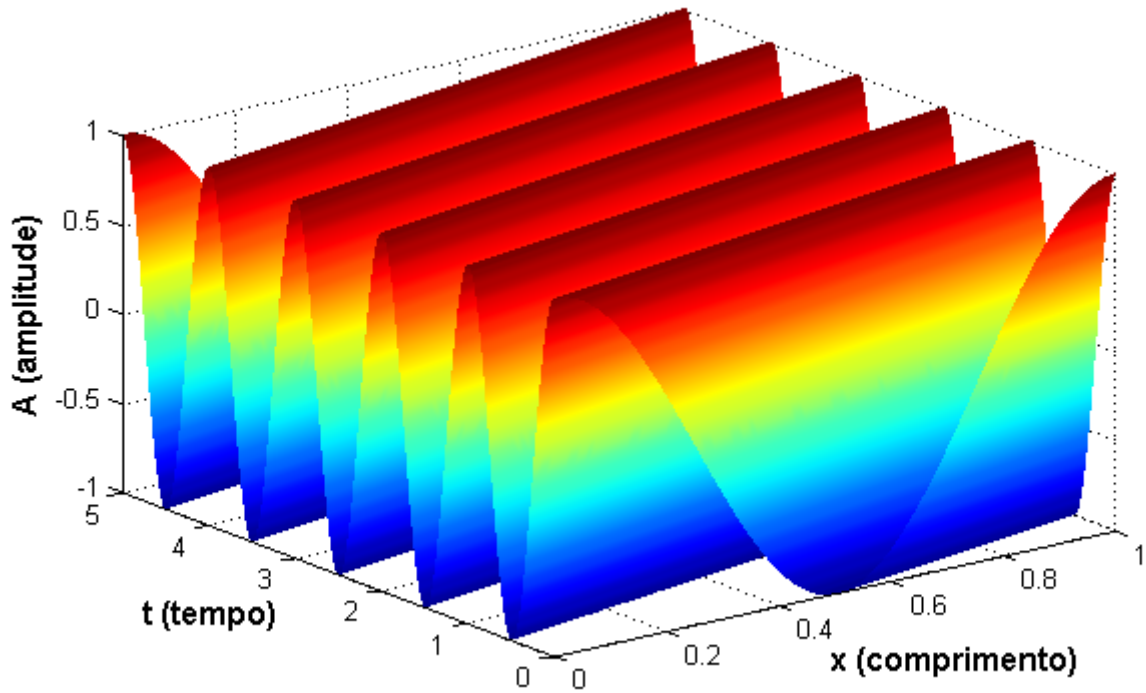


Fonte: Autoria própria.

Uma visualização global para todos os instantes de tempo é dada pelo plot 3D desta mesma equação:



Figura 40- Movimento harmônico da corda em todos os instantes de tempo.



Fonte: Autoria própria.

Solução de d'Alembert

Uma solução clássica foi apresentada por d'Alembert em 1747, permitindo grande conhecimento do fenômeno de propagação de ondas. Para tal, considera-se a equação da onda, dada pela equação (A.16):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

e introduz-se a seguinte substituição de variáveis

$$\xi = x - c_0 t \quad (\text{A.47})$$

$$\eta = x + c_0 t \quad (\text{A.48})$$

Através da regra da cadeia para derivação, tem-se

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (\text{A.49})$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -c_0 \frac{\partial y}{\partial \xi} + c_0 \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (\text{A.50})$$

A derivada segunda fornece

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \quad (\text{A.51})$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c_0^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right) \quad (\text{A.52})$$

Substituindo na equação da onda, tem-se

$$\frac{\partial^2 y(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (\text{A.53})$$

que também pode ser escrito como

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial y}{\partial \eta} \right] = 0, \text{ onde } \frac{\partial y}{\partial \eta} = g(\eta) \quad (\text{A.54})$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\partial y}{\partial \xi} \right] = 0, \text{ onde } \frac{\partial y}{\partial \xi} = f(\xi) \quad (\text{A.55})$$

Integrando diretamente, tem-se que

$$y(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta) \quad (\text{A.56})$$

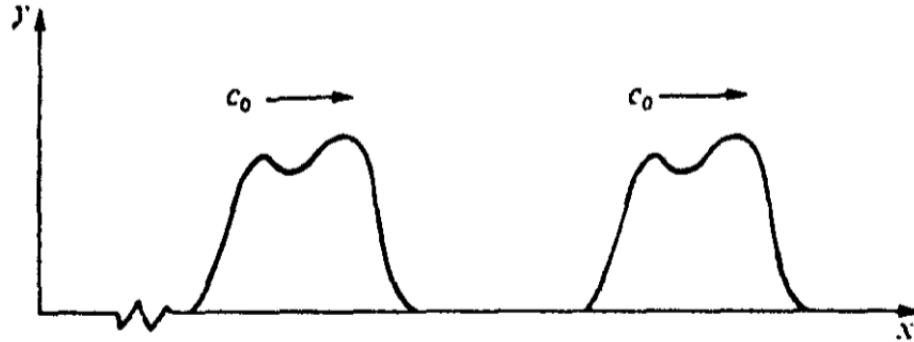
Finalmente, retornando às variáveis (x, t) tem-se a solução clássica de d'Alembert para a equação da onda

$$y(x, t) = F(x - c_0 t) + G(x + c_0 t) \quad (\text{A.57})$$

Considerando estes resultados, primeiro nota-se que F e G são funções arbitrárias de integração que serão especificamente determinadas pelas condições iniciais ou função forçada de um dado problema. Deve-se notar que estas funções representam a propagação de distúrbios. No caso de $F(x - c_0 t)$ se $x - x_0 t = cte$, a função é constante. O aumento de tempo requer o aumento dos valores de x para manter o argumento da função constante. Isto corresponde a uma onda se propagando na direção positiva de x . Similarmente, $G(x + c_0 t)$, é um distúrbio se propagando na direção negativa de x .

O segundo ponto para se enfatizar observando a equação (A.57) é que, independente da forma inicial dos distúrbios $F(x - c_0 t)$ e $G(x + c_0 t)$, esta forma é mantida durante a propagação, conforme a figura (41).

Figura 41- Propagação de um distúrbio sem distorção.



Fonte: Graff (2012).

O fato desta onda se propagar sem distorção é importante por dois motivos: ele representa a característica fundamental da equação da onda unidimensional e serve de comparação com muitos sistemas físicos onde o contrário é válido, gerando distorção do pulso durante sua propagação.

