IFT.TM-06/87

JONAS ANTONIO DA SILVA SOBRINHO

29
4

ESTUDO DE SUPERRADIANCIA ATRAVES DA EQUACAO MASTER

DISSERTACAO DE MESTRADO APRESENTADA NO INSTITUTO DE FISICA TEORICA - UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

ORIENTADORES: BRUTO MAX PIMENTEL ESCOBAR
SALOMON SYLVAIN MIZRAHI

INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA
217
BIBLIOTECA

SAO PAULO
AGOSTO DE 1987

AGRADECIMENTOS

- Aos Profs. Bruto Max Pimentel Escobar e Salomon Sylvain Mizrahi pela orientação e amizade recebidas.

- Ao Prof. Paulo Leal Ferreira pela acolhida no Instituto de Física Teórica.

- À CAPES pela ajuda financeira.

- Ao Antonio Edson Gonçalves, amigo e companheiro neste trabalho.

- Ao Birinha pelas efusivas partidas de xadrez nas horas de lazer.

- Ao Carias e Ubirajara pela amizade.

- Aos colegas e funcionários do IFT pelas gentilezas e amizade.

- À Lourdes pela datilografia.

R E S U M O

Tratamos da emissão espontânea para um sistema atômico de dois níveis interagindo com um campo eletromagnético. E, usando a Equação Master que descreve este processo, obtida com o termo A^2 no Hamiltoniano, calculamos o número médio de fótons de um átomo de dois níveis e a intensidade da radiação.

A B S T R A C T

We treat spontaneons emission to a two-level atomic system interacting with a electromagnetic field. And using the Master Equation that describe this process, which obtained with a term A^2 in the Hamiltonian, we calculate a mean number of photon of a two-level atom and the rate of change of the energy.

Página

B-1. ESTADOS DE FOCK..... 73

B-2. ESTADOS COERENTES DO OSCILADOR HARMÔNICO..... 75

B-3. ESTADOS DE BLOCH..... 77

C. DEDUÇÃO DA EQ. (3-37)..... 80

D. CONSTANTE DE ACOPLAMENTO..... 81

E. CÁLCULO DO NÚCLEO DA EQUAÇÃO MASTER..... 85

REFERÊNCIAS..... 92

INTRODUÇÃO

Na emissão expontânea incoerente observamos que a intensidade da radiação é proporcional ao número de átomos de um sistema atômico interagindo com um campo eletromagnético . Para emissão espontânea coerente a intensidade da radiação é proporcional ao quadrado do número de átomos, e este tipo de emissão espontânea é denominada de superradiância. A superradiância foi proposta por Dicke [3] em 1954, e atualmente há vários trabalhos neste sentido [1,19]. Em 1973, Feld e colaboradores [20] detectaram experimentalmente a superradiância , usando um feixe de laser de $HC\ell$ para excitar uma amostra de átomos de $HC\ell$; a radiação emitida foi um pulso superradiante.

A.V. Andreev et al. [19], em seu artigo de 1980 , fazem um estudo sobre superradiância, mencionando a parte teórica e os experimentos que são feitos para detectar a superradiância. Analisam a superradiância para pequenos comprimentos de onda nos intervalos do raio γ e do raio-X, mostram uma teoria semiclássica da superradiância e tratam o espalhamento Raman neste contexto.

Um interesse de aplicação de superradiância é a obtenção de emissão coerente sem espelhos, onde o uso de espelhos faz o papel de uma cavidade ressonante, que é o caso do laser.

No Capítulo 1, fazemos uma análise qualitativa de superradiância e estabelecemos o modelo de Dicke.

No Capítulo 2, a fim de verificar as condições que produzem superradiância, partimos de um sistema atômico de dois níveis acoplado a um campo eletromagnético. A equação que des

creve este problema é a Equação Master que é uma equação de movimento a qual dá a dinâmica deste processo. Para obtermos a Equação Master usamos a Equação de Liouville que é uma equação de movimento para a matriz densidade, onde a matriz densidade contém todas as propriedades referentes a interação do sistema atômico de dois níveis com um campo de radiação. Obtida a Equação Master, deduzimos a intensidade da radiação calculada nos estados de Dicke e estados de Bloch, e obtemos as condições para ver se há superradiância ou não. O número médio de fótons de um átomo de dois níveis também é obtido fazendo uso da Equação Master e do teorema da regressão quântica, e, é comparado com o resultado clássico da teoria de Weisskopf-Wigner. Usando outro modelo no qual cada átomo de dois níveis é substituído por um oscilador harmônico calculamos a intensidade da radiação nos estados de Fock e nos estados coerentes, observando a existência de superradiância somente para os estados coerentes.

Para ficar consistente com a aproximação de dipolo que fazemos para obter a Equação Master tratamos as dimensões do sistema atômico de dois níveis pequenos comparados ao comprimento de onda da radiação emitida.

No Capítulo 3, introduzindo o termo A^2, $\kappa(a^+ + a)^2$, no Hamiltoniano, obteremos outra Equação Master com cálculos análogos ao do Capítulo 2, e calcularemos a intensidade da radiação para ver se ocorrerá superradiância ou não. O número médio de fótons de um átomo de dois níveis é obtido também neste caso.

Finalmente, no Capítulo 4, apresentamos os resultados e conclusões do presente trabalho.

Nosso tratamento neste trabalho é para átomos de dois níveis, porém na superradiância para vários níveis [1] ocorre uma competição e interferência de várias transições degeneradas ou aproximadamente degeneradas; se os níveis são degenerados ocorrerá efeitos de polarização, os quais não ocorrem para sistemas de dois níveis. A competição entre transições diferentes com polarizações diferentes resultará na emissão de um campo de luz cuja polarização dependerá da preparação inicial do sistema. Também poderá ocorrer uma interferência destrutiva completa entre a emissão de vários átomos que acabará com a emissão superradiante antes que todos os átomos tenham decaído para um estado mais baixo.

CAPÍTULO I

SUPERRADIÂNCIA

Trataremos de uma característica de efeitos coletivos envolvendo a emissão ou absorção de radiação coerente por um grande número de átomos. Consideremos uma amostra de átomos ou moléculas, que comportam-se coletivamente, como um único sistema quântico [1,2]. Havendo coerência entre os átomos diremos que a intensidade da radiação de um sistema de N átomos será proporcional a N^2; este fenômeno chama-se superradiância (fig. 1), que é uma emissão coletiva. Dicke [3] , em 1954, previu a superradiância em seu artigo pioneiro e foi detectada experimentalmente em 1973 por Feld e colaboradores [20].

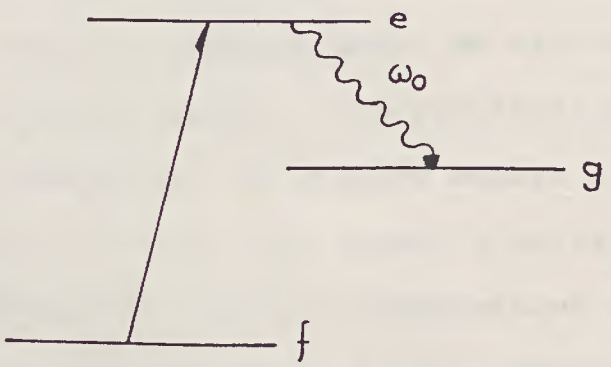


Fig. 1 - Diagrama de superradiância: há um bombeamento na transição f → e e depois uma transição superradiante e → g, com frequência ω_o.

No aparato experimental para detectar superradiância [19], temos um feixe de laser que serve como uma bomba

para excitar os átomos de uma amostra. Então o feixe de radiação emitida do sistema atômico passa por um filtro que seleciona a frequência da emissão superradiante a qual chega até um detector (fig. 2).

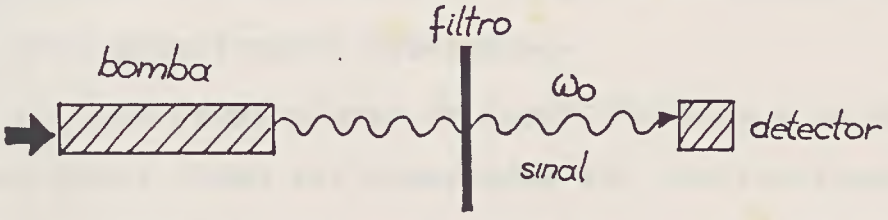


Fig. 2 - Experiência típica para observar superradiância.

A emissão superradiante é um processo cooperativo envolvendo num modo coletivo todos os átomos da amostra. Neste modo uma "ordem" aparece no sistema devido à correlação entre dipolos de diferentes átomos; para momentos de dipolos nulos temos a superradiância de segunda espécie, e , diferentes de zero, temos a superradiância de primeira espécie. Este "ordenamento" de dipolos ocorre a partir de uma desordem total no tempo t=0, quando a emissão começa, as flutuações quânticas do campo eletromagnético do vácuo agem sobre os átomos independentes, ou seja, surgem as correlações dipolo-dipolo através de uma espécie de quebra de simetria, apresentando aspecto quântico e clássico. No primeiro estágio, próximo do tempo inicial, t=0, a superradiância tem caráter quântico porque a evolução do sistema começa do campo de vácuo; já, no segundo estágio, quando as correlações dipolo-dipolo aparecem, torna-se "clássico" devido à emissão subsequente ser decorrente da irradiação de um arranjo orde

nado de dipolos.

Em muitos casos a emissão superradiante não envolve dois níveis não degenerados e e g mas transições atômicas entre subníveis degenerados ou aproximadamente degenerados. Desta forma, a superradiância resulta da competição entre a emissão de componentes do campo tendo diferentes frequências ou polarizações diferentes.

As propriedades de superradiância e as condições sobre as quais podem ser observadas são qualitativamente diferentes daquelas de emissão espontânea ordinária e também de emissão estimulada. As características de superradiância podem ser vistas quando assumimos que há N átomos de dois níveis num cilindro de comprimento L (macroscópico) e área A que é longo ($L >> \sqrt{A}$) e aberta em ambas as extremidades ($V = AL$ e $n = N/V$). Inicialmente, todos os átomos são colocados no estado superior por um pulso curto de bombeamento ($\tau_{bomba} < \tau_c$), onde τ_c é a largura de linha do pico superradiante de maneira que o estado inicial do sistema é incoerente, isto é, não há correlações entre os momentos de dipolos nas transições dos átomos. Então, o sistema de átomos com uma inversão de população onde os átomos, inicialmente, no estado fundamental, agora, estão no estado excitado, começa a decair livremente emitindo radiação; a natureza do decaimento depende das relações entre os tempos característicos T_1, T_2, τ_c e $\tau = L/C$, onde τ é o tempo de trânsito de um fóton através do meio; T_1 é o tempo de decaimento espontâneo do sistema atômico e T_2 é o tempo de relaxação do momento de dipolo.

Assumiremos, primeiramente, que a densidade do número de átomos obedece a desigualdade:

$$T_1 = \left(\frac{4}{3}\frac{d^2\omega_o^3}{\hbar c^3}\right)^{-1} < \tau_c \sim \left(\frac{2\,nd^2\omega_o}{\hbar\,\tau^{-1}}\right)^{-1}, \qquad (1\text{-}1)$$

onde d é o elemento de matriz de dipolo da transição. Então cada átomo decai independentemente dos outros, e, a energia armazenada no sistema atômico é irradiada num tempo característico T_1 de uma forma isotrópica (fig. 3b); e , temos uma emissão espontânea incoerente.

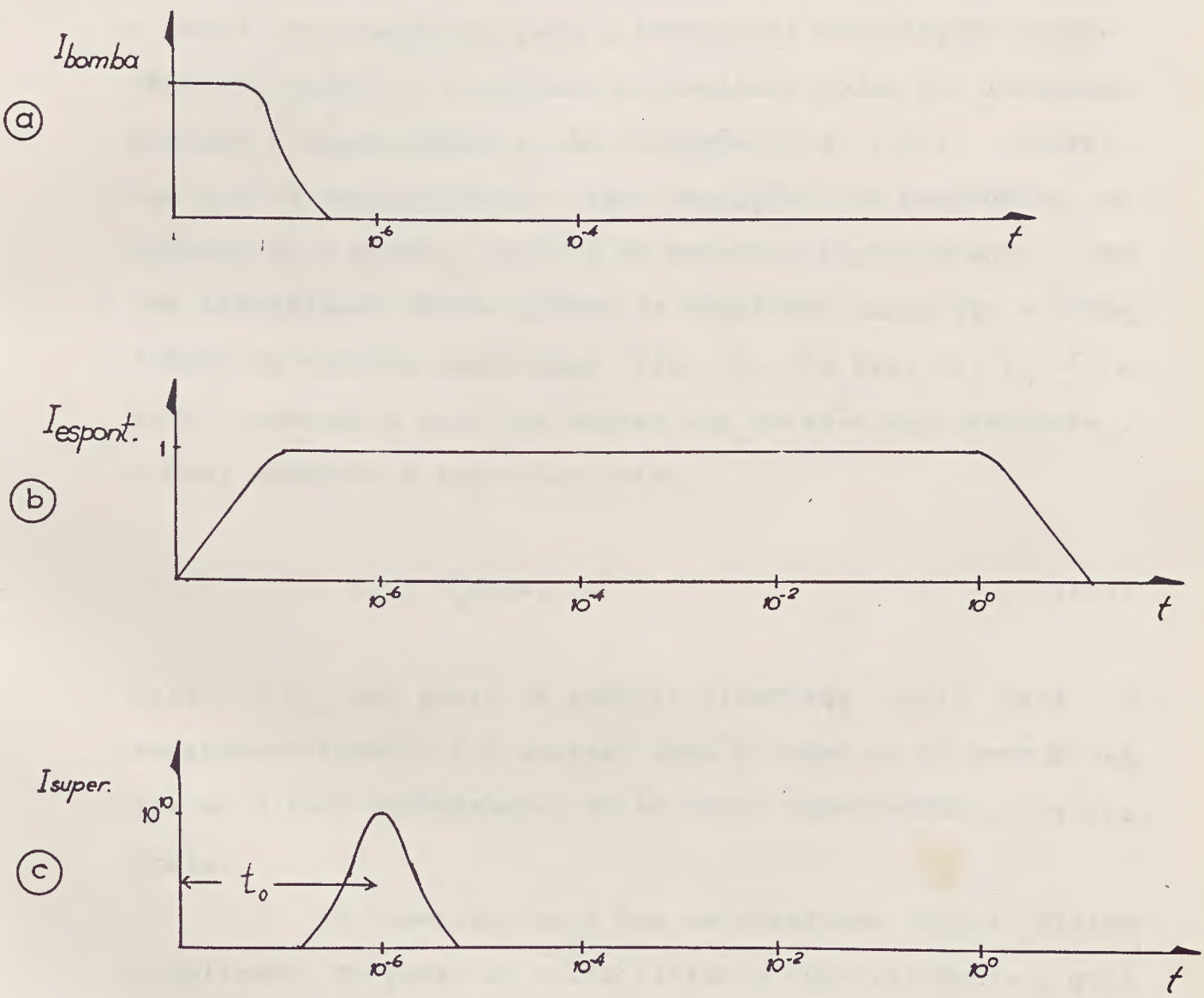


Fig. 3 - Comparação de superradiância e emissão espontânea incoerente. A escala do tempo é logarítmica.

Agora, consideraremos,

$$\tau << \tau_c << T_1, T_2, \qquad (1\text{-}2)$$

o lado direito da desigualdade acima significa que os processos coletivos ocorrem mais rapidamente que a relaxação nos átomos individuais e, o lado esquerdo, significa que os fótons deixam o volume em consideração num tempo mais curto que o tempo característico para a indução de correlações interatômicas; assim, os processos estimulados podem ser ignorados durante a superradiância. As condições, Eq. (1-2), determinam que há superradiância. Tais condições, se permanecem um sistema de N átomos, emitirá um pulso de superradiância com uma intensidade várias ordens de magnitude maior que a intensidade da emissão espontânea (fig. 3c). Na fig. 3c, t_o é o tempo necessário para que ocorra uma emissão superradiante , o qual descreve a superradiância,

$$t_o \sim \tau_c \ell n\, N. \qquad (1\text{-}3)$$

Para $\tau \sim \tau_c$, uma parte da energia irradiada volta para o subsistema atômico e a emissão toma a forma de um trem de pulsos de altura decrescente; então temos superradiância oscilatória.

A superradiância tem um interesse duplo: físico e aplicado. Do ponto de vista físico a superradiância a qual é observada experimentalmente, é um exemplo de comportamento cooperativo de um sistema de N partículas (N >> 1) que estão interagindo com um campo eletromagnético, tendo uma explica-

ção teórica satisfatória; ainda que existam problemas em aberto a serem estudados [1,19]. Do ponto de vista de aplicações, a superradiância é de grande interesse porque é um método que permite produzir emissão coerente num sistema sem espelhos ; enquanto que num sistema com espelhos, temos uma cavidade ressonante a qual funciona como um laser amplificando o pulso de radiação.

A fim de estudar as propriedades de superradiância enfatizaremos agora, os estados de Dicke dos quais faremos uso no Capítulo 2, onde obteremos a intensidade de radiação que é um meio de investigar a superradiância.

Consideremos um ensemble de N átomos idênticos de dois níveis, sendo estes rotulados pelos índices 1,2, ... , i,...,N. Definiremos o sistema de dois níveis, pelos estados $|e\rangle$ e $|g\rangle$ (fig. 4).

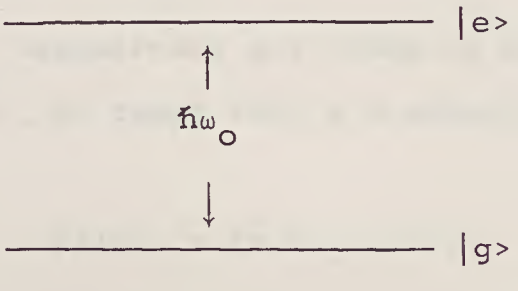


Fig. 4 - Sistema de dois níveis.

Os dois níveis estão separados por um intervalo de energia $\hbar\omega_o$, e o comprimento de onda da transição superradiante é:

$$\lambda_o = \frac{2\pi C}{\omega_o} \qquad (1\text{-}4)$$

O sistema atômico é descrito por operadores não diagonais $S_i^{\pm}$, de levantamento e abaixamento,

$$S_i^+ = |e><g| \quad , \qquad S_i^- = |g><e| \quad , \tag{1-5}$$

respectivamente, e o operador diagonal,

$$S_i^z = \frac{1}{2}\left[|e><e| - |g><g|\right] \quad , \tag{1-6}$$

os quais obedecem as relações de comutação,

$$\left[S_i^z, S_j^{\pm}\right] = \pm \delta_{ij} S_i^{\pm} \quad , \tag{1-7}$$

$$\left[S_i^+, S_j^-\right] = 2 \delta_{ij} S_i^z \quad . \tag{1-8}$$

Assumiremos que todos os átomos estão no nível superior $|e>$, no tempo t=0, e o estado do sistema atômico é:

$$|\Psi(0)> = |e,e,\ldots,e>, \tag{1-9}$$

e considerando que estão localizados num volume cujas dimensões lineares são pequenas comparadas com o comprimento de onda da radiação, e, a evolução do sistema é somente devido ao acoplamento dos átomos com o campo de radiação. E o sistema atômico é simétrico em relação a troca de quaisquer dois átomos, quando é antissimétrico não existe superradiância |19|. Queremos observar que a evolução do sistema deve permanecer restrita a um subespaço de Hilbert invariante por todas as

permutações.

