



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Estudos Teóricos e Numéricos de Escoamentos com Escorregamento

Caroline Viezel

Orientadora: Profa. Dra. Gilcilene Sanchez de Paulo

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Maio de 2015

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Estudos Teóricos e Numéricos de Escoamentos com Escorregamento

Caroline Viesel

Orientadora: Profa. Dra. Gilcilene Sanchez de Paulo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Maio de 2015

FICHA CATALOGRÁFICA

V727e Viesel, Caroline.
Estudos teóricos e numéricos de escoamentos com escorregamento /
Caroline Viesel. - Presidente Prudente : [s.n.], 2015
120 p.

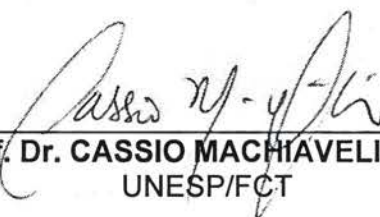
Orientador: Gilcilene Sanchez de Paulo
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de
Ciências e Tecnologia
Inclui bibliografia

1. Soluções analíticas. 2. Condição de contorno com escorregamento. 3.
Escoamentos Poiseuille não-Newtonianos. I. Paulo, Gilcilene Sanchez de. II.
Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. III.
Título.

BANCA EXAMINADORA



Profa. Dra. GILCILENE SANCHEZ DE PAULO
ORIENTADOR



Prof. Dr. CASSIO MACHIAVELI OISHI
UNESP/FCT



Prof. Dr. LUIS JORGE LIMA FERRÁS
Universidade do Minho



CAROLINE VIEZEL

Presidente Prudente (SP), 05 de maio de 2015.

Resultado: APROVADA

*Dedico a Deus e a minha família...
pelo apoio, força, amparo e
compreensão.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aquele que é o sentido primordial de minha existência... Deus! Agradeço a minha família em especial a meu pai Paulo, minha mãe Ana e a meus irmãos Juliana, Nayara e José Augusto que foram a base sólida responsável por todas as realizações almejadas até aqui. Quero agradecer uma pessoa muito especial que é sinônimo de força e que tem me inspirado a não desistir de meus objetivos, meu avô José. Obrigada pelo exemplo de vida!

Quero agradecer em especial a Professora Gilcilene Sanchez de Paulo pelo conhecimento, ensinamentos, convívio e entusiasmo transmitidos em mais de cinco anos de orientação. Orientação esta que proporcionou momentos memoráveis, os quais não teriam acontecido sem sua paciência e dedicação em minha formação. Agradeço também, aos docentes do departamento de matemática e computação da FCT - Unesp, entre eles os professores Messias Meneguette e Cassio Oishi, pela contribuição em minha formação na área de matemática computacional. Também são lembrados aqui os funcionários da FCT - Unesp na pessoa do técnico Fernando Pacanelli pelo suporte tecnológico e a seção de Pós-Graduação pela disponibilidade e auxílio quando necessário.

Gostaria de agradecer aos professores convidados para a banca de qualificação e defesa, Professor Luis Ferrás e novamente Professor Cassio Oishi por seus comentários e sugestões para finalização deste trabalho.

Agora, quero deixar exposta minha gratidão as pessoas com as quais convivi durante esses dois anos de mestrado compartilhando de todos os momentos, sejam eles estranhos, alegres ou até mesmo tristes: Heloísa, Junior, Paola, Jonas, Cíntia, Bruno, Joyce e Rafael. Agradeço também Irineu, Hemily, Clóvis, Merejolli, Larissa, Rafael (pão), José Vanterler e Mariane pelo convívio, troca de ideias e ajuda sempre que solicitados. Agradeço em especial a Daiane (Dai) pelo apoio, troca de experiências, disponibilidade e ajuda.

Agradeço aos meus amigos Karina, Greg, Yugi, Gustavo, Crislaine (Cris), Adriano, Patrícia e Carol pelos conselhos, apoio e torcida!

A FAPESP e CAPES agradeço pelo suporte financeiro.

*“ Sê humilde para evitar o orgulho,
mas voa alto para alcançar a sabedoria.”*
Santo Agostinho

Resumo

Neste trabalho são apresentados os resultados dos estudos teórico e numérico de escoamentos Newtoniano e viscoelástico *Poiseuille* com base no modelo sPTT (*simplified Phan-Thien-Tanner*), considerando uma velocidade de escorregamento na parede descrita pela lei de escorregamento Navier-linear. No estudo teórico foi exposta a solução analítica para o referido problema de escoamentos incompressíveis e isotérmicos. As contribuições numéricas deste trabalho são a extensão da metodologia apresentada em [33] para escoamentos com escorregamento na parede. Nessa extensão, os escoamentos com escorregamento poderão ser de fluidos Newtonianos ou viscoelásticos, entretanto, a implementação foi adaptada e verificada apenas para escoamentos confinados. Nos estudos numéricos, será apresentada a estratégia de imposição da velocidade de escorregamento na parede, a qual depende da derivada da velocidade e, adicionalmente no caso viscoelástico, da componente cisalhante do tensor extra-tensão. Outras pequenas, porém importantes, alterações necessárias em decorrência da condição *slip* também são destacadas. No contexto numérico, a solução analítica será empregada para a verificação da implementação numérica, possibilitando apresentar as análises de convergência da solução numérica para a solução analítica.

Palavras-Chave: *Soluções analíticas, Condição de contorno com escorregamento, Simulação computacional, Escoamentos Poiseuille não-Newtonianos.*

Abstract

In this work we present theoretical and numerical results by studying Newtonian and viscoelastic *Poiseuille* flow based on sPTT model (*simplified Phan-Thien-Tanner*), considering a slip velocity on the wall described by the Navier-linear slip law. The theoretical study aims to expose an analytical solution for the problem mentioned above about incompressible and isothermal flow. The numerical contributions of this work is the extension of the methodology presented in [33] to flows under slip wall condition. In this extension, the flows are either Newtonian or viscoelastic fluids; however, an implementation has only been adapted and verified for confined flows. In the numerical studies will be presented a strategy for imposing the slip velocity on the wall, which depends on the derivative of the velocity and additionally, in the viscoelastic case, the shear component of the extra-stress tensor. Other small, but important, changes due to the wall slip condition will also be highlighted. In numeric context, the analytical solution will be used to verify the numerical implementation, what enables presenting the convergence analysis of the numerical solution to the analytical solution.

Keywords: *Analytical solutions, Boundary condition under slip, Computational simulation, non-Newtonian Poiseuille Flows.*

Lista de Figuras

2.1	Representação do vetor velocidade na parede.	29
3.1	Ilustração do domínio do canal.	37
3.2	Solução analítica do perfil de velocidade do escoamento no canal de um fluido Newtoniano para diferentes valores de k_{nl}	48
3.3	Solução analítica do perfil de velocidade e tensores de um escoamento no canal do fluido sPTT com contribuição do solvente Newtoniano utilizando diferentes valores de k_{nl}	48
3.4	Perfis das soluções analíticas dos modelos Newtoniano e viscoelásticos admitindo a existência e não existência de uma velocidade de escorregamento na parede, onde (a) apresenta o perfil de velocidade e (b) e (c) os perfis de solução para os tensores extra-tensão T^{xx} e T^{xy} , respectivamente, apenas para os modelos viscoelásticos.	49
4.1	Estrutura da célula deslocada utilizada pela metodologia numérica.	52
4.2	Exemplo de classificação das células em um canal confinado no Freeflow-2D.	52
4.3	Representação da parede paralela a x onde (a) ilustra a discretização da velocidade e (b) a discretização do tensor.	58
4.4	Representação da parede paralela a y onde (a) ilustra a discretização da velocidade e (b) a discretização do tensor.	62
4.5	Representação da discretização da equação do momento na direção x em uma célula adjacente a parede superior.	65
4.6	Ilustração de um tipo de configuração de células do injetor.	67
4.7	Ilustração de um tipo de configuração de células do ejetor.	68
4.8	Ilustração de um tipo de configuração de células de <i>inflow</i> ou fronteira rígida paralela ao eixo x	69
4.9	Ilustração de um tipo de configuração de células de <i>inflow</i> ou fronteira rígida paralela ao eixo x para determinar o cálculo das derivadas de primeira ordem da velocidade.	73
4.10	Ilustração de um tipo de configuração de células de <i>inflow</i> ou fronteira rígida paralela ao eixo y para determinar o cálculo das derivadas de primeira ordem da velocidade.	74
5.1	Representação do canal $10m \times 1m$ paralelo ao eixo x	78
5.2	Soluções analíticas (linha contínua) e numéricas (símbolos) do perfil de velocidade u obtidas pelo modelo Newtoniano com $k_{nl} = 0.0, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 0.1, 1.0$ e 10.0 . (b) ampliação de (a), $y/L \in [0.28, 0.38]$	79
5.3	Comparação entre os perfis de velocidade analítico e numérico do modelo Newtoniano nas malhas M_1 e M_2 considerando $k_{nl} = 10^{-2}$	80

5.4	Erros relativos das soluções numéricas para o perfil de velocidade u do modelo Newtoniano com relação ao espaçamento $\delta x = \delta y$ utilizados nas malhas M_1 e M_2	81
5.5	Comportamento do Erro da velocidade, calculado por (5.3), ao longo do tempo de simulação do modelo Newtoniano na malha M_2 , utilizando dois valores para critério de parada dos sistemas lineares, $10e - 10$ e $10e - 05$. Nas duas simulações considerou-se $k_{nl} = 0.01$	81
5.6	Simulação da velocidade de escoamento no canal de um fluido Newtoniano com $Re = 0.1$, considerando a condição no-slip na parede.	82
5.7	Simulação da velocidade de escoamento no canal de um fluido Newtoniano com $Re = 0.1$, considerando a condição slip na parede, $k_{nl} = 0.1$	82
5.8	Soluções analíticas (linha contínua) e numéricas (símbolos) do perfil de velocidade u obtidas pelo modelo sPTT com $k_{nl} = 0.0, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 0.1, 1.0$ e 10.0 . (b) ampliação de (a), $y/L \in [0.22, 0.48]$	83
5.9	Soluções analíticas (linha contínua) e numéricas (símbolos) da componente T^{xx} do tensor simétrico $\mathbf{T}$ obtidas pelo modelo sPTT com $k_{nl} = 0.0, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 0.1, 1.0$ e 10.0 . (b) ampliação de (a), $y/L \in [0.0, 0.12]$	83
5.10	Soluções analíticas (linha contínua) e numéricas (símbolos) da componente T^{xy} do tensor simétrico $\mathbf{T}$ obtidas pelo modelo sPTT com $k_{nl} = 0.0, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 0.1, 1.0$ e 10.0 . (b) ampliação de (a), $y/L \in [-0.06, 0.06]$	84
5.11	Comparação entre os perfis de velocidade analítico e numérico do modelo sPTT nas malhas M_1 e M_2 considerando $k_{nl} = 10^{-2}$	85
5.12	Comparação entre as soluções de T^{xx} analítico e numérico do modelo sPTT nas malhas M_1 e M_2 considerando $k_{nl} = 10^{-2}$	85
5.13	Comparação entre as soluções de T^{xy} analítico e numérico do modelo sPTT nas malhas M_1 e M_2 considerando $k_{nl} = 10^{-2}$	85
5.14	Erros relativos das soluções numéricas de (a) u , (b) T^{xx} e (c) T^{xy} do modelo sPTT com relação ao espaçamento $\delta x = \delta y$ utilizados nas malhas M_1 e M_2	86
5.15	Evolução do Erro da velocidade do modelo sPTT ao longo do tempo. O erro foi calculado usando (5.3). Nas simulações considerou-se como critério de parada para os sistemas lineares $10e - 10$ e $10e - 05$ e $k_{nl} = 0.01$	87
5.16	Evolução do Erro dos tensores do modelo sPTT ao longo do tempo. O erro foi calculado usando (5.4). Nas simulações considerou-se como critério de parada para os sistemas lineares $10e - 10$ e $10e - 05$ e $k_{nl} = 0.01$	87
5.17	Perfil da velocidade u no escoamento em um canal com um fluido sPTT. $Re = 0.1, k_{nl} = 0.1$	87
5.18	Perfil do tensor T^{xx} no escoamento em um canal com um fluido sPTT. $Re = 0.1, k_{nl} = 0.1$	88
5.19	Perfil do tensor T^{xy} no escoamento em um canal com um fluido sPTT. $Re = 0.1, k_{nl} = 0.1$	88
5.20	Localização do ponto utilizado para calcular o erro relativo da velocidade u_{slip} na parede e localização do ponto onde é determinado o gradiente de pressão p_x	89
5.21	Velocidade de escorregamento u_{slip} analítica e numérica (em um ponto na parede do canal) <i>versus</i> a constante de fricção k_{nl} , utilizando $Re = 0.1$. (a) modelo Newtoniano (b) modelo sPTT.	89
5.22	Erros relativos entre a velocidade de escorregamento numérica (obtida em um ponto na parede do canal) e analítica para diferentes valores de k_{nl} . (a) modelo Newtoniano (b) modelo sPTT.	90

5.23	Gradiente de pressão p_x analítico e numérico <i>versus</i> a constante de fricção k_{nl} . (a) modelo Newtoniano (b) modelo sPTT.	91
5.24	Soluções analíticas (linha contínua) e numéricas (símbolos) do perfil de velocidade u (a) e dos tensores T^{xx} (b) e T^{xy} (c), para diferentes valores de Re	92
5.25	Soluções analíticas (linha contínua) e numéricas (símbolos) do perfil de velocidade u (a) e dos tensores T^{xx} (b) e T^{xy} (c), para diferentes valores de β	93
5.26	Soluções analíticas (linha contínua) e numéricas (símbolos) do perfil de velocidade u (a) e dos tensores T^{xx} (b) e T^{xy} (c), para diferentes valores de Wi	94
5.27	Soluções analíticas (linha contínua) e numéricas (símbolos) do perfil de velocidade u (a) e dos tensores T^{xx} (b) e T^{xy} (c), para diferentes valores de ϵ	95
5.28	Comprimento de desenvolvimento do escoamento de fluido Newtoniano <i>versus</i> a constante de fricção adimensional k_{nl}^*	97
5.29	Velocidade sobre o eixo de simetria normalizada pela velocidade u_{max} analítica para $Re = 0.001$ com diferentes coeficientes de fricção (k_{nl}). (b) ampliação de (a), $y/L \in [0.35, 0.95]$	98
5.30	Velocidade de escorregamento ao longo da direção x para $Re = 0.001$ e $Re = 10.0$ com diferentes coeficientes de fricção (k_{nl}) e $y = 0.5$	98
5.31	Velocidade sobre o eixo de simetria de uma escoamento no canal com perfil de entrada analítico. $Re = 1.0$ e $k_{nl} = 0.1$	99
5.32	Velocidade ao longo do canal para cada Wi considerado, utilizando dois diferentes valores de k_{nl} em cinco posições y/L	100
5.33	Tensor T^{xx} ao longo do canal para cada Wi considerado, utilizando dois diferentes valores de k_{nl} em cinco posições y/L	101
5.34	Tensor T^{xy} ao longo do canal para cada Wi considerado, utilizando dois diferentes valores de k_{nl} em cinco posições y/L	101
5.35	Velocidade de escorregamento do modelo sPTT ao longo do canal, na direção x , utilizando diferentes valores da constante de fricção.	102
5.36	Velocidade de escorregamento do modelo sPTT ao longo do canal, na direção x , para cada Wi considerado, com $k_{nl} = 0.01$	102
5.37	Velocidade sobre o eixo de simetria do modelo sPTT ao longo do canal, para cada Wi considerado, com $k_{nl} = 0.01$	103
5.38	Tensor T^{xx} sobre o eixo de simetria do modelo sPTT ao longo do canal, para cada Wi considerado, com $k_{nl} = 0.01$	103
5.39	Tensor T^{xy} sobre o eixo de simetria do modelo sPTT ao longo do canal, para cada Wi considerado, com $k_{nl} = 0.01$	103

Lista de Tabelas

5.1	Espaçamento e número de células das malhas espaciais com o espaçamento δt_{CFL} calculado e o espaçamento δt utilizado.	78
5.2	Erros relativos da velocidade para diferentes valores da constante de fricção k_{nl} , considerando o modelo Newtoniano.	80
5.3	Ordem de convergência espacial obtida a partir do modelo Newtoniano com $\varsigma = \delta x = 0.05$ e $\frac{\varsigma}{2} = 0.025$	80
5.4	Gradientes de pressão p_x calculado através da equação (3.41).	83
5.5	Erros relativos da velocidade e tensor variando a constante de fricção k_{nl} para o modelo viscoelástico sPTT.	84
5.6	Ordem de convergência espacial obtida a partir do modelo sPTT com $\varsigma = \delta x = 0.05$ e $\frac{\varsigma}{2} = 0.025$	86
5.7	Erros relativos obtidos a partir dos modelos Newtoniano e sPTT para a velocidade de escorregamento obtida em um ponto da parede, com $\varsigma = \delta x = 0.05$ e $\frac{\varsigma}{2} = 0.025$	90
5.8	Ordem de convergência espacial obtida a partir dos modelos Newtoniano e sPTT para a velocidade de escorregamento numérica obtida em um ponto na parede do canal com $\varsigma = \delta x = 0.05$ e $\frac{\varsigma}{2} = 0.025$	90
5.9	Gradiente de pressão para diferentes valores de Re do modelo sPTT com $k_{nl} = 0.01$	91
5.10	Erros relativos do modelo sPTT para diferentes valores de Reynolds.	92
5.11	Gradiente de pressão para diferentes valores de β do modelo sPTT com $k_{nl} = 0.01$	93
5.12	Erros relativos do modelo sPTT para diferentes valores de β	94
5.13	Gradiente de pressão para diferentes valores de Wi do modelo sPTT com $k_{nl} = 0.01$	94
5.14	Erros relativos do modelo sPTT para diferentes valores de Wi	95
5.15	Gradiente de pressão para diferentes valores de ϵ do modelo sPTT com $k_{nl} = 0.01$	95
5.16	Erros relativos do modelo sPTT para diferentes valores de ϵ	96
5.17	Comprimento de desenvolvimento ($\mathcal{L}$) e erro relativo da velocidade u para diferentes valores do coeficiente de fricção e diferentes valores de Re	97
5.18	Erros relativos da velocidade e tensores considerando diferentes valores de $Wi = 0.4$ e 1.0	99

Lista de Siglas

CFL: Corant-Friedrichs-Lewy.

CUBISTA: Convergent and Universally Bounded Interpolation Scheme for the Treatment of Advection.

EI: Método de Euler implícito.

MAC: Marker-and-Cell.

RK21: Método Runge-Kutta de segunda ordem.

sPTT: simplified Phan-Thien-Tanner.

Sumário

Resumo	7
Abstract	9
Lista de Figuras	10
Lista de Tabelas	13
Lista de Siglas	17
Capítulos	
1 Introdução	21
2 Formulação Matemática	25
2.1 Equações Governantes	25
2.1.1 Modelo Newtoniano	25
2.1.2 Modelo Viscoelástico	26
2.1.2.1 Equação Constitutiva: Oldroyd-B	27
2.1.2.2 Equação Constitutiva: sPTT	27
2.2 Condições Auxiliares	28
2.3 Leis de Escorregamento	29
2.3.1 Leis de Escorregamento Aplicadas a Fluidos Newtonianos	31
2.3.2 Leis de Escorregamento Aplicadas a Fluidos Viscoelásticos	31
2.4 Adimensionalização	32
2.4.1 Leis de Escorregamento Adimensionais	34
3 Soluções Analíticas de Escoamentos Totalmente Desenvolvidos em um Canal	37
3.1 Solução do Modelo Newtoniano	38
3.1.1 Condição de Contorno sem Escorregamento	38
3.1.2 Condição de Contorno com Escorregamento	39
3.2 Solução Para o Modelo Viscoelástico sPTT	39
3.3 Velocidade Média e Gradiente de Pressão	44
3.3.1 Escoamento Newtoniano	44
3.3.2 Escoamento Viscoelástico sPTT	45
3.4 Comportamento das Soluções Analíticas	47
4 Metodologia Numérica	51
4.1 Malha Computacional	51
4.2 Classificação das Células na Plataforma	52

4.3	Método da Projeção	52
4.4	Integração Temporal da Equação do Momento	54
4.5	Integração Temporal das Equações Constitutivas	55
4.6	Discretização das Equações na Malha Fixa	55
4.6.1	Condições de Fronteira Rígida	55
4.6.1.1	Fronteira Rígida Paralela a x	55
4.6.1.2	Fronteira Rígida Paralela a y	61
4.6.2	Equações de Conservação do Momento e Massa	64
4.6.2.1	Sistema Implícito	65
4.6.3	Condições de contorno em injetores e ejetores	67
4.6.4	Equação de Poisson para ψ	68
4.6.5	Velocidade Solenoidal	69
4.6.6	Campo de Pressão	69
4.6.7	Contribuição não-Newtoniana	70
4.6.8	Cálculo das Derivadas de Primeira Ordem	70
4.7	Algoritmo Computacional	74
5	Resultados	77
5.1	Verificação da Metodologia Numérica	77
5.1.1	Resultados para o Modelo Newtoniano	79
5.1.2	Resultados para o Modelo sPTT	82
5.1.3	Análise de Convergência da Velocidade de Escorregamento	88
5.2	Estudo e Variação dos Parâmetros Adimensionais do Modelo sPTT	91
5.2.1	Variação do Número de Reynolds (Re)	91
5.2.2	Variação de β	93
5.2.3	Variação do Número de Weissenberg (Wi)	94
5.2.4	Variação de ϵ	95
5.3	Comprimento de Desenvolvimento do Modelo Newtoniano	96
5.4	Análise de Desenvolvimento do fluido sPTT	99
6	Considerações Finais	105
A	Solução Analítica para o Modelo Viscoelástico Oldroyd-B	107
B	Solução Analítica para o Modelo Viscoelástico sPTT sem Contribuição do Solvente Newtoniano	111
C	Extrapolações	115
	Referências	117

Introdução

O escorregamento na parede não é uma descoberta recente nem um fenômeno relacionado apenas com fluidos de reologia complexa, como polímeros fundidos. Navier, Helmholtz, Maxwell e Stokes são alguns nomes que já consideraram possíveis efeitos de escorregamento na dinâmica de fluidos Newtonianos [26], [27], [30], [44]. Uma sistemática de observações experimentais considerou a hipótese de não-escorregamento (*no-slip*) razoável e o fenômeno de escorregamento tem recebido pouca, ou quase nenhuma atenção na literatura de Mecânica dos Fluidos. Uma interessante perspectiva histórica sobre a aceitação da condição *no-slip* pode ser encontrada em [12].

Escoamentos de fluidos com escorregamento na parede são encontrados em muitas aplicações industriais, tais como, no processamento de polímeros por extrusão. Neste processo, o efeito de escorregamento pode comprometer a qualidade do produto final [13]. Desta forma, estudos teóricos e desenvolvimento de metodologias numéricas para melhor compreensão deste fenômeno são de grande importância acadêmica e industrial na atualidade.

Dentre os estudos teóricos, as soluções analíticas assumem um papel importante não só para o entendimento da dinâmica de fluidos complexos mas também como uma ferramenta de verificação de metodologias numéricas.

Devida a complexidade do sistema de equações envolvidas, a solução analítica é obtida para uma pequena classe de problemas, aqueles em que as condições do escoamento e da geometria levam a hipóteses de simplificação das equações, por exemplo, o escoamento totalmente desenvolvido entre placas paralelas ou em um tubo.

Soluções analíticas para este escoamento podem ser encontradas na literatura tanto para fluidos Newtonianos como não-Newtonianos. Assumindo a hipótese de não escorregamento e o problema do escoamento de fluidos viscoelásticos totalmente desenvolvidos em um canal ou tubo, Oliveira e Pinho [36] obtiveram a solução analítica para o escoamento totalmente desenvolvido em um canal e em um tubo de um fluido sPTT (*simplified Phan-Thien-Tanner*). Em seguida, Alves et al. [2] publicaram a solução analítica considerando o modelo PTT (*Phan-Thien-Tanner*), o qual apresenta uma derivada convectada mais geral. Oliveira [35] contribuiu nessa linha utilizando o fluido FENE-P. Considerando os fluidos viscoelásticos, sPTT e FENE-P, com contribuição de um solvente Newtoniano, Cruz e Pinho [8] também derivaram a solução analítica para este problema. A adição de um solvente Newtoniano ao fluido viscoelástico insere o termo dissipativo na equação do momento, o que torna o cálculo da solução analítica para a velocidade, matematicamente, mais trabalhoso. Em seguida, eles publicaram o trabalho [9] para modelos viscoelásticos multimodo sPTT, FENE-P e Giesekus, também considerando o solvente Newtoniano. Afonso et al. [1] combinaram a influência de eletrocinética e forças de pressão e obtiveram

a solução analítica para o referido problema usando os fluidos sPTT e FENE-P. Outros autores podem ser citados com trabalhos de obtenção de soluções analíticas [11], [15], [29], [48].

Para o caso do estudo de soluções analíticas de problemas com escorregamento podemos citar os seguintes trabalhos desenvolvidos por Ferrás et al., [16], [18], [19] e [20] que serviram como base para o estudo teórico desta dissertação.

Os estudos numéricos deste trabalho foram realizados utilizando a plataforma de alto desempenho Freeflow-2D, [33]. Esta plataforma foi muito bem desenvolvida para simulações de escoamentos Newtonianos e não-Newtonianos complexos com ou sem interfaces móveis utilizando a condição sem escorregamento em contornos rígidos (*no-slip*). Detalhes sobre esta plataforma podem ser encontrados em [28]. Nesta plataforma, as equações governantes são resolvidas pela técnica de diferenças finitas cuja discretização é feita em uma malha deslocada com células de dimensões $\delta x \times \delta y$. As componentes da velocidade u e v são aproximadas nos pontos $(i + \frac{1}{2}, j)$ e $(i, j + \frac{1}{2})$, respectivamente. No centro da célula (i, j) são avaliadas a pressão, a função potencial ψ e as componentes do tensor extra-tensão $\mathbf{T}$.

O método de solução segue as ideias dos métodos de projeção, originalmente proposto por Chorin [6] e Temam [45]. A ideia central é desacoplar velocidade e pressão nas equações de Navier-Stokes, e resolver essas variáveis separadamente. Para escoamentos viscoelásticos, foi adicionado um tratamento para a solução do tensor extra-tensão. Existe a versão da plataforma com o método de solução obtido totalmente pela discretização explícita (ver [39], [47]) e também, a versão com o método de solução obtido por uma discretização semi-implícita (ver [34], [33]).

Os principais objetivos desse trabalho são: o estudo de soluções analíticas para escoamentos isotérmicos incompressíveis totalmente desenvolvidos entre placas paralelas utilizando condição de contorno do tipo escorregamento (*slip*) considerando fluidos Newtonianos e também não-Newtonianos; incorporação das soluções analíticas e da condição *slip* na plataforma de alto desempenho denominada Freeflow-2D; e verificação da implementação numérica utilizando as soluções analíticas.

O trabalho está organizado nos seguintes capítulos.

- Capítulo 2: são expostas as equações básicas que descrevem escoamentos confinados Newtonianos e não-Newtonianos, incompressíveis e isotérmicos. A equação constitutiva considerada para escoamentos viscoelásticos é o modelo sPTT. Também são descritas, as condições auxiliares necessárias para resolver o sistema de equações. Então, apresenta-se algumas leis de escorregamento que descrevem a velocidade do fluido rente a fronteira sólida. As equações aparecem neste capítulo tanto na forma dimensional como adimensional.
- Capítulo 3: é apresentado todo o desenvolvimento para obter a solução analítica para escoamentos Newtoniano e viscoelástico com e sem a presença de uma condição *slip* na parede. Além disso, a obtenção do gradiente de pressão também é apresentada.
- Capítulo 4: é descrita a metodologia numérica incluindo a discretização das equações, que foram realizadas por diferenças finitas. Ressalta-se as modificações no código numérico decorrentes da condição *slip*.
- Capítulo 5: são apresentados alguns resultados numéricos e analíticos de escoamentos com escorregamento. São feitas as análises de convergência da solução numérica. Apresenta-se um breve estudo da variação de alguns parâmetros adimensionais presentes no modelo sPTT. A intenção é verificar como se comportam a velocidade e o

tensor extra-tensão sob a influência desses parâmetros. Além disso, imposto o perfil reto de entrada em um canal, calculou-se o comprimento a partir do injetor em que a solução numérica começa a se aproximar ou convergir para o perfil de solução exata de um escoamento de fluido Newtoniano.

Formulação Matemática

2.1 Equações Governantes

As equações de Navier-Stokes que descrevem escoamentos incompressíveis, isotérmicos e laminares na forma conservativa sem ação da gravidade são

- *Equação da continuidade:*

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.1)$$

- *Equação do momento:*

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}^\top) \right] = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.2)$$

Em escoamentos cartesianos bidimensionais, $\mathbf{x} = [x \ y]^\top$ e assim, o vetor velocidade com duas componentes é $\mathbf{u} = [u \ v]^\top$, $u = u(\mathbf{x}, t)$ na direção do eixo x e $v = v(\mathbf{x}, t)$ na direção do eixo y . A constante de incompressibilidade ρ é a densidade do fluido, $t \geq 0$ é o tempo e $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor tensão total definido como

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}, \quad (2.3)$$

dado que $p = p(\mathbf{x}, t)$ é a pressão, $\mathbf{I}$ o tensor identidade e $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} \tau^{xx} & \tau^{xy} \\ \tau^{xy} & \tau^{yy} \end{bmatrix}$ o tensor simétrico das tensões. Esse tensor é determinado a partir da equação constitutiva do fluido, onde $\boldsymbol{\tau}$ é expresso em função das quantidades cinemáticas do escoamento [37]. Esta característica está relacionada com a natureza do fluido que pode ser Newtoniano ou não-Newtoniano.

2.1.1 Modelo Newtoniano

Em escoamentos incompressíveis Newtonianos, o tensor simétrico das tensões é linearmente proporcional ao tensor taxa de deformação

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta_s \mathbf{D}, \quad (2.4)$$

onde η_s é a viscosidade dinâmica do fluido e $\mathbf{D}$ o tensor taxa de deformação que é definido da seguinte maneira,

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\top) \quad (2.5)$$

sendo,

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Logo, o divergente do tensor tensão total $\boldsymbol{\sigma}$ pode ser escrito como,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \nabla \cdot (2\eta_s \mathbf{D} - p\mathbf{I}) \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) & -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_s \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e as equações da continuidade e momento em coordenadas cartesianas para o modelo Newtoniano são respectivamente

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.7)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right], \quad (2.8)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right]. \quad (2.9)$$

2.1.2 Modelo Viscoelástico

Em escoamentos viscoelásticos o tensor das tensões é dado pela soma da contribuição Newtoniana (viscosa) e da contribuição não-Newtoniana (elástica)

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta_s \mathbf{D} + \mathbf{T}, \quad (2.10)$$

onde η_s é a viscosidade do solvente Newtoniano, $\mathbf{D}$ o tensor taxa de deformação (2.5) e $\mathbf{T}$ o tensor extra-tensão (simétrico) que representa a contribuição não-Newtoniana (polimérica),

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T^{xx} & T^{xy} \\ T^{xy} & T^{yy} \end{bmatrix}.$$

Neste caso, o tensor tensão total é dado por

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \nabla \cdot (2\eta_s \mathbf{D} + \mathbf{T} - p\mathbf{I}) \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y} & -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_s \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

o que resulta nas seguintes equações da continuidade e momento para o caso viscoelástico

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.11)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y}, \quad (2.12)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y}. \quad (2.13)$$

2.1.2.1 Equação Constitutiva: Oldroyd-B

Para obter solução única do sistema de equações (2.11)-(2.13) é necessário o uso de equações constitutivas que descrevem relações entre o tensor $\mathbf{T}$ e a velocidade $\mathbf{u}$. Tais relações dependem do material a ser estudado. A equação constitutiva Oldroyd-B é uma equação reológica que descreve o comportamento físico de um fluido. Essa equação é dada por,

$$\mathbf{T} + \lambda \overset{\nabla}{\mathbf{T}} = 2\eta_p \mathbf{D}. \quad (2.14)$$

A constante η_p é um coeficiente de viscosidade polimérica, λ refere-se ao tempo de relaxação do fluido e $\overset{\nabla}{\mathbf{T}}$ é a derivada convectada definida como

$$\overset{\nabla}{\mathbf{T}} = \frac{D\mathbf{T}}{Dt} - \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{u})^\top - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{T}, \quad (2.15)$$

sendo $\frac{D\mathbf{T}}{Dt}$ a derivada material de $\mathbf{T}$. Essa derivada material é descrita como

$$\frac{D\mathbf{T}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{T}). \quad (2.16)$$

Pela definição da derivada convectada de $\mathbf{T}$ tem-se a seguinte diferença de matrizes

$$\begin{aligned} \overset{\nabla}{\mathbf{T}} = & \begin{bmatrix} \frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} & \frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} \\ \frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} & \frac{\partial T^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} 2T^{xx}\frac{\partial u}{\partial x} + 2T^{xy}\frac{\partial u}{\partial y} & T^{xx}\frac{\partial v}{\partial x} + T^{xy}\frac{\partial u}{\partial y} \\ T^{xy}\frac{\partial u}{\partial y} + T^{xx}\frac{\partial v}{\partial x} & 2T^{xy}\frac{\partial v}{\partial x} + 2T^{yy}\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Considerando a definição do tensor taxa de deformação (2.6) e (2.17) o modelo (2.14) se reduz as equações,

$$T^{xx} + \lambda \left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} - 2T^{xx}\frac{\partial u}{\partial x} - 2T^{xy}\frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2\eta_p \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.18)$$

$$T^{xy} + \lambda \left(\frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} - T^{xx}\frac{\partial v}{\partial x} - T^{yy}\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \eta_p \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2.19)$$

$$T^{yy} + \lambda \left(\frac{\partial T^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} - 2T^{xy}\frac{\partial v}{\partial x} - 2T^{yy}\frac{\partial v}{\partial y} \right) = 2\eta_p \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.20)$$

2.1.2.2 Equação Constitutiva: sPTT

Levando em consideração a diversidade de fluidos não-Newtonianos apresenta-se um outro modelo reológico denominado sPTT (*simplified Phan-Thien-Tanner*) [40], [41], cuja equação constitutiva reológica é

$$f(tr(\mathbf{T}))\mathbf{T} + \lambda \overset{\nabla}{\mathbf{T}} = 2\eta_p \mathbf{D}. \quad (2.21)$$

Neste trabalho a função $f(tr(\mathbf{T}))$ é dada pela expressão,

$$f(tr(\mathbf{T})) = 1 + \frac{\lambda\epsilon}{\eta_p} tr(\mathbf{T}) \quad (2.22)$$

que é a forma linear do modelo sPTT, sendo a constante ϵ um parâmetro relacionado ao comportamento elongacional do modelo e $tr(\mathbf{T}) = T^{xx} + T^{yy}$. Em coordenadas cartesianas a equação (2.21) é descrita substituindo a derivada convectada (2.17), o tensor taxa de deformação (2.6) e (2.22),

$$f(tr(\mathbf{T}))T^{xx} + \lambda \left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} - 2T^{xx}\frac{\partial u}{\partial x} - 2T^{xy}\frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2\eta_p \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.23)$$

$$f(tr(\mathbf{T}))T^{xy} + \lambda \left(\frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} - T^{xx}\frac{\partial v}{\partial x} - T^{yy}\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \eta_p \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2.24)$$

$$f(tr(\mathbf{T}))T^{yy} + \lambda \left(\frac{\partial T^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} - 2T^{xy}\frac{\partial v}{\partial x} - 2T^{yy}\frac{\partial v}{\partial y} \right) = 2\eta_p \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.25)$$

com $f(tr(\mathbf{T})) = f(T^{xx} + T^{yy}) = 1 + \frac{\epsilon\lambda}{\eta_p}(T^{xx} + T^{yy})$.

2.2 Condições Auxiliares

As condições auxiliares são fundamentais na teoria de EDP pois garantem que o problema modelado tenha solução única. Além disso, o comportamento físico de cada problema depende das condições iniciais e de fronteira apropriadas.

Tanto para o sistema de equações (2.7)-(2.9) do modelo Newtoniano como para o sistema viscoelástico (2.11)-(2.13) com as equações constitutivas Oldroyd-B e sPTT, são necessárias as condições de contorno (fronteira) e condições iniciais. As condições apresentadas nessa seção são válidas para todos os modelos abordados neste trabalho.

Determinar uma condição inicial no instante $t = t_0$, é atribuir um perfil de velocidade $\mathbf{u}_0$ que satisfaça a equação da continuidade, e designar um campo de pressão inicial e uma contribuição não-Newtoniana condizentes com o campo de velocidade inicial. Essas propriedades são quase sempre consideradas nulas em $t = t_0$ [22],[37] e neste trabalho assumiremos essa condição inicial.

As condições de fronteiras são determinadas conforme a situação física que o contorno representa:

- Entrada de fluido (*Inflow*): Estabelecida a posição do contorno de entrada a velocidade tangencial ($\mathbf{u}_{\vec{t}}$) ao contorno é considerada nula e a velocidade normal ($\mathbf{u}_{\vec{n}}$) é prescrita

$$\mathbf{u}_{\vec{t}} = 0 \quad \mathbf{u}_{\vec{n}} = u_{inflow} \quad (2.26)$$

sendo u_{inflow} a vazão desejada na entrada. A contribuição não-Newtoniana $\mathbf{T}$ é determinada assumindo que na entrada do domínio o fluido não recebe interferência desta propriedade, ou seja,

$$\mathbf{T} = 0. \quad (2.27)$$

- Parede ou fronteira sólida: Nestes contornos considera-se a condição

$$\mathbf{u}_{\vec{n}} = 0 \quad (2.28)$$

que é decorrente da ideia de que o fluido não pode penetrar na parede, condição de impermeabilidade. Já a velocidade tangencial está relacionada com a aderência do fluido ao contorno rígido. Neste trabalho considera-se dois casos:

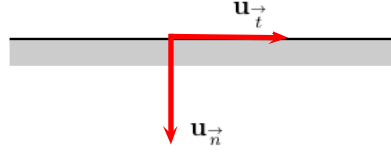


Figura 2.1: Representação do vetor velocidade na parede.