Problema de Valor Inicial

Deseja-se determinar a forma das funções resultantes da solução geral dada por (A.57) sob condições iniciais prescritas na corda. Seja

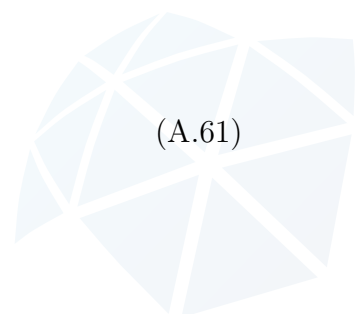
$$y(x, 0) = U(x), \quad (\text{A.58})$$

$$\dot{y}(x, 0) = V(x). \quad (\text{A.59})$$

Da solução geral da onda dada por d'Alembert, tem-se, em $t = 0$,

$$U(x) = F(x) + G(x) \quad (\text{A.60})$$

$$V(x) = -c_0 F'(x) + c_0 G'(x) \quad (\text{A.61})$$



pois, da equação (A.57), $Y = F(x - c_0 t) + G(x + c_0 t)$. Logo,

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (\text{A.62})$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -c_0 \frac{\partial F}{\partial \xi} + c_0 \frac{\partial G}{\partial \eta} \quad (\text{A.63})$$

No instante $t = 0$, $\xi = \eta = x$

$$\left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=0} = V(x) = -c_0 \frac{\partial F}{\partial x} + c_0 \frac{\partial G}{\partial x} \quad (\text{A.64})$$

$$V(x) = -c_0 \frac{\partial F}{\partial x} + c_0 \frac{\partial G}{\partial x} \quad (\text{A.65})$$

Integrando a equação (A.65) em ambos os lados da equação no intervalo $[b, x]$, onde b é arbitrário, tem-se

$$F(x) - G(x) = -\frac{1}{c_0} \int_b^x V(m) dm \quad (\text{A.66})$$

$$F(x) + G(x) = U(x) \quad (\text{A.67})$$

Somando as equações (A.66) e (A.67),

$$2F(x) = U(x) - \frac{1}{c_0} \int_b^x V(m) dm \quad (\text{A.68})$$

$$F(x) = \frac{1}{2} U(x) - \frac{1}{2c_0} \int_b^x V(m) dm \quad (\text{A.69})$$

$$G(x) = U(x) - F(x) \quad (\text{A.70})$$

$$G(x) = \frac{1}{2} U(x) + \frac{1}{2c_0} \int_b^x V(m) dm \quad (\text{A.71})$$

Assim, na solução de d'Alambert, no instante de tempo $t = 0$:

$$y(x, 0) = \frac{1}{2} U(x) - \frac{1}{2c_0} \int_b^x V(m) dm + \frac{1}{2} U(x) + \frac{1}{2c_0} \int_b^x V(m) dm = U(x) \quad (\text{A.72})$$

Para um instante de tempo qualquer diferente de 0, tem-se

$$y(x, t) = \frac{1}{2}U(x - c_0t) - \frac{1}{2c_0} \int_b^{x-c_0t} V(m)dm + \frac{1}{2}U(x + c_0t) + \frac{1}{2c_0} \int_b^{x+c_0t} V(m)dm \quad (\text{A.73})$$

$$y(x, t) = \frac{1}{2}[U(x - c_0t) + U(x + c_0t)] + \frac{1}{2c_0} \left[- \int_b^{x-c_0t} V(m)dm + \int_b^{x+c_0t} V(m)dm \right] \quad (\text{A.74})$$

$$y(x, t) = \frac{1}{2}[U(x - c_0t) + U(x + c_0t)] + \frac{1}{2c_0} \left[\int_{x-c_0t}^b V(m)dm + \int_b^{x+c_0t} V(m)dm \right] \quad (\text{A.75})$$

$$y(x, t) = \frac{1}{2}[U(x - c_0t) + U(x + c_0t)] + \frac{1}{2c_0} \left[\int_{x-c_0t}^{x+c_0t} V(m)dm \right] \quad (\text{A.76})$$

$$y(x, t) = \frac{1}{2}[U(x - c_0t) + U(x + c_0t)] + \frac{1}{2c_0} [H(x + c_0t) - H(x - c_0t)] \quad (\text{A.77})$$

onde

$$H(x + c_0t) - H(x - c_0t) = \int_{x-c_0t}^{x+c_0t} V(m)dm \quad (\text{A.78})$$

Características da Solução

Utilizando a mudança de variável:

$$\xi = x - c_0t \quad (\text{A.79})$$

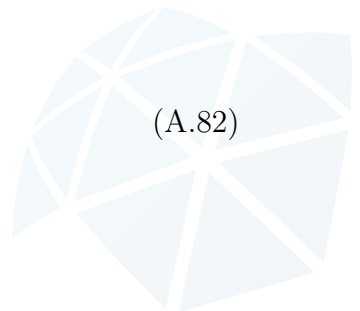
$$\eta = x + c_0t \quad (\text{A.80})$$

e fazendo

$$\xi = cte \text{ e } \eta = cte \quad (\text{A.81})$$

tem-se no plano (x, t) a representação de duas retas

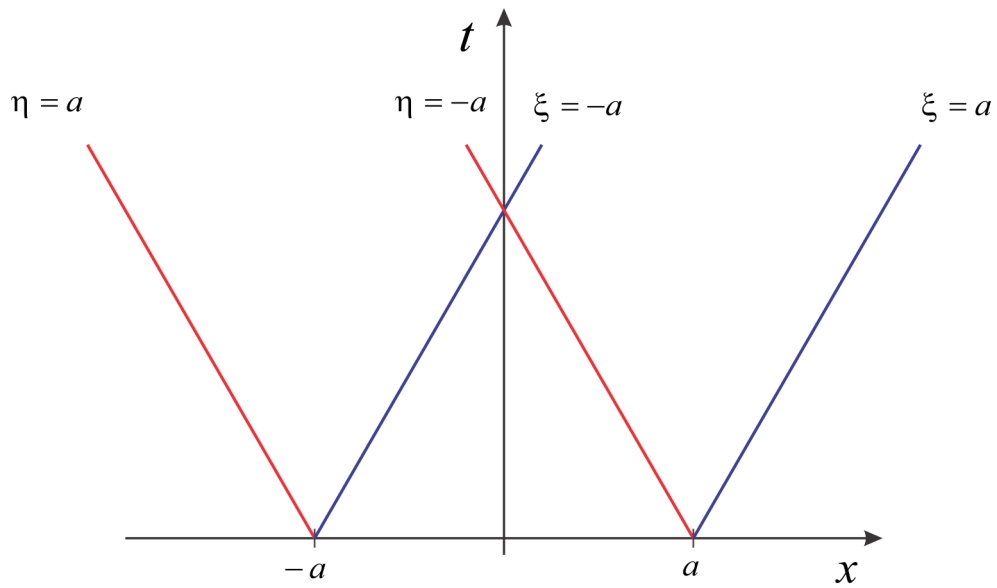
$$t = \frac{x - \eta}{c_0} \quad (\text{A.82})$$