Como os operadores $S_i^{\pm}$ e S_i^z, definidos anteriormente, são análogos às matrizes de spin de Pauli, descreveremos cada átomo de dois níveis como tendo spin 1/2. Qualquer estado de N átomos, invariante por permutações, é isomorfo por uma superposição simétrica de N estados de spin 1/2 que é um auto-estado do momento angular com valor máximo de $J = N/2$. Existem N+1 destes estados obtidos pela aplicação do operador $\sum_i S_i^-$ sobre o estado inicial $|\psi(0)\rangle$:

$$|JM\rangle = \sqrt{\frac{(J+M)!}{N!(J-M)!}} \left(\sum_i S_i^-\right)^{J-M} |e,e,\ldots,e\rangle, \qquad (1\text{-}10)$$

com $-J < M < J$. Este estado é completamente simétrico, onde J+M átomos estão no nível superior $|e\rangle$, e J-M átomos no nível inferior $|g\rangle$, e representamo-lo, como,

$$|JM\rangle = S|e,e,\ldots,e,g,g,\ldots,g\rangle, \qquad (1\text{-}11)$$

onde S é o "operador de simetrização".

Para estudar as propriedades coletivas do sistema atômico, introduzimos os operadores coletivos,

$$S^{\pm} = \sum_i S_i^{\pm}, \qquad (1\text{-}12)$$

$$S^z = \sum_i S_i^z, \qquad (1\text{-}13)$$

$$S^2 = \frac{1}{2}(S^+S^- + S^-S^+) + (S^z)^2, \qquad (1\text{-}14)$$

que quando aplicados no estado $|JM\rangle$, obtemos as relações,

$$S^z|JM\rangle = M|JM\rangle \ , \tag{1-15}$$

$$S^2|JM\rangle = J(J+1)/JM\rangle, \tag{1-16}$$

$$\langle JM| \sum_i S_i^+ S_i^- |JM\rangle = J+M, \tag{1-17}$$

$$\langle JM| \sum_i S_i^- S_i^+ |JM\rangle = J-M \ , \tag{1-18}$$

onde $\sum_i S_i^+ S_i^-$ e $\sum_i S_i^- S_i^+$ são os operadores número de átomos do estado superior e inferior, respectivamente.

Na literatura corrente dá-se o nome ao estado $|JM\rangle$ de Estado de Dicke. Na evolução do sistema atômico coletivo ocorrem emissões nos $2J + 1 = N + 1$ níveis equidistantes (fig. 5). No tempo t=0, obtemos o estado $|J,M = J\rangle \equiv |e,e,\ldots,e\rangle$, e o sistema evolui até o estado $|J,M =- J\rangle \equiv |g,g,\ldots,g\rangle$, passando pelo estado $|J,M = 0\rangle \equiv S|g,g,\ldots,g,e,e,\ldots,e\rangle$, onde temos metade dos átomos no nível inferior e metade no nível superior.

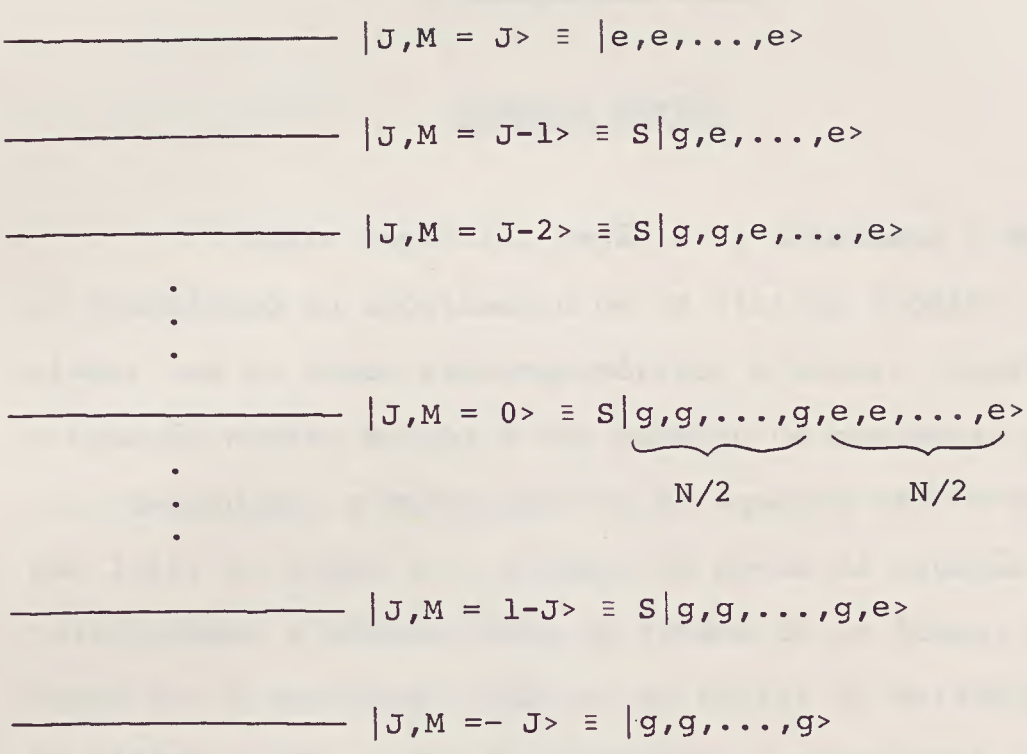


Fig. 5 - Esquema de transições atômicas de N+1 estados simétricos |J,M>.

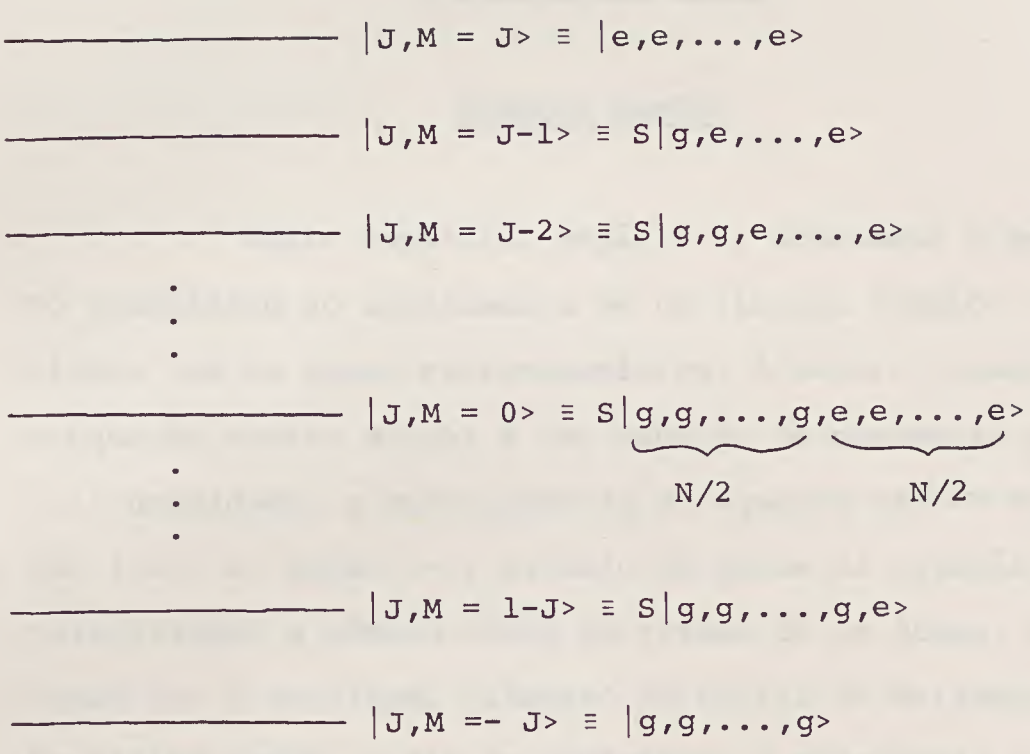


Fig. 5 - Esquema de transições atômicas de N+1 estados simétricos $|J,M\rangle$.

C A P Í T U L O 2

EQUAÇÃO MASTER

Neste capítulo, seção 2-1, obteremos o Hamiltoniano quantizado do acoplamento de um sistema atômico de dois níveis com um campo eletromagnético. A seguir, construiremos a Equação Master a qual é uma equação de movimento para a matriz densidade, e deduziremo-la da equação de Liouville (seção 2-2). Na seção 2-3, estando de posse da Equação Master , calcularemos o número médio de fótons de um átomo, e compararemos com o resultado clássico da teoria de Weisskopf-Wigner. Na última seção, a fim de investigar a existência ou não de superradiância no sistema atômico, calcularemos a intensidade de radiação fazendo uso de estados de Dicke, estados de Fock e estados coerentes.

2-1. OBTENÇÃO DO HAMILTONIANO

Consideramos um sistema atômico de dois níveis interagindo com um reservoir, o qual é um campo de radiação eletromagnético. O Hamiltoniano total [4], para tal problema, é dado por:

$$H_T = H_A + H_{CE} + H_I \ , \qquad (2\text{-}1)$$

onde H_A é o Hamiltoniano do sistema atômico livre, dado por,

$$H_A = \hbar \sum_{j\mu} \omega_{j\mu} C^{+}_{j\mu} C_{j\mu} \ , \qquad (2\text{-}2)$$

onde o índice μ vai de 1 até N, sendo N o número de átomos e j é o número de níveis atômicos. H_{CE} é o Hamiltoniano do campo eletromagnético,

$$H_{CE} = \hbar \sum_{js} \omega_j \, a^+_{js} \, a_{js} \, , \tag{2-3}$$

onde o índice s representa a polarização e j os modos do campo; a^+ e a, são operadores de criação e aniquilação, respectivamente, satisfazendo as relações de comutação (Apêndice B),

$$[a_{j\lambda}, \, a^+_{k\ell}] = \delta_{jk}\delta_{\lambda\ell} \, , \tag{2-4}$$

$$[a_{j\lambda}, \, a_{k\ell}] = [a^+_{j\lambda}, \, a^+_{k\ell}] = 0 \tag{2-5}$$

e ω_j é a frequência do campo eletromagnético. H_I é o Hamiltoniano da interação dos átomos com o campo de radiação,

$$H_I = H_{I,1} + H_{I,2} \, , \tag{2-6}$$

onde

$$H_{I,1} = -\frac{e}{m} \sum_{\lambda,j,\ell} \left(\frac{2\pi\hbar}{\omega_\lambda}\right)^{1/2} \times$$

$$\times \, c^+_j c_\ell (a^+_\lambda + a_\lambda) \int d^3x \phi^*_j(x) \vec{\mu}_\lambda(x) . \vec{p} \, \phi_\ell(x) \, , \tag{2-7}$$

$$H_{I,2} = -\frac{e^2}{m} \sum_{\lambda,\lambda',j,\ell} \frac{\pi\hbar}{\sqrt{\omega_\lambda \omega_{\lambda'}}} \times$$

$$x \int d^3x \phi_j^*(x) \vec{\mu}_\lambda(x) \vec{\mu}_{\lambda'}(x) \phi_\ell(x) (a_\lambda^+ + a_\lambda)(a_{\lambda'}^+ + a_{\lambda'}) C_j^+ C_\ell , \qquad (2\text{-}8)$$

com os operadores fermiônicos C's, satisfazendo as relações de anticomutação (Apêndice B),

$$\left[C_k, C_\ell^+\right]_+ = \delta_{k\ell} , \qquad (2\text{-}9)$$

$$\left[C_k, C_\ell\right]_+ = \left[C_k^+, C_\ell^+\right]_+ = 0 , \qquad (2\text{-}10)$$

os vetores $\vec{\mu}_\lambda(x)$ são ondas planas,

$$\vec{\mu}_{\lambda\alpha}(x) = \frac{\hat{\varepsilon}_\alpha}{L^{3/2}} e^{i\vec{k}_\lambda . x} , \qquad (2\text{-}11)$$

os quais geram a base para a decomposição em série de Fourier dos modos do campo. $\hat{\varepsilon}_\alpha$ é o vetor polarização, que define um conjunto ortonormal destrógiro, $\hat{\varepsilon}_\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \hat{k})$, e L é a dimensão linear do sistema atômico. Os operadores C's estão na expansão dos operadores do campo atômico, $\hat{\psi}$ e $\hat{\psi}^+$, na segunda quantização,

$$\hat{\psi}(\vec{x}) = \sum_k \phi_k(\vec{x}) C_k , \quad \hat{\psi}^+(\vec{x}) = \sum_k \phi_k^*(\vec{x}) C_k^+ , \qquad (2\text{-}12)$$

onde os $\phi_k(\vec{x})$ são ondas planas,

$$\phi_k(\vec{x}) = L^{-3/2} e^{i\vec{k}.\vec{x}} . \qquad (2\text{-}13)$$

Os Hamiltonianos, Eqs. (2-2), (2-7) e (2-8), provêm da segunda quantização do Hamiltoniano,

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2, \tag{2-14}$$

onde $\vec{p}$ é o momento da partícula e $\vec{A}$ é o potencial vetor [4]. E o Hamiltoniano dado pela Eq. (2-3), é a quantização do campo eletromagnético livre [13].

Escrevemos a Eq. (2-7), como

$$H_{I,1} = \hbar \sum_{j\ell\lambda\mu} g_{\lambda j\ell\mu}\, C^{+}_{j\mu} C_{\ell\mu}\left(a^{+}_{\lambda} + a_{\lambda}\right), \tag{2-15}$$

onde a constante de acoplamento (Apêndice E), é dada por

$$g_{j\ell\lambda\mu} = -\left(\frac{e}{mh}\right)\left(\frac{2\pi\hbar}{\omega_{\lambda}}\right)^{1/2} \int d^3x \phi^{*}_{j\mu}(x)\vec{\mu}_{\lambda\alpha}(x).\vec{p}\phi_{\ell\mu}(x). \tag{2-16}$$

Substituindo as Eqs. (2-2), (2-3) e (2-15) na Eq. (2-1), omitindo o termo $H_{I,2}$, obtemos:

$$\begin{aligned} H = {} & \hbar \sum_{j\mu} \omega_{j\mu} C^{+}_{j\mu} C_{j\mu} + \\ & + \hbar \sum_{j\ell\lambda\mu} g_{j\ell\lambda\mu}\, C^{+}_{j\mu} C_{\mu}\left(a^{+}_{\lambda} + a_{\lambda}\right) + \\ & + \hbar \sum_{j's} \omega_{j'}\, a^{+}_{j's}\, a_{j's}\,, \end{aligned} \tag{2-17}$$

e para um sistema atômico de dois níveis, a equação acima é escrita como,

$$H = \hbar \sum_{\mu} (\omega_1 C_{1\mu}^{+} C_{1\mu} + \omega_2 C_{2\mu}^{+} C_{2\mu}) +$$

$$+ \hbar \sum_{\lambda\mu} [g_{11\lambda\mu} C_{1\mu}^{+} C_{1\mu} + g_{21\lambda\mu} C_{2\mu}^{+} C_{1\mu} +$$

$$+ g_{12\lambda\mu} C_{1\mu}^{+} C_{2\mu} + g_{22\lambda\mu} C_{2\mu}^{+} C_{2\mu}](a_{\lambda}^{+} + a_{\lambda}) +$$

$$+ \hbar \sum_{j's} \omega_{j'} a_{j's}^{+} a_{j's} \cdot \qquad (2\text{-}18)$$

Pela paridade da função g, temos que:

$$g_{\ell\ell\lambda\mu} = 0 \ , \qquad (2\text{-}19)$$

e pela Eq. (2-16),

$$g_{j\ell\lambda\mu} = g^{*}_{\ell j\lambda\mu} \cdot \qquad (2\text{-}20)$$

De acordo com as equações acima, a Eq. (2-18) resulta,

$$H = \hbar \sum_{\mu} (\omega_1 C_{1\mu}^{+} C_{1\mu} + \omega_2 C_{2\mu}^{+} C_{2\mu}) +$$

$$+ \hbar \sum_{\lambda\mu} [g_{12\lambda\mu} C_{1\mu}^{+} C_{2\mu} + g^{*}_{12\lambda\mu} C_{2\mu}^{+} C_{1\mu}](a_{\lambda}^{+} + a_{\lambda}) +$$

$$+ \hbar \sum_{j's} \omega_{j'} a_{j's}^{+} a_{j's} \cdot \qquad (2\text{-}21)$$

Como o conjunto de operadores fermiônicos

$$C_1^{+}C_2, \ C_2^{+}C_1, \ \frac{1}{2}(C_2^{+}C_2 - C_1^{+}C_1),$$

satisfazem as relações de comutação de SU(2), então identifi
camos

$$S^{+} \longleftrightarrow C_2^{+}C_1$$

$$S^{-} \longleftrightarrow C_1^{+}C_2$$

$$S^{z} \longleftrightarrow \frac{1}{2}(C_2^{+}C_2 - C_1^{+}C_1), \qquad (2\text{-}22)$$

$$S_i = \frac{h}{2}\,\sigma_i, \qquad (2\text{-}23)$$

onde σ_i são as matrizes de Pauli.

Considerando, por outro lado, que a energia dos dois níveis são $-\hbar\omega_1$ e $\hbar\omega_2$, respectivamente (fig. 6).

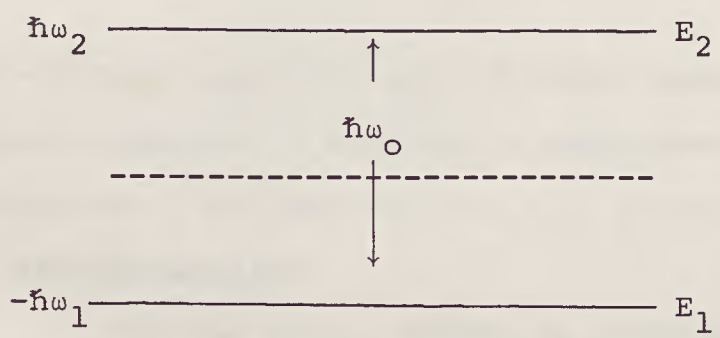


Fig. 6 - Sistema de dois níveis.

A energia total dos dois níveis é,

$$E = E_1 + E_2 \ , \qquad (2\text{-}24)$$

onde $E_1 = -\frac{\hbar}{2}\omega_o$ e $E_2 = \frac{\hbar}{2}\omega_o$, resultando,

$$\omega_1 + \omega_2 = 0. \tag{2-25}$$

O operador número, para um átomo de dois níveis, é escrito como,

$$\hat{N} = \sum_{i=1}^{2} C_i^+ C_i . \tag{2-26}$$

Tendo em vista as Eqs. (2-22), (2-25) e (2-26), da Eq. (2-21), obtemos:

$$H = \hbar\omega \sum_{\mu} S_{\mu}^{z} +$$

$$+ \hbar \sum_{\lambda\mu} (g_{12\lambda\mu} S^- + g^*_{12\lambda\mu} S^+)(a_\lambda^+ + a_\lambda) +$$

$$+ \hbar \sum_{js} \omega_i a_{js}^+ a_{js} , \tag{2-27}$$

onde o primeiro termo do lado direito representa a energia do sistema atômico; o segundo, o acoplamento do campo eletromagnético com o sistema atômico e, o terceiro, a energia do campo eletromagnético.