- I Sem escorregamento (*no-slip*) - neste caso o fluido adere a parede não deslizando sobre a mesma

$$\mathbf{u}_{\vec{t}} = 0; \quad (2.29)$$

- II Com escorregamento (*slip*) - o fluido desliza ao longo da parede segundo uma velocidade

$$\mathbf{u}_{\vec{t}} = \mathbf{u}_{parede}. \quad (2.30)$$

- Saída de fluido (*Outflow*): Responsável pela saída do fluido do domínio, no *outflow* considera-se a condição de Neumann homogênea na direção normal a fronteira, tanto para a velocidade como para a contribuição não-newtoniana, dada pelo tensor $\mathbf{T}$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{\vec{t}}}{\partial \vec{n}} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}_{\vec{n}}}{\partial \vec{n}} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \vec{n}} = 0. \quad (2.31)$$

As condições descritas acima são adotadas na metodologia numérica que será utilizada nesse trabalho. O principal objetivo é estudar e implementar condições de escorregamento na fronteira sólida, para isso na próxima seção são apresentadas algumas leis de escorregamento propostas pela literatura.

2.3 Leis de Escorregamento

Um vetor de tensão tangencial $\boldsymbol{\tau}$ é gerado pelo atrito de um fluido com uma parede e pode ser o bastante para impedir o escorregamento do fluido. O surgimento de uma velocidade diferente de zero ao longo da parede é decorrente do escorregamento provocado pela redução do atrito [16].

É muito comum no estudo de mecânica dos fluidos admitir a condição de aderência do fluido a parede ($\mathbf{u}_{\vec{t}} = 0$). Entretanto, em 1822, Navier propôs que um líquido pode deslizar sobre a superfície sólida com uma velocidade de deslizamento u_{parede} , oposta a uma força de atrito proporcional ao gradiente de velocidade na parede na direção normal [30]. Essa afirmação e algumas outras leis de escorregamento foram formuladas para descrever o deslizamento de fluidos na parede, ou seja, para prescrever uma velocidade tangencial do fluido rente a fronteira sólida. Antes de introduzir algumas leis, primeiro considere $\mathbf{u}_{\vec{t}}$ e $\boldsymbol{\tau}_{\vec{t}}$ os vetores velocidade e extra-tensão tangentes à parede, respectivamente. Admitindo que,

$$\|\mathbf{u}_{\vec{t}}\| = \|f(\boldsymbol{\tau}_{\vec{t}})\|, \quad (2.32)$$

sendo que $\|\cdot\|$ é a norma l^2 e $f(\boldsymbol{\tau}_{\vec{t}})$ representa uma função real que pode ser linear ou não do vetor de tensão tangencial, ou seja, o valor absoluto da velocidade de escorregamento deve ser uma função do valor absoluto do vetor de tensão tangencial. Além disso, o sentido da velocidade tangencial deve ser oposto ao vetor de tensão tangencial, implicando que essas duas quantidades admitam a seguinte relação,

$$\mathbf{u}_{\vec{t}} = -\|f(\boldsymbol{\tau}_{\vec{t}})\| \frac{\boldsymbol{\tau}_{\vec{t}}}{\|\boldsymbol{\tau}_{\vec{t}}\|}. \quad (2.33)$$

O vetor tensão tangencial é definido por,

$$\boldsymbol{\tau}_{\vec{t}} = \left(\mathbf{I} - (\vec{n})^\top \cdot \vec{n} \right) \left(\boldsymbol{\tau} (\vec{n})^\top \right). \quad (2.34)$$

Para o caso bidimensional onde $\vec{n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem-se,

$$\boldsymbol{\tau}_{\vec{t}} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} \tau^{xx} & \tau^{xy} \\ \tau^{xy} & \tau^{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \tau^{xy} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\|\mathbf{u}_{\vec{t}}\|_2 = \sqrt{(\tau^{xy})^2} = |\tau^{xy}|. \quad (2.35)$$

Sendo assim, são apresentadas as seguintes leis de escorregamento,

- *Lei de Escorregamento Navier Linear:* é a relação linear entre a velocidade de escorregamento na parede e a tensão de corte na parede.

$$\|\mathbf{u}_{\vec{t}}\| = k_{nl} \|\boldsymbol{\tau}_{\vec{t}}\|. \quad (2.36)$$

- *Lei de Escorregamento Navier não-Linear:* neste caso assume-se que o coeficiente de atrito é uma função da tensão de cisalhamento, resultando em uma função de potência não-linear [43].

$$\|\mathbf{u}_{\vec{t}}\| = k_{nl} \|\boldsymbol{\tau}_{\vec{t}}\|^m, \quad (2.37)$$

com $m > 0$ ($m \in \mathbb{R}$). Observe que se $m = 1$ a lei de escorregamento Navier Linear é obtida.

- *Lei de Escorregamento Hatzikiriakos:* com o objetivo de fornecer uma transição suave da condição sem escorregamento para a com escorregamento do fluxo a uma certa tensão de cisalhamento crítica, Hatzikiriakos propôs uma lei de escorregamento baseada na teoria de Eyring de viscosidade de líquido [23]. Portanto, seja τ^c uma tensão crítica positiva em que o escorregamento se inicia, segundo Hatzikiriakos and Dealy [24], [25], o tensor crítico é $\tau^c = 0.09 \text{ MPa}$, e $k_{H1}, k_{H2} \geq 0$, então,

$$\|\mathbf{u}_{\vec{t}}\| = \begin{cases} k_{H1} \sinh \left(k_{H2} \|\boldsymbol{\tau}_{\vec{t}}\| - \tau^c \right) & \text{se } \|\boldsymbol{\tau}_{\vec{t}}\| \geq \tau^c; \\ 0 & \text{se } \|\boldsymbol{\tau}_{\vec{t}}\| < \tau^c. \end{cases} \quad (2.38)$$

- *Lei de Escorregamento Assintótico:* na forma explícita a lei de escorregamento assintótico é dada por,

$$\|\mathbf{u}_{\vec{t}}\| = k_{A1} \ln \left(1 + k_{A2} \|\boldsymbol{\tau}_{\vec{t}}\| \right), \quad (2.39)$$

com $k_{A1}, k_{A2} \geq 0$.

Observe que o tensor das tensões $\boldsymbol{\tau}$ é escrito conforme o tipo de escoamento, viscoelástico ou Newtoniano. As constantes k_{nl} , k_{H1} , k_{H2} , k_{A1} e k_{A2} são denominadas constantes de fricção, ou seja, elas regulam a intensidade do escorregamento do fluido na parede.

2.3.1 Leis de Escorregamento Aplicadas a Fluidos Newtonianos

Para escoamentos de fluidos newtonianos bidimensionais, considera-se $\boldsymbol{\tau}$ descrito conforme a equação (2.4). Portanto,

$$\tau^{xy} = \eta_s \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (2.40)$$

Então, as leis descritas na seção anterior em uma dimensão se resumem a

- *Lei de Escorregamento Navier Linear:*

$$u_{parede} = k_{nl} \left[\mp \eta_s \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{parede} \right]. \quad (2.41)$$

- *Lei de Escorregamento Navier não-Linear:*

$$u_{parede} = k_{nl} \left[\mp \eta_s \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{parede} \right]^m. \quad (2.42)$$

- *Lei de Escorregamento Hatzikiriakos:*

$$u_{parede} = \begin{cases} k_{H1} \sinh \left(k_{H2} \left[\mp \eta_s \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{parede} \right] - \tau^c \right) & \text{se } \tau^{xy} \geq \tau^c; \\ 0 & \text{se } \tau^{xy} < \tau^c. \end{cases} \quad (2.43)$$

Observe que τ^{xy} é unidimensional e dado pela equação (2.40).

- *Lei de Escorregamento Assintótico:*

$$u_{parede} = k_{A1} \ln \left(1 + k_{A2} \left[\mp \eta_s \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{parede} \right] \right). \quad (2.44)$$

Os sinais ($\mp$) resultam das derivadas terem sinais opostos nas paredes. Na parede superior onde a velocidade decresce a derivada é negativa o que explica o sinal ($-$), e na parede inferior onde a velocidade cresce a derivada é positiva e o sinal utilizado é ($+$).

2.3.2 Leis de Escorregamento Aplicadas a Fluidos Viscoelásticos

Seguindo a definição do tensor das tensões $\boldsymbol{\tau}$ para fluidos viscoelásticos (2.10) a componente τ^{xy} é descrita como,

$$\tau^{xy} = \eta_s \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + T^{xy}. \quad (2.45)$$

Então,

- *Lei de Escorregamento Navier Linear:*

$$u_{parede} = k_{nl} \left[\mp \eta_s \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{parede} \mp T_{parede}^{xy} \right]. \quad (2.46)$$

- *Lei de Escorregamento Navier não-Linear:*

$$u_{parede} = k_{nl} \left[\mp \eta_s \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{parede} \mp T_{parede}^{xy} \right]^m. \quad (2.47)$$

- *Lei de Escorregamento Hatzikiriakos:*

$$u_{parede} = \begin{cases} k_{H1} \sinh \left(k_{H2} \left[\mp \eta_s \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{parede} \mp T_{parede}^{xy} \right] - \tau^c \right) & \text{se } \tau^{xy} \geq \tau^c; \\ 0 & \text{se } \tau^{xy} < \tau^c. \end{cases} \quad (2.48)$$

Sendo τ^{xy} descrito pela equação (2.45).

- *Lei de Escorregamento Assintótico:*

$$u_{parede} = k_{A1} \ln \left(1 + k_{A2} \left[\mp \eta_s \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{parede} \mp T_{parede}^{xy} \right] \right). \quad (2.49)$$

Na próxima seção apresenta-se as equações em sua forma adimensional e descreve-se como foi feita a adimensionalização das Leis de escorregamento.

2.4 Adimensionalização

O processo de adimensionalização das equações é necessário para que grandezas dimensionais possam ser agrupadas em parâmetros adimensionais que caracterizam o escoamento. Ao resolver um problema utilizando as equações na forma adimensional automaticamente se conhece as características de um escoamento em dimensões físicas reais devido a similaridade dos escoamentos, ou seja, o fenômeno físico real e o modelado diferem apenas em escala. Esses parâmetros ou escalas são o comprimento L , a velocidade U e a densidade ρ_0 que neste caso pode ser o próprio ρ , pois o escoamento é incompressível. Utilizando esses escalares as variáveis adimensionais (acrescidas do sobrescrito $*$) são:

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad t^* = \frac{tU}{L}, \quad p^* = \frac{p}{\rho_0 U^2}, \quad \boldsymbol{\tau}^* = \frac{\boldsymbol{\tau}}{\rho_0 U^2}, \quad \mathbf{T}^* = \frac{\mathbf{T}}{\rho_0 U^2}. \quad (2.50)$$

Ao aplicar as mudanças de variáveis (2.50) nas equações de modelagem surgem os números adimensionais.

- *Número de Reynolds (Re):* É a razão entre as forças inerciais e as forças viscosas e é definido por,

$$Re = \frac{\rho U L}{\eta_0}, \quad (2.51)$$

onde η_0 é a viscosidade total do fluido, dada por, $\eta_0 = \eta_s + \eta_p$. Como já citado η_s é a viscosidade do solvente e η_p a viscosidade do polímero.

- *Número de Weissenberg (Wi):* É a razão entre uma escala de tempo característica do fluido e uma escala de tempo do escoamento,

$$Wi = \frac{\lambda U}{L}. \quad (2.52)$$

Essa relação aparece apenas em fluidos viscoelásticos.

- *Constante β* : É um parâmetro adimensional definido no intervalo $(0, 1)$ que mensura a contribuição do solvente Newtoniano. Tal parâmetro é definido como,

$$\beta = \frac{\eta_s}{\eta_0}. \quad (2.53)$$

A seguir serão apresentadas as equações na forma adimensional sem o sobrescrito $*$ (ver Observação 1), tanto em sua formulação vetorial como em coordenadas cartesianas, para os modelos Newtoniano e viscoelástico.

- Newtoniano:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}^\top) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.55)$$

isto é

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right]. \quad (2.58)$$

- Viscoelástico: O modelo Oldroyd-B pode ser obtido quando $f(tr(\mathbf{T})) = 1$ na equação constitutiva (2.21) ou $\epsilon = 0$ na função (2.22). Portanto, para o modelo viscoelástico apresenta-se as equações na forma adimensional de um fluido sPTT com ressalva de que o modelo Oldroyd-B pode ser considerado um caso particular do mesmo. Sendo assim, aplicando as mudanças de variáveis nas equações (2.12), (2.13), (2.11), (2.23), (2.24) e (2.25) tem-se

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}^\top) = -\nabla p + \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (2.60)$$

$$f(tr(\mathbf{T}))\mathbf{T} + Wi\mathbf{T}^\nabla = 2\frac{(1-\beta)}{Re}\mathbf{D} \quad (2.61)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y} \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y} \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} f(tr(\mathbf{T}))T^{xx} + Wi \left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} - 2T^{xx}\frac{\partial u}{\partial x} - 2T^{xy}\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \\ = 2\frac{(1-\beta)}{Re}\frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$f(tr(\mathbf{T}))T^{xy} + Wi \left(\frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} - T^{xx}\frac{\partial v}{\partial x} - T^{yy}\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.66)$$

$$f(tr(\mathbf{T}))T^{yy} + Wi \left(\frac{\partial T^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} - 2T^{xy}\frac{\partial v}{\partial x} - 2T^{yy}\frac{\partial v}{\partial y} \right) = 2\frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.67)$$

onde

$$f(tr(\mathbf{T})) = 1 + \epsilon \frac{WiRe}{(1-\beta)} (T^{xx} + T^{yy}). \quad (2.68)$$

2.4.1 Leis de Escorregamento Adimensionais

Na adimensionalização das leis de escorregamento são definidos outros parâmetros adimensionais referentes as constantes de fricção de cada modelo. Essas constantes adimensionais (acrescidas do sobrescrito *) são

$$k_{nl}^* = k_{nl}\rho^m U^{2m-1}, \quad k_{H1}^* = \frac{k_{H1}}{U}, \quad k_{H2}^* = k_{H2}\rho U^2, \quad k_{A1}^* = \frac{k_{A1}}{U}, \quad k_{A2}^* = k_{A2}\rho U^2. \quad (2.69)$$

As mudanças de variáveis (2.50) e (2.69) foram aplicadas nas leis de escorregamento para fluidos Newtonianos e viscoelásticos citados neste trabalho.

Observação 1 *Nas leis de escorregamento adimensionais descritas a seguir o sobrescrito (*) das variáveis adimensionais são omitidos para não sobrecarregar a notação, contudo, devido a presença das constantes adimensionais, como Re , β e Wi , é possível notar que as equações encontram-se na forma adimensional.*

Newtoniano: Adimensionalizando as expressões (2.41)-(2.44) chega-se

- *Lei de Escorregamento Navier Linear:*

$$u_{parede} = k_{nl} \left[\mp \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{parede} \right]. \quad (2.70)$$

- *Lei de Escorregamento Navier não-Linear:*

$$u_{parede} = k_{nl} \left[\mp \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{parede} \right]^m. \quad (2.71)$$

- *Lei de Escorregamento Hatzikiriakos*

$$u_{parede} = k_{H1} \sinh \left(k_{H2} \left[\mp \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{parede} \right] \right). \quad (2.72)$$

- *Lei de Escorregamento Assintótico*

$$u_{parede} = k_{A1} \ln \left(1 + k_{A2} \left[\mp \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{parede} \right] \right). \quad (2.73)$$

Viscoelástico: Considerando as equações (2.46)-(2.49),

- *Lei de Escorregamento Navier Linear:*

$$u_{parede} = k_{nl} \left[\mp \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{parede} \mp T_{parede}^{xy} \right]. \quad (2.74)$$

- *Lei de Escorregamento Navier não-Linear:*

$$u_{parede} = k_{nl} \left[\mp \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{parede} \mp T_{parede}^{xy} \right]^m. \quad (2.75)$$

- *Lei de Escorregamento Hatzikiriakos:*

$$u_{parede} = k_{H1} \sinh \left(k_{H2} \left[\mp \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{parede} \mp T_{parede}^{xy} \right] \right). \quad (2.76)$$

- *Lei de Escorregamento Assintótico:*

$$u_{parede} = k_{A1} \ln \left(1 + k_{A2} \left[\mp \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{parede} \mp T_{parede}^{xy} \right] \right). \quad (2.77)$$

Soluções Analíticas de Escoamentos Totalmente Desenvolvidos em um Canal

Neste capítulo serão apresentadas as soluções analíticas para escoamentos incompressíveis, isotérmicos do perfil de velocidade totalmente desenvolvido em um canal considerando dois tipos de condições de contorno: sem escorregamento (*no-slip*) e com escorregamento (*slip*). As soluções aqui estudadas foram desenvolvidas com base nos artigos [8], [10], [18], [19] e [36].

Considera-se um fluxo axissimétrico bidimensional em um canal de placas paralelas com largura L (ver Figura 3.1) e com as seguintes hipóteses:

- no estado estacionário: $\frac{\partial(\quad)}{\partial t} = 0$;
- totalmente desenvolvido: $\frac{\partial(\quad)}{\partial x} = 0$, só há variação em y exceto para a pressão cujo gradiente é constante em todo o canal;
- componente v do vetor velocidade é nula, pois, da equação da continuidade (2.56) tem-se,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow v(x, y, t) \equiv \text{constante}$$

como $v_{\text{parede}} = 0$ então, $v(x, y, t) \equiv 0$;

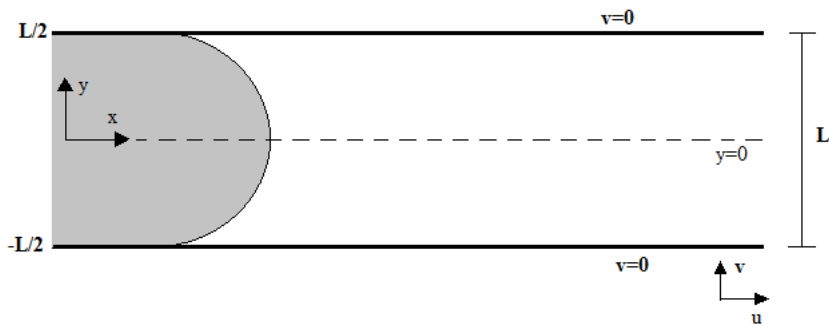


Figura 3.1: Ilustração do domínio do canal.

Sintetizando as hipóteses acima tem-se

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} = 0, \quad \nabla p = \text{Cte}, \quad v = 0, \quad u = u(y), \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}(y) \right\}.$$

3.1 Solução do Modelo Newtoniano

Aplicando as hipóteses de escoamento nas equações do momento (2.57) e (2.58) as mesmas se reduzem respectivamente a

$$0 = -p_x + \frac{1}{Re} \left[\frac{d^2 u}{dy^2} \right], \quad (3.1)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad (3.2)$$

sendo

$$p_x = \frac{dp(x)}{dx}.$$

Integrando (3.1) do eixo de simetria ($y = 0$) a y tem-se,

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} \int_0^y \frac{d^2 u(s)}{ds^2} ds &= \int_0^y p_x ds \Rightarrow \\ \frac{1}{Re} \left[\frac{du(y)}{dy} - \frac{du(0)}{dy} \right] &= p_x [y - 0]. \end{aligned}$$

Assumindo que a velocidade máxima acontece no eixo de simetria ($y = 0$) então,

$$\frac{1}{Re} \frac{du(y)}{dy} = p_x y. \quad (3.3)$$

Integrando a equação (3.3) de y a $1/2$, pois, $y_{parede}^* = y_{parede}/L$ e como $y_{parede} = L/2$ então $y_{parede}^* = 1/2$, logo obtém-se,

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} \int_y^{1/2} \frac{du(s)}{ds} ds &= p_x \int_y^{1/2} s ds \Rightarrow \\ u(1/2) - u(y) &= \frac{p_x Re}{2} [(1/2)^2 - y^2] \Rightarrow \\ u(y) &= -\frac{p_x Re}{8} [1 - 4y^2] + u(1/2) \end{aligned} \quad (3.4)$$

que é a solução para o perfil de velocidade do problema estudado. Note que em (3.4) é necessário determinar $u(1/2) = u_{parede}$ decorrente da condição de contorno pré-estabelecida.

3.1.1 Condição de Contorno sem Escorregamento

A condição de contorno sem escorregamento, ou *no-slip*, é dada pelo anulamento da velocidade u na parede, ou seja,

$$u_{parede} = u(1/2) = 0. \quad (3.5)$$

Usando esta condição na solução para o perfil de velocidade dado por (3.4) tem-se,

$$u(y) = -\frac{p_x Re}{8} [1 - 4y^2]. \quad (3.6)$$

3.1.2 Condição de Contorno com Escorregamento

As condições de contorno com escorregamento são baseadas nas leis: lei de escorregamento Navier Linear e não-Linear; lei de escorregamento Hatzikiriakos e lei de escorregamento Assintótico. Considerando que a parede superior (–) é paralela ao eixo x como representado na Figura 3.1, da condição de impermeabilidade $v_{parede} = v(1/2) = 0$ tem-se que $\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{parede} = 0$. Assumindo como condição de contorno a lei de escorregamento Navier Linear obtém-se,

$$u(y) = -\frac{p_x Re}{8}[1 - 4y^2] - k_{nl} \frac{1}{Re} \left[\left. \frac{du}{dy} \right|_{parede} \right].$$

Note que, é necessário saber o valor da derivada de u com respeito a y na parede, para isso, usa-se a igualdade (3.3) com o objetivo de obter uma solução completa para o perfil de velocidade.

$$\frac{1}{Re} \left. \frac{du}{dy} \right|_{1/2} = p_x \frac{1}{2} \Rightarrow \left. \frac{du}{dy} \right|_{1/2} = \frac{1}{2} p_x Re$$

logo,

$$\begin{aligned} u(y) &= -\frac{p_x Re}{8}[1 - 4y^2] - k_{nl} \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{2} p_x Re \right] \Rightarrow \\ u(y) &= -\frac{p_x Re}{8}[1 - 4y^2] - k_{nl} \left[\frac{1}{2} p_x \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para as demais leis de escorregamento tem-se as seguintes soluções

- *Navier Não-Linear*:

$$u(y) = -\frac{p_x Re}{8}[1 - 4y^2] + k_{nl} \left[-\frac{1}{2} p_x \right]^m. \quad (3.8)$$

- *Hatzikiriakos*:

$$u(y) = \begin{cases} -\frac{p_x Re}{8}[1 - 4y^2] + k_{H1} \sinh \left(k_{H2} \left[-\frac{1}{2} p_x \right] \right) & \text{se } \tau^{xy} \geq \tau^c; \\ -\frac{p_x Re}{8}[1 - 4y^2] & \text{se } \tau^{xy} < \tau^c. \end{cases} \quad (3.9)$$

- *Assintótico*:

$$u(y) = -\frac{p_x Re}{8}[1 - 4y^2] + k_{A1} \ln \left(1 + k_{A2} \left[-\frac{1}{2} p_x \right] \right). \quad (3.10)$$

3.2 Solução Para o Modelo Viscoelástico sPTT

Assumindo as hipóteses de escoamento no canal, as equações (2.63), (2.64), (2.65), (2.66) e (2.67) se resumem respectivamente as seguintes expressões

$$0 = -p_x + \frac{\beta}{Re} \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{dT^{xy}}{dy}, \quad (3.11)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{dT^{yy}}{dy}, \quad (3.12)$$

$$f(tr(\mathbf{T}))T^{xx} = 2WiT^{xy}\frac{du}{dy}, \quad (3.13)$$

$$f(tr(\mathbf{T}))T^{xy} = WiT^{yy}\frac{du}{dy} + \frac{(1-\beta)}{Re}\frac{du}{dy}, \quad (3.14)$$

$$f(tr(\mathbf{T}))T^{yy} = 0. \quad (3.15)$$

Observe que de (3.15) tem-se que $T^{yy} = 0$.

Assumindo a forma linear do modelo sPTT, onde $tr(\mathbf{T}) = T^{xx}$ e integrando a equação do momento (3.11) com a condição no eixo de simetria $T^{xy}(0) = 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{dT^{xy}(s)}{ds} ds &= \int_0^y p_x ds + \int_0^y \frac{\beta}{Re} \frac{d^2u(s)}{ds^2} ds \Rightarrow \\ T^{xy}(y) - T^{xy}(0) &= p_x (y - 0) + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{du(y)}{dy} - \frac{du(0)}{dy} \right). \end{aligned}$$

Devido a velocidade máxima ocorrer no meio do canal, ou seja, sobre o eixo de simetria então, $\frac{du(0)}{dy} = 0$, logo,

$$T^{xy}(y) = p_x y - \frac{\beta}{Re} \frac{du}{dy}. \quad (3.16)$$

Agora, dividindo a equação (3.13) pela equação (3.14) tem-se,

$$\begin{aligned} \frac{f(T^{xx})T^{xx}}{f(T^{xx})T^{xy}} &= \frac{2WiT^{xy}\frac{du}{dy}}{\frac{(1-\beta)}{Re}\frac{du}{dy}} \Rightarrow \frac{T^{xx}}{T^{xy}} = \frac{2WiReT^{xy}}{(1-\beta)} \Rightarrow \\ T^{xx}(y) &= \frac{2WiRe}{(1-\beta)}(T^{xy})^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Sabe-se que

$$f(T^{xx}) = 1 + \frac{\epsilon WiRe}{(1-\beta)} T^{xx},$$

usando (3.17) obtém-se

$$\begin{aligned} f(T^{xx}) &= 1 + \frac{\epsilon WiRe}{(1-\beta)} \frac{2WiRe}{(1-\beta)} (T^{xy})^2 \Rightarrow \\ f(T^{xx}) &= 1 + \frac{2\epsilon Wi^2 Re^2}{(1-\beta)^2} (T^{xy})^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Na equação (3.14) a função $f(T^{xx})$ será substituída pela expressão anterior resultando em,

$$\left(1 + \frac{2\epsilon Wi^2 Re^2}{(1-\beta)^2} (T^{xy})^2 \right) T^{xy} = \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{du}{dy}. \quad (3.19)$$

Note que de (3.16) obtém-se uma expressão para a derivada da velocidade em função da componente do tensor T^{xy} ,

$$\frac{du(y)}{dy} = \frac{Re}{\beta} p_x y - \frac{Re}{\beta} T^{xy}(y). \quad (3.20)$$

Substituindo (3.20) em (3.19),

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{2\epsilon Wi^2 Re^2}{(1-\beta)^2} (T^{xy})^2\right) T^{xy} &= \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{Re}{\beta} p_x y - \frac{Re}{\beta} T^{xy}\right) \Rightarrow \\ \left(1 + \frac{2\epsilon Wi^2 Re^2}{(1-\beta)^2} (T^{xy})^2\right) T^{xy} &= \frac{(1-\beta)}{\beta} (p_x y - T^{xy}). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Organizando a equação (3.21) na forma padrão para uma equação cúbica,

$$\begin{aligned} T^{xy} + \frac{2\epsilon Wi^2 Re^2}{(1-\beta)^2} (T^{xy})^3 &= \frac{(1-\beta)}{\beta} p_x y - \frac{(1-\beta)}{\beta} T^{xy} \Rightarrow \\ \frac{2\epsilon Wi^2 Re^2}{(1-\beta)^2} (T^{xy})^3 + \left(\frac{\beta + (1-\beta)}{\beta}\right) T^{xy} - \frac{(1-\beta)}{\beta} p_x y &= 0 \Rightarrow \\ (T^{xy})^3 + \frac{(1-\beta)^2}{2\beta\epsilon Wi^2 Re^2} T^{xy} - \frac{(1-\beta)^3}{2\beta\epsilon Wi^2 Re^2} p_x y &= 0 \Rightarrow \\ (T^{xy})^3 + 3\frac{(1-\beta)^2}{6\beta\epsilon Wi^2 Re^2} T^{xy} - 2\frac{(1-\beta)^3}{4\beta\epsilon Wi^2 Re^2} p_x y &= 0 \Rightarrow \\ (T^{xy})^3 + 3AT^{xy} - 2B &= 0, \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde

$$A = \frac{(1-\beta)^2}{6\beta\epsilon Wi^2 Re^2} \quad \text{e} \quad B = \left(\frac{(1-\beta)^3 p_x}{4\beta\epsilon Wi^2 Re^2}\right) y = Cy. \quad (3.23)$$

A solução real para a equação cúbica (3.22) é dada pela fórmula de Cardano-Tartaglia. Dada uma equação cúbica na forma $x^3 + px + q = 0$ a raiz real da mesma é dada por,

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Fazendo $p = 3A$ e $q = -2B$ tem-se,

$$\begin{aligned} T^{xy} &= \sqrt[3]{\frac{2B}{2} + \sqrt{\left(-\frac{2B}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3A}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{2B}{2} - \sqrt{\left(-\frac{2B}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3A}{3}\right)^3}} = \\ &= \sqrt[3]{B + \sqrt{B^2 + A^3}} + \sqrt[3]{B - \sqrt{B^2 + A^3}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$T^{xy} = \sqrt[3]{B + \sqrt{A^3 + B^2}} + \sqrt[3]{B - \sqrt{A^3 + B^2}}. \quad (3.24)$$

Observe que B está em função da variável independente y . Este fato fica mais evidente introduzindo a definição de C dada na equação (3.23).

$$T^{xy}(y) = \sqrt[3]{Cy + \sqrt{A^3 + (Cy)^2}} + \sqrt[3]{Cy - \sqrt{A^3 + (Cy)^2}}. \quad (3.25)$$

Note que existe uma solução real para T^{xy} pois o discriminante $A^3 + (Cy)^2$ é sempre positivo e a solução real é exatamente (3.25).

Usando a igualdade (3.20), onde a variação da velocidade é dada em função de T^{xy} tem-se,

$$\frac{du(y)}{dy} = \frac{Re}{\beta} p_x y - \frac{Re}{\beta} \left[\sqrt[3]{Cy + \sqrt{A^3 + (Cy)^2}} + \sqrt[3]{Cy - \sqrt{A^3 + (Cy)^2}} \right]. \quad (3.26)$$

Para obter uma solução analítica do perfil de velocidade $u(y)$ basta fazer a integração da equação (3.26) no intervalo $[y, L/2]$ ($y_{parede} = L/2 \Rightarrow y_{parede}^* = y_{parede}/L = 1/2$).

$$\int_y^{1/2} \frac{du(s)}{ds} ds = \int_y^{1/2} \frac{Re}{\beta} p_x s ds - \int_y^{1/2} \frac{Re}{\beta} \left[\sqrt[3]{Cs + \sqrt{A^3 + (Cs)^2}} + \sqrt[3]{Cs - \sqrt{A^3 + (Cs)^2}} \right] ds$$

$\Rightarrow$

$$u(1/2) - u(y) = \frac{Rep_x}{2\beta} \left[\frac{1}{4} - y^2 \right] - \frac{Re}{\beta} \left[\int_y^{1/2} \sqrt[3]{Cs + \sqrt{A^3 + (Cs)^2}} ds + \int_y^{1/2} \sqrt[3]{Cs - \sqrt{A^3 + (Cs)^2}} ds \right]$$

$\Rightarrow$

$$u(y) = -\frac{Rep_x}{8\beta} [1 - 4y^2] + \frac{Re}{\beta} \left[\int_y^{1/2} \sqrt[3]{Cs + \sqrt{A^3 + (Cs)^2}} ds + \int_y^{1/2} \sqrt[3]{Cs - \sqrt{A^3 + (Cs)^2}} ds \right] + u(1/2).$$

Para resolver as duas integrais envolvendo raiz cúbica foi utilizado o software Mathematica 10.0.0 que forneceu as seguintes primitivas para ambas as integrais,

$$\int \sqrt[3]{Cs + \sqrt{A^3 + (Cs)^2}} ds = -\frac{3}{8C} \left(-3Cs + \sqrt{A^3 + (Cs)^2} \right) \left(Cs + \sqrt{A^3 + (Cs)^2} \right)^{1/3},$$

$$\int \sqrt[3]{Cs - \sqrt{A^3 + (Cs)^2}} ds = \frac{3}{8C} \left(Cs - \sqrt{A^3 + (Cs)^2} \right)^{1/3} \left(3Cs + \sqrt{A^3 + (Cs)^2} \right).$$

Aplicando os extremos de integração nas primitivas acima tem-se respectivamente,

$$\int_y^{1/2} \sqrt[3]{Cs + \sqrt{A^3 + (Cs)^2}} ds = -\frac{3}{8C} \left(-3\frac{C}{2} + \sqrt{A^3 + \left(\frac{C}{2}\right)^2} \right) \left(\frac{C}{2} + \sqrt{A^3 + \left(\frac{C}{2}\right)^2} \right)^{1/3} +$$

$$+\frac{3}{8C} \left(-3(Cy) + \sqrt{A^3 + (Cy)^2} \right) \left(Cy + \sqrt{A^3 + (Cy)^2} \right)^{1/3},$$

$$\int_y^{1/2} \sqrt[3]{Cs - \sqrt{A^3 + (Cs)^2}} ds = \frac{3}{8C} \left(\frac{C}{2} - \sqrt{A^3 + \left(\frac{C}{2}\right)^2} \right)^{1/3} \left(3\frac{C}{2} + \sqrt{A^3 + \left(\frac{C}{2}\right)^2} \right) -$$

$$-\frac{3}{8C} \left(Cy - \sqrt{A^3 + (Cy)^2} \right)^{1/3} \left(3(Cy) + \sqrt{A^3 + (Cy)^2} \right).$$

Portanto, a solução para a velocidade $u(y)$ é descrita por,

$$\begin{aligned}
 u(y) = & -\frac{Rep_x}{8\beta} [1 - 4y^2] + \frac{3Re}{16\beta D} \left[- \left(-3D + \sqrt{A^3 + D^2} \right) \left(D + \sqrt{A^3 + D^2} \right)^{1/3} + \right. \\
 & + \left(-3(2Dy) + \sqrt{A^3 + (2Dy)^2} \right) \left(2Dy + \sqrt{A^3 + (2Dy)^2} \right)^{1/3} + \\
 & + \left(D - \sqrt{A^3 + D^2} \right)^{1/3} \left(3D + \sqrt{A^3 + D^2} \right) - \\
 & \left. - \left(2Dy - \sqrt{A^3 + (2Dy)^2} \right)^{1/3} \left(3(2Dy) + \sqrt{A^3 + (2Dy)^2} \right) \right] + u(1/2),
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

sendo $D = \frac{C}{2} = \frac{(1-\beta)^3 p_x}{8\beta \epsilon W i^2 Re^2}$.

Na prática, impondo o gradiente de pressão,

(I) calcula-se $T^{xy}(y)$ por (3.25),

(II) obtém-se $T^{xx}(y)$ por (3.17),

(III) calcula-se $u(y)$ por (3.27).

Lembrando que $T^{yy}(y) = 0$ (ver equação 3.15). Note que no passo (III) impõe-se a condição desejada na parede, o valor $u(1/2)$. Veja a seguir algumas formas.

Condição de Contorno sem Escorregamento: $u(1/2) = 0$.

Condição de Contorno com Escorregamento: considerando as leis de escorregamento apresentadas na seção 2.3.2,

• *Navier Linear:*

$$u(1/2) = k_{nl} \left[-\frac{\beta}{Re} \frac{du}{dy} \Big|_{1/2} - T^{xy}(1/2) \right]. \tag{3.28}$$

Substituindo a equação (3.26) avaliada em $y_{parede} = 1/2$ na equação (3.28), finalmente, obtém-se

$$u(1/2) = k_{nl} \left[-\frac{1}{2} p_x \right]. \tag{3.29}$$

Analogamente, para as demais leis de escorregamento, têm-se,

• *Navier Não-Linear:*

$$u(1/2) = k_{nl} \left[-\frac{1}{2} p_x \right]^m. \tag{3.30}$$

• *Hatzikiriakos:*

$$u(1/2) = \begin{cases} k_{H1} \sinh \left(k_{H2} \left[-\frac{1}{2} p_x \right] \right) & \text{se } \tau^{xy} \geq \tau^c; \\ 0 & \text{se } \tau^{xy} < \tau^c. \end{cases} \tag{3.31}$$

• *Assintótico:*

$$u(1/2) = k_{A1} \ln \left(1 + k_{A2} \left[-\frac{1}{2} p_x \right] \right). \tag{3.32}$$

3.3 Velocidade Média e Gradiente de Pressão

Nas soluções descritas na seção anterior, observe que todas dependem do gradiente de pressão p_x que é constante. De fato, este tipo de escoamento é gerado por um gradiente de pressão imposto. Neste capítulo, pretende-se apresentar uma expressão que relaciona o gradiente de pressão com a velocidade média imposta na entrada do canal U , como feito nos trabalhos [8], [10] e [36] sem admitir escorregamento, e os artigos [18] e [19] com condição de escorregamento na parede. Dessa forma, também pode-se gerar o escoamento impondo-se a velocidade média na entrada do canal. A relação p_x e U será obtida pela definição da velocidade média:

$$U = \frac{1}{L/2} \int_0^{L/2} u(y) dy. \quad (3.33)$$

3.3.1 Escoamento Newtoniano

A solução do perfil de velocidade $u(y)$ na forma dimensional é

$$u(y) = -\frac{p_x}{8\eta_s} [L^2 - 4y^2] + u(L/2), \quad (3.34)$$

com $u(L/2)$ descrita pela lei de escorregamento Navier linear (2.41).