$$t = \frac{-x + \eta}{c_0} \quad (\text{A.83})$$

Estas linhas são conhecidas como características da solução e sobre estas linhas tem-se $f(\xi) = \text{constante}$ e $g(\eta) = \text{constante}$.

Figura 42- Representação do plano característico da propagação de um distúrbio em uma corda.



Fonte: Autoria própria.

Estas linhas representam a frente de onda, porém não contém a informação sobre a amplitude. Esta representação é útil em mecânica dos fluidos, em ondas de choque e onde há muitas reflexões com a fronteira.



Tipos de Condições de Contorno

Figura 43- Condições de contorno na fronteira da corda.

Tipo	Diagrama	Equação
Fixo		$y(0,t) = 0$
Livre		$\frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = 0$
Massa		$m\ddot{y}(0,t) = T \frac{\partial y(0,t)}{\partial x}$
Mola		$k y(0,t) = T \frac{\partial y(0,t)}{\partial x}$
Amortecedor		$c\dot{y}(0,t) = T \frac{\partial y(0,t)}{\partial x}$

Fonte: Autoria própria.

Condição de Contorno Fixa - Corda Finita

Supondo que a corda esteja fixa nas extremidades, tem-se as seguintes condições de contorno:

$$C.C. \begin{cases} y(0,t) = 0 \\ y(l,t) = 0 \end{cases} \quad (A.84)$$

$$C.I. \begin{cases} Y(x,0) = U(x) \\ \dot{Y}(x,0) = V(x) \end{cases} \quad \text{para } 0 \leq x \leq l \quad (A.85)$$

As funções $U(x)$ e $V(x)$ devem se anular nos extremos para qualquer valor de t .

Para se utilizar o método de solução de d'Alembert, é necessário conhecer $U(x)$ e $V(x)$ para todos os valores de x , pois

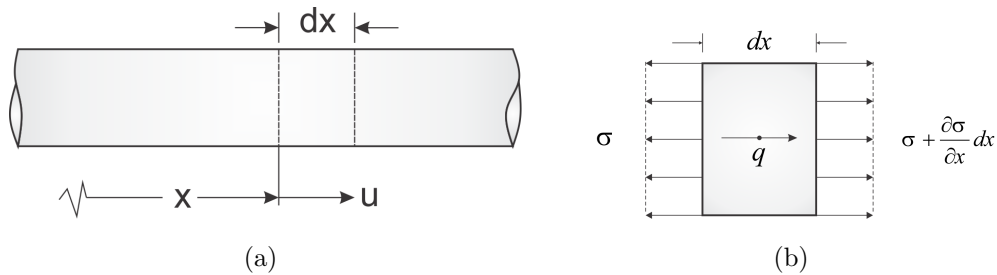
$$x \pm c_0 t \rightarrow \infty \text{ se } t \rightarrow \infty \quad (\text{A.86})$$

e aplica-se $x \pm c_0 t$ nas funções $U(x)$ e $V(x)$. Assim, para satisfazer as condições de contorno em qualquer instante de tempo, as funções $U(x)$ e $V(x)$ devem ser funções ímpares e periódicas.

A.1.2 Ondas longitudinais em uma barra fina

Fisicamente, as ondas longitudinais que se movem em uma barra são diferentes das ondas transversais que se propagam em uma corda. Contudo, matematicamente estes dois sistemas são semelhantes, assim, a mesma equação da onda que governa o movimento em uma corda, governa o movimento das ondas longitudinais e uma barra. Considere uma barra prismática e reta:

Figura 44- Representação de uma barra fina (a) e das tensões normais que atuam no seu elemento diferencial (b).



Fonte: Autoria própria.

A coordenada x se refere à posição da seção transversal da barra que está sendo analisada, enquanto o deslocamento longitudinal da seção é dada por $u(x, t)$.

Assume-se que o campo de tensão na barra $\sigma(x, t)$ é dinâmico e que $q(x, t)$ é a força de campo por unidade de volume. Logo, a equação do movimento na direção x é dada por

$$-\sigma A + \left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx\right) A + q A dx = \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{A.87})$$

reduzindo-se a:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + q = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{A.88})$$

Esta equação é válida para qualquer material, elástico ou não.

A equação (A.88) possui duas incógnitas: σ e u , para fechar o problema, precisa-se de uma outra equação, a equação constitutiva dos materiais. Supondo materiais elásticos lineares, tem-se:

$$\sigma = E\epsilon \quad (\text{A.89})$$

e

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{A.90})$$

onde E é o módulo de Young e ϵ é a deformação específica.

Assim, se $E = \text{constante}$,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[E \frac{\partial u}{\partial x} \right] + q = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{A.91})$$

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{A.92})$$

E se $q = 0$,

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{A.93})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{A.94})$$

A velocidade da onda é

$$c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\text{A.95})$$

Características Básicas de Propagação

Para propagação de ondas longitudinais, a solução de d'Alembert também é válida. Assim,

$$u(x, t) = F(x - c_0 t) + G(x + c_0 t) \quad (\text{A.96})$$

Assim, c_0 é a velocidade de propagação da onda longitudinal em uma barra sem distorção. Típicos valores da velocidade de propagação são da ordem de 5.10^3 m/s .

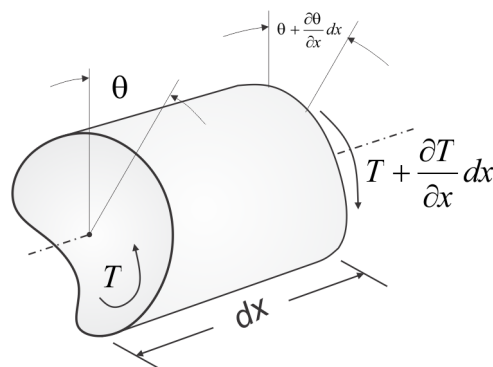
Tabela 4- Velocidade de Propagação da onda em uma barra para diversos materiais.