Supondo que os átomos do sistema atômico comportam-se como dipolos, agora, consideraremos a interação dipolo-dipolo entre eles. O dipolo associado ao μ-ésimo átomo produz um campo elétrico,

$$\vec{E}_\mu(\vec{x}) = \frac{3\hat{n}(\vec{p}_\mu . \hat{n}) - \vec{p}_\mu}{|\vec{x} - \vec{x}_\mu|^3} , \tag{2-28}$$

e a energia devido a interação do ℓ-ésimo átomo com o campo do μ-ésimo átomo é,

$$W_{\ell\mu} = -\vec{p}_\ell \cdot \vec{E}_\mu(x) = \frac{\vec{p}_\ell \cdot \vec{p}_\mu - 3(\vec{p}_\mu \cdot \hat{n})(\vec{p}_\ell \cdot \hat{n})}{|\vec{x}_\ell - \vec{x}_\mu|^3} , \qquad (2\text{-}29)$$

onde o dipolo $\vec{p}$ é considerado na posição $\vec{x}$, e $\hat{n}$ é um vetor unitário na direção da linha de interação entre os dois dipolos, isto é,

$$\hat{n} = \frac{\vec{x} - \vec{x}_\mu}{|\vec{x} - \vec{x}_\mu|} . \qquad (2\text{-}30)$$

Escrevemos a Eq. (2-29) como,

$$W_{\ell\mu} = \{\vec{p}_\ell \cdot \vec{p}_\mu - \frac{3(\vec{p}_\ell \cdot \vec{r}_{\ell\mu})(\vec{p}_\mu \cdot \vec{r}_{\ell\mu})}{r_{\ell\mu}^2}\} \frac{1}{r_{\ell\mu}^3} , \quad \ell \neq \mu , \qquad (2\text{-}31)$$

onde

$$r_{\ell\mu} = |\vec{r}_\ell - \vec{r}_\mu| , \qquad (2\text{-}32)$$

$$\vec{r}_{\ell\mu} = \vec{x}_\ell - \vec{x}_\mu . \qquad (2\text{-}33)$$

Para quantizar a energia de interação dipolo-dipolo, usamos o operador de dois corpos, em segunda quantização,

$$H' = \frac{1}{2} \iint d^3x d^3x' \, \hat{\psi}^+(x) \hat{\psi}^+(x') \hat{W} \hat{\psi}(x') \hat{\psi}(x) , \qquad (2\text{-}34)$$

onde os operadores de campo atômico $\hat{\psi}^+$ e $\hat{\psi}$ são dados pela Eq. (2-12).

Fazendo a aproximação de que $\hat{W}$ varia muito pouco dentro da região de integração, considerando $r_{\ell\mu} >> \vec{x}_o$ (Apêndice E), a Eq. (2-34) resulta,

$$H' = \frac{1}{2}W \iint d^3x d^3x' \hat{\psi}^+(x)\ \hat{\psi}^+(x')\ \hat{\psi}(x')\ \hat{\psi}(x). \qquad (2\text{-}35)$$

Substituindo a Eq. (2-12) na Eq. (2-35), e usando a ortogonalidade das funções ϕ, obtemos:

$$H' = \frac{1}{2}W_{\ell\mu} \sum_{\alpha\beta} C^+_{\alpha\ell} C^+_{\beta\mu} C_{\alpha\mu} C_{\beta\ell}\ , \qquad (2\text{-}36)$$

e como estamos tratando com átomos de dois níveis,

$$H' = \frac{1}{2}W_{\ell\mu}(C^+_{1\ell}C^+_{1\mu}C_{1\mu}C_{1\ell} + C^+_{2\ell}C^+_{1\mu}C_{2\mu}C_{1\ell} +$$

$$+ C^+_{1\ell}C^+_{2\mu}C_{1\mu}C_{2\ell} + C^+_{2\ell}C^+_{2\mu}C_{2\mu}C_{2\ell}). \qquad (2\text{-}37)$$

Pelas relações de anticomutação, Eqs. (2-9) e (2-10), a equação acima resulta,

$$H' = W_{\ell\mu}\ C^+_{2\ell}\ C_{1\ell}\ C^+_{1\mu}\ C_{2\mu}\ , \qquad (2\text{-}38)$$

e pela Eq. (2-22), obtemos,

$$H' = W_{\ell\mu}\ S^+_{\ell}\ S^-_{\mu}\ . \qquad (2\text{-}39)$$

Substituindo a equação acima na Eq. (2-27), resulta

$$H = \hbar\omega \sum_{\mu} S_{\mu}^{z} +$$

$$+ \hbar \sum_{\mu} (g_{12\lambda\mu} S^{-} + g^{*}_{12\lambda\mu} S^{+})(a_{\lambda}^{+} + a_{\lambda}) +$$

$$+ \hbar \sum_{js} \omega_{j} a_{js} a_{js} + \sum_{\ell\mu} W_{\ell\mu} S_{\ell}^{+} S_{\mu}^{-} . \qquad (2\text{-}40)$$

Os cálculos feitos na Eq. (2-7), fazemo-los análogos na Eq. (2-8), resultando

$$H_{I,2} = \sum_{\lambda} \kappa_{\lambda} (a_{\lambda}^{+} + a_{\lambda})^{2} , \qquad (2\text{-}41)$$

onde κ_{λ} é a constante de acoplamento. A Eq. (2-41) é a quantização do termo

$$\frac{e^{2}}{2mc^{2}} A^{2} ,$$

da Eq. (2-14). Então, o Hamiltoniano dado pela Eq. (2-40) mais o termo dado pela Eq. (2-41) resulta

$$H = \hbar\omega \sum_{\mu} S_{\mu}^{z} +$$

$$+ \hbar \sum_{\lambda\mu} (g_{12\lambda\mu} S^{-} + g^{*}_{12\lambda\mu} S^{+})(a_{\lambda}^{+} + a_{\lambda}) +$$

$$+ \hbar \sum_{js} \omega_{j} a_{js}^{+} a_{js} + \sum_{\ell\mu} W_{\ell\mu} S_{\ell}^{+} S_{\mu}^{-} +$$

$$+ \sum_{\lambda} \kappa_{\lambda} (a_{\lambda}^{+} + a_{\lambda})^{2} . \qquad (2\text{-}42)$$

A.A.S. Brito e W.F. Wreszinski |18| fazem um tratamento termodinâmico da transição de fase superradiante, tentando saber se o termo A^2 permite ainda emissão superradiante, e usam um modelo de Dicke generalizado com um Hamiltoniano com as constantes de acoplamento simplificados e um único modo:

$$H = \varepsilon S_N^z + \nu a^+ a + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} (S_N^+ A + S_N^- a^+) + \frac{\mu}{\sqrt{N}} (S_N^+ a^+ + S_N^- a) + \kappa (a + a^+)^2 , \tag{2-43}$$

onde $\mu = t\lambda$; $0 < t < 1$, ε, ν e k são constantes positivas reais, e $S_N^{\pm,z}$ são os operadores coletivos definidos no Capítulo 1 (Eqs. (1-12), (1-13) e (1-14)).

Outro modelo no qual representamos cada um dos átomos como um oscilador harmônico, o Hamiltoniano correspondente é obtido analogamente, e, é dado por

$$H = \hbar\omega \sum_{\mu} b_\mu^+ b_\mu + \hbar \sum_{\lambda\mu} (g_{\lambda\mu} b_\lambda + g_{\lambda\mu}^* b_\lambda^+)(a_\lambda^+ + a_\lambda) + \hbar \sum_{js} \omega_j a_{js}^+ a_{js} , \tag{2-44}$$

onde b_λ e b_λ^+ são operadores de boson de aniquilação e criação, respectivamente; os operadores a's comutam com os operadores b's porque estão agindo em espaços diferentes. Na equação acima, o primeiro termo do lado direito é a energia dos osciladores harmônicos; o segundo, a energia de interação dos

osciladores com o campo eletromagnético e, o terceiro é a energia do campo eletromagnético.

2-2. OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO MASTER

Deduziremos a Equação Master [5] que descreve a dinâmica do sistema atômico de dois níveis interagindo com um campo eletromagnético. Para obtermos a Equação Master usamos a Equação de Liouville que é uma equação de movimento para a matriz densidade a qual contém as propriedades do problema em estudo [7], isto é, através dela podemos obter informações a respeito da interação do sistema atômico com o campo eletromagnético.

Partimos do Hamiltoniano dado pela Eq. (2-40),

$$H = \omega_o \sum_{\mu} S_{\mu}^{z} + \sum_{\lambda\mu} (g_{\lambda\mu} S^{-} + g_{\lambda\mu}^{*} S^{+})(a_{\lambda}^{+} + a_{\lambda}) +$$

$$+ \sum_{js} \omega_j \, a_{js}^{+} \, a_{js}, \quad \hbar = 1 , \tag{2-45}$$

onde não consideramos a energia de interação dipolar. Pela equação acima escrevemos,

$$H_S = \omega_o \sum_{\mu} S_{\mu}^{z} , \tag{2-46}$$

$$H_R = \sum_{js} \omega_j \, a_{js}^{+} \, a_{js} , \tag{2-47}$$

$$H_{int} = \sum_{\lambda\mu} (g_{\lambda\mu} S^{-} + g_{\lambda\mu}^{*} S^{+})(a_{\lambda}^{+} + a_{\lambda}) . \tag{2-48}$$

A seguir, obteremos uma equação para a matriz densidade. Seja um sistema quântico (sistema atômico), S, mantido fora do equilíbrio térmico e acoplado a outros sistemas quânticos (reservoir), R, com os quais pode trocar energia, massa, momento, etc, estamos interessados nas propriedades do sistema S, por isso eliminamos as variáveis ou operadores do sistema R.

Denotamos o operador densidade do sistema acoplado S+R por W(t) e o decompomos como

$$W(t) = PW(t) + (1-P)\,W(t), \tag{2-49}$$

onde P é o operador projeção, definido por

$$P^2 = P, \tag{2-50}$$

o qual não é um operador no espaço de Hilbert de vetores de onda mas age sobre os operadores neste espaço.

A Equação de Liouville ou equação da matriz densidade é dada por,

$$\dot{W}(t) = -\,iLW(t) = -\,i[H,W(t)], \tag{2-51}$$

onde L é o operador de Liouville.

Multiplicando a Eq. (2-51) à direita por P e (1-P), e usando a Eq. (2-49), obtemos

$$P\dot{W} = -\,iPLPW - iPL(1-P)W, \tag{2-52}$$

$$(1-P)\dot{W} = -\,i(1-P)LPW - i(1-P)L(1-P)W. \tag{2-53}$$

A solução da Eq. (2-53) é,

$$(1-P)W(t) = \exp -[i(1-P)Lt](1-P)W(0) -$$

$$- i \int_0^t d\tau \exp[- i(1-P)L\tau](1-P)LPW(t-\tau). \qquad (2\text{-}54)$$

Substituindo a Eq. (2-83) na Eq. (2-81), obtemos a equação master generalizada de Zwanzig |22|,

$$\dot{PW}(t) =- i\, PLPW(t) - \int_0^t d\tau\, PL \exp[- i(1-P)L\tau](1-P)LPW(t-\tau) -$$

$$- i\, PL \exp[- i(1-P)Lt](1-P)W(0). \qquad (2\text{-}55)$$

Observamos que PW é a parte diagonal de W(t) numa certa representação, definindo P por,

$$P = R\, Tr_R, \quad Tr_R\, R = 1 , \qquad (2\text{-}56)$$

$$PW(t) = R\, Tr_R\, W(t) = R\, \rho(t) , \qquad (2\text{-}57)$$

onde R é um operador no subespaço pertencente ao resevoir no espaço de Hilbert, podendo ser escolhido arbitrariamente e , $\rho(t)$ é o operador estatístico.

Decompomos L em,

$$L = L_S + L_R + L_{int} , \qquad (2\text{-}58)$$

onde L_S refere-se ao sistema S, L_R é o operador de Liouville do reservoir e L_{int} é a interação entre o sistema S e o re-

servoir R.

As seguintes relações nos são úteis para facilitar os cálculos da Eq. (2-55):

$$P(L_S + L_R) = L_S P, \tag{2-59}$$

$$P(1-P) = 0, \tag{2-60}$$

$$PL_{int} P = 0 , \tag{2-61}$$

então, de acordo com as Eqs. (2-56) até (2-61), a Eq. (2-55) resulta,

$$\dot{\rho}(t) = - iL_S\rho(t) - i\, Tr_R(L_{int}\, R\, \rho(t)) + \int_o^t d\tau\, Q(\tau)\, \rho(t-\tau) + I(t) , \tag{2-62}$$

com

$$I(t) =- i\, Tr_R\{L_{int}\, exp[- i(1-P)Lt](1-P)W(0)\} , \tag{2-63}$$

$$Q(\tau) =- Tr_R\{L_{int}\, exp[- i(1-P)L\tau][L_{int} + L_R]R\} . \tag{2-64}$$

A equação para o operador estatístico, Eq. (2-62), na representação de interação, resulta

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) =- \int_o^t dt'\, Tr_R\, Q(t',t), \tag{2-65}$$

onde

$$Q(t',t) = e^{iL_s t}\{L_{int}\, e^{-i(t-t')L_o}\, L_{int}\, \rho_R(0)\rho_s(t')\}, \tag{2-66}$$

$$L_o = L_S + L_R\ , \tag{2-67}$$

e como o sistema é pequeno comparado ao reservoir, assumimos o operador do reservoir no equilíbrio:

$$R = \rho_R(0)\ . \tag{2-68}$$

Na Eq. (2-94) queremos obter $Tr_R\, Q(t',t)$, para isto fazemos de uma forma detalhada no Apêndice E, resultando

$$Tr_R\, Q_I(t-t') = \gamma_{\lambda\mu\mu'}\{S^+_{\mu'}(t')\left[S^+_\mu(t),\ \tilde{\rho}_S(t')\right] -$$

$$- \left[\tilde{S}^-_\mu(t),\ \tilde{S}^+_{\mu'}(t')\ \tilde{\rho}_S(t')\right] - \left[\tilde{S}^+_\mu(t),\ \tilde{S}^-_{\mu'}(t')\tilde{\rho}_S(t')\right] +$$

$$+ \tilde{S}^-_{\mu'}(t')\left[\tilde{S}^-_\mu(t),\ \tilde{\rho}_S(t')\right]\} e^{-i(t-t')\omega_\lambda}\delta_{\lambda\lambda'}\ , \tag{E-24}$$

$$Tr_R\, Q_{II}(t-t') = \gamma_{\lambda\mu\mu'}\{\left[S^+_\mu(t),\ \tilde{\rho}_S(t')\right]\ \tilde{S}^+_{\mu'}(t') -$$

$$- \left[\tilde{S}^-_\mu(t),\ \tilde{\rho}_S(t')\ \tilde{S}^+_{\mu'}(t')\right] - \left[\tilde{S}^+_\mu(t),\ \tilde{\rho}_S(t')\ \tilde{S}^-_{\mu'}(t')\right] +$$

$$- \left[\tilde{S}^-_\mu(t),\ \tilde{\rho}_S(t')\right]\tilde{S}^-_{\mu'}(t')\} e^{i(t-t')\omega_\lambda}\delta_{\lambda\lambda'}. \tag{E-27}$$

Para obter a dependência temporal dos operadores $\tilde{S}^\pm$, usamos a equação de movimento de Heisenberg,

$$\frac{d}{dt}\,\tilde{S}^{\pm}(t) = \frac{1}{i}\,[\tilde{S}^{\pm}(t),\, H]\ , \quad h = 1, \tag{2-69}$$

cuja solução é,

$$\tilde{S}^{\pm}(t) = S^{\pm}(0)\ e^{\pm i\omega t}\ . \tag{2-70}$$

Substituindo o primeiro termo do lado direito da Eq. (E-24) na Eq. (2-65), e usando a Eq. (2-70), resulta

$$I_{I1} = -\ \gamma_{\lambda\mu\mu'} \int_0^t d\tau\ S_{\mu}^{+},[S_{\mu}^{+},\ \tilde{\rho}_s(t-\tau)]\ e^{2i\omega t}\ e^{-i(\omega_o\ +\ \omega_\lambda)\tau}\ , \tag{2-71}$$

e através da aproximação Markoviana fazemos $\rho(t-\tau) \sim \rho(t)$, ou seja, o intervalo de tempo $t-\tau$ deve ser pequeno comparado com o tempo que a energia cedida do sistema ao reservoir não retorne ao sistema, então, a equação acima resulta,

$$I_{I1} = -\ \gamma_{\lambda\mu\mu'}\ S_{\mu}^{+},[S_{\mu}^{+},\ \tilde{\rho}_s(t)]\ e^{2i\omega_o t} \int_0^{\infty} d\tau\ e^{-i(\omega_o\ +\ \omega_\lambda)\tau} \quad =$$

$$= -\ \gamma_{\lambda\mu\mu'}\ S_{\mu}^{+},[S_{\mu}^{+},\ \tilde{\rho}_s(t)]\ e^{2i\omega_o t}\ \delta^{-}(\omega_o\ +\ \omega_\lambda), \tag{2-72}$$

onde

$$\delta^{-}(\omega_o\ +\ \omega_\lambda) = \pi\delta(\omega_o\ +\ \omega_\lambda)\ -\ i\,\mathcal{P}\,\frac{1}{\omega_o\ +\ \omega_\lambda}\ , \tag{2-73}$$

com $\mathcal{P}$ representando o valor principal da integral.

Como estamos interessados somente em frequências

positivas resulta, da Eq. (2-72),

$$I_{I1} = -\gamma_{\lambda\mu\mu},\ S_\mu^+,[S_\mu^+,\ \tilde{\rho}_s(t)]\ e^{2i\omega_o t}(-i)\mathcal{P}\frac{1}{\omega_o + \omega_\lambda}\ . \qquad (2\text{-}74)$$

De forma análoga, os termos seguintes da Eq. (E-24), e os termos da Eq. (E-27), substituídos na Eq. (2-94), fazendo a aproximação Markoviana, resultou

$$I_{I2} = \gamma_{\lambda\mu\mu},[S_\mu^-,\ S_\mu^+,\ \tilde{\rho}_s(t)]\ (-i)\mathcal{P}\frac{1}{\omega_o + \omega_\lambda}\ , \qquad (2\text{-}75)$$

$$I_{I3} = \gamma_{\lambda\mu\mu},[S_\mu^+,\ S_\mu^-,\ \tilde{\rho}_s(t)]\delta^+(\omega_o - \omega_\lambda), \qquad (2\text{-}76)$$

$$I_{I4} = -\gamma_{\lambda\mu\mu},[S_\mu^-,\ S_\mu^-,\ \tilde{\rho}_s(t)]\ e^{-2i\omega_o t}\ \delta^+(\omega_o - \omega_\lambda), \qquad (2\text{-}77)$$

$$I_{II1} = -\gamma_{\lambda\mu\mu},[S_\mu^+,\ \tilde{\rho}_s(t)]S_\mu^+,\ e^{2i\omega_o t}\ \delta^-(\omega_o - \omega_\lambda), \qquad (2\text{-}78)$$

$$I_{II2} = \gamma_{\lambda\mu\mu},[S_\mu^-,\ \tilde{\rho}_s(t)S_\mu^+,]\delta^-(\omega_o - \omega_\lambda), \qquad (2\text{-}79)$$

$$I_{II3} = \gamma_{\lambda\mu\mu},[S_\mu^+,\ \tilde{\rho}_s(t)S_\mu^-,]\ i\mathcal{P}\frac{1}{\omega_o + \omega_\lambda}\ , \qquad (2\text{-}80)$$

$$I_{II4} = -\gamma_{\lambda\mu\mu},[S_\mu^-,\ \tilde{\rho}_s(t)]S_\mu^-,\ i\mathcal{P}\frac{1}{\omega_o + \omega_\lambda}\ e^{-2i\omega_o t}\ , \qquad (2\text{-}81)$$

com

$$\delta^+(\omega_o - \omega_\lambda) = \pi\delta(\omega_o - \omega_\lambda) + i\mathcal{P}\frac{1}{\omega_o - \omega_\lambda}\ . \qquad (2\text{-}82)$$

Observamos que as Eqs. (2-75) até (2-77) são decorrentes da Eq. (E-24), e as Eqs. (2-78) até (2-81) provêm da Eq. (E-27). Como não temos frequências negativas, então, não existem singularidades nas expressões da parte principal, $\mathcal{P}/(\omega_o + \omega_\lambda)$.