Calculando a integral (3.33) de (3.34) tem-se,

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{L/2} \int_0^{L/2} -\frac{p_x}{8\eta_s} [L^2 - 4s^2] + u(L/2) ds = \\ &= -\frac{2p_x}{8L\eta_s} \left[\int_0^{L/2} L^2 ds - 4 \int_0^{L/2} s^2 ds \right] + \frac{2}{L} \int_0^{L/2} u(L/2) ds = \\ &= -\frac{2p_x}{8L\eta_s} \left[L^2 s \Big|_0^{L/2} - \frac{4}{3} s^3 \Big|_0^{L/2} \right] + \frac{2}{L} \int_0^{L/2} u(L/2) ds = \\ &= -\frac{2p_x}{8L\eta_s} L^2 + \frac{2}{L} \int_0^{L/2} k_{nl} \left[-\eta_s \frac{du(s)}{ds} \Big|_{L/2} \right] ds. \end{aligned}$$

Tem-se que,

$$\frac{du(s)}{ds} \Big|_{L/2} = \frac{p_x}{\eta_s} \frac{L}{2}. \quad (3.35)$$

Logo,

$$\begin{aligned} U &= -\frac{p_x}{12\eta_s} L^2 + \frac{2}{L} k_{nl} \left[-\eta_s \frac{p_x}{\eta_s} \frac{L}{2} \right] \int_0^{L/2} ds = -\frac{p_x}{12\eta_s} L^2 - k_{nl} \frac{\eta_s p_x}{\eta_s} \left[\frac{L}{2} \right] \\ U &= -\frac{p_x L}{12\eta_s} [L + 6\eta_s k_{nl}]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Escrevendo a pressão com relação as demais constantes tem-se,

$$p_x = -\frac{12\eta_s}{L} \frac{U}{L + 6\eta_s k_{nl}}. \quad (3.37)$$

Portanto, podemos reescrever a solução (3.34) da seguinte maneira,

$$u(y) = U \frac{3}{2L(L + 6\eta_s k_{nl})} [L^2 - 4y^2] + u(L/2), \quad (3.38)$$

sendo, $u(L/2)$ a velocidade de escorregamento dada pela lei Navier Linear (2.41). Para obter o gradiente de pressão na forma adimensional, vamos adimensionalizar (3.36).

$$\begin{aligned}
 U &= -\frac{L}{12\eta_s} \frac{\partial(p^* \rho U^2)}{\partial(x^* L)} \left[L + 6\eta_s \frac{k_{nl}^*}{\rho U} \right] \Rightarrow 1 = -\frac{L}{12\eta_s U} \frac{\rho U^2}{L} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} \left[L + 6\eta_s \frac{k_{nl}^*}{\rho U} \right] \Rightarrow \\
 1 &= -\frac{\rho U}{12\eta_s} p_x^* \left[L + 6\eta_s \frac{k_{nl}^*}{\rho U} \right] \Rightarrow 1 = -\frac{\rho U L}{12\eta_s} p_x^* - \frac{6}{12} \frac{\rho U}{\eta_s} \eta_s \frac{k_{nl}^*}{\rho U} \Rightarrow \\
 1 &= -\frac{1}{12} Re p_x^* - \frac{1}{2} p_x^* k_{nl}^*.
 \end{aligned}$$

Logo, o gradiente de pressão adimensional é dado por,

$$p_x = -\frac{12}{Re + 6k_{nl}}. \quad (3.39)$$

Observação 2 Na equação (3.37), as dimensões do gradiente de pressão com o lado direito da igualdade coincidem, pois, considerando a unidade de medida das seguintes variáveis

$$\begin{aligned}
 [x] &= [m]; & [L] &= [m]; & [\rho] &= \left[\frac{kg}{m^3} \right]; & [\eta_s] &= \left[\frac{kg}{ms} \right]; \\
 [p] &= \left[\frac{kg}{ms^2} \right]; & [\tau] &= [Pa] = \left[\frac{kg}{ms^2} \right]; & [U] &= \left[\frac{m}{s} \right]; & [k_{nl}] &= \frac{[u_{parede}]}{[\tau_{parede}]} = \left[\frac{m^2 s}{kg} \right];
 \end{aligned} \quad (3.40)$$

tem-se que,

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right] &= - \left[\frac{12\eta_s}{L} \frac{U}{L + 6\eta_s k_{nl}} \right] \Leftrightarrow \frac{\left[\frac{kg}{ms^2} \right]}{[m]} = \frac{\left[\frac{kg}{ms} \right]}{[m]} \frac{\left[\frac{m}{s} \right]}{[m] + \left[\frac{kg}{ms} \right] \left[\frac{m^2 s}{kg} \right]} \Leftrightarrow \\
 \left[\frac{kg}{m^2 s^2} \right] &= \left[\frac{kg}{m^2 s} \frac{m}{s} \frac{1}{2m} \right] \Leftrightarrow \left[\frac{kg}{m^2 s^2} \right] = \left[\frac{kg}{m^2 s^2} \right].
 \end{aligned}$$

Ao considerar $k_{nl} = 0$ obtém-se o gradiente de pressão para o caso sem escorregamento na parede.

3.3.2 Escoamento Viscoelástico sPTT

Vamos propor uma maneira de obter o gradiente de pressão para a solução do modelo sPTT (3.27) com condição de escorregamento Navier-Linear. Como já enfatizada a relação $U(m/s)$ e $p_x(kg/m^2 s^2)$ anteriormente, nessa seção os cálculos já serão feitos na forma adimensional. Assim, obteremos a relação de Re com p_x adimensional. Primeiramente, integra-se a solução (3.27). Para isso, devido a complexidade da expressão foi utilizado o software Mathematica 10.0.0 no cálculo da integral.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \int_0^{1/2} -\frac{p_x Re}{8\beta} [1 - 4s^2] ds + \\
&+ \frac{3Re}{8\beta C} \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{1/2} -(-3D + \sqrt{A^3 + D^2}) (D + \sqrt{A^3 + D^2})^{1/3} ds + \\ &\int_0^{1/2} \left(-3(2Ds) + \sqrt{A^3 + (2Ds)^2} \right) \left((2Ds) + \sqrt{A^3 + (2Ds)^2} \right)^{1/3} ds + \\ &\int_0^{1/2} (D - \sqrt{A^3 + D^2})^{1/3} (3D + \sqrt{A^3 + D^2}) ds - \\ &\int_0^{1/2} \left((2Ds) - \sqrt{A^3 + (2Ds)^2} \right)^{1/3} \left(3(2Ds) + \sqrt{A^3 + (2Ds)^2} \right) ds \end{aligned} \right\} - \\
&- \int_0^{1/2} \frac{k_{nl}}{2} p_x ds \Rightarrow \\
\frac{1}{2} &= -\frac{p_x Re}{24\beta} + \frac{3Re}{8\beta C} \left\{ \begin{aligned} &-\frac{1}{2} (-3D + \sqrt{A^3 + D^2}) (D + \sqrt{A^3 + D^2})^{1/3} + \\ &\int_0^{1/2} \left(-3(2Ds) + \sqrt{A^3 + (2Ds)^2} \right) \left((2Ds) + \sqrt{A^3 + (2Ds)^2} \right)^{1/3} ds + \\ &\frac{1}{2} (D - \sqrt{A^3 + D^2})^{1/3} (3D + \sqrt{A^3 + D^2}) - \\ &\int_0^{1/2} \left((2Ds) - \sqrt{A^3 + (2Ds)^2} \right)^{1/3} \left(3(2Ds) + \sqrt{A^3 + (2Ds)^2} \right) ds \end{aligned} \right\} \\
&- \frac{1}{2} \frac{k_{nl}}{2} p_x.
\end{aligned}$$

As primitivas para as duas integrais a serem resolvidas são,

$$\begin{aligned}
&\int \left(-3(2Ds) + \sqrt{A^3 + (2Ds)^2} \right) \left((2Ds) + \sqrt{A^3 + (2Ds)^2} \right)^{1/3} ds = \\
&= \frac{3}{35D} \left((2Ds) + \sqrt{A^3 + (2Ds)^2} \right)^{1/3} \left[4A^3 + Dy \left(-19(2Ds) + 9\sqrt{A^3 + (2Ds)^2} \right) \right],
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\int \left((2Ds) - \sqrt{A^3 + (2Ds)^2} \right)^{1/3} \left(3(2Ds) + \sqrt{A^3 + (2Ds)^2} \right) ds = \\
&= \frac{3}{35D} \left((2Ds) - \sqrt{A^3 + (2Ds)^2} \right)^{1/3} \left[-4A^3 + Ds \left(19(2Ds) + 9\sqrt{A^3 + (2Ds)^2} \right) \right].
\end{aligned}$$

Logo, tem-se

$$\begin{aligned}
&\int_0^{1/2} \left(-3(2Ds) + \sqrt{A^3 + (2Ds)^2} \right) \left((2Ds) + \sqrt{A^3 + (2Ds)^2} \right)^{1/3} ds = \\
&= \frac{1}{2} \frac{3}{35D} \left[\left(D + \sqrt{A^3 + D^2} \right)^{1/3} \left[8A^3 + D \left(-19D + 9\sqrt{A^3 + D^2} \right) \right] - 8A^{7/2} \right]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\int_0^{1/2} \left((2Ds) - \sqrt{A^3 + (2Ds)^2} \right)^{1/3} \left(3(2Ds) + \sqrt{A^3 + (2Ds)^2} \right) ds = \\
&= -\frac{1}{2} \frac{3}{35D} \left[\left(D - \sqrt{A^3 + D^2} \right)^{1/3} \left[8A^3 - D \left(19D + 9\sqrt{A^3 + D^2} \right) \right] + 8A^{7/2} \right].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
1 = & -\frac{p_x Re}{12\beta} + \frac{3Re}{8\beta C} \left\{ -\left(-3D + \sqrt{A^3 + D^2}\right) \left(D + \sqrt{A^3 + D^2}\right)^{1/3} + \right. \\
& \left. + \left(D - \sqrt{A^3 + D^2}\right)^{1/3} \left(3D + \sqrt{A^3 + D^2}\right) \right\} + \\
& + \frac{9Re}{280\beta CD} \left\{ \left[\left(D + \sqrt{A^3 + D^2}\right)^{1/3} \left[8A^3 + D \left(-19D + 9\sqrt{A^3 + D^2}\right)\right] - 8A^{7/2} \right] + \right. \\
& \left. + \left[\left(D - \sqrt{A^3 + D^2}\right)^{1/3} \left[8A^3 - D \left(19D + 9\sqrt{A^3 + D^2}\right)\right] + 8A^{7/2} \right] \right\} - \frac{k_{nl}}{2} p_x,
\end{aligned}$$

e como $C = 2D = 2\frac{(1-\beta)^3 p_x}{8\beta\epsilon W i^2 Re^2}$, então,

$$\begin{aligned}
1 = & -\frac{p_x Re}{12\beta} + \frac{3Re}{16\beta D} \left\{ -\left(-3D + \sqrt{A^3 + D^2}\right) \left(D + \sqrt{A^3 + D^2}\right)^{1/3} + \right. \\
& \left. + \left(D - \sqrt{A^3 + D^2}\right)^{1/3} \left(3D + \sqrt{A^3 + D^2}\right) \right\} + \\
& + \frac{9Re}{560\beta D^2} \left\{ \left[\left(D + \sqrt{A^3 + D^2}\right)^{1/3} \left[8A^3 + D \left(-19D + 9\sqrt{A^3 + D^2}\right)\right] - 8A^{7/2} \right] + \right. \\
& \left. + \left[\left(D - \sqrt{A^3 + D^2}\right)^{1/3} \left[8A^3 - D \left(19D + 9\sqrt{A^3 + D^2}\right)\right] + 8A^{7/2} \right] \right\} - \\
& - \frac{k_{nl}}{2} p_x.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Observe que D está definido em função de p_x . Devido a complexidade de determinar uma solução real para a equação (3.41) uma maneira de calcular o gradiente de pressão é considerando a equação (3.41) como uma função $z(p_x)=0$, e calcular aproximadamente via algum método numérico, como por exemplo o método da Bissecção, o zero ou zeros reais dessa função.

Além das soluções apresentadas neste capítulo, nos apêndices A e B são apresentadas as soluções analíticas para os modelos Oldroyd-B e sPTT respectivamente. Entretanto, no apêndice B, o modelo sPTT não considera a contribuição do solvente Newtoniano ($\beta = 0$). Na seção a seguir é feito um estudo das soluções analíticas apresentadas.

3.4 Comportamento das Soluções Analíticas

Nesta seção o objetivo é observar o comportamento das soluções analíticas para o escoamento em um canal com influência da condição de escorregamento. Pretende-se mostrar o comportamento dessas soluções variando os parâmetros presentes nos modelos. Um parâmetro importante é a constante de fricção k_{nl} . O aumento do valor dessa constante caracteriza maior intensidade na velocidade de escorregamento, com isso o perfil de velocidade tende a mudar.

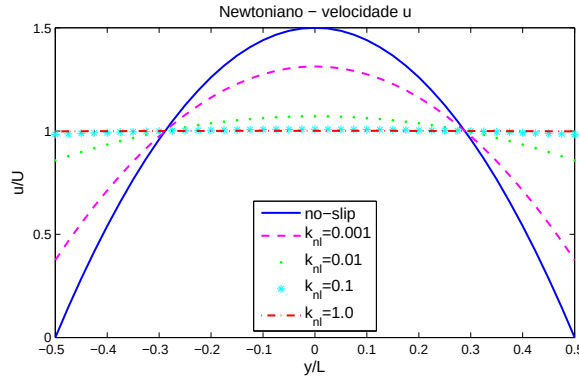


Figura 3.2: Solução analítica do perfil de velocidade do escoamento no canal de um fluido Newtoniano para diferentes valores de k_{nl} .

Na Figura 3.2 estão os perfis de velocidade descritos pela solução analítica do modelo Newtoniano, equação (3.7), cuja a velocidade *slip* é descrita pela lei de escorregamento Navier-Linear. Fica evidente no gráfico que o perfil da solução se modifica com a variação da constante de fricção. Quando k_{nl} aumenta observamos que a velocidade no eixo de simetria diminui e as velocidades na parede aumentam. O perfil de velocidade que no caso *no-slip* é bem caracterizado por uma parábola tende a uma reta de velocidade $u = 1.0$.

Para o modelo viscoelástico sPTT, cuja a solução analítica é fornecida pela equação (3.27) atrelada a condição de escorregamento Navier-Linear (3.29), fornece para diferentes valores de k_{nl} os perfis de solução dispostos na Figura 3.3.

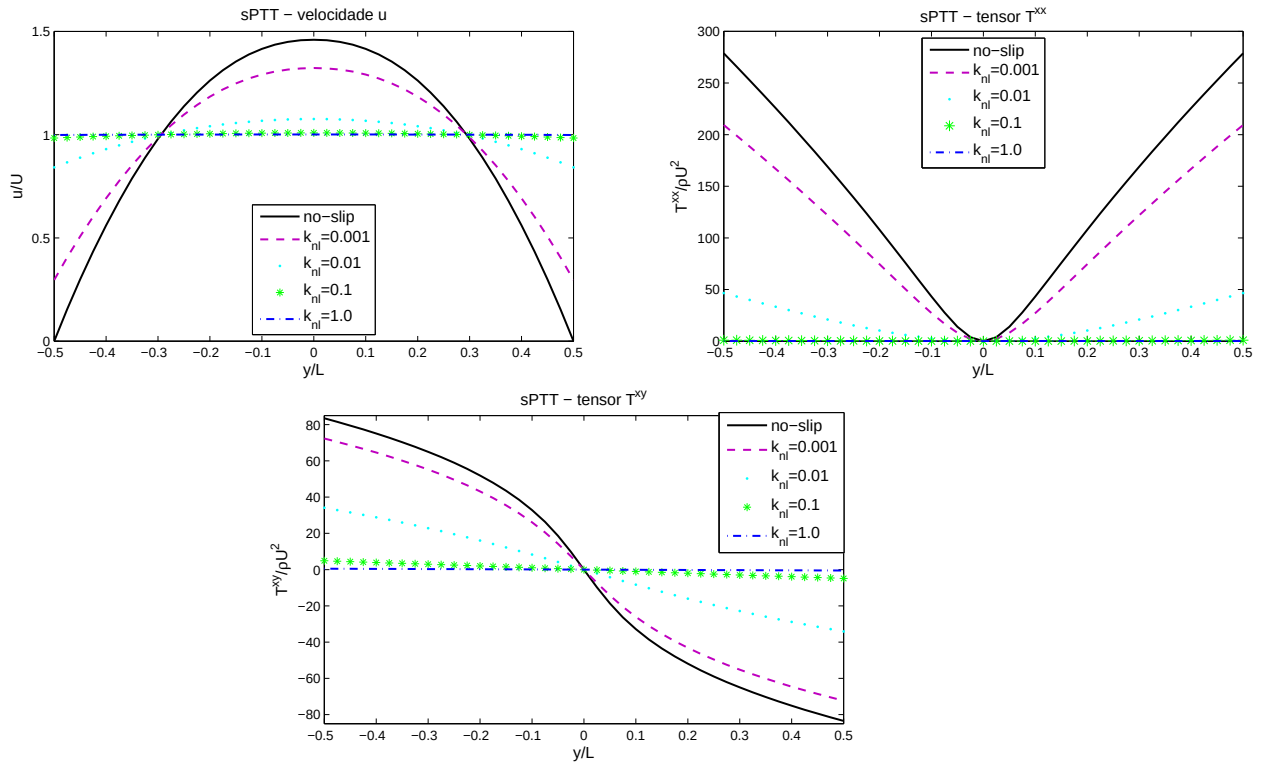


Figura 3.3: Solução analítica do perfil de velocidade e tensores de um escoamento no canal do fluido sPTT com contribuição do solvente Newtoniano utilizando diferentes valores de k_{nl} .

Observe que de maneira análoga ao caso Newtoniano a velocidade sobre o eixo de simetria diminui e as velocidade nas extremidades próximas a parede aumentam quando

eleva-se o valor da constante k_{nl} . Como consequência os tensores T^{xx} e T^{xy} decrescem com o aumento da constante de fricção, obtendo valores bem pequenos quando $k_{nl} = 1.0$. Portanto, pode-se concluir que quanto maior a intensidade da velocidade de escorregamento menores são as forças decorrentes do atrito entre o fluido e a parede.

Nos apêndices A e B são calculadas as soluções analíticas para o escoamento no canal dos fluidos viscoelásticos Oldroyd-B e sPTT, sendo que apenas o modelo sPTT (apêndice B) não admite a contribuição do solvente Newtoniano. Na Figura 3.4 o leitor pode observar como se comportam as soluções para os diferentes tipos de fluidos na presença e ausência da condição *slip*. Nos gráficos da Figura 3.4 - (b) e (c) também é possível verificar o comportamento das componentes do tensor extra-tensão $\mathbf{T}$ dos modelos viscoelásticos. Nas soluções foi considerado $Re = 0.1$, $\beta = 0.5$, $Wi = 1.0$ e $\epsilon = 0.5$.

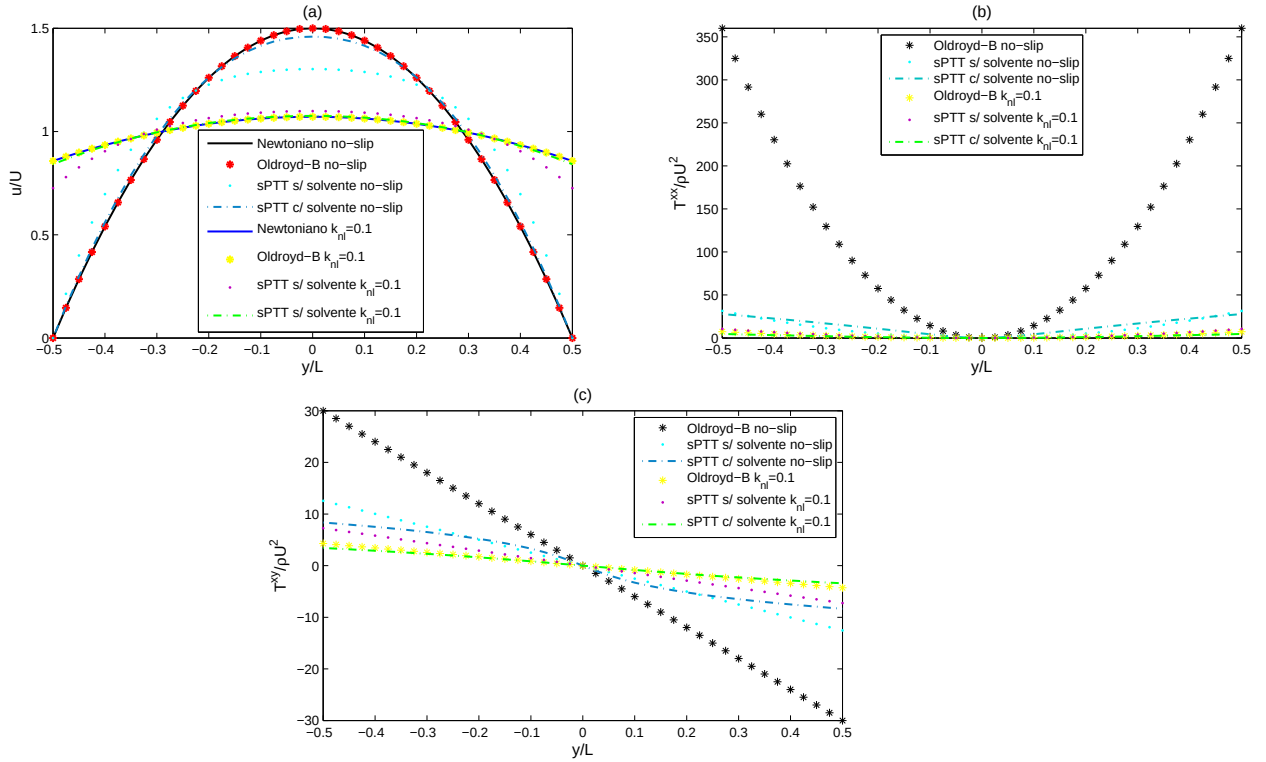


Figura 3.4: Perfis das soluções analíticas dos modelos Newtoniano e viscoelásticos admitindo a existência e não existência de uma velocidade de escorregamento na parede, onde (a) apresenta o perfil de velocidade e (b) e (c) os perfis de solução para os tensores extra-tensão T^{xx} e T^{xy} , respectivamente, apenas para os modelos viscoelásticos.

Metodologia Numérica

Esse método é baseado em métodos de projeção que procura desacoplar velocidade e pressão nas Equações de Navier-Stokes. Além de problemas com superfície livre também é possível simular problemas confinados que é o alvo desse trabalho, implementar e simular escoamentos confinados de fluidos viscoelásticos e Newtonianos com a presença de uma velocidade de escorregamento na parede. A plataforma de simulação numérica Freeflow-2D é totalmente baseada nessa metodologia e foi pensada apenas para problemas onde a condição de contorno na parede é sem escorregamento. Um dos objetivos desse trabalho é apresentar um breve estudo dessa metodologia e detalhar o que foi modificado e implementado neste código numérico.

A plataforma numérica disponibiliza ao usuário uma formulação explícita, onde as equações do momento são integradas no tempo pelo método de Euler explícito, e uma formulação semi-implícita com base nos métodos de Euler implícito (EI) e Cranck-Nicolson para a integração temporal [31], [32]. Neste trabalho será utilizada a formulação semi-implícita via o método de Euler implícito. Os termos convectivos presente nas equações do momento e constitutivas são aproximados pela técnica de alta ordem CUBISTA (Convergent and Universally Bounded Interpolation Scheme for the Treatment of Advection) [3].

Sendo assim, o objetivo central desse capítulo é apresentar a metodologia numérica implementada na plataforma Freeflow-2D para escoamento de fluidos confinados, e as alterações necessárias para a imposição da condição *slip* na parede nessa plataforma.

4.1 Malha Computacional

A malha computacional adotada para discretizar as equações é uma malha do tipo fixa (euleriana) com espaçamento uniforme ($\delta x = \delta y$) em ambas as direções x e y . No método numérico essa malha é composta por células deslocadas (*staggered grid*) onde as componentes do vetor velocidade (u, v) são discretizadas nas faces das células e as demais propriedades como pressão e tensão são discretizadas no centro das células. A Figura 4.1 trás uma representação da célula deslocada com a posição de discretização das variáveis envolvidas nos modelos (a letra ϕ representa uma variável genérica).

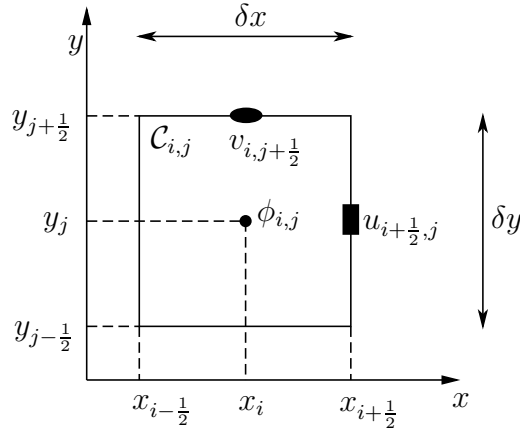


Figura 4.1: Estrutura da célula deslocada utilizada pela metodologia numérica.

B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	O
I	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	O
I	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	O
I	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	O
I	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	O
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	O

Figura 4.2: Exemplo de classificação das células em um canal confinado no Freeflow-2D.

4.2 Classificação das Células na Plataforma

Em simulações de escoamentos confinados é admitido que todas as células internas estão cheias de fluido, ou seja, não há presença de superfície livre e a classificação das células na plataforma de alto desempenho é feita da seguinte maneira:

- células cheias de fluido (*Full*) [F];
- células de contorno, parede (*Boundary*) [B];
- células de entrada do fluido (*Inflow*) [I];
- células de saída do fluido (*Outflow*) [O].

Na Figura 4.2 é feita uma representação da classificação de células no problema de escoamento em um canal.

4.3 Método da Projeção

O método de projeção proposto por Chorin em 1968 [5], [6], foi originalmente utilizado para resolver problemas de escoamentos confinados e transientes de fluidos viscosos e incompressíveis com base na técnica de diferenças finitas. Esse método permite resolver as equações de Navier-Stokes incompressíveis utilizando as variáveis primitivas (velocidade e pressão) de maneira desacoplada. Uma motivação para o uso do método da projeção é determinar um campo de pressão que garanta a conservação de massa, ou seja, determinar

a pressão p de forma que a velocidade $\mathbf{u}$ satisfaça a equação da continuidade. Sendo assim, na metodologia numérica, $\mathbf{u}$ e p são calculados separadamente.

A base matemática do método da projeção é o Teorema da Decomposição de Helmholtz-Hodge (TDHH) cuja demonstração encontra-se em [7].

Teorema 1 *Seja Ω uma região com fronteira suave $\partial\Omega$ e $\tilde{\mathbf{u}}$ um campo vetorial definido em Ω . Nestes termos, a decomposição de $\tilde{\mathbf{u}}$ na forma*

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \nabla\psi \quad (4.1)$$

existe e é única, sendo ψ um campo escalar também definido em Ω . Já o campo vetorial $\mathbf{u}$ é solenoidal e paralelo a $\partial\Omega$, isto é, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ e ao longo da fronteira de Ω , $\mathbf{u} \cdot \vec{n} = 0$, onde $\vec{n}$ é o vetor normal exterior a $\partial\Omega$.

A aplicação desse teorema consiste em definir um campo de velocidade intermediário $\tilde{\mathbf{u}}$ através da seguinte equação,

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}^\top) = -\nabla \tilde{p} + \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (4.2)$$

sendo $\tilde{p}$ um campo de pressão tentativo. Como citado anteriormente, a pressão é importante no sentido de garantir que a velocidade calculada pela equação do momento satisfaça a equação da continuidade o que não necessariamente implica que $\tilde{\mathbf{u}}$ é solenoidal. Da equação (4.1) tem-se que

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla^2 \psi, \quad (4.3)$$

aplicando a hipótese do THDD de que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ obtém-se o potencial auxiliar

$$\nabla^2 \psi = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \quad (4.4)$$

com as seguintes condições de contorno [46] nas fronteiras rígidas e inflow

$$\frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} = 0, \quad (4.5)$$

e no outflow

$$\psi = 0. \quad (4.6)$$

A condição de contorno tipo Neumann para ψ , (4.5), é devida a ordem de convergência da velocidade e pressão. Em [4], Brown mostra que para a velocidade e pressão obterem segunda ordem de convergência é necessário que a condição (4.5) seja imposta para ψ no cálculo da equação elíptica (4.4). Pelo método da projeção e equação (4.1), sabe-se que

$$\nabla \psi|_{\partial\Omega} = (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u})|_{\partial\Omega}. \quad (4.7)$$

Sendo assim, uma apropriada condição de contorno pode ser dada por,

$$\vec{n} \cdot \nabla \psi \Big|_{\partial\Omega} = \vec{n} \cdot (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \Big|_{\partial\Omega}. \quad (4.8)$$

Entretanto, utiliza-se a mesma condição de contorno para $\mathbf{u}$ e $\tilde{\mathbf{u}}$, o que implica em,

$$\vec{n} \cdot \nabla \psi \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4.9)$$

Portanto, após o cálculo de ψ a velocidade $\mathbf{u}$ é calculada segundo a expressão

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} - \nabla \psi. \quad (4.10)$$

Já a pressão p que ainda não foi calculada é obtida substituindo (4.10) em (4.2) e comparando a equação resultante com a equação do momento original (2.60). Essa comparação resulta para o método implícito (EI) na seguinte expressão para a pressão

$$p = \tilde{p} + \frac{\psi}{\delta t} - \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \psi. \quad (4.11)$$

4.4 Integração Temporal da Equação do Momento

Como descrito na introdução desse capítulo a integração temporal será feita utilizando o método de Euler implícito (EI). Isso sinaliza que a equação de quantidade de movimento que é responsável pela evolução no tempo da velocidade $\mathbf{u}$ será integrada aplicando o método EI na derivada temporal e assumindo que o termo convectivo $\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}^\top)$ encontra-se no instante de tempo anterior, o que resulta numa aproximação semi-implícita para a velocidade. Mais detalhes sobre a implementação desse método encontra-se em [31], [32].

Aplicando o método na equação (2.60) com o objetivo de determinar $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_{n+1})$ e considerando $\bar{\mathbf{T}}^{n+1}$ uma aproximação para $\mathbf{T}^{n+1}$ tem-se,

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1}}{\delta t} - \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1} = \frac{\mathbf{u}^n}{\delta t} - \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}^\top)^n - \nabla p^{n+1} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{T}}^{n+1}. \quad (4.12)$$

Contudo, a velocidade que será aproximada pela equação acima é a velocidade intermediária $\tilde{\mathbf{u}}$, ou seja,

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}}{\delta t} - \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = \frac{\tilde{\mathbf{u}}^n}{\delta t} - \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}^\top)^n - \nabla \tilde{p}^{n+1} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{T}}^{n+1}. \quad (4.13)$$

Nesse caso, admite-se que $\tilde{\mathbf{u}}^n = \mathbf{u}^n$ e $\tilde{p}^{n+1} = p^n$. Calculado o potencial ψ^{n+1} por (4.4) a velocidade é atualizada calculando,

$$\mathbf{u}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \nabla \psi^{n+1}. \quad (4.14)$$

Já a pressão será corrigida aplicando a correção da velocidade (4.14) na equação (4.13),

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^{n+1} + \nabla \psi^{n+1}}{\delta t} - \frac{\beta}{Re} \nabla^2 (\mathbf{u} + \nabla \psi)^{n+1} &= \frac{\mathbf{u}^n}{\delta t} - \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}^\top)^n - \nabla \tilde{p}^{n+1} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{T}}^{n+1} \Rightarrow \\ \frac{\mathbf{u}^{n+1}}{\delta t} - \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1} &= \frac{\mathbf{u}^n}{\delta t} - \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}^\top)^n - \nabla \left(\tilde{p}^{n+1} + \frac{\partial \nabla \psi^{n+1}}{\delta t} - \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \psi^{n+1} \right) + \nabla \cdot \bar{\mathbf{T}}^{n+1} \end{aligned} \quad (4.15)$$

e subtraindo a equação (4.15) da equação (4.12), obtém-se

$$p^{n+1} = \tilde{p}^{n+1} + \frac{\psi^{n+1}}{\delta t} - \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \psi^{n+1}. \quad (4.16)$$

É importante ressaltar que o termo convectivo (não linear) na equação do momento gera uma restrição para o passo temporal δt . Essa restrição se baseia na condição CFL (Corant-Friedrichs-Lewy) [21] que determina

$$\delta t_{CFL} \leq \min\{\delta t_{CFLx}, \delta t_{CFLy}\} \quad (4.17)$$

sendo

$$\delta t_{CFLx} = \frac{\delta x}{|u_{max}|} \quad \text{e} \quad \delta t_{CFLy} = \frac{\delta y}{|v_{max}|}. \quad (4.18)$$

As velocidades u_{max} e v_{max} representam respectivamente os valores máximos que as componentes do vetor velocidade u e v atingem nas direções x e y . Logo, o passo temporal assumido nas simulações tem que respeitar a restrição (4.17).

4.5 Integração Temporal das Equações Constitutivas

Reologicamente a contribuição não-Newtoniana é determinada segundo a equação constitutiva do fluido. A evolução temporal do tensor $\mathbf{T}$ é feita com base na seguinte equação,

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} = H(\mathbf{u}, \mathbf{T}) \quad (4.19)$$

sendo $H(\mathbf{u}, \mathbf{T})$ construída conforme a equação constitutiva considerada. Nesse trabalho estão sendo considerados os fluidos Oldroyd-B e sPTT. Como dito anteriormente, o fluido Oldroyd-B pode ser obtido ao considerar $f(tr(\mathbf{T})) = 1$, ou seja, $\epsilon = 0$ na função linear (2.68). Sendo assim, apresentaremos a integração temporal para a equação constitutiva sPTT. Então, a função $H(\mathbf{u}, \mathbf{T})$ é dada como,

$$H(\mathbf{u}, \mathbf{T}) = 2 \frac{(1 - \beta)}{WiRe} \mathbf{D} - \frac{1}{Wi} f(tr(\mathbf{T})) \mathbf{T} - [\nabla \cdot (\mathbf{uT}) - (\mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{u})^\top + (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{T})] . \quad (4.20)$$

O método utilizado para resolver $\mathbf{T}$ é o método Runge-Kutta de segunda ordem de precisão (RK21). Esse método se divide em duas etapas, a primeira é calcular $\overline{\mathbf{T}}^{n+1}$ (o mesmo utilizado na seção anterior para o cálculo da velocidade intermediária) usando o esquema Euler explícito,

$$\overline{\mathbf{T}}^{n+1} = \mathbf{T}^n + \delta t H(\mathbf{u}^n, \mathbf{T}^n), \quad (4.21)$$

e a segunda etapa é calcular $\mathbf{T}^{n+1}$ por meio de um esquema semelhante a Regra do trapézio,

$$\mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{T}^n + \frac{1}{2} \delta t \left[H(\mathbf{u}^n, \mathbf{T}^n) + H(\mathbf{u}^{n+1}, \overline{\mathbf{T}}^{n+1}) \right] . \quad (4.22)$$

Além do Método RK21 também é possível determinar $\mathbf{T}^{n+1}$ via método Explícito, para isso basta apenas considerar $\mathbf{T}^{n+1} = \overline{\mathbf{T}}^{n+1}$ em (4.21).

4.6 Discretização das Equações na Malha Fixa

4.6.1 Condições de Fronteira Rígida

Nesta seção são descritas as discretizações das condições de contorno adotadas nesse trabalho. Nas fronteiras sólidas são consideradas as condições de contorno com escorregamento e sem escorregamento. Para a condição de escorregamento é considerada a lei de escorregamento Navier Linear.

4.6.1.1 Fronteira Rígida Paralela a x

A plataforma Freeflow-2D admite apenas dois casos de fronteira sólida: paralela ao eixo x e paralela ao eixo y do sistema cartesiano. Ao considerar o escoamento de fluidos em um canal horizontal as paredes ficam posicionadas paralelamente ao eixo x , uma inferiormente e a outra superiormente. Nessa subseção vamos apenas apresentar como foi realizada a discretização para a parede ou fronteira rígida paralela a x que delimita o fluxo do fluido superiormente. Para tornar mais didática a apresentação, considere a Figura 4.3 que ilustra a posição dos pontos e variáveis consideradas para aproximar a velocidade na célula de parede cujo centro é o ponto (x_i, y_j) .

O objetivo central dessa subseção é mostrar como é feita a aproximação na fronteira rígida para a configuração de parede da Figura 4.3 em problemas Newtonianos e viscoelásticos slip. Sendo assim, primeiro vamos apresentar algumas decorrências das condições auxiliares apresentadas no Capítulo 2.

Decorrente da condição de impermeabilidade, $\mathbf{u}_n = 0$, tem-se

$$v = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (4.23)$$

Logo a velocidade normal a parede é,

$$v_{i,j-\frac{1}{2}} = 0. \quad (4.24)$$

Para a velocidade tangencial é necessário observar a condição adotada: no-slip ou slip. Para o caso no-slip (2.29)

$$u = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (4.25)$$

e considerando a equação da continuidade tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (4.26)$$

Em problemas cuja condição adotada é a slip (2.30) sabe-se que $u_{parede} \neq 0$ e portanto não pode-se concluir que $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ e consequentemente também não pode-se afirmar que $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$.

Ao resolver problemas viscoelásticos também é necessário obter informações das componentes do tensor $\mathbf{T}$ na fronteira rígida. A estratégia utilizada pela metodologia implementada no FREEFLOW-2D é calcular via a equação constitutiva, T^{xx} , T^{xy} e T^{yy} na parede levando em consideração a condição adotada para a velocidade. Sendo assim, considere o modelo mais completo, sPTT, dado pela equação 4.19 cuja função $\mathbf{H}$ é expressa por (4.20). Em coordenadas cartesianas tem-se,

$$\frac{\partial T^{xx}}{\partial t} = H^{xx} = 2 \frac{(1-\beta)}{WiRe} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{Wi} f(tr(\mathbf{T})) T^{xx} - \left[\frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} - 2T^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - 2T^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right], \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial T^{xy}}{\partial t} = H^{xy} = \frac{(1-\beta)}{WiRe} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{1}{Wi} f(tr(\mathbf{T})) T^{xy} - \left[\frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} - T^{xx} \frac{\partial v}{\partial x} - T^{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right], \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial T^{yy}}{\partial t} = H^{yy} = 2 \frac{(1-\beta)}{WiRe} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{Wi} f(tr(\mathbf{T})) T^{yy} - \left[\frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} - 2T^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} - 2T^{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right]. \quad (4.29)$$

Para problemas no-slip, vamos aplicar as condições decorrentes de $u_{parede} = v_{parede} = 0$ em (4.27), (4.28) e (4.29) o que fornece as seguintes expressões,

$$H^{xx} = -\frac{1}{Wi} f(tr(\mathbf{T})) T^{xx} - \left[-2T^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right], \quad (4.30)$$

$$H^{xy} = \frac{(1-\beta)}{WiRe} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{1}{Wi} f(tr(\mathbf{T})) T^{xy} - \left[-T^{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right], \quad (4.31)$$

$$H^{yy} = -\frac{1}{Wi} f(tr(\mathbf{T})) T^{yy}. \quad (4.32)$$

Já para problemas slip as equações (4.27), (4.28) e (4.29) ficam,

$$H^{xx} = 2 \frac{(1-\beta)}{WiRe} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{Wi} f(tr(\mathbf{T})) T^{xx} - \left[\frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} - 2T^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - 2T^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right], \quad (4.33)$$

$$H^{xy} = \frac{(1-\beta)}{WiRe} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{1}{Wi} f(tr(\mathbf{T})) T^{xy} - \left[\frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} - T^{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right], \quad (4.34)$$

$$H^{yy} = 2 \frac{(1-\beta)}{WiRe} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{Wi} f(tr(\mathbf{T})) T^{yy} - \left[\frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} - 2T^{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right]. \quad (4.35)$$

Observe que são poucos os termos que se anulam devido a condições impostas a u e v na parede para problemas slip.