Material	Velocidade $10^3(m/s)$
Aço	5,06
Alumínio	5,23
Bronze	3,43
Cádmio	2,39
Chumbo	1,14
Cobre	3,58
Estanho	2,72
Ferro	5,18
Magnésio	4,90
Níquel	4,75
Ouro	2,03
Prata	2,64
Tungstênio	4,29
Zinco	3,81

Fonte: Giurgiutiu (2007).

A.1.3 Ondas Torcionais em uma Barra

Considere um elemento diferencial prismático reto sujeito a um torque variável T , conforme a figura (45).

Figura 45- Representação da aplicação de torque em um elemento diferencial prismático reto.

Fonte: Autoria própria.

O balanço dinâmico de momentos é dado por

$$-T + \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) = \rho I dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (\text{A.97})$$

onde $I = \int_A r^2 dA$ é o momento de inércia polar e ρ é a densidade por unidade de comprimento. Logo,

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (\text{A.98})$$

Sabendo que a relação do torque com o deslocamento angular pode ser escrito como

$$T = J \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{A.99})$$

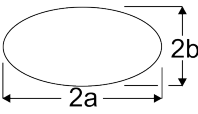
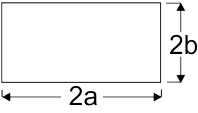
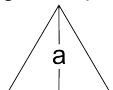
onde J é a rigidez torcional. Assim,

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\rho I}{J} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (\text{A.100})$$

onde $c_s = \sqrt{\frac{J}{\rho I}}$ é a velocidade de propagação de ondas de cisalhamento no material.

Exemplos do cálculo da rigidez torcional para diferentes seções podem ser encontrados na figura (46):

Figura 46- Rigidez torcional para diferentes seções transversais.

Forma	J (Rigidez Torcional)
Circular 	$\frac{\pi r^4}{2} G^*$
Círculos Concêntricos 	$\frac{\pi(r_o^4 - r_i^4)}{2} G$
Elipse 	$\frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} G$
Retângulo 	$\frac{a^3 b}{3} G$
Triângulo Equilátero 	$\frac{a^4}{15\sqrt{3}} G$

*G: módulo de elasticidade transversal.

Fonte: Autoria própria.



Para o caso circular, tem-se que $I = \frac{\pi r^4}{2}$. Assim,

$$c_s = \sqrt{\frac{J}{\rho I}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (\text{A.101})$$

onde

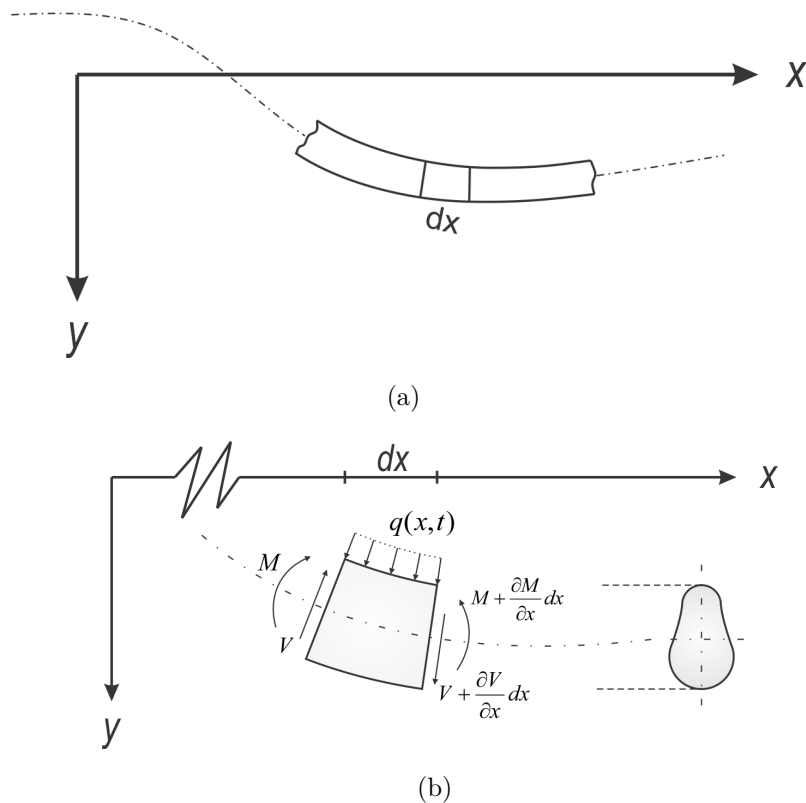
$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (\text{A.102})$$

onde ν é o coeficiente de Poisson e E é o módulo de Young.

A.1.4 Ondas de Flexão em uma viga

Considere uma viga infinita, conforme mostrado na figura (47-a) e seu elemento diferencial (47-b)

Figura 47- Representação de uma viga sofrendo um movimento transversal (a) e de seu elemento diferencial sob diversos carregamentos (b).



Fonte: Autoria própria.

onde,

M : momento de flexão;

V : força cisalhante;

$q(x, t)$: força distribuída.

A equação de movimento para as forças verticais é dada por:

$$-V + \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx\right) + q dx = \rho A dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (\text{A.103})$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} + q = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (\text{A.104})$$

Desprezando os momentos de inércia de rotação

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \quad (\text{A.105})$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + q = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (\text{A.106})$$

Para pequenas deformações, pode-se associar o deslocamento na viga com o momento interno aplicado.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{M}{EI} \quad (\text{A.107})$$

Assim, isolando M em (A.107) e substituindo em (A.106), tem-se

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + q = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (\text{A.108})$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + q = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (\text{A.109})$$

A equação (A.109) representa a equação governante do problema. Se a carga externa for nula $q = 0$. Supondo que o material da viga é homogêneo, então E é uma constante, e supondo que a seção transversal é constante, I é constante.

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A.110})$$

$$a^2 = \frac{EI}{\rho A} \quad (\text{A.111})$$

A equação (A.111) não segue o modelo da equação da onda apresentada até o momento.

Assim, a não representa a velocidade de propagação da onda.

A restrição feita sobre a viga ser homogênea não é fundamental, ou seja, vigas que não são homogêneas devem ser analisadas a partir da equação (A.109), o que aumenta a complexidade matemática do problema.