Inicialmente, consideraremos a integração em I_{I1}, Eq. (2-74), na qual temos uma soma implícita em λ, que passaremos para uma integral. O coeficiente de acoplamento é dado por,

$$g_{21\lambda i} = -\left(\frac{i\omega_{21}}{c}\right)\left(\frac{2\pi c}{L^3}\right)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{k_\lambda}}\,(\vec{\varepsilon}_{\lambda\alpha}.\vec{P}_{21i})\,e^{i\vec{k}_\lambda.\vec{r}_i}, \qquad (2\text{-}83)$$

de forma que,

$$g_{21\lambda i}\,g_{21\lambda i} = g_{21\lambda i}\,g^{*}_{12\lambda j} =$$

$$= -\left(\frac{\omega_o}{c}\right)^2\left(\frac{2\pi c}{L^3}\right)\frac{1}{k}\,(\vec{\varepsilon}_\alpha.\vec{P}_i)(\vec{\varepsilon}_\alpha.\vec{P}_j)\,e^{i\vec{k}.\vec{r}_{ij}}, \qquad (2\text{-}84)$$

onde

$$\omega_o \equiv \omega_{21},\ \omega_\lambda \equiv \omega\ ,\ \ k_\lambda \equiv k\ , \qquad (2\text{-}85)$$

$$\vec{P}_{21i} \equiv \vec{P}_i,\ \ \vec{r}_{ij} \equiv \vec{r}_i - \vec{r}_j\ , \qquad (2\text{-}86)$$

com o índice λ somando aos modos do campo externo e i,j sobre o número de átomos do sistema; na soma em λ está implícita a soma em α, ou seja, a soma sobre as polarizações do campo externo. Assumimos que os modos do campo são contínuos de tal forma que passamos a soma para uma integral:

$$\sum_{\lambda} \rightarrow \sum_{\alpha} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int_0^{\infty} dk\, k^2 \int_0^{\pi} d\theta \operatorname{sen}\theta \int_0^{2\pi} d\phi \ . \qquad (2\text{-}87)$$

Queremos observar que estamos considerando τ (tempo de relaxação do reservoir) grande quando comparado com $1/\gamma$ (γ é a largura de linha dos átomos), desta forma, o reservoir possui um espectro contínuo enquanto que os átomos do sistema possuem larguras de linha bem definidas. Consideramos, também que o vetor de onda da radiação emitida, k, é muito maior que as dimensões do sistema atômico, o que justifica a aproximação de dipolo. Então, este é um problema de espalhamento da radiação incidente sobre os N átomos do sistema |13,14|.

De acordo com as Eqs. (2-84) e (2-87), a Eq. (2-103) resulta

$$I_{Il} = -\frac{i}{c}\left(\frac{\omega_o}{2\pi}\right)^2 S_j^+ [S_i^+, \tilde{\rho}_s(t)]\, e^{2i\omega_o t} \quad x$$

$$x \sum_{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{dk\, k^2}{k(\omega_o + \omega)} \int_0^{\pi} d\theta \operatorname{sen}\theta\, e^{i\vec{k}.\vec{r}_{ij}} \int_0^{2\pi} d\phi (\vec{\varepsilon}_{\alpha}.\vec{P}_i)(\vec{\varepsilon}_{\alpha}.\vec{P}_j). \qquad (2\text{-}88)$$

A parte angular da Eq. (2-88) é integrada detalhadamente para deixar claro o referencial dos momentos de dipolos usado, isto é, a direção da emissão de radiação:

$$A = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \operatorname{sen}\theta \sum_{\alpha} (\vec{\varepsilon}_{\alpha}.\vec{P}_i)(\vec{\varepsilon}_{\alpha}.\vec{P}_j) e^{i\vec{k}.\vec{r}_{ij}}, \qquad (2\text{-}89)$$

onde

$$\vec{P} = |\vec{P}|(1,1,1) \ , \tag{2-90}$$

e pela condição de gauge de Coulomb, $\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$, temos que,

$$\vec{\varepsilon}_i.\vec{k} = 0, \quad i = 1,2. \tag{2-91}$$

Desenvolvendo o termo,

$$\sum_\alpha (\vec{\varepsilon}_\alpha.\vec{P}_i)(\vec{\varepsilon}_\alpha.\vec{P}_j) = \sum_\alpha \{\vec{P}_i.\vec{P}_j - (\vec{\varepsilon}_\alpha \times \vec{P}_i)(\vec{\varepsilon}_\alpha \times \vec{P}_j)\} =$$

$$= 2\,\vec{P}_i.\vec{P}_j - (\hat{\varepsilon}_1 \times \vec{P}_i)(\hat{\varepsilon}_1 \times \vec{P}_j) - (\hat{\varepsilon}_2 \times \vec{P}_i)(\hat{\varepsilon}_2 \times \vec{P}_j), \tag{2-92}$$

onde usamos o sistema de referência,

$$\hat{\varepsilon}_1 \times \hat{\varepsilon}_2 = \hat{k}, \text{ et cicl.} \tag{2-93}$$

Pela identidade vetorial,

$$\hat{\varepsilon}_1 \times \vec{P}_i = -(\hat{k}.\vec{P}_i)\hat{\varepsilon}_2 \ , \tag{2-94}$$

$$\hat{\varepsilon}_2 \times \vec{P}_i = (\hat{k}.\vec{P}_i)\hat{\varepsilon}_1 \ , \tag{2-95}$$

segue da Eq. (2-92),

$$\sum_\alpha (\vec{\varepsilon}_\alpha.\vec{P}_i)(\vec{\varepsilon}_\alpha.\vec{P}_j) = \vec{P}_i.\vec{P}_j - (\hat{k}.\vec{P}_i)(\hat{k}.\vec{P}_j), \tag{2-96}$$

onde $\vec{P}$ tem as direções $\hat{\varepsilon}_1$ e $\hat{\varepsilon}_2$.

Substituindo a Eq. (2-96) na Eq. (2-89), obtemos,

$$A = \int_{\Omega} d\hat{k}\left[\vec{P}_i.\vec{P}_j - (\hat{k}.\vec{P}_i)(\hat{k}.\vec{P}_j)\right] e^{i\hat{k}.\vec{r}_{ij}k_o} , \qquad (2\text{-}97)$$

onde Ω é a superfície de integração. A solução da equação acima é da forma,

$$A = a\,\vec{P}_i.\vec{P}_j + b(\vec{P}_i.\vec{r}_{ij})(\vec{P}_j.\vec{r}_{ij}), \qquad (2\text{-}98)$$

onde a e b dependem somente de $\vec{r}_{ij}$ e k_o. Para determinar a e b, obteremos duas equações, para isto escolhemos

$$\vec{P}_i = \vec{P}_j = \vec{r}_{ij} , \qquad (2\text{-}99)$$

então,

$$\vec{P}_i.\vec{r}_{ij} = \vec{P}_j.\vec{r}_{ij} , \qquad (2\text{-}100)$$

tal que, pelas Eqs. (2-97) e (2-98),

$$a + b = \int d\hat{k}\left[1 - (\vec{r}_{ij}.\hat{k})^2\right] e^{i\hat{k}.\hat{r}_{ij}k_o r_{ij}} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \operatorname{sen}\theta\left[1 - \cos^2\theta\right] e^{ik_o r_{ij}\cos\theta} =$$

$$= 8\pi\left[-\frac{\cos(k_o r_{ij})}{(k_o r_{ij})^2} + \frac{\operatorname{sen}(k_o r_{ij})}{(k_o r_{ij})^3}\right] . \qquad (2\text{-}101)$$

Para a escolha,

$$\vec{P}_i = \vec{P}_j = \hat{S},\ \hat{S} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ \vec{r}_{ij} = (1,0,0), \tag{2-102}$$

resulta,

$$a + \frac{b}{3} = \frac{2}{3}\int_0^{\pi} d\phi \int d\theta \operatorname{sen}\theta\, e^{i\hat{k}.\hat{r}_{ij}k_o r_{ij}} = \frac{8\pi}{3}\frac{\operatorname{sen}(k_o r_{ij})}{k_o r_{ij}}. \tag{2-103}$$

Pelas Eqs. (2-101) e (2-103), obtemos um sistema de equações, com a solução,

$$a = 4\pi\left[\frac{\operatorname{sen}x}{x} + \frac{\cos x}{x^2} - \frac{\operatorname{sen}x}{x^3}\right], \tag{2-104}$$

$$b = 4\pi\left[3\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x^3} - \frac{\cos x}{x^2}\right) - \frac{\operatorname{sen}x}{x}\right], \tag{2-105}$$

onde

$$x = k_o\, r_{ij}\,. \tag{2-106}$$

Substituindo as Eqs. (2-104) e (2-105) na Eq. (2-98), resulta

$$A = 4\pi\,|\vec{P}_i|^2\{[1 - (\vec{P}_i.\vec{r}_{ij})^2]\frac{\operatorname{sen}x}{x} + [1 - 3(\vec{P}_i.\vec{r}_{ij})^2]\left[\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\operatorname{sen}x}{x^3}\right]\}, \tag{2-107}$$

com $\vec{P}_i = \vec{P}_j$.

Observamos que a parte angular, Eq. (2-107), aparece nas Eqs. (2-74) até (2-81). Substituindo a Eq. (2-107) na Eq. (2-88), obtemos

$$I_{I1} = -\, i\left(\frac{\omega_o}{c}\right)^2 \frac{1}{\pi}\, S_j^+ [S_i^+, \tilde{\rho}_s(t)]\, e^{2i\omega_o t} \quad x$$

$$x \int_o^\infty \frac{dk\, k^2}{k(k_o + k)} |\vec{P}_i|^2 \{ [1 - (\vec{P}_i . \vec{r}_{ij})^2] \frac{\text{sen}x}{x} +$$

$$+ [1 - 3(\vec{P}_i . \vec{r}_{ij})^2] [\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\text{sen}x}{x^3}] \} , \qquad (2\text{-}108)$$

expressões análogas são obtidas para as Eqs. (2-75) até (2-81), para a parte principal. Considerando a aproximação de onda girante os fatores que multiplicam $e^{2i\omega_o t}$ são desprezados, resultando somente os termos: I_{I2}, I_{I3}, I_{II2} e I_{II3}.

Nas Eqs. (2-76) e (2-79), fazemos a substituição da Eq. (2-87). O cálculo da parte principal dos termos I_{I2}, I_{I3}, I_{II2} e I_{II3} é feito usando a Eq. (2-107), resultando para $i \neq j$,

$$I_{I2} = \frac{i}{\pi} \left(\frac{\gamma c}{\omega_o}\right) [S_i^-, S_j^+ \tilde{\rho}_s(t)] \int_o^\infty \frac{dK\, K^2}{CK(K + K_o)} \Lambda_{ij}(kr_{ij}) , \qquad (2\text{-}109)$$

$$I_{I3} = -\frac{i}{\pi} \left(\frac{\gamma c}{\omega_o}\right) [S_i^+, S_j^- \tilde{\rho}_s(t)] \int_o^\infty \frac{dK\, K^2}{KC(K_o - K)} \Lambda_{ij}(kr_{ij}) \qquad (2\text{-}110)$$

$$I_{II2} = \frac{i}{\pi} \left(\frac{\gamma c}{\omega_o}\right) [S_i^-, \tilde{\rho}_s(t) S_j^+] \int_o^\infty \frac{dK\, K^2}{CK(K_o - K)} \Lambda_{ij}(Kr_{ij}) , \qquad (2\text{-}111)$$

$$I_{II3} = -\frac{i}{\pi}\left(\frac{\gamma c}{\omega_o}\right)\left[S_i^+,\ \tilde{\rho}_s(t)S_j^-\right]\int_o^\infty \frac{dK\ K^2}{CK(K+K_o)}\ \Lambda_{ij}(Kr_{ij}), \qquad (2\text{-}112)$$

onde

$$\gamma = \frac{2}{3}\frac{\omega_o^3}{C^3}\left|\vec{P}_i\right|^2 , \qquad (2\text{-}113)$$

$$\Lambda_{ij}(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{\text{sen}x}{x} + \frac{\cos x}{x^2} - \frac{\text{sen}x}{x^3}\right) . \qquad (2\text{-}114)$$

Integrando as Eqs. (2-109) até (2-112), resulta

$$I_{I2} + I_{I3} - I_{II2} - I_{II3} = -i\left[S_i^+S_j^-,\ \tilde{\rho}_s(t)\right]\Omega_{ij}(K_o r_{ij}), \qquad (2\text{-}115)$$

onde

$$\Omega_{ij}(x) = \frac{3}{2}\gamma\left(\frac{\text{sen}x}{x^2} + \frac{\cos x}{x^3} - \frac{\cos x}{x}\right) , \qquad (2\text{-}116)$$

e para i = j, obtemos

$$I_{I2} + I_{I3} - I_{II2} - I_{II3} =$$

$$= \frac{i}{\pi}K_o\gamma\ \ell n\left\{\left|\frac{K' - K_o}{K_o}\right|\left(\frac{K' + K_o}{K_o}\right)\right\}\left[S_i^+S_i^-,\ \tilde{\rho}_s(t)\right] , \qquad (2\text{-}117)$$

com a frequência de corte,

$$K' = KC . \qquad (2\text{-}118)$$

Observamos que na Eq. (2-117) não ocorre divergência linear porque a parte ressonante com a parte anti-ressonante do Hamiltoniano cancelam esta divergência. A divergência linear ocorre quando $k' \to \infty$. A parte ressonante de H_{int} é o termo

$$a\, S^{+} + a^{+} S^{-} \quad ,$$

e a parte anti-ressonante é

$$a^{+} S^{+} + a\, S^{-} \quad ,$$

o qual é desprezado na aproximação de onda girante.

Finalmente, integrando a parte do $\delta(\omega_o - \omega_\lambda)$ das Eqs. (2-76) e (2-79) analogamente, e usando as Eqs. (2-115) e (2-117), podemos escrever a Equação Master, Eq. (2-65), como

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\rho}_s(t) = -i\,\Omega \sum_i [S_i^{+} S_i^{-}, \tilde{\rho}_s(t)] - i \sum_{i \neq j} \Omega_{ij}^{(1)} [S_i^{+} S_j^{-}, \tilde{\rho}_s(t)] -$$

$$- \sum_{ij} \gamma_{ij} (S_i^{+} S_j^{-} \tilde{\rho}_s(t) - 2 S_j^{-} \tilde{\rho}_s(t) S_i^{+} + \tilde{\rho}_s(t)\, S_i^{+} S_j^{-}), \qquad (2\text{-}119)$$

onde

$$\Omega_{ij}^{(1)}(x) = \frac{3}{\pi} \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right) , \qquad (2\text{-}120)$$

$$\gamma_{ij} = \gamma\, \Lambda_{ij}(K_o r_{ij}), \qquad (2\text{-}121)$$

$$\Omega = -\frac{\gamma}{\pi} \ell n \left\{ \left| \frac{K' - K_o}{K_o} \right| \left(\frac{K' + K_o}{K_o} \right) \right\} , \qquad (2\text{-}122)$$

e na representação de Schrödinger,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -i\omega_\gamma \sum_i [S_i^+ S_i^-, \rho] - i \sum_{i \neq j} \Omega_{ij}^{(1)} [S_i^+ S_j^-, \rho] -$$

$$- \sum_{ij} \gamma_{ij} (S_i^+ S_j^- \rho - 2 S_j^- \rho S_i^+ + \rho S_i^+ S_j^-) , \qquad (2\text{-}123)$$

onde

$$\omega_\gamma = \omega + \Omega . \qquad (2\text{-}124)$$

Na Eq. (2-119), a frequência foi substituída por um termo adicional, ou seja, uma frequência renormalizada a qual veio da parte principal dos termos I_{I2}, I_{I3}, I_{II2} e I_{II3}. Observamos que houve uma alteração na frequência porque estamos considerando somente frequências positivas. Se não nos limitamos a frequências positivas, isto é, fazermos a integração da Eq. (2-87) de $-\infty$ a ∞, da parte em k ocorre que as expressões dos termos cruzados da aproximação de onda girante poderão alterar a dinâmica do sistema porque a forma da Equação Master muda. Se fizermos a aproximação de onda girante no Hamiltoniano os termos que permanecerão serão somente I_{I3} e I_{II2} e, a frequência renormalizada que obteremos será incorreta.

2-3. NÚMERO MÉDIO DE FÓTONS DE UM ÁTOMO DE DOIS NÍVEIS

A Equação Master, Eq. (2-123), é uma equação de movimento que descreve a dinâmica do sistema atômico de dois níveis interagindo com um campo eletromagnético e, através desta podemos obter as propriedades relacionadas ao problema em estudo uma das quais é o número médio de fótons que mede a emissão de radiação do sistema atômico.

Calcularemos o número médio de fótons de um átomo de dois níveis e compararemo-lo com a probabilidade do resultado clássico obtido da teoria de Weisskopf-Wigner [7].

Usando o Hamiltoniano, Eq. (2-45), e a equação de movimento de Heisenberg, obtemos

$$a_{js}(t) = a_{js}(0)\, e^{-i\omega_j t} - i \sum_{\mu} g_{\mu j} \int_0^t S_{\mu}^{-}(\tau) e^{-i\omega_j (t-\tau)}\, d\tau, \qquad (2\text{-}125)$$

onde fizemos a aproximação de onda girante, isto é, despreza mos S_{μ}^{+}.

Pela Eq. (2-125) e seu complexo conjugado obtemos o número médio de fótons no modo j,S,

$$\langle a_{js}^{+} a_{js} \rangle_t =$$

$$= \sum_{\mu\beta} g_{\mu j}^{*} g_{\beta j} \int_0^t \int_0^t \langle S_{\mu}^{+}(\tau_1) S_{\beta}^{-}(\tau_2) \rangle\, e^{i\omega_j (\tau_2 - \tau_1)}\, d\tau_1 d\tau_2, \qquad (2\text{-}126)$$

com o vácuo definido como

$$a_{js}(0)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1. \tag{2-127}$$

Para fazer as integrais da Eq. (2-186), precisamos primeiro calcular a função correlação de dois tempos $\langle S_{\mu}^{+}(\tau_1) S_{\beta}^{-}(\tau_2)\rangle$ e, para isto usamos a Equação Master , Eq. (2-123), e o teorema da regressão quântica [15] para obtela.

De acordo com a Equação Master, Eq. (2-123), para um átomo, resulta

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle S^{\pm}\rangle = \pm i\omega_{\gamma}\langle S^{\pm}\rangle - \gamma\langle S^{\pm}\rangle , \tag{2-128}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle S^{+}S^{-}\rangle = - 2\gamma\langle S^{+}S^{-}\rangle , \tag{2-129}$$

onde para um átomo de dois níveis,

$$\gamma_{ii} = \gamma , \tag{2-130}$$

$$S^{+}S^{-} + S^{-}S^{+} = \hat{1} , \tag{2-131}$$

$$(S^{+})^2 = (S^{-})^2 = 0. \tag{2-132}$$

A solução das Eqs. (2-128) e (2-129) é,

$$\langle S^{\pm}\rangle_t = e^{(\pm i\omega_{\gamma} - \gamma)(t-t')}\langle S^{\pm}\rangle_{t'} , \tag{2-133}$$

$$\langle S^{+}S^{-}\rangle_t = e^{-2\gamma t}\langle S^{+}S^{-}\rangle_0 . \tag{2-134}$$

Usando as equações anteriores e o teorema da regressão quântica (Apêndice A), obtemos

$$\langle S^{+}(t)\, S^{-}(t')\rangle =$$

$$= \exp\{i\omega\gamma(t-t') - \gamma|t + t'|\}\, \langle S^{+}S^{-}\rangle_0 \,. \qquad (2\text{-}135)$$

Substituindo a equação acima na Eq. (2-126), resulta

$$\langle a_{js}^{+}\, a_{js}\rangle_t =$$

$$= \frac{|g_j|^2}{[\gamma^2 + (\omega\gamma - kc)^2]}\{1 + e^{-2\gamma t} - 2e^{-\gamma t}\cos[(\omega\gamma - kc)t]\}\langle S^{+}S^{-}\rangle_0 \,, \qquad (2\text{-}136)$$

com $\omega_j = kc$.