Observação 3 Observe que no caso no-slip os termos convectivos das equações (4.27), (4.28) e (4.29) se anulam sobre a parede pois,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial(u\mathbf{T})}{\partial x} + \frac{\partial(v\mathbf{T})}{\partial y} \right]_{parede} = \\ & = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{T} + u \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \mathbf{T} + v \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} \right]_{parede} = \\ & = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \mathbf{T} \right]_{parede} + \left[u \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} \right]_{parede}. \end{aligned}$$

Da equação da continuidade e como $u_{parede} = 0$ e $v_{parede} = 0$ então,

$$\left[\frac{\partial(u\mathbf{T})}{\partial x} + \frac{\partial(v\mathbf{T})}{\partial y} \right]_{parede} = 0. \quad (4.36)$$

Já para o caso slip, procedendo de maneira análoga tem-se,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial(u\mathbf{T})}{\partial x} + \frac{\partial(v\mathbf{T})}{\partial y} \right]_{parede} = \\ & = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \mathbf{T} \right]_{parede} + \left[u \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} \right]_{parede} \Rightarrow \\ & \left[\frac{\partial(u\mathbf{T})}{\partial x} + \frac{\partial(v\mathbf{T})}{\partial y} \right]_{parede} = \left[u \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} \right]_{parede}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Note que no caso do escoamento totalmente desenvolvido no canal $\left[u \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} \right]_{parede} = 0$.

Entretanto, para problemas mais gerais se considerarmos apenas $\left[u \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} \right]_{parede}$, ou seja,

$\left[v \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} \right]_{parede} = 0$, então de (4.37) tem-se,

$$\frac{\partial(u\mathbf{T})}{\partial x} = u \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x}, \quad (4.38)$$

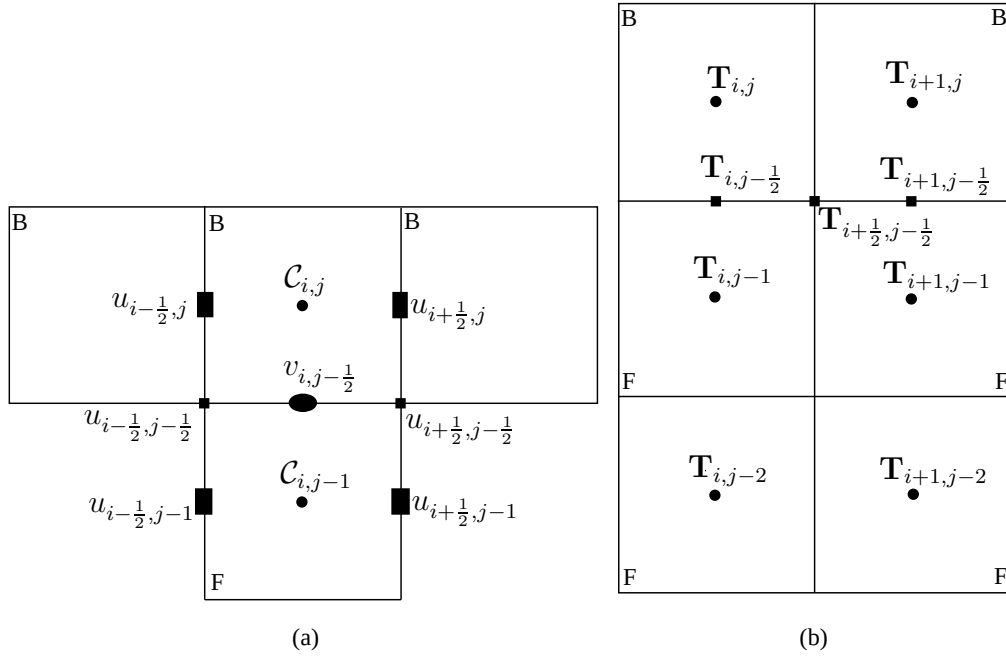


Figura 4.3: Representação da parede paralela a x onde (a) ilustra a discretização da velocidade e (b) a discretização do tensor.

o que não é verdade, pois

$$\frac{\partial(u\mathbf{T})}{\partial x} = u \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y}. \quad (4.39)$$

A fim de explicar como é calculada a velocidade tangencial e o tensor na fronteira rígida vamos dividir em dois casos: no-slip e slip.

- **no-slip**: Decorrente da condição $\mathbf{u}_{\rightarrow} = 0$ tem-se,

$$u_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = 0. \quad (4.40)$$

Usando extrapolação linear (ver Apêndice C) calcula-se,

$$u_{i-\frac{1}{2},j} = 2u_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2},j-1}, \quad (4.41)$$

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = 2u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2},j-1}, \quad (4.42)$$

logo,

$$u_{i-\frac{1}{2},j} = -u_{i-\frac{1}{2},j-1}, \quad (4.43)$$

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = -u_{i+\frac{1}{2},j-1}. \quad (4.44)$$

Em escoamentos viscoelásticos que é necessário o cálculo de $\mathbf{T}$ na fronteira rígida [37] isso é feito resolvendo via o método RK21 a equação (4.19) com a função $\mathbf{H}$ descrita pelas equações (4.27), (4.28) e (4.29) que discretizadas no espaço entre as células $\mathcal{C}_{i,j}$ e $\mathcal{C}_{i,j-1}$ ficam,

$$H^{xx}|_{i,j-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{Wi} f(tr(\mathbf{T}))|_{i,j-\frac{1}{2}} T^{xx}|_{i,j-\frac{1}{2}} - \left[-2 T^{xy}|_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j-\frac{1}{2}} \right], \quad (4.45)$$

$$H^{xy}|_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{(1-\beta)}{WiRe} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j-\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{Wi} f(tr(\mathbf{T}))|_{i,j-\frac{1}{2}} T^{xy}|_{i,j-\frac{1}{2}} - \left[-T^{yy}|_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j-\frac{1}{2}} \right], \quad (4.46)$$

$$H^{yy}|_{i,j-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{W_i} f(tr(\mathbf{T}))|_{i,j-\frac{1}{2}} T^{yy}|_{i,j-\frac{1}{2}}. \quad (4.47)$$

Note que é necessário determinar $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j-\frac{1}{2}}$,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\delta y}, \quad (4.48)$$

sendo,

$$u_{i,j} = \frac{1}{2} \left(u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j} \right) \quad (4.49)$$

e

$$u_{i,j-1} = \frac{1}{2} \left(u_{i+\frac{1}{2},j-1} + u_{i-\frac{1}{2},j-1} \right). \quad (4.50)$$

Logo, determinado $\mathbf{T}_{i,j-\frac{1}{2}}$ é feita a seguinte aproximação para $\mathbf{T}$ no centro da célula $[\mathbf{B}]$ (ver Apêndice C),

$$\mathbf{T}_{i,j} = \frac{8}{3} \mathbf{T}_{i,j-\frac{1}{2}} - 2\mathbf{T}_{i,j-1} + \frac{1}{3} \mathbf{T}_{i,j-2}. \quad (4.51)$$

- **slip:** Neste caso a velocidade tangencial a fronteira rígida não é nula, $\mathbf{u}_{\vec{t}} = u_{\text{parede}}$. A velocidade u_{parede} implementada no código numérico é decorrente da lei de escorregamento Navier Linear. Entretanto, essa lei aplicada a problemas viscoelásticos difere por um termo da mesma lei aplicada a problemas Newtonianos. Para problemas Newtonianos a lei de escorregamento Navier Linear calculada na face entre as células $\mathcal{C}_{i,j}$ e $\mathcal{C}_{i,j-1}$ (ver Figura 4.3) é dada por,

$$u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = k_{nl} \left[\mp \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}. \quad (4.52)$$

Observe que para o tipo de fronteira considerada, paralela ao eixo x (além disso a parede de referência é a superior, logo usa-se o sinal $(-)$), a derivada $\frac{\partial v}{\partial x}$ é nula sobre a parede porém, é necessário aproximar a derivada $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$. Utilizando diferenças centrais,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j-1}}{\delta y}. \quad (4.53)$$

Entretanto, $u_{i+\frac{1}{2},j}$ é calculado via extrapolação linear então,

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = 2u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2},j-1}. \quad (4.54)$$

Logo,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = 2 \frac{(u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2},j-1})}{\delta y}. \quad (4.55)$$

Agora, aplicando em (4.52) obtém-se,

$$u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = k_{nl} \left[-\frac{1}{Re} \frac{2(u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2},j-1})}{\delta y} \right] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2k_{nl}}{\delta y Re} \right) &= \frac{2k_{nl}}{\delta y Re} u_{i+\frac{1}{2},j-1} \Rightarrow u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(\frac{\delta y Re + 2k_{nl}}{\delta y Re} \right) = \frac{2k_{nl}}{\delta y Re} u_{i+\frac{1}{2},j-1} \\
\Rightarrow u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} &= \frac{\frac{2k_{nl}}{\delta y Re}}{\left(\frac{\delta y Re + 2k_{nl}}{\delta y Re} \right)} u_{i+\frac{1}{2},j-1} \Rightarrow u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \frac{2Re \frac{k_{nl}}{Re}}{2Re \frac{\delta y}{2} + 2Re \frac{k_{nl}}{Re}} u_{i+\frac{1}{2},j-1} \Rightarrow \\
u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} &= \frac{\frac{k_{nl}}{Re}}{\left(\frac{k_{nl}}{Re} + \frac{\delta y}{2} \right)} u_{i+\frac{1}{2},j-1}. \tag{4.56}
\end{aligned}$$

Portanto, para o caso Newtoniano, primeiro calcula-se $u_{parede} = u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$ em (4.56) e depois determina-se $u_{i+\frac{1}{2},j}$ por (4.54). No caso da parede inferior as contas são análogas e obtém-se a mesma expressão para o cálculo de u_{parede} com excessão dos índices.

Em problemas viscoelásticos o raciocínio é análogo. Porém, nesse tipo de problema a velocidade slip é determinada via a expressão,

$$u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = k_{nl} \left[\mp \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \mp T_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{xy} \right], \tag{4.57}$$

considerando $(-)$ por ser tratar da parede superior. Utilizando as mesmas condições e aproximações do caso Newtoniano tem-se,

$$\begin{aligned}
u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} &= k_{nl} \left[-\frac{\beta}{Re} \frac{2 \left(u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2},j-1} \right)}{\delta y} \right] - k_{nl} T_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{xy} \Rightarrow \\
u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} &= \frac{\frac{k_{nl}\beta}{Re}}{\left(\frac{k_{nl}\beta}{Re} + \frac{\delta y}{2} \right)} u_{i+\frac{1}{2},j-1} - \frac{k_{nl}}{\left(1 + \frac{2k_{nl}\beta}{\delta y Re} \right)} T_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{xy}. \tag{4.58}
\end{aligned}$$

Observe que é preciso determinar $T_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{xy}$. Entretanto, como citado anteriormente o tensor $\mathbf{T}$ é calculado no meio das faces entre células $[\mathbf{B}]$ e $[\mathbf{F}]$ por meio da equação constitutiva. Sendo assim, podemos especificar $T_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{xy}$ fazendo a seguinte média,

$$T_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{xy} = \frac{1}{2} \left[T_{i,j-\frac{1}{2}}^{xy} + T_{i+1,j-\frac{1}{2}}^{xy} \right]. \tag{4.59}$$

Como no caso no-slip também é necessário determinar numericamente $\mathbf{T}$ na fronteira rígida. Esse calculo é feito via os passos do método RK21 considerando que a função $\mathbf{H}$ é descrita sobre a fronteira rígida pelas equações (4.33), (4.34) e (4.35). Note que nessas equações é necessário determinar fluxos, ou seja, $\frac{\partial(u\mathbf{T})}{\partial x} + \frac{\partial(v\mathbf{T})}{\partial y}$. Porém, como o foco numérico desse trabalho, num primeiro momento, é o estudo de escoamentos totalmente desenvolvidos em canais sob influência de uma condição slip não há necessidade de apresentar uma forma de calcular esses termos pois para esses problemas, como justificado na Observação 3, os termos de fluxo são nulos. Sendo assim, $T_{i,j-\frac{1}{2}}^{xy}$ e $T_{i+1,j-\frac{1}{2}}^{xy}$ são calculados segundo o passo do método RK21 onde H^{xy} é determinado pela equação (4.46).

Para escoamentos totalmente desenvolvidos em canais o tensor $\mathbf{T}$ é determinado no centro de células $[\mathbf{B}]$, analogamente como foi descrito no caso no-slip.

Analogamente, ao que foi feito para o caso representado na Figura 4.3 também é feito para o caso em que a parede considerada é paralela a direção x porém inferiormente. Lembrando que para este caso deve-se considerar o sinal (+) nas equações que descrevem a velocidade de escorregamento.

4.6.1.2 Fronteira Rígida Paralela a y

Um outro tipo de configuração de parede que difere um pouco do apresentado na seção anterior, aparece quando o objetivo é estudar escoamento em canais verticais, ou seja, quando as paredes do canal são paralelas a direção y . Neste caso, as considerações são análogas ao que foi feito em fronteiras rígidas paralelas a direção x . Entretanto, a velocidade normal a parede é u e a velocidade tangente a parede é v .

Para mostrar como é feito o calculo da velocidade e tensor na fronteira rígida paralela a y vamos considerar a Figura 4.4. Admitindo as condições auxiliares descritas no Capítulo 2, tem-se

$$u = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (4.60)$$

e então a velocidade normal a parede e dada por,

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = 0. \quad (4.61)$$

A respeito da velocidade tangencial devemos considerar os dois casos: no-slip e slip. Para problemas no-slip tem-se,

$$v = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (4.62)$$

logo, pela equação da continuidade,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (4.63)$$

Já em problemas que a condição slip é adotada para a velocidade tangencial, como descrito anteriormente, $v_{parede} \neq 0$ e portanto não pode-se concluir que $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ e consequentemente não pode-se garantir que $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

A função $\mathbf{H}$ que depende das derivadas espaciais da equação constitutiva (4.19)-(4.20) aplicada sobre a fronteira rígida para escoamentos totalmente desenvolvidos em canais verticais cuja a condição na parede é no-slip ou slip resumi-se ao seguinte sistema de equações,

$$H^{xx} = -\frac{1}{Wi} f(tr(\mathbf{T})) T^{xx}, \quad (4.64)$$

$$H^{xy} = \frac{(1-\beta)}{WiRe} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{1}{Wi} f(tr(\mathbf{T})) T^{xy} - \left[-T^{xx} \frac{\partial v}{\partial x} \right], \quad (4.65)$$

$$H^{yy} = -\frac{1}{Wi} f(tr(\mathbf{T})) T^{yy} - \left[-2T^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} \right]. \quad (4.66)$$

Note que, para o caso slip novamente os termos de fluxo são anulados devido o tipo de problema considerado: escoamento totalmente desenvolvido no canal (Observação 3). Portanto, pode-se determinar o tensor extra tensão sobre a fronteira rígida segundo os passos do método RK21 adotado para resolver no tempo a equação constitutiva.

O calculo da velocidade tangencial v_{parede} é feito levando em consideração os casos a seguir:

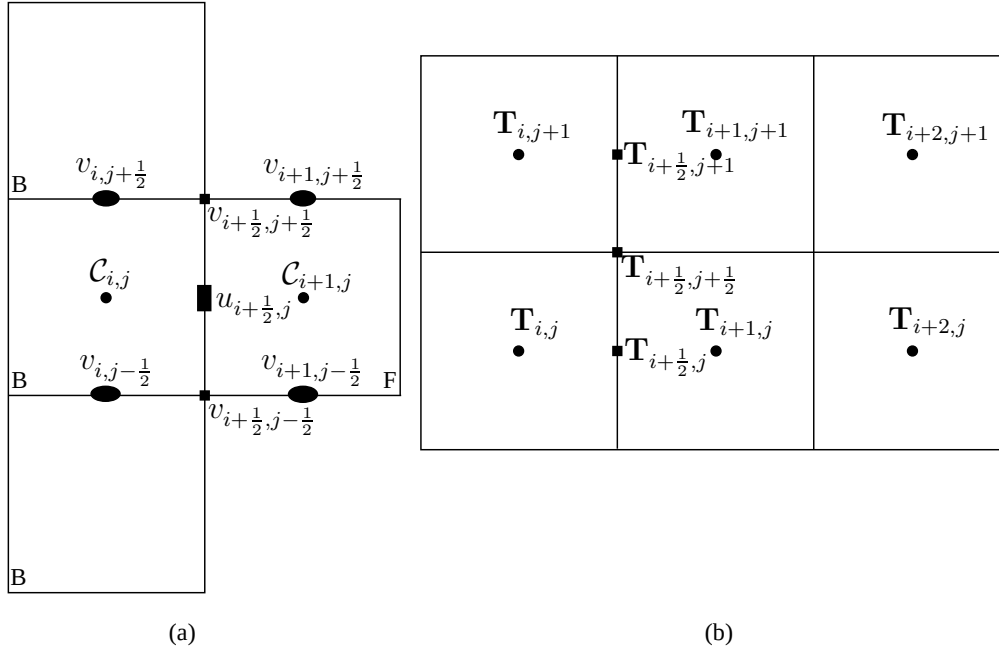


Figura 4.4: Representação da parede paralela a y onde (a) ilustra a discretização da velocidade e (b) a discretização do tensor.

- **no-slip**: A velocidade tangencial é calculada determinando primeiramente a velocidade na fronteira rígida,

$$v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = v_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = 0. \quad (4.67)$$

Agora, usando a extrapolação linear obtém-se,

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} = 2v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - v_{i+1,j+\frac{1}{2}}, \quad (4.68)$$

$$v_{i,j-\frac{1}{2}} = 2v_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - v_{i+1,j-\frac{1}{2}}, \quad (4.69)$$

e a velocidade na célula **[B]** é dada por,

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} = -v_{i+1,j+\frac{1}{2}}, \quad (4.70)$$

$$v_{i,j-\frac{1}{2}} = -v_{i+1,j-\frac{1}{2}}. \quad (4.71)$$

Para o caso viscoelástico no-slip além das condições acima, o tensor $\mathbf{T}$ na face da célula **[B]** em contato com fluido é aproximado via RK21. As equações (4.64), (4.65) e (4.66) aplicadas no ponto $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)$ são

$$H^{xx}|_{i+\frac{1}{2},j} = -\frac{1}{Wi} f(tr(\mathbf{T}))|_{i+\frac{1}{2},j} T^{xx}|_{i+\frac{1}{2},j}, \quad (4.72)$$

$$H^{xy}|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{(1-\beta)}{WiRe} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} \right) - \frac{1}{Wi} f(tr(\mathbf{T}))|_{i+\frac{1}{2},j} T^{xy}|_{i+\frac{1}{2},j} - \left[-T^{xx}|_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} \right], \quad (4.73)$$

$$H^{yy}|_{i+\frac{1}{2},j} = -\frac{1}{Wi} f(tr(\mathbf{T}))|_{i+\frac{1}{2},j} T^{yy}|_{i+\frac{1}{2},j} - \left[-2 T^{xy}|_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} \right], \quad (4.74)$$

onde,

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\delta x}, \quad (4.75)$$

com

$$v_{i,j} = \frac{1}{2} \left(v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}} \right). \quad (4.76)$$

Já $\mathbf{T}$ em células $\mathbf{B}$ é determinado fazendo,

$$\mathbf{T}_{i,j} = \frac{8}{3} \mathbf{T}_{i+\frac{1}{2},j} - 2 \mathbf{T}_{i+1,j} + \frac{1}{3} \mathbf{T}_{i+2,j}. \quad (4.77)$$

- **slip:** Considerando um escoamento Newtoniano a velocidade $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ é calculada da seguinte forma,

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} = 2v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - v_{i+1,j+\frac{1}{2}} \quad (4.78)$$

sendo que de (2.70) tem-se,

$$v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = k_{nl} \left[\mp \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right]. \quad (4.79)$$

Devido a parede encontrar-se à esquerda da célula com fluido o sinal considerado em (4.79) é (+). Como $u = 0$ sobre a parede então,

$$v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = k_{nl} \left[\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right]. \quad (4.80)$$

Utilizando diferenças centrais,

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j+\frac{1}{2}}}{\delta x}, \quad (4.81)$$

e de (4.78) chega-se em

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = 2 \frac{(v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})}{\delta x}. \quad (4.82)$$

Aplicando em (4.80) tem-se

$$v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = k_{nl} \left[\frac{2}{Re} \frac{(v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})}{\delta x} \right]. \quad (4.83)$$

Logo,

$$v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{k_{nl}}{Re}}{\left(\frac{k_{nl}}{Re} + \frac{\delta x}{2} \right)} v_{i+1,j+\frac{1}{2}}. \quad (4.84)$$

Para escoamentos viscoelásticos, como mostrado nas Figuras 4.4 (a) e (b), a velocidade e o tensor são aproximados calculando primeiro

$$v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{k_{nl}\beta}{Re}}{\left(\frac{k_{nl}\beta}{Re} + \frac{\delta x}{2} \right)} v_{i+1,j+\frac{1}{2}} + \frac{\frac{k_{nl}}{2k_{nl}\beta}}{\left(1 + \frac{\delta x Re}{2k_{nl}\beta} \right)} T_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{xy} \quad (4.85)$$

dado que,

$$T_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{xy} = \frac{1}{2} \left[T_{i+\frac{1}{2},j}^{xy} + T_{i+\frac{1}{2},j+1}^{xy} \right]. \quad (4.86)$$

Já o tensor $\mathbf{T}$ em células $[\mathbf{B}]$ é determinado exatamente da mesma forma como descrito no caso no-slip. Os tensores $T_{i+\frac{1}{2},j}^{xy}$ e $T_{i+\frac{1}{2},j+1}^{xy}$ são determinados pela rotina numérica quando se calcula o tensor $\mathbf{T}$ na fronteira rígida.

4.6.2 Equações de Conservação do Momento e Massa

Seguindo o conceito de malha deslocada a discretização espacial das equações de quantidade de movimento e continuidade são feitas via o método de diferenças centradas de segunda ordem, ressaltando que apenas o termo convectivo é tratado de uma outra forma. Considere uma célula computacional $\mathcal{C}_{i,j}$ como a representada na Figura 4.1, onde o ponto central é exatamente a coordenada cartesiana (x_i, y_j) . A velocidade u é calculada na face vertical à direita e a velocidade v na face horizontal superior, as demais propriedades são calculadas no centro da célula. Então, aplicando as equações nessa célula tem-se:

- Equação da continuidade (2.62): discretizada no centro da célula $\mathcal{C}_{i,j}$,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} + \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y} = 0. \quad (4.87)$$

- Equação do momento na direção x (2.63): discretizada na face vertical à direita (entre as células $\mathcal{C}_{i,j}$ e $\mathcal{C}_{i+1,j}$),

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \frac{\delta t \beta}{Re} \left[\left. \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} \right|_{i+\frac{1}{2},j} + \left. \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right|_{i+\frac{1}{2},j} \right]^{n+1} &= \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n - \delta t \left[\left. \frac{\partial(\tilde{u}\tilde{u})}{\partial x} \right|_{i+\frac{1}{2},j} + \left. \frac{\partial(\tilde{v}\tilde{u})}{\partial y} \right|_{i+\frac{1}{2},j} \right]^n - \\ &\quad - \delta t \left[\left. \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \right|_{i+\frac{1}{2},j} \right]^{n+1} + \delta t \left[\left. \frac{\partial \bar{T}^{xx}}{\partial x} \right|_{i+\frac{1}{2},j} + \left. \frac{\partial \bar{T}^{xy}}{\partial y} \right|_{i+\frac{1}{2},j} \right]^{n+1} \Rightarrow \\ \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \frac{\delta t \beta}{Re} \left[\frac{\tilde{u}_{i+\frac{3}{2},j} - 2\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j} + \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j}}{(\delta x)^2} + \frac{\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j+1} - 2\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j} + \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j-1}}{(\delta y)^2} \right]^{n+1} &= \\ = \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n - \delta t \left[\left. \frac{\partial(\tilde{u}\tilde{u})}{\partial x} \right|_{i+\frac{1}{2},j} + \left. \frac{\partial(\tilde{v}\tilde{u})}{\partial y} \right|_{i+\frac{1}{2},j} \right]^n - \delta t \left[\frac{\tilde{p}_{i+1,j} - \tilde{p}_{i,j}}{\delta x} \right]^{n+1} + \\ &\quad + \delta t \left[\frac{\bar{T}_{i+1,j}^{xx} - \bar{T}_{i,j}^{xx}}{\delta x} + \frac{\bar{T}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{xy} - \bar{T}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{xy}}{\delta y} \right]^{n+1}. \quad (4.88) \end{aligned}$$

- Equação do momento na direção y (2.64): discretizada na face horizontal superior (entre as células $\mathcal{C}_{i,j}$ e $\mathcal{C}_{i,j+1}$),

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{\delta t \beta}{Re} \left[\left. \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} \right|_{i,j+\frac{1}{2}} + \left. \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \right|_{i,j+\frac{1}{2}} \right]^{n+1} &= \tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \delta t \left[\left. \frac{\partial(\tilde{u}\tilde{v})}{\partial x} \right|_{i,j+\frac{1}{2}} + \left. \frac{\partial(\tilde{v}\tilde{v})}{\partial y} \right|_{i,j+\frac{1}{2}} \right]^n - \\ &\quad - \delta t \left[\left. \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} \right|_{i,j+\frac{1}{2}} \right]^{n+1} + \delta t \left[\left. \frac{\partial \bar{T}^{xy}}{\partial x} \right|_{i,j+\frac{1}{2}} + \left. \frac{\partial \bar{T}^{yy}}{\partial y} \right|_{i,j+\frac{1}{2}} \right]^{n+1} \Rightarrow \\ \tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{\delta t \beta}{Re} \left[\frac{\tilde{v}_{i+1,j+\frac{1}{2}} - 2\tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}} + \tilde{v}_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{(\delta x)^2} + \frac{\tilde{v}_{i,j+\frac{3}{2}} - 2\tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}} + \tilde{v}_{i,j-\frac{1}{2}}}{(\delta y)^2} \right]^{n+1} &= \\ = \tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \delta t \left[\left. \frac{\partial(\tilde{u}\tilde{v})}{\partial x} \right|_{i,j+\frac{1}{2}} + \left. \frac{\partial(\tilde{v}\tilde{v})}{\partial y} \right|_{i,j+\frac{1}{2}} \right]^n - \delta t \left[\frac{\tilde{p}_{i,j+1} - \tilde{p}_{i,j}}{\delta y} \right]^{n+1} + \\ &\quad + \delta t \left[\frac{\bar{T}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{xy} - \bar{T}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{xy}}{\delta x} + \frac{\bar{T}_{i,j+1}^{yy} - \bar{T}_{i,j}^{yy}}{\delta y} \right]^{n+1}. \quad (4.89) \end{aligned}$$

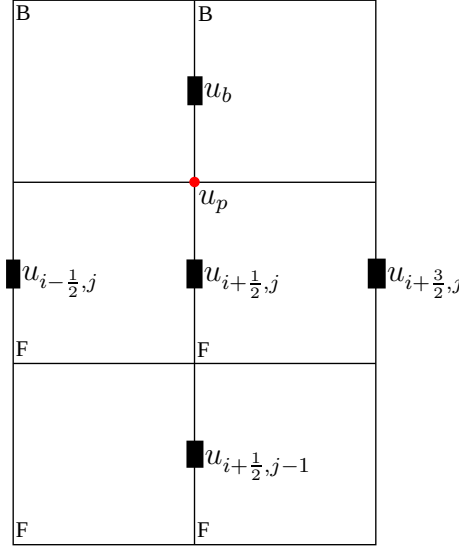


Figura 4.5: Representação da discretização da equação do momento na direção x em uma célula adjacente a parede superior.

A aplicação das equações (4.88) e (4.89) em todas as células interiores ao domínio, onde há fluido, gera dois sistemas, $A\tilde{u}^{n+1} = G_x$ e $A\tilde{v}^{n+1} = G_y$. A implementação desses sistemas requer cuidado em células próximas ao contorno onde a condição de escorregamento e a condição de não escorregamento são consideradas. Vale ressaltar que no caso Newtoniano $\overline{\mathbf{T}} = 0$. Logo, no vetor independente G_x e G_y não aparece as componentes do tensor extra-tensão. Entretanto, observe que ao calcular o divergente do tensor extra-tensão necessita-se conhecer valores de $\overline{T}^{xy}$ em pontos onde essa propriedade não está definida. Para contornar essa situação esses valores são obtidos por meio de uma média aritmética envolvendo os pontos centrais das quatro células vizinhas [47],

$$\overline{T}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{xy} = \frac{1}{4} [\overline{T}_{i+1,j+1}^{xy} + \overline{T}_{i+1,j}^{xy} + \overline{T}_{i,j}^{xy} + \overline{T}_{i,j+1}^{xy}] , \quad (4.90)$$

$$\overline{T}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{xy} = \frac{1}{4} [\overline{T}_{i+1,j}^{xy} + \overline{T}_{i+1,j-1}^{xy} + \overline{T}_{i,j-1}^{xy} + \overline{T}_{i,j}^{xy}] , \quad (4.91)$$

$$\overline{T}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{xy} = \frac{1}{4} [\overline{T}_{i,j+1}^{xy} + \overline{T}_{i,j}^{xy} + \overline{T}_{i-1,j}^{xy} + \overline{T}_{i-1,j+1}^{xy}] . \quad (4.92)$$

Para explicar as mudanças nos sistemas $A\tilde{u}^{n+1} = G_x$ e $A\tilde{v}^{n+1} = G_y$ decorrente da condição de contorno com escorregamento vamos considerar separadamente o caso slip do caso no-slip. Lembrando que o estudo numérico de escoamentos com escorregamento será feito via a lei de escorregamento Navier-Linear.

4.6.2.1 Sistema Implícito

Os sistemas $A\tilde{u}^{n+1} = G_x$ e $A\tilde{v}^{n+1} = G_y$ são construídos considerando dois casos: com escorregamento na parede e sem escorregamento na parede.

Considere as equações (4.88) e (4.89), elas são reescritas respectivamente da seguinte forma,

$$\left[\alpha + 2 + 2 \frac{(\delta x)^2}{(\delta y)^2} \right] \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \left[\tilde{u}_{i+\frac{3}{2},j} + \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j} \right]^{n+1} - \frac{(\delta x)^2}{(\delta y)^2} \left[\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j+1} + \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j-1} \right]^{n+1} = \alpha G_x|_{i+\frac{1}{2},j} , \quad (4.93)$$

$$\left[\alpha + 2 + 2 \frac{(\delta x)^2}{(\delta y)^2} \right] \tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \left[\tilde{v}_{i+1,j+\frac{1}{2}} + \tilde{v}_{i-1,j+\frac{1}{2}} \right]^{n+1} - \frac{(\delta x)^2}{(\delta y)^2} \left[\tilde{v}_{i,j+\frac{3}{2}} + \tilde{v}_{i,j-\frac{1}{2}} \right]^{n+1} = \alpha G_y|_{i,j+\frac{1}{2}}, \quad (4.94)$$

onde $\alpha = \frac{(\delta x)^2 Re}{\delta t \beta}$. Os sistemas acima geram matrizes pentadiagonais. O tipo de condição de contorno, slip ou no-slip e a forma como são calculadas, explícita ou implicitamente, geram algumas modificações nos sistemas (4.93) e (4.94).

A metodologia utilizada aqui para aproximar a velocidade em células de contorno rígido de problemas com velocidade de escorregamento na parede é explícita [32], ou seja, as condições de contorno para a velocidade intermediária serão calculadas fazendo

$$\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{u}^n. \quad (4.95)$$

Neste caso, a velocidade na parede é preestabelecida, pois já foi calculada no instante anterior. O calculo dessa velocidade em células **[B]** é feito como descrito nas subseções sobre fronteiras rígidas. Logo, aplicando a equação do momento discretizada (4.93) em células **[F]** adjacentes a células **[B]**, como mostrado na Figura 4.5 tem-se

$$\left[\alpha + 2 + 2 \frac{(\delta x)^2}{(\delta y)^2} \right] \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \left[\tilde{u}_{i+\frac{3}{2},j} + \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j} \right]^{n+1} - \frac{(\delta x)^2}{(\delta y)^2} \left[\tilde{u}_b + \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j-1} \right]^{n+1} = \alpha G_x|_{i+\frac{1}{2},j} \quad (4.96)$$

sendo,

$$\tilde{u}_b^{n+1} = u_b^n \quad (4.97)$$

e u_b^n é calculada utilizando as equações (4.54), (4.56) e (4.58). Então,

$$\tilde{u}_b^{n+1} = u_b^n = 2u_p - u_{i+\frac{1}{2},j}, \quad (4.98)$$

com

$$u_p = \frac{\frac{k_{nl}}{Re}}{\left(\frac{k_{nl}\beta}{Re} + \frac{\delta y}{2} \right)} u_{i+\frac{1}{2},j}, \quad (4.99)$$

para problemas newtonianos, e

$$u_p = \frac{\frac{k_{nl}\beta}{Re}}{\left(\frac{k_{nl}\beta}{Re} + \frac{\delta y}{2} \right)} u_{i+\frac{1}{2},j} - \frac{k_{nl}}{\left(1 + \frac{2k_{nl}\beta}{\delta y Re} \right)} T_p^{xy}, \quad (4.100)$$

para problemas viscoelásticos, sendo T_p^{xy} calculado de acordo com as aproximações descritas na seção sobre fronteiras rígidas. Logo, como $\tilde{u}_b^{n+1}$ é conhecido, esse valor é adicionado ao vetor independente G_x , ou seja, $A\tilde{u}^{n+1} = G_x + r$, onde a matriz do sistema A tem a

seguinte forma,

$$A = \begin{bmatrix} a & b & & c & & & \\ b & a & b & & c & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & b & a & 0 & & c \\ c & & & 0 & a & b & c \\ & c & & b & a & b & c \\ & & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & c & & b & a & 0 & c \\ & & & & c & & 0 & a & b \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & c & & b & a & b \\ & & & & & & & c & & b & a \end{bmatrix}. \quad (4.101)$$

Já o vetor r recebe exatamente os valores preestabelecidos, como as condições de entrada e saída e as condições do contorno rígido, ou seja, u_b^n . Para o exemplo do canal, como foi dito anteriormente, surgem nas diagonais inferior e superior à diagonal principal zeros no lugar da constante b devido a velocidade ser conhecida no *inflow* e *outflow*. Além disso, no primeiro e último blocos dessa matriz onde não aparecem valores da diagonal inferior afastada e da diagonal superior afastada respectivamente, refere-se exatamente aos pontos onde a velocidade do contorno rígido é somada ao vetor independente. Para problemas no-slip, tanto viscoelástico como Newtoniano, basta apenas considerar $k_{nl} = 0$ em (4.99) e (4.100) o que implica em $u_p = 0$.

Observação 4 *Oishi em [32] apresenta um estudo detalhado sobre os tipos de condições de contorno explícita e implícita e a influência dessas condições na formulação implícita da equação do momento. No contexto de estabilidade do método, ele conclui que ambas as condições associados ao método de Euler implícito resultam em um método incondicionalmente estável.*

4.6.3 Condições de contorno em injetores e ejetores

1. **Condição de injetores (*inflow*):** A velocidade de entrada do fluido é estabelecida a partir do problema modelado [37], [38]. Na metodologia numérica esses valores são prescritos na face das células **[I]** em contato com as células de fluido do interior do domínio. Para descrever como são calculadas as componentes do vetor velocidade será considerado um caso entre 4 possíveis tipos de posicionamento das células **[I]**.

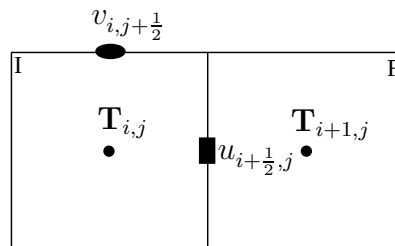


Figura 4.6: Ilustração de um tipo de configuração de células do injetor.

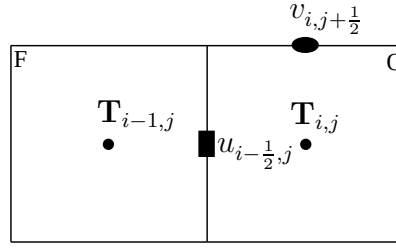


Figura 4.7: Ilustração de um tipo de configuração de células do ejetor.

Considere a Figura 4.6, de (2.26) sabe-se que a velocidade normal $u_{i+\frac{1}{2},j}$ deve ser especificada considerando uma vazão u_{inflow} decorrente do problema considerado e a velocidade tangencial é tida como nula, ou seja,

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = u_{inflow} \quad (4.102)$$

e

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} = -v_{i+1,j+\frac{1}{2}}. \quad (4.103)$$

O cálculo para $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ é feito via extrapolação linear,

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} = 2v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - v_{i+1,j+\frac{1}{2}} \quad (4.104)$$

donde $v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = 0$ pois v neste caso é a velocidade tangencial que é nula na face das células [I].

Com relação ao tensor $\mathbf{T}$ essa propriedade é admitida como nula em $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)$, logo, fazendo uma extrapolação linear para determinar $\mathbf{T}$ no centro da célula [I] tem-se,

$$\mathbf{T}_{i,j} = -\mathbf{T}_{i+1,j}. \quad (4.105)$$

2. **Condição de ejetores (*outflow*):** Como apresentado na seção sobre condições auxiliares, a velocidade e tensor são calculados nas células [O] levando em consideração (2.31). Para exemplificar, considere o caso da Figura 4.7. Sabe-se que,

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = 0; \quad \left. \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2},j} = 0; \quad (4.106)$$

discretizando por diferenças centrais,

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} = v_{i-1,j+\frac{1}{2}}; \quad \mathbf{T}_{i,j} = \mathbf{T}_{i-1,j}. \quad (4.107)$$

A velocidade $u_{i-\frac{1}{2},j}$ é aproximada através da equação para a velocidade solenoidal (4.111).