Uma solução para a equação (A.110) é dada pelo método de separação das variáveis:

$$y(x, t) = \hat{Y}(x)e^{i\omega t} \quad (\text{A.112})$$

onde $\hat{Y}$ é função apenas de x .

Substituindo em (A.110)

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4}[\hat{Y}(x)e^{i\omega t}] + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}[\hat{Y}(x)e^{i\omega t}] = 0 \quad (\text{A.113})$$

$$\frac{d^4 \hat{Y}(x)}{dx^4} (e^{i\omega t}) + \frac{1}{a^2} \hat{Y}(x) \frac{d^2 (e^{i\omega t})}{dt^2} = 0 \quad (\text{A.114})$$

$$\frac{d^4 \hat{Y}(x)}{dx^4} (e^{i\omega t}) + \frac{1}{a^2} \hat{Y}(x) e^{i\omega t} (i\omega)^2 = 0 \quad \div e^{i\omega t} \quad (\text{A.115})$$

$$\frac{d^4 \hat{Y}(x)}{dx^4} + \frac{1}{a^2} \hat{Y}(x) i^2 \omega^2 = 0 \quad i^2 = -1 \quad (\text{A.116})$$

$$\frac{d^4 \hat{Y}(x)}{dx^4} - \frac{1}{a^2} \hat{Y}(x) \omega^2 = 0 \quad (\text{A.117})$$

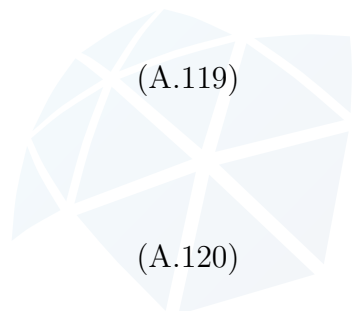
e fazendo

$$k_*^4 = \frac{\omega^2}{a^2} \quad \therefore k_* = \sqrt{\frac{\omega}{a}} \quad (\text{A.118})$$

$$\frac{d^4 \hat{Y}(x)}{dx^4} - k_*^4 \hat{Y}(x) = 0 \quad (\text{A.119})$$

Admitindo que a solução de (A.119) é dada por:

$$\hat{Y}(x) = C e^{rx} \quad (\text{A.120})$$



Substituindo (A.120) em (A.119), obtém-se a equação característica da EDO de 4ª ordem:

$$Cr^4e^{rx} - k_*^4Ce^{rx} = 0 \quad \div Ce^{rx} \quad (\text{A.121})$$

$$r^4 - k_*^4 = 0 \quad (\text{A.122})$$

As raízes da equação característica (A.122) são:

$$\begin{cases} r_1 = k_* \\ r_2 = -k_* \\ r_3 = ik_* \\ r_4 = -ik_* \end{cases} \quad (\text{A.123})$$

Logo, a solução geral de (A.119) baseada em (A.120) é dada por

$$\hat{Y}(x) = A_1e^{k_*x} + A_2e^{-k_*x} + A_3e^{ik_*x} + A_4e^{-ik_*x} \quad (\text{A.124})$$

A equação (A.124) é válida, pois cada termo é uma solução de (A.119) e todas as soluções formam um conjunto independente, ou seja, a função solução é composta por soluções linearmente independentes entre si.

A solução (A.124) pode ser reescrita de forma alternativa

$$\hat{Y}(x) = C_1 \sinh(k_*x) + C_2 \cosh(k_*x) + C_3 \sin(k_*x) + C_4 \cos(k_*x) \quad (\text{A.125})$$

onde as constantes C_1 , C_2 , C_3 e C_4 são encontradas a partir das condições de contorno.

Exemplo de condição de contorno:

Suponha que a viga seja biapoiada, conforme mostra a figura (48), e receba um pulso inicial para excitá-la,



Figura 48- Representação de uma viga biapoiaada.



Fonte: Autoria própria.

Assim, as condições de contorno às quais a viga está sujeita são:

Não há deslocamento nos extremos:

$$\begin{cases} y(0, t) = 0 \\ y(l, t) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.126})$$

Não há momentos aplicados nos extremos ou momentos internos:

$$\begin{cases} M(0, t) = 0 \\ M(l, t) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.127})$$

Assim, usando as equações (A.112) e (A.107) em (A.126), tem-se

$$\begin{cases} \hat{Y}(0) = 0 \\ \hat{Y}(l) = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \frac{d^2 \hat{Y}(0)}{dx^2} = 0 \\ \frac{d^2 \hat{Y}(l)}{dx^2} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.128})$$

Aplicando as condições de contorno de (A.128) na equação (A.125)

$$\begin{cases} C_1 \sinh(0) + C_2 \cosh(0) + C_3 \sin(0) + C_4 \cos(0) = 0 \\ C_1 \sinh(k_* l) + C_2 \cosh(k_* l) + C_3 \sin(k_* l) + C_4 \cos(k_* l) = 0 \\ k^2 [C_1 \sinh(0) + C_2 \cosh(0) - C_3 \sin(0) - C_4 \cos(0)] = 0 \\ k^2 [C_1 \sinh(k_* l) + C_2 \cosh(k_* l) - C_3 \sin(k_* l) - C_4 \cos(k_* l)] = 0 \end{cases} \quad (\text{A.129})$$

Simplificando, tem-se:

$$\begin{cases} C_2 + C_4 = 0 \\ C_1 \sinh(k_* l) + C_2 \cosh(k_* l) + C_3 \sin(k_* l) + C_4 \cos(k_* l) = 0 \\ C_2 - C_4 = 0 \\ C_1 \sinh(k_* l) + C_2 \cosh(k_* l) - C_3 \sin(k_* l) - C_4 \cos(k_* l) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.130})$$

onde $C_2 = C_4 = 0$, então

$$\begin{cases} C_1 \sinh(k_* l) + C_3 \sen(k_* l) = 0 \\ C_1 \sinh(k_* l) - C_3 \sen(k_* l) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.131})$$

Portanto, $C_1 = 0$, pois $\sinh(k_* l) \neq 0$ se $k_* l \neq 0$. Logo,

$$C_3 \sen(k_* l) = 0 \quad (\text{A.132})$$

e como $C_3 \neq 0$,

$$\sen(k_* l) = 0 \quad (\text{A.133})$$

A equação (A.133) é uma equação característica que define os auto-valores k_* para os quais existe uma solução de (A.125) que não seja a trivial. Logo,

$$k_* l = \pi, 2\pi, 3\pi \dots \therefore k_* = \frac{n\pi}{l} \quad \text{onde } n \in \mathbb{Z}^+ \quad (\text{A.134})$$

então,

$$\hat{Y}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad \text{onde } n \in \mathbb{Z}^+ \quad (\text{A.135})$$