Para compararmos este resultado com a teoria de Weisskopf-Wigner, introduzimos a probabilidade $P_{js}(t)$ de um fóton com momento j e polarização S,

$$P_{js}(t) = \langle |js\rangle\langle js|\rangle_t \,, \qquad (2\text{-}137)$$

onde $|j,s\rangle$ é um estado no qual há um fóton no modo j,s. Por outro lado, $P_{js}(t)$ pode também ser escrito como:

$$P_{js}(t) = \langle a_{js}^{+}|\{0\}\rangle\, \langle\{0\}|a_{js}\rangle_t =$$

$$= \langle a_{js}^{+} \circ \prod_{js} e^{-a_{js}^{+}a_{js}} \circ \circ a_{js}\rangle_t \,, \qquad (2\text{-}138)$$

onde $\overset{o}{o}\ \overset{o}{o}$ significa o ordenamento normal. Como estamos tratando com um fóton, então, somente um termo da Eq. (2-138) contribui; assim:

$$P_{js}(t) = \langle a^{+}_{js}(t)\ a_{js}(t)\rangle\ . \qquad (2\text{-}139)$$

Deste modo, combinando as Eqs. (2-136) e (2-139), obtemos o resultado clássico da teoria de Weisskopf-Wigner.

2-4. INTENSIDADE DA RADIAÇÃO

Outra propriedade do sistema atômico de dois níveis acoplado a um campo eletromagnético que podemos obter é a intensidade da radiação que nos diz se há emissão superradiante ou não. Obteremos a intensidade da radiação nos estados de Dicke, estados de Fock e estados coerentes, e estabeleceremos as condições nas quais há superradiância usando estes estados. Posteriormente, considerando o sistema atômico com cada átomo substituído por um oscilador harmônico obteremos a intensidade da radiação.

Pelo Hamiltoniano dado pela Eq. (2-40), o termo $\omega \sum_j S^z_j$ representa a energia do sistema atômico assim, definimos a intensidade da radiação I(t), como a taxa de variação da energia do sistema atômico em relação ao tempo:

$$I(t) = -\omega \frac{d}{dt} W(t), \qquad (2\text{-}140a)$$

onde definimos,

$$W(t) = \sum_i \langle S_i^z(t) \rangle \ . \qquad (2\text{-}140b)$$

Usando a Equação Master, Eq. (2-123), obtemos que $\langle S_i^z \rangle$ satisfaz a equação,

$$\frac{d}{dt} \langle S_i^z \rangle + \sum_j \gamma_{ij} \{ \langle S_i^+ S_j^- \rangle + \langle S_j^+ S_i^- \rangle \} = 0 \ , \qquad (2\text{-}141)$$

onde usamos as Eqs. (1-7) e (1-8) do Capítulo 1.

Então, pela equação acima, a Eq. (2-140a) resulta,

$$I(t) = 2\omega \sum_{ij} \gamma_{ij} \langle S_i^+(t) S_j^-(t) \rangle . \qquad (2\text{-}142)$$

Para estabelecer a conexão com o trabalho pioneiro de Dicke sobre superradiância, discutimos primeiramente as características independentes do tempo da radiação emitida.

A intensidade da radiação independente do tempo é,

$$I_o = 2\omega \sum_{ij} \gamma_{ij} \langle S_i^+ S_j^- \rangle_0 \ , \qquad (2\text{-}143)$$

onde $\langle \ \rangle_0$ representa o valor esperado em relação a um estado inicial. Para sistemas pequenos, ou seja, sistemas cujas dimensões lineares são pequenas comparadas ao comprimento de onda da radiação incidente (aproximação de dipolo), fazemos

$$\gamma_{ij} \simeq \gamma \ , \qquad (2\text{-}144)$$

com isto estamos considerando a aproximação de campo médio no

Hamiltoniano dado pela Eq. (2-40), onde cada um dos átomos "sente" o campo produzido pelos outros átomos. E a Eq. (2-143) resulta,

$$I_o = 2\omega_\gamma \sum_{ij} \langle S_i^+ S_j^- \rangle_0 = 2\omega_\gamma \langle S^+ S^- \rangle_0 \ , \qquad (2\text{-}145)$$

onde os operadores coletivos $S^{\pm,z}$ são dados pelas Eqs. (1-12) e (1-13) do Capítulo 1.

Para calcular o valor médio de S^+S^- precisamos usar um estado inicial, para isto o calcularemos nos estados coerente e de Dicke. Para o estado coerente (Apêndice B) a matriz densidade é dada por

$$\rho(0) = \prod_i |\theta_o, \phi_o\rangle_i \, {}_i\langle \theta_o, \phi_o| \ , \qquad (2\text{-}146)$$

onde

$$|\theta_o, \phi_o\rangle_i = \cos \frac{\theta_o}{2} \, e^{i\phi_o/2} |->_i + \operatorname{sen} \frac{\theta_o}{2} \, e^{-i\phi_o/2} |+>_i \ , \qquad (2\text{-}147)$$

e, $|+>_i$ e $|->_i$ são os estados excitado e fundamental do i-ésimo átomo, respectivamente.

Pelas Eqs. (2-146) e (2-147), a Eq. (2-145) resulta,

$$I_o = 2\gamma\omega \, N \operatorname{sen}^2 \frac{\theta_o}{2} \{1 + (N-1) \cos^2 \frac{\theta_o}{2}\} \ , \qquad (2\text{-}148)$$

onde fizemos

$$\sum_{ij} \rightarrow \sum_{i} + \sum_{i \neq j} , \tag{2-149}$$

e usamos

$$S_i^+ |+> = S_i^- |-> = 0, \tag{2-150}$$

$$S_i^- |+> = |-> , \quad S_i^+ |-> = |+> . \tag{2-151}$$

Pela Eq. (2-148), vemos que para $N >> 1$ e $\theta_o = \pi/2$,

$$I_o \alpha N^2 , \tag{2-152}$$

ou seja, a intensidade da radiação é proporcional ao quadrado do número de átomos o que nos mostra que há superradiância; e como temos N átomos excitados, o resultado esperado seria a intensidade da radiação proporcional a N. Da Eq. (2-146) com $\theta_o = \pi/2$, para um sistema preparado inicialmente (t=0) sem correlações atômicas (as funções de onda dos átomos não se superpõem), temos que o momento de dipolo é máximo porque o estado dado pela Eq. (2-147) tem um valor máximo para $\theta_o = \pi/2$ e decompomos o momento de dipolo neste estado. Quando usamos o estado $|\theta_o, \phi_o>_i$ para calcular o momento de dipolo atribuímos um valor finito para ele; com isto temos a conhecida superradiância de primeira espécie.

Agora, usando um estado de Dicke $|N/2,m>$ a matriz densidade é dada por

$$\rho(0) = |N/2,m><N/2,m| \ , \qquad (2\text{-}153)$$

e usando a Eq. (2-145), obtemos

$$I_o = 2\gamma\omega\{\frac{N}{2}(\frac{N}{2} + 1) - m^2 + m\} \ , \qquad (2\text{-}154)$$

com $N >> 1$ e $m = 0$,

$$I_o \alpha N^2, \qquad (2\text{-}155)$$

que significa que há superradiância para um sistema excitado num estado de Dicke $|N/2,0>$, havendo correlações atômicas . Para $m = 0$, a diferença de população dos dois níveis é zero, e obtemos um momento de dipolo nulo, então temos a chamada superradiância de segunda espécie.

A seguir obteremos uma solução dependente do tempo da Equação Master, Eq. (2-123), tratando com variáveis coletivas (Eqs. (1-12) e (1-13)). Neste formalismo a Equação Master na representação de interação é escrita como

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau} = -\frac{1}{2}(S^+S^-\rho - 2S^-\rho S^+ + \rho S^+S^-), \qquad (2\text{-}156)$$

onde

$$\tau = 2\gamma t \ , \qquad (2\text{-}157)$$

e não consideramos os termos envolvendo $\Omega_{ij}^{(1)}$ o qual é um termo anti-simétrico. Tomando o elemento de matriz de ambos os lados da Eq. (2-156) em relação ao estado de Dicke $|S,m>$, on

de S é o número de cooperação de Dicke, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\rho_{mn} = (\nu_{m+1}\,\nu_{n+1})^{1/2}\,\rho_{m+1,\,n+1} -$$

$$- \frac{1}{2}(\nu_m + \nu_n)\,\rho_{mn}\,, \qquad (2\text{-}158)$$

onde $S = N/2$, $m = n_1 - n_2$,

$$\rho_{mn} = \langle Sm|\rho|Sn\rangle\,, \qquad (2\text{-}159)$$

$$\nu_m = (S-m+1)(S+m)\,, \qquad (2\text{-}160)$$

e usamos,

$$S^+|S,n\rangle = [(S-n)(S+n+1)]^{1/2}|S,n+1\rangle\,, \qquad (2\text{-}161)$$

$$S^-|S,n\rangle = [(S+n)(S-n+1)]^{1/2}|S,n-1\rangle\,. \qquad (2\text{-}162)$$

Observamos que $2\gamma\nu_m$ é a probabilidade que o sistema faz a transição do estado $|S,m\rangle$ para o estado $|S,m-1\rangle$.

Para os elementos diagonais da Eq. (2-158), obtemos a equação,

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\rho_{mm} = \nu_{m+1}\,\rho_{m+1,m+1} - \nu_m\,\rho_{mm}\,, \qquad (2\text{-}163)$$

a qual é conhecida Equação Master de Pauli.

Usando a transformada de Laplace e um processo iterativo obtemos a solução da Eq. (2-158), como

$$\tilde{\rho}_{m.n}(\beta) = \sum_{\ell>0} \Big[\prod_{1}^{\ell} \nu_{m+k}\ \nu_{n+k}\Big]^{1/2} \Big(\prod_{1}^{\ell} \Big[\beta + \frac{1}{2}(\nu_{m+k} + \nu_{n+k})\Big]^{-1}\Big)\ x$$

$$x\ \rho_{m+\ell,n+\ell}(0)\,, \qquad (2\text{-}164)$$

com a transformada de Laplace,

$$\tilde{\rho}_{m,n}(\beta) = \int_{o}^{\infty} d\tau\ e^{-\tau\beta}\ \rho_{m,n}(\tau)\,,\ R\,e\ \beta > 0. \qquad (2\text{-}165)$$

A solução do estado estacionário é,

$$\rho_{m,n}(\infty) = \delta_{m,n}\ \delta_{n,-s}\ , \qquad (2\text{-}166)$$

com a energia,

$$W(\infty) = -\ s, \qquad (2\text{-}167)$$

onde usamos a Eq. (2-140b)

Outra consequência natural é,

$$\langle S^{\pm}(t)\rangle = 0,\quad \rho(0) = |S,m\rangle\langle S,m|\ , \qquad (2\text{-}168)$$

isto é, como há correlações atômicas um sistema excitado apresentará momento de dipolo zero, não havendo superradiância de primeira espécie.

Como a Eq. (2-158), foi resolvida usando os estados de Dicke $|S,m\rangle$ podemos usar a solução para calcular as propriedades do sistema para qualquer excitação inicial, isto é, podemos expandir um dado estado num estado de Dicke , por exemplo, para o estado $|\theta_o,\phi_o\rangle_i$ dado por

$$\prod_i |\theta_o,\phi_o>_i = \sum_{-N/2}^{N/2} \binom{N}{N/2-m} (\cos\frac{\theta_o}{2} e^{i\phi_o/2})^{N/2-m} \quad x$$

$$x\ (\text{sen}\frac{\theta_o}{2} e^{-i\phi_o/2})^{N/2+m} |N/2,m> \ , \qquad (2\text{-}169)$$

onde $\binom{N}{N/2-m}$ é a degenerescência, e a condição inicial é,

$$\rho_{m,n}(0) = \binom{N}{N/2-m}^{1/2} \binom{N}{N/2-n}^{1/2} e^{i\phi(m-n)} \quad x$$

$$x \left(\cos\frac{\theta_o}{2}\right)^{N-m-n} \left(\text{sen}\frac{\theta_o}{2}\right)^{N+m+n} , \qquad (2\text{-}170)$$

para N=1, na Eq. (2-169), obtemos a Eq. (2-147).

Em seguida desacoplaremos a Equação Master para obter a emissão de radiação para o estado $|\theta_o,\phi_o>_i$ com $\theta < \pi$. Partindo da Eq. (2-141), e usando a Eq. (2-140b), obtemos

$$\frac{\partial W}{\partial t} + 2\gamma(W + \frac{N}{2}) + 2\gamma(N-1)\ \{W + \frac{N}{2} -$$

$$- N <S_i^+ S_j^+ S_i^- S_j^->\} = 0 \qquad (2\text{-}171)$$

onde

$$<\vec{S}_i.\vec{S}_j> = \frac{1}{4} \ , \qquad (2\text{-}172)$$

$$<S^z> = <S^+S^-> - \frac{1}{2} \ , \qquad (2\text{-}173)$$

e consequentemente,

$$\sum_i \langle S_i^z S_j^z \rangle = (N-1) \langle S_i^+ S_i^- S_j^+ S_j^+ \rangle -$$

$$- \frac{N}{2} \langle S_i^+ S_i^- \rangle - \frac{N}{2} \langle S_j^+ S_j^- \rangle + \frac{N}{4} . \qquad (2\text{-}174)$$

Para expressar a função correlação de duas partículas $\langle S_i^+ S_j^+ S_i^- S_j^- \rangle$ da Eq. (2-171) em termos de W(t), Eq. (2-140b) , precisamos desacoplá-la em valores médios de uma partícula , para isto usam-se as aproximações de Hartree,

$$\langle S_i^+ S_j^+ S_i^- S_j^- \rangle \approx \langle S_i^+ S_i^- \rangle \langle S_j^+ S_j^- \rangle , \; i \neq j , \qquad (2\text{-}175)$$

ou de Hartree-Fock,

$$\langle S_i^+ S_j^+ S_i^- S_j^- \rangle \approx \langle S_i^+ S_i^- \rangle \langle S_j^+ S_j^- \rangle + \langle S_i^+ S_j^- \rangle \langle S_j^+ S_i^- \rangle , \qquad (2\text{-}176)$$

dependendo da excitação inicial do sistema.

Pela Eq. (2-173) resulta,

$$\langle S_i^+ S_i^- \rangle = \frac{1}{N} \left(W(t) + \frac{N}{2} \right) . \qquad (2\text{-}177)$$

De acordo com a condição inicial,

$$\langle S_i^+ S_i^- \rangle = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \theta_o , \qquad (2\text{-}178)$$

devemos usar a aproximação de Hartree,

$$\langle S_i^+ S_j^+ S_i^- S_j^- \rangle \approx \langle S_i^+ S_i^- \rangle \langle S_j^+ S_j^- \rangle = \frac{1}{N^2} \left(W(t) + \frac{N}{2} \right)^2 , \qquad (2\text{-}179)$$

onde usamos a Eq. (2-177).

Substituindo a Eq. (2-179) na Eq. (2-171), resulta

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 2\gamma(W + \frac{N}{2})\{(1 - \frac{1}{N})\ (W - \frac{N}{2}) - 1\}\ , \qquad (2\text{-}180)$$

que é a equação esperada, cuja solução é

$$W(t) = \frac{1}{2\gamma N - 2\gamma}\ \{\gamma N^2 tgh[\gamma N(\tau - t)] + \gamma N\}\ , \qquad (2\text{-}181)$$

então, pelas Eqs. (2-140a) e (2-140b):

$$I(t) = \frac{\omega\gamma N^3}{2(N-1)}\ \text{sech}^2\ [N\gamma(t-\tau)]\ , \qquad (2\text{-}182)$$

com

$$\tau = \frac{1}{2N\gamma}\ \ell n\ \{\frac{N-1}{1 + N\ \text{cotg}^2\ \frac{\theta_o}{2}}\}, \qquad (2\text{-}183)$$

observamos que a intensidade da radiação tem um comportamento secante hiperbólico ao quadrado e para $N >> 1$ é proporcional a N^2, significando que há superradiância.

Para um modelo onde cada átomo é substituído por um oscilador harmônico [9,10], estando de posse do Hamiltoniano dado pela Eq. (2-44), obtemos analogamente a Equação Master,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\ i\omega\gamma \sum_i [b_i^+ b_i, \rho] - i \sum_{i \neq j} \Omega_{ij}^{(1)} [b_i^+ b_j, \rho] -$$

$$- \sum_{ij} \gamma_{ij} [b_i^+ b_j \rho - 2 b_j \rho b_i^+ + \rho b_i^+ b_j]\ , \qquad (2\text{-}184)$$

onde b_i e b_i^+ são operadores de boson de aniquilação e criação, respectivamente.

Para estados coerentes [16], a matriz densidade na forma anti-normal é

$$\rho = \int \Phi(\{z\}) |\{z\}><\{z\}| d^2(\{z\}), \tag{2-185}$$

onde $|\{z\}>$ são estados coerentes (Apêndice C), e

$$d^2(\{z\}) = \prod_k d^2 z_k \ . \tag{2-186}$$

Substituindo a Eq. (2-185) na Eq. (2-184), obtemos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \sum_i \{i\omega\gamma \frac{\partial}{\partial z_i}(z_i \Phi) + c.c.\} +$$

$$+ \sum_{i \neq j} \Omega_{ij}^{(1)} \{i \frac{\partial}{\partial z_i}(z_j \Phi) + c.c.\} +$$

$$+ \sum_{ij} \gamma_{ij} \{\frac{\partial}{\partial z_i}(z_j \Phi) + c.c.\} , \tag{2-187}$$

onde usamos

$$b_i |\{z\}><\{z\}| = z_i |\{z\}><\{z\} , \tag{2-188}$$

$$b_i^+ |\{z\}><\{z\}| = (z_i^* + \frac{\partial}{\partial z_i}) |\{z\}><\{z\{|. \tag{2-189}$$

A Eq. (2-187) é a equação de Fokker-Planck da qual obtemos as equações de Langevin [17],

$$\dot{Z}_i = - i\omega\gamma\, Z_i - i \sum_{i\neq j} \Omega_{ij}^{(1)}\, Z_j - \sum_j \gamma_{ij}\, Z_j \,. \qquad (2\text{-}190)$$

A equação de Fokker-Planck e as equações de Langevin, descrevem um processo irreversível, ou seja, fora do equilíbrio , onde há uma força aleatória externa atuando sobre o sistema. Considerando, sistemas pequenos e desprezando os termos $\Omega_{ij}^{(1)}$, a solução da Eq. (2-190) é

$$\Phi(t) = \prod_i \delta^{(2)}(Z_i - \bar{Z}_i(t)), \qquad (2\text{-}191)$$

onde

$$\bar{Z}_i(t) = Z_i^o - \frac{1}{N}(1 - e^{-\gamma t N}) \sum_j Z_j^o \,, \qquad (2\text{-}192)$$

com a condição inicial,

$$\Phi(0) = \prod_i \delta^{(2)}(Z_i - Z_i^o), \qquad (2\text{-}193)$$

e a intensidade da radiação |9| deste sistema é,

$$I(t) = 2\gamma\omega\, e^{-2\gamma t N} \sum_{ij} \langle b_i^+ b_j \rangle_o \,. \qquad (2\text{-}194)$$

Substituindo a Eq. (2-191) na Eq. (2-185), obtemos a solução do estado estacionário,

$$\rho(\infty) = |\{Z_i^o - \frac{1}{N}\sum_j Z_j^o\}\rangle\langle\{Z_i^o - \frac{1}{N}\sum_j Z_j^o\}| \,, \qquad (2\text{-}195)$$

onde usamos a Eq. (2-192). Na equação acima, quando $Z_i^o = Z_o$

obtemos o estado fundamental do sistema.