4.6.4 Equação de Poisson para ψ

Ao discretizar por diferenças centradas a equação (4.4) para determinar o potencial auxiliar ψ em células [F] tem-se a seguinte expressão,

$$\left[\frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{(\delta x)^2} + \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{(\delta y)^2} \right]^{n+1} = \left[\frac{\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j} - \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x} \right]^{n+1} + \left[\frac{\tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}} - \tilde{v}_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y} \right]^{n+1}. \quad (4.108)$$

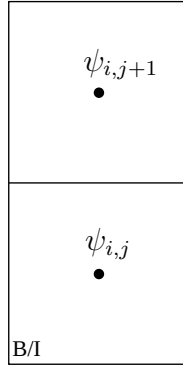


Figura 4.8: Ilustração de um tipo de configuração de células de *inflow* ou fronteira rígida paralela ao eixo x .

A condição de contorno para ψ é dada por (4.5) e (4.6). Para os contornos de entrada e parede rígida o cálculo é realizado discretizando (4.5) por diferenças centrais na face das células **[F]** que estão em contato com células **[B]** e **[I]**. Há 4 casos possíveis de contato entre células **[B]** e **[F]** ou **[I]** e **[F]**, para exemplificar vamos assumir o caso representado pela Figura 4.8, cuja direção norma é y então,

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = 0 \Rightarrow \left[\frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{\delta y} \right]^{n+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\psi_{i,j}^{n+1} = \psi_{i,j+1}^{n+1}. \quad (4.109)$$

Já nas células de saída de fluido aplica-se a condição (4.6). Logo, ψ é calculada fazendo,

$$\psi_{i,j}^{n+1} = 0. \quad (4.110)$$

4.6.5 Velocidade Solenoidal

Como descrito na seção sobre o método de projeção, primeiro determina-se uma velocidade intermediária $\tilde{\mathbf{u}}$ e após o cálculo de um potencial ψ a correção da velocidade é feita por (4.10), que discretizada por diferenças centrais é reescrita como,

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{\delta x}, \quad (4.111)$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{\delta y}. \quad (4.112)$$

O sistema de equações acima é aplicado nas faces de células de fluido (**[F]**).

4.6.6 Campo de Pressão

Como citado anteriormente, o intuito do método da projeção é desacoplar as equações de forma que seja determinado um campo de pressão que forneça uma velocidade que satisfaça a equação de conservação de massa, ou equação da continuidade.

O campo de pressão tentativo $\hat{p}^{n+1}$ é adotado em todas as células **[F]** como,

$$\hat{p}_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^n. \quad (4.113)$$

Na formulação implícita a atualização do campo de pressão é feita pela discretização da equação (4.11) por diferenças centrais para o laplaciano de ψ em todas as células $\mathcal{C}_{i,j}$ de fluido, obtendo assim,

$$p_{i,j}^{n+1} = \tilde{p}_{i,j}^{n+1} + \frac{\psi_{i,j}^{n+1}}{\delta t} - \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i-1,j}^{n+1}}{(\delta x)^2} + \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i,j-1}^{n+1}}{(\delta y)^2} \right]. \quad (4.114)$$

4.6.7 Contribuição não-Newtoniana

Como descrito nos trabalhos [37], [38] a contribuição não-Newtoniana, ou seja, as equações constitutivas são discretizadas espacialmente no centro das células. A equação (4.20) discretizada gera o seguinte conjunto de equações,

$$H^{xx}|_{i,j} = 2 \frac{(1-\beta)}{WiRe} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} - \frac{1}{Wi} f_{i,j} T^{xx}|_{i,j} - \left[\frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} \Big|_{i,j} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} \Big|_{i,j} - 2 T^{xx}|_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} - 2 T^{xy}|_{i,j} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} \right], \quad (4.115)$$

$$H^{xy}|_{i,j} = \frac{(1-\beta)}{WiRe} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i,j} + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} \right) - \frac{1}{Wi} f_{i,j} T^{xy}|_{i,j} - \left[\frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} \Big|_{i,j} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} \Big|_{i,j} - T^{xx}|_{i,j} \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i,j} - T^{yy}|_{i,j} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} \right], \quad (4.116)$$

$$H^{yy}|_{i,j} = 2 \frac{(1-\beta)}{WiRe} \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{i,j} - \frac{1}{Wi} f_{i,j} T^{yy}|_{i,j} - \left[\frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} \Big|_{i,j} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} \Big|_{i,j} - 2 T^{xy}|_{i,j} \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i,j} - 2 T^{yy}|_{i,j} \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{i,j} \right]. \quad (4.117)$$

A função $f_{i,j}$ representa a função linear do fluido sPTT aplicada a célula $\mathcal{C}_{i,j}$ descrita sob a forma,

$$f_{i,j} = 1 + \epsilon \frac{WiRe}{(1-\beta)} (T^{xx}|_{i,j} + T^{yy}|_{i,j}). \quad (4.118)$$

As derivadas espaciais presentes nas equações (4.115)-(4.117) são aproximadas por diferenças centrais. Na subseção a seguir são descritas as aproximações para tais derivadas.

4.6.8 Cálculo das Derivadas de Primeira Ordem

Além de determinar a velocidade também é necessário aproximar as derivadas de primeira ordem das componentes u e v . Esses valores são importantes pois serão utilizados como por exemplo, no cálculo das componentes do tensor $\mathbf{T}$. Essas derivadas são discretizadas por diferenças centradas de segunda ordem no centro das células com fluido,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x}, \quad (4.119)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}} - u_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y}, \quad (4.120)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{v_{i+\frac{1}{2},j} - v_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x}, \quad (4.121)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y}, \quad (4.122)$$

sendo que as faces onde não se encontram definidos valores para u e v são determinados por meio de uma média aritmética de quatro pontos,

$$u_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \left[u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j+1} + u_{i-\frac{1}{2},j+1} \right], \quad (4.123)$$

$$u_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \left[u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j-1} + u_{i-\frac{1}{2},j-1} \right], \quad (4.124)$$

$$v_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{4} \left[v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}} + v_{i+1,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j-\frac{1}{2}} \right], \quad (4.125)$$

$$v_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{1}{4} \left[v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}} + v_{i-1,j+\frac{1}{2}} + v_{i-1,j-\frac{1}{2}} \right]. \quad (4.126)$$

Observe que se faz necessário próximo aos contornos como *inflow* e fronteira rígida determinar essas médias levando em consideração a aproximação de u e v nas células [I] e nas células [B]. Para explicar como é feito esse cálculo considera-se dois tipos de configuração de fronteira: a primeira paralela ao eixo x , Figura 4.9, e a segunda paralela ao eixo y , Figura 4.10.

1. **Fronteira paralela a x :** Ao calcular $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j}$ em células adjacentes a células [I] e [B] (ver Figura 4.9) usando (4.120), (4.123) e (4.124) tem-se respectivamente,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j} &= \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}} - u_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y} = \\ &= \frac{1}{4\delta y} \left[(u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j+1} + u_{i-\frac{1}{2},j+1}) - (u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j-1} + u_{i-\frac{1}{2},j-1}) \right] \Rightarrow \\ &\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{1}{4\delta y} \left[u_{i+\frac{1}{2},j+1} + u_{i-\frac{1}{2},j+1} - u_{i+\frac{1}{2},j-1} - u_{i-\frac{1}{2},j-1} \right]. \end{aligned} \quad (4.127)$$

Note que $u_{i+\frac{1}{2},j+1}$ e $u_{i-\frac{1}{2},j+1}$ são determinados considerando o tipo de fronteira [I] ou [B].

- [I] : Como descrito na seção sobre condições de contorno em injetores e ejetores tem-se,

$$u_{i+\frac{1}{2},j+1} = -u_{i+\frac{1}{2},j}, \quad (4.128)$$

$$u_{i-\frac{1}{2},j+1} = -u_{i-\frac{1}{2},j}. \quad (4.129)$$

Logo,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{1}{4\delta y} \left[-u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j-1} - u_{i-\frac{1}{2},j-1} \right]. \quad (4.130)$$

- **[B]** : Quando a fronteira é rígida, deve-se levar em consideração o tipo de condição de contorno para fronteiras rígidas considerado: slip ou no-slip. Considerando que se tenha uma velocidade de escorregamento prescrita tem-se,

$$u_{i+\frac{1}{2},j+1} = 2u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2},j}, \quad (4.131)$$

$$u_{i-\frac{1}{2},j+1} = 2u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2},j}. \quad (4.132)$$

As velocidade $u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ e $u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ são velocidades de escorregamento, que para o caso Newtoniano são dadas por,

$$u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{k_{nl}}{Re}}{\left(\frac{k_{nl}}{Re} + \frac{\delta y}{2}\right)} u_{i+\frac{1}{2},j}, \quad (4.133)$$

$$u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{k_{nl}}{Re}}{\left(\frac{k_{nl}}{Re} + \frac{\delta y}{2}\right)} u_{i-\frac{1}{2},j}, \quad (4.134)$$

e para o caso viscoelástico,

$$u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{k_{nl}}{Re}}{\left(\frac{k_{nl}}{Re} + \frac{\delta y}{2}\right)} u_{i+\frac{1}{2},j} - \frac{k_{nl}}{\left(1 + \frac{2k_{nl}\beta}{\delta y Re}\right)} T_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{xy}, \quad (4.135)$$

$$u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{k_{nl}}{Re}}{\left(\frac{k_{nl}}{Re} + \frac{\delta y}{2}\right)} u_{i-\frac{1}{2},j} - \frac{k_{nl}}{\left(1 + \frac{2k_{nl}\beta}{\delta y Re}\right)} T_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{xy}. \quad (4.136)$$

Logo,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{1}{4\delta y} \left[2(u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) - u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j-1} - u_{i-\frac{1}{2},j-1} \right]. \quad (4.137)$$

Quando a condição na fronteira rígida é no-slip então $k_{nl} = 0.0$ e as velocidades $u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ e $u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ são nulas. Sendo assim tem-se exatamente a expressão (4.130).

2. **Fronteira paralela a y** : Nesse outro tipo de formulação (ver Figura 4.10) o calculo da derivada que envolve pontos de células **[I]** e **[B]** é $\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{i,j}$ aplicado no centro da célula de fluido adjacente ao contorno. Pelas aproximações (4.121), (4.126) e (4.125) tem-se,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{i,j} &= \frac{v_{i+\frac{1}{2},j} - v_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x} = \\ \frac{1}{4\delta x} &\left[(v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}} + v_{i+1,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j-\frac{1}{2}}) - (v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}} + v_{i-1,j+\frac{1}{2}} + v_{i-1,j-\frac{1}{2}}) \right] \Rightarrow \\ \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{i,j} &= \frac{1}{4\delta x} \left[v_{i+1,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j-\frac{1}{2}} - v_{i-1,j+\frac{1}{2}} - v_{i-1,j-\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (4.138)$$

As velocidade $v_{i-1,j+\frac{1}{2}}$ e $v_{i-1,j-\frac{1}{2}}$ são calculadas conforme o tipo de fronteira, **[I]** ou **[B]**.

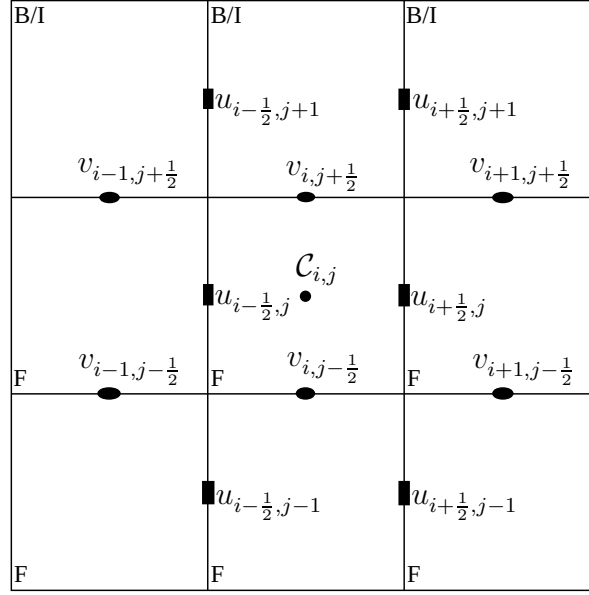


Figura 4.9: Ilustração de um tipo de configuração de células de *inflow* ou fronteira rígida paralela ao eixo x para determinar o cálculo das derivadas de primeira ordem da velocidade.

- **[I]** : Da condição de contorno em injetores tem-se,

$$v_{i-1,j+\frac{1}{2}} = -v_{i,j+\frac{1}{2}}, \quad (4.139)$$

$$v_{i-1,j-\frac{1}{2}} = -v_{i,j-\frac{1}{2}}. \quad (4.140)$$

Logo,

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{1}{4\delta x} \left[v_{i+1,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j-\frac{1}{2}} + v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}} \right]. \quad (4.141)$$

- **[B]** : No caso em que $v_{i-1,j+\frac{1}{2}}$ e $v_{i-1,j-\frac{1}{2}}$ são pontos pertencentes a face de uma célula **[B]** e admite-se uma velocidade de escorregamento na parede então,

$$v_{i-1,j+\frac{1}{2}} = 2v_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - v_{i,j+\frac{1}{2}}, \quad (4.142)$$

$$v_{i-1,j-\frac{1}{2}} = 2v_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}, \quad (4.143)$$

sendo,

$$v_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{k_{nl}}{Re}}{\left(\frac{k_{nl}}{Re} + \frac{\delta x}{2}\right)} v_{i,j+\frac{1}{2}}, \quad (4.144)$$

e

$$v_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{k_{nl}}{Re}}{\left(\frac{k_{nl}}{Re} + \frac{\delta x}{2}\right)} v_{i,j-\frac{1}{2}}, \quad (4.145)$$

quando o problema simulado é de natureza Newtoniana. Já para problemas viscoelásticos, $v_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ e $v_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$ são calculados fazendo,

$$v_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{k_{nl}}{Re}}{\left(\frac{k_{nl}}{Re} + \frac{\delta x}{2}\right)} v_{i,j+\frac{1}{2}} - \frac{\frac{k_{nl}}{2k_{nl}\beta}}{\left(1 + \frac{2k_{nl}\beta}{\delta x Re}\right)} T_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{xy}, \quad (4.146)$$

1. no-slip: $u_p^n = 0$;

2. slip: $u_p^n = \frac{\frac{k_{nl}}{Re}}{\left(\frac{k_{nl}\beta}{Re} + \frac{\delta y}{2}\right)} u_f^n$ para fluidos Newtonianos e

$$u_p^n = \frac{\frac{k_{nl}\beta}{Re}}{\left(\frac{k_{nl}\beta}{Re} + \frac{\delta y}{2}\right)} u_f^n \mp \frac{k_{nl}}{\left(1 + \frac{2k_{nl}\beta}{\delta y Re}\right)} (T_p^{xy})^n \text{ para fluidos viscoelásticos.}$$

Passo 3: Cálculo de ψ^{n+1} via a equação de Poisson (4.4),

$$\nabla^2 \psi^{n+1} = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}. \quad (4.150)$$

Passo 4: Atualização da velocidade $\mathbf{u}^{n+1}$ por (4.14) apenas no interior do domínio.

Passo 5: Atualização do campo de pressão p^{n+1} por meio de (4.16) no interior do domínio.

Passo 6: Atualiza-se as velocidades na fronteira rígida e as velocidades tangenciais na entrada e saída de fluido.

Passo 7 Para o método RK21 corrige-se o tensor extra-tensão $\mathbf{T}^{n+1}$ pela equação (4.22) em todas as células incluindo $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{I}]$ e $[\mathbf{O}]$.

Passo 8: Impõe-se as condições de contorno para o próximo ciclo: velocidade e tensor na entrada e saída de fluido e também na fronteira rígida.

Resultados

Neste capítulo apresenta-se resultados numéricos e analítico de um escoamento entre placas paralelas, *Poiseuille flow*. São comparados os resultados obtidos através da metodologia numérica implementada na plataforma de alto desempenho Freeflow-2D com as soluções analíticas descritas nesse trabalho. O problema base do estudo numérico realizado até aqui é o escoamento de *Poiseuille*. Neste escoamento são consideradas as mesmas hipóteses aplicadas para determinar a solução analítica, ou seja, trata-se de um escoamento incompressível.

5.1 Verificação da Metodologia Numérica

A verificação da metodologia numérica foi realizada considerando uma geometria como a representada na Figura 5.1. Para tanto são atribuídos os seguintes valores para as constantes de referência do escoamento,

- Distância entre as placas: $L = 1m$.
- Comprimento das placas: $10L$.
- Viscosidade cinemática: $10.0m^2s^{-1}$.
- Número de Reynolds: $Re = 0.1$.
- Número de Weissenberg: $Wi = 0.2$.
- Constante adimensional: $\beta = 0.5$.
- Constante de fricção: $k_{nl} = 0; 10^{-4}; 10^{-3}; 10^{-2}; 10^{-1}; 1.0; 10.0$.
- Parâmetro: $\epsilon = 0.5$ (este parâmetro aparece apenas no modelo sPTT).

As condições de contorno utilizadas são as descritas na metodologia numérica, ou seja, considera-se a condição de escorregamento Navier-Linear, sendo o caso *no-slip* quando $k_{nl} = 0.0$, e a condição de impermeabilidade nas duas fronteiras rígidas paralelas ao eixo x . O perfil de velocidade imposto no *inflow* paralelo ao eixo y é o perfil reto. No *outflow*, ou ejetor considera-se a condição de ejetor continuado. A condição inicial adotada no interior do canal é nula, ou seja, admite-se um escoamento confinado com a velocidade, campo de pressão e tensor nulos no instante $t = t_0$.

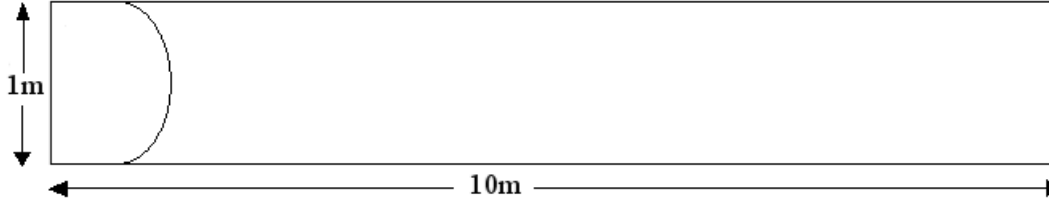


Figura 5.1: Representação do canal $10m \times 1m$ paralelo ao eixo x .

A integração temporal da equação do momento é feita via o método de Euler implícito e a integração temporal da equação constitutiva para fluidos viscoelásticos foi realizada pelo método RK21.

Para fazer a verificação do código é realizada uma análise de convergência da solução numérica para a solução analítica considerando dois tipos de malhas, M_1 e M_2 , com os seus respectivos espaçamentos espaciais dados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Espaçamento e número de células das malhas espaciais com o espaçamento δt_{CFL} calculado e o espaçamento δt utilizado.

Malhas	Número de células	Espaçamento	δt_{CFL}	δt
M_1	200 x 20	$\delta x = \delta y = 0.05$	3.3×10^{-2}	5×10^{-3}
M_2	400 x 40	$\delta x = \delta y = 0.025$	1.6×10^{-2}	1.0×10^{-3}

Desse modo a análise de convergência é feita calculando os erros relativos entre a solução numérica e a solução analítica. A solução numérica de referência para esse cálculo é a solução obtida por meio de um corte transversal realizado no meio do canal ($x = 5L$), quando a solução numérica já atingiu seu estado estacionário. O erro relativo é calculado considerando a norma euclidiana discreta l_2 e é definido da seguinte maneira,

$$E_\varsigma = \frac{\left[\sum_j (SolExata(y_j) - SolNumérica(y_j))^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\sum_j (SolExata(y_j))^2 \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (5.1)$$

sendo ς o espaçamento da malha espacial, ou seja, $\varsigma = \delta x = \delta y$.

Além do erro relativo, também é possível calcular a ordem de convergência espacial do método numérico. Tal ordem Λ é determinada da seguinte forma,

$$\Lambda = \frac{\log \left(\frac{E_\varsigma}{E_{\frac{\varsigma}{2}}} \right)}{\log(2)}. \quad (5.2)$$

A discretização do tempo é feita levando em consideração a condição CFL descrita pela relação (4.17). Assumindo que a velocidade máxima do escoamento é $u_{max} = 1.5$, os espaçamentos adimensionais adotados para a simulação numérica e que satisfazem essa restrição são apresentados na Tabela 5.1.

Além do erro relativo, neste trabalho também calculou-se o erro da velocidade $\mathbf{u}$ e do tensor $\mathbf{T}$ entre dois instantes de simulação, t_n e t_{n+1} . O cálculo desse erro é feito via a norma l_2 em todas as células de fluido $[\mathbf{F}]$ pelas seguintes expressões,

$$E^{n+1}(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\| = \sqrt{\sum_{i,j} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)^2}, \quad (5.3)$$

$$E^{n+1}(\mathbf{T}) = \|\mathbf{T}^{n+1} - \mathbf{T}^n\| = \sqrt{\sum_{i,j} (\mathbf{T}^{n+1} - \mathbf{T}^n)^2}. \quad (5.4)$$

Os erros (5.3) e (5.4) são calculados a cada passo de tempo com o objetivo de verificar se a solução numérica já atingiu o estado estacionário.

Nas subseções que seguem encontram-se os gráficos com a representação das duas soluções: numérica e analítica, e as tabelas com os erros relativos e a ordem de convergência para cada variável solução do problema. Além disso, encontram-se os resíduos obtidos para $\mathbf{u}$ e $\mathbf{T}$.

5.1.1 Resultados para o Modelo Newtoniano

No modelo Newtoniano as soluções analíticas são calculadas pela equação (3.7) e o gradiente de pressão utilizado é determinado por (3.39). Numericamente a solução é calculada no Freeflow-2D seguindo os passos como indicado no algoritmo computacional.

Na Tabela 5.2 estão adicionados os erros relativos calculados em cada malha M_1 e M_2 . Além disso, na Figura 5.2 é possível observar que a solução numérica acompanha satisfatoriamente a solução analítica para cada constante k_{nl} utilizada. Esse fato fica mais evidente quando observamos a Figura 5.3, pois, nas duas malhas utilizadas a solução numérica se comportou de forma análoga a solução analítica.

Na Figura 5.4 encontram-se as retas de coeficiente Λ geradas pelos erros relativos com os seus respectivos espaçamentos de malha, já na Tabela 5.3 é possível identificar os valores de tais ordens Λ . Observe que para o caso *no-slip* a ordem de convergência é aproximadamente 2. Quando considerada a velocidade de escorregamento na parede a ordem de convergência aumenta a medida que k_{nl} aumenta. Ou seja, quando fixamos Re e aumentamos a constante de fricção k_{nl} o método numérico retorna uma solução cuja ordem de convergência é maior que 2. Entretanto, se observarmos na Figura 5.2 o perfil de velocidade associado a cada constante k_{nl} , percebe-se que a solução, considerando $k_{nl} = 10.0$, já está muito próxima do perfil de velocidade imposto na entrada do canal, ou seja, do perfil reto.

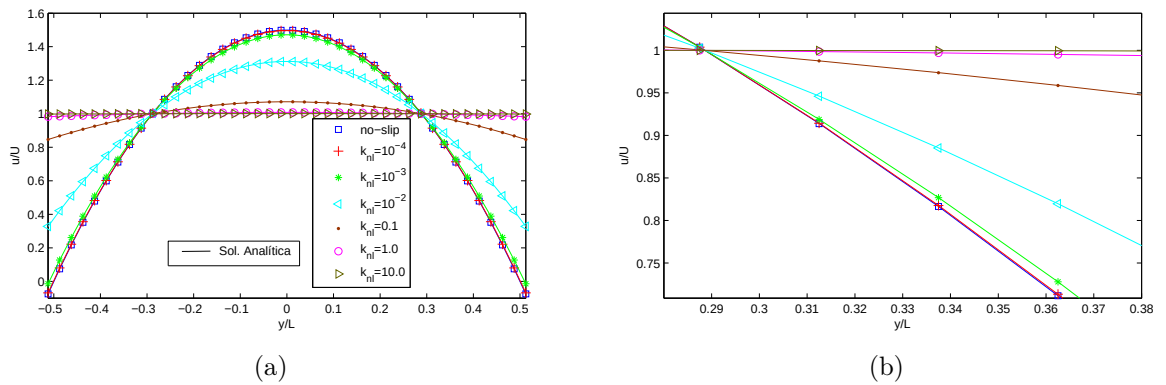


Figura 5.2: Soluções analíticas (linha contínua) e numéricas (símbolos) do perfil de velocidade u obtidas pelo modelo Newtoniano com $k_{nl} = 0.0, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 0.1, 1.0$ e 10.0 . (b) ampliação de (a), $y/L \in [0.28, 0.38]$.

Tabela 5.2: Erros relativos da velocidade para diferentes valores da constante de fricção k_{nl} , considerando o modelo Newtoniano.

k_{nl}	Malha	$E_{\zeta}(u)$
0	M_1	$2.3186101443 \times 10^{-3}$
	M_2	$5.8337661261 \times 10^{-4}$
10^{-4}	M_1	$2.2966770592 \times 10^{-3}$
	M_2	$5.7781689073 \times 10^{-4}$
10^{-3}	M_1	$2.1139954042 \times 10^{-3}$
	M_2	$5.3171458880 \times 10^{-4}$
10^{-2}	M_1	$1.1224770957 \times 10^{-3}$
	M_2	$2.8174381694 \times 10^{-4}$
10^{-1}	M_1	$1.8382693140 \times 10^{-4}$
	M_2	$4.5966915571 \times 10^{-5}$
1.0	M_1	$2.0518998637 \times 10^{-5}$
	M_2	$5.1275714331 \times 10^{-6}$
10.0	M_1	$2.0751416687 \times 10^{-6}$
	M_2	$4.6489257054 \times 10^{-7}$

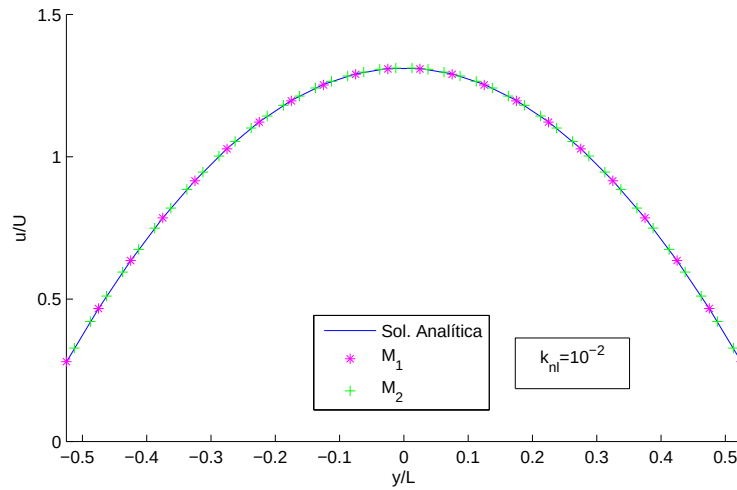


Figura 5.3: Comparação entre os perfis de velocidade analítico e numérico do modelo Newtoniano nas malhas M_1 e M_2 considerando $k_{nl} = 10^{-2}$.

Tabela 5.3: Ordem de convergência espacial obtida a partir do modelo Newtoniano com $\varsigma = \delta x = 0.05$ e $\frac{\varsigma}{2} = 0.025$.

k_{nl}	0	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1.0	10.0
$\Lambda(E_{\zeta}(u))$	1.9908	1.9909	1.9912	1.9942	1.9997	2.0006	2.1582

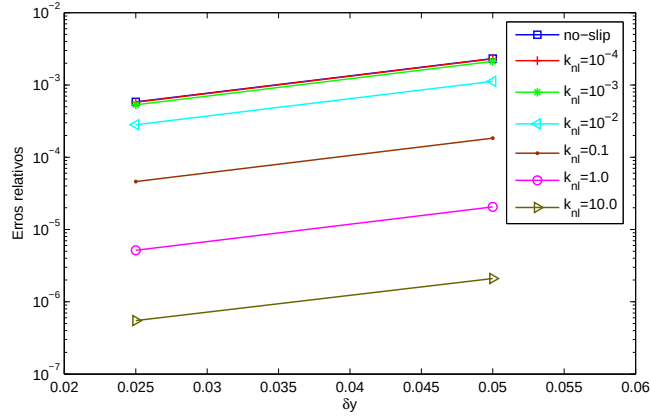


Figura 5.4: Erros relativos das soluções numéricas para o perfil de velocidade u do modelo Newtoniano com relação ao espaçamento $\delta x = \delta y$ utilizados nas malhas M_1 e M_2 .

Para verificar se a solução encontra-se no estado estacionário observe a Figura 5.5. Nesta figura é possível verificar o comportamento do erro E^{n+1} determinado em (5.3) em duas simulações considerando $k_{nl} = 0.01$. Na primeira simulação considerou-se como critério de parada na resolução dos sistemas lineares a tolerância de $10e - 10$ e na segunda, $10e - 05$. Note que em ambos os casos o erro decresce nos instantes iniciais e depois de alguns ciclos a solução começa a entrar no regime estacionário, ou seja, já não há uma grande diferença entre as soluções apresentadas no ciclo t_n e t_{n+1} . Entretanto, note que embora os resultados já encontram-se no estado estacionário há uma oscilação de E^{n+1} . Essa oscilação é devida a tolerância utilizada para resolver os sistemas lineares. Quando utilizada uma tolerância de $10e - 10$ observe que o erro E^{n+1} é bem menor do que o apresentado pela simulação onde considerou-se uma tolerância de $10e - 05$. Em ambos os casos essa oscilação é decorrente do fato de que em cada ciclo computacional a solução final dos sistemas lineares não apresentam necessariamente o mesmo erro, porém satisfazem a tolerância utilizada como critério de parada.

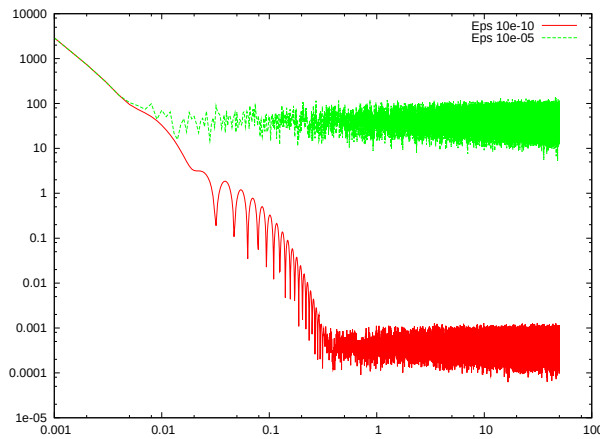


Figura 5.5: Comportamento do Erro da velocidade, calculado por (5.3), ao longo do tempo de simulação do modelo Newtoniano na malha M_2 , utilizando dois valores para critério de parada dos sistemas lineares, $10e - 10$ e $10e - 05$. Nas duas simulações considerou-se $k_{nl} = 0.01$.

Para visualizar como a solução numérica se comporta em todo o canal são apresentadas as Figuras 5.6 e 5.7. A primeira é decorrente de um problema *no-slip* e a segunda de um problema *slip* com $k_{nl} = 0.1$. Observe que o comportamento das duas simulações são

similares, entretanto, como visto nos gráficos da Figura 5.2 a solução *slip* se caracteriza por apresentar uma velocidade máxima sobre o eixo de simetria menor, porém, próxima a parede a velocidade é maior se comparada ao problema *no-slip*.

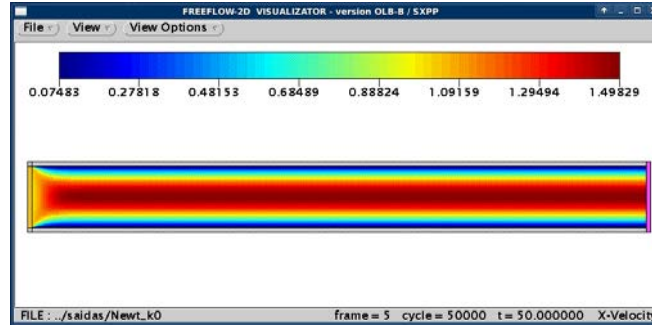


Figura 5.6: Simulação da velocidade de escoamento no canal de um fluido Newtoniano com $Re = 0.1$, considerando a condição no-slip na parede.

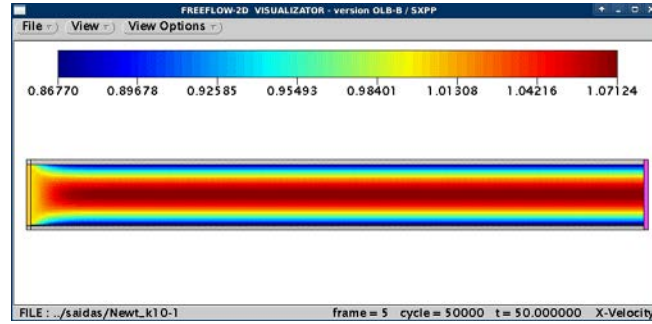


Figura 5.7: Simulação da velocidade de escoamento no canal de um fluido Newtoniano com $Re = 0.1$, considerando a condição slip na parede, $k_{nl} = 0.1$.

5.1.2 Resultados para o Modelo sPTT

Nessa subseção encontram-se os resultados obtidos para um escoamento incompressível e isotérmico do fluido sPTT com contribuição do solvente Newtoniano. A solução analítica para a velocidade é dada pela equação (3.27) com (3.29), já para os tensores T^{xy} e T^{xx} são respectivamente as equações (3.25) e (3.17).

Para realizar as simulações, impõe-se a velocidade média U e em seguida calculou-se o gradiente de pressão como apresentado na subseção 3.3.2 (ver equação (3.41)) utilizando o método da bissecção. Para explorar a influência do coeficiente de fricção k_{nl} , todos os demais parâmetros serão mantidos constantes, o que indica que a velocidade média U será constante e conseqüentemente Re e os demais parâmetros presentes no modelo sPTT. Assim, quando k_{nl} é alterado, a equação (3.41) apresentará uma nova solução para p_x . Sendo assim, os valores de p_x calculados para cada valor de k_{nl} considerado encontram-se na Tabela 5.4.

Nas Figuras 5.8, 5.9 e 5.10 é possível observar o comportamento da solução numérica e analítica da velocidade u e dos tensores T^{xx} e T^{xy} calculados na malha M_2 variando k_{nl} . Assim como no caso Newtoniano, percebe-se que a velocidade tende ao perfil reto imposto na entrada do canal conforme aumenta-se a constante de fricção k_{nl} . Já os tensores, T^{xx} e T^{xy} , se caracterizam por fornecerem um perfil de solução cada vez mais próximo de zero quando k_{nl} aumenta, algo de se esperar pois, ao aumentarmos a velocidade

Tabela 5.4: Gradientes de pressão p_x calculado através da equação (3.41).

k_{nl}	p_x
0	-102.70475
10^{-4}	-102.25667
10^{-3}	-98.37388
10^{-2}	-70.487412
10^{-1}	-17.12199
1.0	-1.967209
10.0	-0.199667

de escorregamento sobre a parede estamos admitindo que não há aderência do fluido a parede sólida o que implica em forças menores de atrito no escoamento.

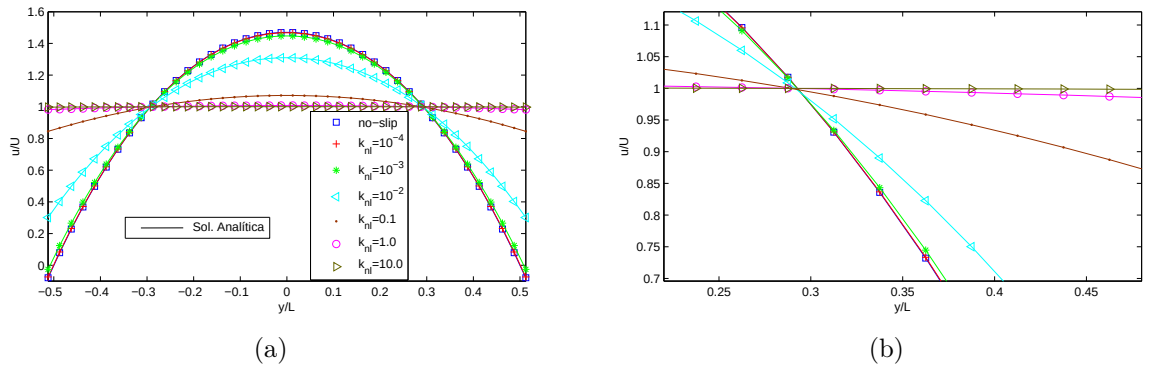


Figura 5.8: Soluções analíticas (linha contínua) e numéricas (símbolos) do perfil de velocidade u obtidas pelo modelo sPTT com $k_{nl} = 0.0, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 0.1, 1.0$ e 10.0 . (b) ampliação de (a), $y/L \in [0.22, 0.48]$.

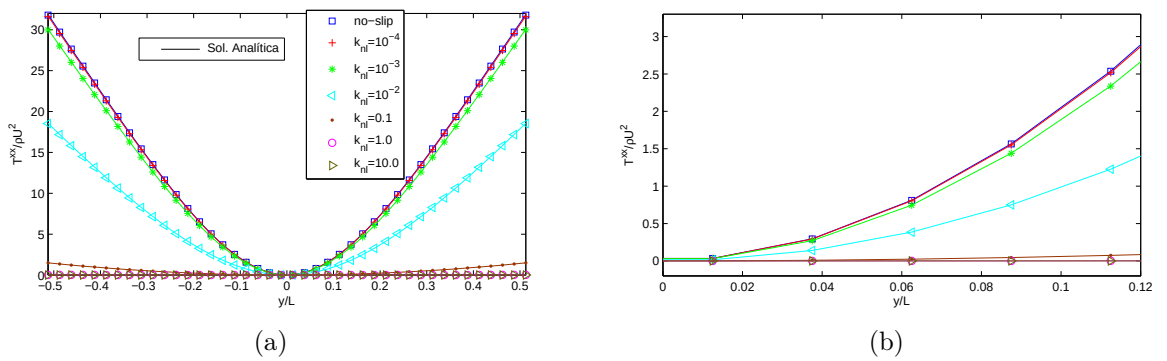


Figura 5.9: Soluções analíticas (linha contínua) e numéricas (símbolos) da componente T^{xx} do tensor simétrico $\mathbf{T}$ obtidas pelo modelo sPTT com $k_{nl} = 0.0, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 0.1, 1.0$ e 10.0 . (b) ampliação de (a), $y/L \in [0.0, 0.12]$.