Portanto, a solução geral é dada por

$$Y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right) e^{i\omega t} \quad (\text{A.136})$$

Observação: o valor da constante C_n pode ser escolhida de forma arbitrária. Assim, se $C_n = 1$:

$$Y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right) e^{i\omega t} \quad (\text{A.137})$$

Da equação (A.118), tem-se $k_*^2 = \frac{\omega}{a}$ e $a^2 = \frac{EI}{\rho A}$. Portanto,

$$\omega = k_*^2 a \quad \therefore \quad \omega = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (\text{A.138})$$

A.2 PROPAGAÇÃO DE ONDAS BIDIMENSIONAIS EM UMA PLACA

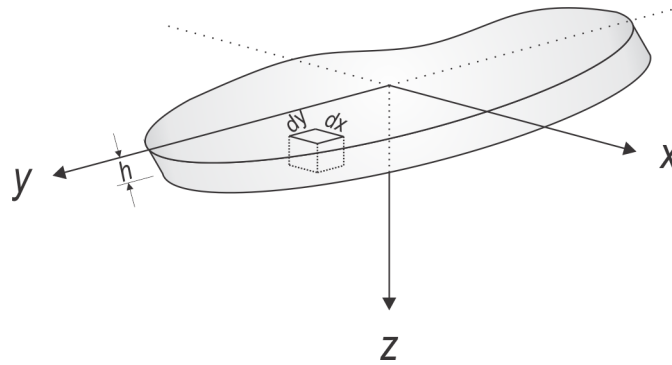
A propagação de ondas em uma placa é análoga a uma viga, porém, em duas dimensões. Considera-se então o sistema como bidimensional e elástico, onde existe momento de flexão e forças internas cisalhantes, assim como na viga.

A.2.1 Ondas de Flexão em uma Placa

Equação Governante

Seja uma placa de espessura h e infinita nas outras direções, como mostra a figura (49).

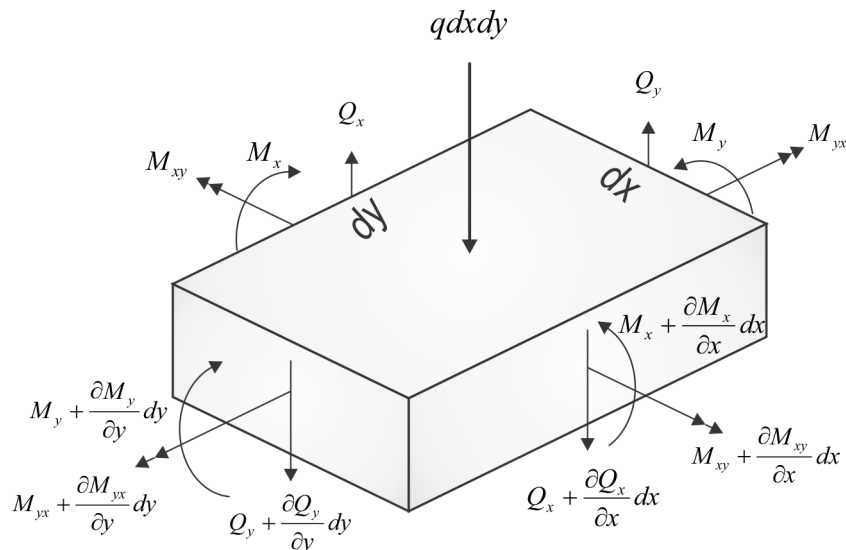
Figura 49- Representação de uma placa de espessura h e infinita nas outras direções.



Fonte: Autoria própria.

Considere também um elemento diferencial $h dx dy$ na placa, como mostra a figura (50).

Figura 50- Representação do elemento diferencial da placa.



Fonte: Autoria própria.

O elemento diferencial representado na figura (50) apresenta várias forças cisalhantes, carga externa e momentos de flexão e de torção. Os momentos de flexão por unidade de comprimento, M_x e M_y são provenientes da distribuição das tensões normais σ_x e

σ_y , enquanto os momentos torcionais por unidade de comprimento (M_{xy} e M_{yx}) são provenientes das tensões cisalhantes τ_{xy} e τ_{yx} . As forças cisalhantes por unidade de comprimento Q_x e Q_y são provenientes das tensões cisalhantes τ_{xz} e τ_{xy} . Portanto, existem 3 equações do movimento para as **forças**, mas somente a que corresponde à direção z não é trivial. Quanto às três equações do movimento para os **momentos**, a correspondente à direção z é nula. Assim, as três equações do movimento restantes são:

$$-Q_x dy + \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy - Q_y dx + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx + q dx dy = \rho h dx dy \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (\text{A.139})$$

$$\left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx - M_y dx + M_{xy} dy - \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right) dy - Q_y dx dy = 0 \quad (\text{A.140})$$

$$\left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy - M_x dy - M_{yx} dx + \left(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy \right) dx - Q_x dy dx = 0 \quad (\text{A.141})$$

O deslocamento $W(x, y, t)$ que aparece na equação (A.139) representa a deflexão no meio da placa. É importante notar que os efeitos devido à inércia de rotação foram desprezados nas equações (A.140) e (A.141). Logo, simplificando essas equações, tem-se:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (\text{A.142})$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \quad (\text{A.143})$$