Para calcular o valor médio de $b_i^+ b_j$ da Eq. (2-194) consideraremos uma excitação inicial do estado de Fock (Apêndice B). Na excitação inicial coerente assumimos que cada oscilador harmônico foi inicialmente excitado a um estado coerente $|Z_o\rangle$. A intensidade da radiação neste caso é

$$I_{co}(t) = 2\gamma\omega N^2 \, e^{-2\gamma N t} |Z_o|^2 \, . \qquad (2\text{-}196)$$

Como a intensidade da radiação é proporcional a N^2, temos uma emissão superradiante usando um estado coerente.

Substituindo as Eqs. (2-191) e (2-192) na Eq. (2-185), obtemos a matriz densidade:

$$\rho(t) = \prod_i |Z_o \, e^{-N\gamma t}\rangle_i \, {}_i\langle Z_o \, e^{-N\gamma t}| , \qquad (2\text{-}197)$$

onde usamos $Z_i^o = Z_o$. Neste caso, como não há correlações induzidas entre dois osciladores, temos superradiância de primeira espécie.

Na excitação inicial do estado de Fock, a qual é uma excitação incoerente, a intensidade da radiação é dada por,

$$I_F(t) = 2\gamma\omega \, e^{-2\gamma N t} \sum_i \langle b_i^+ b_i \rangle_o \, , \qquad (2\text{-}198)$$

observamos que $b_i^+ b_i$ é o operador número, e é igual a N, por isso não há superradiância e temos uma emissão incoerente , sendo que cada oscilador harmônico foi inicialmente excitado a um estado de Fock:

$$|\{n\}\rangle = |n_1, n_2, \ldots, n_N\rangle . \qquad (2\text{-}199)$$

Usando a equação acima e o mapeamento da Eq. (2-192),

$$b_i(t) = b_i - \frac{1}{N}(1 - e^{-\gamma N t}) \sum_j b_j , \qquad (2\text{-}200)$$

obtemos as correlações induzidas entre diferentes oscilado-res,

$$\langle b_i^+(t) b_j(t)\rangle - \langle b_i^+(t)\rangle\langle b_j(t)\rangle =$$

$$= -\frac{2n}{N} \operatorname{senh}(N\gamma t)\, e^{-N\gamma t}, \quad i \neq j, \qquad (2\text{-}201)$$

onde n indica a excitação inicial do sistema. Estas correla-ções induzidas são resultados da emissão incoerente.

C A P Í T U L O 3

CÁLCULOS COM O TERMO A^2

Considerando o termo A^2 no Hamiltoniano, Eq. (2-42), sem a energia de interação dipolar, queremos saber se muda as características do sistema atômico de dois níveis interagindo com um campo eletromagnético, ou seja, queremos determinar sua influência neste processo.

Faremos os mesmos cálculos do Capítulo 2, agora usando o Hamiltoniano com o termo A^2, Eq. (2-42), ao invés do Hamiltoniano, Eq. (2-40), utilizado. Com isto, determinamos a Equação Master, que é usada para obter a intensidade de emissão de radiação e o número médio de fótons de um átomo de dois níveis.

3-1. OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO MASTER

A Equação Master, Eq. (2-123), foi obtida no Capítulo 2, fazendo uso do Hamiltoniano, Eq. (2-40), agora obteremos uma Equação Master, partindo do Hamiltoniano com o termo A^2, Eq. (2-42).

Pela equação de movimento de Heisenberg e o Hamiltoniano com o termo A^2 Eq. (2-42), na representação de interação, para obtermos a dependência temporal dos operadores a^+ e a, resulta

$$\dot{a}^+ = ia^+\omega' + 2i\kappa a, \qquad (3\text{-}1)$$

$$\dot{a} = - ia\omega' - 2i\kappa a^{+}, \tag{3-2}$$

com

$$\omega' = \omega_o + 2\kappa \ . \tag{3-3}$$

Resolvendo de uma maneira matricial, as Eqs. (3-1) e (3.2) , resulta

$$a^{+}(t) = a^{+}(0)\cos(\omega_o'^{1/2}t) + i\frac{\omega'}{\omega_o'^{1/2}}a^{+}(0)\mathrm{sen}(\omega_o'^{1/2}t) +$$

$$+ i\frac{2\kappa}{\omega_o'^{1/2}}a(0)\mathrm{sen}(\omega_o'^{1/2}t), \tag{3-4}$$

$$a(t) = a(0)\cos(\omega_o'^{1/2}t) - i\frac{\omega'}{\omega_o'^{1/2}}a(0)\mathrm{sen}(\omega_o'^{1/2}t) -$$

$$- i\frac{2\kappa}{\omega_o'^{1/2}}a^{+}(0)\mathrm{sen}(\omega_o'^{1/2}t), \tag{3-5}$$

onde

$$\omega_o' = \omega_o^2 + 4\kappa\ \omega_o \ , \tag{3-6}$$

$$e^{i\begin{pmatrix}\omega' & 2\kappa\\ -2\kappa-\omega' & \end{pmatrix}t} = \cos(\omega_o'^{1/2}t)\,\hat{1} + \frac{i}{\omega_o'^{1/2}}\mathrm{sen}(\omega'^{1/2}t)\begin{pmatrix}\omega' & 2\kappa\\ -2\kappa & -\omega'\end{pmatrix} . \tag{3-7}$$

Os cálculos que faremos são análogos aos cálculos feitos na seção 2-2 do Capítulo 2.

Usando as Eqs. (3-4) e (3-5), para obter $\xi_{j\beta}$ e $\zeta_{\beta j}$, Eqs. (E-8) e (E-9), respectivamente (Apêndice E), resulta

$$\xi_{22}(t-t') = \xi_{32}(t-t') = 0, \tag{3-8}$$

$$\xi_{33}(t-t') = i\,\frac{2\kappa}{\omega_o'^{1/2}}\,\mathrm{sen}[\omega_o'^{1/2}(t-t')]\ , \tag{3-9}$$

$$\xi_{23}(t-t') = \cos[\omega_o'^{1/2}(t-t')] - i\,\frac{\omega'}{\omega_o'^{1/2}}\,\mathrm{sen}[\omega'^{1/2}(t-t')], \tag{3-10}$$

$$\zeta_{32}(t-t') = \zeta_{33}(t-t') = 0\ , \tag{3-11}$$

$$\zeta_{22}(t-t') = -\,i\,\frac{2\kappa}{\omega_o'^{1/2}}\,\mathrm{sen}\,[\omega_o'^{1/2}(t-t')]\ , \tag{3-12}$$

$$\zeta_{23}(t-t') = \cos[\omega_o'^{1/2}(t-t')] + i\,\frac{\omega'}{\omega_o'^{1/2}}\,\mathrm{sen}[\omega_o'^{1/2}(t-t')], \tag{3-13}$$

veja as Eqs. (E-17) até (E-22) e as Eqs. (E-25) e (E-26) (Apêndice E).

Então, tendo em vista as equações acima, obtemos

$$\mathrm{Tr}_R\, Q_{I-1}(t-t') = -\,g^2_{21\lambda\mu}[S^+_\mu(t),\, S^-_\mu(t')\tilde{\rho}_s(t')]\xi_{23}(t-t')\ , \tag{3-14}$$

$$\mathrm{Tr}_R\, Q_{II-1}(t-t') = -\,g^2_{21\lambda\mu}[S^-_\mu(t),\, \tilde{\rho}_s(t')S^+_\mu(t')]\zeta_{23}(t-t'), \tag{3-15}$$

$$\mathrm{Tr}_R\, Q_{I-2}(t-t') = -\,g^2_{21\lambda\mu}[S^+_\mu(t),\, S^-_\mu(t')\tilde{\rho}_s(t')]\xi_{33}(t-t') \tag{3-16}$$

$$\mathrm{Tr}_R\, Q_{II-2}(t-t') = -\,g^2_{21\lambda\mu}[S^-_\mu(t),\, \tilde{\rho}_s(t')S^+_\mu(t')]\zeta_{22}(t-t') \tag{3-17}$$

onde fizemos a aproximação de onda girante. As Eqs. (3-14) até (3-17) são análogos às Eqs. (E-24) e (E-27).

Usando as Eqs. (2-70), (3-14) e (3-16), na Eq. (2-65), obtemos

$$I_{I1+I2} = g_{21\lambda\mu}^2 \int_o^t d\tau [S_\mu^+, S_\mu^- \tilde{\rho}_s(t-\tau)](\xi_{23} + \xi_{33}) e^{i\omega_\lambda \tau}, \qquad (3\text{-}18)$$

e com a aproximação Markoviana,

$$I_{I1+I2} = g_{21\lambda\mu}^2 [S_\mu^+, S_\mu^- \tilde{\rho}_s(t)] \int_o^\infty d\tau\, e^{i\omega_\lambda \tau} (\xi_{23} + \xi_{33}), \qquad (3\text{-}19)$$

veja a Eq. (2-72). Obtemos uma equação análoga à Eq. (3-19), para $I_{III+II2}$, usando as Eqs. (3-15) e (3-17). Resolvendo a integral da Eq. (3-19), usando as Eqs. (3-9) e (3-10), resulta

$$\int_o^\infty d\tau\, e^{i\omega_\lambda \tau} (\xi_{23} + \xi_{33}) = \frac{1}{2}\left[1 + \left(1 + \frac{4\kappa}{\omega_o}\right)^{-1/2}\right] \delta\left[\omega_\lambda - \omega_o\left(1 + \frac{4\kappa}{\omega_o}\right)^{1/2}\right], \qquad (3\text{-}20)$$

e observamos que há uma mudança somente na frequência, isto é, há um deslocamento na frequência.

Os cálculos seguem análogos ao da seção 2-2 do Capítulo 2, e a Equação Master que obtemos é,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -i\omega_\gamma \sum_i [S_i^+ S_i^-, \rho] - i \sum_{i \neq j} \Omega_{ij}^{(1)} [S_i^+ S_j^-, \rho] -$$

$$- \frac{1}{2}\left[1 + \left(1 + \frac{4\kappa}{\omega_o}\right)^{1/2}\right] \sum_{i,j} \gamma_{ij} (S_i^+ S_j^- \rho -$$

$$- 2 S_j^- \rho S_i^+ + \rho S_i^+ S_j^-). \qquad (3\text{-}21)$$

Para $\kappa = 0$ na equação acima, obtemos a Equação Master dada pela Eq. (2-123).

A Equação Master, Eq. (3-21), onde introduzimos o termo A^2, não muda a dinâmica do sistema, havendo somente um deslocamento na frequência.

Calculando as intensidades de emissão de radiação, obtidas na seção 2-4 do Capítulo 2, fazendo uso da Equação Master dada pela Eq. (3-21), obtemos expressões análogas, redefinindo γ_{ij} como,

$$\gamma'_{ij} = \frac{1}{2}\left[1 + (1 + \frac{4\kappa}{\omega_o})^{1/2}\right]\gamma_{ij} \ , \qquad (3\text{-}22)$$

observamos pela emissão de radiação, que o termo A^2, introduzido no Hamiltoniano, não suprime superradiância. Já no tratamento termodinâmico da transição de fase superradiante feito por A.A.S. Brito e W.F. Wreszinski [18], os resultados são que há um intervalo $[0,\alpha)$, $\alpha < 1$, de valores de t (Eq. (2-43)) onde o modelo exibe uma transição de fase superradiante, enquanto que para $t \in [\alpha,1]$ não há transição de fase.

3-2. NÚMERO MÉDIO DE FÓTONS DE UM ÁTOMO DE DOIS NÍVEIS

Para sabermos o que acontece com o número médio de fótons de um átomo de dois níveis, fazendo uso da Equação Master dada pela Eq. (3-21), reescrevemos a Eq. (3-22) como,

$$\gamma' = \frac{1}{2}\left[1 + (1 + \frac{4\kappa}{\omega_o})^{1/2}\right]\gamma \ , \qquad (3\text{-}23)$$

onde usamos a Eq. (2-190).

Então, análogo à seção 2-3 do Capítulo 2, resulta

$$\langle S^+(t)S^-(t')\rangle = \exp\{i\omega_\gamma(t-t') - \gamma'|t + t'|\}\langle S^+S^-\rangle_o, \quad (3\text{-}24)$$

onde usamos o teorema da regressão quântica. A Eq. (3-24) é análoga a Eq. (2-135).

Pela equação de movimento de Heisenberg e usando o Hamiltoniano dado pela Eq. (2-42), na representação de Schrödinger, resulta

$$\dot{a}^+ = ia^+\omega' + 2i\kappa a + igS^+ , \quad (3\text{-}25)$$

$$\dot{a} = - ia\omega' - 2i\kappa a^+ - ig^*S^-, \quad (3\text{-}26)$$

onde não consideramos o termo anti-ressonante, $a^+S^+ + aS^-$, por causa da aproximação de onda girante. Resolvendo de forma matricial as Eqs. (3-25) e (3-26), obtemos

$$\begin{pmatrix} \dot{a}^+ \\ \dot{a} \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \omega' & 2\kappa \\ -2\kappa & -\omega' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^+ \\ a \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} gS^+ \\ -g^*S^- \end{pmatrix}. \quad (3\text{-}27)$$

Para a equação diferencial linear,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) , \quad (3\text{-}28)$$

temos a solução,

$$Y = C\, e^{-\int P dx} + e^{-\int P dx} \int Q(x')\, e^{\int P dx'}\, dx' , \quad (3\text{-}29)$$

então, de acordo com as Eqs. (3-28) e (3-29), a solução da Eq. (3-27) é,

$$\begin{pmatrix} a^+ \\ a \end{pmatrix} = e^{i\begin{pmatrix} \omega' & 2\kappa \\ -2\kappa & -\omega' \end{pmatrix}t} \begin{pmatrix} a^+(0) \\ a(0) \end{pmatrix} +$$

$$+ i\, e^{i\begin{pmatrix} \omega' & 2\kappa \\ -2\kappa & -\omega' \end{pmatrix}t} \int e^{-i\begin{pmatrix} \omega' & 2\kappa \\ -2\kappa & -\omega' \end{pmatrix}t'} \begin{pmatrix} gS^+ \\ -g^*S^- \end{pmatrix} dt' \,, \tag{3-30}$$

e usando a Eq. (3-7), resulta

$$a^+(t) = a^+(0)\left[\alpha(t) + \beta(t)\right] + a(0)\,\gamma(t) +$$

$$+ g\int_0^t S^+(t')\{\left[i\cos(\omega_o'^{1/2}t) - \frac{\omega'}{\omega_o'^{1/2}}\operatorname{sen}(\omega_o'^{1/2}t)\right] x$$

$$x\cos(\omega_o'^{1/2}t') + \left[\frac{\omega'}{\omega_o'^{1/2}}\cos(\omega_o'^{1/2}t) +\right.$$

$$\left. + \frac{i}{\omega_o'}(\omega'^2 - 4\kappa^2)\operatorname{sen}(\omega_o'^{1/2}t)\right]\operatorname{sen}(\omega_o'^{1/2}t')\}dt' +$$

$$+ \frac{2\kappa g}{\omega_o'^{1/2}}\int_0^t S^-(t')\{\operatorname{sen}(\omega_o'^{1/2}t)\cos(\omega_o'^{1/2}t') -$$

$$- \cos(\omega_o'^{1/2}t)\operatorname{sen}(\omega_o'^{1/2}t')\}\,dt' \tag{3-31}$$

onde

$$\alpha(t) = \cos(\omega_o'^{1/2} t) \ , \tag{3-32}$$

$$\beta(t) = i \frac{\omega'}{\omega_o'^{1/2}} \operatorname{sen}(\omega_o'^{1/2} t) \ , \tag{3-33}$$

$$\gamma(t) = i \frac{2\kappa}{\omega_o'^{1/2}} \operatorname{sen}(\omega_o'^{1/2} t) \ . \tag{3-34}$$

Pelas Eqs. (2-131) e (2-132), para um estado arbitrário,

$$\langle S^- S^+ \rangle = \hat{1} - \langle S^+ S^- \rangle \ , \tag{3-35}$$

$$\langle S^+ S^+ \rangle = \langle S^- S^- \rangle = 0 \ . \tag{3-36}$$

Pela Eq. (3-31) e seu complexo conjugado, usando as Eqs. (2-127), (3-35) e (3-36), obtemos o número médio de fótons de um átomo de dois níveis,

$$\begin{aligned}
\langle a^+ a \rangle_t = {} & \frac{4\kappa^2}{\omega_o'^2} \operatorname{sen}^2(\omega_o'^{1/2} t) + \\
& + |g|^2 \left\{ \frac{4\kappa^2}{\omega_o'^2} \cos^2(\omega_o'^{1/2} t) \left[\cos^2(\omega_o'^{1/2} t) - 2\cos(\omega_o'^{1/2} t) + 1 \right] - \right. \\
& - \frac{8\kappa^2}{\omega_o'^2} \cos(\omega_o'^{1/2} t) \operatorname{sen}^2(\omega_o'^{1/2} t) \left[1 - \cos(\omega_o'^{1/2} t) \right] + \\
& \left. + \frac{4\kappa^2}{\omega_o'^2} \operatorname{sen}^4(\omega_o'^{1/2} t) \right\} + \\
& + \frac{|g|^2 \langle S^+ S^- \rangle_o}{(-\omega_\gamma^2 - \gamma^2)^2 + \omega_o' [\omega_o' - 2\omega_\gamma^2 + 2\gamma'^2]} \times
\end{aligned}$$

$$x \left\{ \left[\cos^2(\omega_o'^{1/2}t) + \frac{1}{\omega_o'} \operatorname{sen}^2(\omega_o'^{1/2}t)\left[\omega'^2 - 4\kappa^2\right]\right] \right. \quad x$$

$$x \left\{ e^{-2\gamma' t}\left[(\omega_\gamma^2 + \gamma'^2)\cos^2(\omega_o'^{1/2}t) - \right.\right.$$

$$-2\gamma'\omega_o'^{1/2} \cos(\omega_o'^{1/2}t)\operatorname{sen}(\omega_o'^{1/2}t) + \omega_o' \operatorname{sen}^2(\omega_o'^{1/2}t)\left.\right] +$$

$$+ 2e^{-\gamma' t}\left[(-\omega_\gamma^2 - \gamma^2)\cos(\omega_o'^{1/2}t)\cos(\omega_\gamma t) + \right.$$

$$+ \gamma'\omega_o'^{1/2}\operatorname{sen}(\omega_o'^{1/2}t)\cos(\omega_\gamma t) - \omega_\gamma\omega_o'^{1/2}\operatorname{sen}(\omega_o'^{1/2}t)\operatorname{sen}(\omega_\gamma t)\left.\right] +$$

$$\left. + \omega_\gamma^2 + \gamma'^2\right\} + \left[\frac{1}{\omega_o'} \cos^2(\omega_o'^{1/2}t)\left[\omega'^2 - 4\kappa^2\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\omega_o'^2} \operatorname{sen}^2(\omega_o'^{1/2}t)\left[16\kappa^4 + \omega'^4 - 8\kappa^2\omega'^2\right]\right] \quad x$$

$$x \left\{ e^{-2\gamma' t}\left[(\omega_\gamma^2 + \gamma'^2)\operatorname{sen}^2(\omega_o'^{1/2}t) + \omega_o' \cos^2(\omega_o'^{1/2}t) + \right.\right.$$

$$+ 2\gamma' \omega_o'^{1/2} \cos(\omega_o'^{1/2}t)\operatorname{sen}(\omega_o'^{1/2}t)\left.\right] -$$

$$- 2\, e^{-\gamma' t} \cos(\omega_\gamma t)\left[\gamma'\omega_o'^{1/2} \operatorname{sen}(\omega_o'^{1/2}t) + \omega_o'\cos(\omega_o'^{1/2}t)\right] +$$

$$\left. + \omega_o'\right\} +$$

$$+ \left[\frac{\omega'}{\omega_o'^{1/2}} \cos^2(\omega_o'^{1/2}t) + \frac{\omega'}{\omega_o'^{3/2}} \operatorname{sen}^2(\omega_o'^{1/2}t)\left[\omega'^2 - 4\kappa^2\right]\right] x$$

$$x \quad \{2\omega_\gamma \omega_o'^{1/2} e^{-2\gamma' t} + 2\omega_o'^{1/2}\omega_\gamma -$$

$$- 2\omega_\gamma \omega_o'^{1/2}\cos(\omega_o'^{1/2}t)\cos(\omega_\gamma t) e^{-\gamma' t} -$$

$$- 2\,\mathrm{sen}(\omega_o'^{1/2}t) e^{-\gamma' t}[\omega_o' \mathrm{sen}(\omega_\gamma t) + (\omega_\gamma^2+\gamma'^2)\mathrm{sen}(\omega_\gamma t)]\}\} ,$$

(3-37)

veja o Apêndice C. Na equação acima, fazendo $\kappa = 0$, obtemos a Eq. (2-136) que é a probabilidade do resultado clássico da teoria de Weisskopf-Wigner. Observamos que o número médio de fótons de um átomo com o termo A^2 introduzido no Hamiltoniano, ocorre um deslocamento na frequência não alterando suas características.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS E CONCLUSÕES

Há uma diferença ao se fazer a aproximação de onda girante no Hamiltoniano ou na Equação Master. Se fazemos a aproximação de onda girante no Hamiltoniano obtemos uma frequência renormalizada incorreta mudando a forma da Equação Master e, alterando assim dinâmica. Portanto, devemos fazer a aproximação de onda girante na Equação Master.