Na Tabela 5.5 expõe-se os erros normalizados de u , T^{xx} e T^{xy} calculados por (5.1) em cada uma das malhas e para cada constante k_{nl} assumida. É interessante observar que este erro decai conforme refina-se a malha espacial o que caracteriza que o resultado numérico converge para a solução analítica. Entretanto, para $k_{nl} = 10.0$, note que o erro normalizado obtido no último instante $t^* = 50$ para a componente T^{xx} na malha M_2 é superior ao apresentado na malha M_1 . Isso pode estar relacionado ao fato de que para

esse valor da constante de fricção, que já é bem grande, o perfil de solução já está muito próximo do perfil de velocidade utilizado na entrada do canal, perfil reto, e as tensões serem praticamente nulas, com isso, os erros gerados pela solução dos sistemas acabam se sobressaindo.

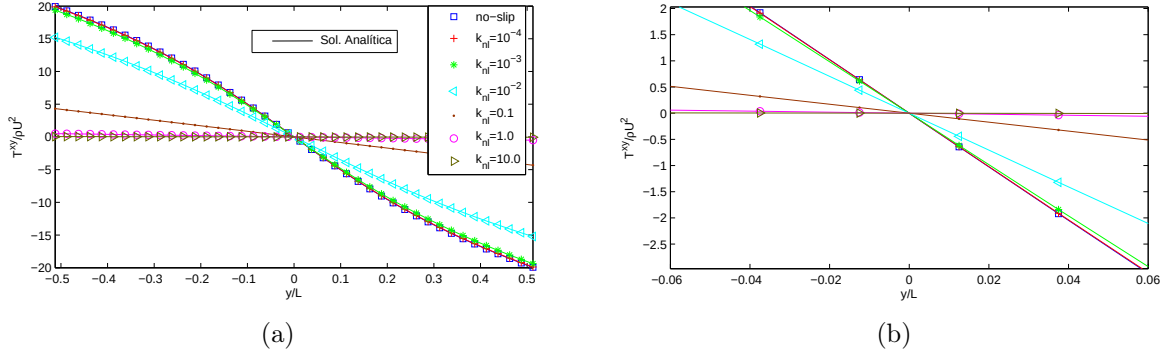


Figura 5.10: Soluções analíticas (linha contínua) e numéricas (símbolos) da componente T^{xy} do tensor simétrico $\mathbf{T}$ obtidas pelo modelo sPTT com $k_{nl} = 0.0, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 0.1, 1.0$ e 10.0 . (b) ampliação de (a), $y/L \in [-0.06, 0.06]$.

As ordens de convergência espacial das simulações encontram-se disponíveis na Tabela 5.6. Uma outra forma de verificar visualmente essa ordem é plotando o erro normalizado E_ζ versus o espaçamento adotado em cada malha respectiva. Esse resultado encontra-se disposto na Figura 5.14 para todas as constantes k_{nl} .

Tabela 5.5: Erros relativos da velocidade e tensor variando a constante de fricção k_{nl} para o modelo viscoelástico sPTT.

k_{nl}	Malha	$E_\zeta(u)$	$E_\zeta(T^{xx})$	$E_\zeta(T^{xy})$
0	M_1	$2.6078941514 \times 10^{-3}$	$6.4268172034 \times 10^{-3}$	$3.1099957867 \times 10^{-3}$
	M_2	$6.6511573228 \times 10^{-4}$	$1.6109815155 \times 10^{-3}$	$7.8288066904 \times 10^{-4}$
10^{-4}	M_1	$2.5860488387 \times 10^{-3}$	$6.3995220103 \times 10^{-3}$	$3.0964148222 \times 10^{-3}$
	M_2	$6.5963584589 \times 10^{-4}$	$1.6041270345 \times 10^{-3}$	$7.7949211775 \times 10^{-4}$
10^{-3}	M_1	$2.3989247188 \times 10^{-3}$	$6.1577417430 \times 10^{-3}$	$2.9761938200 \times 10^{-3}$
	M_2	$6.1171408523 \times 10^{-4}$	$1.5421324275 \times 10^{-3}$	$7.4883696277 \times 10^{-4}$
10^{-2}	M_1	$1.2574707330 \times 10^{-3}$	$4.2333763285 \times 10^{-3}$	$2.0264038970 \times 10^{-3}$
	M_2	$3.1948457158 \times 10^{-4}$	$1.0486983013 \times 10^{-3}$	$5.0623193431 \times 10^{-4}$
10^{-1}	M_1	$1.8409736080 \times 10^{-4}$	$9.4541731500 \times 10^{-4}$	$4.5994086357 \times 10^{-4}$
	M_2	$4.5941162449 \times 10^{-5}$	$2.2689942047 \times 10^{-4}$	$1.1153080559 \times 10^{-4}$
1.0	M_1	$2.0335895387 \times 10^{-5}$	$1.5510872736 \times 10^{-4}$	$7.7383962656 \times 10^{-5}$
	M_2	$4.8497323134 \times 10^{-6}$	$3.7918328340 \times 10^{-5}$	$1.9155764507 \times 10^{-5}$
10.0	M_1	$9.6484372738 \times 10^{-7}$	$6.0337227474 \times 10^{-5}$	$7.5258124463 \times 10^{-6}$
	M_2	$5.8291283450 \times 10^{-7}$	$1.1589344230 \times 10^{-4}$	$1.3910173603 \times 10^{-6}$

Além dos dados fornecidos nas Tabelas 5.5 e 5.6, nas Figuras 5.11, 5.12 e 5.13 pode-se observar a convergência da solução numérica em ambas as malhas M_1 e M_2 para $k_{nl} = 0.01$.

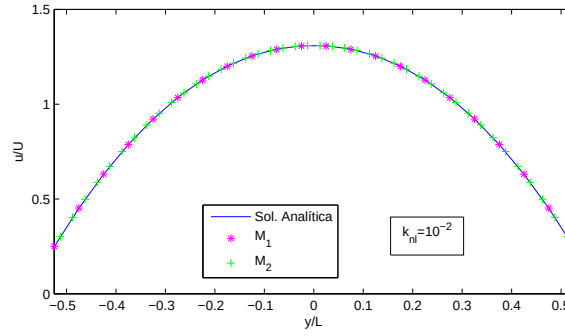


Figura 5.11: Comparação entre os perfis de velocidade analítico e numérico do modelo sPTT nas malhas M_1 e M_2 considerando $k_{nl} = 10^{-2}$.

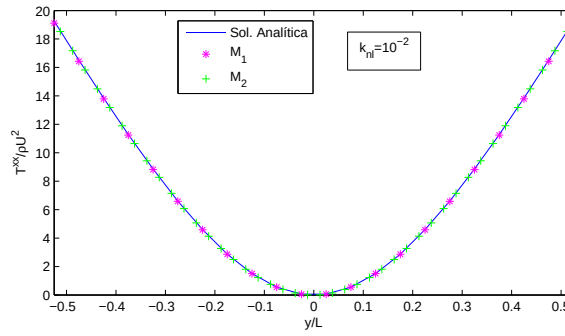


Figura 5.12: Comparação entre as soluções de T^{xx} analítico e numérico do modelo sPTT nas malhas M_1 e M_2 considerando $k_{nl} = 10^{-2}$.

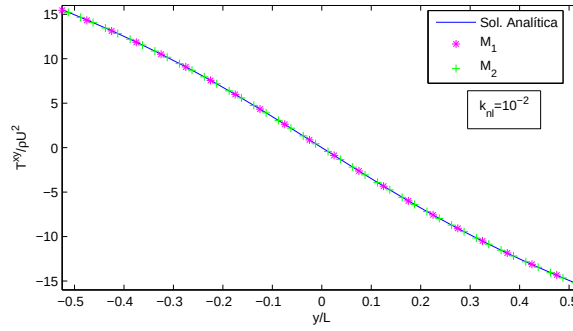
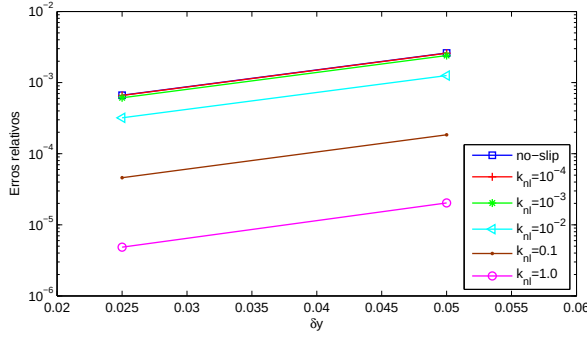


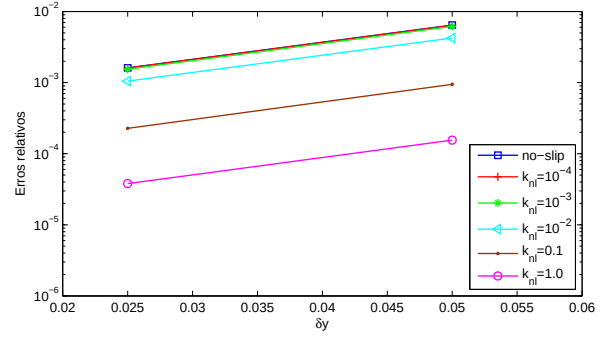
Figura 5.13: Comparação entre as soluções de T^{xy} analítico e numérico do modelo sPTT nas malhas M_1 e M_2 considerando $k_{nl} = 10^{-2}$.

Tabela 5.6: Ordem de convergência espacial obtida a partir do modelo sPTT com $\varsigma = \delta x = 0.05$ e $\frac{\varsigma}{2} = 0.025$.

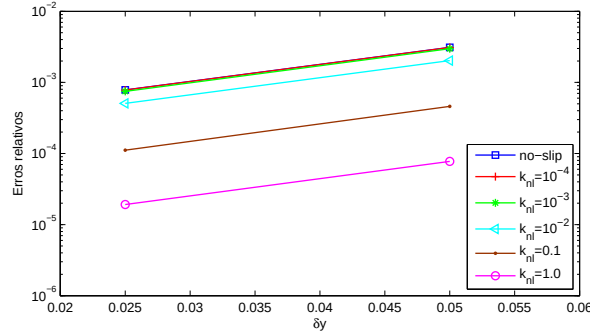
k_{nl}	$\Lambda(E_\varsigma(u))$	$\Lambda(E_\varsigma(T^{xx}))$	$\Lambda(E_\varsigma(T^{xy}))$
0	1.9712	1.9962	1.9900
10^{-4}	1.9710	1.9962	1.9900
10^{-3}	1.9715	1.9975	1.9907
10^{-2}	1.9767	2.0132	2.0011
10^{-1}	2.0026	2.0589	2.0440
1.0	2.0681	2.0323	2.0143



(a)



(b)



(c)

Figura 5.14: Erros relativos das soluções numéricas de (a) u , (b) T^{xx} e (c) T^{xy} do modelo sPTT com relação ao espaçamento $\delta x = \delta y$ utilizados nas malhas M_1 e M_2 .

Como observado para o caso Newtoniano também pode-se verificar para o modelo sPTT que o erro E^{n+1} para a velocidade (ver Figura 5.15) também decai e oscila mesmo sabendo que a solução já atingiu o estado estacionário. Já para o erro dos tensores, note pela Figura 5.16, eles demoram um pouco mais para atingirem o estado estacionário, porém, após atingirem tem comportamento similar ao apresentado pelo erro da velocidade.

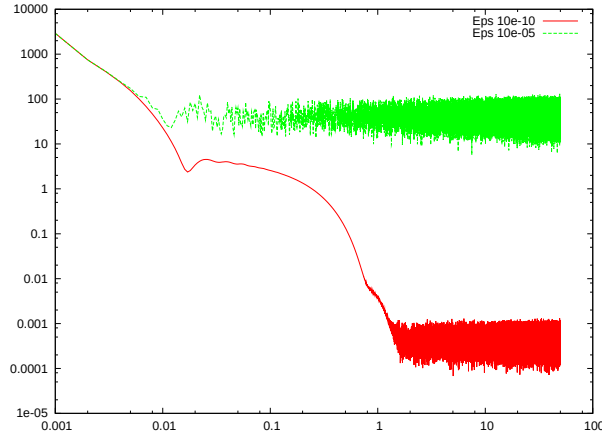


Figura 5.15: Evolução do Erro da velocidade do modelo sPTT ao longo do tempo. O erro foi calculado usando (5.3). Nas simulações considerou-se como critério de parada para os sistemas lineares $10e - 10$ e $10e - 05$ e $k_{nl} = 0.01$.

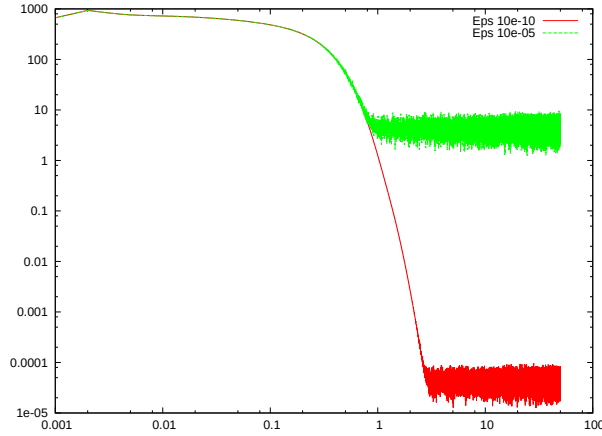


Figura 5.16: Evolução do Erro dos tensores do modelo sPTT ao longo do tempo. O erro foi calculado usando (5.4). Nas simulações considerou-se como critério de parada para os sistemas lineares $10e - 10$ e $10e - 05$ e $k_{nl} = 0.01$.

Nas Figuras 5.17, 5.18 e 5.19 são mostrados os perfis de solução ao longo da simulação em um canal com escorregamento na parede. Note que devido o perfil reto imposto na entrada do canal a solução não converge imediatamente, é necessário uma distância para que a solução desenvolva-se para a analítica.

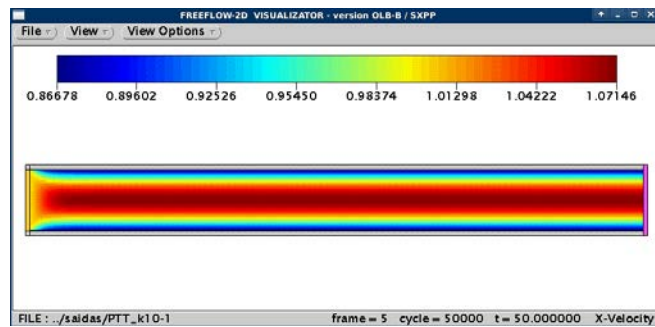


Figura 5.17: Perfil da velocidade u no escoamento em um canal com um fluido sPTT. $Re = 0.1$, $k_{nl} = 0.1$.

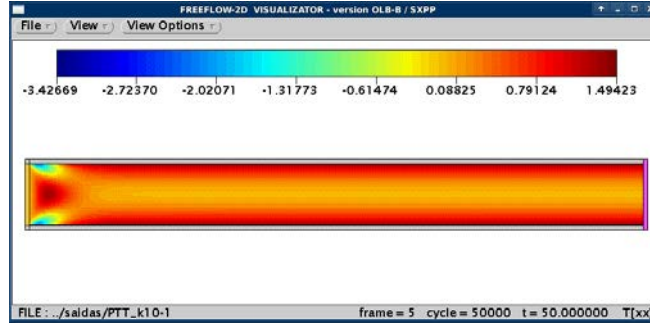


Figura 5.18: Perfil do tensor T^{xx} no escoamento em um canal com um fluido sPTT. $Re = 0.1$, $k_{nl} = 0.1$.

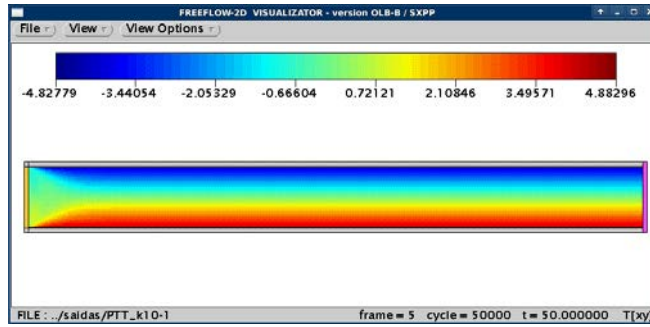


Figura 5.19: Perfil do tensor T^{xy} no escoamento em um canal com um fluido sPTT. $Re = 0.1$, $k_{nl} = 0.1$.

A seguir vamos analisar a velocidade de escorregamento numérica. O objetivo é observar se a mesma converge para a velocidade *slip* analítica.

5.1.3 Análise de Convergência da Velocidade de Escorregamento

Nessa subseção pretende-se analisar se a velocidade de escorregamento $u_{slip} = u(1/2)$ numérica está convergindo para a velocidade de escorregamento obtida pela solução analítica. Para isso, vamos considerar a velocidade *slip* calculada em um ponto no meio da extensão da parede superior na direção x , como está representado na Figura 5.20. Com esse valor numérico, calculou-se o erro relativo apresentado na Tabela 5.7 entre a velocidade de escorregamento numérica, no ponto citado acima, e a analítica. Com os erros relativos foi determinada a ordem de convergência Λ descrita na Tabela 5.8. Nas Figuras 5.22 (a) e (b) também é possível observar o decaimento do erro em cada malha utilizada, tanto para o modelo Newtoniano como para o sPTT. As Figuras 5.21 (a) e (b) ilustram a velocidade de escorregamento u_{slip}/U , fixadas as constantes adimensionais e variando a constante de fricção para os dois modelos.

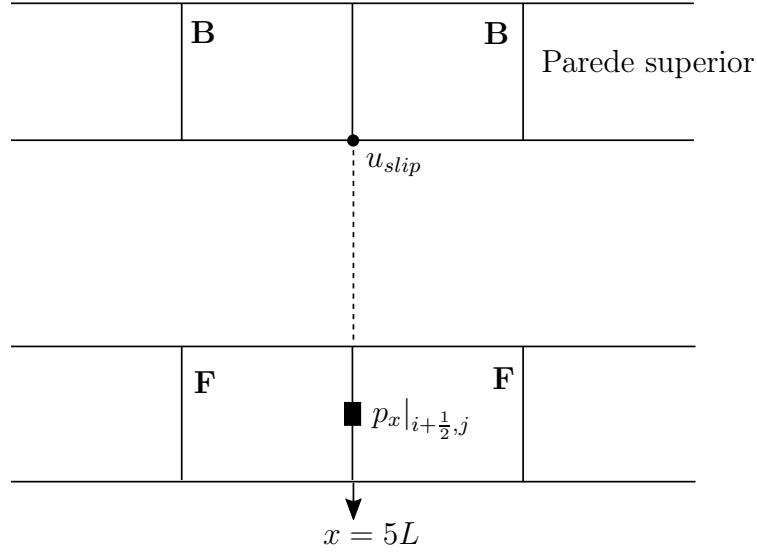


Figura 5.20: Localização do ponto utilizado para calcular o erro relativo da velocidade u_{slip} na parede e localização do ponto onde é determinado o gradiente de pressão p_x .

Observa-se na Figura 5.21 que a medida que aumenta-se k_{nl} , a velocidade de escorregamento se aproxima de 1.

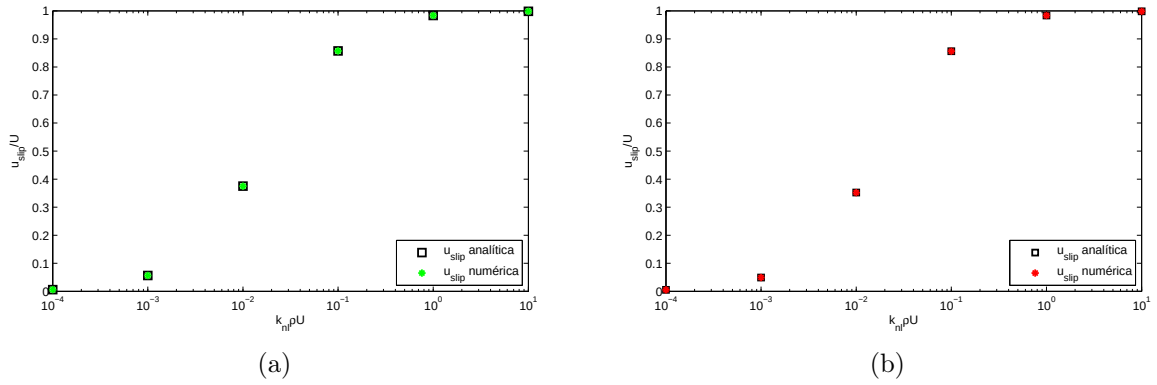


Figura 5.21: Velocidade de escorregamento u_{slip} analítica e numérica (em um ponto na parede do canal) *versus* a constante de fricção k_{nl} , utilizando $Re = 0.1$. (a) modelo Newtoniano (b) modelo sPTT.

Sobre os erros relativos presentes na Tabela 5.7, note que para maiores valores de k_{nl} os erros do modelo Newtoniano e sPTT são praticamente iguais, pois as tensões se anulam quando a velocidade de escorregamento é grande.

Tabela 5.7: Erros relativos obtidos a partir dos modelos Newtoniano e sPTT para a velocidade de escorregamento obtida em um ponto da parede, com $\varsigma = \delta x = 0.05$ e $\frac{\varsigma}{2} = 0.025$.

k_{nl}	Malha	$E_{\varsigma}(u_{slip})$ - Newtoniano	$E_{\varsigma}(u_{slip})$ - sPTT
10^{-4}	M_1	$4.945610571600 \times 10^{-3}$	$5.802558036769 \times 10^{-3}$
	M_2	$1.240532088000 \times 10^{-3}$	$1.467174645685 \times 10^{-3}$
10^{-3}	M_1	$4.694782893000 \times 10^{-3}$	$5.589545255187 \times 10^{-3}$
	M_2	$1.178193019333 \times 10^{-3}$	$1.413629198338 \times 10^{-3}$
10^{-2}	M_1	$3.115246560000 \times 10^{-3}$	$3.959220418032 \times 10^{-3}$
	M_2	$7.807061866667 \times 10^{-4}$	$1.001347956386 \times 10^{-3}$
10^{-1}	M_1	$7.137697266667 \times 10^{-4}$	$7.590196747216 \times 10^{-4}$
	M_2	$1.786039883333 \times 10^{-4}$	$1.904338550547 \times 10^{-4}$
1.0	M_1	$8.197544683345 \times 10^{-5}$	$8.201441659246 \times 10^{-5}$
	M_2	$2.052424000008 \times 10^{-5}$	$2.037860499451 \times 10^{-5}$
10.0	M_1	$8.331762349958 \times 10^{-6}$	$8.274882090854 \times 10^{-6}$
	M_2	$2.107105183374 \times 10^{-6}$	$2.065940857407 \times 10^{-6}$

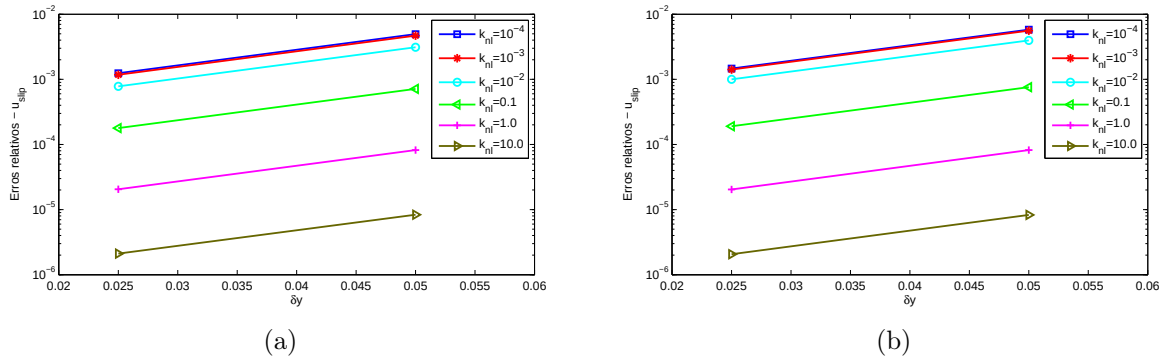


Figura 5.22: Erros relativos entre a velocidade de escorregamento numérica (obtida em um ponto na parede do canal) e analítica para diferentes valores de k_{nl} . (a) modelo Newtoniano (b) modelo sPTT.

Tabela 5.8: Ordem de convergência espacial obtida a partir dos modelos Newtoniano e sPTT para a velocidade de escorregamento numérica obtida em um ponto na parede do canal com $\varsigma = \delta x = 0.05$ e $\frac{\varsigma}{2} = 0.025$.

k_{nl}	$\Lambda(E_{\varsigma}(u_{slip}))$ - Newtoniano	$\Lambda(E_{\varsigma}(u_{slip}))$ - sPTT
10^{-4}	1.9951	1.9836
10^{-3}	1.9944	1.9833
10^{-2}	1.9964	1.9832
10^{-1}	1.9986	1.9948
1.0	1.9978	2.0088
10.0	1.9833	2.0019

O aumento da intensidade da velocidade de escorregamento afeta diretamente o gradiente de pressão. Nas Figuras 5.23 (a) e (b) pode-se observar a convergência do gradiente de pressão numérico com o analítico obtidos pelas respectivas expressões (3.39) e (3.41). O gradiente de pressão numérico foi calculado no meio do canal, como representado na Figura 5.20, na face de uma célula no centro do canal, por meio da seguinte discretização,

$$p_x|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{\partial p}{\partial x}\bigg|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{2\frac{\delta x}{2}} = \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\delta x}. \quad (5.5)$$

Nas Figuras 5.23 (a) e (b) fica evidente que com o aumento de k_{nl} , ou melhor, com o aumento da intensidade da velocidade de escorregamento o gradiente de pressão necessário para fazer o fluido escoar é menor. Ou seja, como citado por Ferrás em [16], à medida que a resistência das paredes diminui é necessário um gradiente de pressão menor para que o fluido se mova a mesma velocidade média U imposta.

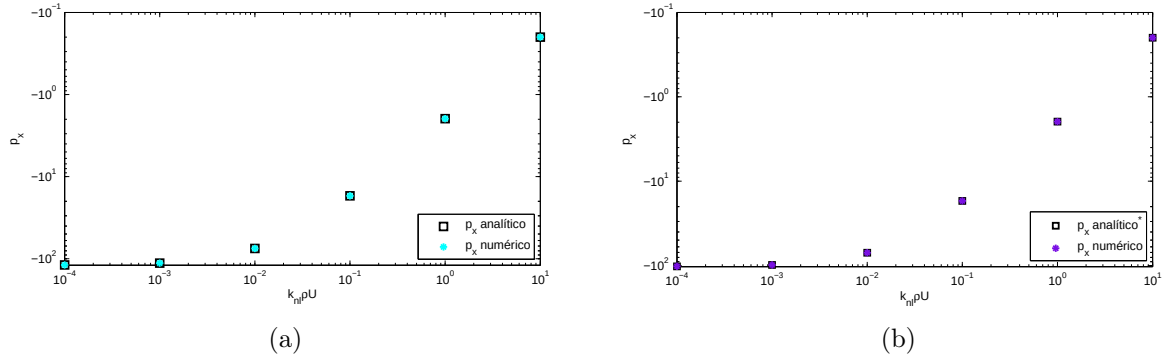


Figura 5.23: Gradiente de pressão p_x analítico e numérico *versus* a constante de fricção k_{nl} . (a) modelo Newtoniano (b) modelo sPTT.

5.2 Estudo e Variação dos Parâmetros Adimensionais do Modelo sPTT

O objetivo desta seção é observar o comportamento da solução numérica no escoamento de *Poiseuille* quando varia-se os parâmetros adimensionais presentes no modelo sPTT. Ainda considera-se um canal de comprimento $10m$ x $1m$ e a malha considerada é a M_2 . Os parâmetros estudados são: Re , β , Wi e ϵ . Em todas as simulações foi considerado um problemas *slip*, cuja lei de escorregamento é a Navier-Linear e o valor da constante de fricção adotada é $k_{nl} = 0.01$. Nas seções a seguir encontram-se os resultados obtidos para cada estudo de parâmetro.

5.2.1 Variação do Número de Reynolds (Re)

Nesse estudo considera-se fixos os valores dos demais parâmetros e atribui-se diferentes valores para a constante Re . As constantes fixas e seus valores são: $\beta = 0.5$, $Wi = 0.6$ e $\epsilon = 0.5$. Os valores de Reynolds assumidos são: $Re = 0.001$, 0.1 , 1.0 e 10.0 . Esses valores foram escolhidos assumindo que, $U = 1.0ms^{-1}$, $L = 1.0m$ e $\lambda = 0.6s$. O gradiente de pressão para cada Re escolhido é dado na Tabela 5.9.

Tabela 5.9: Gradiente de pressão para diferentes valores de Re do modelo sPTT com $k_{nl} = 0.01$.

Re	0.001	0.1	1.0	10.0
p_x	-196.717945	-62.836978	-8.321461	-0.859364

Os gráficos dos perfis de solução numérica e analítica são expostos na Figura 5.24. Nessa figura é possível perceber como se comportam a velocidade e os tensores quando fixa-se os valores de β , Wi , ϵ , k_{nl} e altera-se Re .

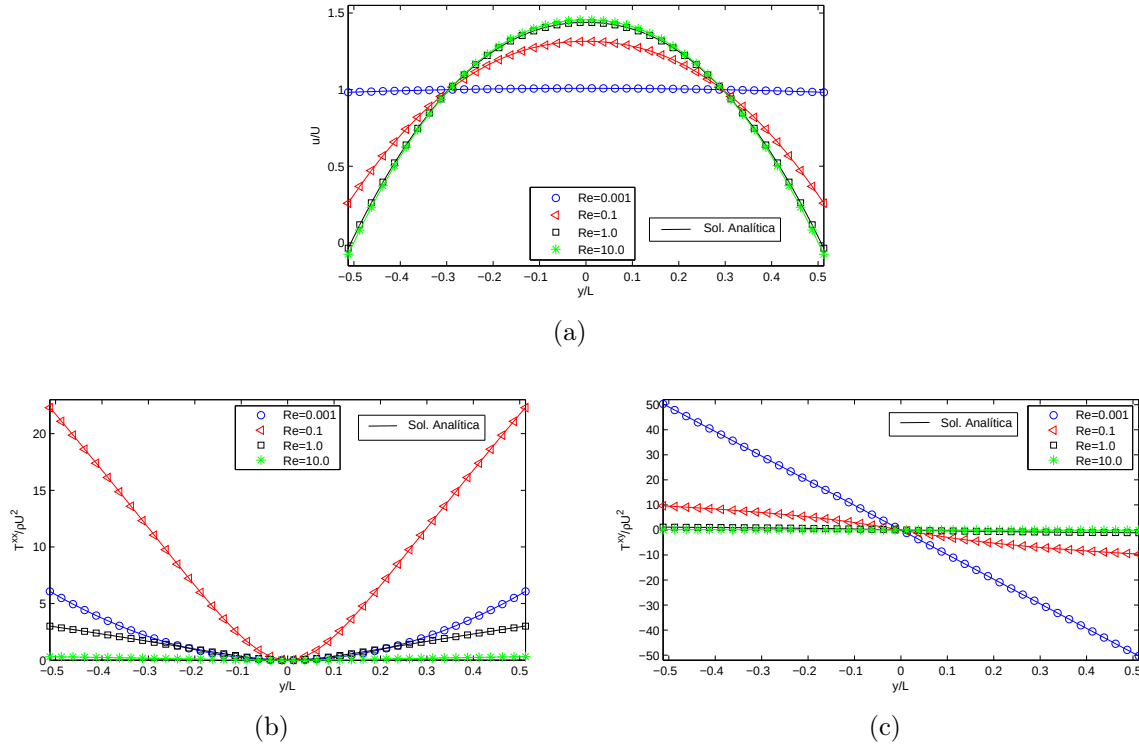


Figura 5.24: Soluções analíticas (linha contínua) e numéricas (símbolos) do perfil de velocidade u (a) e dos tensores T^{xx} (b) e T^{xy} (c), para diferentes valores de Re .

Analisando os gráficos da Figura 5.24 observa-se que para números de Re mais baixos o perfil de velocidade aproxima-se do perfil reto. A medida que aumenta-se o valor de Re , ou seja, diminui-se a viscosidade cinemática, o perfil de solução u se caracteriza com uma velocidade de escorregamento menor. Matematicamente, para o problema Newtoniano basta observarmos a equação (2.41), onde a viscosidade é diretamente proporcional a u_{slip} . Entretanto, no caso viscoelástico, equação (2.46), tem-se o termo T^{xy} influenciando no cálculo de u_{slip} . Note na Figura 5.24, que a magnitude dessa propriedade é pequena para valores de Re maiores.

Além dos gráficos, na Tabela 5.10 encontram-se os erros relativos obtidos em cada simulação.

Tabela 5.10: Erros relativos do modelo sPTT para diferentes valores de Reynolds.

Re	0.001	0.1	1.0	10.0
$E_{\zeta}(u)$	5.0727×10^{-6}	3.6757×10^{-4}	6.2089×10^{-4}	6.5837×10^{-4}
$E_{\zeta}(T^{xx})$	5.9168×10^{-4}	9.2238×10^{-4}	1.2737×10^{-3}	1.3312×10^{-3}
$E_{\zeta}(T^{xy})$	6.8093×10^{-6}	4.1967×10^{-4}	5.8614×10^{-4}	6.0981×10^{-4}

Note que os erros relativos tanto da velocidade como dos tensores aumenta quando o número de Re aumenta.

5.2.2 Variação de β

Seguindo a mesma ideia feita para a variação do número de Reynolds, e considerando $Re = 0.1$, $Wi = 0.6$, $\epsilon = 0.5$ e $k_{nl} = 0.01$, sendo que, $U = 1.0 m s^{-1}$, $L = 1.0 m$ e $\lambda = 0.6 s$. Os valores de β e os respectivos gradientes de pressão encontram-se na Tabela 5.11.

Tabela 5.11: Gradiente de pressão para diferentes valores de β do modelo sPTT com $k_{nl} = 0.01$.

β	0.2	0.5	0.8
p_x	-53.1294007	-62.836978	-70.585584

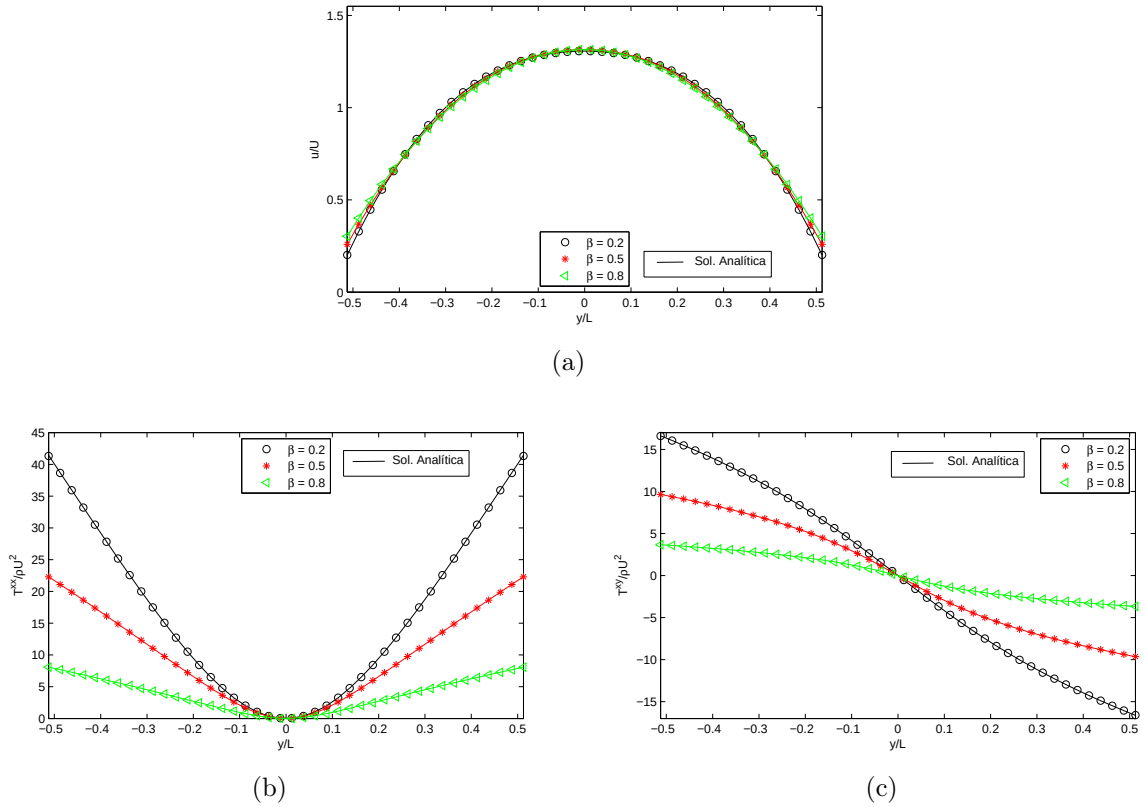


Figura 5.25: Soluções analíticas (linha contínua) e numéricas (símbolos) do perfil de velocidade u (a) e dos tensores T^{xx} (b) e T^{xy} (c), para diferentes valores de β .

Os gráficos com as soluções para u , T^{xx} e T^{xy} encontram-se na Figura 5.25. Como pode-se ver, o perfil de velocidade não se altera muito com a variação de β , entretanto, o perfil de solução dos tensores T^{xx} e T^{xy} decresce com o aumento dessa constante. Esse fato é explicado pela própria definição de β , pois, essa constante é responsável por mensurar a quantidade de solvente presente no fluido. Sabe-se que quando β está próximo de 1 o fluido está próximo ao fluido Newtoniano e, portanto, a tensão no escoamento tende a ser menor.

Na Tabela 5.12 pode-se verificar os erros relativos calculados em cada simulação. Note que houve uma diminuição do erro quando elevou-se o valor de β para u e T^{xx} , já o erro relativo de T^{xy} teve um ligeiro aumento.

Tabela 5.12: Erros relativos do modelo sPTT para diferentes valores de β .