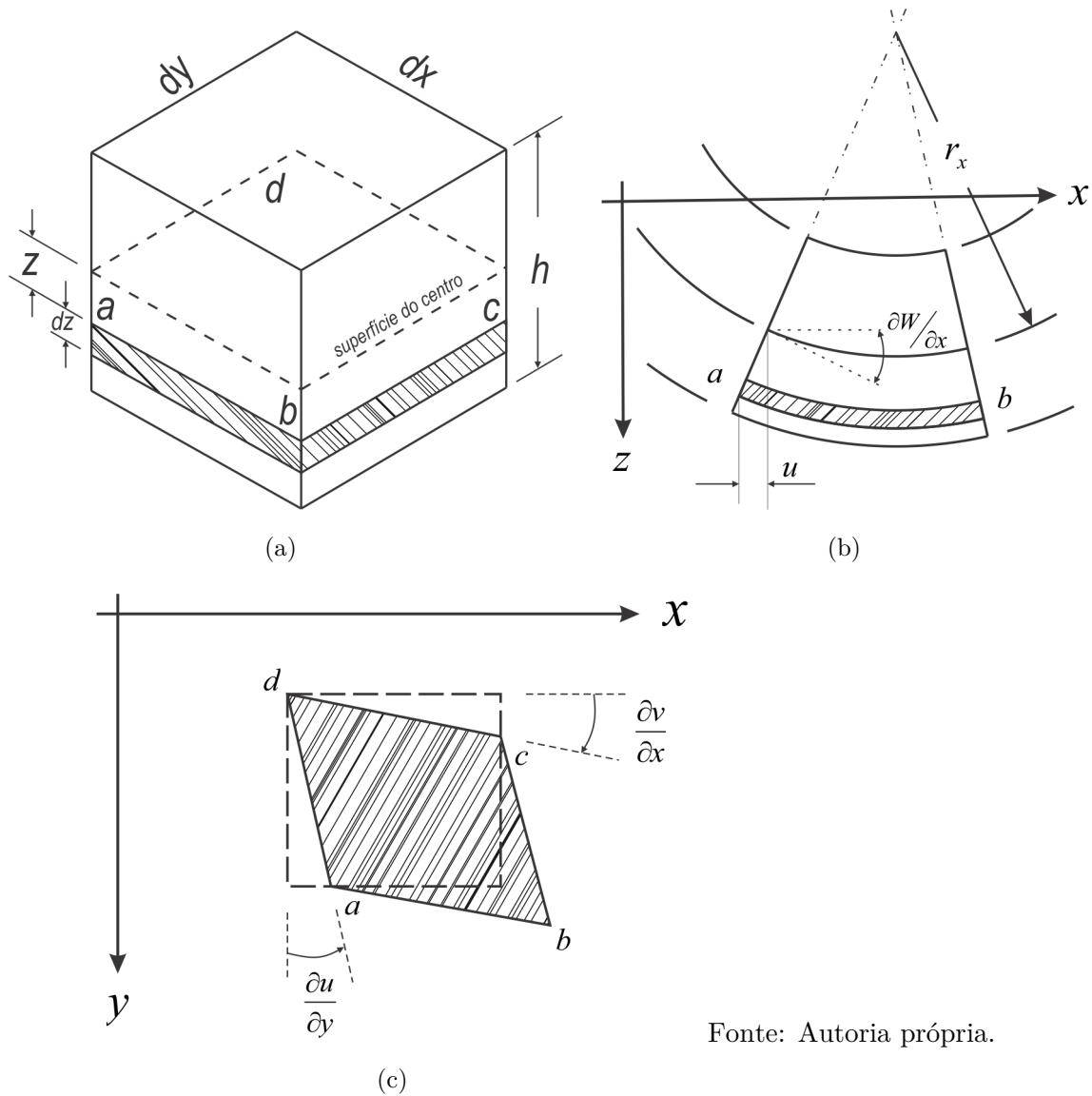
$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (\text{A.144})$$

Isolando Q_x e Q_y nas equações (A.143) e (A.144) e substituindo em (A.142), tem-se

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (\text{A.145})$$

Agora, deve-se estabelecer a relação entre os momentos e a deflexão e também introduzir a definição de deformação cinética. A figura (51) mostra os principais aspectos da deformação cinética da placa.

Figura 51- Elemento diferencial da placa com uma lâmina $abcd$ sombreada (a); Vista lateral do elemento durante flexão (b); Vista superior da lâmina mostrando deformação cisalhante.



Fonte: Autoria própria.

Um típico elemento diferencial (lâmina $abcd$) é mostrado na figura (51-a). Este elemento é localizado a uma distância z do centro da placa. Supondo que o elemento esteja sujeito a uma carga de flexão pura, assume-se que as deformações que o elemento sofre estão mostradas na figura (51-b).

Uma hipótese necessária é que as seções transversais se mantêm planas e perpendiculares ao plano neutro (meio da placa), exatamente como acontece em uma viga de Euler-Bernoulli. O comportamento mostrado na figura (51-b) ocorre no plano xz e no plano yz . Assim, as deformações normais da lâmina são dadas por

$$\epsilon_x = \frac{z}{r_x} ; \epsilon_y = \frac{z}{r_y} \quad (\text{A.146})$$

onde r_x e r_y são os raios de curvatura nos planos $x-z$ e $y-z$. Se as deformações e inclinações forem consideradas muito pequenas, a curvatura (r^{-1}) pode ser aproximada por $-\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ e $-\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$. Então, de (A.146) tem-se

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} ; \quad \epsilon_y = -z \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \quad (\text{A.147})$$

Ao analisar a figura (51-c), percebe-se que ela mostra as deformações cisalhantes às quais a lâmina está sujeita (apenas rotações). As rotações dos lados são dadas por $\frac{\partial u}{\partial y}$ e $\frac{\partial v}{\partial x}$, onde u e v são deslocamentos na direção x e y , respectivamente. A deformação cisalhante de engenharia sofrida pela placa é

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{A.148})$$

Através da figura (51-b), nota-se que os deslocamentos u e v podem ser aproximados por $u = -z \frac{\partial W}{\partial x}$ e $v = -z \frac{\partial W}{\partial y}$. Assim, de (A.148), tem-se

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \quad (\text{A.149})$$

Portanto, aplicando a Lei de Hooke Generalizada, tem-se

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.150})$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \quad (\text{A.151})$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = -2Gz \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \quad (\text{A.152})$$

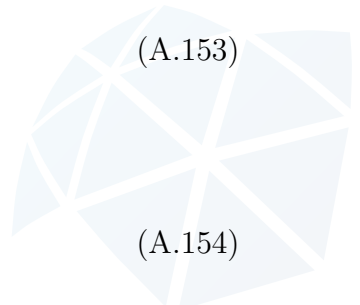
Desta forma, pode-se encontrar as expressões que relacionam os momentos e os deslocamentos.