Se considerarmos a energia de interação dipolar no Hamiltoniano, a Equação Master obtida terá um desvio na frequência não mudando sua forma.

Para um sistema atômico preparado sem correlações atômicas, ou seja, as funções de onda dos átomos do sistema atômico não se superpõem, e com momento de dipolo finito, obtemos a conhecida superradiância de primeira espécie. Mas para um sistema atômico preparado com correlações atômicas e momento de dipolo nulo resulta a chamada superradiância de segunda espécie. Portanto observamos que para um sistema atômico sem correlações e momento de dipolo nulo não há emissão superradiante.

Neste trabalho colocamos a restrição às dimensões do sistema atômico para que sejam pequenas comparadas ao comprimento de onda da radiação emitida. Observamos que para dimensões do sistema atômico maiores que o comprimento de onda da radiação emitida a intensidade da radiação dependerá da direção de emissão da radiação e da forma geométrica do sistema atômico [2].

No tratamento da superradiância através da Eletrodinâmica Quântica (QED) observamos uma diferença substancial da teoria semiclássica. Enquanto na QED o tempo para a emissão de pico superradiante de um sistema completamente excitado é finito, na teoria semiclássica é infinito [29]. Outro exemplo é a modulação da frequência do campo emitido que em geral na QED não aparece, mas que na teoria semiclássica ela está presente.

Quando calculamos a intensidade da radiação para verificar em quais condições ocorre superradiância, escolhemos para estado atômico inicial os estados de Dicke e de Bloch. O estado de Dicke é gerado pela absorção de um número inteiro de fótons pelo sistema atômico de uma maneira completamente simétrica por N átomos no estado fundamental. O estado de Bloch ou estado-θ (que é um estado coerente) é gerado pela ação de um pulso de radiação puramente clássico sobre os N átomos no estado fundamental [27].

Quando usamos o modelo no qual cada átomo de dois níveis é substituído por um oscilador harmônico, observamos que para estados de Fock não há emissão superradiante.

No artigo de A.A.S. Brito e W.F. Wreszinki [18] que fazem um tratamento termodinâmico da transição de fase superradiante usando o termo A^2 no Hamiltoniano, observamos que dependendo das condições sobre as constantes de acoplamento do termo ressonante e do termo anti-ressonante do Hamiltoniano, pode haver superradiância ou não. No caso dinâmico a Equação Master obtida com o termo A^2 no Hamiltoniano houve somente um deslocamento na frequência não alterando a dinâmica da interação do sistema atômico de dois níveis com um campo ele-

A P Ê N D I C E A

TEOREMA DA REGRESSÃO QUÂNTICA

O teorema da regressão quântica define um sistema Markoviano quântico, ou seja, um sistema sem memória. Este teorema descreve o movimento de operadores do sistema em interação com um reservoir. Podemos, por exemplo, usar o teorema da regressão quântica para processos Markovianos na representação de estados coerentes para resolver o oscilador harmônico amortecido.

Se M é um membro ou uma combinação linear de um conjunto completo de operadores do sistema Markoviano M_μ, então, a evolução no tempo de um operador é

$$\langle M(t)\rangle = \sum_\mu 0_\mu(t,t') \langle M_\mu(t')\rangle \ , \qquad \text{(A-1)}$$

com $t > t'$. Se conhecemos $0_\mu(t,t')$ para um único tempo, então, a média de um operador de dois tempos é dada por,

$$\langle Q(t')M(t)N(t')\rangle = \sum_\mu 0_\mu(t,t') \langle Q(t')M_\mu(t')N(t')\rangle \ , \qquad \text{(A-2)}$$

e a média de um operador de três tempos é,

$$\langle Q(t',t")M(t)N(t',t")\rangle =$$

$$= \sum_\mu 0_\mu(t,t') \langle Q(t',t")M_\mu(t')N(t',t")\rangle \ , \qquad \text{(A-3)}$$

onde N e Q são quaisquer operadores do sistema. As Eqs. (A-2) e (A-3), mostram que a dependência no tempo da variável t destas médias em vários tempos é a mesma que a dependência no tempo da variável t mostrada na equação de um único tempo, Eq. (A-1).

A P Ê N D I C E B

B.1. ESTADOS DE FOCK

Definimos estados de Fock para bosons e fermions, na segunda quantização, quando tratamos com partículas idênticas.

i) Bosons

Seja o estado $|n_1, n_2,\ldots,n_\nu,\ldots\rangle$, representando o número de ocupação de partículas que está num espaço de Fock. Para bosons, por exemplo, fótons, seguem as condições,

$$a_\nu^+|n_1, n_2,\ldots,n_\nu,\ldots\rangle = \sqrt{n_\nu+1}|n_1,\ldots,n_\nu+1,\ldots\rangle \ , \qquad \text{(B-1)}$$

$$a_\nu|n_1, n_2,\ldots,n_\nu,\ldots\rangle = \sqrt{n_\nu}\,|n_1,\ldots,n_\nu-1,\ldots\rangle \ , \qquad \text{(B-2)}$$

onde os operadores a^+ e a, de criação e aniquilação satisfazem as relações de comutação,

$$[a_\nu, a_{\nu'}^+] = \delta_{\nu\nu'} \qquad \text{(B-3)}$$

$$[a_\nu, a_{\nu'}] = [a_\nu^+ , a_{\nu'}^+] = 0 \ , \qquad \text{(B-4)}$$

o estado $|n_1, n_2,\ldots,n_\nu,\ldots\rangle$ é chamado um estado de Fock.

Podemos obter um estado $|n\rangle$ simétrico do oscilador harmônico, como

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^+)^n |0\rangle \ , \qquad \text{(B-5)}$$

onde o estado de vácuo é definido como,

$$a|0\rangle = 0. \qquad \text{(B-6)}$$

O operador número é,

$$\hat{N}|n_1,n_2,\ldots,n_\nu,\ldots\rangle = a_\nu^+ a_\nu |n_1,\ldots,n_\nu,\ldots\rangle =$$

$$= n_\nu |n_1,\ldots,n_\nu,\ldots\rangle \ . \qquad \text{(B-7)}$$

Neste formalismo, a função de onda é simétrica e usamos a estatística de Bose-Einstein.

ii) Fermions

Os fermions obedecem o Princípio de Pauli. Então, para férmions, por exemplo, elétrons, segue que

$$\alpha_s |n_1, n_2,\ldots,n_s,\ldots\rangle = (-1)^{1/s} n_s |n_1,\ldots,1-n_s,\ldots\rangle \ , \qquad \text{(B-8)}$$

$$\alpha_s^+ (n_1,n_2,\ldots,n_s,\ldots\rangle = (-1)^{1/s} (1-n_s)|n_1,\ldots,1-n_s,\ldots\rangle , \qquad \text{(B-9)}$$

com o número de estados,

$$\nu_s = \sum_{\ell=1}^{s-1} n_\ell \ , \qquad \text{(B-10)}$$

e os operadores α^+ e α, de criação e aniquilação satisfazem as relações de anti-comutação,

$$[\alpha_s,\ \alpha^+_\ell]_+ = \delta_{s\ell}\ , \tag{B-11}$$

$$[\alpha_s,\ \alpha_\ell]_+ = [\alpha^+_s,\ \alpha^+_\ell]_+ = 0. \tag{B-12}$$

Quando tratamos com fermions, a função de onda é anti-simétrica, e utilizamos a estatística de Fermi-Dirac.

B-2. ESTADOS COERENTES DO OSCILADOR HARMÔNICO

Os estados coerentes do oscilador harmônico são uma ferramenta útil na Física, podendo ser usados para descrever supercondutividade e superfluidez [22], fonons em cristais [23] e vibrações coletivas em núcleos [24]. Os estados coerentes são também usados para fazer a aproximação no limite clássico.

Definimos os estados coerentes para um único modo, como

$$a|v\rangle = v|v\rangle\ , \tag{B-13}$$

onde os autovalores v são números complexos.

Construimos o estado coerente $|v\rangle$, por meio de uma expansão em estados de Fock, Eq. (B-5),

$$|v\rangle = \exp(-\tfrac{1}{2}|v|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle\ . \tag{B-14}$$

O número de fótons encontrados num estado coerente não é limitado, podendo ficar no intervalor de 0 à ∞. Através da Eq. (B-5), podemos escrever a Eq. (B-14), como

$$|v\rangle = \exp(-\frac{1}{2}|v|^2 + v\, a^+)|0\rangle \ . \qquad \text{(B-15)}$$

Pela expansão acima, resulta

$$|\langle v'|v\rangle|^2 = \exp(-\ |v' - v|^2)\,, \qquad \text{(B-16)}$$

assim, dois estados coerentes correspondentes a autovalores diferentes v e v' não são ortogonais.

A relação de super-completeza para estados coerentes é,

$$\frac{1}{\pi}\int |v\rangle\langle v|d^2v = 1\ , \qquad \text{(B-17)}$$

esta integral é extendida sobre o plano - v complexo.

Para representar vetores de estado, em termos de estados coerentes, consideramos um vetor arbitrário do espaço de Hilbert $|f\rangle$, $||\ |f\rangle\ || < \infty$, tal que

$$|f\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2v\langle v|f\rangle|v\rangle \ . \qquad \text{(B-18)}$$

Expandindo $|f\rangle$ em estados de Fock,

$$|f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f_n|n\rangle\ , \qquad \text{(B-19)}$$

temos que

$$\langle v|f\rangle = \exp(-\tfrac{1}{2}|v|^2) f(v^*), \qquad \text{(B-20)}$$

onde

$$f(v^*) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{(v^*)^n}{\sqrt{n!}} \quad . \qquad \text{(B-21)}$$

Substituindo a Eq. (B-20) na Eq. (B-18), obtemos $|f\rangle$ expandindo em termos de estados coerentes,

$$|f\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2v \exp(-\tfrac{1}{2}|v|^2) f(v^*) |v\rangle \quad . \qquad \text{(B-22)}$$

B-3. ESTADOS DE BLOCH

Os estados de Bloch são também denominados de estados-θ, e são estados coerentes. O espaço onde estão os estados de Bloch é uma esfera chamada "esfera de Bloch" a qual é o grupo $SU(2)/U_2(1) \cong S^2$. Estes estados estão numa correspondência unívoca com os pontos sobre a superfície da esfera.

Deduziremos o estado $|\psi\rangle$ numa base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, considerando a orientação do spin, em coordenadas esféricas (Fig. 7).

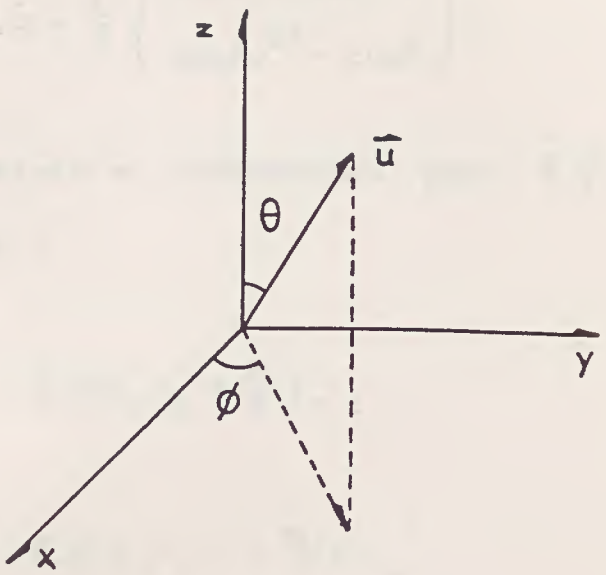


Fig. 7 - Orientação do spin, $0 < \theta < \pi$ e $0 < \phi < 2\pi$.

Seja, o spin orientado na direção do versor $\vec{u}$:

$$\vec{u} = \text{sen}\theta\cos\phi\ \hat{i} + \text{sen}\theta\text{sen}\phi\ \hat{j} + \cos\theta\ \hat{k}\ , \qquad \text{(B-23)}$$

e o vetor de spin $\vec{S}$ nesta direção é,

$$\vec{S}.\vec{u} = S_x\ \text{sen}\theta\cos\phi + S_y\ \text{sen}\theta\text{sen}\phi + S_z\ \cos\theta\ , \qquad \text{(B-24)}$$

onde

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\ h\ \vec{\sigma}\ , \qquad \text{(B-25)}$$

sendo $\vec{\sigma}$ dado pelas matrizes de Pauli,

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(B-26)}$$

Pelas Eqs. (B-24) e (B-26), obtemos

$$\vec{S}.\vec{u} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta e^{-i\phi} \\ \operatorname{sen}\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}. \qquad \text{(B-27)}$$

Vamos construir os autovalores para $\vec{S}.\vec{u}$ na representação $\{|+>\ ,\ |->\}$:

$$\vec{S}.\vec{u}|\psi_+>_u = \frac{\hbar}{2}|\psi_+>_u\ , \qquad \text{(B-28)}$$

$$\vec{S}.\vec{u}|\psi_->_u = -\frac{\hbar}{2}|\psi_->_u\ , \qquad \text{(B-29)}$$

onde

$$|\psi_+>_u = \alpha|+> + \beta|->\ , \qquad \text{(B-30)}$$

$$|\psi_->_u = \alpha'|+> + \beta'|->\ , \qquad \text{(B-31)}$$

com isto, resolvemos uma equação de autovalor, obtendo os estados de Bloch,

$$|\psi_+>_u = \cos\frac{\theta}{2}\, e^{-i\phi/2}|+> + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\, e^{i\phi/2}|->\ , \qquad \text{(B-32)}$$

$$|\psi_->u = \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\, e^{-i\phi/2}|+> + \cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\phi/2}|->\ , \qquad \text{(B-33)}$$

correspondendo aos autovalores $\hbar/2$ e $-\hbar/2$, respectivamente.

A P Ê N D I C E C

DEDUÇÃO DA EQ. (3-37)

Quando calculamos $\langle a^{+}a\rangle_{t}$, usando a Eq. (3-31), e seu complexo conjugado, obtemos integrais como,

$$A = \int_{o}^{t}\int_{o}^{t} \langle S^{+}(\tau_1)S^{-}(\tau_2)\rangle \cos(\omega_o'^{1/2}\tau_1)\cos(\omega_o'^{1/2}\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2, \quad \text{(C-1)}$$

$$B = \int_{o}^{t}\int_{o}^{t} \langle S^{+}(\tau_1)S^{-}(\tau_2)\rangle \operatorname{sen}(\omega_o'^{1/2}\tau_1)\cos(\omega_o'^{1/2}\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2, \quad \text{(C-2)}$$

$$C = \int_{o}^{t}\int_{o}^{t} \langle S^{+}(\tau_1)S^{-}(\tau_2)\rangle \operatorname{sen}(\omega_o'^{1/2}\tau_1)\operatorname{sen}(\omega_o'^{1/2}\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2, \quad \text{(C-3)}$$

onde $\langle S^{+}(\tau_1)S^{-}(\tau_2)\rangle$ é dado pela Eq. (3-24).

Para resolver as integrais das Eqs. (C-1) até (C-3), fazemos uso das expressões

$$\int e^{ax}\,\operatorname{sen}bx\,dx = \frac{e^{ax}\,(a\operatorname{sen}bx - b\cos bx)}{a^2 + b^2}, \quad \text{(C-4)}$$

$$\int e^{ax}\,\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}\,(a\cos bx + b\operatorname{sen}bx)}{a^2 + b^2}. \quad \text{(C-5)}$$

A P Ê N D I C E D

CONSTANTE DE ACOPLAMENTO

A constante de acoplamento é dada por,

$$g_{j\ell\lambda\mu} = - \left(\frac{e}{mh}\right)\left(\frac{2\pi h}{\omega_\lambda}\right)^{1/2} \int d^3x \; \phi^+_{j\mu}(x)\vec{u}_{\lambda\alpha}(x).\vec{p}\phi_{\ell_\mu}(x). \qquad \text{(D-1)}$$

Na aproximação de dipolo, os ϕ's representam funções de onda dos elétrons que estão localizados num ponto x_o, ao redor do núcleo, o qual está na origem; a onda plana $\vec{u}_\lambda(x)$ associada ao campo eletromagnético externo tem um vetor de onda, $\vec{k}_\lambda$, muito maior que as dimensões do sistema atômico, no caso $\vec{x}_o$, e, por isso varia muito pouco dentro do volume de integração de interesse. Observamos que esta integral se estende sobre a distribuição de cargas, no caso o volume atômico da ordem de x_o^3 . Assim podemos considerar $\vec{u}_\lambda(x)$ constante nesta região:

$$\vec{u}_\lambda(x) \sim \vec{u}_\lambda(x_o), \qquad \text{(D-2)}$$

e da Eq. (D-1), resulta

$$g_{j\ell\lambda\mu} = - \left(\frac{e}{mh}\right)\left(\frac{2\pi h}{\omega_\lambda}\right)^{1/2} \vec{u}_\lambda(x_o) \int d^3x \; \phi^+_{j\mu}(x)\vec{p}\;\phi_{\ell_\mu}(x). \qquad \text{(D-3)}$$

Para calcular o elemento de matriz da equação acima, fazemos uso da equação de movimento de Heisenberg:

$$\vec{p} = m\dot{\vec{x}} = \frac{im}{\hbar}\,[\hat{H},\vec{x}] = \frac{im}{\hbar}\,(\hat{H}\vec{x} - \vec{x}\hat{H}), \qquad \text{(D-4)}$$

a qual é escrita como,

$$\langle j|\vec{p}|\ell\rangle = im\nu_{j\ell}\ \langle j|\vec{x}|\ell\rangle\ , \qquad \text{(D-5)}$$

onde

$$\nu_{j\ell} = \frac{E_j - E_\ell}{h}\ . \qquad \text{(D-6)}$$

Substituindo a Eq. (D-5) na Eq. (D-3), obtemos

$$g_{j\ell\lambda\mu} = -\frac{i}{h}\left(\frac{2\pi h}{\omega_\lambda}\right)^{1/2} \vec{u}_\lambda(x_o)\,\nu_{j\ell}\,\vec{p}_{j\ell\mu}\ , \qquad \text{(D-7)}$$

onde o momento de dipolo é,

$$\vec{p}_{j\ell} = \langle j|e\vec{x}|\ell\rangle\ . \qquad \text{(D-8)}$$

Os vetores $\vec{u}_{\lambda\alpha}(x)$, que representam ondas planas, são escritas como,

$$\vec{u}_{\lambda\alpha}(\vec{r}_\mu) = \frac{\hat{\varepsilon}_{\lambda\alpha}}{L^{3/2}}\, e^{i\vec{k}_\lambda\cdot\vec{r}_\mu}\ ,\ \vec{r}_\mu \sim \vec{x}_o\ , \qquad \text{(D-9)}$$

onde $\vec{x}_o$ é a posição na qual medimos o vetor de campo $\vec{A}(\vec{x}_o,t)$.