β	0.2	0.5	0.8
$E_\zeta(u)$	5.5045×10^{-4}	3.6757×10^{-4}	3.0251×10^{-4}
$E_\zeta(T^{xx})$	9.2554×10^{-4}	9.2238×10^{-4}	9.1701×10^{-4}
$E_\zeta(T^{xy})$	4.0665×10^{-4}	4.1967×10^{-4}	4.6671×10^{-4}

5.2.3 Variação do Número de Weissenberg (Wi)

Considera-se um escoamento com os seguintes valores de constantes fixadas: $Re = 0.1$, $\beta = 0.5$, $\epsilon = 0.5$ e $k_{nl} = 0.01$, sendo que, $U = 1.0 m s^{-1}$ e $L = 1.0 m$ são fixos e $\lambda = 0.6 s$, $1.0 s$ e $2.0 s$. Os valores de Wi e gradiente de pressão utilizados estão dispostos na Tabela 5.13.

Tabela 5.13: Gradiente de pressão para diferentes valores de Wi do modelo sPTT com $k_{nl} = 0.01$.

Wi	0.6	1.0	2.0
p_x	-62.836978	-59.227845	-55.141677

Na Figura 5.26 estão os gráficos com os diferentes perfis de solução para a velocidade e para os tensores considerando diferentes valores de Wi .

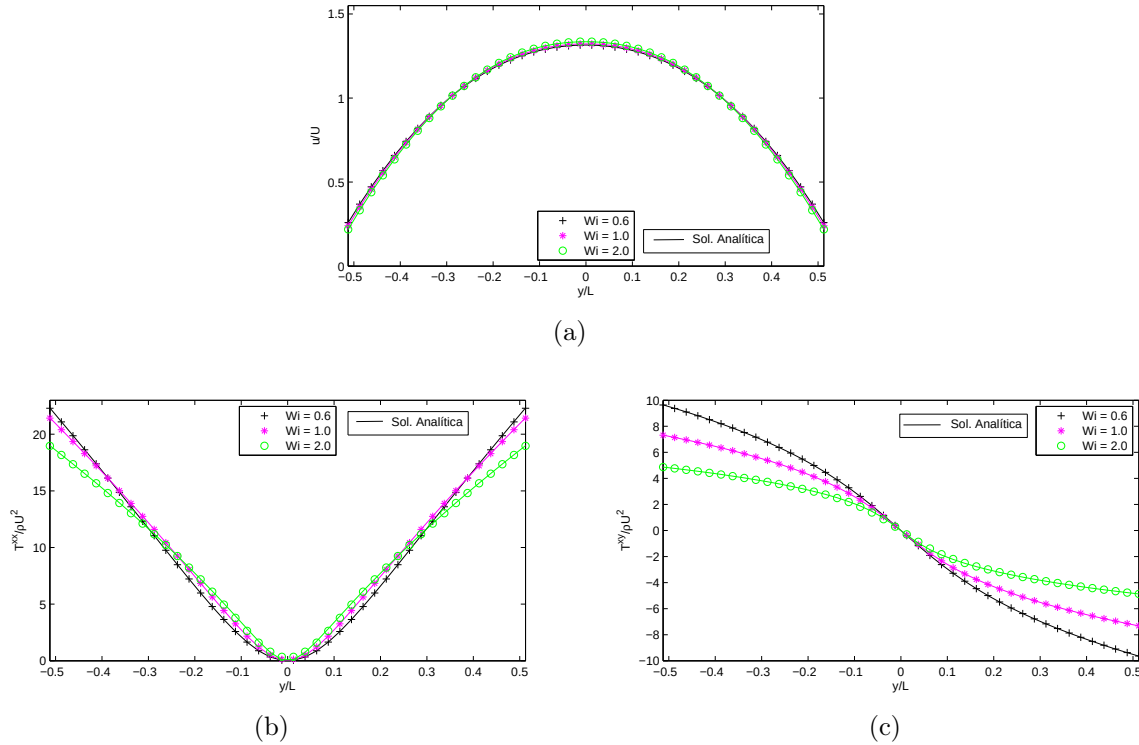


Figura 5.26: Soluções analíticas (linha contínua) e numéricas (símbolos) do perfil de velocidade u (a) e dos tensores T^{xx} (b) e T^{xy} (c), para diferentes valores de Wi .

Na Tabela 5.14, note que o perfil de velocidade manteve erro da ordem de 10^{-4} . Já os tensores T^{xx} e T^{xy} obtiveram erros relativos crescentes com o aumento de Wi . Para $Wi = 2.0$, embora o erro da velocidade ainda permanecer na ordem de 10^{-4} e o erro de T^{xx} ser de ordem 10^{-3} , o que chama a atenção é o erro relativo do tensor T^{xy} que atingiu a ordem de 10^{-2} .

Tabela 5.14: Erros relativos do modelo sPTT para diferentes valores de Wi .

Wi	0.6	1.0	2.0
$E_{\zeta}(u)$	3.6757×10^{-4}	3.6699×10^{-4}	4.7503×10^{-4}
$E_{\zeta}(T^{xx})$	9.2238×10^{-4}	2.0236×10^{-3}	8.2678×10^{-3}
$E_{\zeta}(T^{xy})$	4.1967×10^{-4}	1.0305×10^{-3}	1.0122×10^{-2}

O aumento do erro relativo apresentado na Tabela 5.14 pode estar associado ao problema de Auto Número de Weissenberg. Entretanto, mais a frente em outra seção pretende-se estudar como a solução para problemas envolvendo o modelo sPTT se comportam ao longo do canal variando Wi e k_{nl} .

5.2.4 Variação de ϵ

Como feito nos estudos anteriores, foram escolhidos alguns valores para ϵ e fixado os valores dos demais parâmetros presentes no modelo sPTT. As constantes fixas com seus respectivos valores são: $Re = 0.1$, $\beta = 0.5$, $Wi = 0.6$ e $k_{nl} = 0.01$, sendo que, $U = 1.0ms^{-1}$, $L = 1.0m$ e $\lambda = 0.6s$. Os valores escolhidos para ϵ estão presentes na Tabela 5.15 juntamente com o respectivo gradiente de pressão determinados a partir da equação (3.41) utilizando o método da bissecção.

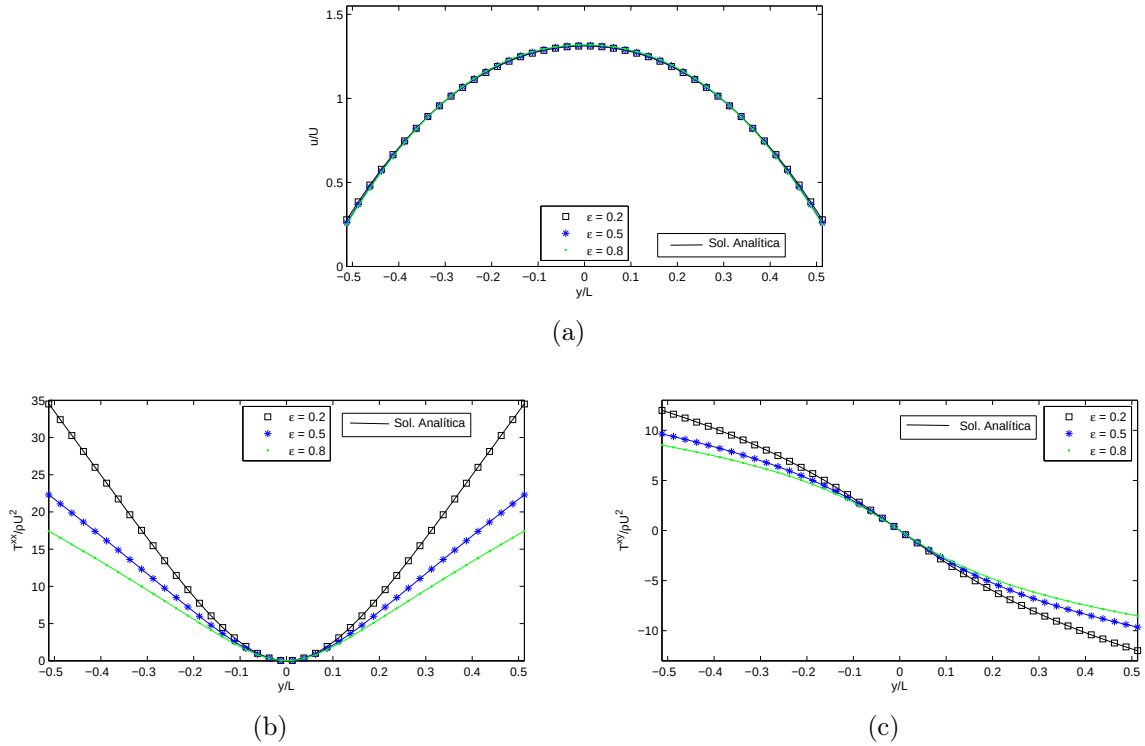


Figura 5.27: Soluções analíticas (linha contínua) e numéricas (símbolos) do perfil de velocidade u (a) e dos tensores T^{xx} (b) e T^{xy} (c), para diferentes valores de ϵ .

Tabela 5.15: Gradiente de pressão para diferentes valores de ϵ do modelo sPTT com $k_{nl} = 0.01$.

ϵ	0.2	0.5	0.8
p_x	-66.2406509	-62.836978	-61.129488

O comportamento das soluções para os três valores de ϵ encontram-se na Figura 5.27. Note que, com a variação de ϵ o perfil de solução do tensor altera-se de forma que ao aumentarmos o valor de ϵ os mesmos tende a decrescer.

Na Tabela 5.16 pode ser verificado os erros relativos decorrentes das três simulações. Observe que a ordem do erro em todas as simulações e para as três variáveis solução é de 10^{-4} . Esse fato também pode ser observado pela na Figura 5.27 onde o perfil de solução numérico acompanha o perfil descrito pela solução analítica.

Tabela 5.16: Erros relativos do modelo sPTT para diferentes valores de ϵ .

ϵ	0.2	0.5	0.8
$E_{\zeta}(u)$	3.4550×10^{-4}	3.6757×10^{-4}	3.7501×10^{-4}
$E_{\zeta}(T^{xx})$	9.7953×10^{-4}	9.2238×10^{-4}	9.4429×10^{-4}
$E_{\zeta}(T^{xy})$	4.6018×10^{-4}	4.1967×10^{-4}	4.3624×10^{-4}

Pode-se verificar que entre os valores de ϵ escolhidos e apresentados aqui a solução numérica correspondeu satisfatoriamente, mostrando que não há problemas numéricos quando o objetivo é simular um escoamento com escorregamento na parede utilizando diferentes valores para ϵ .

5.3 Comprimento de Desenvolvimento do Modelo Newtoniano

A condição no contorno de entrada do fluido pode levar a conclusões errôneas no que diz respeito ao escoamento estar totalmente desenvolvido em regiões sobre forte influência dessa condição [17]. Na literatura estão disponíveis algumas correlações para descrever o comprimento de desenvolvimento para escoamentos Newtonianos em função do número de Reynolds ([14],[42]) porém, considerando condições de contorno *no-slip*. Esses estudos indicam uma não linearidade entre o comprimento de desenvolvimento e o número de Reynolds. O primeiro trabalho a fazer essa análise levando em consideração uma velocidade de escorregamento na parede em escoamentos de fluidos Newtonianos foi desenvolvido por Ferrás et al. em [17] considerando a lei de escorregamento Navier-Linear.

Nessa seção o objetivo é analisar nas soluções apresentadas pelo modelo Newtoniano o desenvolvimento da solução ao longo do canal na direção x . Essencialmente pretende-se apresentar a partir da variação das constantes Re e k_{nl} o comprimento necessário para que a solução numérica sobre o eixo de simetria $y = 0$ atinja 99% da velocidade máxima, ou seja, determinar o comprimento $\mathcal{L}$ a partir da entrada do canal onde a solução numérica é aproximadamente $0.99u_{max}$.

Para fazer essa análise foi necessário considerar uma malha 410×41 , onde $\delta x = \delta y = 0.02439$, em um canal $10m \times 1m$. Na direção y são impostas 41 células para que a velocidade u seja calculada exatamente sobre o eixo de simetria $y = 0$. Na Tabela 5.17 encontram-se os valores de $\mathcal{L}$ calculados e o erro relativo entre a solução analítica e numérica. Além disso, para fim de comparação também apresenta-se o comprimento $\mathcal{C}$ obtido por Ferrás et al. em [17].

Observação 5 *O processo de adimensionalização do tensor em [17] é diferente do utilizado nesse trabalho, sendo necessário tomar certo cuidado ao comparar os comprimentos de desenvolvimento obtidos neste trabalho com os determinados por Ferrás et al. em [17]. Para isso é necessário considerar $k_{nl}^* = Re k'_{nl}$, sendo k_{nl}^* a constante de fricção adimensional utilizada neste trabalho e k'_{nl} a constante de fricção utilizada em [17].*

Tabela 5.17: Comprimento de desenvolvimento ($\mathcal{L}$) e erro relativo da velocidade u para diferentes valores do coeficiente de fricção e diferentes valores de Re .

Re	k_{nl}	$\mathcal{L}$	$\mathcal{C}$	$E_{\zeta}(u)$
0.001	10^{-7}	0.6341	0.6284	5.547989×10^{-4}
	10^{-6}	0.6341	0.6293	5.500617×10^{-4}
	10^{-5}	0.6341	0.6377	5.061709×10^{-4}
	10^{-4}	0.6829	0.6816	2.682089×10^{-4}
	10^{-3}	0.5610	0.5560	4.376375×10^{-5}
1.0	10^{-4}	0.6341	0.6411	5.547983×10^{-4}
	10^{-3}	0.6341	0.642	5.500986×10^{-4}
	10^{-2}	0.6341	0.6509	5.061717×10^{-4}
	10^{-1}	0.7073	0.7	2.682146×10^{-4}
	1.0	0.5610	0.5779	4.368362×10^{-5}
10.0	10^{-3}	0.8049	0.8144	5.548178×10^{-4}
	10^{-2}	0.8049	0.8159	5.500586×10^{-4}
	10^{-1}	0.8293	0.831	5.061765×10^{-4}
	1.0	0.9512	0.9388	2.681705×10^{-4}
	10.0	0.8293	0.8441	4.377037×10^{-5}

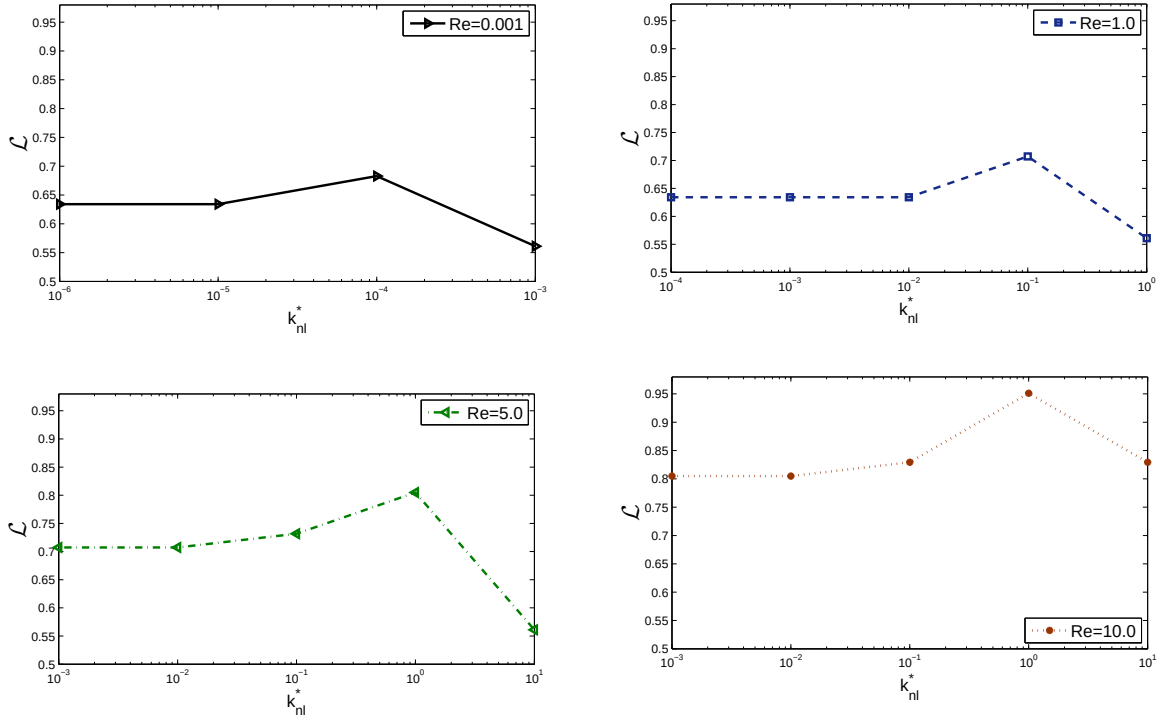


Figura 5.28: Comprimento de desenvolvimento do escoamento de fluido Newtoniano versus a constante de fricção adimensional k_{nl}^* .

Observando os dados da Tabela 5.17 e a Figura 5.28 verifica-se que o comprimento de desenvolvimento aumenta em baixos coeficientes de fricção adimensionais, porém, o mesmo comprimento diminui para altos valores de k_{nl} , como verificado por Ferrás et al. em [17]. Além disso, note que os valores de $\mathcal{L}$ e $\mathcal{C}$ quase coincidem e demonstram o mesmo comportamento. Quando utilizado um valor muito alto para k_{nl} , por exemplo, $Re = 0.001$ e $k_{nl} = 10^{-2}$, percebe-se que a partir da entrada do canal ($x/L = 0$), a velocidade já atingiu 99% da velocidade máxima. Isso fica bem evidente quando observamos a Figura

5.29 que apresenta o comportamento da velocidade sobre o eixo de simetria $y/L = 0$. Nesse gráfico a variável u é normalizada pela velocidade máxima u_{max} obtida através da solução analítica. A reta indica quando u/u_{max} é exatamente igual a 99%. É fácil verificar que quando $k_{nl} = 10^{-2}$ a velocidade sobre o eixo de simetria já sai da entrada do canal e se desenvolve com velocidades superiores a 99% de u_{max} .

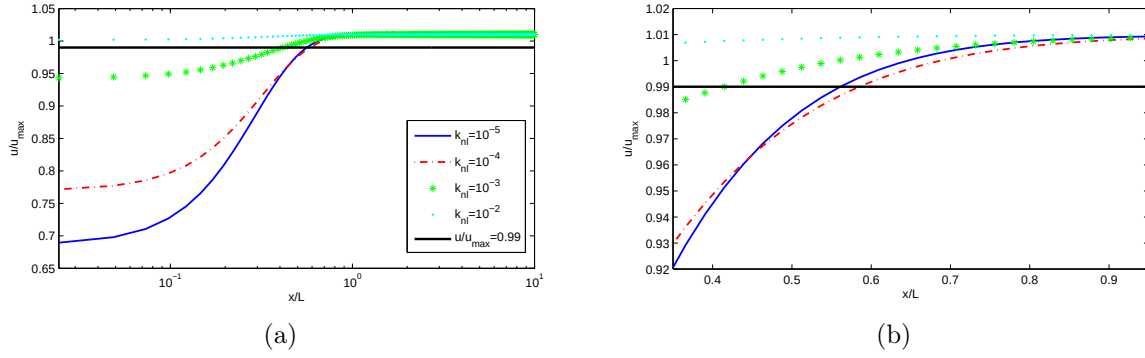


Figura 5.29: Velocidade sobre o eixo de simetria normalizada pela velocidade u_{max} analítica para $Re = 0.001$ com diferentes coeficientes de fricção (k_{nl}). (b) ampliação de (a), $y/L \in [0.35, 0.95]$.

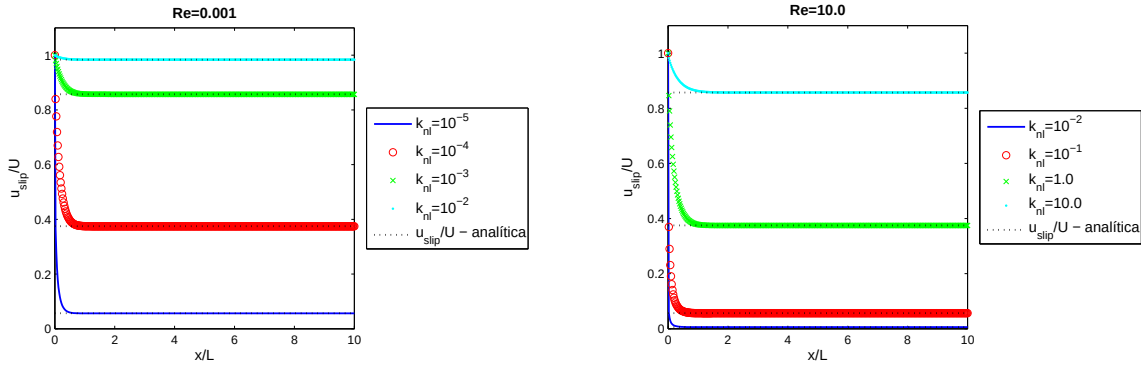


Figura 5.30: Velocidade de escorregamento ao longo da direção x para $Re = 0.001$ e $Re = 10.0$ com diferentes coeficientes de fricção (k_{nl}) e $y = 0.5$.

Um outro fator importante de se observar é a velocidade de escorregamento sobre o comprimento de toda a parede sólida. Na Figura 5.30 é possível observar que a velocidade de escorregamento adimensional bem próxima a entrada do canal decai devido a imposição no injetor do perfil reto de velocidade, porém a mesma converge ao longo do canal para a velocidade de escorregamento exata (linha pontilhada). Além disso, fica evidente que com o aumento da constante de fricção a velocidade de escorregamento também aumenta. Entretanto, observando mais detalhadamente a Figura 5.30 percebe-se que quando $Re = 0.001$ e $k_{nl} = 0.001$ a velocidade de escorregamento parece coincidir com a velocidade u_{slip} quando $Re = 10.0$ e $k_{nl} = 10.0$. De fato, as duas velocidades de escorregamento são idênticas e isso pode ser verificado pela solução analítica. Para $Re = 0.001$ e $k_{nl} = 0.001$ a velocidade $slip$ adimensional é $u_{slip} = 0.8571$ e para $Re = 10.0$ com $k_{nl} = 10.0$ também tem-se $u_{slip} = 0.8571$. Note que em ambos os casos a razão entre o número de Reynolds e a constante de fricção responsável pela intensidade da velocidade $slip$ é a mesma.

As soluções analíticas também podem ser utilizadas para impor um perfil de velocidade na entrada do canal. Da mesma forma como foi calculado o comprimento de desenvolvimento em escoamentos Newtonianos com perfil de entrada reto, também é possível

verificar para o caso em que o perfil de entrada é a solução analítica. Ao impor o perfil analítico na entrada do canal percebeu-se que não houve diferença significativa entre a velocidade máxima analítica e as geradas pelo código numérico em células bem próximas ao *inflow*. Um exemplo disso pode ser visto na Figura 5.31. Note que em $x/L = 0$ a velocidade é a solução analítica, ou seja, u_{max} analítica. Perceba ainda que a solução próxima a entrada do canal decai, porém, ao verificar a escala do gráfico é visível que esse decaimento é da ordem de 2×10^{-4} . Sendo assim, não convém determinar $\mathcal{L}$ nesse caso pois, o comprimento de desenvolvimento seria nulo.

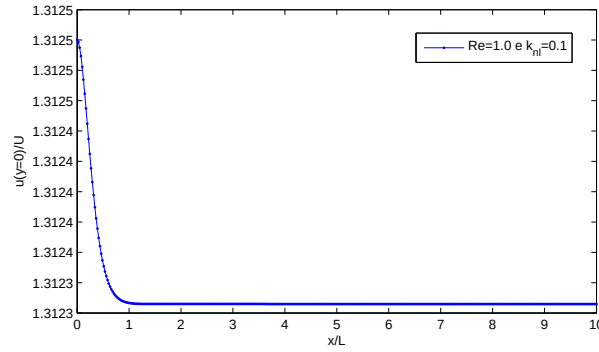


Figura 5.31: Velocidade sobre o eixo de simetria de uma escoamento no canal com perfil de entrada analítico. $Re = 1.0$ e $k_{nl} = 0.1$.

5.4 Análise de Desenvolvimento do fluido sPTT

Nessa seção o objetivo é averiguar como a solução obtida pelas simulações numéricas se comportam sobre o eixo de simetria ao longo do canal. Além do eixo de simetria também pretende-se observar para alguns valores de y fixados, principalmente próximos a parede como a solução numérica se comporta ao longo da direção x .

Para fazer essa análise, considerou-se um escoamento em um canal de comprimento $10m \times 1m$ com uma malha 410×41 células, espaçamento espacial $\delta x = \delta y = 0.02439$ e $\delta t = 10^{-3}$. Considerou-se um problema onde $Re = 0.1, \beta = 0.5, \epsilon = 0.5$ e $Wi = 0.4, 1.0, 2.0$ e 3.0 . Além desses parâmetros foi admitido os seguintes valores para a constante de fricção, $k_{nl} = 0.0001, 0.001, 0.01, 0.1$ e 1.0 .

Tabela 5.18: Erros relativos da velocidade e tensores considerando diferentes valores de $Wi = 0.4$ e 1.0 .

Wi	k_{nl}	$E_{\zeta}(u)$	$E_{\zeta}(T^{xx})$	$E_{\zeta}(T^{xy})$
0.4	10^{-4}	6.3322×10^{-4}	1.2755×10^{-3}	6.1493×10^{-4}
	10^{-3}	5.9389×10^{-4}	1.2320×10^{-3}	5.9235×10^{-4}
	10^{-2}	3.3595×10^{-4}	8.7265×10^{-4}	4.0934×10^{-4}
	0.1	4.4736×10^{-5}	5.8606×10^{-5}	2.4984×10^{-5}
	1.0	4.8424×10^{-6}	4.3604×10^{-5}	1.5000×10^{-5}
1.0	10^{-4}	5.9874×10^{-4}	2.6047×10^{-3}	1.5684×10^{-3}
	10^{-3}	5.6675×10^{-4}	2.5311×10^{-3}	1.4990×10^{-3}
	10^{-2}	3.4928×10^{-4}	2.0002×10^{-3}	1.0314×10^{-3}
	0.1	5.8249×10^{-5}	2.7398×10^{-3}	6.5096×10^{-4}
	1.0	4.8645×10^{-6}	1.2322×10^{-2}	2.0033×10^{-4}

Na Tabela 5.18 encontram-se os valores do erro relativo obtido quando utilizado $Wi = 0.4$ e 1.0 . Observe que quando $Wi = 0.4$ os erros decaem com o aumento da constante de fricção, porém no caso em que $Wi = 1.0$, verifica-se que o erro relativo do tensor T^{xx} tem uma ligeira queda, contudo, quando $k_{nl} = 0.1$ e 1.0 o erro relativo aumenta em comparação aos demais. Afim de verificar o que acontece quando utiliza-se valores maiores para Wi , observou-se como a velocidade se desenvolve no canal na direção axial para $Wi = 0.4$ e $Wi = 3.0$ por meio dos gráficos de u/U , $T^{xx}/\rho U^2$ e $T^{xy}/\rho U^2$ em alguns pontos y/L , visando notar a influência da condição *slip* sobre a solução dentro do canal e também verificar o comportamento da solução bem próximo ao injetor. Tais gráficos encontram-se dispostos nas Figuras 5.32, 5.33 e 5.34.

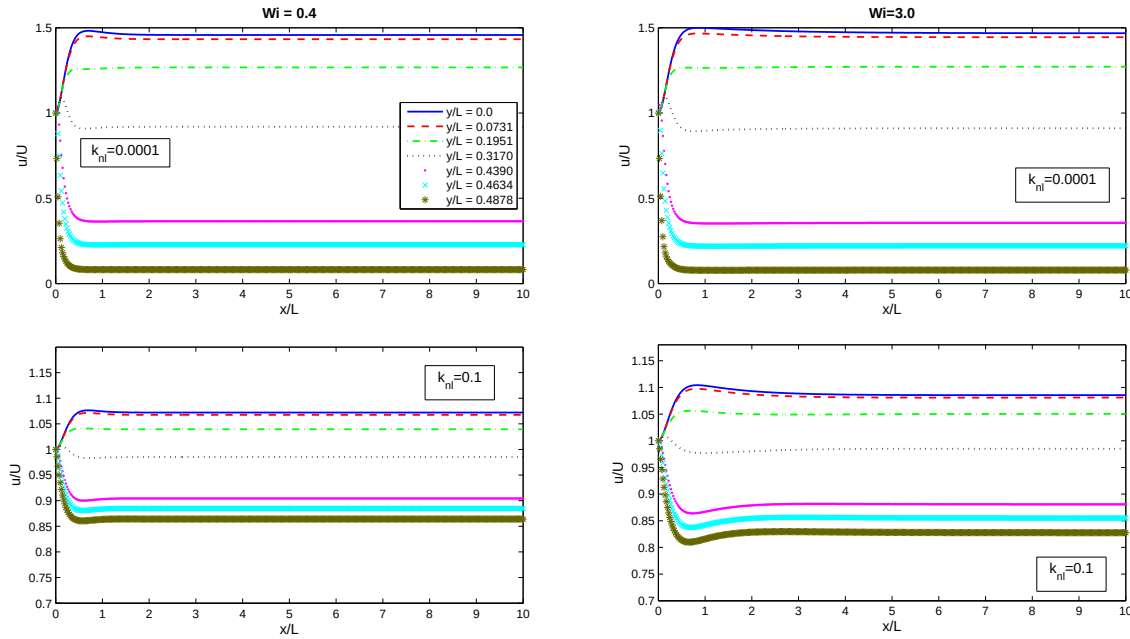


Figura 5.32: Velocidade ao longo do canal para cada Wi considerado, utilizando dois diferentes valores de k_{nl} em cinco posições y/L .

Primeiramente, vamos analisar o que acontece com a velocidade. É evidente que a solução é máxima sobre o eixo de simetria ($y/L = 0$) e que a mesma decai com aumento da intensidade da velocidade *slip*, como pode ser visto na Figura 5.32. Além da velocidade, também pode-se observar nas Figuras 5.33 e 5.34 o comportamento dos tensores em alguns cortes na direção axial x . Note que quando aumenta-se o valor de k_{nl} para $Wi = 3.0$, os tensores aparentam necessitar de um comprimento bem maior para desenvolverem para a solução analítica.

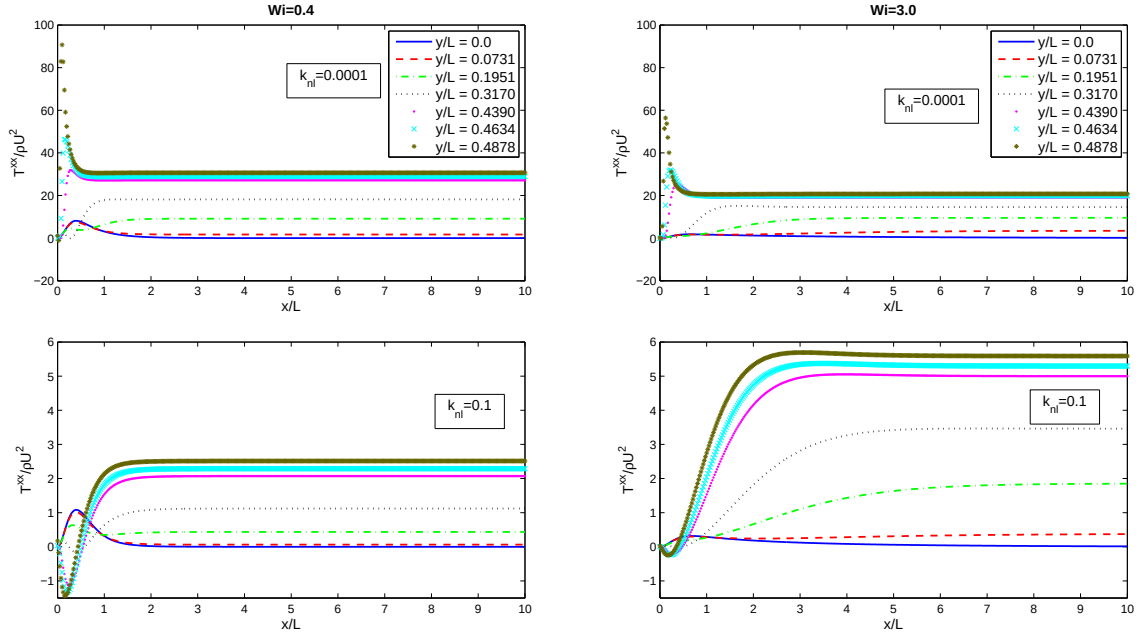


Figura 5.33: Tensor T^{xx} ao longo do canal para cada Wi considerado, utilizando dois diferentes valores de k_{nl} em cinco posições y/L .

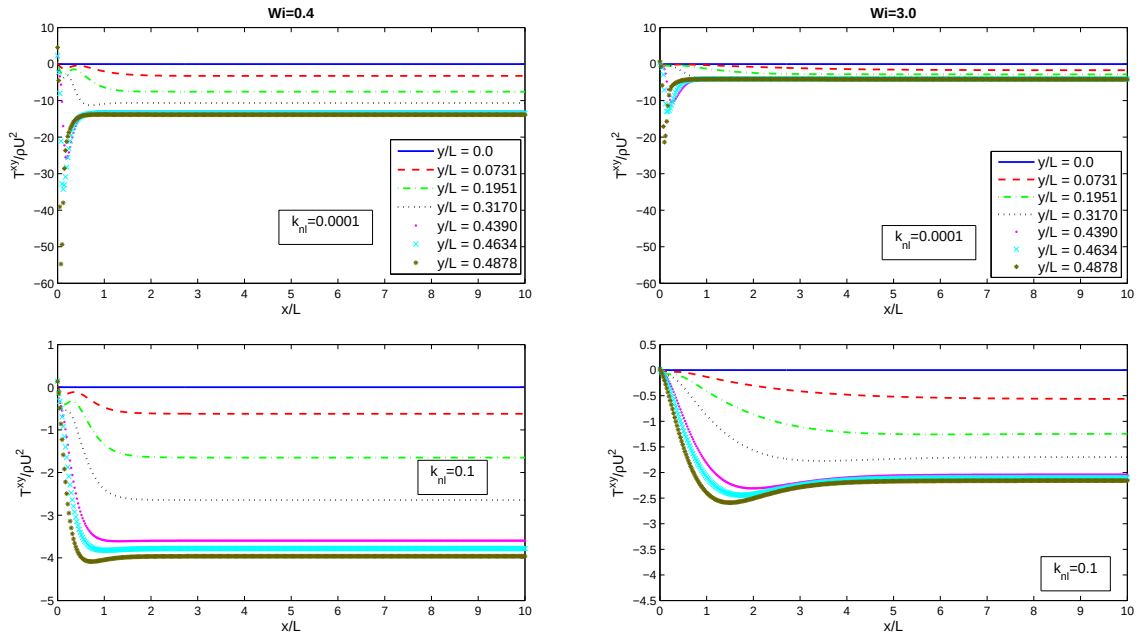


Figura 5.34: Tensor T^{xy} ao longo do canal para cada Wi considerado, utilizando dois diferentes valores de k_{nl} em cinco posições y/L .

No caso viscoelástico a velocidade *slip* depende do tensor $T^{xy}/\rho U^2$ sobre a fronteira rígida (equação (2.74)), portanto um bom calculo da velocidade *slip* está diretamente ligado a uma boa aproximação para o tensor $T^{xy}/\rho U^2$, principalmente em células próximas a parede, se o tensor de corte $T^{xy}/\rho U^2$ não apresenta uma boa solução isso pode comprometer o calculo da velocidade de escorregamento. Para verificar o que acontece com a velocidade de escorregamento vamos analisar a Figura 5.35. A linha pontilhada representa a solução analítica da velocidade de escorregamento. Como é de se esperar para baixos valores da constante de fricção a velocidade de escorregamento é pequena. Quando $k_{nl} = 1.0$ note que embora a solução analítica esteja bem próxima do perfil de

velocidade imposto no injetor percebe-se que com o aumento de Wi o comprimento de desenvolvimento necessário para que a velocidade *slip* numérica convirja para a velocidade *slip* exata é maior. Isso está relacionado aos perfis de soluções para o tensor $T^{xy}/\rho U^2$ que também necessita de um comprimento maior quando a velocidade *slip* é alta e Wi é relativamente grande. Note que se fixarmos a constante $k_{nl} = 0.01$ e aumentarmos Wi (ver Figura 5.36) a velocidade *slip* é menor quando Wi aumenta.

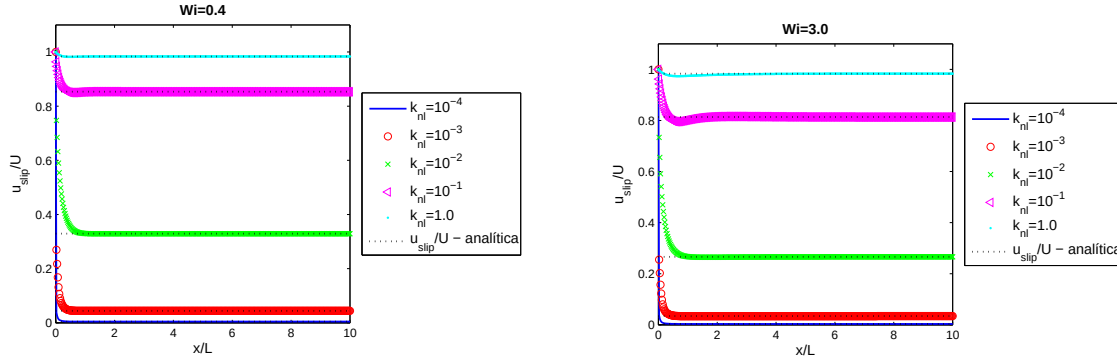


Figura 5.35: Velocidade de escorregamento do modelo sPTT ao longo do canal, na direção x , utilizando diferentes valores da constante de fricção.

O perfil de velocidade adimensional sobre o eixo de simetria quando $k_{nl} = 0.01$ e $Wi = 0.4, 1.0, 2.0$ e 3.0 estão dispostos na Figura 5.37, nesse caso a velocidade máxima no centro do canal decai com o aumento de Wi . Também fica nítido na Figura 5.37 que a velocidade necessita de um comprimento de desenvolvimento maior quando Wi aumenta. Nas Figuras 5.38 e 5.39 são apresentados os perfis de solução para diferentes valores de Wi sobre o eixo de simetria quando $k_{nl} = 0.01$. Em ambos os casos nota-se que próximo ao injetor a solução tem um elevado crescimento quando Wi é relativamente pequeno. Essa elevação próxima a entrada decai com o aumento do valor de Wi entretanto se torna necessário um comprimento de desenvolvimento maior.