Considerando que a face onde a tensão normal σ_x atua é hdy , o momento devido a esta tensão é dado por

$$M_x dy = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dy dz \quad M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz \quad (\text{A.153})$$

Substituindo (A.150) em (A.153) e integrando, tem-se

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.154})$$



onde

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (\text{A.155})$$

De forma similar,

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \quad (\text{A.156})$$

e, para o momento de torção M_{xy} ,

$$M_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xy} dz \quad (\text{A.157})$$

Substituindo (A.152) em (A.157),

$$M_{xy} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \quad (\text{A.158})$$

Sabe-se também que $M_{xy} = -M_{yx}$. Portanto, substituindo as equações (A.154), (A.156) e (A.158) em (A.145), obtém-se

$$D \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) - q = -\rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (\text{A.159})$$

Manipulando a equação entre parêntesis,

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = \nabla^2 \nabla^2 W \quad (\text{A.160})$$

O Laplaciano do Laplaciano é também conhecido como **operador biharmônico**, $\nabla^4() = \nabla^2 \nabla^2 ()$.

Portanto, a equação governante para o movimento das ondas em uma placa fina é dada por

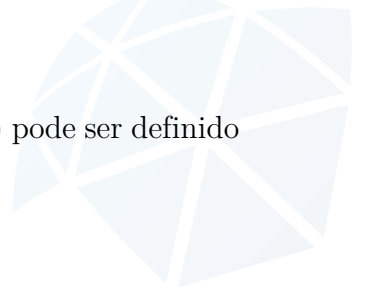
$$D \nabla^4 W(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 W(x, y, t)}{\partial t^2} = q(x, y, t) \quad (\text{A.161})$$

que também pode ser escrita em coordenadas polares

$$D \nabla^4 W(r, \theta, t) + \rho h \frac{\partial^2 W(r, \theta, t)}{\partial t^2} = q(r, \theta, t) \quad (\text{A.162})$$

onde o Laplaciano $\nabla^2()$ é dado em coordenadas polares.

Supondo que o movimento harmônico $W(x, y, t)$ da equação (A.161) pode ser definido



da seguinte forma

$$W(x, y, t) = \hat{W}(x, y)e^{i\omega t} \quad (\text{A.163})$$

e que a carga externa é nula, $q(x, y, t) = 0$, a equação (A.161) se torna

$$D \nabla^4 (\hat{W}e^{i\omega t}) + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\hat{W}e^{i\omega t}) = 0 \quad (\text{A.164})$$

$$D \nabla^4 (\hat{W})e^{i\omega t} + \rho h \hat{W}(i\omega)^2 e^{i\omega t} = 0 \quad (\text{A.165})$$

$$D \nabla^4 [\hat{W}(x, y)] - \rho h \omega^2 \hat{W}(x, y) = 0 \quad (\text{A.166})$$

Introduzindo o parâmetro $k_{**}^4 = \frac{\rho h}{D} \omega^2$, tem-se

$$(\nabla^4 - k_{**}^4) \hat{W} = 0 \quad (\text{A.167})$$

Em alguns momentos é conveniente utilizar a equação (A.167) na seguinte forma:

$$(\nabla^2 - k_{**}^2)(\nabla^2 + k_{**}^2) \hat{W} = 0 \quad (\text{A.168})$$

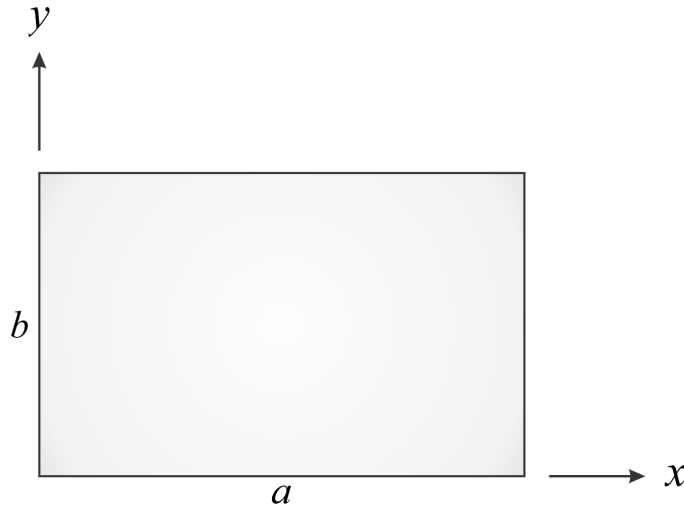
Usando o teorema das equações diferenciais, a solução completa de (A.168) pode ser obtida pela superposição das soluções, que são encontradas pelo seguinte sistema de EDPs de 2ª ordem

$$\begin{cases} (\nabla^2 + k_{**}^2) \hat{W}_1 = 0 \\ (\nabla^2 - k_{**}^2) \hat{W}_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.169})$$

Ondas de Flexão em uma Placa Retangular Biapoiada

A forma geral da onda de flexão em uma placa retangular, representada na figura (52), é obtida para resolver a equação (A.167) para a função $\hat{W}(x, y)$, que depende apenas do espaço (x, y) . Se for finita, esta placa estará sujeita a condições de contorno. Neste exemplo, considera-se apenas uma placa biapoiada.



Figura 52- Placa finita biapoiada.

Fonte: Autoria própria.

As condições de contorno aplicadas na placa são

$$\begin{cases} W = 0, M_x = 0 \text{ se } x = 0 \text{ e } x = a \\ W = 0, M_y = 0 \text{ se } y = 0 \text{ e } y = b \end{cases} \quad (\text{A.170})$$

Expressando essas condições de contorno em termos das equações (A.154) e (A.156), obtém-se

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \text{ para } x = 0 \text{ e } x = a \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \text{ para } y = 0 \text{ e } y = b \end{cases} \quad (\text{A.171})$$

Usando o método de separação das variáveis apresentado na equação (A.163), o problema se torna encontrar os modos de oscilação, $\hat{W}(x, y)$. Examinando as equações (A.170) e (A.171), percebe-se que ambas podem ser satisfeitas utilizando funções harmônicas com nós nas fronteiras. Sendo assim, a solução geral no espaço para o movimento de ondas em uma placa retangular biapoiada é dada por

$$\hat{W}_{mn} = A_{mn} \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (\text{A.172})$$

onde A_{mn} é a amplitude do modo de vibração. Portanto,

$$W(x, y, t) = A_{mn} \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i\omega t} \quad (\text{A.173})$$

Substituindo (A.172) em (A.166), tem-se

$$D \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \right] \hat{W} - \rho h \hat{W} \omega^2 = 0 \quad (\text{A.174})$$

Desta forma, podemos escrever a equação da frequência ω como

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \quad (\text{A.175})$$