As seguintes relações valem para os fótons,

$$C = \lambda\nu\ ,\quad \omega = 2\pi\nu\ = \frac{2\pi C}{\lambda} = k_\lambda C\ . \qquad \text{(D-10)}$$

Substituimos as Eqs. (D-9) e (D-10) na Eq. (D-7):

$$g_{j\ell\lambda\mu} = - \left(\frac{i\nu_{j\ell}}{hc}\right)\left(\frac{2\pi hc}{L^3}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{k_\lambda}}\, \hat{\varepsilon}_{\lambda\alpha}\cdot\vec{p}_{j\ell\mu} e^{i\vec{k}_\lambda\cdot\vec{r}_\mu} \quad . \tag{D-11}$$

Nas Eqs. (2-21) e (D-3), quando fizemos a aproximação de dipolo, o vetor posição $\vec{x}_o$ tem a origem no núcleo atômico e consideramos um sistema de referência (Fig. 8), no qual,

$$\vec{R}_\mu = \vec{r}_\mu + \vec{x}_o \quad , \tag{D-12}$$

onde $\vec{r}_\mu$ é o vetor posição do núcleo atômico, $\vec{x}_o$ é o vetor posição do elétron em relação ao núcleo e $\vec{R}_\mu$ é o vetor posição do elétron em relação a origem.

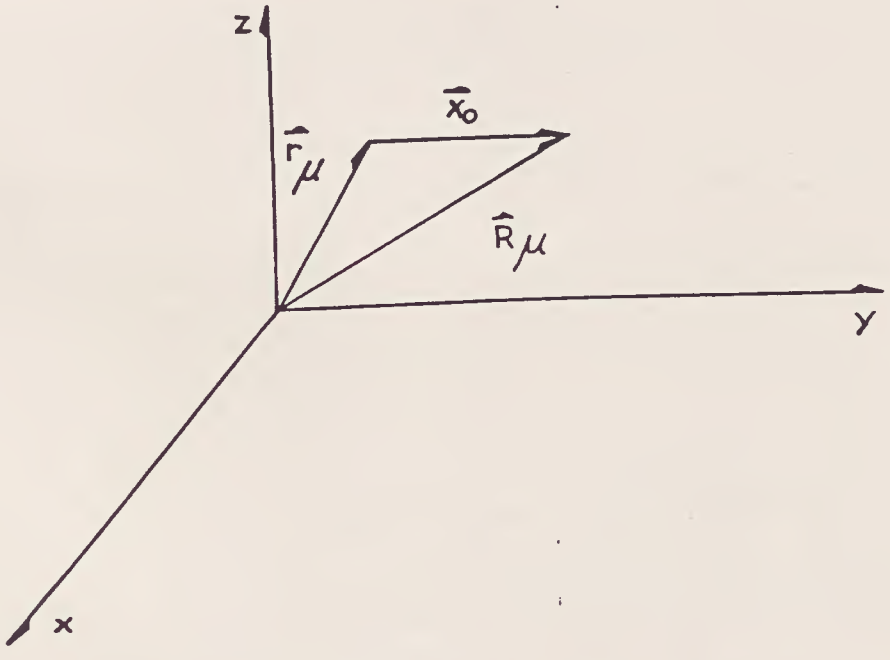


Fig. 8 - Sistema de referência da Eq. (D-3).

Assuminos que,

$$\vec{R}_\mu = \vec{r}_\mu + \vec{x}_o - \vec{r}_\mu \, . \tag{D-13}$$

Como estamos tratando com N átomos idênticos, pela Eq. (D-11), supomos que,

$$g_{21\lambda j} = - g_{12\lambda i} \quad , \tag{D-14}$$

onde

$$\vec{p}_{12i} = \vec{p}_{21j} \cdot \tag{D-15}$$

A P Ê N D I C E E

CÁLCULO DO NÚCLEO DA EQUAÇÃO MASTER

A fim de simplificar os cálculos escolhemos conjuntos $\{u_i\}$ e $\{v_i\}$, e comparamos os termos da expressão:

$$V = \gamma_{ij}\, u_i\, v_j \ , \tag{E-1}$$

com o Hamiltoniano de interação, onde os índices contraidos estão somados. Por conveniência fazemos a escolha:

$$\{u_i\} = \{S^z, S^+, S^-\} = \{u_1, u_2, u_3\} \ , \tag{E-2}$$

onde u_i pertence ao sistema atômico, e

$$\{v_i\} = \{a, a^+\} = \{0,\ v_2,\ v_3\} \ , \tag{E-3}$$

com v_i pertencendo ao reservoir. Então, com esta escolha, obtemos

$$H_{int} = \sum_{ij} \gamma_{ij}\, u_i\, v_j \ , \tag{E-4}$$

onde $2 < i,j < 3$, e desta forma reproduzimos a Eq. (2-48).

Tirando o traço no resevoir do núcleo da Equação Master, Eq. (2-65), resulta

$$\mathrm{Tr}_R\, Q(t,t') = \gamma_{ij}\gamma_{\alpha\beta}\{\tilde{u}_i(t)\tilde{u}_\alpha(t')\mathrm{Tr}_R[\tilde{v}_j(t-t')v_\beta\ \rho_R(0)]\tilde{\rho}_s(t') -$$

$$- \tilde{u}_\alpha(t')\ \mathrm{Tr}_R[\tilde{v}_j(t-t')v_\beta\ \rho_R(0)]\tilde{\rho}_s(t')\tilde{u}_i(t) -$$

$$- \tilde{u}_i(t)\ \mathrm{Tr}_R[v_\beta\tilde{v}_j(t-t')\rho_R(0)]\tilde{\rho}_s(t')\tilde{u}_\alpha(t') +$$

$$+ \tilde{\rho}_s(t')\tilde{u}_\alpha(t')\ \mathrm{Tr}_R[v_\beta\tilde{v}_j(t-t')\rho_R(0)]\tilde{u}_i(t)\}\ , \qquad \text{(E-5)}$$

com

$$\tilde{u}_i(t') = e^{iL_s t'}\ u_i\ , \qquad \text{(E-6)}$$

$$\tilde{v}_j(t-t') = e^{-i(t-t')L_R}\ v_j\ . \qquad \text{(E-7)}$$

Definimos,

$$\xi_{j\beta}(t-t') = \mathrm{Tr}_R[\tilde{v}_j(t-t')v_\beta\rho_R(0)]\ , \qquad \text{(E-8)}$$

$$\zeta_{\beta j}(t-t') = \mathrm{Tr}_R[v_\beta\ \tilde{v}_j(t-t')\ \rho_R(0)]\ . \qquad \text{(E-9)}$$

Substituimos as Eqs. (E-8) e (E-9) na Eq. (E-5):

$$\mathrm{Tr}_R\, Q(t,t') = \gamma_{ij}\gamma_{\alpha\beta}\ \{[\tilde{u}_i(t),\ \tilde{u}_\alpha(t')\tilde{\rho}_s(t')]\xi_j\ (t-t') -$$

$$- [\tilde{u}_i(t),\ \tilde{\rho}_s(t')\ \tilde{u}_\alpha(t')]\zeta_{\beta j}(t-t')\}\ . \qquad \text{(E-10)}$$

Vamos calcular o primeiro termo do lado direito da equação acima, fazendo a soma nos índices i,j,α,β de 2 a 3:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_R\, Q_I(t-t') = {} & \gamma_{22}\gamma_{22}\left[\tilde{u}_2(t),\ \tilde{u}_2(t')\tilde{\rho}_s(t')\right]\xi_{22}(t-t') + \\
& + \gamma_{32}\gamma_{22}\left[\tilde{u}_3(t),\ \tilde{u}_2(t')\tilde{\rho}_s(t')\right]\xi_{22}(t-t') + \\
& + \gamma_{23}\gamma_{22}\left[\tilde{u}_2(t),\ \tilde{u}_2(t')\tilde{\rho}_s(t')\right]\xi_{32}(t-t') + \\
& + \gamma_{33}\gamma_{22}\left[\tilde{u}_3(t),\ \tilde{u}_2(t')\tilde{\rho}_s(t')\right]\xi_{32}(t-t') + \\
& + \gamma_{22}\gamma_{32}\left[\tilde{u}_2(t),\ \tilde{u}_3(t')\tilde{\rho}_s(t')\right]\xi_{22}(t-t') + \\
& + \gamma_{32}\gamma_{32}\left[\tilde{u}_3(t),\ \tilde{u}_3(t')\tilde{\rho}_s(t')\right]\xi_{22}(t-t') + \\
& + \gamma_{23}\gamma_{32}\left[\tilde{u}_2(t),\ \tilde{u}_3(t')\tilde{\rho}_s(t')\right]\xi_{32}(t-t') + \\
& + \gamma_{33}\gamma_{32}\left[\tilde{u}_3(t),\ \tilde{u}_3(t')\tilde{\rho}_s(t')\right]\xi_{32}(t-t') + \\
& + \gamma_{22}\gamma_{23}\left[\tilde{u}_2(t),\ \tilde{u}_2(t')\tilde{\rho}_s(t')\right]\xi_{23}(t-t') + \\
& + \gamma_{32}\gamma_{23}\left[\tilde{u}_3(t),\ \tilde{u}_2(t')\tilde{\rho}_s(t')\right]\xi_{23}(t-t') + \\
& + \gamma_{23}\gamma_{23}\left[\tilde{u}_2(t),\ \tilde{u}_2(t')\tilde{\rho}_s(t')\right]\xi_{33}(t-t') + \\
& + \gamma_{33}\gamma_{23}\left[\tilde{u}_3(t),\ \tilde{u}_2(t')\tilde{\rho}_s(t')\right]\xi_{33}(t-t') + \\
& + \gamma_{22}\gamma_{33}\left[\tilde{u}_2(t),\ \tilde{u}_3(t')\tilde{\rho}_s(t')\right]\xi_{23}(t-t') + \\
& + \gamma_{32}\gamma_{33}\left[\tilde{u}_3(t),\ \tilde{u}_3(t')\tilde{\rho}_s(t')\right]\xi_{23}(t-t') + \\
& + \gamma_{23}\gamma_{33}\left[\tilde{u}_2(t),\ \tilde{u}_3(t')\tilde{\rho}_s(t')\right]\xi_{33}(t-t') +
\end{aligned}
$$

$$+ \gamma_{33}\gamma_{33}[\tilde{u}_3(t),\ \tilde{u}_3(t')\tilde{\rho}_s(t')]\xi_{33}(t-t). \qquad \text{(E-11)}$$

Pelas Eqs. (E-2) e (E-3), a Eq. (E-4) resulta,

$$H_{int} = \gamma_{22}\, aS^+ + \gamma_{23}\, a^+S^+ + \gamma_{32}\, aS^- + \gamma_{33}a^+S^-, \qquad \text{(E-12)}$$

e comparando a equação acima com a Eq. (2-48) e usando a Eq. (D-14) do Apêndice D, obtemos

$$\gamma_{22} = \gamma_{23} = g_{21\lambda j}\ , \qquad \text{(E-13)}$$

$$\gamma_{33} = \gamma_{32} = g_{12\lambda j} = -\, g_{21\lambda i}\ , \qquad \text{(E-14)}$$

então,

$$\gamma_{22}\gamma_{22} = \gamma_{23}\gamma_{23} = \gamma_{33}\gamma_{33} = \gamma_{32}\gamma_{32} = \gamma_{22}\gamma_{23} = \gamma_{33}\gamma_{32} =$$

$$= g_{21\lambda j}\, g_{21\lambda j'} = g_{21\lambda i}\, g_{21\lambda i'}\ , \qquad \text{(E-15)}$$

$$\gamma_{22}\gamma_{33} = \gamma_{22}\gamma_{32} = \gamma_{23}\gamma_{33} = \gamma_{23}\gamma_{32} = g_{21\lambda j}\, g_{21\lambda i}. \qquad \text{(E-16)}$$

Pela Eq. (E-8), e usando a Eq. (E-3), resulta

$$\xi_{22}(t-t') = Tr_R[\tilde{v}_2(t-t')v_2\ \rho_R(0)] =$$

$$= Tr_R[\tilde{a}(t-t')a\rho_R(0)] = 0\ , \qquad \text{(E-17)}$$

$$\xi_{33}(t-t') = Tr_R[\tilde{v}_3(t-t')v_3\ \rho_R(0)] =$$

$$= Tr_R[\tilde{a}^+(t-t')a^+\rho_R(0)] = 0, \qquad \text{(E-18)}$$

com a hipótese de trabalho,

$$\rho_R(0) = \prod_q |0_q><0_q| = |\{0\}><\{0\}| \ , \qquad \text{(E-19)}$$

e definimos o vácuo como,

$$a|0> = 0. \qquad \text{(E-20)}$$

Continuando,

$$\xi_{23}(t-t') = Tr_R[\tilde{v}_2(t-t')v_3\ \rho_R(0)] =$$

$$= Tr_R[\tilde{a}_\lambda(t-t')\ a^+_{\lambda'}\ \rho_R(0)] =$$

$$= \sum_{n_\lambda, n_\lambda,} \prod_{pq} <n_p|[\tilde{a}_\lambda(t-t')a^+_{\lambda'}|0_q><0_q|n_p> =$$

$$= e^{-i(t-t')\omega_\lambda}\delta_{\lambda\lambda'} \ , \qquad \text{(E-21)}$$

$$\xi_{32}(t-t') = Tr_R[\tilde{v}_3(t-t')v_2\ \rho_R(0)] =$$

$$= Tr_R[\tilde{a}^+_\lambda(t-t')a_{\lambda'},\rho_R(0)] =$$

$$= \sum_{n_\lambda, n_\lambda,} \prod_{pq} <n_p|\tilde{a}^+_\lambda(t-t')a_{\lambda'},|0_q><0_q|n_p> = 0 \ . \qquad \text{(E-22)}$$

Das relações de comutação vistas no Capítulo 1,

$$[S^+, S^-] = 2S^z \ , \qquad \text{(1-7)}$$

$$[S^z, S^{\pm}] = \pm S^{\pm} \ , \qquad (1\text{-}8)$$

e definindo,

$$g_{21\lambda\mu}\, g_{21\lambda\mu'} = \gamma_{\lambda\mu\mu'} \ , \qquad (E\text{-}23)$$

com o uso das Eqs. (E-2), (E-15) até (E-18), (E-21) e (E-22), a Eq. (E-11) resulta finalmente,

$$\begin{aligned} Tr_R\, Q_I(t-t') = \gamma_{\lambda\mu\mu}, \{ & S^+_\mu, (t')[S^+_\mu(t), \tilde{\rho}_s(t')] - \\ & - [\tilde{S}^-_\mu(t), \tilde{S}^+_\mu, (t')\tilde{\rho}_s(t')] - [\tilde{S}^+_\mu(t), \tilde{S}^-_\mu, (t')\tilde{\rho}_s(t')] + \\ & + \tilde{S}^-_\mu, (t')[\tilde{S}^-_\mu(t), \tilde{\rho}_s(t')]\} e^{-i(t-t')\omega_\lambda} \delta_{\lambda\lambda'}. \end{aligned} \qquad (E\text{-}24)$$

Analogamente, ao cálculo das Eqs. (E-17), (E-18), (E-21) e (E-22), e fazendo uso da Eq. (E-9), obtemos

$$\zeta_{22}(t-t') = \zeta_{33}(t-t') = \zeta_{32}(t-t') = 0 \ , \qquad (E\text{-}25)$$

$$\zeta_{23}(t-t') = \xi^*_{23}(t-t') = e^{i(t-t')\omega_\lambda} \delta_{\lambda\lambda'} \ , \qquad (E\text{-}26)$$

com isto, o segundo termo do lado direito da Eq. (E-10), resulta

$$\begin{aligned} Tr_R\, Q_{II}(t-t') = \gamma_{\lambda\mu\mu}, \{ & [S^+_\mu(t), \tilde{\rho}_s(t')]\tilde{S}^+_\mu(t') - \\ & - [\tilde{S}^-_\mu(t), \tilde{\rho}_s(t')\tilde{S}^+_\mu(t')] - [\tilde{S}^+_\mu(t), \tilde{\rho}_s(t')\tilde{S}^-_\mu, (t')] + \end{aligned}$$

$$+ [\tilde{S}_{\mu}^{-}(t), \tilde{\rho}_{s}(t')]\tilde{S}_{\mu}^{-},(t')\}e^{i(t-t')\omega_{\lambda}}\delta_{\lambda\lambda'}. \quad \text{(E-27)}$$

REFERÊNCIAS

[1]. M. Gross e S. Horoche, Phys. Reports, 93, 301 (1982).

[2]. H.M. Nussenzveig, Introduction to Quantum Optics, Gordon and Breach Science Publishers (1973).

[3]. R.H. Dicke, Phys. Rev., vol. 93, 99 (1954).

[4]. S. Flugge , H. Haken, Handbuch der Physik, Springer-Verlag (1970).

[5]. W. Pier, Physica, 57, 565 (1972).

[6]. R. Zwanzig, J. Stot. Phys. 9, 3, 215 (1973).

[7]. G.S. Agarwal, Third Rochester Conference on Coherence and Quantum Optics, editado por L. Mandel e E. Wolf , Coherence and Quantum Optics (1973).

[8]. G.S. Agarwal, Phys. Rev. A4, 1791 (1971).

[9]. G.S. Argawal, Phys. Rev. A3, 1783 (1971).

[10]. G.S. Agarwal, Phys. Rev. A2, 2038 (1970).

[11]. G.S. Agarwal, Phys. Rev. A7, 1195 (1973).

[12]. G.S. Agarwal, Phys. Rev. 178, 2025 (1969).

[13]. J.J. Sakurai, Advanced Quantum Mechanics, Addison-Wesley (1967).

[14]. W.H. Louisell, Quantum Statistical Properties od Radiation , John Wiley & Sons (1973).

[15]. M. Lax, Phys. Rev., 172, 350 (1968).

[16]. R.J. Glauber, Phys. Rev., 131, 2766 (1963).

[17]. R.L. Stratonorich, Topics in the Theory of Randon , vol. I (1963).

[18]. A.A.S. Brito e W.F. Wreszinski, Helv. Phys. Acta, 50 , 373 (1977).

[19]. A.V. Andreev, V.I. Emel'yanov e Yu.A.Il'inskil, Sov. Phys. Usp., 23(8), (1980).

[20]. N. Skribanowitz, F.P. Herman, J.C. Mc Gillivray e M.S. Feld, Phys. Rev. Lett. 30, 309 (1973).

[21]. R. Zwanzig, Physica, 30, 1109 (1964).

[22]. F.W. Communings e J.R. Johnston, Phys. Rev. 151, 105(1966).

[23]. P. Carruthers e K.S. Dy, Phys. Rev. 147, 214 (1966).

[24]. D. Brink e A. Weiguny, Nucl. Phys. 120, 59 (1968).

[25]. C. Leonardi, F. Persico e G. Vetri, Nuovo Cimento, 9, 1 (1986).

[26]. F.T. Arecchi, E. Courtens, R. Gilmore e H. Thomas, 191, Coherence and Quantum Optics, editado por L. Mandel e E. Wolf (1973).

[27]. K.G. Whitney, 767, Coherence and Quantum Optics, editado por L. Mandel e E. Wolf (1973).

[28]. C. Cohen-Tannoudji, Phys. Scripta, vol. T12, 19 (1986).

[29]. A.E. Gonçalves, Tese de Mestrado, IFT.TM-05 (1987).