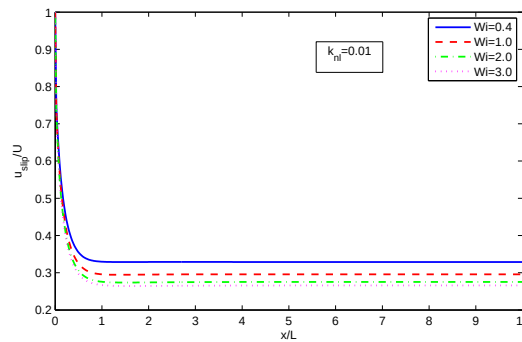


Figura 5.36: Velocidade de escorregamento do modelo sPTT ao longo do canal, na direção x , para cada Wi considerado, com $k_{nl} = 0.01$.

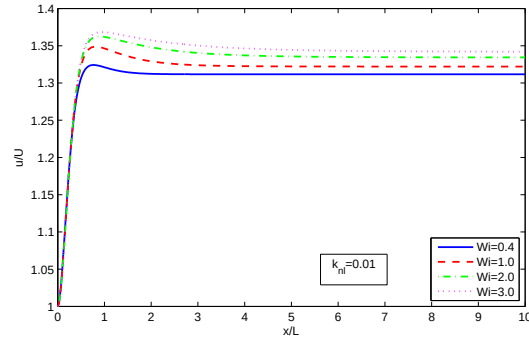


Figura 5.37: Velocidade sobre o eixo de simetria do modelo sPTT ao longo do canal, para cada Wi considerado, com $k_{nl} = 0.01$.

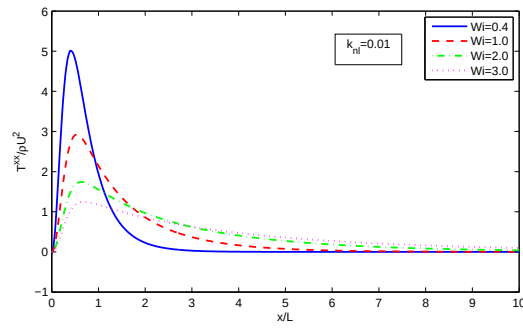


Figura 5.38: Tensor T^{xx} sobre o eixo de simetria do modelo sPTT ao longo do canal, para cada Wi considerado, com $k_{nl} = 0.01$.

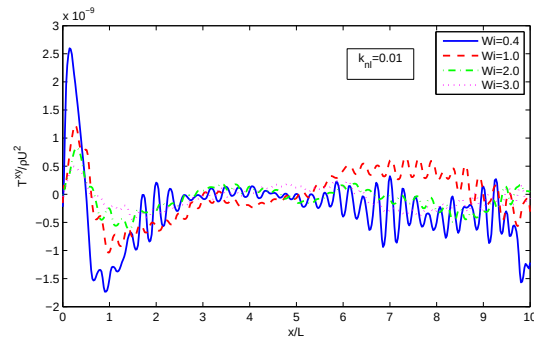


Figura 5.39: Tensor T^{xy} sobre o eixo de simetria do modelo sPTT ao longo do canal, para cada Wi considerado, com $k_{nl} = 0.01$.

Considerações Finais

Neste trabalho apresentou-se as equações que modelam escoamentos viscoelásticos, incompressíveis e isotérmicos descritas na formulação conservativa dimensional e adimensional. Também foram descritas as equações constitutivas Oldroyd-B e sPTT com e sem a contribuição do solvente Newtoniano.

No contexto teórico, foram apresentadas algumas Leis de escorregamento: Lei de escorregamento Navier-linear e Navier não-linear, Lei de escorregamento Hatizikiriakos e Lei de escorregamento Assintótica. Essas leis foram descritas conforme a definição do tensor τ^{xy} e adimensionalizadas.

Como proposto no projeto de mestrado foram estudadas técnicas para determinar a solução analítica das equações de escoamentos Newtonianos e viscoelásticos levando em consideração o problema de escoamentos totalmente desenvolvidos em um canal com e sem a presença da velocidade de escorregamento na fronteira rígida. No caso viscoelástico foram estudadas as soluções para alguns modelos constitutivos, entretanto no trabalho deu-se mais evidência ao modelo sPTT com contribuição do solvente Newtoniano.

No contexto numérico, foi descrita a metodologia utilizada pela plataforma de alto desempenho Freeflow-2D para resolver escoamentos incompressíveis e confinados. No decorrer do estudo desta metodologia foram apresentadas as alterações necessárias no código para simular escoamentos cuja condição na fronteira rígida é de escorregamento. A condição de escorregamento implementada foi a lei de escorregamento Navier-linear. Neste contexto, é muito importante ressaltar que além de uma nova maneira de calcular a velocidade na parede também foi necessário fazer algumas alterações no sistema gerado pela discretização temporal implícita da equação de quantidade de movimento para a velocidade intermediária. Um outro fator importante é a forma como foi calculado o tensor extra-tensão na fronteira rígida. Como descrito no trabalho, devido a geometria e o problema estudado a estratégia utilizada para determinar o tensor sobre a fronteira rígida foi aplicar a própria equação constitutiva na face de células de contorno rígido em contanto com células de fluido. Algumas alterações no cálculo das derivadas espaciais das velocidades u e v também foram necessárias próxima a fronteira rígida.

Dadas as modificações foram apresentados os resultados numéricos de análise de convergência. Comparou-se aos resultados analíticos obtidos para o escoamento de *Poiseuille* com os resultados numéricos fornecidos pela plataforma. Fixadas as constantes adimensionais como Re , β , Wi e ϵ o objetivo foi verificar se a solução numérica no estado estacionário converge para a solução analítica utilizando diferentes valores para a constante de fricção k_{nl} . Em todas as simulações analisadas observa-se que os erros relativos decaem conforme refina-se a malha espacial. Também verificou-se com que ordem acontece a convergência da velocidade *slip* numérica. Nessa análise observou-se que tanto em

escoamentos Newtonianos como viscoelásticos a ordem de convergência de u , T^{xx} , T^{xy} e u_{parede} é aproximadamente 2, o que é de se esperar pois os métodos utilizados para discretização das equações são de tal ordem. Entretanto, decorrente do aumento da velocidade *slip*, observou-se que o erro relativo decresce a medida que aumenta-se a magnitude da velocidade na parede, e conseqüentemente a ordem de convergência chega a ultrapassar a segunda ordem de convergência dos métodos.

O estudo numérico da variação dos parâmetros adimensionais mostrou que o código numérico fornece boas aproximações para a solução com escorregamento na parede quando simulados problemas utilizando diferentes valores de Re , β e ϵ . Apenas a constante Wi apresentou problemas de convergência para valores mais altos, em torno de 3.

Uma análise sobre a evolução do desenvolvimento da solução no canal foi realizada para verificar como a solução numérica se comporta ao longo da direção x . Para isso, foram feitos alguns cortes horizontais e observado sobre o eixo de simetria e próximo a parede como a solução se desenvolveu ao longo do canal. Para o modelo Newtoniano foi possível averiguar o comprimento necessário para que o perfil imposto na entrada do canal se desenvolvesse para a solução do problema utilizando diferentes valores de Re e k_{nl} . Já para o modelo sPTT, observou-se que com o aumento de Wi a solução numérica de problemas com escorregamento não atinge a solução requerida, mais especificamente quando $Wi = 3.0$. Principalmente as componentes do tensor extra-tensão próximo a fronteira rígida que não aparentam convergência para a solução do problema.

Portanto, pode-se concluir que do ponto de vista analítico este trabalho contribui no sentido de disponibilizar uma ferramenta importante na verificação da metodologia numérica de problemas de escoamento em canais com condição *slip*. Além disso, através dessas soluções foi possível verificar a influência da condição *slip* no perfil de solução de escoamentos em canais. No estudo numérico esse projeto foi relevante por proporcionar o estudo da metodologia numérica para escoamentos confinados e por propor uma adequação dessa metodologia para simular escoamentos com escorregamento na parede.

Solução Analítica para o Modelo Viscoelástico Oldroyd-B

Considerando $f(tr(\mathbf{T})) = 1$ no sistema de equações adimensionais (2.62)-(2.67) obtém-se as equações do modelo Oldroyd-B. Além disso, considerando as hipóteses de escoamento apresentadas no Capítulo 3, bem como a geometria do canal representada na Figura 3.1, as equações que descrevem esse tipo de escoamento na presença do fluido Oldroyd-B são,

$$0 = -p_x + \frac{\beta}{Re} \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{dT^{xy}}{dy}, \quad (\text{A.1})$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{dT^{yy}}{dy}, \quad (\text{A.2})$$

$$T^{xx} = 2WiT^{xy} \frac{du}{dy}, \quad (\text{A.3})$$

$$T^{xy} = WiT^{yy} \frac{du}{dy} + \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{du}{dy}, \quad (\text{A.4})$$

$$T^{yy} = 0. \quad (\text{A.5})$$

Note que de (A.5) as equações (A.2) e (A.4) são reescritas, respectivamente, da seguinte forma

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad (\text{A.6})$$

e

$$T^{xy} = \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{du}{dy}. \quad (\text{A.7})$$

Analogamente, a equação do momento (A.1) deve ser integrada do eixo de simetria $y = 0$ a y ,

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{dT^{xy}(s)}{ds} ds &= \int_0^y p_x ds + \int_0^y \frac{\beta}{Re} \frac{d^2 u}{ds^2} ds \Rightarrow \\ T^{xy}(y) - T^{xy}(0) &= p_x (y - 0) + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{du(y)}{dy} - \frac{du(0)}{dy} \right) \Rightarrow \\ T^{xy}(y) &= p_x y - \frac{\beta}{Re} \frac{du}{dy}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

ou ainda,

$$\frac{du}{dy} = \frac{Re}{\beta} p_x y - \frac{Re}{\beta} T^{xy}. \quad (\text{A.9})$$

Substituindo a expressão na equação (A.7) tem-se,

$$\begin{aligned}
 T^{xy} &= \frac{(1-\beta)}{Re} \left[\frac{Re}{\beta} p_x y - \frac{Re}{\beta} T^{xy} \right] \Rightarrow \\
 T^{xy} &= \frac{(1-\beta)}{\beta} p_x y - \frac{(1-\beta)}{\beta} T^{xy} \Rightarrow \\
 \beta T^{xy} &= (1-\beta) p_x y - (1-\beta) T^{xy} \Rightarrow \\
 \beta T^{xy} + (1-\beta) T^{xy} &= (1-\beta) p_x y \Rightarrow \\
 T^{xy} &= (1-\beta) p_x y.
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

Substituindo o resultado acima na equação (A.9) obtém-se,

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{dy} &= \frac{Re}{\beta} p_x y - \frac{Re}{\beta} (1-\beta) p_x y \Rightarrow \\
 \frac{du}{dy} &= \frac{Re}{\beta} p_x y [1 - (1-\beta)] \Rightarrow \\
 \frac{du}{dy} &= Re p_x y.
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

A outra componente do tensor T^{xx} é obtida aplicando as equações (A.10) e (A.11) em (A.3),

$$\begin{aligned}
 T^{xx} &= 2Wi T^{xy} \frac{du}{dy} = 2Wi (1-\beta) p_x y Re p_x y \Rightarrow \\
 T^{xx} &= 2Wi Re (1-\beta) p_x^2 y^2.
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

A solução para o perfil de velocidade u é dada pela integração da equação (A.11),

$$\begin{aligned}
 \int_y^{1/2} \frac{du}{ds} ds &= \int_y^{1/2} Re p_x s ds \Rightarrow \\
 u(1/2) - u(y) &= \frac{Re p_x}{2} \left[\frac{1}{4} - y^2 \right] \Rightarrow \\
 u(y) &= -\frac{Re p_x}{8} [1 - 4y^2] + u(1/2).
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

Considerando a condição $u_{parede} = u(1/2) = 0$ a solução é dada por,

$$T^{xx} = 2Wi Re (1-\beta) p_x^2 y^2, \tag{A.14}$$

$$T^{xy} = (1-\beta) p_x y, \tag{A.15}$$

$$u(y) = -\frac{Re p_x}{8} [1 - 4y^2]. \tag{A.16}$$

Utilizando as leis de escorregamento adaptadas para fluidos viscosos (2.74)-(2.77), as soluções são descritas como,

$$T^{xx} = 2Wi Re (1-\beta) p_x^2 y^2, \tag{A.17}$$

$$T^{xy} = (1-\beta) p_x y, \tag{A.18}$$

$$u(y) = -\frac{Re p_x}{8} [1 - 4y^2] + u(1/2), \tag{A.19}$$

onde,

- *Navier Linear:*

$$u(1/2) = k_{nl} \left[-\frac{1}{2}p_x \right]. \quad (\text{A.20})$$

- *Navier Não-Linear:*

$$u(1/2) = k_{nl} \left[-\frac{1}{2}p_x \right]^m. \quad (\text{A.21})$$

- *Hatzikiriakos:*

$$u(1/2) = \begin{cases} k_{H1} \sinh \left(k_{H2} \left[-\frac{1}{2}p_x \right] \right) & \text{se } \tau^{xy} \geq \tau^c; \\ 0 & \text{se } \tau^{xy} < \tau^c. \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

- *Assintótico:*

$$u(1/2) = k_{A1} \ln \left(1 + k_{A2} \left[-\frac{1}{2}p_x \right] \right). \quad (\text{A.23})$$

Observe que foi necessário determinar $\left. \frac{du}{dy} \right|_{1/2}$ e $T^{xy}(1/2)$, ou seja, considerando a igualdade (A.11) e a solução para a componente do tensor T^{xy} (A.18), tem-se,

$$\frac{du}{dy} = Rep_x y \Rightarrow \left. \frac{du}{dy} \right|_{1/2} = \frac{1}{2}Rep_x,$$

e

$$T^{xy}(y) = (1 - \beta)p_x y \Rightarrow T^{xy}(1/2) = \frac{1}{2}(1 - \beta)p_x,$$

então,

$$\begin{aligned} -\frac{\beta}{Re} \left. \frac{du}{dy} \right|_{parede} - T_{parede}^{xy} &= -\frac{\beta}{Re} \left. \frac{du}{dy} \right|_{1/2} - T^{xy}(1/2) = \\ -\frac{\beta}{Re} \frac{1}{2}Rep_x - \frac{1}{2}(1 - \beta)p_x &= -\frac{\beta}{2}p_x - \frac{1}{2}p_x + \frac{\beta}{2}p_x = -\frac{1}{2}p_x. \end{aligned}$$

Observe que o gradiente de pressão para esse caso é idêntico ao calculado para o caso newtoniano, tendo em vista que o perfil de velocidade é exatamente o mesmo. Logo,

$$p_x = -\frac{12}{Re + 6k_{nl}}. \quad (\text{A.24})$$

Solução Analítica para o Modelo Viscoelástico sPTT sem Contribuição do Solvente Newtoniano

Para um escoamento sem contribuição do solvente newtoniano, considera-se $\eta_s = 0$. Nas equações do modelo viscoelástico sPTT isto implica em $\beta = 0$ (ver equação (2.53)). Já para o modelo Oldroyd-B sem contribuição do solvente Newtoniano, basta admitir $f(tr(\mathbf{T})) = 1$.

As equações (2.63), (2.64), (2.65), (2.66) e (2.67) após aplicadas as hipóteses de escoamento descritas no Capítulo 3 ficam respectivamente,

$$0 = -p_x + \frac{dT^{xy}}{dy}, \quad (\text{B.1})$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{dT^{yy}}{dy}, \quad (\text{B.2})$$

$$f(tr(\mathbf{T}))T^{xx} = 2WiT^{xy}\frac{du}{dy}, \quad (\text{B.3})$$

$$f(tr(\mathbf{T}))T^{xy} = WiT^{yy}\frac{du}{dy} + \frac{1}{Re}\frac{du}{dy}, \quad (\text{B.4})$$

$$f(tr(\mathbf{T}))T^{yy} = 0. \quad (\text{B.5})$$

Da equação (B.5) tem-se que $T^{yy} = 0$ pois, caso contrário, se $f(tr(\mathbf{T})) = 0$ levaria a resultados irrealista [36].

Observe que como $T^{yy} = 0$ então $tr(\mathbf{T}) = T^{xx}$ e as equações (B.2) e (B.4) são reescritas como

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad (\text{B.6})$$

e

$$f(tr(\mathbf{T}))T^{xy} = \frac{1}{Re}\frac{du}{dy}. \quad (\text{B.7})$$

Integrando a equação do momento (B.1) sujeita a condição de contorno $T^{xy} = 0$ no eixo de simetria $y = 0$ tem-se,

$$\frac{dT^{xy}(y)}{dy} = p_x \Rightarrow \int_0^y \frac{dT^{xy}(s)}{ds} ds = \int_0^y p_x ds \Rightarrow T^{xy}(y) - T^{xy}(0) = p_x(y - 0) \Rightarrow$$

$$T^{xy}(y) = p_x y. \quad (\text{B.8})$$

Substituindo (B.8) em (B.3) obtém-se

$$f(T^{xx})T^{xx} = 2Wi p_x y \frac{du}{dy}. \quad (\text{B.9})$$

Agora, substituindo (B.8) em (B.7),

$$f(T^{xx})p_x y = \frac{1}{Re} \frac{du}{dy}. \quad (\text{B.10})$$

Dividindo (B.9) por (B.10):

$$\begin{aligned} \frac{f(T^{xx})T^{xx}}{T^{xx}p_x y} &= \frac{2Wi p_x y \frac{du}{dy}}{\frac{1}{Re} \frac{du}{dy}} \Rightarrow \\ T^{xx} &= 2Wi Re p_x^2 y^2. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Note que, $T^{xx}(y = 0) = 0$ satisfazendo a condição no eixo de simetria.

Aplicando as equações (B.8) e (B.11) em (B.7) obtém-se,

$$\begin{aligned} f(2Wi Re p_x^2 y^2) p_x y &= \frac{1}{Re} \frac{du}{dy} \Rightarrow \\ \frac{du}{dy} &= Re f(2Wi Re p_x^2 y^2) p_x y, \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

que fornece a taxa de variação da velocidade com respeito a variável y . Sendo assim, dada a função f a equação acima pode ser integrada para se obter o perfil de velocidade.

Neste trabalho, é de interesse obter num primeiro momento a solução analítica para o perfil de velocidade de um fluido sPTT linear, portanto, a função f na sua forma adimensional é dada pela expressão (2.68). Como $tr(\mathbf{T}) = T^{xx}$ então,

$$f(T^{xx}) = 1 + \epsilon Wi Re T^{xx},$$

que utilizando (B.11) resulta em

$$f(2Wi Re p_x^2 y^2) = 1 + \epsilon Wi Re (2Wi Re p_x^2 y^2).$$

Ao substituírmos f em (B.12) tem-se,

$$\frac{du}{dy} = Re p_x y + 2\epsilon Wi^2 Re^3 p_x^3 y^3. \quad (\text{B.13})$$

Integrando (B.13) subordinada a condição de contorno na parede obtém-se o perfil de velocidade para esse tipo de escoamento.

$$\begin{aligned} \int_y^{1/2} \frac{du}{ds} ds &= \int_y^{1/2} Re p_x s ds + \int_y^{1/2} 2\epsilon Wi^2 Re^3 p_x^3 s^3 ds \Rightarrow \\ u(1/2) - u(y) &= \frac{Re p_x}{2} \left(\frac{1}{4} - y^2 \right) + \frac{2\epsilon Wi^2 Re^3 p_x^3}{4} \left(\frac{1}{16} - y^4 \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$u(y) = -\frac{Rep_x}{2} \left(\frac{1}{4} - y^2 \right) - \frac{\epsilon Wi^2 Re^3 p_x^3}{2} \left(\frac{1}{4} - y^2 \right) \left(\frac{1}{4} + y^2 \right) + u(1/2) \Rightarrow$$

$$u(y) = -\frac{Rep_x}{8} (1 - 4y^2) [1 + \epsilon Wi^2 Re^2 p_x^2 (1 + 4y^2)] + u(1/2). \quad (B.14)$$

A condição de contorno $u(1/2) = u_{parede}$ irá depender do tipo de condição assumida no problema, sem escorregamento ou com escorregamento.

Como dito anteriormente essa condição admite que a velocidade é nula na parede. Logo, o perfil de velocidade e as componentes do tensor extra tensão são dados por,

$$T^{xx} = 2WiRep_x^2 y^2, \quad (B.15)$$

$$T^{xy}(y) = p_x y, \quad (B.16)$$

$$u(y) = -\frac{Rep_x}{8} (1 - 4y^2) [1 + \epsilon Wi^2 Re^2 p_x^2 (1 + 4y^2)]. \quad (B.17)$$

Considerando as três leis de escorregamento na parede, os tensores e os perfis de velocidade são:

$$T^{xx} = 2WiRep_x^2 y^2, \quad (B.18)$$

$$T^{xy}(y) = p_x y, \quad (B.19)$$

- *Navier Linear:*

$$u(y) = -\frac{Rep_x}{8} (1 - 4y^2) [1 + \epsilon Wi^2 Re^2 p_x^2 (1 + 4y^2)] + k_{nl}(-T^{xy}(1/2)). \quad (B.20)$$

- *Navier Não-Linear:*

$$u(y) = -\frac{Rep_x}{8} (1 - 4y^2) [1 + \epsilon Wi^2 Re^2 p_x^2 (1 + 4y^2)] + k_{nl}(-T^{xy}(1/2))^m. \quad (B.21)$$

- *Hatzikiriakos:*

$$u(y) = \begin{cases} -\frac{Rep_x}{8} (1 - 4y^2) [1 + \epsilon Wi^2 Re^2 p_x^2 (1 + 4y^2)] + \\ \quad + k_{H1} \sinh(k_{H2}(-T^{xy}(1/2))) & \text{se } \tau^{xy} \geq \tau^c; \\ -\frac{Rep_x}{8} (1 - 4y^2) [1 + \epsilon Wi^2 Re^2 p_x^2 (1 + 4y^2)] & \text{se } \tau^{xy} < \tau^c. \end{cases} \quad (B.22)$$

- *Assintótico:*

$$u(y) = -\frac{Rep_x}{8} (1 - 4y^2) [1 + \epsilon Wi^2 Re^2 p_x^2 (1 + 4y^2)] + k_{A1} \ln(1 + k_{A2}(-T^{xy}(1/2))). \quad (B.23)$$

Como $\beta = 0$ então o termo $\frac{\beta}{Re} \frac{du}{dy} \Big|_{parede}$ se anula na condições de escorregamento. No entanto, observe que a solução para o tensor $T^{xy}(y)$ é dada pela equação (B.19), portanto, nas equações acima

$$T^{xy}(1/2) = \frac{1}{2} p_x. \quad (B.24)$$

Assumindo a solução (B.20) aplicada a integral (3.33) na forma adimensional, tem-se,

$$\frac{1}{2} = \int_0^{1/2} -\frac{p_x Re}{8} [1 - 4y^2] [1 + \epsilon Wi^2 Re^2 p_x^2 (1 + 4y^2)] - \frac{k_{nl}}{2} p_x dy \Rightarrow$$

$$1 = -\frac{1}{10}p_x^3 Re^3 Wi^2 \epsilon - p_x \left(\frac{1}{12}Re + \frac{k_{nl}}{2} \right) \Rightarrow -p_x^3 - p_x \left(\frac{(Re + 6k_{nl})5}{(Re^3 Wi^2 \epsilon)6} \right) - \left(\frac{Re^3 Wi^2 \epsilon}{10} \right)^{-1} = 0 \Rightarrow$$

$$p_x^3 + p_x \left(\frac{(Re + 6k_{nl})5}{(Re^3 Wi^2 \epsilon)6} \right) + \left(\frac{Re^3 Wi^2 \epsilon}{10} \right)^{-1} = 0 \Rightarrow p_x^3 + a_2 p_x + a_3 = 0.$$

Observe que o polinômio de terceiro grau acima é do tipo,

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

sendo,

$$a_1 = 0 \quad a_2 = \frac{5(Re + 6k_{nl})}{6(Re^3 Wi^2 \epsilon)} \quad a_3 = \left(\frac{Re^3 Wi^2 \epsilon}{10} \right)^{-1}$$

logo, pode-se usar a fórmula de Cardano Tartaglia para expressar uma solução real para p_x . Portanto, define-se

$$Q = \frac{3a_2 - a_1^2}{9} = \frac{1}{3}a_2 = \frac{1}{3} \frac{5(Re + 6k_{nl})}{6(Re^3 Wi^2 \epsilon)} = \frac{5(Re + 6k_{nl})}{18(Re^3 Wi^2 \epsilon)};$$

$$R = \frac{9a_1 a_2 - 27a_3 - 2a_1^3}{54} = -\frac{1}{2}a_3 = -\frac{1}{2} \left(\frac{Re^3 Wi^2 \epsilon}{10} \right)^{-1} = -\frac{1}{2} \left(\frac{10}{Re^3 Wi^2 \epsilon} \right) = -\frac{5}{Re^3 Wi^2 \epsilon};$$

e

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}} \quad T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}.$$

Como $Q^3 + R^2 > 0$ então o polinômio tem uma raiz real e duas conjugadas complexas e a solução real é dada por,

$$p_x = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}} + \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}. \quad (\text{B.25})$$

com Q e R definidos como,

$$Q = \frac{5(Re + 6k_{nl})}{18(Re^3 Wi^2 \epsilon)}, \quad R = -\frac{5}{Re^3 Wi^2 \epsilon}. \quad (\text{B.26})$$

Extrapolações

Na metodologia numérica são utilizadas algumas extrapolações para aproximar algumas propriedades em pontos importantes, como por exemplo, em pontos de fronteira. Nesse Apêndice são apresentadas as extrapolações utilizadas na metodologia numérica bem como foram concebidas.

1. *Extrapolação linear:* Nessa extrapolação o objetivo é aproximar um ponto $f(y_0)$ utilizando os pontos vizinhos conhecido $f(y_0 - \frac{\delta y}{2})$ e $f(y_0 - \delta y)$. Logo, pretende-se aproximar $f(y_0)$ através da seguinte combinação linear,

$$f(y_0) = a_1 f\left(y_0 - \frac{\delta y}{2}\right) + a_2 f(y_0 - \delta y). \quad (\text{C.1})$$

Para determinar os coeficientes a_1 e a_2 , aplica-se a Série de Taylor em torno de y_0 , ou seja,

$$f\left(y_0 - \frac{\delta y}{2}\right) = f(y_0) - \frac{\delta y}{2} f'(y_0) + O((\delta y)^2), \quad (\text{C.2})$$

$$f(y_0 - \delta y) = f(y_0) - \delta y f'(y_0) + O((\delta y)^2). \quad (\text{C.3})$$

Logo,

$$\begin{aligned} f(y_0) &= a_1 \left[f(y_0) - \frac{\delta y}{2} f'(y_0) + O((\delta y)^2) \right] + a_2 \left[f(y_0) - \delta y f'(y_0) + O((\delta y)^2) \right] \Rightarrow \\ f(y_0) &= (a_1 + a_2) f(y_0) - \delta y \left(\frac{a_1}{2} + a_2 \right) f'(y_0) + O((\delta y)^2). \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Para que a igualdade (C.11) seja aconteça temos,

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ \frac{a_1}{2} + a_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

O sistema (C.5) admite as seguintes soluções, $a_1 = 2$ e $a_2 = -1$. Portanto a extrapolação linear é dada por,

$$f(y_0) = 2f\left(y_0 - \frac{\delta y}{2}\right) - f(y_0 - \delta y). \quad (\text{C.6})$$

2. *Extrapolação de segunda ordem:* Na extrapolação de segunda ordem é necessário considerar 3 pontos conhecidos para determinar $f(y_0)$. Como utilizado na extrapolação dos tensores na parede, vamos utilizar os pontos $f(y_0 - \frac{\delta y}{2})$, $f(y_0 - \delta y)$ e $f(y_0 - 2\delta y)$. Analogamente ao que foi feito para a extrapolação linear, pretende-se determinar a_1 , a_2 e a_3 tal que,

$$f(y_0) = a_1 f\left(y_0 - \frac{\delta y}{2}\right) + a_2 f(y_0 - \delta y) + a_3 f(y_0 - 2\delta y). \quad (C.7)$$

Aplicando a Série de Taylor em torno de y_0 obtém-se

$$f\left(y_0 - \frac{\delta y}{2}\right) = f(y_0) - \frac{\delta y}{2} f'(y_0) + \frac{\left(\frac{\delta y}{2}\right)^2}{2!} f''(y_0) + O((\delta y)^3), \quad (C.8)$$

$$f(y_0 - \delta y) = f(y_0) - \delta y f'(y_0) + \frac{(\delta y)^2}{2!} f''(y_0) + O((\delta y)^3), \quad (C.9)$$

$$f(y_0 - 2\delta y) = f(y_0) - 2\delta y f'(y_0) + \frac{(2\delta y)^2}{2!} f''(y_0) + O((\delta y)^3). \quad (C.10)$$

Substituindo em (C.7),

$$f(y_0) = (a_1 + a_2 + a_3)f(y_0) - \delta y \left(\frac{a_1}{2} + a_2 + 2a_3\right) f'(y_0) + (\delta y)^2 \left(\frac{a_1}{8} + \frac{a_2}{2} + 2a_3\right) f''(y_0) + O((\delta y)^3). \quad (C.11)$$

Que fornece o seguinte sistema,

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ \frac{a_1}{2} + a_2 + 2a_3 = 0 \\ \frac{a_1}{8} + \frac{a_2}{2} + 2a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ a_1 + 2a_2 + 4a_3 = 0 \\ a_1 + 4a_2 + 16a_3 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema os coeficientes resultantes são: $a_1 = \frac{8}{3}$, $a_2 = -2$ e $a_3 = \frac{1}{3}$. Portanto a extrapolação de segunda ordem usando os pontos $f(y_0 - \frac{\delta y}{2})$, $f(y_0 - \delta y)$ e $f(y_0 - 2\delta y)$ é dada por,

$$f(y_0) = \frac{8}{3} f\left(y_0 - \frac{\delta y}{2}\right) - 2f(y_0 - \delta y) + \frac{1}{3} f(y_0 - 2\delta y). \quad (C.12)$$

Referências

- [1] A.M. Afonso; M.A. Alves; F.T. Pinho. Analytical solution of mixed electro-osmotic/pressure driven flows of viscoelastic fluids in microchannels. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 159:50–63, 2009.
- [2] M.A. Alves; F.T. Pinho; P.J. Oliveira. Study of steady pipe and channel flows of a single-mode phan-thien tanner fluid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 101:55–76, 2001.
- [3] M. Alves; P. Oliveira; F. Pinho. A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 41:47–75, 2003.
- [4] D.L. Brown. Accuracy of projection methods for the incompressible navier-stokes equations. *Workshop on Numerical Simulation of Incompressible Flows*, 2001.
- [5] A. Chorin. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *J. Comp. Physics*, 2:12–26, 1967.
- [6] A. Chorin. Numerical solution of the navier-stokes. *Mathematics of Computation*, 2:745–762, 1968.
- [7] A. Chorin; J.E. Marsden. *A mathematical introduction to fluid mechanics*. Springer, 2000.
- [8] D.O.A. Cruz; F.T. Pinho; P.J. Oliveira. Analytical solutions for fully developed laminar flow of some viscoelastic liquids with a newtonian solvent contribution. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 132:28–35, 2005.
- [9] D.O.A. Cruz; F.T. Pinho; P.J. Oliveira. Fully-developed pipe and planar flows of multimode viscoelastic fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 141:85–98, 2007.
- [10] D.O.A. Cruz; F.T. Pinho; P.J. Oliveira. Corrigendum to “analytical solutions for fully developed laminar flow of some viscoelastic liquids with a newtonian solvent contribution” [j. non-newtonian fluid mech. 132 (2005) 28-35]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 202:12, 2013.
- [11] S. Das; S. Chakraborty. Analytical solutions for velocity, temperature and concentration distribution in electroosmotic microchannel flows of a non-newtonian bio-fluid. *Anal. Chim. Acta*, 559:15–24, 2006.
- [12] M.A. Day. The no-slip boundary condition in fluid mechanics. *Erkenntnis*, 33:285–296, 1990.
- [13] M.M. Denn. Extrusion instabilities and wall slip. *Ann. Rev. Fluid Mech*, 33:265–287, 2001.

- [14] F. Durst; S. Ray; B. Ünsal; O. Bayoumi. The development lengths of laminar pipe and channel flows. *Journal of Fluids Engineering*, 127:1154, 2005.
- [15] P. Dutta; A. Beskok. Analytical solution of combined electroosmotic/pressure driven flows in two-dimensional straight channels: finite debye layer effects. *Anal. Chem.*, 73:1979–1986, 2001.
- [16] L.L. Ferrás. *Theoretical and numerical studies of slip flows*. PhD thesis, Universidade do Minho, August 2012.
- [17] L.L. Ferrás; A.M. Afonso; M.A. Alves; J.M. Nóbrega; F.T. Pinho. Development length in planar channel flows of newtonian fluids under the influence of wall slip. *Journal of Fluids Engineering*, 134(10):104503, 2012.
- [18] L.L. Ferrás; J.M. Nóbrega; F.T. Pinho. Analytical solutions for channel flows of phan-thien tanner and giesekus fluids under slip. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 171-172:97–105, 2012.
- [19] L.L. Ferrás; J.M. Nóbrega; F.T. Pinho. Analytical solutions for newtonian and inelastic non-newtonian flows with wall slip. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 175-176:76–88, 2012.
- [20] L.L. Ferrás; J.M. Nóbrega; F.T. Pinho. Implementation of slip boundary conditions in the finite volume method: New techniques. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 72:724–747, 2013.
- [21] C.A.J. Fletcher. *Computational techniques for fluid dynamics*, volume I e II. Springer, 1991.
- [22] A.O. Fortuna. *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações*. Editora da Universidade de São Paulo, 2000.
- [23] S. Hatzikiriakos. A slip model for linear polymers based on adhesive failure. *Int. Polym. Process*, 8:135–142, 1993.
- [24] S.G. Hatzikiriakos; J.M. Dealy. Wall slip of molten high density polyethylene. i. sliding plate rheometer studies. *Journal of rheology*, 35:497, 1991.
- [25] S.G. Hatzikiriakos; J.M. Dealy. Wall slip of molten high density polyethylene. ii. capillary rheometer studies. *Journal of rheology*, 36:703, 1992.
- [26] H. Helmholtz; G.V. Pitrowski. Uber reibung tropfbarer fulfissigkeiten. *Wissenschaftliche Abhandlungen*, I:172–222, 1882.
- [27] J.C. Maxwell. On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond*, 170:231–256, 1879.
- [28] S. McKee; M.F. Tome; V.G. Ferreira; J.A. Cuminato; A. Castelo; F.S. Sousa; N. Mangiavacchi. The mac method. *Computers and Fluids*, 37:907–930, 2008.
- [29] M. Mirzazadeh; M.P. Escudier; F. Rashidi; S.H. Hashemabadi. Analytical solution of purely tangential flow for ptt viscoelastic fluid through concentric annulus. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 129:88–97, 2005.

- [30] C.L.M.H. Navier. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. mémoires de l'académie royale des sciences de l'institut de france. *Sciences de L'Institut de France*, VI:389–440, 18233.
- [31] C.M. Oishi. Análise e implementação de métodos implícitos no sistema freeflow2d. Dissertação de mestrado, ICMC/USP, São Carlos, 2004.
- [32] C.M. Oishi. *Análise e implementação de métodos implícitos e de projeção para escoamentos com superfície livre*. Tese de doutorado, ICMC/USP, São Carlos, 2008.
- [33] C.M. Oishi; F.P. Martins; M.F. Tome; J.A. Cuminato; S. MCKEE. Numerical solution of the extended pom-pom model for viscoelastic free surface flows. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 166:165–179, 2011.
- [34] C.M. Oishi; F.P. Martins; M.F. Tome; M.A. Alves. Numerical simulation of drop impact and jet buckling problems using the extended pom-pom model. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 169-170:91–103, 2012.
- [35] P.J. Oliveira. An exact solution for tube and slit flow of a fene-p fluid. *Acta Mechanica*, 158:157–167, 2002.
- [36] P.J. Oliveira; F.T. Pinho. Analytical solution for fully developed channel and pipe flow of phan-thien-tanner. *Journal of Fluid Mechanics*, 387:271–280, 1991.
- [37] F.M. Pacanelli. Desenvolvimento de um método numérico implícito para a simulação de escoamentos viscoelásticos com superfícies livres. Master's thesis, ICMC-USP, São Carlos, 2009.
- [38] G.S. Paulo. *Solução numérica do modelo PTT para escoamentos viscoelásticos com superfícies livres*. Tese de doutorado, ICMC/USP, São Carlos, 2006.
- [39] G.S. Paulo; M.F. Tome; S. McKee. A marker-and-cell approach to viscoelastic free surface flows using the ptt model. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 147:149–174, 2007.
- [40] N. Phan-Thien. A nonlinear network viscoelastic model. *Journal of Rheology*, 22(3):259–283, 1978.
- [41] N. Phan-Thien; R.I. Tanner. A new constitutive equation derived from network theory. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2:353–365, 1977.
- [42] R.J. Poole; R.P. Chhabra. Development length requirements for fully developed laminar pipe flow of yield stress fluids. *Journal of Fluids Engineering*, 132:034501, 2010.
- [43] W. Schowalter. The behavior of complex fluids at solid boundaries. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 29:25–36, 1988.
- [44] C.G. Stokes. *Mathematical and physical papers*. Cambridge University Press, Cambridge, 1880.
- [45] R. Temam. Sur l'approximation de la solution des equations de navier-stokes par la methode de pas fractionnaires (ii). *Archives of Rational Mechanics and Analysis*, 33:377–385, 1969.

-
- [46] M.F. Tome. *GENSMAC: a multiple free surface fluid flow solver*. PhD thesis, Department of Mathematics/University of Atrathclyde, 1993.
 - [47] M.F. Tome; N. Mangiavacchi; A. Castelo; J.A. Cuminato; S. McKee. A finite difference technique for simulating unsteady viscoelastic free surface flows. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 106:61–106, 2002.
 - [48] J.J. Van Schaftingen; M.J. Crochet. Analytical and numerical solution of the poiseuille flow of a johnson-segalman fluid,. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 18:335–351, 1985.